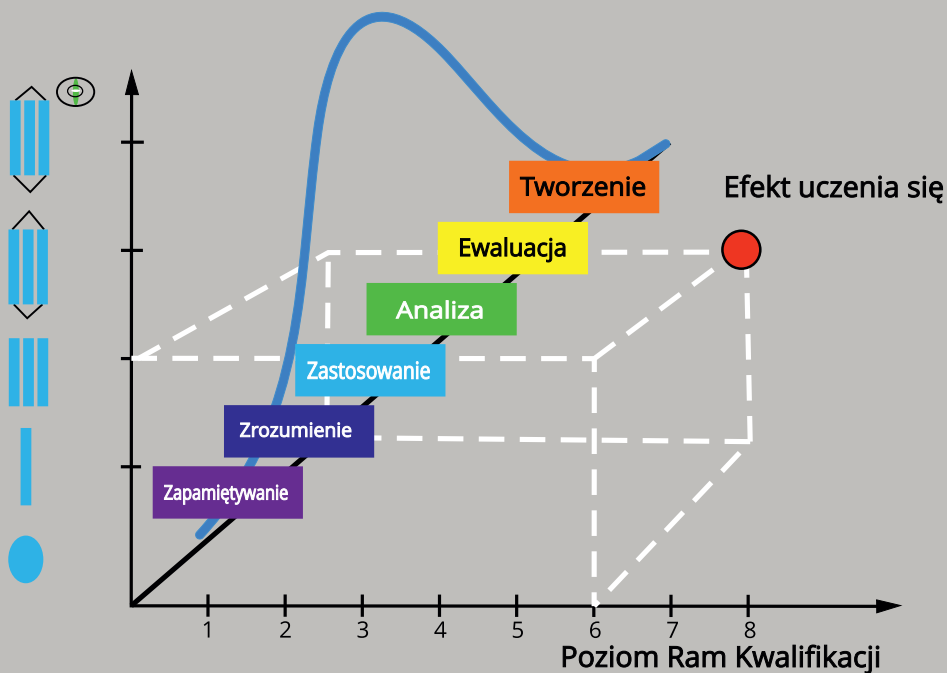


Jacek Stańdo

Trajektorie i walidacja efektów uczenia się w kontekście Polskiej Ramy Kwalifikacji



Jacek Stańdo

Trajektorie i walidacja
efektów uczenia się w kontekście
Polskiej Ramy Kwalifikacji

Monografie Politechniki Łódzkiej
Łódź 2019

Recenzenci:
dr hab. Marek Galewski, prof. PŁ
dr hab. inż. Przemysław Ignaciuk, prof. PŁ
prof. dr hab. Wacław Zawadowski

© Copyright by Politechnika Łódzka 2019

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel. 42 631-29-52, 42 631-20-87
fax 42 631-25-38
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwo.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-993-0

DOI: 10.34658/9788372839930
<http://doi.org/10.34658/9788372839930>

Nakład 50 egz. Ark. druk. 18,0. Papier offset. 80 g 70 x 100
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11
Nr 2300

SPIS TREŚCI

Wprowadzenie.....	5
1. Europejskie Ramy Kwalifikacji. Proces boloński	8
2. Cele i efekty uczenia się	20
2.1. Przegląd definicji i klasyfikacji celów kształcenia.....	20
2.2. Efekty uczenia się.....	25
2.3. Przegląd taksonomii celów kształcenia	26
2.3.1. Taksonomia Blooma.....	27
2.3.2. Taksonomia Bolesława Niemierki.....	31
2.3.3. Taksonomia SOLO	32
2.3.4. Taksonomia Feisel-Schmitz	36
2.4. Kompetencje społeczne	37
2.4.1. Kompetencje społeczne dla poziomu szóstego w Polskiej Ramie Kwalifikacji.....	37
2.4.2. Kompetencje społeczne oczekiwane przez pracodawców zidentyfikowane w ramach badań Bilans Kapitału Ludzkiego	40
2.4.3. Rozwój kompetencji społecznych na zajęciach z matematyki na studiach inżynierskich I stopnia.....	45
2.4.4. Kompleksowe rozwiązywanie problemów.....	47
2.4.5. Myślenie krytyczne	49
2.4.6. Innowacje	51
2.4.7. Myślenie komputacyjne.....	54
2.4.8. Przykłady sytuacji dydaktycznych pozwalających na rozwój kompetencji społecznych w ramach kursu matematyki	60
2.4.9. Przykłady w poszczególnych obszarach kompetencji społecznych	61
2.4.10. Podsumowanie.....	72
3. Nowy model taksonomii 4D.....	74
3.1. Trajektoria efektu uczenia się.....	74
3.2. Analiza krytyczna taksonomii: Blooma (i jego modyfikacji), SOLO	83
3.3. Model 4D.....	96
3.4. Wskaźniki statystyczne	99
3.4.1. Podstawowe wskaźniki statystyczne	99
3.4.2. Klasyczna i probabilistyczna teoria testu	101
3.4.3. Model Rascha	101
3.5. Walidacja efektów uczenia się	106
3.5.1. Analiza krytyczna matury z matematyki w kontekście walidacji efektów uczenia się	108

3.5.2.	Test, zadania testowe i ich klasyfikacja.....	119
3.5.3.	Zadania generatorowe	132
3.5.4.	Zadania sterowane strumieniem danych rzeczywistych....	142
3.5.5.	Strategie oceniania zadań	143
3.5.6.	Typologia walidacji efektów uczenia się.....	147
3.6.	Typologia efektów uczenia się	152
4.	Badania część pierwsza	157
4.1.	Wprowadzenie.....	157
4.2.	Badanie I	158
4.3.	Badanie II	161
4.4.	Badanie III.....	168
4.5.	Badanie IV.....	174
4.6.	Badanie V	177
4.7.	Badanie VI.....	179
4.8.	Badanie VII	190
4.9.	Badanie IX.....	195
4.10.	Badanie XI.....	203
4.11.	Badanie X.....	206
4.12.	Badanie XI.....	208
4.13.	Efekty uczenia się a płeć	211
4.14.	Efekty uczenia się a warunki mieszkaniowe uczących się.....	218
4.15.	Efekty uczenia się, problem korepetycji	219
5.	Badania część druga – wprowadzenie systemu walidacji efektów uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji	229
5.1.	Kształcenie studentów studiów inżynierskich.....	229
5.2.	Opis badania.....	231
5.3.	System walidacji efektów uczenia się	233
5.4.	Badania część IIa.....	246
5.5.	Badanie wdrożenia	248
5.6.	Badanie część IIb	249
5.7.	Badania część IIc.....	263
5.8.	Badania część IId	267
6.	Perspektywy rozwoju	276
	LITERATURA.....	278

Wprowadzenie

Wybitny współczesny matematyk Ivar Ekeland w swojej książce „Chaos” postuluje konieczność zmiany myślenia dotyczącego nauczania w kontekście upowszechnienia komputerów i automatyzacji pewnych czynności. O ile na przykład 100 lat temu precyzyjne obliczenia związane z wyznaczaniem pierwiastków równania kwadratowego były niezbędną umiejętnością, o tyle obecnie warto wiedzieć, ile dane równanie ma rozwiązań, czy są one dodatnie i jak je wyznaczyć, gdy są niewymierne. Ponadto można pytać, jak zmienia się pierwiastki równania, gdy nieco zmienimy jego parametry. Takich pytań dawniej nie było sensu stawiać – pozostały by one bez odpowiedzi lub odpowiedź wymagałaby benedyktyńskiej pracy. Obecnie można ją uzyskać przysłowiowym jednym kliknięciem.

Informatyczna rewolucja, której od kilkunastu lat jesteśmy świadkami, nie ominęła także edukacji. Powszechna dostępność komputerów oraz internetu spowodowała błyskawiczny rozwój nowych metod nauczania i oceniania. E-learning, czyli komputerowo wspomagane zdalne nauczanie, zdobywa coraz większą popularność.

Inny matematyk, Ian Stewart, w książce „Czy Bóg gra w kości” stawia hipotezę, że tylko kontestowanie zastanych paradygmatów prowadzi do autentycznego przełomu. Może się on okazać pozorny, ale podążanie utartymi ścieżkami nie wnosi nic nowego do nauki.

„Matematyka jest niekwestionowanym fenomenem ogólnowsiatowej kultury, a w niej odbija się historia rozwoju ludzkiej myśli, fenomenalnych osiągnięć człowieka”¹.

„W chwili, gdy użyto pierwszego sprawdzianu i wystawiono pierwszą ocenę, rozpoczęły się spory, jak kontrolować i jak oceniać uczniów (...)”².

W mojej ocenie jeszcze większe spory wywołują opinie i różnice o uzyskaniu świadectwa ukończenia szkoły, świadectwa maturalnego, tytułu inżyniera czy kwalifikacji wykonywania zawodu lekarza lub farmaceuty.

Czy wprowadzenie Europejskich Ram Kwalifikacji rozwiązuje te spory?

10 czerwca 2016 roku Komisja Europejska przyjęła kompleksowy europejski program na rzecz umiejętności. Głównym celem było zwiększenie zatrudnienia i konkurencyjności na rynku pracy.

„Z badań wynika, że 70 mln Europejczyków nie posiada wystarczających umiejętności czytania i pisanie, a jeszcze większa ich liczba ma bardzo słabe

¹ Pardała A., *Praktyka kształtowania matematycznej twórczości uczniów*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis | Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia, Vol. 2, 2009, s. 161.

² Arends R.I., *Uczymy się nauczać*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1998.

umiejętności rozumowania matematycznego i umiejętności cyfrowe. Naraża ich to na ryzyko bezrobocia, ubóstwa i wykluczenia społecznego”³. Wychodząc naprzeciw temu problemowi, Komisja Europejska zainicjowała dziesięć działań, między innymi:

- Gwarancja umiejętności, której celem jest pomoc nisko wykwalifikowanym osobom dorosłym w zdobyciu minimalnego poziomu umiejętności czytania i pisanie, rozumowania matematycznego i umiejętności cyfrowych, a następnie w podjęciu nauki na poziomie średnim II stopnia.
- **Przegląd europejskich ram kwalifikacji**, służący lepszemu zrozumieniu kwalifikacji i większemu wykorzystaniu istniejących umiejętności na europejskim rynku pracy⁴.

Przedstawione propozycje, które opisałem w tej książce nie mają na celu rozwiązania sporów, ale powinny przybliżyć nas do wspólnego stanowiska. Prowadzone od 15 lat badania dotyczyły poszukiwania, rozpoznawania i analizowania efektów uczenia się. Badania umożliwiły zbudowanie i wdrożenie systemu efektów uczenia się na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji.

Książka składa się z sześciu rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawiono Europejskie Ramy Kwalifikacji i Proces Boloński, odniesiono się do obowiązującego ustawodawstwa zarówno w Polsce, jak i w Europie. W rozdziale drugim zostały przedstawione cele i efekty uczenia się. Opisano różne taksonomie celów. Szeroko zaprezentowane zostały kompetencje społeczne, które wciąż stanowią wyzwanie dla twórców programów nauczania, jak i uczących. Zaproponowano nowatorski model podejścia do realizacji kompetencji społecznych w procesie nauczania. W rozdziale trzecim został zaprezentowany nowy model 4D taksonomii celów. Powstał on na podstawie pogłębionej analizy literatury i analizy krytycznej. Zdefiniowano nowe pojęcie: trajektoria efektów uczenia się. W konsekwencji zaproponowano nowe definicje:

- walidacja dyskretna,
- walidacja klasyczna,
- walidacja probabilistyczna.

Wprowadzono nowe typologie efektów uczenia się. Oprócz zadań powszechnie wykorzystywanych w e-testach zdefiniowano pojęcie zadania generatorowego. Zadania tego typu znalazły zastosowanie w stworzonym systemie walidacji efektów uczenia się. Przedstawiono również ideę zadania sterowanego strumieniem danych rzeczywistych oraz zaproponowano jego definicję. W rozdziale czwartym zaprezentowano wieloletnie badania, których celem były poszukiwania efektów uczenia się na różnych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji. Ponadto zostały przedstawione badania, których celem było odszukanie związków czynników wpływających na walidację efektów uczenia

³ Komisja Europejska, komunikat prasowy *Dziesięć działań, które pomogą Europejczykom zdobyć lepsze umiejętności*, Bruksela, 10 czerwca 2016 r. [dostęp: http://europa.eu/rapid/press-release_IP-16-2039_pl.htm].

⁴ Tamże.

się. W rozdziale piątym zaprezentowano zaimplementowany system walidacji efektów uczenia się na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji. Przedstawiono badania przeprowadzone wśród studentów studiów inżynierskich w Politechnice Łódzkiej. Dokonano analizy statystycznej otrzymanych wyników. W rozdziale szóstym przedstawiono perspektywy rozwoju systemu walidacji efektów uczenia się oraz kierunek kolejnych badań.

Problem główny (PG)

W jaki sposób należy zbudować i jak walidować obligatoryjne efekty uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji?

Problemy szczegółowe PS

- PS_1 – Jak zbudować model efektu uczenia się?
- PS_2 – W jaki sposób walidować efekty uczenia się?
- PS_3 – W jakim stopniu forma przeprowadzenia procesu osiągania obligatoryjnych efektów uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji jest akceptowalna przez studentów?
- PS_4 – Które efekty uczenia się przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty?
- PS_5 – W jakim zakresie osiąganie efektów uczenia się jest zróżnicowane ze względu na płeć?
- PS_6 – W jakim zakresie osiąganie efektów uczenia się jest zróżnicowane ze względu na warunki środowiskowe?

Hipotezy badawcze

- Zbudowano i przeprowadzono walidację efektów uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji –(HG).
- Wprowadzono nowy model i trajektorię efektu uczenia się 4D –(HS_1).
- Wprowadzono nowe modele walidacji efektu uczenia się –(HS_2).
- Wprowadzona nowa forma przeprowadzenia procesu osiągania efektów uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji jest akceptowalna przez studentów –(HS_3).
- Zidentyfikowano na podstawie badań efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty –(HS_4).
- Istnieją efekty uczenia się, których osiąganie jest zróżnicowane ze względu na płeć –(HS_5).
- Istnieją efekty uczenia się, których osiąganie jest zróżnicowane ze względu na warunki środowiskowe –(HS_6).

1. Europejskie Ramy Kwalifikacji. Proces boloński

Jednym z impulsów jakościowych i strukturalnych zmian w szkolnictwie wyższym w Polsce było podpisanie w 1999 r. Deklaracji Bolońskiej. Celem opisanych w Deklaracji zmian było utworzenie Europejskiego Obszaru Szkolnictwa Wyższego – EOSW (ang. *European Higher Education Area*). Oznaczało to „wypracowywanie zasad współdziałania i wdrażanie mechanizmów porównywania rozwiązań funkcjonujących w Europie, z uwzględnieniem zróżnicowania i autonomii poszczególnych państw i uczelni”⁵. Drugim kluczowym celem procesu bolońskiego było „podniesienie międzynarodowej konkurencyjności europejskiego szkolnictwa wyższego”⁶.

Główne obszary działań opisane w Deklaracji Bolońskiej⁷ to:

- wprowadzenie systemu przejrzystych i porównywalnych stopni poprzez wdrożenie Suplementu do Dyplomu,
- przyjęcie systemu kształcenia opartego na dwóch/trzech poziomach kształcenia,
- powszechne stosowanie systemu punktów kredytowych (ECTS – *European Credit Transfer System*),
- promocja mobilności studentów, nauczycieli akademickich, naukowców oraz personelu administracyjnego,
- promocja współpracy europejskiej w zakresie podwyższania poziomu jakości szkolnictwa wyższego,
- promocja europejskiego wymiaru szkolnictwa wyższego, szczególnie w zakresie rozwoju zawodowego, mobilności oraz zintegrowanych programów nauczania, szkoleń i badań.

W kolejnych komunikatach z konferencji ministrów ds. szkolnictwa wyższego dokonywano oceny przebiegu procesu bolońskiego i wskazywano kolejne jego aspekty i priorytety, w tym m.in.:

- wdrożenie idei uczenia się przez całe życie (ang. *lifelong learning*), współdziałanie uczelni i studentów w realizacji procesu bolońskiego, propagowanie atrakcyjności Europejskiego Obszaru Szkolnictwa Wyższego poza Europą (Komunikat Praski⁸, 2001),
- zapewnienie jakości kształcenia, przyjęcie systemu opartego zasadniczo na dwóch cyklach kształcenia, promocja mobilności akademickiej, stosowania ECTS jako systemu akumulacji i transferu punktów zaliczeniowych, udział

⁵ Kraśniewski A., *Proces boloński to już 10 lat*, Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji Warszawa 2009, s. 7.

⁶ Chmielecka E., Proces boloński i krajowe ramy kwalifikacji dla szkolnictwa wyższego, *Studia, BAS* Nr 3(35) 2013, ss. 107-134.

⁷ Protokół dostępu: http://ekspercibolonscy.org.pl/ekspercibolonscy.org.pl/sites/ekspercibolonscy.org.pl/files/1999_PL_Bologna_Declaration.pdf [2019, styczeń].

⁸ Protokół dostępu: <http://phavi.portal.umcs.pl/at/attachments/2014/0513/130403-komunikatpraski.pdf> [2019, styczeń].

studentów w realizacji procesu bolońskiego, promocja wymiaru europejskiego w szkolnictwie wyższym, włączenie studiów doktoranckich jako trzeciego etapu cyklu kształcenia w procesie bolońskim, promocja interdyscyplinarności w utrzymywaniu i poprawie jakości szkolnictwa wyższego i w ogólnie pojętym wzmacnianiu konkurencyjności szkolnictwa wyższego, postrzeganie znaczenia badań oraz szkoleń w zakresie badań jako integralnej części szkolnictwa wyższego (Komunikat Berliński⁹, 2003),

- zacieśnianie związków kształcenia i badań naukowych, m.in. przez zintensyfikowanie kształcenia naukowców oraz lepsze wykorzystanie możliwości tkwiących we współpracy uczelni z innymi instytucjami prowadzącymi badania naukowe, zwiększenie dostępności studiów dla kandydatów ze wszystkich grup społecznych, bez względu na ich możliwości finansowe i płeć, usuwanie przeszkód ograniczających mobilność studentów i pracowników, zwiększenie atrakcyjności Europejskiego Obszaru Szkolnictwa Wyższego poza Europą, przyjęcie ramowej struktury kwalifikacji i umiejętności absolwentów w ramach Europejskiego Obszaru Szkolnictwa Wyższego (*Qualification Framework for EHEA*), powszechne wdrożenie Suplementu do Dyplomu (Komunikat z Bergen¹⁰, 2005),
- współdziałanie z pracodawcami i innymi partnerami społecznymi w celu zwiększenia „zatrudnialności” absolwentów wszystkich trzech poziomów studiów, ustanowienie dobrowolnego, samofinansującego się, niezależnego oraz transparentnego Rejestru Komisji Akredytacyjnych, gromadzenie baz danych w zakresie mobilności oraz wymiaru społecznego, działania prowadzące do zwiększenia znaczenia procesu bolońskiego w skali globalnej (Konferencja w Londynie¹¹, 2007),
- dalsze monitorowanie wymiaru społecznego szkolnictwa wyższego, wdrożenie krajowych ram kwalifikacji w kontekście uczenia się przez całe życie, zatrudnialność i współpraca uczelni z rynkiem pracy, umiędzynarodowienie studiów, wzrost mobilności, monitorowanie narzędzi służących do klasyfikowania i porównywania instytucji szkolnictwa wyższego w Europie (klasyfikacje i rankingi szkół wyższych w Europie) (Konferencja w Leuven/Louvain-la-Neuve¹², 2009).

W trakcie kolejnych konferencji ministrów ds. szkolnictwa wyższego dominowała problematyka:

- zapewnienie wysokiej jakości kształcenia,
- zwiększenie zatrudnialności absolwentów szkół wyższych,
- poprawy skali i jakości mobilności, zarówno studentów jak nauczycieli.

⁹ Protokół dostępu: <http://phavi.portal.umcs.pl/at/attachments/2014/0513/130450-komunikatberlinski.pdf> [2019, styczeń].

¹⁰ Protokół dostępu: http://www.procesbolonski.uw.edu.pl/dane/Komunikat_z_Bergen_PL.pdf [2019, styczeń].

¹¹ Protokół dostępu: <https://www.archiwum.nauka.gov.pl/proces-bolonski/proces-bolonski.html> [2019, styczeń].

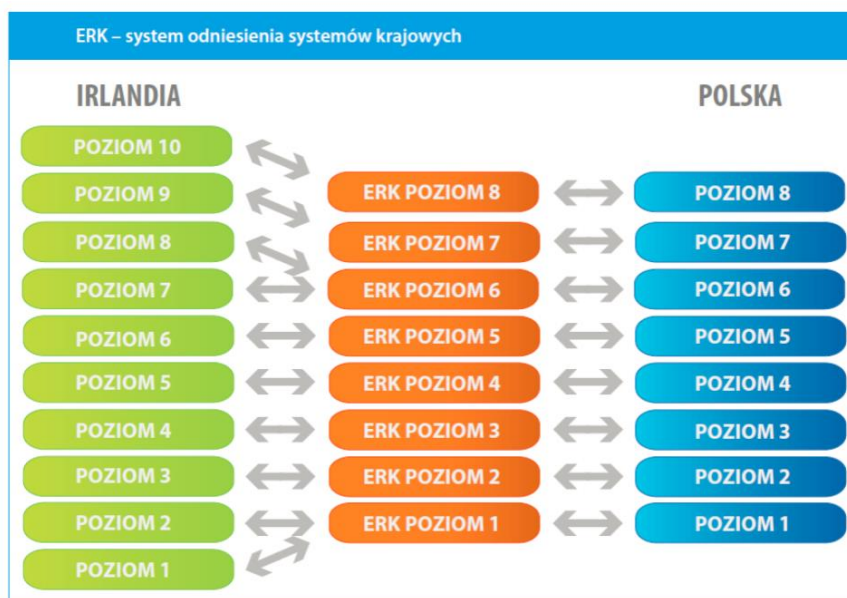
¹² Tamże.

Jednym z ważniejszych działań w ramach tworzenia i rozwoju EOSW było wprowadzenie europejskich (ERK) i krajowych ram kwalifikacji (KRK).

W Zaleceniu Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 23 kwietnia 2008 r. w sprawie ustanowienia europejskich ram kwalifikacji dla uczenia się przez całe życie stwierdzono, że wspólne ramy odniesienia „będą służyć jako instrument przełożenia kwalifikacji i ich poziomów w różnych systemach kwalifikacji i ich poziomach, zarówno w kształceniu ogólnym i wyższym, jak i w kształceniu i szkoleniu zawodowym. Poprawi to przejrzystość, porównywalność i możliwość przenoszenia kwalifikacji obywateli uzyskanych zgodnie z praktykami stosowanymi w poszczególnych państwach członkowskich. Każdy poziom kwalifikacji powinien być zasadniczo osiągalny przez osoby podążające różnymi ścieżkami edukacji i kariery. Europejskie ramy kwalifikacji powinny ponadto umożliwiać międzynarodowym organizacjom sektorowym odnoszenie swoich systemów kwalifikacji do wspólnego europejskiego punktu odniesienia, co ułatwi wskazanie związku między wewnętrznymi kwalifikacjami sektorowymi a krajowymi systemami kwalifikacji. Niniejsze zalecenie przyczynia się zatem do realizacji szerszych celów promowania uczenia się przez całe życie oraz zwiększania możliwości zatrudnienia, mobilności i integracji społecznej pracowników i osób uczących się. Przejrzyste zasady zapewniania jakości oraz wymiana informacji pomogą w jego wdrożeniu, przyczyniając się do budowania wzajemnego zaufania”¹³.

W Europejskiej Ramie Kwalifikacji wyróżniono 8 poziomów. Zgodnie z ideą uczenia się przez całe życie kwalifikacje są opisywane w języku efektów uczenia się. W zaleceniu przyjęto, że poszczególne państwa opracują własne ramy, w których liczba poziomów adekwatna będzie do danego systemu edukacji. Dobrze ilustrują to ramy kwalifikacji Szkocji – 12 poziomów, Holandii – 9 poziomów – czy Irlandii – 10 poziomów. W raporcie referencyjnym opisywane jest, w jaki sposób rama krajowa odnosi się do ERK (Rys. 1.1).

¹³ Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 23 kwietnia 2008 r. w sprawie ustanowienia europejskich ram kwalifikacji dla uczenia się przez całe życie, Dziennik Urzędowy Unii Europejskiej, C 111/1 6.5. 2008.



Rys. 1.1. Europejskie Ramy Kwalifikacji, system odniesienia

Źródło: Protokół dostępu: <http://www.kwalifikacje.gov.pl> [2019, styczeń].

Założono, że „zalecenie¹⁴ przyczynia się do unowocześnienia systemów kształcenia i szkoleń, do powiązania kształcenia i szkolenia z zatrudnieniem oraz do budowania mostów między uczeniem formalnym, pozaformalnym i nieformalnym, a tym samym prowadzi do walidacji efektów uczenia się poprzez praktyczne doświadczenia”. **Idea ram kwalifikacji wskazuje, że nie ma znaczenia, gdzie, kiedy i w jaki sposób uczący się nabył wymaganą wiedzę, umiejętności i kompetencje społeczne.**

Chmielecka¹⁵ w 2013 roku wskazała cztery podstawowe przesłanki opracowywania ram kwalifikacji przez kraje procesu bolońskiego. Były to:

- „rosnąca mobilności obywateli Unii, w tym osób z dyplomem szkoły wyższej,
- umasowienie kształcenia na poziomie wyższym,
- konieczność uczenia się przez całe życie,
- konieczność budowy społeczeństw i gospodarek opartych na wiedzy”.

Polska Rama Kwalifikacji (PRK), podobnie jak Europejska Rama Kwalifikacji (ERK), składa się z ośmiu poziomów. Każdy z nich jest opisywany za pomocą ogólnych stwierdzeń w zakresie:

- wiedzy,

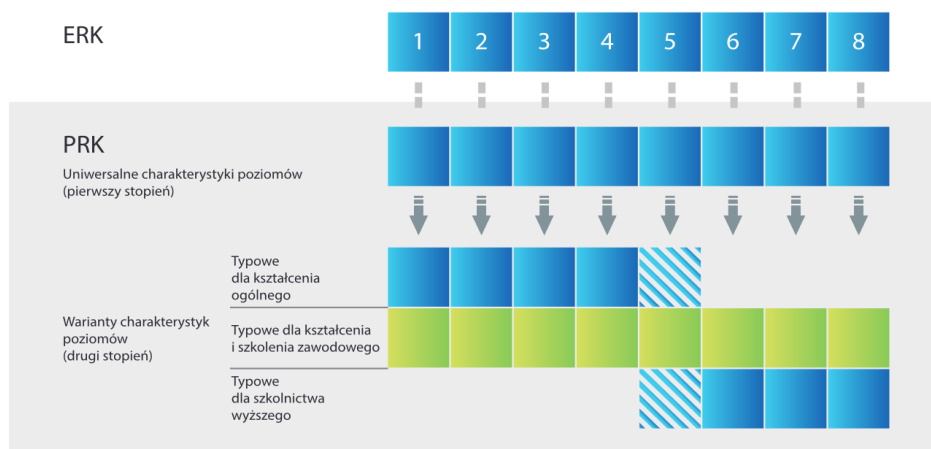
¹⁴ Tamże.

¹⁵ Chmielecka E., *Proces boloński i krajowe ramy kwalifikacji dla szkolnictwa wyższego*, Studia BAS Nr 3(35) 2013, s. 110.

- umiejętności,
- kompetencji społecznych.

Unikatowym¹⁶ rozwiązaniem zastosowanym w Polsce jest wprowadzenie charakterystyk poziomów PRK pierwszego i drugiego stopnia:

- charakterystyk uniwersalnych (pierwszego stopnia), które dotyczą wszystkich rodzajów kwalifikacji,
- charakterystyk drugiego stopnia, typowych dla kwalifikacji uzyskiwanych w ramach:
 - edukacji ogólnej,
 - szkolnictwa wyższego,
 - kształcenia i szkolenia zawodowego (Rys. 1.2).



Rys. 1.2. Schemat Polskiej Ramy Kwalifikacji

Źródło: Sławiński S., Chłoń-Domińczak A., Szymczak A., Ziewiec-Skokowska G., *Polska Rama Kwalifikacji. Poradnik użytkownika*, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2018.

W Polskiej Ramie Kwalifikacji wyróżnia się trzy rodzaje kwalifikacji¹⁷ (Rys. 1.3).

¹⁶ Sławiński S., Chłoń-Domińczak A., Szymczak A., Ziewiec-Skokowska G., *Polska Rama Kwalifikacji. Poradnik użytkownika*, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2018, s. 7.

¹⁷ Raport referencyjny – aktualizacja, *Odniesienie Polskiej Ramy Kwalifikacji do Europejskiej Ramy Kwalifikacji*, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2015, s. 13.



Rys. 1.3. Rodzaje Kwalifikacji

Źródło: Protokół dostępu: <http://www.kwalifikacje.gov.pl> [2019, styczeń].

Polska Rama Kwalifikacji jest elementem Zintegrowanego Systemu Kwalifikacji. Założenia Zintegrowanego Systemu Kwalifikacji opisane zostały w kilku aktach prawnych:

1. Ustawa z dnia 22 grudnia 2015 r. o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji (Dz.U. z 2016 r., poz. 64).
2. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 13 kwietnia 2016 r. w sprawie charakterystyk drugiego stopnia Polskiej Ramy Kwalifikacji typowych dla kwalifikacji o charakterze ogólnym – poziomy 1-4.
3. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 13 kwietnia 2016 r. w sprawie charakterystyk drugiego stopnia Polskiej Ramy Kwalifikacji typowych dla kwalifikacji o charakterze zawodowym – poziomy 1-8.
4. Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej oraz Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 17 czerwca 2016 r. w sprawie charakterystyki drugiego stopnia Polskiej Ramy Kwalifikacji typowej dla kwalifikacji uzyskiwanych po uzyskaniu kwalifikacji pełnej na poziomie 4 – poziom 5.
5. Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 26 września 2016 r. w sprawie charakterystyk drugiego stopnia Polskiej Ramy Kwalifikacji typowych dla kwalifikacji uzyskiwanych w ramach szkolnictwa wyższego po uzyskaniu kwalifikacji pełnej na poziomie 4 – poziomy 6-8.

Charakterystyki poziomów typowe dla kwalifikacji uzyskiwanych w ramach szkolnictwa wyższego zostały określone dla poziomów PRK od 6 do 8. „Różnice pomiędzy poszczególnymi poziomami dotyczą¹⁸:

- w zakresie wiedzy – zakresu i głębi rozumienia: zagadnień ogólnych i wybranych zagadnień szczegółowych właściwych dla danej dyscypliny naukowej; prawnych i ekonomicznych uwarunkowań działań zawodowych typowych dla kwalifikacji odpowiadającej określonemu programowi kształcenia,
- w zakresie umiejętności – sprawności w zakresie: wykorzystywania posiadanej wiedzy do rozwiązywania złożonych i nietypowych problemów oraz innowacyjnego wykonywania zadań; komunikowania się ze zróżnicowanymi kręgami odbiorców i przekazywania wiedzy; przedstawiania, oceniania oraz dyskusowania różnych stanowisk i opinii; planowania własnego uczenia się przez całe życie oraz ukierunkowywania innych w tym zakresie,
- w zakresie kompetencji społecznych – gotowości do: pogłębionej analizy i krytycznej oceny posiadanej wiedzy oraz dorobku uprawianej dyscypliny naukowej; przestrzegania zasad etyki zawodowej i wymagania tego od innych; podtrzymywania i rozwijania etosu środowisk badawczych i twórczych”.

W Polskiej Ramie Kwalifikacji opisane są szczegółowo charakterystyki w zakresie wiedzy, umiejętności i kompetencji społecznych dla każdego poziomu. Przykład¹⁹:

„Charakterystyki szóstego poziomu PRK odzwierciedlają przygotowanie osoby posiadającej kwalifikację tego poziomu do wykorzystania posiadanej wiedzy do formułowania i rozwiązywania złożonych i nietypowych problemów oraz wykonywania zadań w nie w pełni przewidywalnych warunkach, a także do planowania i organizowania pracy zespołu lub małej organizacji, realizujących takie zadania. Wskazują, że osoba ta:

- potrafi dokonać oceny, krytycznej analizy i syntezy informacji pochodzących z właściwie dobranych źródeł,
- potrafi właściwie dobrać oraz zastosować dostępne metody, narzędzia i technologie służące realizacji podejmowanych zadań, a także dokonać ich prostej adaptacji,
- potrafi uwzględnić w prowadzonej działalności różnorodne złożone uwarunkowania (ekonomiczne, prawne, społeczne i inne) oraz dokonać analizy i oceny prowadzonej działalności w kontekście tych uwarunkowań,
- potrafi wykorzystać umiejętność komunikowania się z użyciem specjalistycznej terminologii, przedstawiania, oceniania oraz dyskusowania

¹⁸ Tamże.

¹⁹ Sławiński S., Chłoń-Domińczak A., Szymczak A., Ziewiec-Skokowska G., *Polska Rama Kwalifikacji. Poradnik użytkownika*, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2018, s. 31.

- różnych opinii i stanowisk do utrzymywania właściwych relacji w związku z prowadzoną działalnością,
- potrafi samodzielnie planować własne uczenie się przez całe życie,
 - jest gotowa odpowiedzialnie pełnić funkcje zawodowe, kultywować i upowszechniać w prowadzonej działalności wzory właściwego postępowania, uczestniczyć w promowaniu kultury jakościowej, kultury współpracy i zasad etyki zawodowej,
 - jest gotowa inicjować działania na rzecz interesu publicznego”.

Uszczegółowieniem Polskiej Ramy Kwalifikacji są sektorowe ramy kwalifikacji. W Raporcie referencyjnym²⁰ opisano kluczowe cele sektorowych ram kwalifikacji. Są to:

- „identyfikacja kluczowych obszarów kompetencji w danym sektorze, które powinny stanowić podstawę dla kwalifikacji,
- ułatwienie tworzenia kwalifikacji adekwatnych do potrzeb pracodawców w danym sektorze,
- ułatwienie formułowania programów kształcenia i szkolenia adekwatnych do potrzeb rynku pracy,
- ułatwienie walidowania kompetencji nabytych poprzez nieformalne uczenie się,
- zwiększenie transparentności kwalifikacji nadawanych w danym sektorze i związanej z tym porównywalności kwalifikacji w ramach sektora w kraju i w Europie”.

Obecnie opracowanych jest 10 sektorowych ram kwalifikacji w zakresie:

- bankowości,
- budownictwa,
- handlu,
- przemysłu mody,
- sportu,
- technologii informatycznej,
- telekomunikacji,
- turystyki,
- usług rozwojowych,
- zdrowia publicznego.

Opracowując programy kształcenia w szkolnictwie wyższym, warto analizować zapisy sektorowych ram kwalifikacji, np. w ramie dla sektora informatycznego dla poziomu szóstego zapisano²¹:

²⁰ Raport referencyjny – aktualizacja, Odniesienie Polskiej Ramy Kwalifikacji do Europejskiej Ramy Kwalifikacji, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2015, s. 24.

²¹ Sektorowa Rama Kwalifikacji dla sektora informatycznego (SRK IT), na podstawie: Gruza M., Ubysz J., Stanisław-Busch E., Sołtysiak M., Dziedzic A., Budzewski M.

Charakterystyki I stopnia PRK – szósty poziom

ZNA I ROZUMIE:

- w zaawansowanym stopniu – fakty, teorie, metody oraz złożone zależności między nimi,
- różnorodne, złożone uwarunkowania prowadzonej działalności.

POTRAFI:

- innowacyjnie wykonywać zadania oraz rozwiązywać złożone i nietypowe problemy w zmiennych i nie w pełni przewidywalnych warunkach,
- samodzielnie planować własne uczenie się przez całe życie,
- komunikować się z otoczeniem, uzasadniać swoje stanowisko.

JEST GOTÓW DO:

- kultywowania i upowszechniania wzorów właściwego postępowania w środowisku pracy i poza nim,
- samodzielnego podejmowania decyzji, krytycznej oceny działań własnych, działań zespołów, którymi kieruje, i organizacji, w których uczestniczy; przyjmowania odpowiedzialności za skutki tych działań.

Charakterystyki szóstego poziomu SRK IT:

ZNA I ROZUMIE:

- wzajemny wpływ zmian w technologiach IT oraz zmian społecznych i gospodarczych,
- standardy jakościowe, przepisy prawne i standardy etyczne obowiązujące w obszarze informatyki, w którym pracuje, w zaawansowanym stopniu umożliwiającym krytyczną ocenę wykonywanej pracy i weryfikację powierzonych zadań,
- procesy zarządzania, w tym zarządzania jakością usług IT.

Administrowanie

- zaawansowane teorie stanowiące podstawę działania technologii cyfrowych, sprzętu, sieci komputerowych i urządzeń z nimi współpracujących,
- zasady działania złożonych systemów przetwarzania informacji.

(2015), Wykonanie projektu Sektorowej Ramy Kwalifikacji dla sektora informatycznego w Polsce (SRK IT). Raport końcowy, Instytut Badań Edukacyjnych, 2018, s. 44.

Programowanie

- zaawansowane teorie stanowiące podstawę działania oprogramowania, wykonywania obliczeń i przetwarzania danych za pomocą komputerów,
- zaawansowane sposoby posługiwania się wybranymi językami programowa.

POTRAFI:

- pozyskiwać, wymieniać i rozpowszechniać informacje o technologii IT za pomocą literatury i innych źródeł wiedzy, utrzymując w ten sposób relacje ze środowiskiem zawodowym,
- przygotować plan wykonania powierzonych zadań z uwzględnieniem zmiennych warunków,
- ocenić, czy konkretny produkt, usługa lub technologia jest dopasowana do wymaganej specyfikacji lub potrzeb klienta,
- w zmiennych warunkach kierować niewielkim zespołem realizującym projekt lub obsługującym stały proces,
- ocenić znaczenie ekonomiczne efektów swojej pracy i podległego zespołu.

Administrowanie

- posiada umiejętności związane z konfiguracją i zarządzaniem systemem składającym się ze sprzętu, oprogramowania operacyjnego i użytkowego, sieci komputerowych wraz z systemami przetwarzania rozproszonego oraz podłączonymi do nich urządzeniami osobistymi lub mobilnymi; w szczególności potrafi:
 - instalować i administrować wybranymi systemami operacyjnymi i użytkowymi dla serwerów i urządzeń centralnego przetwarzania danych oraz rozwiązywać problemy związane z ich pracą;
 - planować wydajność i bezpieczne wykorzystanie wirtualnego środowiska pracy w przechowywaniu i przetwarzaniu danych;
 - konfigurować i administrować wybranymi systemami baz danych;
 - planować wydajność i zabezpieczenie ciągłości pracy serwerów i urządzeń centralnego przetwarzania danych.

Programowanie

- posiada umiejętności związane z zaprojektowaniem, wykonaniem i wdrożeniem oprogramowania systemu informatycznego, wykorzystującego różnorodne komponenty i przetwarzanie rozproszone; w szczególności potrafi:
 - wykorzystać wiedzę matematyczną i informatyczną do opisu i symulacji procesów, tworzenia modeli, zapisu algorytmów oraz innych podobnych działań;

- pełnić rolę eksperta w zakresie wybranych języków i narzędzi programowania;
- posługiwać się odpowiednimi narzędziami: analizy, ewaluacji i walidacji do oceny systemów, technologii i zadań informatycznych;
- ocenić złożoność obliczeniową, wykonać plan testów modelować i wykorzystywać wielowarstwowe systemy rozproszone.

JEST GOTÓW DO:

- promowania zasad etycznych oraz kultury organizacyjnej nastawionej na zapewnienie jakości, stanowiąc w tym zakresie wzór dla współpracowników,
- kierowania zespołem, dbając o rozwój i właściwą postawę podległych pracowników.

Wymiana opinii nad zapisami Sektorowej Ramy Kwalifikacji powinna być przedmiotem debaty wśród wszystkich pracowników akademickich kształcących na danym kierunku oraz studentów.

Wdrażanie idei Europejskiej i Polskiej Ramy Kwalifikacji wymaga zaangażowania różnych grup interesariuszy. Należą do nich: uczący się, organizatorzy kształcenia, organy ds. kwalifikacji, pracodawcy, związki zawodowe, izby handlowe, przemysłowe i rzemieślnicze, podmioty zaangażowane w proces uznawania kwalifikacji akademickich i zawodowych, a także służby zatrudnienia. Kwestia społecznej akceptacji i rozumienia ram kwalifikacji jest tak ważna, że jej założenia zostały zapisane w Zaleceniu Rady z dnia 22 maja 2017 r. w sprawie europejskich ram kwalifikacji dla uczenia się przez całe życie i uchylającym zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 23 kwietnia 2008 r. w tej samej sprawie.

Opracowując Zintegrowany System Kwalifikacji zakładano, że będzie on ważny dla wielu grup interesariuszy:

- dla uczących się – będzie wspierał ich w wyborze ścieżki kariery edukacyjnej i zawodowej, uwzględniającej kształcenie formalne, pozaformalne i nieformalne uczenie się,
- dla pracowników – pomoże przedstawić swoje kwalifikacje w sposób zrozumiały dla pracodawców na europejskim rynku pracy, ułatwi zaplanowanie doskonalenia zawodowego w ramach kształcenia formalnego, pozaformalnego i nieformalnego uczenia się, wesprze przekwalifikowanie się,
- dla pracodawców – ułatwi rekrutację pracowników, pozwoli uniknąć kosztownych błędów dzięki precyzyjnemu formułowaniu wymaganej wiedzy, umiejętności, pozwoli lepiej diagnozować luki kompetencyjne pracowników i efektywniej planować ich doskonalenie zawodowe,
- dla instytucji prowadzących kształcenie i doskonalenie formalne i pozaformalne – pomoże odpowiednio opracowywać programy kształcenia dostosowane do potrzeb uczących się i pracodawców.

Podkreślić jednak należy, że język Polskiej Ramy Kwalifikacji jest niezwykle ogólny, dlatego też znacznie ważniejsze, z punktu widzenia interesariuszy, są zapisy sektorowych ram kwalifikacji. Zawierają one opisy wiedzy, umiejętności i kompetencji społecznych właściwych dla danej branży, pisane są językiem dla niej specyficznym. Ułatwiają zatem korzystanie z ram kwalifikacji wszystkim zainteresowanym.

W mojej ocenie efekty ujęte zarówno w Polskiej Ramie Kwalifikacji ale również w Ramach Sektorowych charakteryzują się wciąż wysokim stopniem uogólnienia. W niniejszej pracy podejmuje się uszczegółowienia efektów uczenia się na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji w zakresie matematyki.

2. Cele i efekty uczenia się

2.1. Przegląd definicji i klasyfikacji celów kształcenia

Słowniki języka polskiego definiują cel jako to, co chcemy osiągnąć, to, do czego dążymy. Wszystkie działania prowadzone świadomie skupiają się na realizacji określonych wcześniej celów. Konkretyzacja tych celów zależy od kilku czynników, m.in. od środowiska zewnętrznego, w którym zachodzi ich realizacja, czy też środków, które posiada realizator. Na tej samej zasadzie tworzone są cele kształcenia²².

Cele formułowane jako kierunki dążeń pedagogicznych nazywamy celami ogólnymi, a formułowane jako zamierzone osiągnięcie – celami operacyjnymi²³.

„Cele kształcenia uniwersyteckiego stają się coraz bardziej związane z wymogami społecznymi i potrzebami rynku pracy, w coraz większym także stopniu dotyczą uzyskiwania przez absolwentów wysokiego poziomu sprawności i kompetencji, niezbędnych do zrealizowania kariery zawodowej”²⁴.

Głównym błędem opisanym przez Stanisława Palkę jest tworzenie przez nauczycieli celów dla konkretnych lekcji przy braku spojrzenia na program nauczania jako całość. Brak umiejętnego powiązania celów końcowych nauczania z celami poszczególnych zagadnień wprowadzanych przez nauczyciela w cyklu lekcji prowadzi do obniżenia skuteczności kształcenia²⁵. Kolejnym z błędów nauczycieli przy formułowaniu celów jest, według Krystyny Kuligowskiej, ujmowanie ich w sposób ogólnikowy. W efekcie tego, zamiast wymiernych rezultatów lekcji otrzymywano zamierzenia, które powinny wynikać z programu nauczania jako całości, m.in. rozwijanie umiejętności obserwacji uczniów czy też kształtowanie postawy systematyczności, odpowiedzialności za pracę powierzoną grupie²⁶. Według Bogusławy Jodłowskiej najczęściej popełnianymi przez nauczycieli błędami są: identyfikowanie celu lekcji z jego tematem, jego zbyt ogólnikowe określenie, brak zgodności celu z tokiem zajęć lub całkowite pominięcie założonych wcześniej celów²⁷.

Skoro mamy wyszczególnione błędy kardynalne, popełniane przez dydaktyków, jak więc powinno wyglądać tworzenie celów w procesie kształcenia? Richard I. Arends określił cele dydaktyczne jako komunikaty tworzone przez

²² Kupisiewicz C., *Dydaktyka. Podręcznik akademicki*, Rozdział 4, Impuls, Kraków 2012.

²³ Niemierko B., *Między oceną szkolną a dydaktyką*, WSiP, Warszawa 1999, ss. 80-85.

²⁴ Wołodźko E. *Wielowymiarowość autonomii nauczyciela akademickiego, w Paradygmaty współczesnej dydaktyki*, pod red. Huryło L., Klus-Stańska D., Łojko M. Impuls, Kraków 2009, s. 503.

²⁵ Węglińska M., *Jak przygotować się do lekcji?*, Impuls, Kraków 2010, ss. 102-121.

²⁶ Kuligowska K., *Doskonalenie lekcji*, WSiP, Warszawa 1984, ss. 173-174.

²⁷ Jodłowska B., *Start zawodowy – twórcza praca nauczyciela klas początkowych*, WSiP, Warszawa 1991, ss. 136-139.

nauczycieli, odpowiadające na pytanie, jak powinien zmienić się uczeń po przyswojeniu danej lekcji. Porównał je również do map drogowych – powinny wskazywać niczym drogowskaz dydaktykom, a także uczniom drogę, a także, na którym z jej etapów właśnie się znajdują²⁸. Ludwika Jeleńska podkreśla z kolei, że przystępując do tworzenia programu lekcji, nauczyciel musi sobie odpowiedzieć przede wszystkim na pytanie, jakie efekty rozwoju moralnego i intelektualnego młodego człowieka chce uzyskać – dopiero po sformułowaniu celów do nich prowadzących można przejść do tworzenia właściwej koncepcji lekcji²⁹.

Według Wincentego Okonia głównym celem kształcenia ogólnego jest wszechstronny rozwój osobowości uczącego się. Definiuje on zarówno cele edukacji, jak i cele systemu oświaty jako „świadome założone skutki, które społeczeństwo pragnie osiągnąć przez funkcjonowanie systemu oświaty, zależne są one zatem od charakteru każdego społeczeństwa i jego systemu oświaty”³⁰. Cele nauczania to świadomie założone efekty, które zamierzamy osiągnąć w wyniku kształcenia. W. Okoń dodaje również, że: „W społeczeństwie demokratycznym wartość naczelną stanowi dobro człowieka, jego szczęście i wszechstronny rozwój, stąd i cele systemu oświaty ukierunkowane są na te wartości. Obejmują one uzyskanie przez każdą jednostkę możliwie wysokiego poziomu kwalifikacji zawodowych, zapewnienie każdemu możliwości aktywnego uczestnictwa w demokracji oraz twórczego udziału w życiu kulturalnym”. W. Okoń zaproponował spojrzenie na cele kształcenia z dwóch stron: rzeczowej i podmiotowej (osobowościowej). Do pierwszej grupy celów zaliczymy: wiedzę, przygotowanie do działalności praktycznej oraz kształtowanie przekonań i opartego na nich poglądu na świat. W drugiej grupie znajdują się: rozwój sprawności umysłowej i zdolności poznawczych, kształtowanie potrzeb, motywacji, zainteresowań i zamiłowań oraz wdrożenie do samoedukacji. Według W. Okonia przedstawione w ten sposób cele kształcenia odpowiadają dążeniu do osiągnięcia efektów w procesie nauczania. Zauważmy, że taksonomia celów przedstawiona przez W. Okonia obejmuje zarówno wiadomości o faktach i zależnościach między nimi, jak i rozwiązywanie zagadnień teoretycznych i praktycznych. Zwraca również uwagę na samodzielne dokonywanie oceny oraz stosowanie wiedzy w nowych sytuacjach³¹.

Na przestrzeni lat wykształciło się kilkanaście spojrzeń na tworzenie celów kształcenia. Stanisław Palka wyszczególnił cele ogólne i szczegółowe. Podczas gdy pierwsze tworzą koncepcję pracy dydaktycznej w długim wymiarze czasowym, drugie skupiają się na jej realizacji poprzez osiąganie celów konkretnych.

²⁸ Arends R.I., *Uczymy się nauczać*, tłum. K. Kruszewski, WSiP, Warszawa 1994.

²⁹ Jeleńska L., *Szkoła kształcąca*, PZWS, Warszawa 1957, s. 31.

³⁰ Okoń W., *Nowy słownik pedagogiczny*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1988, s. 49, 59-60.

³¹ Okoń W., *Wprowadzenie do dydaktyki ogólnej*, Wyd. Akademickie Żak, Warszawa 2003, ss. 65-75.

Natomiast obie grupy celów obejmują nie tylko opanowanie przez ucznia materiału, ale również pewnych umiejętności³².

Zarówno Józef Półturzycki, jak i Maria i Ryszard Radwiłowiczowie określili, jakie rodzaje celów powinny być realizowane w toku kształcenia młodego człowieka. Podczas poszczególnych lekcji powinno się zwracać uwagę przede wszystkim na cel poznawczy (przedstawienie i zrozumienie przez uczniów konkretnego tematu zajęć, związanych z nim nowych wiadomości czy umiejętności – pojęcia, twierdzenia, reguły itd.), kształcący (rozwijający zainteresowania, m.in. przedmiotowe, a także zdolności poznawcze – również wprowadzenie pojęć specyficznych dla przedmiotu oraz sposobów racjonalnego uczenia się z wykorzystaniem dostępnych materiałów – tabel, słowników itd.) oraz wychowawczy (kładący nacisk na elementy lekcji, które poprzez przyswajanie zagadnień wpływają na te elementy osobowości młodego człowieka, na które nauczyciel może wpłynąć podczas interakcji wychowawczej – kształtowanie postaw, przekonań, wartości społecznych). Państwo Radwiłowiczowie podkreślają przy tym, że rozdzielanie celów dydaktycznych na te trzy obszary może sprawić, że nauczyciel nie skupi się tylko na jednym z nich, a będzie miał na uwadze zrealizowanie wszystkich jako całości³³.

Z przykładów K. Denki można również wywnioskować, że, aby cele były dobrze skonkretyzowane, należy rozpocząć ich tworzenie od sformułowania kilku (lepiej mniej, ale konkretnych i mierzalnych) jednoznacznych celów ogólnych lekcji. Wówczas można przejść do sformułowania tych bardziej szczegółowych, a także pośrednich, wynikających z toku nauczania. Należy przy tym zwrócić szczególną uwagę, aby między postawionymi celami istniały związki zarówno merytoryczne, jak i logiczne³⁴.

R. Mager postanowił utworzyć schemat celów operacyjnych, oparty na trzech kluczowych aspektach: opisie zachowania ucznia, czyli jakie wiadomości lub umiejętności powinien przyswoić w toku lekcji, sytuacji sprawdzania – elemencie, który będzie formą sprawdzenia (np. zadanie, wypracowanie, klasówka), a także na kryteriach osiągnięć będących mierzalnymi efektami, dzięki którym dydaktyk jest w stanie stwierdzić, że uczeń przyswoił wiedzę w stopniu wystarczającym³⁵.

Bolesław Niemierko również podkreśla, że proces operacjonalizacji celów jest niezbędny. Polega on na sprecyzowaniu, uszczegółowieniu i skonkretyzowaniu celów ogólnych, co ma za zadanie umożliwienie uczącym się ich osiągnięcie³⁵. Według B. Niemierki cel operacyjny wskazuje na to, co uczący się

³² Palka S., Warunki efektywności nauczania w szkole średniej, WSiP, Warszawa 1997, ss. 27-31.

³³ Półturzycki J., *Lekcja w szkole współczesnej*, WSiP, Warszawa 1985, s. 231; Radwiłowicz M., Radwiłowicz R., *Metoda zadaniowo-sytuacyjna w nauczaniu początkowym*, WSiP, Warszawa 1991, s. 80.

³⁴ Denek K., *Cele edukacyjne lekcji*, Poznań-Kalisz 1989, ss. 85-87.

³⁵ Pod redakcją K. Kruszewskiego: *Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992, s. 16.

będzie umiał zrobić po zakończeniu procesu uczenia się, a czego nie umiał zrobić przedtem. Sprecyzowanie polega zwykle na sformułowaniu dokładniejszych, bardziej przemyślanych celów. Podczas uszczegółowiania opisów czynności powstaje więcej celów operacyjnych w stosunku do pierwotnego celu ogólnego. W czasie konkretyzacji wskazywana jest „sytuacja odniesienia”, w której czynność ma być wykonana. B. Niemierko przytacza wiele argumentów, tłumacząc istotność procesu operacjonalizacji celów. Jednym z nich jest między innymi podniesienie znaczenia celów kształcenia, jak i odpowiedzialności nauczyciela za ich osiągnięcie. Dobrze określone cele operacyjne z jednej strony są niezmiernie przydatne w doborze treści kształcenia, z drugiej zaś powinny być łatwo zrozumiałe dla odbiorcy³⁶.

Poprawność w formułowaniu celu lekcji, według Bogusławy Jodłowskiej, można określić, gdy zostało w nim wyróżnione działanie, które uczeń powinien wykonać, treść odpowiadająca zakresowi materiału, obejmującemu dany przedmiot oraz podjętemu działaniu. Istotne są również warunki, w jakich ma miejsce to działanie, a także standard, czyli mierzalny, najniższy poziom reakcji, który pozwala dydaktykowi określić poziom wykonania zadania jako oczekiwany²⁷.

Czesław Kupisiewicz określa cel główny kształcenia jako zapewnienie uczniom optymalnego rozwoju intelektualnego. Według niego cel ten może być zrealizowany poprzez pięć celów podrzędnych. Zaznajomienie uczniów z podstawami wiedzy o przyrodzie, technice, społeczeństwie i kulturze w zakresie pozwalającym na rozumienie najważniejszych pojęć, zjawisk, wydarzeń i procesów. Równie istotne jest usystematyzowanie wiedzy oraz operatywne posługiwanie się nią przy przekształcaniu fragmentów rzeczywistości, dostosowanymi do możliwości uczących się. Nie bez znaczenie pozostaje rozwój zainteresowań i zdolności poznawczych uczniów, ich krytycznego myślenia, wyobraźni, pamięci i różnorodnych umiejętności praktycznych. Przy formułowaniu celów nie powinniśmy zapominać o kształtowaniu akceptowanego społecznie systemu wartości, logicznych poglądów i przekonań, określających stosunek do świata oraz otaczającej nas rzeczywistości. Nauczyciel powinien przygotowywać uczących się do samokształcenia oraz zaznajamiać z ogólnymi podstawami produkcji i organizacji pracy w zakresie najważniejszych dziedzin³⁷.

Oprócz wielu opracowań na temat celów uczenia się w kontekście dydaktyki ogólnej, pojawiły się również te dedykowane matematyce. Nie sposób nie wspomnieć prof. Anny Zofii Krygowskiej, twórczyni nowoczesnej dydaktyki matematyki rozumianej jako dyscyplina naukowa. Postawiła ona wyraźne cele ogólne stawiane nauczaniu matematyki: „Charakteryzując w uproszczeniu główne tendencje w formułowaniu ogólnych celów powszechnego nauczania ‘matematyki dla wszystkich’, można je wyrazić w następujący sposób:

1. nauczanie matematyki powinno wykorzystywać specyficzne cechy tej dyscypliny dla intelektualizacji i postaw młodego człowieka przez dostosowaną do jego poziomu matematyczną aktywność, dla uświadomienia mu znaczenia i efektywności teoretycznego myślenia w toku rozwiązywania problemów;

³⁶ Niemierko B., *Pomiar sprawdzający wielostopniowy*, PWN 1990, s. 242.

³⁷ Kupisiewicz Cz., *Podstawy dydaktyki ogólnej*, Wydawnictwo PWN, ss. 53-56.

2. nauczanie matematyki powinno przyswoić uczniowi rudymenty aparatu pojęciowego, elementy uniwersalnego języka i metod rozumowania specyficznych dla matematyki, co jest konieczne do rozumienia technologicznego świata i perspektyw jego rozwoju, oraz umiejętność posługiwania się tym aparatem, tym językiem i tymi metodami w rozwiązywaniu problemów (...);
3. nauczanie matematyki powinno rozwinąć intuicje numeryczne, wielkościowe i przestrzenne potrzebne do całościowego, syntetycznego ujmowania stosunków ilościowych i przestrzennych;
4. nauczanie matematyki powinno przyswoić uczniom podstawowe techniki uczenia się matematyki; umiejętność korzystania z różnych źródeł informacji matematycznej (podręcznik, film, książki popularnonaukowe) oraz pośrednio także przez to przyczynić się do przyswojenia mu ogólnej techniki uczenia się koniecznej w epoce, w której „stałe uczenie się jest formą bycia człowieka”;
5. powszechne nauczanie matematyki powinno zapewnić opanowanie elementarnej wiedzy matematycznej i elementarnych sprawności matematycznych (...) tak, aby przed żadnym absolwentem szkoły obowiązkowej droga do dalszego kształcenia matematycznego nie była zamknięta (...)”³⁸.

Z. Krygowska zauważa, że każdy z tych celów można osiągnąć na trzech poziomach. Pierwsze dwa dotyczą nauczania matematyki. Najniższy poziom to wiadomości i umiejętności arytmetyczne, oczywiście określone przez program nauczania. Drugi to umiejętność myślenia abstrakcyjnego w rozwiązywaniu matematycznych problemów. Poziom trzeci wykracza poza samo nauczanie matematyki, a określa kształcenie ogólne „przez matematykę”. Z. Krygowska zwraca uwagę, że cele nauczania matematyki powinny mieć charakter praktyczny: „opanowanie wiadomości matematyki użytecznych w życiu bieżącym winno być minimalnym celem nauczania w szkole średniej”³⁹. Kładzie również nacisk na interpretację rzeczywistości przy pomocy figur, wykresów, diagramów i formuł. Bardzo ważnym aspektem są modele matematyczne, umiejętność ich odkrywania, rozumienia, interpretacji i co najważniejsze, użycia ich w odpowiedniej sytuacji wraz z wyznaczeniem stopnia niepewności rezultatu eksperymentu.

E. Swoboda uważa, że „Realizowanie matematyki w szkołach zawodowych powinno być podporządkowane zasadniczym celom:

- Przygotowanie do pracy – albo do dalszego podnoszenia kwalifikacji – w ramach określonego obszaru, czasami bardzo wąskiego, specyficznego.
- Kształtowanie umiejętności stawiania pytań, zastanawiania się i wyciągania wniosków, umiejętności korzystania z wcześniejszych doświadczeń, przeorganizowywania danych, działania w sytuacjach nietypowych, umiejętności improwizowania.

³⁸ Krygowska Z., *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980*, Kraków, Wydawnictwo Naukowe WSP, 1981 ss. 48-49.

³⁹ Krygowska Z., *Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980*, Kraków, Wydawnictwo Naukowe WSP, 1981 s. 54.

Zasadnym staje się więc pytanie: jak realizować matematykę jako przedmiot w szkole zawodowej (a także w technikach dla dorosłych)?⁴⁰

2.2. Efekty uczenia się

Obecnie jesteśmy świadkami trendu w edukacji polegającego na przejściu od tradycyjnego modelu, który był skoncentrowany na nauczycielu, do podejścia skoncentrowanego na uczących się⁴¹. Główny nacisk kładzie się na to, co uczący się powinni osiągnąć po zakończonym kursie.

Wiedza to zbiór opisów obiektów i faktów, zasad, teorii oraz praktyk, przyswojonych w procesie uczenia się, odnoszących się do dziedziny uczenia się lub działalności zawodowej⁴².

Umiejętności, to przyswojona w procesie uczenia się zdolność do wykonywania zadań i rozwiązywania problemów właściwych dla dziedziny uczenia się lub działalności zawodowej⁴³.

Kompetencje (społeczne) to rozwinięta w toku uczenia się zdolność do kształtowania własnego rozwoju oraz autonomicznego i odpowiedzialnego uczestniczenia w życiu zawodowym i społecznym, z uwzględnieniem etycznego kontekstu własnego postępowania⁴⁴.

Efekty uczenia się, to wiedza, umiejętności oraz kompetencje społeczne nabyte w procesie uczenia się⁴⁵.

Podstawowy podział efektów uczenia się:

- Wiedza (W),
- Umiejętności (U),
- Kompetencje (społeczne) (K).

⁴⁰ Swoboda E., *Matematyka w szkołach zawodowych – uboga siostra królowej nauk?*, [w:] Współczesne Problemy Nauczania Matematyki: Prace Monograficzne z Dydaktyki Matematyki, H. Kąkol (red.), Wyd. Koło SNM, Forum Dydaktyków Matematyki, 2015, s. 12.

⁴¹ Shepard L.A., *The role of assessment in a learning culture*, Educational Researcher, 29(7), 2000, ss. 4-14.

⁴² Sławiński S. i in., *Słownik kluczowych pojęć związanych z krajowym systemem kwalifikacji*, 2016. (Definicja zmodyfikowana przez Zalecenie Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 23 kwietnia 2008 r. w sprawie ustanowienia europejskich ram kwalifikacji dla uczenia się przez całe życie).

⁴³ Tamże (Definicja nawiązuje bezpośrednio do definicji umiejętności podanej w Zaleceniu Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 23 kwietnia 2008 r.).

⁴⁴ Tamże (Definicja jest spójna z definicją podaną w Zaleceniu Parlamentu Europejskiego i Rady z 23 kwietnia 2008 r.).

⁴⁵ Tamże (Definicja nawiązuje do definicji zawartej w Zaleceniu Parlamentu Europejskiego i Rady z dnia 23 kwietnia 2008 r. w sprawie ustanowienia europejskich ram kwalifikacji).

Efekty uczenia się powinny spełniać następujące kryteria (ROZUM)⁴⁶:

- realne dla danego poziomu nauczania,
- osiągnięte,
- zmierzone,
- udokumentowane,
- mające przełożenie na zapotrzebowanie rynku pracy.

Korzyści z wprowadzenia efektów uczenia się:

- usystematyzowany program kursu,
- jasne oczekiwania od uczących się,
- wysoki poziom porównywalności uczących się.

Ponadto efekty uczenia się pomagają w bardziej systematycznym projektowaniu programów i modułów.

Wielu badaczy poszukuje związków między efektami uczenia się a cechami osobowymi uczącego się. Zbadano związek pomiędzy efektami uczenia się a ocenami szkolnymi i cechami temperamentu⁴⁷. Wykazano, że im niższa reaktywność i wyższa ruchliwość, tym lepsze osiągane efekty uczenia się i lepsze oceny szkolne.

W rozdziale 4 przedstawiono badania związku między efektami uczenia się i różnymi cechami społecznymi.

2.3. Przegląd taksonomii celów kształcenia

Do opisu efektów uczenia się korzysta się z taksonomii, która umożliwia ich precyzyjną klasyfikację.

Termin „taksonomia” pochodzi z języka greckiego (*taksis* – układ, *nomos* – prawo). Jest to nauka o zasadach klasyfikacji, układach, hierarchii, porządku. Według słownika PWN jest to „nauka o zasadach stosowanych w systematyce organizmów przy opisie gatunków, ich nazywaniu i włączaniu w układ systematyczny zwierząt i roślin”⁴⁸. Rolą taksonomii jest:

- nazywanie i klasyfikowanie,
- zapewnienie różnorodności,
- monitorowanie założonej równowagi między elementami klasyfikowanymi,
- hierarchiczne poziomowanie.

Proces operacjonalizacji to zamiana celów ogólnych na skonkretyzowane i czynnościowe cele szczegółowe⁴⁹. Operacjonalizacja celów określała zachowanie uczących się po zakończeniu kursu. Taksonomie celów nauczania to narzędzia operacjonalizacji celów nauczania⁵⁰.

⁴⁶ Opracowanie własne.

⁴⁷ Nosarzewski J., Efekty uczenia się, uwarunkowane własnościami temperamentu, *Rocznik Psychologiczny*, Tom II, 1999.

⁴⁸ Protokół dostępu: <https://sjp.pwn.pl/slowniki/taksonomia.html> [2019, styczeń].

⁴⁹ Niemierko B., *Między oceną szkolną a dydaktyką*, WSiP, Warszawa, 1991, s. 58.

⁵⁰ Niemierko B., *Pomiar sprawdzający w dydaktyce*, PWN, Warszawa 1990, s. 208.

2.3.1. Taksonomia Blooma

Najbardziej znaną i stosowaną w praktyce taksonomią celów jest taksonomia Blooma⁵¹. Jest ona wielopoziomową skalą wyrażającą osiągnięcia ucznia⁵². Taksonomia Blooma zakłada trzy sfery celów: poznawczą, psychomotoryczną i emocjonalną. Najczęściej używana jest część poznawcza.

W odniesieniu do sfery poznawczej mamy następującą hierarchię:

- wiedza,
- zrozumienie,
- zastosowanie,
- analiza,
- synteza,
- ocena.

Podstawową krytyką taksonomii Blooma jest pogląd, że kategorie tworzą hierarchiczny uporządkowany zbiór⁵³.

Przykład

Oceń prawdziwość obliczenia: $3 + 4 + 2 + 1 = 8$.

Zauważmy, że kategorie: zastosowania i analiza nie są konieczne do oceny prawdziwości powyższego obliczenia. Ten pogląd jest jednym z argumentów będących podstawą do zbudowania nowego modelu efektu uczenia się (Rozdział 2). W latach dziewięćdziesiątych taksonomia Blooma została zmodyfikowana przez jego ucznia Andersona⁵⁴.

- *Zapamiętanie*
Definiuje, przywołuje: twierdzenie, własność, aksjomat. W tej kategorii wymagane jest także elementarne zrozumienie.
- *Zrozumienie*
Interpretuje, klasyfikuje, obrazuje, wyjaśnia: definicję, twierdzenie, własność.
- *Zastosowanie*

⁵¹ Bloom B. (Ed.), Engelhart M.D., Furst E.J., Hill W.H., Krathwohl D.R., *Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: The Cognitive Domain*. New York: David McKay Co Inc., 1956.

⁵² Dylak S., *Wprowadzenie do konstruowania szkolnych programów nauczania*, Wydawnictwo Szkolne PWN, Warszawa 2000.

⁵³ McMillan J.H., *Classroom assessment: Principles and practice for effective instruction* (2 ed.), Boston, MA.: Allyn & Bacon, 2001.

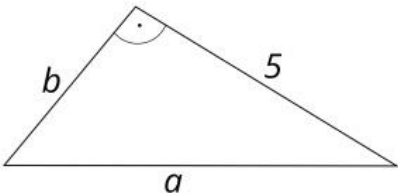
⁵⁴ Anderson L.W., Krathwohl D.R., Airasian P.W., Cruikshank K.A., Mayer R.E., Pintrich P.R., Raths J., Wittrock M.C., *A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*, New York: Pearson, Allyn & Bacon, 2001.

- Wykorzystuje do rozwiązania problemu: definicję, twierdzenie, własność, aksjomat. Wykonuje obliczenia, konstrukcje.
- *Analiza*
Porównuje, kwalifikuje: definicje, twierdzenia, własności, aksjomaty. Rozpoznaje, dekomponuje problem.
 - *Ocena*
Ocena, dyskutuje w zakresie poprawności definicji, prawdziwości twierdzenia, hipotezy, własności. Zaprzecza tezie. Szacuje wyniki.
 - *Tworzenie*
Tworzy nowe obiekty, problemy, definicje, twierdzenia, własności, aksjomaty. Wprowadza nowe teorie.

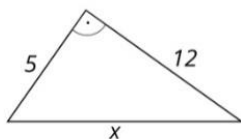
W zmodyfikowanej taksonomii Anderson zwrócił uwagę na tworzenie nowych pomysłów. W matematyce nowe pomysły stają się wiedzą, jeśli zaakceptuje je społeczność akademicka⁵⁵. Ernest twierdzi, że pojęcia w matematyce zmieniają się i czynią ją ponadczasową.

Poniżej podano przykład efektów uczenia się i pomiaru w zakresie twierdzenia Pitagorasa (Tabela 2.1).

Tabela 2.1. Zmodyfikowana przez Andersona taksonomia Blooma w zakresie twierdzenia Pitagorasa, część 1

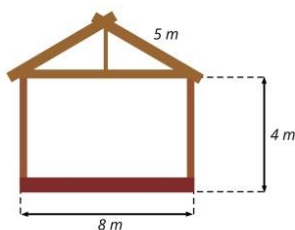
Kategoria	Przykład
Zapamiętanie	<i>Efekt uczenia się:</i> Podaje twierdzenie Pitagorasa. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Zapisz twierdzenie Pitagorasa dla danych przedstawionych na rysunku. 
Zrozumienie	<i>Efekt uczenia się:</i> Oblicza długość boku trójkąta prostokątnego, stosując twierdzenie Pitagorasa. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Oblicz długość przeciwprostokątnej x, stosując twierdzenie Pitagorasa.

⁵⁵ Ernest P., Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, 1997, s. 149.



Zastosowanie *Efekt uczenia się:* Stosuje twierdzenie Pitagorasa w sytuacjach praktycznych.

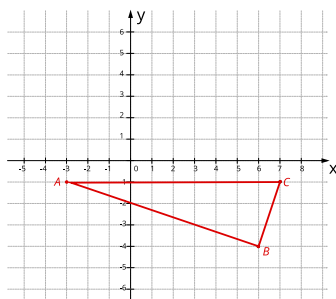
Pomiar efektu uczenia się: Oblicz wysokość budynku przedstawionego na rysunku.



Analiza

Efekt uczenia się: Analizuje twierdzenie Pitagorasa.

Pomiar efektu uczenia się: Sprawdź, czy trójkąt jest prostokątny, korzystając z twierdzenia Pitagorasa.

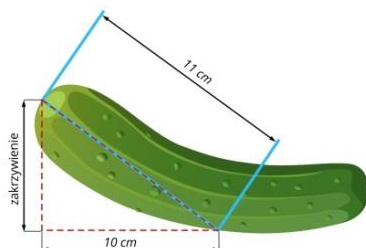


Ocena

Efekt uczenia się: Ocenia sytuację problemową, stosując twierdzenie Pitagorasa.

Pomiar efektu uczenia się: Na mocy rozporządzenia wydanego przez Unię Europejską ogórek dopuszczony do sprzedaży powinien mieć maksymalne zakrzywienie 1 cm na 10 centymetrów długości. Sprawdź, czy pokazany na rysunku ogórek spełnia tę normę. Zapisz obliczenia⁵⁶.

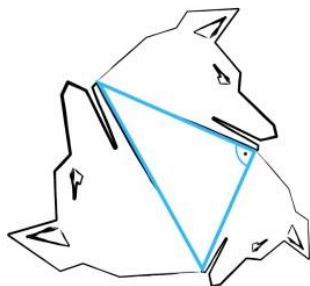
⁵⁶ Stańdo J. i in., *Zacznij od dziś. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty matematyczno-przyrodnicze*, WSiP 2003, s. 18.



Tworzenie

Efekt uczenia się: Uogólnia twierdzenie Pitagorasa.

Pomiar efektu uczenia się: Na bokach trójkąta prostokątnego budujemy figury, których skala podobieństwa jest równa stosunkowi boków. Sformułuj i udowodnij uogólnienie twierdzenia Pitagorasa.



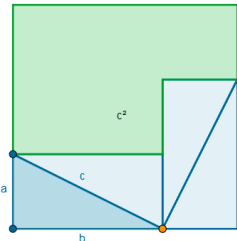
Źródło: opracowanie własne.

Analizując przedstawione przykłady, możemy zauważyć, że zadania tworzą układ hierarchiczny, tzn. są ułożone od najłatwiejszego do coraz trudniejszego.

Czy w tym układzie taksonomii da się zbudować hierarchię zadań od najtrudniejszego do najłatwiejszego? Odpowiedź na pytanie przedstawiono poniżej (Tabela 2.2).

Tabela 2.2. Zmodyfikowana przez Andersona taksonomia Blooma w zakresie twierdzenia Pitagorasa, część 2

Kategoria	Przykład
Zapamiętanie	<i>Efekt uczenia się:</i> Podaje uogólnione twierdzenie Pitagorasa w oparciu o figury podobne zbudowane na bokach trójkąta. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Zapisz uogólnione twierdzenie Pitagorasa.

Zrozumienie	<i>Efekt uczenia się:</i> Uzasadnia prawdziwość twierdzenie Pitagorasa. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Uzasadnij, że pole figury zaznaczonej kolorem zielonym jest równe $c^2$⁵⁷.
	
Zastosowanie	<i>Efekt uczenia się:</i> Stosuje twierdzenie Pitagorasa w sytuacjach praktycznych. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Wyprowadź wzór na przekątną sześcianu.
Analiza	<i>Efekt uczenia się:</i> Analizuje twierdzenie Pitagorasa. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Czy istnieje trójkąt prostokątny równoboczny?
Ocena	<i>Efekt uczenia się:</i> Ocenia, czy trójkąt jest prostokątny. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Oceń, czy trójkąt o bokach 6, 8, 10 jest prostokątny.
Tworzenie	<i>Efekt uczenia się:</i> Buduje trójkąt prostokątny o ustalonych założeniach. <i>Pomiar efektu uczenia się:</i> Narysuj trójkąt prostokątny równoramienny.

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawiona argumentacja pokazuje, że należy odejść od poglądu, że taksonomia Blooma jest hierarchiczna.

2.3.2. Taksonomia Bolesława Niemierki

Na poziomie K-12 przez wiele lat w Polsce funkcjonuje tzw. taksonomia B. Niemierki (Tabela 2.3).

⁵⁷ Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, *E-podręcznik do matematyki dla klasy I szkoły ponadgimnazjalnej, Odkryj, zrozum, zastosuj...*, Protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Tabela 2.3. Taksonomia celów. B. Niemierko

Cel	
Poziom	Kategoria
Wiadomości	Zapamiętanie wiadomości
	Zrozumienie wiadomości
Umiejętności	Stosowanie w sytuacjach typowych
	Stosowanie w sytuacjach problemowych

Źródło: B. Niemierko⁵⁸.

Kategorie oznacza się literami: A, B, C, D:

- (A) Zapamiętanie
- (B) Zrozumienie
- (C) Stosowanie wiadomości w sytuacjach typowych
- (D) Stosowanie wiadomości w sytuacjach problemowych

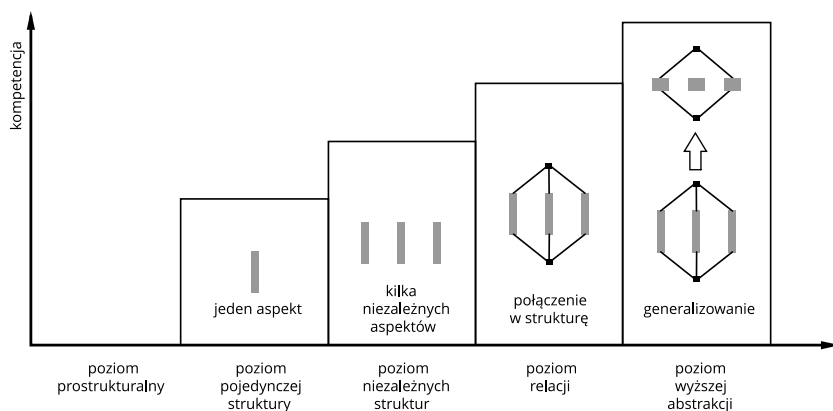
2.3.3. Taksonomia SOLO

Alternatywą dla taksonomii Blooma jest taksonomia SOLO⁵⁹ (*Structure of Observed Learning Outcome*), struktura obserwowanych wyników uczenia się. Jest ona w szczególności ukierunkowana na rozróżnienie jakościowe wiedzy i umiejętności, a nie ilościowe. Zapewnia ona poziomy rozumienia. Kolejny, wyższy poziom, zbudowany jest na poprzednim, wnosząc coś nowego. Taksonomia SOLO mocno wpisuje się w teoretyczne podstawy procesu uczenia się. Jest ona użyteczna do monitorowania postępów uczących się oraz ich trenerów.

Biggs J.B. i Collis stworzyli opis pięciu poziomów taksonomii za pomocą wykresu.

⁵⁸ Niemierko B., *Między oceną szkolną a dydaktyką*, WSiP, 1999, ss. 86-103.

⁵⁹ Biggs J.B. and Collis K.F., *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*, New York: Academic Press, 1982.



Wykres 2.1. Taksonomia SOLO

Źródło: opracowanie na podstawie taksonomii SOLO⁶⁰.

Czasami drugi i trzeci poziom taksonomii SOLO nazywany jest ilościowym, a ostatnie dwa, czyli czwarty i piąty – jakościowym. Zmiana z trzeciego na czwarty poziom (czyli przejście z ilościowego na jakościowy) to przejście na obszar abstrakcji. Jak podkreślają Biggs i inni, określenie „**wyższy poziom**” **nie oznacza, że jest on trudniejszy**. Hattie i Brown twierdzą, że: „Głębokość poziomów to nie to samo co trudność – być może to właśnie takie mylne skojarzenie jest powodem tego, iż tak wiele pytań zadawanych przez nauczycieli nie wymaga od uczniów używania umiejętności myślenia wyższego rzędu, ale zamiast tego wymaga skupienia większej uwagi na szczegółach”⁶¹.

Ten pogląd jest jednym z argumentów będących podstawą do zbudowania nowego modelu efektu uczenia się (rozdział 2).

Poniżej opisano charakterystykę taksonomii SOLO (Tabela 2.4).

Tabela 2.4. Opis taksonomii SOLO

Poziom	Charakterystyka
Prestrukturalny	Uczący się nie rozumie postawionego problemu. W żaden sposób nie jest w stanie się do niego odnieść. Problem jest niewłaściwie dobrany do poziomu uczącego się. Zadanie może być rozwiązywane w nieznaczącej części.

⁶⁰ Grajkowski W., Ostrowska B., Przykład powinien być tylko przykładem, czyli jakie zadania naprawdę sprawdzają umiejętności, *Edukacja* 3, (19), ss. 31-45, 2012.

⁶¹ Hattie J.A.C., Brown G.T.L., *Cognitive Processes in as TTle: The SOLO Taxonomy, as TTle Technical Report #43*, University of Auckland/Ministry of Education, 2004, September, ss. 17-18.

Monostrukturalny	Uczeń odnosi się do pojedynczego zagadnienia. Jeden z kroków potrzebnych do rozwiązania problemu zostaje pokonany.
Wielostrukturalny	Uczeń opisuje problem. Wymienia własności, definicje, twierdzenia związane z problemem. Nie potrafi znaleźć związku między zagadnieniami, które mogłyby doprowadzić do rozwiązania problemu.
Relacyjny	Uczeń analizuje problem. Potrafi powiązać fakty opisujące problem. Jest widoczne głębokie i spójne zrozumienie problemu. Rozwiązuje problem o złożonej strukturze.
Poszerzonej abstrakcji	Uczeń uogólnia problem, stawia nowe hipotezy, tworzy nowe teorie i obiekty. Wykorzystuje myślenie krytyczne do własnej oceny problemu. Broni własnych rozwiązań i je argumentuje.

Źródło: opracowanie własne na podstawie taksonomii SOLO.

Wiele badań i wdrożeń w zakresie matematyki z zastosowaniem taksonomii SOLO wskazuje na jej dużą skuteczność⁶². W szczególności w takich obszarach tematycznych, jak: wielomiany⁶³, pojęcie funkcji⁶⁴, statystyka⁶⁵, a także w zakresie nauczania wczesnoszkolnego (wiązka zadań wykorzystująca budowanie domków z zapalek⁶⁶).

Poniżej przedstawione są przykłady z różnych poziomów ram kwalifikacji w obszarze liczb naturalnych i pochodnej funkcji jednej zmiennej (Tabela 2.5 oraz Tabela 2.6)

⁶² Hook P., Gravett C., Howard, M., and John E., *SOLO Taxonomy in Maths. Strategies for thinking like a mathematician*, Essential Resources Educational Publishers Limited, New Zealand. 2014.

⁶³ Chick H.L., Student responses to a polynomial problem in the light of the SOLO taxonomy, *Australian Senior Mathematics Journal*, 2, 1998, ss. 91-110.

⁶⁴ Coady C., Pegg J., Tertiary students' understanding of second order relationships in function notation, In G. Bell, 1994.

⁶⁵ Groth R., Bergner J., Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode, *Mathematical Thinking and Learning*, 8, 37-63, 2006.

⁶⁶ Hattie J.A.C., Brown G.T.L., *Cognitive Processes in as Ttle: The SOLO Taxonomy, as Ttle Technical Report #43*, University of Auckland/Ministry of Education, 2004, September, s. 12.

Tabela 2.5. Taksonomia SOLO, wykonywanie działań na liczbach naturalnych w zakresie 100, pierwszy poziom ram kwalifikacji

Poziom	Zadanie
Prestrukturalny	Oblicz: a) $2 \cdot 3$, b) $6 \cdot 8$, c) $6 \cdot 7$. Uwaga. Uczeń np. rozwiązuje a) i nie rozwiązuje b), c).
Monostrukturalny	Oblicz: a) $2 \cdot 3$, b) $6 \cdot 8$, c) $6 \cdot 7$.
Wielostrukturalny	Oblicz: a) $7 + 4$, b) $12 - 8$, c) $14 : 2$, d) $5 \cdot 8$.
Relacyjny	Oblicz: $3 + 12 \cdot 4 : 2$.
Poszerzonej abstrakcji	W miejsce kropek wstaw $+$, $-$, $:$, $\cdot$, aby zachować równość. $12 \dots 4 \dots 2 = 2$. Ile jest różnych rozwiązań.

Źródło: opracowanie własne z zastosowaniem taksonomii SOLO.

Tabela 2.6. Przykładowe zadania w taksonomii SOLO – Własności funkcji, szósty poziom ram kwalifikacji

Poziom	Zadanie
Prestrukturalny	Wyznacz pochodną funkcji: a) $f(x) = x^4$ b) $f(x) = xe^x$ c) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$ Student np. rozwiązuje a) i nie rozwiązuje b), c).
Monostrukturalny	Wyznacz pochodną funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$.
Wielostrukturalny	Zbadaj monotoniczność i wyznacz ekstrema funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ w zbiorze $x \in (0, \infty)$.
Relacyjny	Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$.
Poszerzonej abstrakcji	Skonstruuj funkcję g w taki sposób, aby funkcja $h = (f \circ g)$ nie posiadała pochodnej w punkcie $x = 1$, jeśli $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ dla $x \in (0, \infty)$.

Źródło: opracowanie własne z zastosowaniem taksonomii SOLO.

2.3.4. Taksonomia Feisel-Schmitz

Taksonomia Feisel-Schmitz jest to tzw. taksonomia techniczna. Pozostaje ona w pewnej relacji z taksonomią Blooma (Tabela 2.7 oraz Tabela 2.8).

Tabela 2.7. Taksonomia Feisel-Schmitz

Kategoria	Opis
Osądza	Ocenia wynik, ocenia różne rozwiązania, wybiera rozwiązanie optymalne.
Rozwiązuje (problem)	Charakteryzuje, analizuje.
Wyjaśnia	Podaje wynik, prezentuje koncepcję rozwiązania własnymi słowami.
Oblicza	Postępuje zgodnie z regułami i procedurami, aby uzyskać poprawny wynik.
Definiuje	Podaje lub opisuje definicję.

Źródło: Feisel L.D.⁶⁷.

Tabela 2.8. Przykład taksonomia Feisel-Schmitz

Kategoria	Przykład
Osądza	Czy rozwiązaniem równania $x^2 - 7x + 14 = 0$ jest $x = 0$?
Rozwiązuje (problem)	Wyznacz wzór na pierwiastki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a, b, c \in R$ i $a \neq 0$.
Wyjaśnia	Czy rozwiązaniem równania $x^2 - 7x + 14 = 0$ jest $x = 2$?
Oblicza	Rozwiąż równanie $x^2 - 7x + 14 = 0$.
Definiuje	Podaj definicję równania kwadratowego.

Źródło: opracowanie własne.

⁶⁷ Feisel L.D., *Teaching Students to Continue Their Education*, Proceedings of the Frontiers in Education Conference, 1986.

2.4. Kompetencje społeczne

Obok wiedzy i umiejętności, kompetencje społeczne odgrywają bardzo ważną rolę w Europejskich Ramach Kwalifikacji. Samo pojęcie kompetencji ma wiele znaczeń i jest rozważane na różnych płaszczyznach⁶⁸.

„Pojęcie kompetencji jest coraz powszechniej stosowane w edukacji. Występuje ono głównie w programach nauczania i zazwyczaj określa przewidywane kompetencje uczniów i nauczycieli oraz wskazuje możliwości dokonania ich pomiaru”⁶⁹.

2.4.1. Kompetencje społeczne dla poziomu szóstego w Polskiej Ramie Kwalifikacji

Kompetencje społeczne zdefiniowane są w ustawie o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji z 15 stycznia 2016 r.⁷⁰: Kompetencje społeczne to rozwinięta w toku uczenia się zdolność kształtowania własnego rozwoju oraz autonomicznego i odpowiedzialnego uczestniczenia w życiu zawodowym i społecznym, z uwzględnieniem etycznego kontekstu własnego postępowania.

W rozporządzeniu⁷¹ Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 26 września 2016 r. w sprawie charakterystyk drugiego stopnia Polskiej Ramy Kwalifikacji typowych dla kwalifikacji uzyskiwanych w ramach szkolnictwa wyższego po uzyskaniu kwalifikacji pełnej na poziomie 4 – poziomy 6-8 opisano kompetencje społeczne o charakterze ogólnoakademickim, wspólne dla poszczególnych obszarów kształcenia w ramach szkolnictwa wyższego (Tabela 2.9).

⁶⁸ Madalińska-Michalak J., Góralska R., Kompetencje emocjonalne nauczyciela, Wolters Kluwer, Warszawa 2012; Solarczyk-Szwec H., Walidacja kompetencji społecznych w kontekście Krajowych Ram Kwalifikacji dla Szkolnictwa Wyższego, E-mentor nr 5 (52) / 2013; Jagiełło-Rusiłowski A., Solarczyk-Szwec H., *Kwerenda badań nad kompetencjami społecznymi*, „Przegląd Badań Edukacyjnych”, 2013.

⁶⁹ Chrost M., *Kompetencje emocjonalne i społeczne młodzieży*, Akademia Ignatianum w Krakowie, 2012, s. 24.

⁷⁰ Ustawa z dnia 22 grudnia 2015 r. o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji, Załącznik do obwieszczenia Marszałka Sejmu Rzeczypospolitej Polskiej z dnia 25 października 2018 r. (poz. 2153) w sprawie ogłoszenia jednolitego tekstu ustawy o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji.

⁷¹ Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 26 września 2016 r. w sprawie charakterystyk drugiego stopnia Polskiej Ramy Kwalifikacji typowych dla kwalifikacji uzyskiwanych w ramach szkolnictwa wyższego po uzyskaniu kwalifikacji pełnej na poziomie 4 – poziomy 6–8 (Dz.U. z dnia 30 września 2016 r., poz. 1594).

Tabela 2.9. Kompetencje społeczne o charakterze ogólnoakademickim

Kategorie opisowe/aspekty o podstawowym znaczeniu	Poziom szósty: Absolwent jest gotów do:
Oceny/krytyczne podejście	krytycznej oceny posiadanej wiedzy; uznawania znaczenia wiedzy w rozwiązywaniu problemów poznawczych i praktycznych;
Odpowiedzialność/wypełnianie zobowiązań społecznych i działanie na rzecz interesu publicznego	wypełniania zobowiązań społecznych; współorganizowania działalności na rzecz środowiska społecznego; inicjowania działania na rzecz interesu publicznego; myślenia i działania w sposób przedsiębiorczy; uznawania znaczenia wiedzy w rozwiązywaniu problemów poznawczych i praktycznych;
Rola zawodowa/niezależność i rozwój etosu	odpowiedzialnego pełnienia ról zawodowych, w tym: – przestrzegania zasad etyki zawodowej i wymagania tego od innych; – dbałości o dorobek i tradycje zawodu.

Źródło: tamże.

Określając zestaw kompetencji społecznych, szkoły wyższe kształcące na kierunkach technicznych korzystają najczęściej z zapisów Rozporządzenia Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 2 listopada 2011 r. w sprawie Krajowych Ram Kwalifikacji dla Szkolnictwa Wyższego. W tym akcie prawnym w części „Opis efektów kształcenia w obszarze kształcenia w zakresie nauk technicznych”, w części „Profil praktyczny” sformułowano następujące kompetencje społeczne⁷²:

- rozumie potrzebę uczenia się przez całe życie; potrafi inspirować i organizować proces uczenia się innych osób;
- ma świadomość ważności i rozumie pozatechniczne aspekty i skutki działalności inżynierskiej, w tym jej wpływu na środowisko, i związanej z tym odpowiedzialności za podejmowane decyzje;
- potrafi współdziałać i pracować w grupie, przyjmując w niej różne role;
- potrafi odpowiednio określić priorytety służące realizacji określonego przez siebie lub innych zadania;
- prawidłowo identyfikuje i rozstrzyga dylematy związane z wykonywaniem zawodu;
- potrafi myśleć i działać w sposób przedsiębiorczy;

⁷² Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 2 listopada 2011 r. w sprawie Krajowych Ram Kwalifikacji dla szkolnictwa wyższego (Dz.U. nr 253, poz. 1520).

- ma świadomość roli społecznej absolwenta uczelni technicznej, a zwłaszcza rozumie potrzebę formułowania i przekazywania społeczeństwu, w szczególności poprzez środki masowego przekazu, informacji i opinii dotyczących osiągnięć techniki i innych aspektów działalności inżynierskiej; podejmuje starania, aby przekazać takie informacje i opinie w sposób powszechnie zrozumiały.

Poszczególne uczelnie mogą rozszerzyć listę kompetencji społecznych i uwzględnić specyfikę kierunku kształcenia. Poniżej podano dwa przykładowe zapisy dotyczące kompetencji społecznych na kierunkach technicznych, na studiach I stopnia.

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska Politechniki Łódzkiej, kierunek: budownictwo, studia I stopnia⁷³. Efekty kształcenia, kompetencje społeczne:

- potrafi systematycznie i konsekwentnie uzupełniać wiedzę, dzielić się nią z innymi i inspirować ich do dalszego rozwoju;
- potrafi pracować w zespole i przyjmować różne role, adekwatnie do rozwiązywanych zadań;
- ma świadomość konsekwencji decyzji projektowych na stan środowiska, szanuje zasady zrównoważonego rozwoju;
- ma świadomość odpowiedzialności za poziom bezpieczeństwa ludzi i niezawodność projektowanych konstrukcji;
- potrafi identyfikować problemy i poszukiwać najbardziej skutecznych sposobów ich rozwiązywania;
- potrafi pozyskiwać, weryfikować i syntetyzować informacje oraz formułować własne idee i tezy;
- potrafi podejmować funkcje kierownicze, organizować pracę zespołów wykonawczych;
- potrafi działać w sposób przedsiębiorczy, jasno formułować cele i zadania związane z zawodem inżyniera budownictwa;
- postępuje zgodnie z zasadami etyki zawodu inżyniera, przestrzega zasad prawnych;
- potrafi uczestniczyć w negocjacjach w procesach inwestycyjnych, badawczych, technicznych, przetargowych;
- potrafi skutecznie zaprezentować treści, właściwie dobierając język i formę wypowiedzi, także w sposób zrozumiały dla odbiorcy nieprofesjonalnego.

⁷³ Protokół dostępu: <https://programy.p.lodz.pl/?l=pl&s=programKształcenia&pk=budownictwo> [2019, styczeń].

Wydział Zarządzania i Ekonomii Politechniki Łódzkiej, kierunek: zarządzanie inżynierskie⁷⁴. Opis zakładanych efektów kształcenia, kompetencje społeczne. Osoba posiadająca kwalifikacje pierwszego stopnia:

- rozumie potrzebę aktualizowania wiedzy i umiejętności, potrafi samodzielnie je rozwijać;
- potrafi współdziałać i pracować w zespołach przyjmując w nich różne role, adekwatnie do rozwiązywanych zadań;
- potrafi określić priorytety związane z realizacją zadań zespołu, jak również zadań indywidualnych;
- identyfikuje problemy z podejmowaniem różnych zadań, w tym inżynierskich, w zmieniających się warunkach funkcjonowania organizacji;
- uczestniczy w przygotowaniu i realizacji projektów inżynierskich i organizacyjnych;
- inicjuje twórcze i przedsiębiorcze działania w organizacji z wykorzystaniem wiedzy zarządzania inżynierskiego;
- ma świadomość ważności pozatechnicznych skutków działalności inżynierskiej, w tym wpływu na środowisko;
- ma świadomość postępowania etycznego w ramach realizacji zadań organizacji.

Tworząc karty poszczególnych przedmiotów, wskazuje się zestawy efektów uczenia się. Najczęściej są to efekty związane z daną dziedziną. Warto zadać pytanie, rozwój których kompetencji społecznych może być wspierany na zajęciach z przedmiotów ogólnoakademickich, takich np. jak matematyka. Propozycja konkretnych rozwiązań w tym zakresie zostanie opisana w końcowej części rozdziału.

2.4.2. Kompetencje społeczne oczekiwane przez pracodawców zidentyfikowane w ramach badań Bilans Kapitału Ludzkiego

Szkoły wyższe kształcące na kierunkach technicznych podczas określania zestawu kompetencji społecznych, powinny uwzględniać obecne i przyszłe oczekiwania pracodawców.

Wiele interesujących informacji nt. oczekiwań pracodawców można znaleźć w raportach z badań prowadzonych w ramach projektu Bilans Kapitału Ludzkiego. W trakcie badań monitorowano, jak wygląda podaż i popyt na kompetencje, a także system kształcenia i rynek szkoleń w Polsce⁷⁵.

⁷⁴ Protokół dostępu: <https://docplayer.pl/40831715-Program-ksztalcenia-na-kierunku-studiow-wyzszych.html> [2019, styczeń].

⁷⁵ *Polski rynek pracy – wyzwania i kierunki działań na podstawie badań Bilans Kapitału Ludzkiego 2010-2015*, pod redakcją Jarosława Górniaka, Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości, Warszawa-Kraków 2015.

Ważnym punktem badań pracodawców było wskazanie kompetencji, które są potrzebne na rynku pracy i jaka jest ich podaż ze strony pracowników (aktualnych i potencjalnych – uczniów, studentów, bezrobotnych). „Kompetencjami, w przyjętym znaczeniu, są wiedza, umiejętności i postawy związane z wykonywaniem określonych czynności, niezależnie od tego, w jakim trybie zostały nabyte i czy są potwierdzone w wyniku procedury walidacyjnej”⁷⁶.

Pracodawcy zapytani o wskazanie najpotrzebniejszych kompetencji wymaganych od kandydatów do pracy na danym stanowisku, bez względu na zawód, do którego poszukiwali osób, wskazywali na trzy kategorie kompetencji:

- zawodowe: ściśle związane z zadaniami na danym stanowisku;
- samoorganizacyjne: zarządzanie czasem, samodzielność, podejmowanie decyzji i przejawianie inicjatywy, odporność na stres i chęć do pracy;
- interpersonalne: umiejętność kontaktowania się z ludźmi, bycia komunikatywnym, współpracy w grupie, a także rozwiązywania konfliktów międzyludzkich⁷⁷.

Pracodawcy wskazywali także, że ważna jest dla nich duża dyspozycyjność kandydata.

Wyniki badań realizowanych w ramach projektu Bilans Kapitału Ludzkiego są niezwykle cenne poprzez swój zasięg oraz powtarzalność w latach 2010- 2017. Zawierają ważne informacje o polskim rynku pracy, a także oczekiwaniach pracodawców wobec kandydatów.

Badania⁷⁸ prowadzone przez Szkołę Główną Handlową w Warszawie we współpracy z Amerykańską Izbą Handlową w Polsce (*American Chamber of Commerce in Poland* – AmCham) oraz Ernst & Young dotyczące poszukiwanych przez pracodawców kompetencji i kwalifikacji pokazują, że na „liście najważniejszych kompetencji oczekiwanych od absolwentów w pierwszej dziesiątce znalazły się – poza znajomością języków obcych – tzw. kompetencje miękkie. Są to umiejętności osobiste, interpersonalne i podstawowe zarządcze, takie jak: efektywna komunikacja, otwartość na uczenie się i rozwój, zaangażowanie, umiejętność pracy w zespole, umiejętność określania celów, etyczne postępowanie, odpowiedzialność, umiejętność organizacji pracy i efektywnego zarządzania czasem oraz elastyczność i zdolność do adaptacji. Te kompetencje

⁷⁶ Kocór M., Strzebońska A., Keler K., Kogo chcą zatrudniać pracodawcy? Potrzeby zatrudnieniowe pracodawców i wymagania kompetencyjne wobec poszukiwanych pracowników, Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości, Warszawa 2012.

⁷⁷ *Polski rynek pracy – wyzwania i kierunki działań na podstawie badań Bilans Kapitału Ludzkiego 2010-2015*, pod redakcją Jarosława Górniaka, Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości, Warszawa-Kraków 2015.

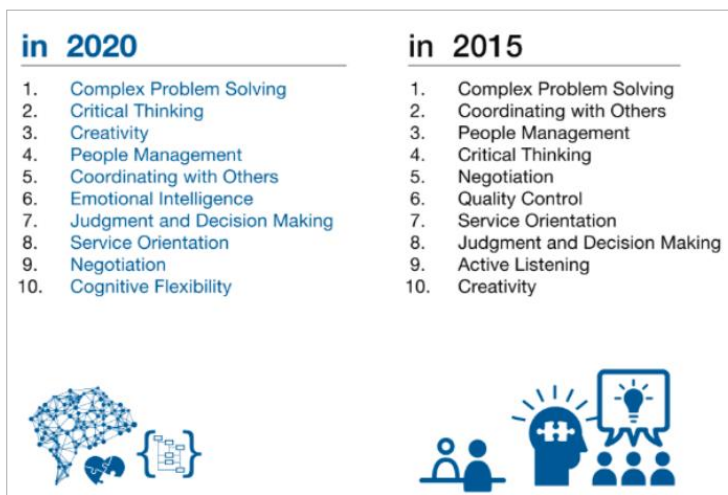
⁷⁸ Budnikowski A., Dąbrowski D., Gąsior U. i Macioł S., *Pracodawcy o poszukiwanych kompetencjach i kwalifikacjach absolwentów uczelni – wyniki badania*, E-mentor, 4(46), 2012, protokół dostępu: https://kariera.sgh.waw.pl/aktualnosci/praca/news_item.2013-06-12.4428821185 [2019, styczeń].

można uznać za uniwersalne i oczekiwane od absolwenta szkoły wyższej bez względu na ukończony przez niego kierunek studiów”⁷⁹.

Jak widać, część oczekiwanych przez pracodawców kompetencji jest zgodna z listą kompetencji społecznych opisanych w Polskiej Ramie Kwalifikacji dla poziomu szóstego.

Obecnie jesteśmy świadkami tzw. *czwartej rewolucji przemysłowej*. Pierwsza rewolucja przemysłowa to zmechanizowana produkcja wykorzystująca energię wody i pary. W drugiej rewolucji przemysłowej energię wody i pary zastąpiono energią elektryczną. Trzecia rewolucja przemysłowa to zastosowanie technologii informatycznych do procesu produkcji. Obecna, czwarta rewolucja przemysłowa charakteryzuje się łączeniem technologii, które zacierają linie pomiędzy sferami fizycznymi, cyfrowymi i biologicznymi⁸⁰.

W raporcie Światowego Forum Ekonomicznego z 2016 roku czytamy, że czwarta rewolucja przemysłowa obejmująca takie dziedziny, jak: sztuczna inteligencja, robotyka, genetyka, spowoduje duże zmiany na rynku pracy. Światowe Forum Ekonomiczne zaprezentowało listę 10 najważniejszych umiejętności (kompetencji społecznych), jakie powinien posiadać kandydat, aby być konkurencyjny na rynku pracy nawet już w 2020 roku. Rys. 2.1 przedstawia różnicę pomiędzy oczekiwaniami pracodawców w 2015 i 2020 roku.



Rys. 2.1. Top 10 umiejętności w 2015 i 2020 (World Economic Forum)

Źródło: Protokół dostępu; <https://www.weforum.org/agenda/2016/01/the-10-skills-you-need-to-thrive-in-the-fourth-industrial-revolution> [2019, styczeń].

Zaskakującym faktem jest zmieniająca się dynamika najważniejszych umiejętności, wymienianych przez pracodawców. Kreatywność i myślenie krytyczne, obok rozwiązywania złożonych problemów, stają się najbardziej pożądanymi umiejętnościami na rynku pracy.

⁷⁹ Tamże.

⁸⁰ Schwab K., *The Fourth Industrial Revolution*, Foreign Affairs, XII 2015.

Ostatnie Światowe Forum Ekonomiczne zaprezentowało dynamikę zmian znaczenia umiejętności na rynku pracy już w roku 2022 (Tabela 2.10).

Tabela 2.10. Poszukiwane umiejętności w 2022 r.

Coraz mniejsze znaczenie	Rosnące znaczenie
1. Zręczność manualna, wytrwałość i precyzja.	1. Myślenie analityczne i innowacyjność.
2. Pamięć i zdolności werbalne, słuchowe, przestrzenne.	2. Aktywne uczenie się i strategię uczenia się.
3. Zarządzanie zasobami finansowymi i materiałowymi.	3. Kreatywność, oryginalność, inicjatywność.
4. Instalowanie i utrzymywanie urządzeń technologicznych.	4. Projektowanie i programowanie technologii.
5. Czytanie, pisanie, aktywne słuchanie i obliczanie.	5. Krytyczne myślenie i analiza.
6. Zarządzanie personelem.	6. Rozwiązywanie złożonych problemów.
7. Kontrola jakości i świadomość zasad bezpieczeństwa.	7. Przywództwo (<i>leadership</i>) i wpływ społeczny.
8. Koordynacja i zarządzanie czasem.	8. Inteligencja emocjonalna.
9. Mówienie, słuchanie i sprawność wzrokowa.	9. Poszukiwanie przyczyn, istoty problemów i tworzenie idei.
10. Korzystanie z urządzeń technologicznych, monitoring i kontrola.	10. Analiza systemów i ich ewaluacja.

Źródło: Raport Światowego Forum Ekonomicznego „Przyszłość zawodów 2018”.

Profesor Prahlada Rao twierdzi, że obecny system edukacji lekceważy kreatywność. Twórczość musi być postrzegana jako umiejętność „wnoszenia czegoś do życia”, twórczość nie musi być obecna tylko u „geniuszy”⁸¹.

W pracy „Kompetencje społeczne jako jeden z efektów uczenia się w Krajowych Ramach Kwalifikacji w kontekście pytań o cele i funkcje edukacji”⁸² Mirosława Nowak-Dziemianowicz zwraca uwagę, że punktem wyjścia do formułowania listy kompetencji społecznych dla szkół wyższych powinny być następujące funkcje edukacji: adaptacyjna, emancypacyjna i krytyczna. Edukacja spełniająca te funkcje pozwala na rozwijanie u uczących się następujących kompetencji⁸³:

⁸¹ Światowy Tydzień Kreatywności, 2016.

⁸² Nowak-Dziemianowicz M., Kompetencje społeczne jako jeden z efektów kształcenia w Krajowych Ramach Kwalifikacji w kontekście pytań o cele i funkcje edukacji, IBE 2012, s. 9.

⁸³ Tamże, s. 10.

- kompetencje adaptacyjne, techniczne, pozwalające efektywnie i skutecznie działać, prowadzić badania i odnaleźć się na rynku pracy;
- kompetencje emancypacyjne, pozwalające na rozumienie otaczającej rzeczywistości, własnego działania oraz jego konsekwencji oraz na dokonywanie wyborów w oparciu o własne potrzeby, uzasadnienia, wartości, ze świadomością konsekwencji związanych z tymi wyborami;
- kompetencje krytyczne, pozwalające na dostrzeganie wszelkich uzasadnień legitymizujących własne działanie oraz praktykę społeczną; dyskurs władzy, gra interesów, dominacji, wykluczania, przemoc symboliczna.

W opracowaniu zaproponowano uszczegółowienie zapisów powyższych kompetencji społecznych dla absolwentów studiów I i II stopnia.

Planując proces nauczania i uczenia się na szóstym poziomie PRK w kontekście rozwijania kompetencji społecznych, konieczna jest wiedza dotycząca rozwoju tych kompetencji na poziomie czwartym (Rys. 2.2).



Rys. 2.2. Zmiany kompetencji społecznych nastolatka na czwartym etapie edukacji

Źródło: E. Filipiak, G. Siadak⁸⁴.

⁸⁴ Filipiak E., Siadak G., *Edukacja szkolna i pozaszkolna. Późna faza dorastania*, Niezbednik Dobrego Nauczyciela, pod red. A. Brzezińskiej, seria III, tom 6, Warszawa 2014, s. 43, protokół dostępu: <http://eduentuzjasci.pl/publikacje-ee-lista/224-niezbednik-dobrego-nauczyciela/seria-3-edukacja-w-okresie-dziecinstwa-i-dorastania/1209-niezbednik-dobrego-nauczyciela-seria-3-edukacja-w-okresie-dziecinstwa-i-dorastania.html> [2019, styczeń].

Jest to szczególnie ważne, gdyż młodzi ludzie, kończący szkołę ponadgimnazjalną/ponadpodstawową, podejmują decyzje o dalszej nauce, karierze zawodowej.

Jednak analiza zapisów w podstawach programowych dla czwartego etapu kształcenia⁸⁵ w zakresie kompetencji społecznych budzi wątpliwość, czy opisane wyżej kompetencje społeczne są rzeczywiście rozwijane. Z badań⁸⁶ przeprowadzonych w Katedrze Pedagogiki Szkolnej Wydziału Nauk Pedagogicznych Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu wynika, że „w podstawach programowych dominują dwie kompetencje społeczne – umiejętność krytycznej oceny (w tym informacji i przekazów medialnych) oraz umiejętność konstruktywnego rozwiązywania problemów”. Biorąc pod uwagę, że kolejne zmiany w podstawach programowych kształcenia ogólnego spowodowały literalne rozumienie zapisów przez środowisko oświatowe, można spodziewać się, że rozwijanie kompetencji społecznych na różnych przedmiotach powinno być powszechną praktyką.

Z podobnymi trudnościami spotykamy się także na poziomie szkolnictwa wyższego⁸⁷.

Z badań wynika, że na ostatnim etapie edukacyjnym z poziomu K-12 najlepiej rozwijane są kompetencje społeczne w zakresie krytycznej oceny⁸⁸. Analiza dokumentów programowych na różnych kierunkach technicznych pokazuje, że kompetencje społeczne określane są wyłącznie w programach kierunków studiów, **nie ma ich jednak w zestawach efektów uczenia się dla poszczególnych przedmiotów**. Nie ma zatem gwarancji, że wszystkie założone kompetencje społeczne są rozwijane w procesie uczenia się.

2.4.3. Rozwój kompetencji społecznych na zajęciach z matematyki na studiach inżynierskich I stopnia

Kompetencje społeczne powinny być połączone z wiedzą i umiejętnościami przedmiotowymi (np. z matematyką, fizyką czy chemią). Analizując Podstawę programową z matematyki na poziomie K-12⁸⁹, zauważamy, że zawiera ona znikome wymagania w tym zakresie.

Uwzględniając cytowane powyżej badania o pozorach realizacji kompetencji społecznych na różnych etapach kształcenia, a z drugiej strony ich wagę dla przyszłej kariery zawodowej i edukacyjnej, warto postawić pytanie o rolę

⁸⁵ Czwarty etap edukacyjny obecnie rozumiany jest jako szkoła ponadpodstawowa.

⁸⁶ Tamże.

⁸⁷ Jagiełło-Rusiłowski A., Solarczyk-Szwec H., *Kwerenda badań nad kompetencjami społecznymi*, „Przegląd Badań Edukacyjnych”, E-mentor nr 5 (52)/2013.

⁸⁸ Solarczyk-Szwec H., Kopińska V., Matusiak A., Kompetencje społeczne na wejściu w dorosłość. Krytyczna analiza podstawy programowej kształcenia ogólnego dla IV etapu edukacyjnego, Edukacja Dorosłych, 2016, nr 2.

⁸⁹ Protokół dostępu: <https://www.gov.pl/web/edukacja> [2019, styczeń].

przedmiotów ogólnoakademickich w rozwoju kompetencji społecznych studentów studiów inżynierskich.

Poniżej zostały przedstawione proponowane kompetencje społeczne oraz zróżnicowanie ich na poziomie szóstym i siódmym PRK (Tabela 2.11).

Tabela 2.11. Kompetencje krytyczne

Kompetencje krytyczne	
Absolwent studiów I stopnia (szósty poziom PRK)	Absolwent studiów II stopnia (siódmy poziom PRK)
Kieruje się w swoim działaniu zasadami zgodnymi z etyką zawodową; potrafi ich wybór ocenić i uzasadnić oraz wdrażać je w środowisku zawodowym.	Kieruje się w swoim działaniu zasadami zgodnymi z etyką zawodową; potrafi ich wybór ocenić i uzasadnić oraz wdrażać je i rozwijać w środowisku zawodowym, rozumie własną i zbiorową odpowiedzialność za ich wypełnienie.
Bierze odpowiedzialność za siebie i innych oraz skutki własnych wyborów, decyzji i działań w środowisku zawodowym i lokalnym.	Bierze odpowiedzialność za siebie i innych oraz skutki własnych wyborów, decyzji i działań w środowisku zawodowym i społecznym.
Jest świadomy własnych ograniczeń.	Jest krytyczny wobec siebie i innych.
Troszczy się o dorobek, tradycje i wartości dziedziny nauki i pracy, którą reprezentuje.	Chroni i rozwija dorobek, tradycje i wartości dziedziny nauki i pracy, którą reprezentuje.

Źródło: tamże.

Biorąc pod uwagę ważne dla szóstego poziomu PRK na studiach inżynierskich I stopnia kompetencje społeczne oraz kompetencje matematyczne, które student powinien nabyć i rozwijać, można przyjąć, że w ramach kursu matematyki powinno się wspierać rozwój następujących kompetencji społecznych w obszarach:

- kompleksowe rozwiązywanie problemów,
- myślenie krytyczne,
- innowacje,
- myślenie komputacyjne.

2.4.4. Kompleksowe rozwiązywanie problemów

Kompleksowe rozwiązywanie problemów to od wielu lat najbardziej pożądana umiejętność doceniana przez pracodawców. Składa się na nią wiele czynników. Kompleksowe podejście do problemu to spojrzenie na niego i jego rozwiązanie z wielu perspektyw.

Koncepcja kompleksowego rozwiązywania problemu po raz pierwszy została wprowadzona przez Dörnera i jego współpracowników w połowie lat 70⁹⁰. „Kompleksowe rozwiązywanie problemów ma na celu zmniejszenie bariery między danym stanem początkowym a zamierzonym stanem celu za pomocą czynności poznawczych i zachowania. Stan początkowy, zamierzony stan celu i bariery dowodzą złożoności, zmieniają się dynamicznie z czasem i mogą być częściowo nieprzejryste. W przeciwieństwie do rozwiązywania prostych problemów, w przypadku zagadnienia złożonego przystępując do jego rozwiązania nie znamy dokładnych cech stanu początkowego, zamierzonego stanu celu, ani tym bardziej barier pomiędzy nimi. Kompleksowe rozwiązywanie problemów oczekuje skutecznej interakcji między osobą rozwiązującą problem a warunkami sytuacyjnymi zależnymi od zadania. Wymaga użycia zasobów poznawczych, emocjonalnych i społecznych, jak również wiedzy (Frensch i Funke, 1995)”⁹¹.

Kompleksowe rozwiązywanie problemów podzielono na pięć obszarów badawczych⁹²:

- Poszukiwanie różnic indywidualnych – na przykład zdolność do zachowania spokoju w trudnych sytuacjach, a nie inteligencja (mierzona np. testami IQ) jest miarą wydajności.
- Poszukiwanie procesów poznawczych – proces związany ze zrozumieniem złożonych systemów dynamicznych.
- Poszukiwanie czynników systemowych – identyfikacja problemu, określenie jego poziomu trudności.
- Podejście psychometryczne – rozwijanie narzędzi pomiarowych jako alternatywne lub wspomagające rozwiązania.
- Podejście eksperymentalne – wykorzystuje się testowanie hipotez, akceptuje się rozwiązania pośrednie. Dopuszczalne są także rozwiązania, że test nie wykazał żadnych rozwiązań.

Ze względu na dynamikę rozwoju technologii informacyjnych złożoności problemów określa się ze względu na liczbę zmiennych⁹³. Funke i Greiff

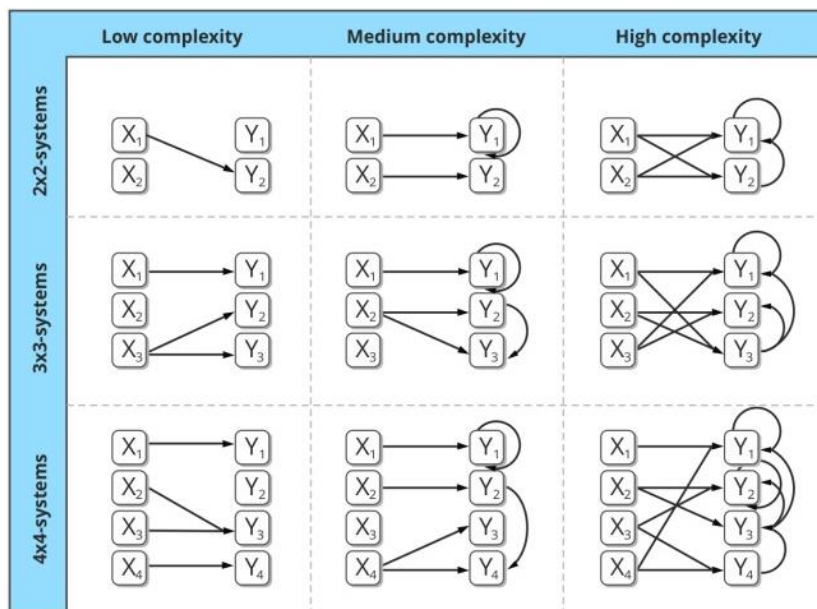
⁹⁰ Dörner D., Funke J., *Complex Problem Solving: What It Is and What It Is Not*, Front Psychology, 8, 1153, 2017.

⁹¹ Funke J., *Complex problem solving*. In N.M. Seel (Ed.), *Encyclopedia of the sciences of learning*, Vol. 38, pp. 682–685, Springer, Heidelberg 2012.

⁹² Dörner D., Funke J., *Complex Problem Solving: What It Is and What It Is Not*, Front Psychology, 8, 1153, 2017.

⁹³ Funke J., Greiff S., *Dynamic problem solving: multiple-item testing based on minimally complex systems*, in *Competence Assessment in Education. Research*,

zaproponowali koncepcję „minimalnych systemów złożonych”. Idea polega na tym, że nie określamy górnej granicy złożoności, ale poszukujemy rozwiązania od dolnej granicy. Strategia poszukiwania rozwiązania rozpoczyna się od minimalnej złożoności, a następnie przechodzi się do coraz większej złożoności (Rys. 2.3).



Rys. 2.3. Złożoność rozwiązania problemu: a) Liczba zmiennych wejściowych i wyjściowych (zmienia się od 2 do 4), b) Liczba połączeń (zmienia się od 1 do 12)

Źródło: tamże.

Funke i Greiff opisują cztery zjawiska istotne dla kompleksowego rozwiązania problemów.

- Zjawisko reakcji systemu intelektualnego – następuje obniżenie poziomu intelektualnego, tendencja do szybkiego działania, co powoduje zwiększenie ryzyka, zaprzestanie formułowania zbioru hipotez i sprowadzenie ich do sformułowania ogólnej hipotezy.
- Zjawisko różnic międzykulturowych – na przykład okazuje się, że rozwiązania są w konflikcie z prawem niemieckim, a w Polsce są dopuszczane.

Models and Instruments, Leutner D., Fleischer J., Grünkorn J., Klieme E., editors, Heidelberg, Springer, ss. 427-443, 2017.

- Zjawisko awarii – występuje ono na etapie wdrażania. Najczęściej spowodowane jest złożonością ryzyka. Także brak kontroli czy autorefleksji, mogą powodować pogłębienie się zjawiska awarii.
- Zjawisko braku treningów – nie można bazować na uniwersalnych rozwiązaniach. Należy przeprowadzić możliwie dużą liczbę testów.

Zdefiniowane problemy możemy podzielić na dwie kategorie:

- dobrze postawione problemy,
- źle postawione problemy.

Przykłady przedstawione są w tabeli 2.12.

Tabela 2.12. Podział problemów

Problem	
Dobrze postawiony	Źle postawiony
Wyznacz wartość liczby π z dokładnością do dziesięciu miejsc po przecinku.	Na rekrutację w sprawie pracy zgłosiły się dwie osoby: Andrzej: doświadczenie w zawodzie 5 lat, ukończone studia z wyróżnieniem; Adam: doświadczenie w zawodzie 10 lat, ukończone studia ze słabymi ocenami. Wybierz „najlepszą” kandydaturę?

Źródło: opracowanie własne.

Niestety w praktyce najczęściej spotyka się te źle postawione problemy. Rozwiązywanie ich wymaga różnych procesów poznawczych i mocno zaawansowanych modeli matematycznych⁹⁴.

W Rozdziale **2.4.2** przedstawiono przykład, jak kształtować umiejętności w zakresie kompleksowego rozwiązywania problemów na przedmiocie matematyka.

2.4.5. Myślenie krytyczne

Światowe Forum Ekonomiczne zwraca uwagę na rosnące zapotrzebowanie wśród przyszłych pracowników posiadających umiejętności myślenia krytycznego. „Kompetencje krytyczne to zdolności dialogowe, pozwalające na uzasadnienie własnych poglądów i swojego działania z różnorodnych perspektyw, wykrywanie niespójności wszelkich uprawomocnień, ujawnianie ideologicznych

⁹⁴ Stańdo J, *Using Neural Networks to Detect Errors in Coding Exams*, Informatics Engineering and Information Science, 252, 329-336, Springer, 2011.
Krawczyk-Stańdo D., Rudnicki M., Stańdo J., *Modern Regularization Techniques for Inverse Modelling: a Comparative Study*, Journal of Applied Computer Science, Vol. 19, 2011.

źródeł praktyki społecznej, demaskatorska analiza dyskursu władzy, gry interesów, dominacji, empatia i racjonalne uzasadnienie własnego sprzeciwu wobec przemocy symbolicznej czy niesprawiedliwości. To także zdolność do stosowania wiedzy i umiejętności oparta na misyjności – ma służyć dostrzeganiu luk w dotychczasowym dorobku naukowym i praktyce życiowej jako przestrzeni partnerskich negocjacji rozwiązań, własnej i kolektywnej kreatywności, wnoszenia wartości dodanej na rzecz zarówno dobrobytu, jak i dobrostanu ogółu społeczeństwa⁹⁵.

Kompetencja myślenia krytycznego jest potrzebna praktycznie we wszystkich dziedzinach nauki, a w szczególności w matematyce. Tworzeniu nowych teorii i twierdzeń, procesowi rozwiązywania problemów powinno towarzyszyć włączanie myślenia krytycznego w celu wzmocnienia pomysłów i kontestacji zastanego paradygmatu. Niestety w tym zakresie brakuje dobrych przykładów i podręczników szkolnych, które uwzględniają naukę myślenia krytycznego⁹⁶.

Włączając myślenie krytyczne w proces nauczania, nauczyciele obawiają się⁹⁷:

- zakwestionowania ich wiedzy,
- weryfikacji ich wiedzy przez uczniów,
- błędnych rozwiązań,
- nieznanego.

Myślenie krytyczne w obszarze matematyki możemy rozważać w trzech płaszczyznach:

1. Problem, który znajduje się w punkcie krytycznym. Potrzebne są działania w celu jego rozwiązania.
2. Wyrażenie krytyki rozwiązania problemu.
3. Szukanie rozwiązania pośredniego, przybliżonego oraz prezentacja jego wad i zalet.

W nauczaniu matematyki bardzo ważną rolę odgrywa myślenie logiczne, które jest podstawą myślenia krytycznego. Wyniki badań pokazują bardzo niski poziom myślenia logicznego uczniów po zakończeniu pierwszego poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji⁹⁸. Analizując kompetencje myślenia krytycznego z punktu widzenia uczenia się matematyki na studiach inżynierskich, można wyróżnić następujące elementy:

- rozpoznaje manipulacje,

⁹⁵ Jagiełło-Rusiłowski A., Solarczyk-Szwec H., *Kwerenda badań nad kompetencjami społecznymi*, „Przegląd Badań Edukacyjnych”, 2013, s. 4.

⁹⁶ Od 2000 roku recenzuję podręczniki szkolne w zakresie matematyki i informatyki dla Ministerstwa Edukacji Narodowej. Zrecenzowałem ponad 100 podręczników. Poruszane zagadnienia związane z myśleniem krytycznym to rzadkość.

⁹⁷ Opracowanie własne.

⁹⁸ Rygał G., Borowiecka A., *Poziom logicznego myślenia dzieci w wieku 9-10 lat. Komunikat z badań*, Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna Vol. 5 2/1 (10/1)/ 2017, ss. 217-224.

- rozpoznaje podchwytliwe działania sugerujące złe odpowiedzi,
- wyjaśnia skutki błędnego rozwiązania,
- dyskutuje różne rozwiązania zadań i problemów,
- prezentuje własne zdanie/rozwiązanie zadania lub problemu,
- poszukuje alternatywnych rozwiązań.

W rozdziale 2.4.9. przedstawiono przykłady, jak kształtować umiejętności w zakresie myślenia krytycznego na przedmiocie matematyka.

2.4.6. Innowacje

Termin „innovacja” został wprowadzony przez Josepha Schumpetera. Rozważa on pięć sytuacji:

1. Wprowadzenie nowego produktu, rozszerzenie własności produktu.
2. Zastosowanie nowych metod produkcji.
3. Otwarcie nowego rynku.
4. Zdobywanie nowego źródła dostawy lub półproduktów.
5. Wprowadzenie nowych struktur organizacyjnych, np. tworzenie lub usuwanie monopolu⁹⁹.

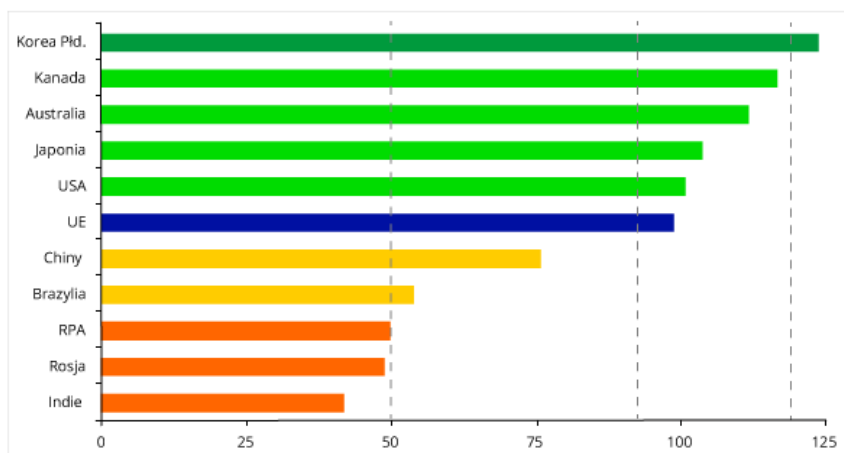
Według słownika innowacja to „wprowadzenie czegoś nowego; rzecz nowo wprowadzona; nowość, nowatorstwo, reforma¹⁰⁰”.

Co roku poziom innowacyjności różnych krajów jest badany przez Unię Europejską. Wyniki ustaleń komisji Innovation Union Scoreboard za 2017 rok przedstawiono poniżej w postaci rankingów The European Innovation Scoreboard (Wykres 2.2). Na podstawie tych danych poszczególne kraje mogą monitorować swoje wyniki i wprowadzać zmiany w polityce innowacyjności¹⁰¹.

⁹⁹ Schumpeter J.A., *The Theory of Economic Development: An Inquiry into Profits, Capital, Credit, Interest and The Business Cycle*, „Harvard Economic Studies”, Vol. 46, Harvard College, Cambridge 1934.

¹⁰⁰ *Słownik języka polskiego*, t. 1, Warszawa 1978, s. 792.

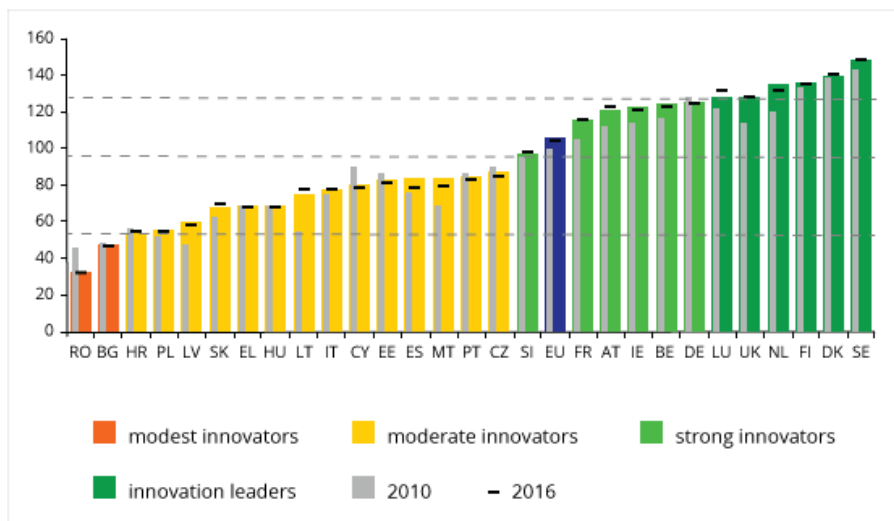
¹⁰¹ [Dostęp: https://ec.europa.eu/growth/industry/innovation/facts-figures/scoreboards_en].



Wykres 2.2. Kraje pod względem innowacyjności w 2017 r.

Źródło: European Innovation Scoreboard 2018.

Unia Europejska odnotowała wzrost w obszarze innowacyjności w stosunku do poprzednich lat i jest praktycznie na równi ze Stanami Zjednoczonymi. Jednak daleko jej jeszcze do Kanady czy Korei Południowej. Sytuacja w poszczególnych krajach Unii Europejskiej jest różna (Wykres 2.3). Duża część krajów odnotowała wzrost, jednak część niestety spadek.



Wykres 2.3. Kraje Unii Europejskiej pod względem innowacyjności w 2017 r.

Źródło: European Innovation Scoreboard 2018.

Kolorowe słupki przedstawiają wyniki państw członkowskich z 2017 r. w stosunku do wyników UE w 2010 r., obliczone na podstawie najbardziej aktualnych danych dla 27 wskaźników. Poziome kreski pokazują wyniki z 2016 r. w stosunku do wyników UE w 2010 r., obliczone na podstawie najbardziej aktualnych danych dla 27 wskaźników. Szare słupki obrazują wyniki państw członkowskich w 2010 r. w porównaniu z wynikami UE w 2010 r. W odniesieniu do wszystkich lat zastosowano tę samą metodę pomiarów. Linie przerywane przedstawiają wartości progowe między grupami w 2017 r., porównując wyniki państw członkowskich w 2017 r. z wynikami UE w 2017 r.

Polska plasuje się poniżej średniej Unii Europejskiej. Należmy do krajów tzw. umiarkowanych innowatorów, i w dodatku, jak widać z rysunku, graniczymy z krajami słabych innowatorów. To czerwone światło dla polskiej edukacji. Nauczyciele muszą zrozumieć, że postawę innowacyjności należy rozwijać u wszystkich uczących się na każdym etapie edukacji, a nie tylko u „wybrańców”.

„Jednym z najważniejszych zadań nauczycielskich jest rozwijanie, za pomocą przekazywanych treści, sił twórczych i zdolności innowacyjnych studentów – czyli zdolności, uzdolnień i talentów, zainteresowań zamiłowań i pasji twórczych. Student powinien być wyposażony w postawy, umiejętności i wiedzę pozwalającą mu na aktywne, twórcze i podmiotowe funkcjonowanie w dalszym życiu. Praca nauczyciela polega więc na ciągłym twórczym poszukiwaniu, przymierzaniu swoich wymagań do możliwości i potrzeb innych”¹⁰².

Rozwiązując zadania i problemy matematyczne, można rozwijać kompetencje w zakresie innowacji przez:

- tworzenie nowych obiektów,
- tworzenie nowych metod rozwiązania,
- wzmacnianie działań monopolistycznych,
- rozbijanie rozwiązań monopolistycznych.

„Odkrycia matematyczne są przejawem kunsztu myślenia człowieka. Charakteryzują się precyzją, spójnością i sprawnością podążania drogami abstrakcji. Aby do nich doszło, konieczne jest przebywanie twórcy na pewnej orbicie – kultury matematycznej. Również w życiu codziennym inżyniera, projektanta, ogrodnika czy kucharki kultura matematyczna w sposób niedostrzegalny pomaga klarownie wyrażać swoje myśli, prezentować sądy, przybliżać, szacować, abstrahować czy krytycznie odnosić się do medialnego smogu informacji. Pomaga zgrabnie prowadzić rozumowanie z przypuszczenia, trafnie, a nierzadko wręcz optymalnie rozwiązywać różnorodne problemy”¹⁰³.

¹⁰² Nowak J., Sokal U., *Wyzwania dydaktyczne stawiane nauczycielom akademickim*, [w:] *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*, pod red. Huryło L., Klus-Stańska D., Łojko M., Impuls, Kraków 2009, s. 482.

¹⁰³ Makiewicz M., *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura*, *Studia Pedagogiczne* t. L XIV/2011 PL, 2011, s. 305.

W rozdziale 2.4.9. przedstawiono przykłady kształtowania umiejętności w zakresie innowacji na kursie z matematyki. Największe innowacje w matematyce od czasów starożytnych, to:

- Logarytmy (John Napier, Joost Bürgi, Henry Briggs);
- Algebra macierzy (Arthur Cayley);
- Liczby zespolone (Girolamo Cardano, Rafael Bombelli);
- Geometria nieeuklidesowa (Carl Gauss, Nikolai Lobachevsky, János Bolyai, Bernhard Riemann);
- Logika binarna (George Boole);
- Ułamki dziesiętne (Simon Stevin, Abu'l Hasan Al-Uqlidisi);
- Liczba zero;
- Liczby ujemne (Brahmagupta);
- Rachunek różniczkowy całkowity (Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz);
- Cyfry arabskie¹⁰⁴.

Spójrzmy na innowacje z jeszcze innej strony. Beata Przyborowska zwraca uwagę na negatywne skutki ich wdrażania. Twierdzi, że mogą one wywoływać kryzysy, a także mogą obrócić się przeciwko człowiekowi. Wprowadzanie innowacji może nawet doprowadzić do załamania się cywilizacji¹⁰⁵. W mojej ocenie tworząc innowacje, nie należy ich hamować, ale warto w ocenie krytycznej uwzględniać pogląd Beaty Przyborowskiej.

2.4.7. Myślenie komputacyjne¹⁰⁶

Pojęcie myślenia komputacyjnego (ang. *computational thinking*) w edukacji pojawiło się niedawno. W podstawach programowych kształcenia ogólnego funkcjonowało jedynie określenie „myślenie matematyczne”, które opisywało jedną z najważniejszych kompetencji. Koncepcja myślenia komputacyjnego została zapoczątkowana w 2006 roku przez Winga¹⁰⁷. Na podstawie analizy literatury proces myślenia komputacyjnego można opisać w sześciu obszarach:

- dekompozycja: sformułowanie problemu i rozłożenie go na części składowe,
- abstrahowanie: eliminowanie elementów nieistotnych,
- projektowanie algorytmów: rozwiązywanie problemu,

¹⁰⁴ Siegfried T., *Top 10 mathematical innovations*, ScienceNews, Magazine of the Society for Science & the Public, August, 2014.

¹⁰⁵ Przyborowska B., *Pedagogika innowacyjności. Między teorią a praktyką*, Wyd. UMK, Toruń 2013, s. 22.

¹⁰⁶ Opracowano na podstawie: Stańdo J., Stasiak A., *Myślenie komputacyjne w nauczaniu matematyki*, EDUAKCJA Magazyn Edukacji Elektronicznej Nr 2 (16)/2018.

¹⁰⁷ Wing J.M., *Computational thinking*, Communications of the ACM, 49(3), 2006, ss. 33-35.

- debugowanie: znajdowanie i usuwanie usterek,
- iterowanie: wielokrotne stosowanie procedury, przybliżanie się do rozwiązania,
- uogólnianie: opisywanie modelu problemu¹⁰⁸.

Barr i Stephenson¹⁰⁹ przedstawili koncepcje myślenia komputacyjnego na poziomie K-12. Podjęto próbę zebrania i zbadania pojęcia myślenia komputacyjnego na podstawie ponad 120 publikacji¹¹⁰. Denning¹¹¹ twierdzi, że fundamentalne założenie myślenia komputacyjnego to radzenie sobie z różnymi poziomami abstrakcji. Warto podkreślić, że myślenie komputacyjne dość często jest błędnie utożsamiane z koniecznością zastosowania technologii informacyjno-komunikacyjnej lub programowania.

Maciej Sysło twierdzi, że myślenie komputacyjne można kształtować wśród wszystkich uczniów na zajęciach z różnych przedmiotów¹¹². „Ważne jest, abyśmy rozwinęli zrozumienie przez nauczycieli myślenia komputacyjnego w kontekście przedmiotu, którego uczą¹¹³.”

Wielu naukowców twierdzi, że myślenie komputacyjne powinno być wprowadzane już we wczesnej edukacji. Jego rozwój nie przychodzi naturalnie, powinno być wdrażane na wszystkich przedmiotach, a w szczególności na matematyce¹¹⁴. Przeprowadzone badania wykazały, że nauczyciele mają duże obawy związane z wprowadzeniem podstaw myślenia komputacyjnego na poziomie edukacji wczesnoszkolnej¹¹⁵. Ponad 40% nauczycieli wskazuje na konieczność uzupełnienia własnych kompetencji w tym zakresie. Myślenie komputacyjne powinno być włączone do obszaru kompetencji społecznych.

¹⁰⁸ Shutea V., Suna Ch., Asbell-Clarke J., *Demystifying computational thinking*, Educational Research Review, Volume 22, November 2017, ss. 142-158.

¹⁰⁹ Barr V., Stephenson C., *Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community?* ACM Inroads, 2(1), 2011, ss. 48-54.

¹¹⁰ Kalelioglu F., Gulbahar Y., Kukla V., *A Framework for Computational Thinking Based on a Systematic Research Review*, Baltic J. Modern Computing, Vol. 4 (2016).

¹¹¹ Denning P.J., *The profession of IT. Beyond computational thinking*, Communications of the ACM, 52(8), 2009 ss. 28-30.

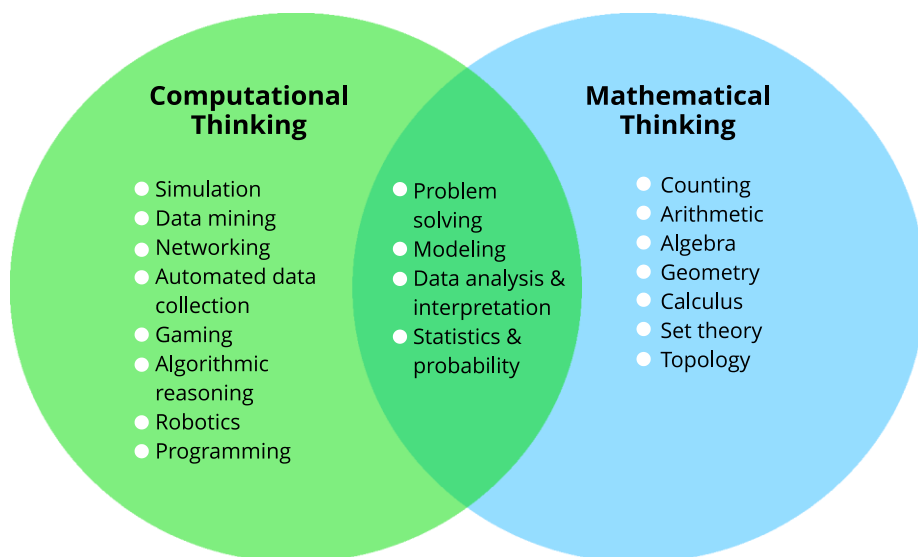
¹¹² Sysło M., *Myślenie komputacyjne. Nowe spojrzenie na kompetencje informatyczne*, Materiały z konferencji „Informatyka w Edukacji, XI, UMK Toruń, 2014, ss. 15-32.

¹¹³ Yadav, A., Mayfield, C., Zhou, N., Hambrusch, S., & Korb, J.T., *Computational thinking in elementary and secondary teacher education*, ACM Transactions on Computing Education, 14(1), 2014, ss. 1-16.

¹¹⁴ Sanford J.F., Naidu J.T., *Computational thinking. Concepts for grade school*, Contemporary Issues in Education Research, Volume 9, Number 1, 2016, ss. 23-32.

¹¹⁵ Majewska K., *Trudności w nauczaniu programowania na poziomie edukacji wczesnoszkolnej z perspektywy nauczycieli – absolwentów szkół pedagogicznych*, E-mentor nr 3 (75)/2018.

Myślenie matematyczne to rozwiązywanie problemów tam, gdzie ono jest możliwe, lub stwierdzenie braku rozwiązania. Myślenie komputacyjne to poszukiwanie akceptowalnych i użytecznych rozwiązań problemów (Rys. 2.4).



Rys. 2.4. Myślenie matematyczne i komputacyjne

Źródło: Shutea V., Suna Ch., Asbell Clarke J.¹¹⁶.

W myśleniu komputacyjnym nie tylko jest miejsce dla problemów mających opisaną strukturę, ale także dotyczy ono problemów, z którymi się spotykamy w otaczającej nas rzeczywistości, w codziennym życiu, których rozwiązań nie da się zmierzyć.

Rozważmy sytuację problemową. Uczeń zapomniał z domu zabrać cyrkla na lekcję matematyki.

Myślenie tradycyjne

Uczeń dzwoni do rodziców i prosi ich o przyniesienie cyrkla do szkoły. Za brak cyrkla nauczyciel wystawia negatywną ocenę za przygotowanie do lekcji.

Myślenie komputacyjne

Uczeń będzie uczył się samodzielnego rozwiązania problemów. Przed wejściem do szkoły umieszczamy plakat skierowany do rodziców (Rys. 2.5).

¹¹⁶ Shutea V., Suna Ch., Asbell-Clarke J., *Demystifying computational thinking*, Educational Research Review Volume 22, November 2017, ss. 142-158.

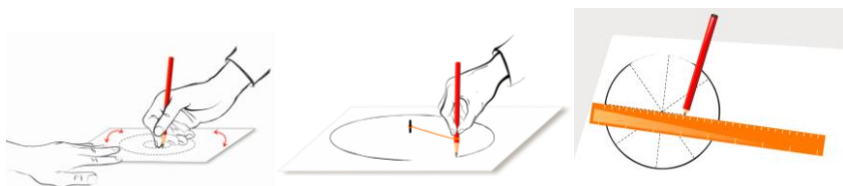


Rys. 2.5. Plakat przy wejściu do szkoły

Źródło: opracowanie własne.

Poszukiwanie rozwiązań alternatywnych (Rys. 2.6).

1. Uczeń, trzymając ołówek blisko palca, obraca kartkę.
2. Uczeń obraca ołówek przymocowany do sznurka.
3. Uczeń rysuje kilka średnic, używając linijki, i wykreśla okrąg.



Rys. 2.6. Trzy sposoby rysowania okręgu

Źródło: opracowanie własne.

Pozytywna ocena opisanych rozwiązań zastosowanych przez uczniów jest uczeniem myślenia komputacyjnego, wystawiona ocena negatywna za brak cyrkla to hamowanie rozwoju myślenia komputacyjnego.

Nauczyciele w procesie nauczania powinni uwzględnić, że rozwój zmieniającej się dynamicznie gospodarki polega na przejściu od tradycyjnego myślenia matematycznego do myślenia komputacyjnego¹¹⁷.

Myślenie komputacyjne w matematyce to:

- tworzenie dekompozycji problemu,
- projektowanie algorytmu rozwiązania problemu,

¹¹⁷ Stańdo J., Mumryło M., *Sposoby kształtowania u uczniów zdolności algorytmicznego rozwiązywania problemów*, Seria: Rozwój myślenia komputacyjnego w szkole ponadpodstawowej, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2017; Stańdo J., Mumryło M., *Sposoby kształtowania u uczniów zdolności algorytmicznego rozwiązywania problemów*, Seria: Rozwój myślenia komputacyjnego w klasach IV-VIII szkoły podstawowej, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2017.

- tworzenie akceptowalnego (przybliżonego) rozwiązania,
- uogólnianie rozwiązania,
- stosowanie rozwiązania heurystycznego,
- dostrzeganie niejednoznaczności,
- rozwiązywanie problemu z zastosowaniem iteracji¹¹⁸.

W rozdziale 2.4.9. przedstawiono przykłady, jak kształtować umiejętności w zakresie myślenia komputacyjnego na przedmiocie matematyka.

Mocno rozbudowana taksonomia myślenia komputacyjnego w obszarze matematyki została zaproponowana przez amerykańskich naukowców:

- praktyka danych,
- praktyka modelowania i symulacji,
- praktyka rozwiązywania problemów obliczeniowych,
- praktyka myślenia systemowego¹¹⁹.

Słowo „praktyka” zostało tu użyte dla podkreślenia, że nie są to tylko umiejętności, ale także potrzebna jest wiedza¹²⁰. Poniżej przedstawiony jest podział na podkategorie (Rys. 2.7).

Data Practices	Modeling & Simulation Practices	Computational Problem Solving Practices	System Thinking Practices
Collecting Data	Using Computational Models to Understand a Concept	Preparing Problems for Computational Solutions	Investigating a Complex System as a Whole
Creating Data	Using Computational Models to Find and Test Solutions	Programming	Understanding the Relationships within a System
Manipulating Data	Assessing Computational Models	Choosing Effective Computational Tools	Thinking in Levels
Analyzing Data	Designing Computational Models	Assessing Different Approaches/Solutions to a Problem	Communicating Information about a System
Visualizing Data	Constructing Computational Models	Developing Modular Computational Solutions	Defining Systems and Managing Complexity
		Creating Computational Abstractions	
		Troubleshooting and Debugging	

Rys. 2.7. Taksonomia myślenia komputacyjnego w matematyce

Źródło: Weintrop D., Beheshti E., Horn M., Orton K., Jona K., Trouille L., Wilensky U., *Defining computational thinking for mathematics and science classrooms*, Journal of Science Education and Technology, Springer 2015.

¹¹⁸ Opracowanie własne na podstawie publikacji z zakresu myślenia komputacyjnego.

¹¹⁹ Weintrop D., Beheshti E., Horn M., Orton K., Jona K., Trouille L., Wilensky U., *Defining computational thinking for mathematics and science classrooms*, Journal of Science Education and Technology, Springer 2015.

¹²⁰ Tamże.

Myślenie komputacyjne – mimo że sam termin staje się co raz bardziej popularny – przysparza wielu problemów zarówno autorom celów kształcenia, jak i samym oceniającym. Czy myślenie komputacyjne i jego stosowanie można poddać ocenie? Czy myślenie komputacyjne można rozpatrywać w kontekście Polskiej Ramy Kwalifikacji? Jeżeli spojrzymy na edukację jako na proces trwający przez całe życie, w którym kładziemy nacisk na równe współistnienie uczenia się formalnego, pozaformalnego i nieformalnego, kwestia uznawania wiedzy, umiejętności i kompetencji społecznych osiągniętych na różne sposoby staje się niezmiernie istotna. Głównie dlatego, że pokazuje wszelkie wysiłki edukacyjne podejmowane zarówno w systemie szkolnym, ale również poza nim, na każdym etapie życia, jednak przede wszystkim motywuje do ciągłego samokształcenia.

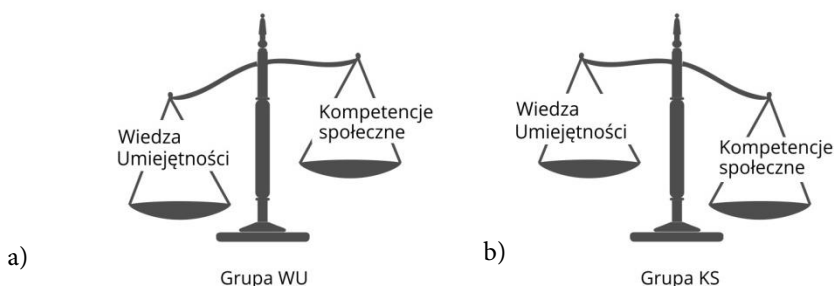
Nasuwa się pytanie: jak rozpoznać myślenie komputacyjne, jak odróżnić je od wiedzy, umiejętności i ich zastosowania w rozwiązywaniu problemów? Czy efekt uczenia się został osiągnięty dzięki ugruntowanej wiedzy, wyćwiczonym umiejętnościom, czy jednak jest sposobem na tyle innowacyjnym, aby mógł być zakwalifikowany jako myślenie komputacyjne? Skoro myślenia komputacyjnego nie możemy zakwalifikować, nie mieści się ono w ramach efektów uczenia się jako wiedza czy umiejętności, naturalną rzeczą będzie próba kwalifikacji myślenia komputacyjnego jako formy kompetencji społecznych. Zwróćmy uwagę, że jeżeli walidacji wiedzy czy umiejętności nie stanowi żadnego problemu, to kompetencje społeczne niejednokrotnie sprawiają wiele kłopotów, zarówno podczas próby ich trafnego zdefiniowania, jak i sprawdzenia czy ocenienia.

Z punktu widzenia pedagogicznego kompetencje społeczne można podzielić na adaptacyjne i emancypacyjno-krytyczne¹²¹. Jeżeli ocenie podlegać będą wiedza, umiejętności oraz wartości i postawy, które możemy dostrzec w określonych sytuacjach, np. podczas komunikowania się, dyskusowania, współpracy w grupie, będziemy walidować kompetencje społeczne w kontekście adaptacyjnym. Natomiast w przypadku kompetencji emancypacyjno-krytycznych ocenie podlegają struktury poznawcze, np. sposób myślenia, oceniania, interpretacji oraz zdolność do innowacji, poszukiwania nowych, alternatywnych rozwiązań co warunkuje niepowtarzalność kompetencji. W tak zdefiniowane kompetencje w sposób oczywisty wpisuje się myślenie komputacyjne. Istotne staje się wprowadzenie ich już na pierwszym etapie edukacyjnym, dopiero wówczas będziemy mieć szansę na zwiększenie kreatywności na wyższych etapach edukacyjnych, również wśród studentów szkół wyższych.

¹²¹ Solarczyk-Szwec H., Walidacja kompetencji społecznych w kontekście Krajowych Ram Kwalifikacji dla Szkolnictwa Wyższego, E-mentor, nr 5 (52)/2013.

2.4.8. Przykłady sytuacji dydaktycznych pozwalających na rozwój kompetencji społecznych w ramach kursu matematyki

Projektując proces nauczania i uczenia się, konieczne jest określenie zakładanych efektów uczenia się w zakresie wiedzy, umiejętności i kompetencji społecznych. W określonych sytuacjach dydaktycznych możemy wprowadzić wagę dla poszczególnych efektów uczenia się. W przypadku kursu z matematyki, rozwiązując różne problemy, można w większym stopniu skoncentrować się na wiedzy i umiejętnościach, ale też wykorzystać sytuację do rozwijania kompetencji społecznych (Rys. 2.8a) lub skoncentrować się na kompetencjach społecznych wykorzystując wiedzę i umiejętności (Rys. 2.8b)



Rys. 2.8. Grupy efektów uczenia się

Źródło: opracowanie własne.

Na potrzeby dalszych rozważań podzielimy efekty uczenia się na dwie grupy:

- wiedza i umiejętności – grupa WU,
- kompetencje społeczne – grupa KS.

Przykład

Grupa: WU.

Efekt uczenia się: Wyznacza styczną do okręgu w ustalonym punkcie.

Zadanie sprawdzające: Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$, przechodzącej przez punkt $A(3,4)$.

Grupa: KS.

Efekt uczenia się w zakresie kompetencji społecznych: Dyskutuje w zakresie rozwiązywania problemów, stosując różne metody.

Zadanie sprawdzające: Znajdź równanie stycznej do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 = 25$, przechodzącej przez punkt $A(3,4)$, rozwiązując to zadanie na siedem zasadniczo różnych sposobów:

- 1) przez rozważanie pęku prostych przechodzących przez punkt A i zastosowanie wzorów redukcyjnych w odniesieniu do tangensa kąta nachylenia stycznej do osi OX ,

- 2) przez obliczenie współrzędnych punktu przecięcia stycznej z osią OX (z podobieństwa trójkątów) i zastosowanie wzoru na prostą przechodzącą przez dwa punkty,
- 3) przez rozwiązywanie układu równań z parametrem, gdzie jedno z rozwiązań przedstawia pęk prostych przechodzących przez punkt A , a drugie jest równaniem okręgu,
- 4) za pomocą warunku prostopadłości wektorów,
- 5) za pomocą definicji stycznej jako granicznego położenia stycznej do okręgu,
- 6) za pomocą warunku prostopadłości prostych,
- 7) za pomocą własności przekształceń geometrycznych (translacji lub obrotu)¹²².

2.4.9. Przykłady w poszczególnych obszarach kompetencji społecznych

Kompleksowe rozwiązywanie problemów

Kompleksowe rozwiązywanie problemów w procesie nauczania matematyki służy przede wszystkim temu, aby nie doprowadzić do przekonania, że każdy problem matematyczny da się szybko i łatwo rozwiązać. Bardzo rzadko analizuje się zadania, które nie mają rozwiązania lub nie mają jednoznacznego rozwiązania. Stąd powstaje fałszywy obraz budowany od najmłodszych lat, że matematyka podaje dokładne rozwiązanie każdego problemu.

Przykład 1

Przedstawmy problem, który mógłby zilustrować złożoność rozwiązania. Trener drużyny siatkarskiej ma do dyspozycji 24 zupełnie nieznanymi sobie zawodników, nie wie, jaki poziom sobą reprezentują ani jak współpracują ze sobą na boisku. Musi stworzyć 6-sobowy skład na najbliższy mecz. Jeżeli trener chciałby przetestować każdy z możliwych składów, musiałby przetestować 134 596 możliwości $\left(C_{24}^6 = \binom{24}{6} = \frac{24!}{6!(24-6)!}\right)$.

Rozpatrywanie każdego z przypadków jest wręcz niemożliwe. Jaką strategię mógłby przyjąć?

Rozpatrzmy pierwszą sytuację: trener dzieli losowo zawodników na cztery sześciuosobowe zespoły. Zakładamy niską złożoność problemu – trener losowo wybiera dwa spośród czterech zespołów. Reprezentację stworzą zawodnicy drużyny, która wygrywa set.

Aby pogłębić analizę, przyjmujemy średnią złożoność problemu – każda z czterech drużyn zagra po jednym secie z przeciwnikiem. Reprezentację stworzą zawodnicy drużyny, która zdobyła największą liczbą punktów. Tutaj trener może

¹²² Za: Makiewicz M., *O fotografii w edukacji matematycznej*, Uniwersytet Szczeciński, 2013, s. 24.

sprawdzić zawodników wewnątrz zwycięskiego zespołu, aby odpowiednio dobrać ich do pozycji zajmowanych na parkiecie. Przy wysokiej złożoności problemu każda z drużyn zagra dwa mecze. Dwie najlepsze zmierzą się ze sobą. Analogicznie jak w poprzednim przypadku, trener może sprawdzić zawodników wewnątrz zwycięskiego zespołu, aby odpowiednio dobrać ich do pozycji zajmowanych na parkiecie.

Rozważmy drugą sytuację: trener dzieli losowo zawodników na sześć cztero-osobowych zespołów. Ponownie problem rozwiązujemy na trzech płaszczyznach złożoności: niskiej, średniej i wysokiej. W każdym z przypadków liczba rozegranych setów wzrasta. Mimo że nie zakładamy, że każdy z zespołów zagra z każdym, wzrasta prawdopodobieństwo wybrania lepszej reprezentacji. W trzeciej sytuacji trener dzieli zawodników na osiem trzyosobowych zespołów. Wraz ze wzrostem liczby minizespołów liczba rozgrywek wewnętrznych wzrasta i prawdopodobieństwo wybrania najlepszej reprezentacji jest jeszcze większe. Zwróćmy uwagę, że w rozwiązaniu problemu możemy ograniczyć się tylko do wzrostu złożoności lub tylko do podziału na mniejsze podzbiory badane (wzrost podzbiorów), pozostawiając złożoność na tym samym poziomie. Na wybór rozwiązania nie tylko ma wpływ największe przybliżenie, ale również czas, jaki został nam zaproponowany. Takie podejście będzie wiązało się z optymalizacją rozwiązań.

Poniżej przedstawiono inny przykład z zakresu matematyki, który może być wykorzystany w pracy z uczniami (Tabela 2.13).

Tabela 2.13. Kompetencje społeczne w zakresie kompleksowego rozwiązywanie problemów

Kompetencja	Przykład z komentarzem
Rozwiązuje problemy o złożonej strukturze 	W klasie jest 16 uczniów. Jak wybrać 4-osobowe zespoły, tak aby odległości zamieszkania uczniów w danej grupie były jak najmniejsze. Zauważmy, że wszystkich możliwych zespołów jest: $C_{16}^4 = \binom{16}{4} = \frac{16!}{4!(12)!} = 1820$.

Źródło: opracowanie własne.

Ocena uczących się za rozwiązanie założonego problemu to nie ocena za znalezienie możliwie jak najlepszego rozwiązania.

Ocenie w ramach kompetencji społecznych powinny podlegać obszary:

- współpraca w grupie;
- czas rozwiązania problemu;

- wybór strategii rozwiązania¹²³;
- praktyczne wdrożenie rozwiązania.

Dzięki zastosowaniu technologii komputerowych istnieje wiele statystycznych modeli służących do szacowania poziomu umiejętności rozwiązywania problemów złożonych¹²⁴.

Myślenie krytyczne

Rozwiązywaniu problemów matematycznych powinno towarzyszyć myślenie krytyczne. Jest to trudna umiejętność, ale należy ją systematycznie wdrażać. W momencie gdy uczący się poddaje interpretacji, ocenie, refleksji swoje działania, wówczas rozpoczyna proces włączania myślenia krytycznego.

Poniżej przedstawiono przykłady z zakresu matematyki prowokujące uczących się do myślenia krytycznego (Tabela 2.14). Warto mieć na uwadze, że myślenie krytyczne to obalanie wielkich teorii, kwestionowanie rzeczy wydających się oczywistymi lub zastanymi paradygmatami.

Tabela 2.14. Kompetencje społeczne w zakresie myślenia krytycznego

Kompetencja	Przykład z komentarzem
Rozpoznaje manipulacje 	Sytuacja 1. Towar obniżono o 10%, a następnie o kolejne 10%. Sytuacja 2. Towar obniżono o 20%. Porównaj przedstawione sytuacje. Jest to często stosowany tzw. chwyt marketingowy.
Rozpoznaje podchwytliwe działania sugerujące złe odpowiedzi	Wiadomo, że $\sqrt{36 \cdot 100 \cdot 144} = 6 \cdot 10 \cdot 12 = 720.$ Czy $\sqrt{36 + 100 + 144} = 6 + 10 + 12 = 28?$ Uczący się, sugerując się własnością, że $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a \cdot b \text{ dla } a, b \geq 0, \text{ może przypuszczać,}$

¹²³ Świst K., Skórska P., Pokropek A., Kulon F., Pomiar umiejętności rozwiązywania problemów złożonych – znaczenie oraz możliwości i sposoby wykorzystania w badaniach edukacyjnych, zastosowania diagnozy edukacyjnej, XXI Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej, Bydgoszcz 2015.

¹²⁴ Tamże.



że zachodzi „podobna” własność:
 $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$ dla $a, b \geq 0$.

Wyjaśnia skutki błędnego rozwiązania



Wyjaśnij błędne rozwiązanie:

$$\begin{aligned} -2x - 3 &= -x - 6 \quad | +x^2 \\ x^2 - 2x - 3 &= x^2 - x - 6 \\ (x + 1)(x - 3) &= (x + 2)(x - 3) \quad | : (x - 3) \\ x + 1 &= x + 2 \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

Po pierwsze: dzieląc równość stronami przez jednomian $x - 3$, uczniowie nie ustalają założeń ($x \neq 3$). Po drugie: nie dostrzegają konieczności rozwiązania równania dla $x = 3$.

Dyskutuje w zakresie różnych rozwiązań



Oblicz pole trójkąta o bokach 7, 24, 25.

Rozwiązanie 1. Wykorzystanie wzoru Herona na obliczenie pola trójkąta.

Rozwiązanie 2. Zauważenie, że jest to trójkąt prostokątny i obliczenie pola powierzchni (połowa iloczynu długości przyprostokątnych).

Warto rozważyć wady i zalety każdego z rozwiązań.

Prezentuje własne zdanie

Rozwiąż równanie: $x^2 + 4x = 0$.



Rozwiązanie 1. $x(x + 4) = 0$,
 stąd $x_1 = 0$, $x_2 = -4$.

Rozwiązanie 2. $\Delta = 16$, $\sqrt{\Delta} = 4$,
 stąd $x_1 = 0$, $x_2 = -4$.

Hospitując lekcję, spotkałem się z komentarzem nauczyciela, który widząc rozwiązanie drugie, stwierdził „brak myślenia”. Uczeń ma prawo do własnego zadania, nawet w przypadku gdy istnieją „lepsze” rozwiązania.

Poszukuje alternatywnych rozwiązań

Równanie okręgu przechodzącego przez trzy różne punkty

$$A = (x_a, y_a), B = (x_b, y_b), C = (x_c, y_c)$$

można wyznaczyć, rozwiązując układ równań:



$$\begin{cases} (x_a - a)^2 + (y_a - b)^2 = r^2 \\ (x_b - a)^2 + (y_b - b)^2 = r^2 \\ (x_c - a)^2 + (y_c - b)^2 = r^2 \end{cases}$$

gdzie $S = (a, b)$ jest środkiem okręgu o promieniu r .

Wyznaczenie równania okręgu przechodzącego przez trzy różne punkty za pomocą układu równań jest bardzo pracochłonne i żmudne. Uczniowie powinni zaproponować alternatywne rozwiązanie, np. sugerując się konstrukcją okręgu, mając dane trzy różne punkty.

Źródło: opracowanie własne.

Innowacje

Wprowadzenie innowacji w proces nauczania matematyki jest działaniem złożonym i długotrwałym. Różnice występujące w podejściu do innowacji są trudne do pogodzenia, ale z drugiej strony mogą przyczynić się do jej rozwoju i wzmocnienia. Propozycje kompetencji społecznych w zakresie działań innowacyjnych realizowanych na zajęciach z matematyki zostały przedstawione poniżej (Tabela 2.15).

Tabela 2.15. Kompetencje społeczne w zakresie innowacji

Kompetencja	Przykład z komentarzem
Tworzy nowe obiekty 	Niech X będzie zbiorem wszystkich uczniów w szkole. Dwóch uczniów jest ze sobą w relacji R wtedy i tylko wtedy, gdy uczeń x otrzymał taką samą ocenę z klasówki co uczeń y. Uzasadnij, że R jest relacją równoważności i wyznacz jej klasy abstrakcji. Z relacją równoważności związana jest tzw. zasada abstrakcji. Służy ona do tworzenia nowych obiektów i pojęć w matematyce. Ciekawe zastosowanie relacji równoważności do konstrukcji brył przedstawił Z. Pogoda¹²⁵.

¹²⁵ Pogoda Z., *O klejeniu i zasadzie abstrakcji*, XIV Konferencja Naukowa Dydaktyków Matematyki „Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura”, MATH&ART, Pobierowo 2019.

Tworzy nowe metody
rozwiązania



Zaproponuj metodę obliczenia

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99.$$

Czy musimy wykonać 98 działań na dodawanie?
(Zakładamy, że uczący się nie zna wzoru na sumę
ciągu arytmetycznego).

Wzmacnia działania
monopolistyczne



Udowodnij, że jeśli ciąg posiada granicę, to tylko
jedną.

W matematyce często dowodzimy jednoznaczność
rozwiązań. Warto podkreślić, że w otaczającej nas
rzeczywistości mamy do czynienia z takim mode-
lem. Na przykład wybieramy tylko jednego
prezydenta, burmistrza, wójta.

Rozbija rozwiązania
monopolistyczne



Trójkąt pitagorejski to trójkąt prostokątny, którego
boki są liczbami naturalnymi. Przykłady takich
trójkątów: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25). Uza-
sadnij, że trójkątów pitagorejskich jest nieskoń-
czenie wiele.

Istnieją wzory na tzw. trójki pitagorejskie:

$$(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1) \text{ lub}$$

$$((m^2 + n^2)^2, (m^2 - n^2)^2, (2mn)^2)$$

dla $m, n \in \mathbb{N}$.

Jednak w powyższym problemie chodzi o to, aby
uczący się wskazał, że wystarczy pomnożyć trójkę
liczb przez dowolną liczbę naturalną większą od
zera. Uczący się najczęściej są w stanie podać tylko
kilką tzw. trójek pitagorejskich. Często sądzą, że
nie ma ich „zbyt dużo”. Rozwiązywanie
problemów rozbijające rozwiązania monopolis-
tyczne stwarza możliwości szerszego spojrzenia na
świat.

Źródło: opracowanie własne.

Myślenie komputacyjne

Myślenie komputacyjne jest mocno powiązane z myśleniem matematycznym. Zobaczmy to na przykładach.

Problem 1¹²⁶.

Przedstaw metodę obliczenia całki

$$\int \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{x-a} dx$$

gdzie $a, a_0, \dots, a_n \in \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$, $n \in \{1, 2, \dots, 9, 10\}$.

Myślenie matematyczne

Szkic rozwiązania.

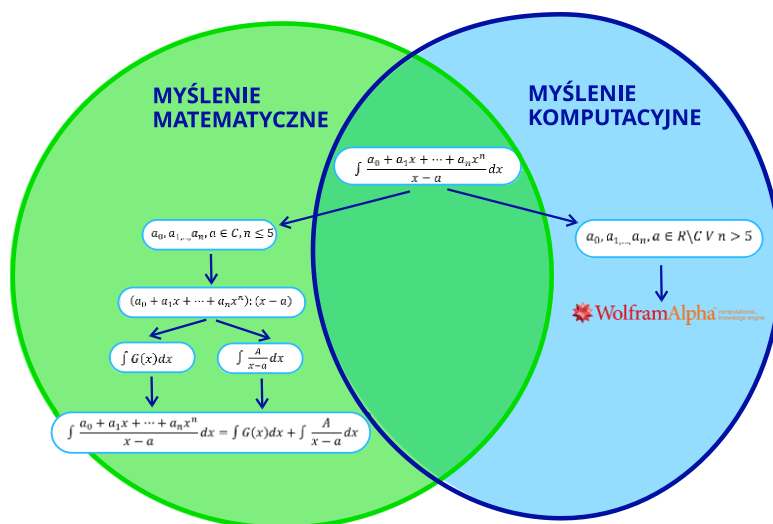
Znamy metodę na wyznaczenie całki typu: $\int \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{x-a} dx$.

Czy myślenie matematyczne jest wystarczające do praktycznego obliczenia całki

$$\int \frac{-9+6x \pm 7x^2 - 9x^7 + 10x^8 + 7x^{10}}{-9x+7} dx?$$

Myślenie komputacyjne

Dokonujemy dekompozycji problemu (Rys. 2.9).



Rys. 2.9. Przykład z wykorzystaniem myślenia matematycznego i komputacyjnego

Źródło: opracowanie własne.

¹²⁶ Stańdo J., Stasiak A., *Myślenie komputacyjne w nauczaniu matematyki*, EDUAKCJA Magazyn Edukacji Elektronicznej, Nr 2 (16)/2018.

Rozwiązanie akceptowalne czy też praktyczne rozwiązanie to ważne wnioski w myśleniu komputacyjnym, chociaż często nieakceptowalne w myśleniu matematycznym.

Problem 2¹²⁷

Hipoteza Goldbacha: „Każdą liczbę (naturalną) większą od 2 można przedstawić jako sumę trzech liczb pierwszych (liczby te mogą się powtórzyć)”¹²⁸. W XVIII wieku, gdy Christian Goldbach formułował swoją hipotezę, liczba jeden uznawana była za liczbę pierwszą. Leonhard Euler zmodyfikował hipotezę i obecnie brzmi ona: „Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych”.

Dla liczb nieparzystych formułuje się tzw. słabą hipotezę Goldbacha: „Każdą liczbę nieparzystą większą niż 5 można przedstawić jako sumę trzech liczb pierwszych”.

Słaba hipoteza Goldbacha została udowodniona w 2013 roku.

Myślenie matematyczne

Udowodnienie hipotezy.

Myślenie komputacyjne

Udowodnienie hipotezy na poziomie akceptowalnym, tzn. dla jak największego zakresu liczb.

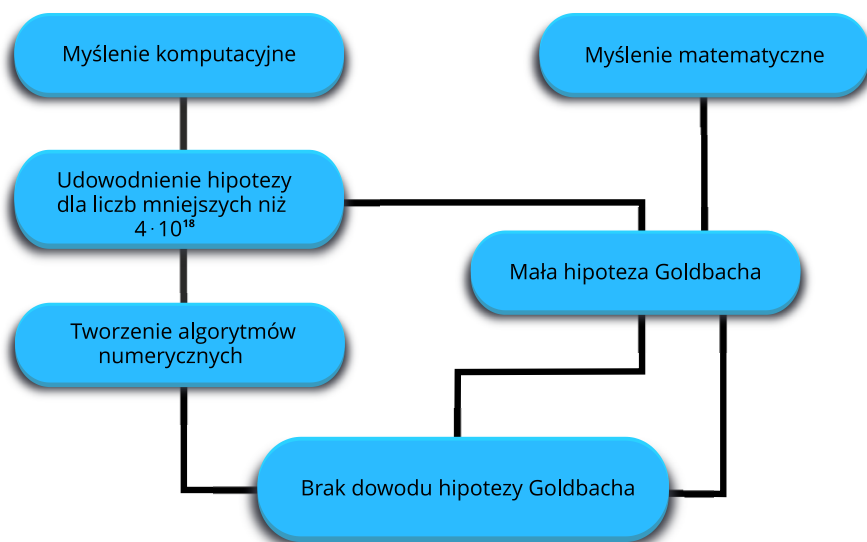
Rezultat: dla liczb mniejszych niż $4 \cdot 10^{18}$ hipoteza Goldbacha jest udowodniona (Oliveira e Silva¹²⁹).

Włączając myślenie komputacyjne, przybliżamy się do rozwiązania hipotezy. Schemat procesu poszukiwania dowodu przedstawiono poniżej (Rys. 2.10).

¹²⁷ Tamże.

¹²⁸ Goldbach C., *Letter to L. Euler*, June 7, 1742.

¹²⁹ Oliveira e Silva T., Herzog S., Pardi S., *Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$* , *Mathematics of Computation*, Vol. 83, No. 288, July 2014, ss. 2033-2060.



Rys. 2.10. Hipoteza Goldbacha – myślenie matematyczne i komputacyjne
Źródło: opracowanie własne.

Propozycje kompetencji społecznych w zakresie myślenia komputacyjnego realizowanych na kursach z matematyki (Tabela 2.16).

Tabela 2.16. Kompetencje społeczne w zakresie myślenia komputacyjnego

Kompetencja	Przykład z komentarzem
Tworzy dekompozycję problemu 	Przedstaw rozwiązanie całki z funkcji wymiernej $\int \frac{W(x)}{G(x)} dx$, gdzie $W(x)$, $G(x)$ są dowolnymi wielomianami oraz $G(x) \neq 0$. Prezentując dekompozycję problemu, uczący się musi przejść następującą walidację efektów uczenia się. – Definiuje ułamki proste pierwszego i drugiego rodzaju. – Operuje twierdzeniem: Każdą funkcję wymierną możemy jednoznacznie przedstawić postaci sumy wielomianu lub ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju. – Stosuje własności całki oznaczonej.

Projektuje algorytm
rozwiązania problemu



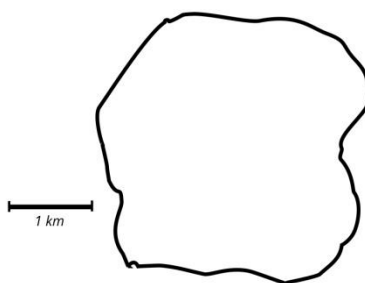
Przedstaw algorytm rozwiązania równani różniczkowego: $y' - ay = x^2 - x$, dla $a \in -10, -9, \dots, -1, 0, 1, \dots, 9, 10$.

W projektowaniu algorytmicznym ważne jest, aby uczący się uwzględnił szczególne przypadki w rozwiązaniu problemu.

Tworzy akceptowalne
(przybliżone) rozwiązanie



Zaproponuj metodę szacowania pola powierzchni stawu i oblicz jego przybliżoną wartość¹³⁰.



Akceptowalne rozwiązanie – jeśli wartość pola powierzchni wyznaczona przez ucznia była w przedziale od 7,5 do 10,5 [km²]. Uczniowie stosowali różne metody rozwiązania. Najczęściej rysowali prostokąt, koło lub kilka figur¹³¹.

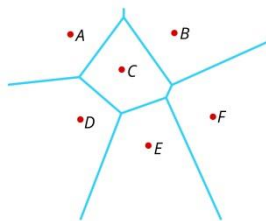
Uogólnia rozwiązania



Dany jest zbiór punktów $\{A, B, C, D, E, F\}$ na płaszczyźnie przedstawiających położenie aptek. Płaszczyzna została podzielona na obszary (nazywane obszarami Voronoï). Do każdego obszaru należy dokładnie jedna apteka. Obszary mają własność: od domu znajdującego się wewnątrz danego obszaru najbliższa położona jest apteka znajdująca się na terenie tego obszaru.

¹³⁰ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., *Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza*, WSiP 2007, s. 71.

¹³¹ Badanie było przeprowadzone dla grupy około 1500 uczniów gimnazjum, Stańdo J.



Wskaż jedno z możliwych położeń, w którym może znajdować się dom Kasi, jeśli trzy apteki znajdują się w takiej samej odległości od jej domu.

Narysuj obszary Voronoi dla punktów P, Q, R ¹³².

P

Q

R

Stosuje rozwiązanie heurystyczne



W każdym działaniu litery A, B, C, D, E oznaczają te same cyfry. Uzupełnij odpowiednie miejsca literami, jeśli

$$A + C = D, A \cdot A = A + A, C \cdot C = C : C.$$

$$C + A = \dots, D - C = \dots, \begin{matrix} ACA \\ \pm ABB \\ E \dots A \end{matrix}.$$

Znajdź cyfry, które kryją się pod nimi¹³³.

Dostrzega niejednoznaczność



Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Wyznacz wzór funkcji f , jeśli $f'(x) = 3x^2$.

Uczący się powinien dostrzec, że rozwiązaniem problemu jest rodzina funkcji $f(x) = x^3 + c$, gdzie c jest dowolną liczbą rzeczywistą, a nie, jak często się zdarza wśród studentów, że wskazują tylko jedną funkcję $f(x) = x^3$.

¹³² Stańdo J., *Matura podstawowa z matematyki*. Próbny egzamin, 2006.

¹³³ Stańdo J., *Diagnoza 2010*.

Rozwiązuje problem, stosując iterację



Dany jest ciąg rekurencyjny

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 5 \\ a_2 = 13 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \end{cases}.$$

Aby wyznaczyć wzór ogólny tego ciągu, w niektórych sytuacjach postępujemy według następującego algorytmu.

1. Dokonujemy podstawienia: $a_{n+2} = x^2$,
 $a_{n+1} = x$, $a_n = 1$.
2. Na podstawie wzoru rekurencyjnego tworzymy równanie kwadratowe:
 $x^2 = 5x - 6$.
3. Rozwiązujemy równanie: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.
4. W tym przypadku (gdy równanie kwadratowe ma dwa pierwiastki rzeczywiste) wzór ogólny ciągu dany jest następująco:
 $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$. Zatem w naszym przypadku $a_n = c_1 2^n + c_2 3^n$.
5. Aby wyznaczyć stałe C_1, C_2 rozwiązujemy układ równań
$$\begin{cases} a_1 = 5 = 2c_1 + 3c_2 \\ a_2 = 13 = 4c_1 + 9c_2 \end{cases}$$
6. W tym przypadku $c_1 = 1$, $c_2 = 1$, zatem wzór ciągu ma postać: $a_n = 2^n + 3^n$.

Postępując analogicznie dla ciągu

$$a_n = \begin{cases} a_1 = 6 \\ a_2 = 18 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n \end{cases},$$

wyznacz jego wzór¹³⁴.

Źródło: opracowanie własne.

2.4.10. Podsumowanie

W mojej ocenie już w niedalekiej przyszłości stopień rozwinięcia kompetencji społecznych będzie decydował o sukcesie zawodowym i osobistym. Muszą być one postrzegane nie tylko w kontekście komunikacji czy też współpracy w grupie, ale również w połączeniu z nauczaniem przedmiotu. Przedstawiony materiał pokazuje wielopłaszczyznowe wprowadzanie kompetencji społecznych

¹³⁴ Stańdo J., *Matura na poziomie rozszerzonym*, Projekt Matpróbka 2007, zadanie 14, 2007.

w proces nauczania matematyki. Pozostaje przekonać nauczycieli do ich wdrażania. Moje wieloletnie doświadczenie wskazuje na to, że nauczyciele często traktują kompetencje społeczne jako konieczny dodatek, nie przykładając wagi do ich walidacji.

Na zakończenie pozwolę sobie przytoczyć przykład z własną refleksją. Prowadząc zajęcia ze wstępu do matematyki dla studentów (szósty poziom ram kwalifikacji), przygotowałem studentowi następujące zadanie do rozwiązania.

Zadanie.

Wiadomo, że $\arcsin(x) = \frac{1}{2}$, oblicz $\arccos(x)$.

Z jego błędnej odpowiedzi wynikało, że została sformułowana własność (oczywiście niestety fałszywa, o której student nie wiedział):

$$\arcsin^2(x) + \arccos^2(x) = 1.$$

Podstawą do jej sformułowania była, jak łatwo się domyślić, tzw. jedynka trygonometryczna: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Z jednej strony za postawienie dość ciekawej hipotezy student powinien zostać pozytywnie oceniony (np. efekt uczenia się: tworzy hipotezę), jednak z drugiej strony za zastosowanie błędnej własności powinien być oceniony negatywnie.

W mojej ocenie zabrakło studentowi umiejętności krytycznego myślenia, mieszczącego się w obszarze kompetencji społecznych. Gdyby taką umiejętność posiadał i dokonałby w toku swojego myślenia właściwej weryfikacji, jego odpowiedź mogłaby być wysoko oceniona.

W kontekście powyższego przykładu. Uczeń, który wykonał działanie: $2 + 2 = 5$, w pierwszej kolejności nie powinien usłyszeć, że działanie wykonane jest nieprawidłowo. Przede wszystkim nauczyciel powinien ustalić, jak uczeń doszedł do tego wyniku.

3. Nowy model taksonomii 4D

Trajektoria uczenia się to naturalne podążanie ścieżką w rozwijaniu wiedzy, umiejętności i kompetencji (społecznych), mające na celu zbudowanie głębokiego zrozumienia pojęć. W literaturze dyskutuje się o odmianach i poszukiwaniach wyjaśnień tego pojęcia¹³⁵.

Rozważmy przykład. Prześledźmy kalendarz nauki chodzenia przez dziecko¹³⁶:

- a) 3.-4. miesiąc – dziecko podnosi głowę.
- b) 6.-9. miesiąc – dziecko zaczyna samodzielnie siadać.
- c) 9.-12. miesiąc – dziecko staje, podpierając się.
- d) 12.-15. miesiąc – dziecko zaczyna chodzić.
- e) 19.-24. miesiąc – dziecko zaczyna biegać, kopać piłkę, chodzić po schodach.

Ważne jest, aby monitorując progres w rozwijaniu wiedzy i umiejętności oraz kompetencji (społecznych), mieć na uwadze naturalny rozwój. Dziecko w wieku sześciu lat nie jest w stanie zrozumieć na przykład pochodnej funkcji czy rozwiązać równania różniczkowego. Nie bez znaczenia w rozwijaniu wiedzy i umiejętności matematycznych są także predyspozycje posiadane przez dzieci od urodzenia¹³⁷.

Trajektoria uczenia się składa się z trzech części¹³⁸:

- a) cel matematyczny,
- b) ścieżka rozwoju,
- c) zestaw czynności lub zadań wspomagający rozwijanie poziomu myślenia.

3.1. Trajektoria efektu uczenia się

Trajektoria efektu uczenia się E_0 to uporządkowana ścieżka skończonej liczby efektów uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$ z podziałem na poziomy ram kwalifikacji, prowadząca do osiągnięcia efektu uczenia się E_0 ¹³⁹.

Trajektoria efektu uczenia się składa się z sześciu części¹⁴⁰:

- 1) celu;
- 2) sformułowania efektu uczenia się: E_0 ;

¹³⁵ Clements D.H., Sarama J., *Learning trajectories in mathematics education*, Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 2004, s. 81-89.

¹³⁶ Protokół dostępu: https://www.babycenter.com/0_your-childs-walking-timeline_10357004.bc [2019, styczeń].

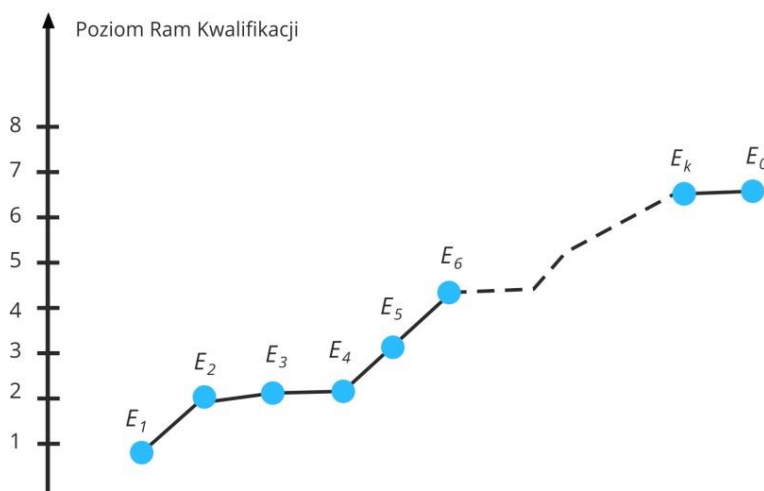
¹³⁷ Sarama J., Clements D.H., *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*, New York, NY: Routledge, 2009.

¹³⁸ Clements D.H., Sarama J., eds. *Hypothetical learning trajectories*, Mathematical Thinking and Learning, 6(2) 2004, ss. 81-89.

¹³⁹ Opracowanie własne.

¹⁴⁰ Opracowanie własne.

- 3) uporządkowanej ścieżki efektów uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$, kończących się efektem E_0 , (Rys. 3.1);
- 4) podziału ścieżki na kolejne poziomy Polskiej Ramy Kwalifikacji (Rys. 3.1);
- 5) zestawu zadań do walidacji efektów uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$;
- 6) zadania służącego do walidacji efektu uczenia się E_0 .



Rys. 3.1. Ścieżka efektu uczenia się z podziałem na Ramy Kwalifikacji

Źródło: opracowanie własne.

Trajektoria efektu uczenia się umożliwia uzyskanie odpowiedzi na pytania:

1. Jaki stawiamy cel?
2. Jaki główny efekt uczenia się chcemy osiągnąć?
3. Jakie są pośrednie efekty uczenia się?
4. Jak zmierzyć pośrednie efekty uczenia się?
5. Czy pośrednie efekty uczenia się zostały osiągnięte?
6. Na jakim poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji osiągamy główny i pośrednie efekty uczenia się?
7. Jak skonstruować pomiar efektu uczenia się E_0 ?
8. Czy efekt uczenia się E_0 został osiągnięty?

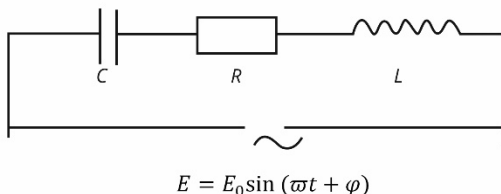
Przykład 1

Opis problemu

W ramach działań ekologicznych podejmowanych w kierunku zmniejszenia emisji dwutlenku węgla poszukuje się oszczędności energetycznych. Wyznaczając współczynnik mocy odbiornika prądu (lodówki, odkurzacza), możemy

dobrać wartości pojemności lub indukcyjności tak, aby nie następowały straty na wytwarzanie zbędnej energii pola elektrycznego i magnetycznego.

W przypadku prądów zmiennych płynących przez układ RLC buduje się model matematycznym opisujący zjawiska zachodzące w takim układzie. Rozważmy szeregowy układ RLC (Rys. 3.2).



Rys. 3.2. Obwód RLC

Źródło: opracowanie własne.

Korzystając z II prawa Kirchhoffa, możemy napisać równanie różniczkowe drugiego rzędu niejednorodne:

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} L + \frac{dQ}{dt} R + \frac{Q}{C} = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

gdzie:

$\frac{d^2 Q}{dt^2} L$ – napięcie samoindukcji na cewce,

$\frac{dQ}{dt} R$ – napięcie na oporniku,

$\frac{Q}{C}$ – napięcie na kondensatorze,

φ – przesunięcie fazowe,

t – czas,

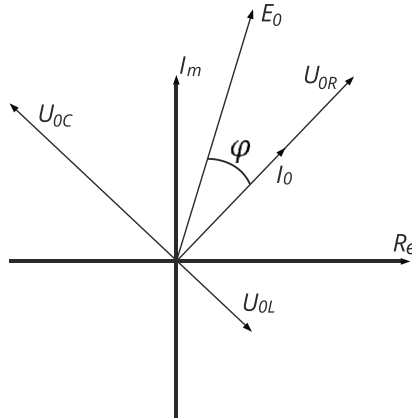
ω – częstość kołowa,

$E_0 \sin(\omega t + \varphi)$ – zewnętrzne napięcie wymuszające.

Fascynujące równanie dla matematyków. Rozwiązanie problemu sprowadza się do rozwiązania równania różniczkowego drugiego rzędu.

Trajektoria efektu uczenia się E_0 : Rozwiązuje równanie różniczkowe drugiego rzędu dla postawionego celu: Wyznaczanie współczynnik mocy w obwodzie RLC jest „długa i daleka”.

Wprowadźmy tzw. wskaźy wektorowe, opisujące takie wielkości, jak natężenie prądu i napięcie na wybranym elemencie obwodu. Na płaszczyźnie zespolonej wstawmy wektor zaczepiony w punkcie $0 + 0i$. Wektor może wykonywać obroty. Argument liczby zespolonej będącej końcem wektora będzie wskazywał fazę danej wielkości (Rys. 3.3).



Rys. 3.3. Obwód RLC , U_{0C} – wektor napięcia kondensatora, U_{0L} – wektor napięcia na cewce, U_{0R} – wektor napięcia na oporniku, I_0 – wektor natężenia prądu płynącego w układzie RLC , φ – przesunięcie fazowe.

Źródło: opracowanie własne.

W celu wyznaczenie napięcia E_0 wystarczy dodać wszystkie wektory. W celu wyznaczenia oporu (tzw. zawady) korzystamy ze wzoru:

$$Z = R + \omega Li + \frac{1}{\omega Ci}$$

gdzie:

i – jednostka urojona.

Moduł liczby zespolonej Z równy $\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}$ jest miarą całkowitego oporu stawianego przez układ RLC .

W celu wyznaczenia natężenia prądu płynącego przez układ korzystamy ze wzoru:

$$I = \frac{E_0 \sin(\omega t + \varphi)}{R + \omega Li + \frac{1}{\omega Ci}}$$

Korzystając z przedstawionych wzorów, możemy wyznaczyć: opór, natężenie, napięcie. Zastosowanie liczb zespolonych to krótsza droga w porównaniu z rozwiązywaniem równania różniczkowego drugiego rzędu.

Trajektoria efektu uczenia się

Cel: Wyznaczanie współczynnika mocy w obwodzie RLC .

Efekt uczenia się E_0 : Stosuje liczby zespolone w praktycznych zastosowaniach.

Pomiar: Podaj współczynnik mocy ($\cos(\varphi)$) odbiornika o impedancji

$$\bar{Z} = 9 + 11i \text{ } [\Omega].$$

Rozwiązanie. Korzystając ze wzoru: $\cos(\varphi) = \frac{\operatorname{Re}(\bar{Z})}{|\bar{Z}|}$, wyznaczamy współczynnik mocy.

Ścieżka efektów uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$ (Tabela 3.1).

Tabela 3.1. Ścieżka efektów uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$

	Efekty uczenia się	Pomiar efektu uczenia się
E_1	Wykonuje działania na ułamkach w zbiorze liczb rzeczywistych	Oblicz: $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{5} + 0,1$.
E_2	Odczytuje współrzędne punktów w układzie współrzędnych	Zaznacz punkt $A = (-2, 3)$ w układzie współrzędnych.
E_2	Przekształca jednostki	Podaj prędkość w $\frac{m}{s}$, jeśli $V = 40 \frac{km}{h}$.
E_3	Przekształca wzór	Wyznacz niewiadomą z ze wzoru: $x + 3y = \frac{4}{z} - b$.
E_4	Operuje własnościami funkcji	Funkcja dana jest wzorem: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x > -3 \\ -x & x \leq -3 \end{cases}$ Wyznacz zbiór wartości i miejsca zerowe funkcji f .
E_5	Wyznacza przybliżoną wartość kąta, korzystając z funkcji trygonometrycznych	Wyznacz przybliżone miary kątów ostrych w trójkącie prostokątnym, którego długości przyprostokątnych wynoszą odpowiednio 4 i 5.
E_6	Rozwiązuje równanie kwadratowe w dziedzinie rzeczywistej	Rozwiąż równanie: $x^2 + 4x + 10 = 0$.
E_7	Interpretuje kąt skierowany	Zaznacz kąt skierowany $\alpha = -\frac{3}{4}\pi$.
E_8	Rozwiązuje równanie trygonometryczne	Rozwiąż równanie: $\operatorname{tg}(x) = -\sqrt{3}$.
E_9	Rysuje wykres funkcji trygonometrycznej	Narysuj wykres funkcji: $f(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

E_{10}	Wykonuje działania na liczbach zespolonych	Wyznacz $Re(z)$, $ z $ dla $z = i + \frac{2}{i+2}$.
E_{11}	Zapisuje liczbę zespoloną w postaci trygonometrycznej	Przedstaw liczbę $\sqrt{3} - i$ w postaci trygonometrycznej.
E_{12}	Prezentuje liczbę zespoloną w postaci graficznej	Przedstaw liczbę $\sqrt{3} - i$ na płaszczyźnie zespolonej.

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 2

Opis problemu

Z rozwiązywaniem problemów optymalizacyjnych spotykamy się na każdym kroku. Szukanie i znajdowanie najlepszego rozwiązania to niemal codzienność. Przykładem może być proces transportowy, polegający na organizacji i dostarczaniu towarów w różne miejsca, tak aby efektywność ekonomiczna była jak największa, czy zaplanowanie produkcji puszek do napojów, aby zużyć jak najmniej materiału.

Rozwiązywanie problemu optymalizacyjnego sprowadza się do zbudowania modelu matematycznego, a następnie za pomocą funkcji celu wyznacza się wartość optymalną (czyli najlepsze rozwiązanie).

Trajektoria efektu uczenia się

Cel: Rozwiązywanie praktycznych problemów optymalizacyjnych.

Efekt uczenia się E_0 : Wyznacza wartości optymalne w praktycznych problemach.

Pomiar: Objętość puszki w kształcie walca wynosi $0,5 \text{ dm}^3$. Jakie wymiary powinna mieć puszka, aby zużyć jak najmniej materiału do jej produkcji. Ścieżka efektów uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$ przedstawiona poniżej (Tabela 3.2).

Tabela 3.2. Ścieżka efektów uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$

	Efekty uczenia się	Pomiar efektu uczenia się
E_1	Wykonuje działania na ułamkach	Oblicz: $2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 7 \cdot \frac{0,5}{7}$.
E_2	Wykonuje działania na wyrażeniach algebraicznych	Przekształć wyrażenie algebraiczne do prostszej postaci: $2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{0,5}{\pi r^2}$ dla $r > 0$.

E_3	Posługuje się własnościami funkcji	Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + 4x$. Wyznacz miejsca zerowe i najmniejszą wartość funkcji w jej dziedzinie.
E_4	Rozwiązuje równanie	Rozwiąż równanie: $4\pi r - \frac{1}{r^2} = 0$.
E_5	Oblicza pochodną funkcji	Oblicz pochodną funkcji: $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}$.
E_6	Operuje twierdzeniem o warunku dostatecznym na istnienie ekstremum funkcji	Czy funkcja $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$ posiada ekstremum lokalne w punktach $x = 0, x = 1$? Odpowiedź uzasadnij.
E_7	Wyznacza ekstremum funkcji	Wyznacz ekstrema funkcji: $f(r) = 2\pi r^2 + \frac{1}{r}$ dla $r > 0$.

Źródło: opracowanie własne.

Alternatywna trajektoria efektu uczenia się E_0

Trajektoria efektu uczenia się E_0 najczęściej nie jest wyznaczona jednoznacznie przez efekty uczenia się $E_1, E_2, \dots, E_k$.

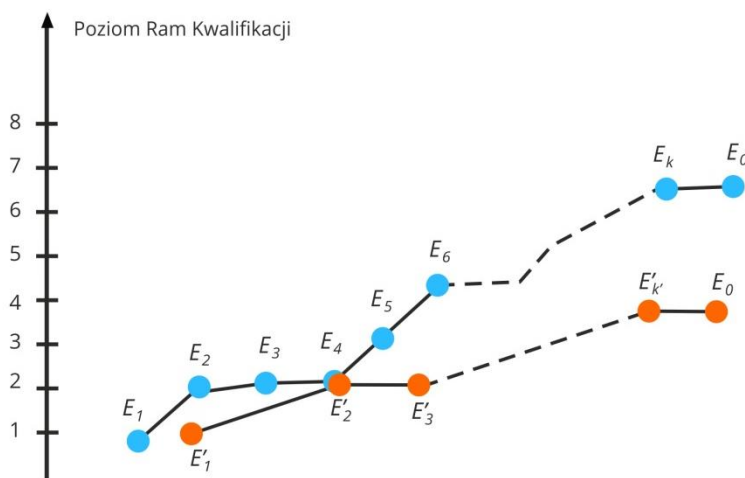
Przyczyny niejednoznaczności:

- walidacja tego samego efektu uczenia się na różnych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji;
- poziom trudności walidacji tego samego efektu uczenia się;
- alternatywne rozwiązania tych samych problemów (np. wyznaczenie ekstremum funkcji kwadratowej, wykorzystując wierzchołek paraboli lub pochodną funkcji).

Uwzględniając przyczyny niejednoznaczności, wprowadźmy definicję.

Alternatywna trajektoria efektu uczenia się E_0 to uporządkowana ścieżka skończonej liczby efektów uczenia się $E'_1, E'_2, \dots, E'_{k'}$ z podziałem na poziomy ram kwalifikacji, prowadząca do osiągnięcia efektu uczenia się E_0 , spełniająca warunek $\{E_1, E_2, \dots, E_k\} \neq \{E'_1, E'_2, \dots, E'_{k'}\}$ ¹⁴¹ (Rys. 3.4).

¹⁴¹ Opracowanie własne.



Rys. 3.4. Alternatywna ścieżka efektu uczenia się E_0 z podziałem na Ramy Kwalifikacji
Źródło: opracowanie własne.

Z definicji wynika, że:

- w trajektorii alternatywnej część efektów uczenia się może być taka sama, np. $E_4 = E'_2$;
- ten sam efekt uczenia się (E_0) może być realizowany na różnych poziomach ram kwalifikacji;
- ten sam efekt uczenia się (E_0) może być walidowany na różne sposoby.

Prof. Zofia Krygowska, formułując metodę czynnościowego nauczania matematyki, zaproponowała szereg zabiegów dydaktycznych. Między innymi wskazała na „Uwzględnianie różnych ciągów operacji prowadzących do tego samego rezultatu, (...) różnych sposobów rozwiązywania tego samego zadania”¹⁴². Zauważmy, że trajektoria i trajektoria alternatywna uczenia się są bardziej sprecyzowanymi i sformalizowanymi pojęciami w kontekście rozumienia rezultatów uczenia się przez prof. Z. Krygowską.

Przykład 3

Cel: Rozwiązywanie praktycznych problemów optymalizacyjnych.

Efekt uczenia się E_0 : Wyznacza wartości optymalne w praktycznych problemach.

Pomiar: Mamy siatkę o długości 12 m. Chcemy wydzielić miejsce w kształcie prostokąta dla pieska, tak aby pole powierzchni było największe. Wyznacz wymiary tego prostokąta.

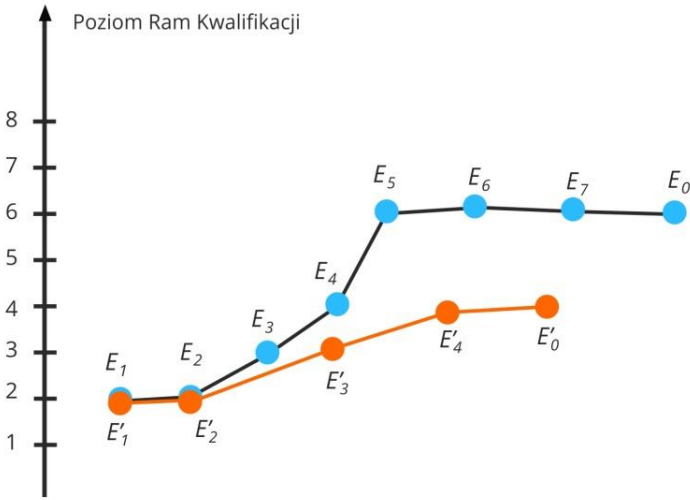
¹⁴² Krygowska Z., *Zarys dydaktyki matematyki*, cz. 1, Warszawa 1977, ss. 127-128.

Tabela 3.3. Ścieżka efektów uczenia się $E'_1, E'_2, \dots, E'_k$

E'_1	Wykonuje działania na ułamkach	Oblicz: $\frac{-(-6)}{2(-1)}$.
E'_2	Wykonuje działania na wyrażeniach algebraicznych	Dla $a = -1, b = -6, c = 0$ oblicz wartość wyrażenia algebraicznego $\frac{-(b^2-4ac)}{4a}$.
E'_3	Posługuje się własnościami funkcji kwadratowej	Dana jest funkcja: $f(x) = -x^2 + 6x$. Wyznacz wierzchołek paraboli.
E'_4	Wyznacza ekstremum funkcji kwadratowej	Wyznacz ekstrema funkcji: $f(x) = x(12 - x)$ dla $x > 0$.

Źródło: opracowanie własne.

Trajektoria efektu uczenia się z Przykładu 3 (s. 81) jest alternatywną trajektorią efektu uczenia się z Przykładu 2 (s. 79). Ilustruje to Rys. 3.5.



Rys. 3.5. Ścieżki efektu uczenia się E_0 z uwzględnieniem Polskiej Ramy Kwalifikacji

Źródło: opracowanie własne.

Efekty uczenia się: E_1 i E'_1 oraz E_2 i E'_2 są takie same.

Wniosek: Ten sam efekt uczenia się może być walidowany na różnych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji. **Zatem zasadne jest uwzględnienie w definiowaniu efektu uczenia się określenia jego poziomu w kontekście PRK.**

3.2. Analizy krytyczna taksonomii: Blooma (i jego modyfikacji), SOLO

Pomimo tego, że taksonomia Blooma znalazła powszechne zastosowanie w formułowaniu efektów uczenia się, równie powszechna jest jej krytyka. Taksonomia Blooma była mocno krytykowana przez profesora Donalda Clarka¹⁴³. Stwierdził on, że zgrabny podział na kategorie to złożony i nieuporządkowany proces poznawczy.

Jednak jednym z pierwszych krytyków taksonomii był Lorin Anderson, student Benjamin Blooma. Opublikował on zaktualizowaną wersję taksonomii, która uwzględnia znacznie szerszy zakres czynników mających wpływ na proces zarówno uczenia się, jak i nauczania. Zmieniona taksonomia odróżnia między innymi „wiedząc co” od „wiedząc jak”. Wymiar wiedzy to „wiedza co”. Wiedzę jako taką możemy podzielić na cztery kategorie: faktyczną, konceptualną, proceduralną i metakognitywną. Wiedza faktyczna obejmuje pojedyncze fragmenty informacji, takie jak definicje. Wiedza koncepcyjna składa się z systemów informacji, takich jak klasyfikacje i kategorie. Wiedza proceduralna obejmuje algorytmy, heurystyki, techniki i metody, ale również wiedzę o tym, kiedy stosować te procedury. Wiedza metakognitywna obejmuje wiedzę o procesach myślenia oraz informacje o tym, jak skutecznie manipulować tymi procesami.

Procesy poznawcze w zmienionej taksonomii Blooma, podobnie jak wersja oryginalna, opierają się na sześciu umiejętnościach, od najprostszych do najbardziej złożonych: pamiętaj, zrozum, zastosuj, przeanalizuj, oceń i stwórz. Ocena obejmująca sprawdzanie i krytykę, która znajduje się na szczycie oryginalnej taksonomii, zamieniła się miejscami z procesem twórczym, który, według Andersona, jest najtrudniejszy do uzyskania w procesie nauczania. Również według D.R. Krathwohla¹⁴⁴ struktura taksonomii Blooma nie odzwierciedla procesu poznawczego. Na pierwszym etapie uczniowie muszą posiadać zarówno wiedzę, jak i umiejętność zapamiętywania. Ta nieprawidłowość została zrewidowana w taksonomii Andersona, która uwzględnia czasowy aspekt procesu poznawczego.

S.M.A. Soozandehfar oraz M.R. Adeli¹⁴⁵ zauważają, że obecnie wiedza nauczycieli na temat samego procesu uczenia się jest znacznie szersza niż w czasach Benjamin Blooma, który kładł nacisk głównie na myślenie. Nauczanie i uczenie się obejmują również uczucia i przekonania zarówno uczniów, jak i nauczycieli, a także środowisko społeczne i kulturowe grupy. Również B. Sugrue¹⁴⁶ wskazuje, że taksonomia ta została opracowana ponad 50 lat temu,

¹⁴³ Clark D., Protokół dostępu: <https://donaldclarkplanb.blogspot.com/2006/09/bloom-goes-boom.html> [2019, styczeń].

¹⁴⁴ Krathwohl D.R., *A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview*, Theory Into Practice, 41(4), 2002, 212-264.

¹⁴⁵ Protokół dostępu: <https://www.arjonline.org/papers/arjel/v2-i1/14.pdf> [2019, styczeń].

¹⁴⁶ Protokół dostępu: https://epicinc.files.wordpress.com/2011/08/sugrue_bloom_critique_perfxprs.pdf [2019, styczeń].

zanim zostały zbadane procesy poznawcze związane z uczeniem się. Strefy poznawcze taksonomii Blooma – Wiedza, Rozumienie, Zastosowanie, Analiza, Synteza, Ewaluacja (Ocena) – nie są poparte żadnymi badaniami na temat uczenia się. Jedynym elementem wspartym przez badania jest rozróżnianie wiedzy deklaratywnej (umożliwiającej przypomnienie, zrozumienie, pojmowanie) od wiedzy proceduralnej (pozwalającej na wykonywanie czynności zakodowanych w naszej pamięci).

R.J. Marzano i J.S. Kendall¹⁴⁷ twierdzą, że hierarchiczna struktura taksonomii Blooma, przechodząca od najprostszego poziomu wiedzy do najtrudniejszego poziomu oceny, w żaden sposób nie jest poparta badaniami. Hierarchiczność taksonomii oznacza, że każda umiejętność na wyższym poziomie składa się z umiejętności znajdujących się poniżej; zrozumienie wymaga wiedzy; aplikacja wymaga zrozumienia i wiedzy, i tak dalej. Według ich opinii jest to po prostu nieprawdziwe w odniesieniu do procesów poznawczych. D.R. Krathwohl twierdzi, że sztywna hierarchizacja nie ma odzwierciedlenia w rzeczywistości, a umiejętności przenikają się.

D. Kolb¹⁴⁸, który jest twórcą teorii uczenia się przez doświadczenie, zamiast hierarchicznej struktury proponuje zamknięty cykl nauczania. Zauważa, że widoczny brak zmian w zachowaniu, poglądach czy nawykach, pomimo wyraźnego wpływu doświadczenia, jest bez wątpienia oznaką braku uczenia się, a nie jego efektem. D. Kolb uważa, że uczenie się jest cyklicznym procesem podlegającym modyfikacji uprzedniego doświadczenia poprzez doświadczenie następujące bezpośrednio po nim. Każda kolejna koncepcja uczącego się zawsze wchodzi w relacje z koncepcjami, które już wcześniej posiadał. Według D. Kolba proces uczenia się przebiega w interakcji ze środowiskiem, wiedza jest transformacją doświadczenia. Jeżeli uczący się doświadcza różnych sytuacji i ma możliwość współdzielenia doświadczeń, wówczas proces uczenia będzie przebiegał najefektywniej.

M.J. Pickard¹⁴⁹ zauważa, że taksonomia Blooma zakłada osiągnięcie najwyższego poziomu tylko przez niektórych uczniów, co oznacza, że nie każdy uczący się potrafi samodzielnie wybrać istotne informacje, czyli może nie być w stanie aktywnie uczestniczyć w procesie uczenia się. Studenci mogą nie być w stanie sami wybrać informacji i samodzielnie nadać im znaczenia. Obecnie jednak oczekuje się, że każdy uczeń powinien robić postępy na każdym etapie.

Według B. Sugrue konsekwentne stosowanie taksonomii Blooma na wielu poziomach nauczania jest niemożliwe. Dowolny cel uczenia się może zostać sklasyfikowany przez różnych autorów programów nauczania na jednym z dwóch

¹⁴⁷ Marzano R.J., Kendall J.S. (ed.), *The New Taxonomy of Educational Objective*, Corwin, Newbury Park CA 2006, s. 9.

¹⁴⁸ Protokół dostępu: <http://www.e-mentor.edu.pl/artukul/index/numer/39/id/831> [2019, styczeń], za: D. Kolb.

¹⁴⁹ Pickard M.J., *The New Bloom's Taxonomy: An Overview for Family and Consumer Sciences*, *Journal of Family and Consumer Sciences Education*, 25(1), 2007, ss. 45-55.

najniższych poziomów (wiedzy lub zrozumienia) lub na dowolnym z czterech najwyższych poziomów (zastosowanie, analiza, synteza, ewaluacja). Bardziej wiarygodnym podejściem byłoby oddzielenie celów i ocen mierzących wiedzę deklaratywną od tych, które mierzą wiedzę proceduralną. Z tego wynika, że różnicowanie w taksonomii Blooma nie ma praktycznego znaczenia w diagnozowaniu procesu uczenia, braków w tym procesie oraz badań nad jego przebiegiem. B. Sugrue zauważa również, że każdy poziom powyżej „wiedzy” jest postrzegany jako „myślenie wyższego rzędu” – takie podejście skutecznie redukuje taksonomię właściwie tylko do dwóch poziomów.

Według M. Bookera¹⁵⁰ taksonomia Blooma została wykorzystana do dewaluacji edukacji dotyczącej podstawowych umiejętności i promowania „myślenia wyższego rzędu”. Zauważa on, że Bloom nigdy nie twierdził, że którykolwiek z opisanych przez niego poziomów poznawczych jest mniej lub bardziej ważny, tylko, że jeden następuje po drugim, podąża za hierarchiczną strukturą. Booker wskazuje, że Bloom wyraził zaskoczenie zastosowaniem taksonomii na poziomie K-12, a tym bardziej na poziomie uczelni wyższej.

Do wszelkich taksonomii procesu uczenia się odniósł się D. Clark¹⁵¹. Zauważa on, że problem z taksonomiami polega na próbie określenia złożoności poznania na liście prostych kategorii. „W praktyce nauka nie wpada w te zgrabne podziały. To znacznie bardziej złożony i bardziej chaotyczny zestaw procesów poznawczych”.

Uważa się, że taksonomia Blooma jest hierarchiczna¹⁵² (Rys. 3.6). Prowadzono wiele badań, zakładając bezdyskusyjną hierarchię tej taksonomii¹⁵³.

Przykład 1

Załóżmy, że uczący się osiągnął następujące efekty uczenia się:

- Definiuje granicę funkcji (zapamiętanie).
- Wyznacza granicę funkcji (rozumienie).

Załóżmy, że uczący się nie osiągnął następujących efektów uczenia się (np. ten zakres nie znalazł się w procesie uczenia się):

- Definiuje pochodną funkcji (zapamiętanie).

¹⁵⁰ Protokół dostępu: https://www.researchgate.net/publication/225315807_A_Roof_without_Walls_Benjamin_Bloom's_Taxonomy_and_the_Misdirection_of_American_Education [2019, styczeń].

¹⁵¹ Protokół dostępu: <https://www.derby.ac.uk/online/academics/professor-donald-clark> [2019, styczeń].

¹⁵² Lord T., Baviskar S., Moving Students From Information Recitation to Information Understanding: Exploiting Bloom's Taxonomy in Creating Science Questions, *J Coll Sci Teach*, 36, No. 5, Mr/Ap 2007, s. 44.

¹⁵³ Myo-Kyoung Kim, Patel R. A., Uchizono, J. A., Beck L., *Incorporation of Bloom's Taxonomy into Multiple-Choice Examination Questions for a Pharmacotherapeutics Course*, *American Journal of Pharmaceutical Education*, 76 (6), Article 114, 2012.

- Wyznacza pochodną funkcji (rozumienie).



Rys. 3.6. Hierarchia taksonomii Blooma

Źródło: tamże.

Zakładając hierarchiczną naturę taksonomii Blooma, uczący się w pierwszej kolejności powinien osiągnąć efekt uczenia się: *definiuje pochodną funkcji*, a następnie kolejny w hierarchii: *wyznacza pochodną funkcji*. Nie mogę się zgodzić z tym sądem.

Uzasadnienie

Zadanie. Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy granicę $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Wyznacz, o ile istnieje, pochodną funkcji $f(x) = x^2 + 3$ w punkcie $x_0 = 2$.

Uczący się, który prawidłowo rozwiązał zadanie, osiągnął efekt uczenia się: *wyznacza pochodną funkcji*. Nie zakładano osiągnięcia efektu uczenia się: *definiuje pochodną funkcji*. Definicja została zapisana w treści zadania. Wprowadzenie w treść zadania definicji, twierdzenia lub własności może pełnić następujące funkcje:

- uczący się po raz pierwszy spotyka się z tym zagadnieniem (czytanie ze zrozumieniem, radzenie sobie w nowej sytuacji),
- nie jest oceniany efekt uczenia się treści definicji, twierdzenia lub własności, lecz inny założony efekt uczenia się.

Przykład 2

Uczący się, nie znając poprawnej definicji wyznacznika macierzy, potrafi go policzyć. Roman Sikorski twierdził, że pojęcia matematyczne dobrze się zna, gdy już po zapomnieniu jego definicji w każdej sytuacji poprawnie się tego pojęcia używa¹⁵⁴. Opisany przykład uzasadnia tę tezę (Rys. 3.3, Tabela 3.4).

Tabela 3.4. Efekty uczenia się z hierarchią taksonomii Blooma

Zadanie egzaminacyjne	Efekt uczenia się	Taksonomia Blooma	Rozwiązanie studenta	Osiągnięcie efektu uczenia się
Podaj definicję wyznacznika macierzy.	Definiuje wyznacznik macierzy	zapamiętanie	wyznacznik to liczba ¹⁵⁵	NIE
Oblicz: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}.$	Oblicza wyznacznik macierzy	zrozumienie	12	TAK

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 3

Sformułujmy efekt uczenia się: analizuje definicję pochodnej funkcji f .

Pomiar efektu uczenia się.

Zadanie. Czy definicje:

- Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy granicę $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.
- Dana jest funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pochodną funkcji f w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ nazywamy granicę $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h}$.

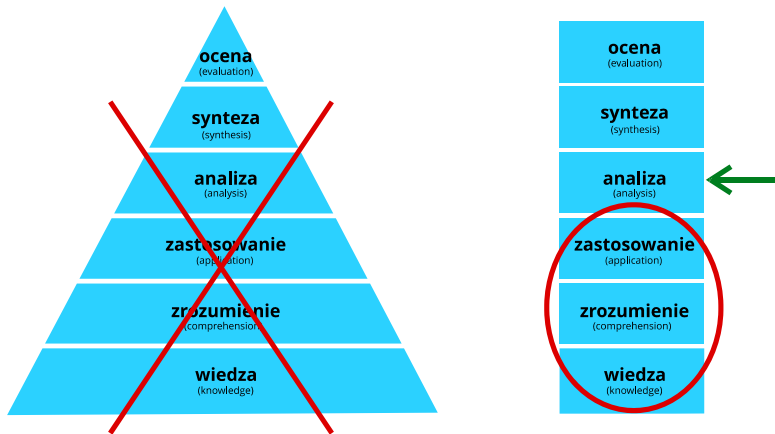
są równoważne?

W celu osiągnięcia efektu uczenia się w kategorii *analizuje* nie musi być przeprowadzona walidacja następujących efektów uczenia się (Rys. 3.7):

¹⁵⁴ Za: Makiewicz M., przypis 13.

¹⁵⁵ Taka odpowiedź została udzielona na egzaminie z analizy matematycznej przez studenta kierunku mechatronika na Politechnice Łódzkiej w roku akademickim 2018/2019.

- definiuje pochodną funkcji (zapamiętanie),
- oblicza pochodną funkcji f (zrozumienie),
- stosuje pochodną funkcji f w praktycznych problemach (stosuje).



Rys. 3.7. Modyfikacji taksonomii Blooma

Źródło: opracowanie własne.

Efekty uczenia się w kategorii: zapamiętuje, rozumie, stosuje, zakładając, że taksonomia Blooma jest hierarchiczna, znajdują się niżej niż kategoria analizuje (Rys. 3.7).

Przykład 4

Założmy, że:

zostały osiągnięte efekty uczenia się:

- definiuje pochodną funkcji (zapamiętanie),
- oblicza pochodną funkcji f (zrozumienie),

nie został osiągnięty efekt uczenia się:

- stosuje pochodną funkcji f w praktycznych problemach (stosuje).

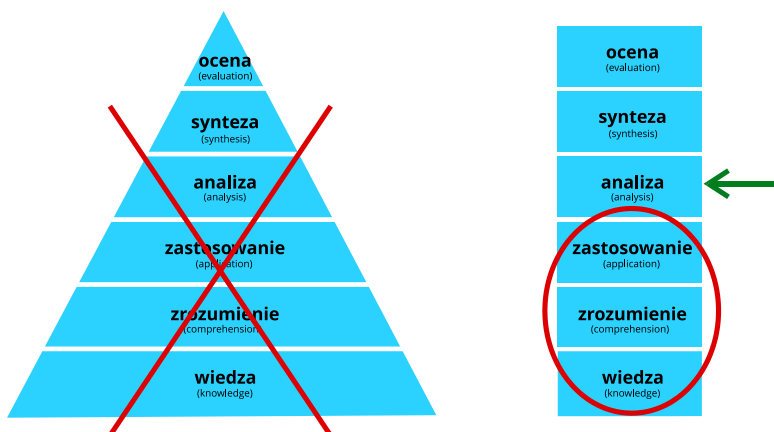
Sformułujmy efekt uczenia się: analizuje własność pochodnej funkcji f .

Pomiar efektu uczenia się.

Zadanie. Dane są funkcje różniczkowalne $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Uzasadnij, że $(f(x) \cdot g(x))' \neq f'(x) \cdot g'(x)$.

Opisany problem przedstawia Rys. 3.8.



Rys. 3.8. Modyfikacji taksonomii Blooma

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się w kategorii: zastosowanie, zakładając, że taksonomia Blooma jest hierarchiczna, znajdują się niżej niż kategoria analizowanie.

Podsumowanie

Rozszerzając stwierdzenie Romana Sikorskiego, możemy powiedzieć, że po zapomnieniu definicji możemy nie tylko używać nowego pojęcia, ale także analizować, a nawet oceniać problem. **Przedstawione przykłady pokazują, że traktowanie taksonomii Blooma jako hierarchicznej nie jest zasadne.**

Przejsięcie od taksonomii Blooma do taksonomii SOLO

Badania pokazały, że taksonomia SOLO ma zastosowanie do pomiaru kognitywnego efektów uczenia się w różnych przedmiotach, na różnych poziomach i w różnych typach zadań¹⁵⁶. Porównywano trzy taksonomie: SOLO, Blooma i pomiar myślenia. Nie ustalono jednak, którą taksonomię należy wybrać.

¹⁵⁶ Charles C., Chan M.S., Tsui, Mandy Y.C., Chan J., Hong H., *Applying the Structure of the Observed Learning Outcomes (SOLO) Taxonomy on Student's Learning Outcomes: An empirical study*, Assessment & Evaluation in Higher Education, Vol. 27, No. 6, 2002, ss. 511-527.

Modyfikacja w taksonomii SOLO

Prestrukturalny – zadanie może być w nieznaczej części rozwiązane.

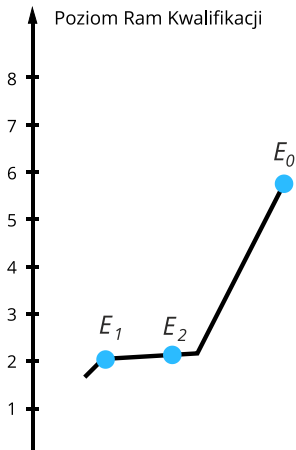
Trajektoria efektu uczenia się.

Efekt uczenia się E_0 : Wykonuje mnożenie macierzy.

Tabela 3.5. Ścieżka efektów uczenia się E_1, E_2

Nr	Efekty uczenia się
E_1	Wykonuje działania na liczbach rzeczywistych: mnożenie, dodawanie, odejmowanie
E_2	Wykonuje obliczenia z zachowaniem kolejności wykonywania działań

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3.9. Trajektoria efektu uczenia się

Źródło: opracowanie własne.

Pomiar E_0 ¹⁵⁷:

¹⁵⁷ Próba rozwiązywania zadania przez studenta w trakcie egzaminu z algebry liniowej z geometrią, Politechnika Łódzka, 2018.

Exercise 6

$$\text{Oblicz } \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 & 8 \\ -11 & 18 \end{bmatrix}$$

Niepoprawnie!

Rys. 3.10. Przykład zadania prestrukturalnego

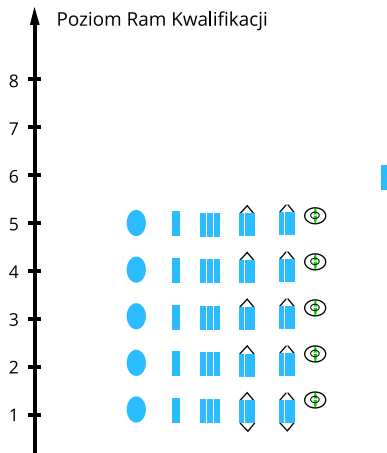
Źródło: opracowanie własne.

Student nie uzyskał walidacji efektu uczenia się. Wynik wskazuje na to, że przyczyną jest brak opanowania efektów E_1, E_2 .

Monostrukturalny – jeden z kroków zostaje pokonany.

Problemy matematyczne, które są budowane do walidacji efektów uczenia się, bardzo rzadko reprezentują poziom monostrukturalny.

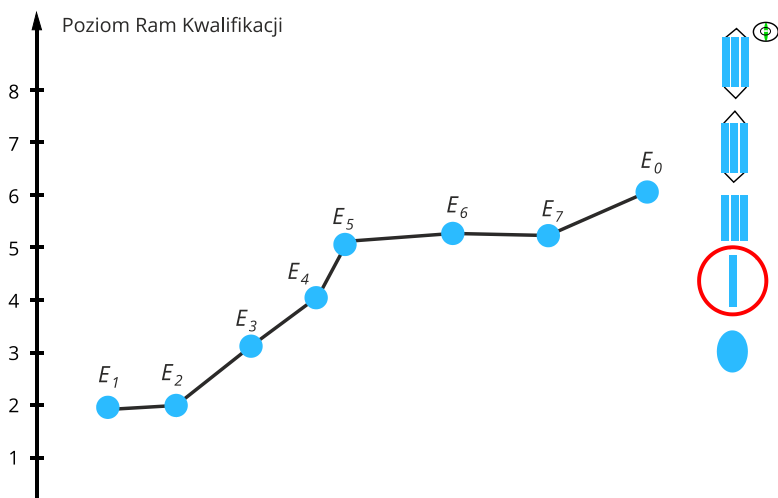
Monostrukturalność będzie rozumiał jako pojedynczy efekt uczenia się na ustalonym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji, ale dopuszczalna jest wielostrukturalność, relacja, poszerzona abstrakcja z niższych poziomów Polskiej Ramy Kwalifikacji¹⁵⁸ (Rys. 3.11).



Rys. 3.11. Monostrukturalność na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji

Źródło: opracowanie własne.

¹⁵⁸ Opracowanie własne.



Rys. 3.12. Trajektoria efektu uczenia się – monostrukturalność

Źródło: opracowanie własne.

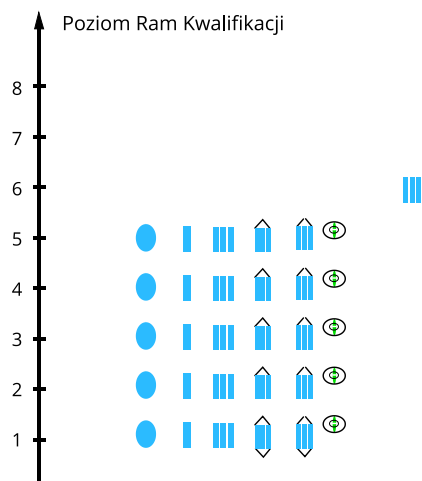
Zadanie polegające na wykonaniu mnożenia macierzy należy traktować jako monostrukturalne na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji, ponieważ efekty uczenia się E_1, E_2 pochodzą z niższego poziomu. Zatem w świetle zmodyfikowanej definicji nie tworzą poziomu wielostrukturalnego.

Opisany powyższy przykład dotyczący wykonywania mnożenia macierzy spełnia zmodyfikowaną definicję monostrukturalności.

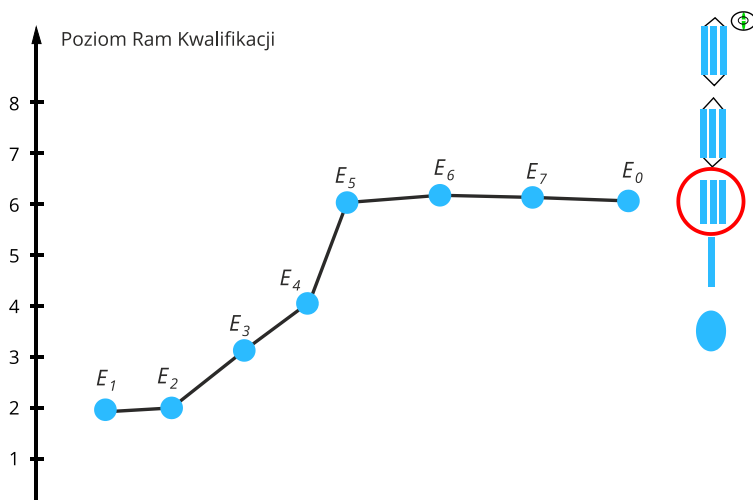
Wielostrukturalny – nie dostrzega związku między zagadnieniami.

Związek, którego nie dostrzega, będę rozumiał jako związek zagadnień na ustalonym poziomie Polskiej Ramy kwalifikacji, ale dopuszczalny jest poziom relacyjny, poszerzonej abstrakcji z niższych poziomów Polskiej Ramy Kwalifikacji¹⁵⁹ (Rys. 3.13 oraz Rys. 3.14).

¹⁵⁹ Opracowanie własne.



Rys. 3.13. Wielostrukturalność na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3.14. Trajektoria efektu uczenia się – wielostrukturalność
Źródło: opracowanie własne.

Przykład wielostrukturalności

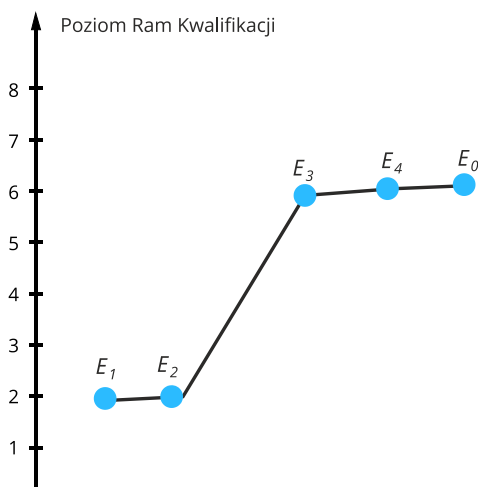
Trajektoria efektu uczenia się.

Efekt uczenia się E_0 : Oblicza macierz odwrotną.

Tabela 3.6. Ścieżka efektów uczenia się E_1, E_2, E_3, E_4

Nr	Efekty uczenia się
E_1	Wykonuje działania na liczbach rzeczywistych: mnożenie, dodawanie, odejmowanie, dzielenie
E_2	Wykonuje obliczenia z zachowaniem kolejności wykonywania działań
E_3	Oblicza wyznacznik macierzy
E_4	Stosuje własności wyznacznika macierzy

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 3.15. Trajektoria efektu uczenia się

Źródło: opracowanie własne.

Pomiar E_0^{160}

Exercise 7

$$\text{Oblicz } \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}.$$

Rys. 3.16. Przykład zadania wielostrukturálního

Źródło: opracowanie własne.

¹⁶⁰ Próba rozwiązania zadania przez studenta w trakcie egzaminu z algebry liniowej z geometrią, Politechnika Łódzka, 2018.

Relacyjny – potrafi powiązać fakty opisujące problem.

Przykład

Efekt uczenia się: Definiuje równanie różniczkowe pierwszego rzędu (E_0).

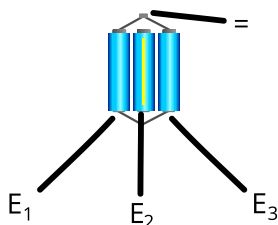
Pomiar efektu uczenia się: Podaj definiując równanie różniczkowe zwyczajnego pierwszego rzędu.

Rozwiązanie. Równaniem różniczkowym zwyczajnym pierwszego rzędu nazywamy równanie postaci: $y' = f(x, y)$, gdzie f jest określone na pewnym obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ i $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Zapamiętanie, w taksonomii Blooma, to nie tylko wyuczenie na pamięć regułki, ale elementarne jej zrozumienie. W skład elementarnego „zrozumienia” efektu (E_0) wchodzi:

- definiuje funkcję dwóch zmiennych (E_1),
- definiuje pochodną funkcji jednej zmiennej (E_2),
- interpretuje równanie funkcyjne (E_3).

Efekty uczenia się E_1, E_2, E_3 realizowane są na tym samym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji oraz muszą być ze sobą powiązane relacyjnie do realizacji efektu uczenia się E_0 .



Rys. 3.17. Model relacyjny

Źródło: opracowanie własne.

Poszerzona abstrakcja – uogólnia, tworzy nowe obiekty.

Przykład: Liczby bliźniacze.

Dwie liczby pierwsze, których różnica wynosi 2, nazywamy liczbami bliźniaczymi. Przykładowe liczby: 11 i 13.

Poszerzona abstrakcja w obszarze liczb bliźniaczych, Tabela 3.7.

Tabela 3.7. Poszerzona abstrakcja

Pozycja	Własność
1	Definicja liczby pierwszej
2	Definicja liczb bliźniaczych ¹⁶¹
3	Największe znane liczby bliźniacze ¹⁶²
4	Czy liczb bliźniaczych jest nieskończenie wiele? ¹⁶³
5	Suma odwrotności liczb bliźniaczych jest zbieżna do wartości stałej zwanej stałą Bruna ¹⁶⁴

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury.

W ten sposób tworzy się abstrakcje, uogólnienia, stawia hipotezy. A wszystko zaczęło się od liczb pierwszych.

3.3. Model 4D

Podstawą teoretyczną zbudowania nowego modelu taksonomii 4D są:

- taksonomia Blooma,
- taksonomia SOLO,
- Polska Rama Kwalifikacji,
- trudność zadania.

Uwzględnia ona w szczególności omówione we wcześniejszych rozdziałach następujące fakty:

- taksonomia Blooma nie tworzy hierarchicznego uporządkowania,
- w taksonomii SOLO wyższy poziom nie oznacza trudniejszego zadania,
- brak zależności pomiędzy taksonomią SOLO i Blooma,
- brak w taksonomiach odwołania się do Polskiej Ramy Kwalifikacji,
- brak uwzględnienia trudności zadania.

Model taksonomii 4D będzie składał się z czterech wymiarów:

- pierwszy wymiar to poziom Polskiej Ramy Kwalifikacji – hierarchiczny,
- drugi wymiar to taksonomia SOLO – hierarchiczny,

¹⁶¹ Szymańska P., Szymański B., Jeszcze jeden (elementarny) dowód rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych, Delta, lipiec 2016.

¹⁶² Protokół dostępu: <https://primes.utm.edu/largest.html> [2019, styczeń].

¹⁶³ Hipoteza, która nie jest udowodniona.

¹⁶⁴ Ziemińska J., *Liczby pierwsze bliźniacze*, Protokół dostępu: http://www.mif.pg.gda.pl/kmd/materialy/teoria_liczb/liczby%20bliźniacze.pdf [2019, styczeń].

- trzeci wymiar to taksonomia Blooma (zmodyfikowana przez Andersona) – niehierarchiczny,
- czwarty wymiar to trudność zadania – hierarchiczny: A, B, C.

Pierwszy wymiar efektu uczenia się: poziom Polskiej Ramy Kwalifikacji

Efekty uczenia się mogą być sformułowane w postaci ogólnej lub w postaci uszczegółowionej (Tabela 3.8).

Tabela 3.8. Efekty uczenia się z podziałem na poziomy ram kwalifikacji

Podział efektów uczenia się	Sformułowanie efektu uczenia się	Poziom ram kwalifikacji
Ogólne	Rozwiązuje równanie	2, 3, 4, 6, 7, 8
Uszczegółowione	Rozwiązuje równanie liniowe	2
	Rozwiązuje równanie kwadratowe	3
	Rozwiązuje równanie trygonometryczne	4
	Rozwiązuje równanie różniczkowe	7
	Rozwiązuje równanie funkcyjne	8

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawiony przykład efektu uczenia się, zapisany w postaci ogólnej (Tabela 3.8), może być realizowany praktycznie na wszystkich poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji. Zatem istotne jest, aby w opisie każdego efektu uczenia się znalazła się informacja o poziomie ramy kwalifikacji.

Drugi i trzeci wymiar: taksonomia SOLO i Blooma

Brabrand i Dahl uważają, że taksonomie SOLO i alternatywna taksonomia Blooma wzajemnie się uzupełniają¹⁶⁵. Zasadne jest, aby każdy efekt uczenia się był kategoryzowany przez obie taksonomie.

Czwarty wymiar: A, B, C związany jest z trudnością zadania.

Przykład

Efekt uczenia się: Rozwiązuje nierówność kwadratową.

¹⁶⁵ Brabrand C., Dahl B., Using the SOLO Taxonomy to Analyze Competence Progression of University Science Curricula. Submitted for publication, 2008, s. 9.

Zadania mierzące ten sam efekt uczenia się pojawiły się na egzaminie maturalnym w 2018, 2017 i 2016 roku (Rys. 3.18, Rys. 3.19).

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 3x > 5$.

Rys. 3.18. Zadanie – matura poziom podstawowy 2018

Źródło: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Zadanie 27. (0–2)

Rozwiąż nierówność $2x^2 - 4x > 3x^2 - 6x$.

Rys. 3.19. Zadanie – matura poziom podstawowy 2016

Źródło: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Tabela 3.9. Rozwiązywalność zadań

Rok	Rozwiązywalność zadania
2018	0,73
2016	0,60

Źródło: dane z Centralnej Komisji Egzaminacyjnej.

Jakie są przyczyny różnicy w trudności zadania?

- Uczeń musi przenieść zmienne na drugą stronę.
- Uczeń rozwiązuje nierówność z ujemnym współczynnikiem przy x^2 .

Podział trudności zadań jest opisany w rozdziale 3.4.

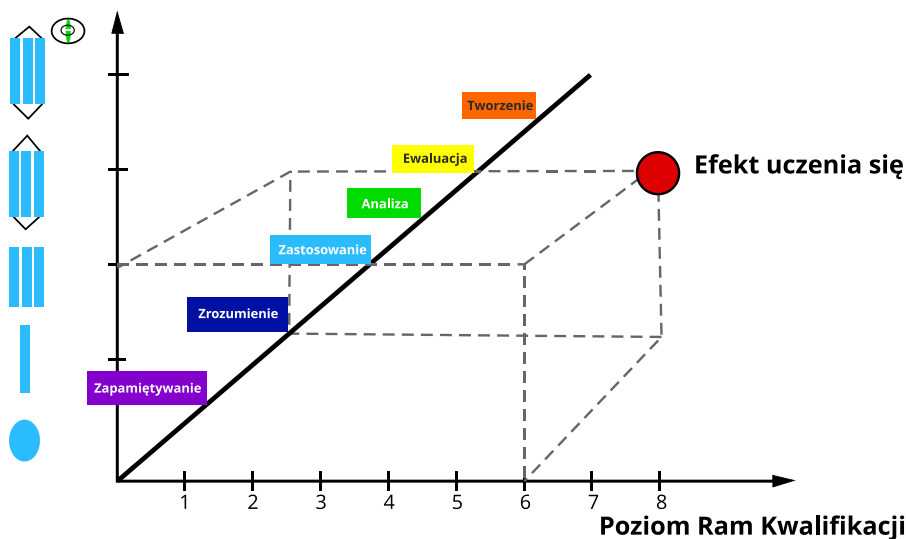
Podsumowanie

Konstrukcja modelu 4D

Uwzględniając wszystkie opisane wymiary efektu uczenia się, możemy stworzyć model przedstawiony na (Rys. 3.20).

Graficzna prezentacja modelu 4D

Założmy, że efekt uczenia się jest na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji, w taksonomii SOLO ma kategorię wielostrukturalną, w taksonomii Blooma ma kategorię *zrozumienie* i zadanie mierzące efekt ma wysoką trudność (kategoria C, będziemy oznaczać ją kolorem czerwonym).



Rys. 3.20. Położenie efektu E

Źródło: opracowanie własne.

Weryfikacja hipotezy: HS_1

Wprowadzono nowy model i trajektorię efektu uczenia się 4D.

3.4. Wskaźniki statystyczne

3.4.1. Podstawowe wskaźniki statystyczne

Łatwość zadania to iloraz sumy punktów uzyskanych przez uczniów za zadanie przez sumę punktów możliwych do uzyskanych przez uczniów za zadanie.

$$p = \frac{\sum p_u}{\sum p_m}$$

gdzie:

p_u – liczba punktów uzyskanych przez ucznia,

p_m – liczba punktów możliwych do uzyskanych przez ucznia,

$\sum \dots$ – sumowanie po wszystkich uczniach,

p – łatwość zadania.

Łatwość testu to iloraz sumy punktów uzyskanych przez uczniów za wszystkie zadania przez sumę wszystkich punktów możliwych do uzyskania przez uczniów za zadania.

W tabeli przedstawiam interpretację wskaźników łatwości testu lub zadania.

Tabela 3.10. Wskaźniki łatwości testu lub zadania

Wartość wskaźnika łatwości	Interpretacja
0,00-0,19	Bardzo trudny
0,20-0,49	Trudny
0,50-0,69	Umiarkowanie trudny
0,70-0,89	Łatwy
0,90-1,00	Bardzo łatwy

Źródło: B. Niemierko¹⁶⁶.

Wskaźnik trudności zadania to:

$$q = 1 - p$$

gdzie:

q – trudność zadania,

p – łatwość zadania.

Stosuje się także inną definicję trudności zadania.

Wskaźnik trudności zadania:

$$IDI = \frac{N_s + N_i}{2n}$$

gdzie:

n – liczba egzaminowanych w poszczególnych grupach ($2n$ to 54% całej populacji),

N_s – liczba poprawnych odpowiedzi udzielonych w zadaniu w grupie 27% najlepszych uczniów,

N_i – liczba poprawnych odpowiedzi udzielonych w zadaniu w grupie 27% najslabszych uczniów,

IDI – wskaźnik trudności zadania.

Wartość wskaźnika IDI zawiera się w przedziale (obustronnie domkniętym) od 0 do 1. Dla bardzo trudnych zadań wskaźnik IDI przyjmuje wartość bliską 0, a dla bardzo łatwych zadań – wartość bliską 1.

Wskaźnik *trudności testu* obliczamy jako średnią arytmetyczną wskaźników trudności poszczególnych zadań.

Wskaźnik dyskryminacji zadania:

$$ID = \frac{N_s - N_i}{2n}$$

¹⁶⁶ Niemierko B., Pomiar wyników kształcenia, WSiP, Warszawa 1999, s. 152.

Wartość wskaźnika *ID* zawiera się w przedziale (obustronnie domkniętym) od -1 do 1 . Wskaźnik przyjmuje wartość ujemną np. dla zadań, które są rozwiązywane (odgadywane poprawne odpowiedzi) przez słabszych uczniów.

Wskaźnik *dyskryminacji testu* obliczamy jako średnią arytmetyczną wskaźników trudności poszczególnych zadań.

Wskaźnik rzetelności testu Kudara-Richardsona (KR20):

$$KR20 = \frac{k}{k-1} \left(\frac{1 - \sum pq}{\sigma^2} \right)$$

gdzie:

p – odsetek poprawnych odpowiedzi,

q – odsetek niepoprawnych odpowiedzi,

k – liczba zadań w teście,

σ^2 – wariancja wyników testu,

$\sum pq$ – sumowanie po wszystkich zadaniach w teście.

3.4.2. Klasyczna i probabilistyczna teoria testu

W ostatnich kilkunastu latach rozwój egzaminów zewnętrznych w Polsce przyczynił się do rozwoju badań nad osiągnięciami uczniów. Testy egzaminacyjne kończące etapy edukacyjne: sprawdzian po szóstej klasie¹⁶⁷, egzamin gimnazjalny¹⁶⁸ oraz egzamin maturalny stały się powszechne i kreują politykę edukacyjną w Polsce.

W praktyce rozważa się dwie teorie testu: klasyczną i probabilistyczną. W klasycznej teorii testu wynik, jaki otrzymał uczeń, zawiera wynik prawdziwy i tzw. błąd pomiaru. Niestety podczas pomiaru nie da się uniknąć błędów. Wynikają one na przykład z pomyłek, niedyspozycji uczącego się danego dnia. Rzetelność pomiaru definiowana jest jako stosunek wariancji wyników prawdziwych do wariancji wyników otrzymanych¹⁶⁹. Najczęściej stosowaną metodą szacowania rzetelności jest współczynnik α Crombacha.

3.4.3. Model Rascha

Modele IRT (*Item Response Theory*) są stosowane coraz częściej w badaniach edukacyjnych. Jest to narzędzie, dzięki któremu możemy analizować uczącego się w odniesieniu do wybranego zadania w teście, a nie całego testu. Zadanie może pełnić funkcję walidacji efektu uczenia się. Niestety, jedną z głównych wad

¹⁶⁷ Obecnie wycofany.

¹⁶⁸ Od 2019 roku egzamin ósmoklasisty w szkole podstawowej.

¹⁶⁹ Ciżkowicz B., Klasyczna i probabilistyczna teoria testu – analiza porównawcza, [w:] Niemierko B., Szyling G. (red.), Holistyczne i analityczne metody diagnostyki edukacyjnej, Wyd. Fundacji Rozwoju UG, Gdańsk 2005, ss. 464-473.

zastosowania probabilistycznej teorii testów jest konieczność dużej próby (powyżej 1000 jednostek)¹⁷⁰.

Model

Prawdopodobieństwo udzielenia poprawnej odpowiedzi, zależnej od poziomu umiejętności θ , dane jest wzorem:

$$P(u_i = 1|\theta, a_i, b_i) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta - b_i)}}$$

gdzie:

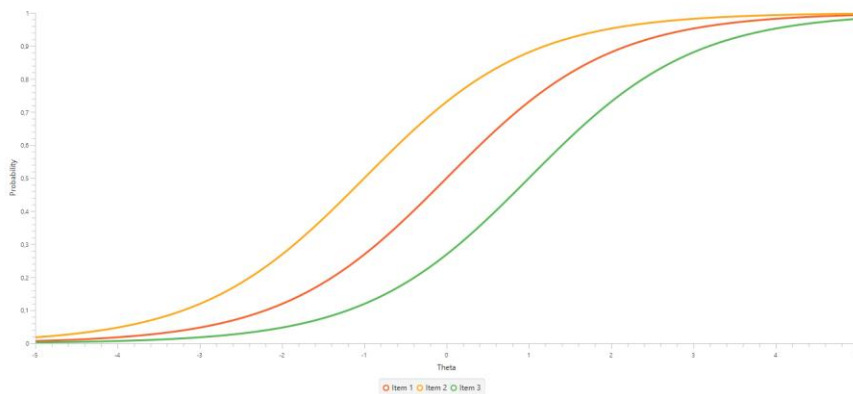
a_i – parametr dyskryminacji,

b_i – parametr trudności zadania,

θ – poziom umiejętności,

e – liczba Eulera ($\approx 2,71$).

Krzywą charakterystyczną zadania nazywamy wykres funkcji określającej prawdopodobieństwo udzielenia poprawnej odpowiedzi w zależności od poziomu umiejętności ucznia (Wykres 3.1 oraz Wykres 3.2).

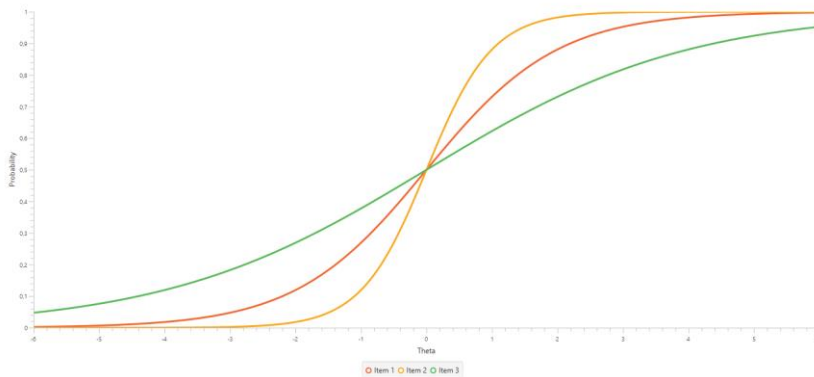


Wykres 3.1. Krzywa charakterystyczna zadania dla różnych parametrów trudności, Item 1 dla $b = 0$, Item 2 dla $b = -1$, Item 3 dla $b = 1$

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu IRT Illustrator.

Zauważmy, że wraz ze wzrostem parametru b maleje prawdopodobieństwo udzielenia poprawnej odpowiedzi.

¹⁷⁰ Tamże, s. 473.



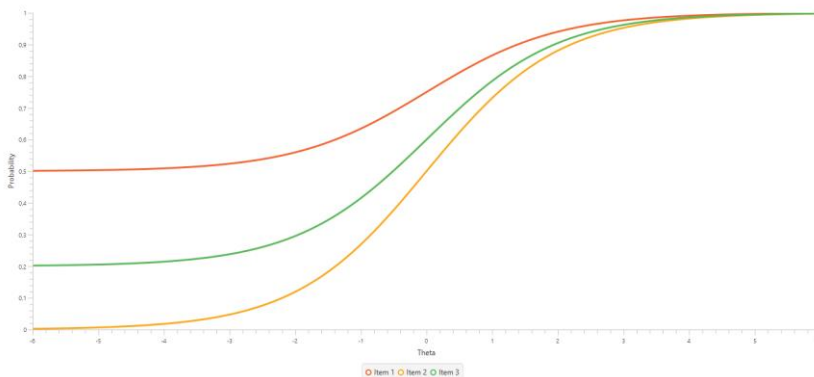
Wykres 3.2. Krzywa charakterystyczna zadania dla różnych parametrów dyskryminacji, Item 1 dla $a = 1$, Item 2 dla $a = 2$, Item 3 dla $a = \frac{1}{2}$

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu IRT Illustrator.

Przedstawiony model ma charakter dwuparametryczny (zależy od trudności i dyskryminacji zadania). Czasami stosuje się model trójparametryczny:

$$P(u_i = 1|\theta, a_i, b_i, c_i) = c_i + \frac{1 - c_i}{1 + e^{-a_i(\theta - b_i)}}$$

gdzie: c_i – współczynnik zgadywania odpowiedzi (Wykres 3.3).



Wykres 3.3. Krzywa charakterystyczna zadania dla różnych parametrów zgadywania, Item 1 dla $c = \frac{1}{2}$, Item 2 dla $c = \frac{1}{5}$, Item 3 dla $c = 0$

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu IRT Illustrator.

Przyjmując wartość współczynnika dyskryminacji $a = 1$ i wartość współczynnika zgadywania $c = 0$, dostajemy jednoparametryczny wzór:

$$P(u_i = 1|\theta, b_i) = \frac{1}{1 + e^{b_i - \theta}}$$

pochodzący od Georga Rascha (duński matematyk i statystyk)¹⁷¹.

Jednoparametrowy model Rascha wykorzystywany jest w wielu badaniach edukacyjnych, chociaż stosowanie go wywołuje sporo dyskusji¹⁷². Jednoparametrowy model Rascha z powodzeniem został zastosowany w badaniach testu na inteligencję. Pokazano wiele korzyści wynikające z niego w odniesieniu do klasycznej teorii testu.

Prześledźmy przykład pokazujący, jakie znaczenie ma uwzględnienie parametru trudności. Na każdej szkolnej stronie internetowej można znaleźć komunikat: „Najlepsi uczniowie w szkole”. Ranking uczniów tworzony jest w sposób klasyczny. Sumuje się surowe wyniki ze wszystkich przedmiotów i wylicza się średnią dla każdego ucznia, tworząc listę rankingową. Z praktyki wiemy, że trudność nauczanych przedmiotów nie jest taka sama (Tabela 3.11).

Tabela 3.11. Średnie szkolne oceny z wybranych przedmiotów

Przedmiot	Średnia
Matematyka	3,8
Fizyka	3,1
Plastyka	4,6

Źródło: opracowanie własne.

Poniżej przedstawione są oceny kilku wybranych uczniów i ich ranking w klasycznej teorii (Tabela 3.12).

Tabela 3.12. Oceny najlepszych uczniów

Uczeń	Ocena z matematyki	Ocena z fizyki	Ocena z plastyki	Średnia ocen ucznia	Ranking
Monika	5	6	3	4,67	II
Klaudia	6	5	3	4,67	II
Robert	5	4	6	5,00	I
Andrzej	5	6	2	4,33	III

Źródło: opracowanie własne.

¹⁷¹ Rasch G., *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*, Danish Institute for Educational Research, Copenhagen 1960.

¹⁷² Andrich D., Controversy and the Rasch model: a characteristic of incompatible paradigms?, *Med Care.*, 2004 Jan; 42(1 Suppl), I7-16.

Podstawowym błędem klasycznego podejścia jest brak uwzględnienia trudności przedmiotów. Stwórzmy ranking według następującego modelu¹⁷³:

$$P_i = \sum_{k=1}^3 (6 - \bar{x}_k) \cdot o_k^i$$

gdzie:

$\bar{x}_1$ – średnia ocen z matematyki,

$\bar{x}_2$ – średnia ocen z fizyki,

$\bar{x}_3$ – średnia ocen z plastyki,

o_k^i – ocena i-tego ucznia z przedmiotu k ,

P_i – poziom ucznia.

Podobny model matematyczny do różnicowania uczniów o tych samych osiągnięciach został zaproponowany przez Sapanowskiego¹⁷⁴.

Uwzględniając trudność przedmiotów, ranking uczniów zmienił się dość istotnie. Robert, który był na pierwszym miejscu w klasycznym modelu, spadł na czwarte miejsce (Tabela 3.13).

Tabela 3.13. Porównanie rankingu najlepszych uczniów z uwzględnieniem trudności przedmiotu

Uczeń	Średnia ocen ucznia	Ranking [S]	Poziom [P]	Ranking [P]
Monika	4,67	II	32,6	I
Klaudia	4,67	II	31,9	III
Robert	5,00	I	31,0	IV
Andrzej	4,33	III	31,2	II

Źródło: opracowanie własne.

Przedstawiony model do tworzenia rankingów najlepszych uczniów w szkole byłby trudny do wdrożenia. Wymaga on przekonania nie tylko nauczycieli i uczniów, ale przede wszystkim władz oświatowych na poziomie kuratoriów oświaty i Ministerstwa Edukacji Narodowej. W mojej ocenie, jak i wielu naukowców, model Rascha powinien zataczać coraz większe obszary zastosowań. Moja ocena opiera się w szczególności na fakcie, że z punktu widzenia matematycznego uwzględnia on kolejną zmienną, czyli trudność przedmiotu (a w przypadku testu – trudności zadania).

¹⁷³ Opracowanie własne.

¹⁷⁴ Sapanowski S., *Różnicowanie uczniów o tych samych osiągnięciach egzaminacyjnych*, [w:] Niemierko B., *Diagnozowanie umiejętności praktycznych w toku kształcenia i egzaminowania*, Biuletyn, XXIII Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej, Łódź 2017, ss. 370-374.

3.5. Walidacja efektów uczenia się

Przystępując do realizacji procesu nauczania, zadajemy sobie pytania:

- Jakiek zakładamy efekty uczenia się?
- W jaki sposób dokonamy ich walidacji?
- Jak sprawdzimy, że efekty uczenia się przeszły walidację?

Jedną z najważniejszych cech efektu uczenia się jest założenie, że każdy efekt uczenia się musi być osiągnięty. W mojej ocenie jest to założenie mocno hipotetyczne.

Świadectwo szkoły podstawowej, liceum lub technikum, świadectwo maturalne, dyplom inżyniera, dyplom magistra w zakresie matematyki jest jedynie potwierdzeniem ukończenia procesu uczenia się, a NIE walidacji efektów uczenia się.

Jednym z najważniejszych trendów w nowoczesnej edukacji jest nadanie kwalifikacji osobie, która osiągnęła wymagane efekty uczenia się w zakresie wiedzy, umiejętności i kompetencji (społecznych).

Podczas obrad Rady Europejskiej w Lizbonie w 2000 roku stwierdzono, że jednym z głównych działań powinno być dostosowanie systemów kształcenia mające na celu zwiększenie przejrzystości kwalifikacji.

W grudniu 2015 roku w Polsce na mocy ustawy, został utworzony Zintegrowany System Kwalifikacji. Jego celem jest monitorowanie i zapewnienie jakości kwalifikacji nabywanych poza systemem oświaty i szkolnictwa wyższego. Kwalifikacje, mają być porównywalne na europejskim rynku pracy¹⁷⁵.

Walidacja to proces, w wyniku którego uczący się otrzymuje od upoważnionej instytucji formalny dokument stwierdzający, że osiągnął określony zestaw efektów uczenia się¹⁷⁶.

Walidacja ważna jest w szczególności dla:

- osób aktywnych zawodowo, które chcą zmienić stanowisko pracy bądź zawód, żeby lepiej wykorzystywać swoje kompetencje nabyte w trakcie pracy lub w ramach swoich aktywności pozazawodowych;

¹⁷⁵ Ustawa o Zintegrowanym Systemie Kwalifikacji weszła w życie 15 stycznia 2016 r. Akt wytycza podstawowe ramy prawne nowego porządku w dziedzinie kwalifikacji w Polsce. Poniżej tekst ujednolicony na podstawie tj. ustawy z dnia 16 listopada 2018 (Dz.U.2018.2153) z późniejszymi zmianami.

¹⁷⁶ Sławiński S. i in., *Słownik kluczowych pojęć związanych z krajowym systemem kwalifikacji*, 2016.

- osób, które z różnych powodów są wykluczone z rynku pracy (np. przez długotrwałe bezrobocie) lub są zagrożone wykluczeniem, a osiągnęły nowe efekty uczenia się ważne z punktu widzenia szans na zatrudnienie;
- osób powracających na rynek pracy po dłuższej przerwie, w trakcie której uzyskały nowe kompetencje (np. opiekując się dziećmi lub innymi członkami rodziny);
- osób, które przedwcześnie zakończyły edukację formalną i w późniejszym czasie chcą w trybie eksternistycznym zdobyć wykształcenie;
- osób, które osiągnęły nowe kompetencje poprzez zaangażowanie w wolontariat lub realizację swoich zainteresowań i chciałyby uzyskać kwalifikacje potwierdzające to, czego się nauczyły (np. w celu uzyskania awansu w hierarchii organizacji, w której działają na zasadzie wolontariatu).¹⁷⁷

Najczęściej stosowane metody walidacji, to

- Test
- Wywiad
- Debata
- Prezentacja
- Obserwacja
- Symulacja
- Analiza deklaracji
- Analiza dowodów¹⁷⁸

Dobór metod walidacji zależy od:

- Postawionych efektów uczenia się
- Sposobu dokumentowania
- Złożoności kwalifikacji

Etapy walidacji¹⁷⁹:

- Identyfikowanie: rozpoznanie wiedzy, umiejętności i kompetencji społecznych już osiągniętych
- Dokumentowanie: dowody osiągnięcia ustalonych efektów uczenia się
- Weryfikacja: sprawdzenie, czy wszystkie założone efekty uczenia się zostały osiągnięte

¹⁷⁷ Gmaj I., Grzeszczak J., Leyk A. i in. (2016). Walidacja – nowe możliwości zdobywania kwalifikacji. Warszawa: Instytut Badań Edukacyjnych.

¹⁷⁸ Tamże.

¹⁷⁹ Na podstawie Zalecenia Rady w sprawie walidacji uczenia się pozaformalnego i nieformalnego z dnia 20 grudnia 2012 roku.

Jacek Lewicki¹⁸⁰ zwraca uwagę, że sposób i typ walidacji zależy również od poziomu kształcenia. Na studiach wyższych mamy do czynienia z walidacją formalną, silnie powiązaną z samym procesem kształcenia i metodami nauczania. Często walidacja efektów uczenia się określona jest w regulaminie studiów. Proces walidacji podlega również ocenie Polskiej Komisji Akredytacyjnej (PKA).

Podsumowanie

Walidacja efektów uczenia się, to najważniejsze zagadnienie dla zintegrowanego systemu kwalifikacji. Badania nad tym problemem są wciąż otwarte, zarówno nad samą koncepcją walidacji, jej opisem, jak i metodami. Zadaniem Grażyny Szyling¹⁸¹ walidacja powinna być sformalizowana w sposób prosty i zrozumiały, natomiast na skutek „rozlicznych uproszczeń, wykluczenia i przemilczeń, występujących już na etapie projektowania merytorycznych podstaw koncepcji, wygenerowały złożony proceduralnie i niejasny obszar społecznej wiedzy oraz edukacyjnego działania, w którym sprawnie porusza się tylko grupa wąsko wyspecjalizowanych ekspertów”.

3.5.1. Analiza krytyczna matury z matematyki w kontekście walidacji efektów uczenia się

W rozporządzeniu w sprawie świadectw, dyplomów państwowych i innych druków szkolnych z maja 2018 r. Minister Edukacji Narodowej zapisał konieczność umieszczania na wzorach druków szkolnych znaków graficznych informujących o poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji (Rys. 3.21).

¹⁸⁰ Lewicki J., *Nowe wyzwania walidacji w polskich uczelniach – potwierdzanie efektów uczenia się osiągniętych poza szkolnictwem wyższym*
<https://cor.sgh.waw.pl/bitstream/handle/20.500.12182/373/7536-15053-1-PB.pdf?sequence=2&isAllowed=y>

¹⁸¹ Szyling G., *Koncepcja walidacji efektów uczenia się: obszary pedagogicznych redukcji i ich (nie)zamierzonych skutków*
<https://apcz.umk.pl/czasopisma/index.php/RA/article/view/RA.2016.009/12401>

RZECZPOSPOLITA POLSKA
ŚWIADECTWO DOJRZAŁOŚCI

.....
imię (imiona) i nazwisko

.....
data urodzenia

.....
miejsce urodzenia

zdał..... egzamin maturalny i uzyskał.....

z przedmiotów obowiązkowych:
w części ustnej egzaminu:

język polski
język
matematyka

w części pisemnej egzaminu na poziomie podstawowym:

język polski
język
matematyka

wynik taki sam lub niższy uzyskało% zdających
wynik taki sam lub niższy uzyskało% zdających
wynik taki sam lub niższy uzyskało% zdających

....., dnia r.
miejscowość

Nr M/.....

PRK IV
Kwalifikacja pełna na poziomie
czwartym Polskiej Ramy Kwalifikacji

.....
m.p.

.....
pieczęć i podpis dyrektora
okręgowej komisji egzaminacyjnej

Świadectwo jest dokumentem uprawniającym do ubiegania się o przyjęcie na studia w szkołach wyższych.

OKE-II/61/3

Rys. 3.21. Wzór świadectwa dojrzałości i znak graficzny Polskiej Ramy Kwalifikacji

Źródło: Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 26 kwietnia 2018 r. w sprawie świadectw, dyplomów państwowych i innych druków szkolnych.

Znak ten informuje, że osoba legitymująca się świadectwem dojrzałości posiada wiedzę, umiejętności i kompetencje społeczne właściwe dla czwartego poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji.

W Zintegrowanym Rejestrze Kwalifikacji pod hasłem „świadectwo dojrzałości”, w zakładce „Efekty kształcenia” znajdujemy odniesienie do podstawy programowej kształcenia ogólnego.

The screenshot shows the ZRK website interface. At the top, there are logos for Fundusze Europejskie, Ministerstwo Edukacji Narodowej, IBE, and Unia Europejska. The main header is 'Zintegrowany Rejestr Kwalifikacji'. Below it is a navigation bar with links: Strona główna ZRK, Szukam kwalifikacji, Szukam podmiotu, Warto wiedzieć, ZRK, Przejdź na stronę ZSK, and Zaloguj się.

The main content area is titled 'Kwalifikacja - podgląd'. It has tabs for 'Informacje ogólne', 'Efekty uczenia się', 'Podmioty', 'Pozostałe informacje', and 'Historia'. The 'Efekty uczenia się' tab is selected.

Under the 'Efekty uczenia się' tab, there is a section titled 'Syntetyczna charakterystyka efektów uczenia się' which contains a text box with the following content: 'Rozporządzenie Ministra Edukacji Narodowej z dnia 27 sierpnia 2012 r. w sprawie podstawy programowej wychowania przedszkolnego oraz kształcenia ogólnego w poszczególnych typach szkół' http://isap.sejm.gov.pl/DetailsServlet?id=WDU20120000977+2014%2409%2401&min=1. Świadectwo dojrzałości wydawane jest zgodnie z art. 44zł ust. 1 i ust. 4. ustawy z dnia 7 września 1991 r. o systemie oświaty (Dz. U. z 2015 r., poz. 2156 z późn. zm.) http://isap.sejm.gov.pl/DetailsServlet?id=WDU19910950425

Below this section is a table titled 'Zestawy efektów uczenia się'. The table has columns: '#', 'Numer', 'Nazwa zestawu', 'Poziom', and 'Nakład pracy'. The table is currently empty.

On the right side of the page, there is a sidebar with the title 'Akcje' and three buttons: 'Lista', 'Eksport', and 'Wydruk'.

Rys. 3.22. Efekty uczenia się dla poziomu czwartego

Źródło: Zintegrowany Rejestr Kwalifikacji, protokół dostępu:

<https://rejes.kwalifikacje.gov.pl/frontend/index.php?r=kwalifikacja%2Fview&id=10978>
[2019, styczeń].

Można by zatem przyjąć, że uczeń, który zdał maturę na poziomie podstawowym z matematyki, na egzaminie zewnętrznym potwierdził wszystkie efekty uczenia się zapisane w podstawie programowej kształcenia ogólnego.

Co gwarantuje PRK IV w zakresie matematyki w latach 2016-2017?

Poniżej przedstawiono zadania, które spełniły definicję walidacji efektów uczenia się (Tabela 3.14, Tabela 3.15, Tabela 3.16 oraz Rys. 3.23, Rys. 3.25, Rys. 3.34).

Matura podstawowa z matematyki, rok 2017.

Liczebność grupy: 25 646.

Liczba uczniów, którzy zdali maturę z matematyki: 19 497¹⁸².

Tabela 3.14. Dane uczniów, którzy zdali maturę z matematyki na poziomie podstawowym

Zadanie	Rozwiązywalność	Model Rascha Parametr b	Efekt uczenia się
24	0,99	-3,66	Oblicza średnią arytmetyczną
12	0,98	-3,43	Wyznacza wyraz ciągu arytmetycznego
23	0,95	-2,59	Oblicza objętość stożka
15	0,94	-2,45	Analizuje kąty w okręgu
26.1	0,93	-1,80	Wyznacza pierwiastki równania kwadratowego
7	0,92	-1,94	Interpretuje przedziały liczbowe
11	0,91	-1,89	Sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji
16	0,90	-1,95	Analizuje trójkąty podobne

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z OKE w Łodzi.

Zadanie 24. (0–1)

Średnia arytmetyczna ośmiu liczb: 3, 5, 7, 9, x , 15, 17, 19 jest równa 11. Wtedy

- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = 11$ D. $x = 13$

Zadanie 12. (0–1)

W ciągu arytmetycznym (a_n) , określonym dla $n \geq 1$, dane są: $a_1 = 5$, $a_2 = 11$. Wtedy

- A. $a_{14} = 71$ B. $a_{12} = 71$ C. $a_{11} = 71$ D. $a_{10} = 71$

Zadanie 23. (0–1)

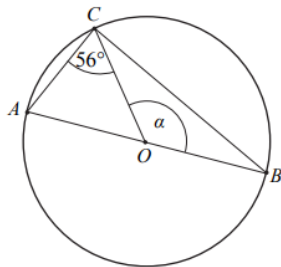
Dany jest stożek o wysokości 4 i średnicy podstawy 12. Objętość tego stożka jest równa

- A. 576π B. 192π C. 144π D. 48π

¹⁸² Dane: Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi, województwo łódzkie i świętokrzyskie.

Zadanie 15. (0–1)

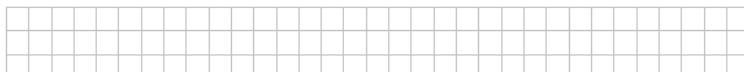
Na okręgu o środku w punkcie O leży punkt C (zobacz rysunek). Odcinek AB jest średnicą tego okręgu. Zaznaczony na rysunku kąt środkowy α ma miarę



- A. 116° B. 114° C. 112° D. 110°

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $8x^2 - 72x \leq 0$.

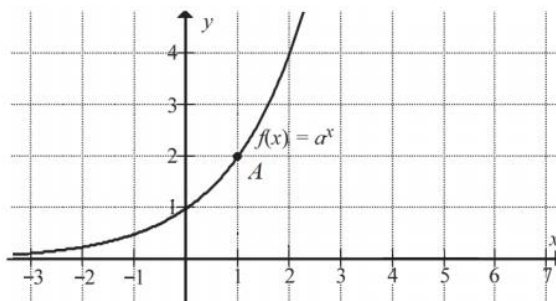
**Zadanie 7. (0–1)**

Wskaż rysunek, na którym jest przedstawiony zbiór wszystkich rozwiązań nierówności $2 - 3x \geq 4$.

- A.
- B.
- C.
- D.

Zadanie 11. (0–1)

Na rysunku przedstawiono fragment wykresu funkcji wykładniczej f określonej wzorem $f(x) = a^x$. Punkt $A = (1, 2)$ należy do tego wykresu funkcji.

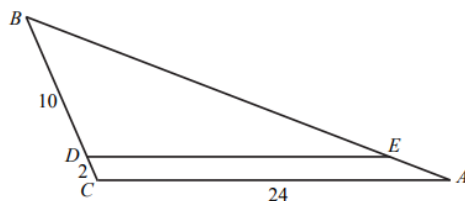


Podstawa a potęgi jest równa

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

Zadanie 16. (0–1)

W trójkącie ABC punkt D leży na boku BC , a punkt E leży na boku AB . Odcinek DE jest równoległy do boku AC , a ponadto $|BD| = 10$, $|BC| = 12$ i $|AC| = 24$ (zobacz rysunek).



Długość odcinka DE jest równa

- A. 22 B. 20 C. 12 D. 11

Rys. 3.23. Wybrane zadania – matura z matematyki na poziomie podstawowym, rok 2017

Źródło: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Matura podstawowa z matematyki, rok 2016.

Liczebność grupy: 26 168.

Liczba uczniów, którzy zdali maturę z matematyki: 21 911¹⁸³.

Tabela 3.15. Dane uczniów, którzy zdali maturę z matematyki na poziomie podstawowym

Zadanie	Rozwiązywalność	Model Rascha Parametr b	Efekt uczenia się
21	0,95	-2,41	Wyznacza środek odcinka w układzie współrzędnych
7	0,93	-2,55	Analizuje kąty w okręgu
10	0,90	-1,84	Wyznacza zbiór wartości funkcji
16	0,90	-2,04	Analizuje trójkąty podobne
26.1	0,90	-1,99	Oblicza średnią arytmetyczną

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z OKE w Łodzi.

Zadanie 21. (0–1)

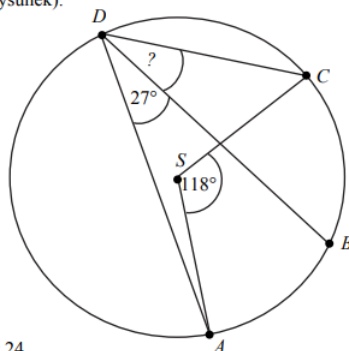
W układzie współrzędnych dane są punkty $A = (a, 6)$ oraz $B = (7, b)$. Środkiem odcinka AB jest punkt $M = (3, 4)$. Wynika stąd, że

- A. $a = 5$ i $b = 5$ B. $a = -1$ i $b = 2$ C. $a = 4$ i $b = 10$ D. $a = -4$ i $b = -2$

Zadanie 7. (0–1)

Punkty $ABCD$ leżą na okręgu o środku S (zobacz rysunek). Miara kąta BDC jest równa

- A. 91°
B. $72,5^\circ$
C. 18°
D. 32°

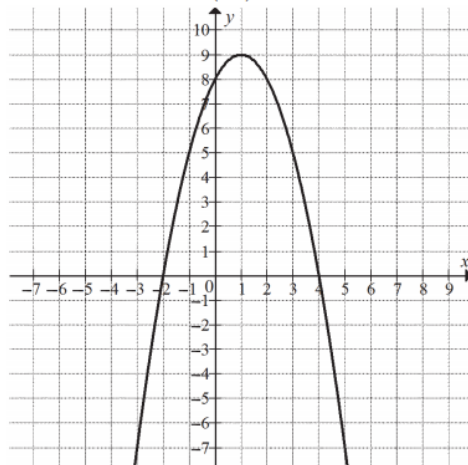


Strona 2 z 24

¹⁸³ Dane: Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi, województwo łódzkie i świętokrzyskie.

Informacja do zadań 10. i 11.

Na rysunku przedstawiony jest fragment paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej f . Wierzchołkiem tej paraboli jest punkt $W = (1, 9)$. Liczby -2 i 4 to miejsca zerowe funkcji f .

**Zadanie 10. (0–1)**

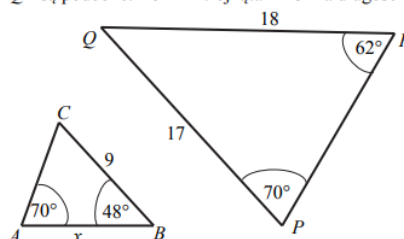
Zbiorem wartości funkcji f jest przedział

- A. $(-\infty, -2)$ B. $\langle -2, 4 \rangle$ C. $\langle 4, +\infty$ D. $(-\infty, 9)$

Zadanie 16. (0–1)

Przedstawione na rysunku trójkąty ABC i PQR są podobne. Bok AB trójkąta ABC ma długość

- A. 8
B. 8,5
C. 9,5
D. 10

**Zadanie 26. (0–2)**

W tabeli przedstawiono roczne przyrosty wysokości pewnej sosny w ciągu sześciu kolejnych lat.

kolejne lata	1	2	3	4	5	6
przyrost (w cm)	10	10	7	8	8	7

Oblicz średni roczny przyrost wysokości tej sosny w badanym okresie sześciu lat. Otrzymany wynik zaokrąglij do 1 cm. Oblicz błąd względny otrzymanego przybliżenia. Podaj ten błąd w procentach.

Rys. 3.24. Wybrane zadania – matura z matematyki na poziomie podstawowym, rok 2016

Źródło: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

Matura podstawowa z matematyki, rok 2015.

Liczebność grupy: 18 013.

Liczba uczniów, którzy zdali maturę z matematyki: 14 906¹⁸⁴.

Tabela 3.16. Dane uczniów, którzy zdali maturę z matematyki na poziomie podstawowym

Zadanie	Rozwiązywalność	Model Rascha Parametr b	Efekt uczenia się
24	0,94	-2,77	Oblicza średnią arytmetyczną
6	0,94	-2,41	Wyznacza pierwiastki równania wielomianowego z postaci iloczynowej
9	0,93	-2,00	Sprawdza, czy punkt należy do wykresu funkcji
4	0,93	-1,98	Wykonuje działania na liczbach
2	0,92	-2,22	Wykonuje obliczenia na logarytmach
22	0,90	-2,01	Wyznacza objętość stożka
26.1	0,90	-1,80	Rozwiązuje równanie kwadratowe

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych z OKE w Łodzi.

Zadanie 24. (0–1)

Średnia arytmetyczna zestawu danych:

2, 4, 7, 8, 9

jest taka sama jak średnia arytmetyczna zestawu danych:

2, 4, 7, 8, 9, x .

Wynika stąd, że

A. $x = 0$

B. $x = 3$

C. $x = 5$

D. $x = 6$

Zadanie 6. (0–1)

Suma wszystkich pierwiastków równania $(x+3)(x+7)(x-11)=0$ jest równa

A. -1

B. 21

C. 1

D. -21

Zadanie 9. (0–1)

Na wykresie funkcji liniowej określonej wzorem $f(x) = (m-1)x + 3$ leży punkt $S = (5, -2)$.

Zatem

A. $m = -1$

B. $m = 0$

C. $m = 1$

D. $m = 2$

Zadanie 4. (0–1)

Równość $\frac{m}{5-\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$ zachodzi dla

A. $m = 5$

B. $m = 4$

C. $m = 1$

D. $m = -5$

¹⁸⁴ Dane: Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi, województwo łódzkie.

Możemy potwierdzić, że uczniowie, którzy otrzymali świadectwo maturalne z matury w zakresie matematyki w latach 2016-2017, osiągnęli jeden wspólny efekt uczenia się: wyznacza średnią arytmetyczną.

To chyba trochę za mało...

Należy jak najszybciej rozpocząć pracę nad nową formułą egzaminu maturalnego w zakresie matematyki i nie tylko.

Wzorem może być model opisany w rozdziale 5.3., który z powodzeniem został zaakceptowany i wdrożony dla szóstego poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji w zakresie matematyki.

Edukacja matematyczna i jej efektywność w polskiej szkole jest przedmiotem dyskusji i krytycznych analiz od wielu lat. Niskie wyniki egzaminu maturalnego z matematyki w 2014 roku (25% uczniów nie zdało egzaminu) napawają niepokojem i każą powrócić do problemu jakości kształcenia w szkołach na różnych etapach edukacji, ale także sposobu kształcenia i doskonalenia nauczycieli¹⁸⁵.

Również opublikowany na początku 2019 roku raport Najwyższej Izby Kontroli dotyczący nauczania matematyki w szkołach nie napawa optymizmem. Wśród uczniów kształcących się w ponad 9 tysiącach skontrolowanych szkół aż 42% na świadectwach w szkołach gimnazjalnych miała tylko ocenę dopuszczającą, w gimnazjach 23%, a w szkołach podstawowych 10%. Oceny celująco wynosiły odpowiednio 1%, 2% i 4%. Dodatkowo na podstawie danych z Centralnej Komisji Egzaminacyjnej widzimy, że w latach 2015-2017 średnio co roku 17% uczniów nie zdało matury z matematyki, a średni wynik oscylował wokół 55%. Jak źle wypada matematyka możemy zobaczyć porównując zdawalność z językiem polskim – 98%, czy angielskim – 95%.

Oprócz samego raportu, chcąc uzyskać wyjaśnienie zaistniałej sytuacji NIK zamówiła opinie na temat procesu nauczania matematyki w polskiej szkole u prof. dr hab. Edyty Gruszczyk-Kolczyńskiej (Katedra Wspomagania Rozwoju i Edukacji Dzieci, Akademia Pedagogiki Specjalnej) oraz dr hab. Małgorzaty Makiewicz, prof. US (Instytut Matematyki – Zakład Dydaktyki Matematyki, Uniwersytet Szczeciński). Prof. dr hab. Edyta Gruszczyk-Kolczyńska w swoim raporcie już na pierwszej stronie formułuje zarzut: „Więcej niż połowa polskich dzieci przed pójściem do szkoły wykazuje się uzdolnieniami do nauki matematyki, a co czwarte wysokim stopniem zadatków takich uzdolnień. Po kilku miesiącach nauki w szkole większość tych dzieci przestaje manifestować swoje znakomite możliwości umysłowe.”¹⁸⁶ Na taki stan rzeczy zdaniem prof. dr hab. Edyty Gruszczyk-

¹⁸⁵ Żytko M., *Jak skutecznie rozbudzić i utrzymać zainteresowanie uczniów matematyką?* [w:] Trendy nr 3-4/2014, Warszawa: Ośrodek Rozwoju Edukacji, 2014.

¹⁸⁶ Gruszczyk-Kolczyńska E., *Diagnoza kryzysu w matematycznym kształceniu dzieci*, <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19329,vp,21937.pdf>

Kolczyńskiej mają wpływ między innymi błędy na poziomie nauczania zintegrowanego oraz źle przygotowane podręczniki bezkrytycznie wykorzystywane przez nauczycieli. Dr hab. Małgorzata Makiewicz w swoim raporcie pisze „Trudności w uczeniu się matematyki skutkują frustracją i niechęcią do przedmiotu. To ujawnia się wyraźnie w klasach czwartych szkół podstawowych. Narastające zaległości zastępują początkową fascynację dziecka szkołą i stopniowo przeradzają się w niezadowolenie, rozczarowanie i niechęć do matematyki”¹⁸⁷. W efekcie uczniowie na maturze nie uzyskują zadowalających wyników. Wśród podawanych przez Autorkę przyczyn możemy znaleźć zaniedbywaną kulturę matematyczną, czy niewystarczające wsparcie dla nauczycieli matematyki.

3.5.2. Test, zadania testowe i ich klasyfikacja

Zadaniem testowym będziemy nazywać najmniejszą, niezależną częśćkę testu, wymagającą od badanego udzielenia odpowiedzi¹⁸⁸. Najczęściej przyjmuje ono formę pytania lub stwierdzenia. Zadanie testowe powinno sprawdzać jeden efekt uczenia się.

Daniel Koretz twierdzi, że test to mała próbka zadań, której używamy do oszacowania opanowania przez uczniów (uczących się) szerokiego wachlarza wiadomości i umiejętności. Według słownika PWN test to metoda służąca do szacowania zjawisk nieobserwowalnych, takich jak np. wiadomości ucznia¹⁸⁹.

Rodzaje testów:

- diagnostyczny,
- sumujący,
- różnicujący,
- sprawdzający,
- kwalifikacyjny.

Test diagnostyczny przeznaczony jest do sprawdzenia opanowania przez uczących się wiedzy i umiejętności z wybranego zakresu. Najczęściej zawiera wybrany obszar problemowy. Głównym jego celem jest zdiagnozowanie braków u uczących się. Rozwiązywalność testu diagnostycznego powinna być bardzo wysoka, co najmniej 0,90.

Test sumujący przeznaczony jest do sprawdzenia opanowania przez uczących się wiedzy i umiejętności z szerokiego zakresu. Głównym celem jest ogólna ocena osiągnięć uczących się, np. sprawdzian całoroczny.

¹⁸⁷ Makiewicz M., *Opinia w przedmiocie diagnozy problemów związanych z procesem nauczania matematyki w szkole (począwszy od IV klasy szkoły podstawowej) wraz z odpowiednimi rekomendacjami* <https://www.nik.gov.pl/plik/id,19330,vp,21938.pdf>

¹⁸⁸ Niemierko B., *Pomiar wyników kształcenia*, WSiP, Warszawa 1999.

¹⁸⁹ Protokół dostępu: <http://stareaneksy.pwn.pl/> [2019, styczeń].

Test różnicujący powinien mieć tak dobrane zadania, aby zróżnicować lub wyselekcjonować grupę uczących się. Powinien wskazywać indywidualne cechy uczących się. Stosuje się go na przykład w konkursach.

Test sprawdzający posiada układ zadań dobrany ze względu na stawiane wymagania. Wynik testu powinien jednoznacznie wskazywać, czy wymagania zostały spełnione, chociaż nie wszystkie zadania muszą być rozwiązane.

Test kwalifikacyjny to układ zadań mierzących założone efekty uczenia się. W teście kwalifikującym wszystkie zadania muszą być rozwiązane.

Klasyfikacja zadań

Zadania testowe dzielimy na otwarte i zamknięte. Zadanie otwarte to zadanie, w którym uczący się samodzielnie formułuje i prezentuje odpowiedź. Zadanie zamknięte składa się z przygotowanych odpowiedzi. Najczęściej jedna z nich jest prawidłowa, nazywana werstraktorem, a pozostałe pełnią rolę fałszywych odpowiedzi, nazywanych dystraktorami. Zadania zamknięte i otwarte mają różne formy (Tabela 3.18) oraz wady i zalety (Tabela 3.19).

Tabela 3.18. Podział zadań testowych

Rodzaj	Forma
Otwarte	rozszerzonej odpowiedzi, RO. krótkiej odpowiedzi, KO. z luką, L.
Zamknięte	na dobieranie, D. wielokrotnego wyboru, WW. prawda – fałsz, PF.

Źródło: B. Niemierko¹⁹⁰.

Tabela 3.19. Wady i zalety zadań

Zadania	Wady	Zalety
Otwarte	trudność obiektywnej oceny, trudność w konstrukcji schematu odpowiedzi	niepodatność na zgadywanie, łatwe w konstrukcji, możliwość obserwacji strategii rozwiązania, sprawdzanie szerokiego spektrum efektów uczenia się, możliwość przedstawienia własnego zdania
Zamknięte	możliwość zgadywania odpowiedzi, tworzenie fałszywego obrazu rzeczywistości, trudność	prosta metoda tworzenia klucza odpowiedzi, obiektywne punktowanie

¹⁹⁰ Niemierko B., *Pomiar wyników kształcenia*, WSiP, Warszawa 1999.

w doborze dystraktorów,
brak możliwości
częściowej oceny,
tworzenie własnych
rozwiązań, brak
możliwości
monitorowania strategii
rozwiązań

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury.

Typologie zadań, testy online

Dla autorów podręczników i systemów oceniania rozwój technologii informatycznych oraz implementacja zarówno zadań zamkniętych, jak i otwartych, stworzyły duże możliwości. Pierwszy w Polsce informatyczny system, który ocenia uczniów z gimnazjum na dużą skalę, został wdrożony w 2008 roku¹⁹¹. Rok później około czterech tysięcy maturzystów przystąpiło do pierwszej w Polsce próbnej matury z matematyki, przeprowadzonej przez internet¹⁹².

Następnie Centralna Komisja Egzaminacyjna zdecydowała się na wprowadzenie egzaminów w formie elektronicznej. Są to części pisemne egzaminów zawodowych trwające 60 minut i przeprowadzane w formie testu składającego się z 40 zadań zamkniętych, zawierających cztery odpowiedzi do wyboru, z których tylko jedna jest prawidłowa¹⁹³. E-egzamin stanowi obecnie alternatywę dla wersji tradycyjnej – papierowej (). Egzamin elektroniczny zdawany jest w ośrodku egzaminacyjnym, najczęściej przygotowanym przez szkołę. Jego dostępność w dużej mierze zależy od możliwości placówki oświatowej, najczęściej jest ona wyposażona w odpowiedni sprzęt komputerowy. Przed przystąpieniem do egzaminu pracownia musi posiadać specjalistyczne oprogramowanie opracowane w CKE, między innymi Wirtualny Serwer Egzaminacyjny, a podczas egzaminu musi zostać odłączona od internetu (Rys. 3.26).

¹⁹¹ „E-egzamin 2008”, pomysłodawca J. Stańdo, Łódź, 2008.

¹⁹² „E-matura 2009”, pomysłodawca J. Stańdo, Politechnika Łódzka, 2009.

¹⁹³ Protokół dostępu: <https://cke.gov.pl/egzamin-zawodowy/egzamin-zawodowy-formula-2017/o-egzaminie/> [2019, styczeń].



Rys. 3.26. Widok okna egzaminu elektronicznego – Pilotaż 2010

Źródło: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

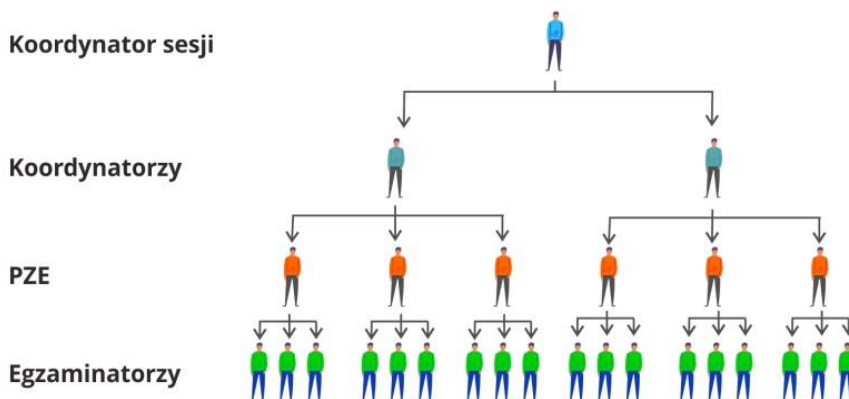
Niewątpliwą zaletą elektronicznej wersji egzaminu jest natychmiastowa informacja zwrotna na temat osiągniętego wyniku. Minusem tej formy egzaminu jest znaczna ilość sprzętu komputerowego, w który musi być wyposażona szkoła prowadząca ośrodek egzaminacyjny, gdyż egzamin musi zostać przeprowadzony w ciągu jednego dnia.

Jest to warunek trudny do spełnienia, jednak szkoła może wybrać mieszaną formę przeprowadzania egzaminu. Polega ona na tym, że egzaminy dla wybranych kwalifikacji zdawana jest z wykorzystaniem systemu elektronicznego, a pozostałe w wersji tradycyjnej. Należy również zwrócić uwagę na operatora egzaminu, który ponosi odpowiedzialność za przygotowanie pracowni komputerowej, przeprowadzenie egzaminu, opracowanie wyników oraz ich archiwizację. Według danych OKE we Wrocławiu w latach 2016-2017 tylko 5% placówek oświatowych zdecydowało się przeprowadzić egzamin elektroniczny, podobna liczba szkół wybrała wariant mieszany, jednak wciąż blisko 90% decyduje się przeprowadzić egzamin w wersji papierowej¹⁹⁴. Plany wprowadzenia obowiązku przeprowadzenia teoretycznej części egzaminu zawodowego w formie elektronicznej od roku szkolnego 2017/18 zostały odłożone.

Kolejnym krokiem zaproponowanym przez Centralną Komisję Egzaminacyjną jest wprowadzenie elektronicznej oceny egzaminów pisanych w formie tradycyjnej. System SCORIS obecnie jest wykorzystywany do oceny zadań otwartych egzaminów gimnazjalnych¹⁹⁵ (Rys. 3.27).

¹⁹⁴ Protokół dostępu: <https://repozytorium.ur.edu.pl/bitstream/handle/item/3132/19%20nowak-elektroniczny%20system.pdf?sequence=1&isAllowed=y> [2019, styczeń].

¹⁹⁵ *Wdrożenie systemu informatycznego do e-oceniania, Podręcznik egzaminatora*, Centralna komisja Egzaminacyjna, 2015.



Rys. 3.28. Struktura e-oceniania

Źródło: tamże.

W trakcie sprawdzania egzaminatorzy mogą pracować w dowolnym miejscu i w wybranych przez siebie godzinach pracy.

Od początku wdrożenia systemu SCORIS Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi powierza mi pełnienie funkcji Przewodniczącego Zespołu Egzaminatorów. Moje wieloletnie doświadczenia potwierdzają korzyści z wprowadzenia systemu¹⁹⁶:

- Brak odpowiedzialności za bezpieczeństwo egzaminów (na przykład w przypadku zgubienia egzaminu).
- Szybkość dostępu egzaminów do sprawdzenia (praktycznie po zeskanowaniu egzaminu są dostępne).
- Monitorowanie organizacyjne oceniania (ile prac sprawdzonych, opóźnienia).
- Weryfikacja poprawności sprawdzania egzaminów.
- Możliwość komunikowania się na platformie.

Typologie zadań online

S. Juszczuk twierdzi, że „podstawowym problemem staje się umiejętne wkomponowanie komputera jako narzędzia w treści kształcenia, które uczeń powinien opanować. Współczesny model edukacji powinien lepiej przystawać do szybko zmieniającej się rzeczywistości...”¹⁹⁷.

¹⁹⁶ Tamże.

¹⁹⁷ Juszczuk S., *Interakcja człowieka z mediami*, Nauczyciel i Szkoła 1 (2), 1997, ss. 10-28.

Wszystkie typy zadań zamkniętych, łącznie z systemem oceniania, dają się zaimplementować w systemach informatycznych. Są one wykorzystywane do tworzenia testów online znacznie częściej niż zadania otwarte. Dzieje się tak głównie dlatego, że są one łatwiejsze do implementacji i sprawdzenia. Zasady oceniania są zawsze jednoznaczne. Uważa się, że zapewniają obiektywizm oceniania. To, co jest równie ważne dla nauczyciela, to stosunkowo łatwa możliwość stworzenia wielu wersji równoległych. Niestety jednym z głównych zarzutów, stawianych tego typu zadaniom, jest udzielanie przez uczniów przypadkowych odpowiedzi (możliwość zgadywania). Kolejną wadą jest brak możliwości ustalenia toku rozumowania, drogi dochodzenia do wyniku.

Zadania zamknięte są niekiedy niesłusznie dyskredytowane przez część nauczycieli. Zwróćmy uwagę, że sformułowanie zadania zamkniętego w odpowiedni sposób będzie pobudzać procesy myślowe, a nie je ograniczać, postawi ucznia w sytuacji decyzyjnej. Zadania wielokrotnego wyboru WW wraz z zadaniami jednokrotnego wyboru zawierającymi się w tej podkategorii, w których możliwe odpowiedzi (najczęściej od 3 do 5) są odrębne w zakresie jednego zadania, stanowią najbardziej popularną i najbardziej elastyczną formę zadań zamkniętych (Rys. 3.29, Rys. 3.30). Zwróćmy uwagę, że w zadaniach online można zwiększyć liczbę odpowiedzi. Nie musimy ograniczać się tylko do 5.

Rok przestępny przypada co 4 lata, wtedy, gdy liczba oznaczająca rok jest podzielna przez 4. Wyjątkiem są te lata, gdy liczba wyrażająca rok dzielić się przez 100 nie dzieli się przez 400, np. 1700, 1800, 1900 (dzieli się przez 100, ale nie przez 400), czyli 1700, 1800 i 1900 nie były latami przestępnymi. Rozstrzygnij, czy zdanie jest prawdziwe.

☐ Luty roku 2012 miał 29 dni.

☐ Od 18 lutego do 2 marca 1832 roku minęło 13 dni.

☐ Pierwszy kwartał roku 1992 miał 91 dni.

☐ Rok 1972 był rokiem przestępnym.

☐ Rok 1300 miał 366 dni.

Rys. 3.29. Zadanie wielokrotnego wyboru

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Pole powierzchni i objętość tego samego sześcianu wyrażone są taką samą liczbą.
Jaka to liczba?
Wskaż poprawną odpowiedź.

☐	64
☐	216
☐	27
☐	125

Rys. 3.30. Zadanie jednokrotnego wyboru

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Kolejnym typem są zadania na dobieranie D, w których uczniowie tworzą pary elementów wybieranych z dwóch zbiorów według podanych kryteriów (Rys. 3.31). W tej sytuacji pary odpowiedzi stanowią listę wspólną, którą można traktować jako wiązkę zadań. Taka forma zadania nie zmusza do tworzenia dystraktorów. Niewątpliwą zaletą wersji elektronicznej zadania na dobieranie jest jego całkowita czytelność. Wystarczy przypomnieć sobie próby uczniów wykonujących to zadanie na kartce, gdy plątania linii łączących pary była tak nieczytelna, że często uniemożliwiała ocenę.

Połącz w pary.

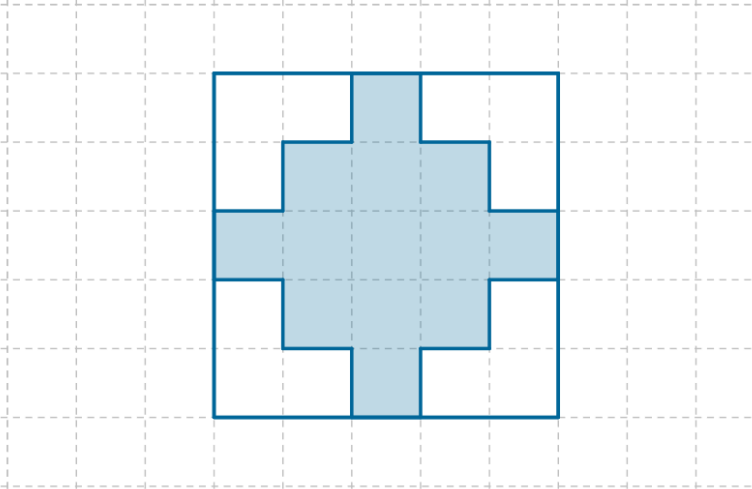
MMXVI	↕	↕	1463
MDCCXXIII	↕	↕	372
CLXVI	↕	↕	1187
CCCLXXII	↕	↕	2016
MCLXXXVII	↕	↕	166
MCDLXIII	↕	↕	1723

Rys. 3.31. Zadanie na dobieranie

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Ostatnim typem zadań zamkniętych opisanym przez B. Niemierko są zadania prawda – fałsz PF (Rys. 3.32). W tym przypadku zadaniem ucznia jest rozstrzygnięcie, czy podane stwierdzenie jest prawdziwe, czy fałszywe lub czy spełnia inny, określony w treści zadania warunek.

Poniższa figura składa się z identycznych kwadratów.



Rozstrzygnij, czy podane zdanie jest prawdziwe, czy fałszywe.

	Prawda	Falsz
Pole obszaru zamalowanego jest mniejsze od pola obszaru niezamalowanego.	☐	☐
Pole obszaru zamalowanego stanowi 54% pola całej figury.	☐	☐
Pole obszaru niezamalowanego stanowi 48% pola całej figury.	☐	☐
Jeden kwadrat stanowi 4% pola całej figury.	☐	☐

Rys. 3.32. Zadanie prawda – fałsz

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Tworząc e-podręczniki do matematyki, opracowaliśmy dodatkowe typy zadań, nieuwzględnione w klasyfikacji B. Niemierki. Przykładem może być zadanie polegające na przyporządkowaniu elementów do zbiorów, które można określić rozszerzoną formą zadania na dobieranie (Rys. 3.33). W tym przypadku mogą wystąpić elementy niepasujące do określonych kryteriów, a liczba samych zbiorów może być większa od dwa.

Przeciągnij elementy z dolnej sekcji do górnej.

Liczby podzielne przez 3

Liczby podzielne przez 4

Liczby podzielne przez 5

712



208



6505



1355



3243



351



2166



126



170



5553



184



Rys. 3.33. Zadanie uporządkowania zbiorów

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Kolejnym typem używanych przez nas zdań były zadania polegające na uporządkowaniu elementów w kolejności, czyli sortowaniu (Rys. 3.34).

Uporządkuj tak, aby uzyskać malejący ciąg arytmetyczny.

$\frac{1}{10}$



$1\frac{1}{10}$



$-\frac{2}{5}$



$\frac{3}{5}$



$2\frac{3}{5}$



$2\frac{1}{10}$



$1\frac{3}{5}$



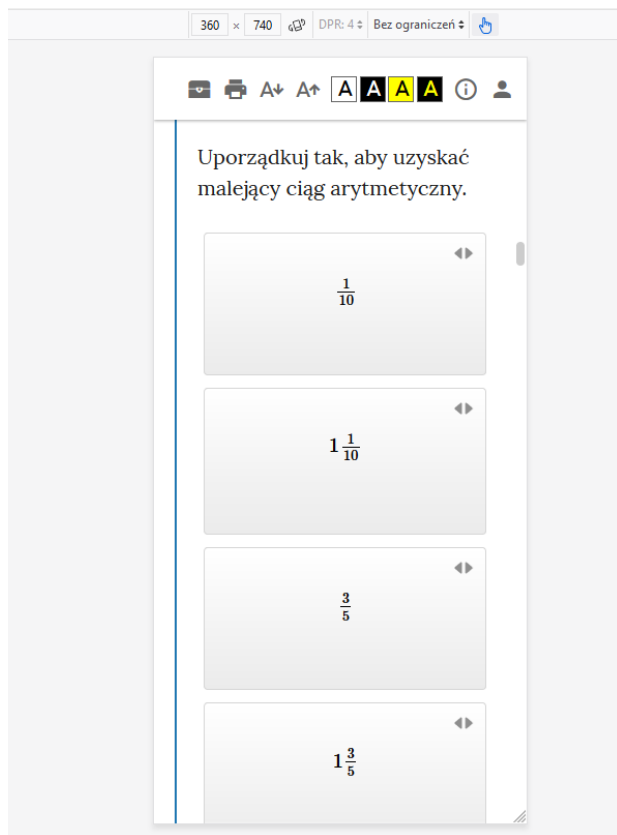
$1\frac{3}{5}$



Rys. 3.34. Zadanie na sortowanie zbiorów

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl>, [2019, styczeń].

Rozwój nowych technologii oraz fakt, że młodzi ludzie częściej korzystają ze smartfonów niż komputerów, wymusza na twórcach e-testów, szczególnie tych dostępnych online, dbałość o responsywność e-zasobów. Istotne jest, aby e-zadanie można było rozwiązać na każdym urządzeniu, o dowolnej rozdzielczości (Rys. 3.35).



Rys. 3.35. Zadanie na sortowanie zbiorów – widok na urządzeniu mobilnym

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Z powodu braku skutecznych algorytmów sprawdzających wyjątkiem wciąż są zadania rozszerzonej odpowiedzi RO, w których uczeń może dowolnie formułować swoją wypowiedź.

Pozostałe typy zadań otwartych, z pewnymi ograniczeniami, są stosowane z powodzeniem, zarówno zadania krótkiej odpowiedzi KO, w których odpowiedzią zazwyczaj jest pojedyncza liczba, symbol, krótkie zdanie lub wyrażenie matematyczne, jak i zadania z luką L, w których uczeń uzupełnia wcześniej przygotowane zdanie, fragment tekstu lub wyrażenia matematycznego (Rys. 3.36).

W podanych poniżej zdaniach zastąp wielkości przedstawione za pomocą ułamków przez procenty, a następnie przeciągnij i upuść.

Michał śpi przez $\frac{1}{3}$, czyli przez % doby.

Kasia przeszła już 0,375 czyli % całej trasy, którą miała do przebycia

W wyborach do samorządu klasowego Jola uzyskała $\frac{5}{9}$, czyli % wszystkich głosów.

Wśród kwiatów rosnących w ogródku pani Heleny róże stanowią $\frac{3}{5}$, czyli % wszystkich kwiatów.

Co piąta osoba w klasie I a uczy się języka francuskiego. Języka francuskiego uczy się % wszystkich uczniów klasy I a.

Zysk firmy w bieżącym roku stanowił 1,37, czyli % zysku z roku ubiegłego.

3	30	37,5	5	60	137	3,(3)
6,(6)	50	66,(6)	$55\frac{1}{9}$	33,(3)	2,5	
20	3,75	0,375	40	$50\frac{5}{9}$	13 700	
$55\frac{5}{9}$	3 750					

Rys. 3.36. Elementy do przeciągania w zadaniu z luką

Źródło: Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, E-podręcznik do matematyki..., protokół dostępu: <https://epodreczniki.pl> [2019, styczeń].

Moje własne doświadczenie pokazuje, że w e-zadaniach obu typów oprogramowanie wszystkich możliwych, prawidłowych odpowiedzi, jakie uczeń mógłby podać, jest często trudne do przewidzenia. Przykładem mógłby być jeden z pierwszych próbnych egzaminów maturalnych online (e-matura), gdzie odpowiedzią prawidłową w pewnym zadaniu była liczba $\frac{1}{2}$. Uzyskane odpowiedzi zaskoczyły cały zespół, od autorów po informatyków tworzących system (1/2, 0,5, 0.5, pół, połowa, jedna druga, jedna-druga i wiele innych). W celu dokonania rzetelnej oceny zadania, w których odpowiedź była wpisywana z klawiatury, możliwe odpowiedzi udzielone przez zdających były ręcznie wyszukiwane i weryfikowane. Wówczas zaczęliśmy poszukiwać rozwiązań, które z jednej strony pozwoliłyby odpowiadającemu udzielić jednoznacznej odpowiedzi, a z drugiej nie stanowiłyby podpowiedzi czy sugestii. W pierwszym etapie testowaliśmy listy

rozwijane, nieco później elementy do przeciągania. Każde z tych rozwiązań należy dobrać tak, aby nie ułatwiać uczniowi udzielenia poprawnej odpowiedzi. Możemy tak dobrać elementy w liście rozwijanej lub do przeciągnięcia, aby zawierały dokładnie wszystkie możliwości, w załączonych przykładach: odczytywanie godziny, porównywanie liczb (Rys. 3.37).

The image shows a digital clock on the right with a blue border and a grey face. The hour hand points to 10 and the minute hand points to 12. To the left of the clock is a vertical dropdown menu. The menu is open, showing a list of numbers from 1 to 12. The text 'Która jest' is visible above the list, and 'Odp. Jest' is visible below it. The number 12 is selected in the list.

Rys. 3.37. Lista rozwijana w zadaniu krótkiej odpowiedzi

Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php> [2019, styczeń].

Innym sposobem jest przedstawienie uczniowi znacznie więcej możliwości odpowiedzi, niż wynikałoby to z kontekstu czy treści zadania. W przedstawionych poniżej przykładach uczeń ma do wyboru znacznie więcej kolorów czy liczb.

The image shows a pattern recognition task. At the top, there is a sequence of five shapes: a blue square, a yellow triangle, a blue square, a yellow triangle, and a blue square. Below this sequence is a text prompt: 'Jaki kolor i kształt powinna mieć następna figura?'. Below the prompt are two dropdown menus. The first dropdown menu is labeled 'Odp. Kolor:' and is open, showing a list of colors: biały, brązowy, czarny, fioletowy, niebieski, pomarańczowy, różowy, szary, żółty, czerwony, and zielony. The second dropdown menu is labeled 'kształt:' and is closed, showing the word 'koło'.

Rys. 3.38. Lista rozwijana w zadaniu krótkiej odpowiedzi

Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php> [2019, styczeń].

W takich przypadkach nie można traktować zadania jako zamkniętego, a z punktu widzenia oceniającego daje ono możliwość uzyskania jednoznacznej odpowiedzi.

Innym z rozwiązań, które zaproponowałem, jest stosowanie mini edytora odpowiedzi (Rys. 3.39). Zawężone możliwości edycji odpowiedzi dają, podobnie jak w powyższym przykładzie, możliwość uzyskania jednoznacznej odpowiedzi.

Wyznacz granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-3x+2}\right)^{-x^2+4x-2}$.

Odp. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{-3x+2}\right)^{-x^2+4x-2} =$

Wpisz odpowiedź

a

$\frac{a}{b}$

e^a

$e^{\frac{a}{b}}$

∞

$-\infty$

e

Ok

Anuluj

Rys. 3.39. Mini edytor w zadaniu krótkiej odpowiedzi

Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php>, [2019, styczeń].

3.5.3. Zadania generatorowe

Definicja zadania generatorowego¹⁹⁸. Niech X będzie zbiorem obiektów. Zadaniem (problemem) generatorowym jednowymiarowym $Z(x)$ nazywamy wyrażenie językowe, które staje się zadaniem (problemem), jeśli za x podstawimy element ze zbioru X .

Przykład 1

Stosując twierdzenie Cayleya–Hamiltona, wyznacz macierz odwrotną do

macierzy $\begin{bmatrix} a & g & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$.

¹⁹⁸ Opracowanie własne.

$$\text{Odp. } A^{-1} = \frac{1}{\dots}(A^2 + \dots A + \dots I_3) = \frac{1}{\dots} \left(\begin{bmatrix} a^2 & g(a+b) & ae+gf+ec \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & tc \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\dots} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rozwiązanie. } A^{-1} &= \frac{1}{u}(A^2 + tA + sI_3) = \\ &= \frac{1}{u} \left(\begin{bmatrix} a^2 & g(a+b) & ae+gf+ec \\ 0 & b^2 & f(b+c) \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ta & tg & te \\ 0 & tb & tf \\ 0 & 0 & tc \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \right) = \\ &= \frac{1}{u} \begin{bmatrix} a^2 + ta + s & g(a+b+t) & e(t+a+g+c) \\ 0 & b^2 + t \cdot b + s & f(b+c+t) \\ 0 & 0 & c^2 + tc + s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Parametry. $X = M_{33}$, zbiór macierzy $\begin{bmatrix} a & g & e \\ 0 & b & f \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, gdzie $a, b, c, e, f, g \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

Parametry t, s, u wyznaczone są ze wzorów: $t = a + b + c, s = ac + bc + ab, u = abc$.

$$\begin{aligned} \text{Uzasadnienie. } W(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} a - \lambda & g & e \\ 0 & b - \lambda & f \\ 0 & 0 & c - \lambda \end{bmatrix} = \\ &= (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda) = \lambda^3 - (a + b + c)\lambda^2 + \lambda + abc. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Cayleya–Hamiltona mamy: $A^3 - (a + b + c)A^2 + (ac + bc + ab)A + abcI_3 = 0$. Mnożąc stronami przez A^{-1} , dostajemy:

$$A^{-1} = \frac{1}{abc}(A^2 - (a + b + c)A + (ac + bc + ab)I_3).$$

Stosując twierdzenie Cayleya–Hamiltona, wyznacz macierz odwrotną do macierzy $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} \text{Odp. } A^{-1} &= \frac{1}{\boxed{}} (A^2 + \boxed{} A + \boxed{} I) = \\ &= \frac{1}{\boxed{}} \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ 0 & \boxed{} & \boxed{} \\ 0 & 0 & \boxed{} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Rys. 3.40. Implementacja zadania generatorowego

Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php> [2019, styczeń].

Definicja zadania generatorowego n-wymiarowego¹⁹⁹. Niech $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, gdzie $X_1, X_2, \dots, X_n$ są zbiorami obiektów. Zadaniem (problemem) generatorowym n-wymiarowym $Z(x)$ nazywamy wyrażenie językowe, które staje się zadaniem (problemem), jeśli za x podstawimy element ze zbioru X .

Definicja dziedziny zadania generatorowego²⁰⁰. Zbiór X nazywamy dziedziną zadania (problemu) generatorowego.

Przykład 2

Zadanie. Dana jest struktura algebraiczna z działaniami $\odot$ (Tabela 3.20).

Tabela 3.20. Opis struktury algebraicznej

$\odot$	$5a$	$5b + 1$	$5c + 2$	$5d + 3$	$5d + 3$
$5a$	$5a$	$5a$	$5a$	$5a$	$5a$
$5b + 1$	$5a$	$5b + 1$	$5c + 2$	$5d + 3$	$5d + 3$
$5c + 2$	$5a$	$5c + 2$	$5d + 3$	$5b + 1$	$5d + 3$
$5d + 3$	$5a$	$5d + 3$	$5b + 1$	$5d + 3$	$5c + 2$
$5d + 3$	$5a$	$5d + 3$	$5d + 3$	$5c + 2$	$5b + 1$

Źródło: opracowanie własne.

Uzupełnij.

$$l^{-1} = \dots$$

$$(m \odot k) \odot l = \dots$$

$$m \odot (m \odot m) = \dots$$

$$m \odot \dots = m$$

$$m \odot \dots = k$$

Rozwiązanie. $l^{-1} = [\dots]_5$, $(m \odot k) \odot l = [mkl]_5$, $(m \odot m) \odot m = [mmm]_5$, $m \odot 1 = m$, $m \odot (m^{-1} \odot k) = k$.

Parametry. $X = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_9$, gdzie $X_1, X_2, X_3, X_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $X_5, X_6, X_7, X_8 = \{1, 2, 3, 4\}$, $(k, l, m, n, a, b, c, d, e) \in X$.

Uzasadnienie

Twierdzenie. Zbiór $\mathbb{Z}_5$ wraz z działaniami dodawania i mnożenia modulo 5 jest ciałem.

Niech $\mathbb{Z}$ będzie zbiorem liczb całkowitych. Wprowadźmy relację R , $aRb \Leftrightarrow a =_5 b$. Można wykazać, że R jest relacją równoważności.

¹⁹⁹ Opracowanie własne.

²⁰⁰ Opracowanie własne.

Twierdzenie. Zbiór klas abstrakcji relacji R tworzy ciało ilorazowe $\mathbb{Z}_5/R$ wraz z działaniami $[a] \oplus [b] = [a + b]$, $[a] \odot [b] = [ab]$.

Wniosek. Struktura algebraiczna z opisanymi parametrami jest ciałem.

Dana jest struktura algebraiczna.

$\odot$	10	6	22	13	19
10	10	10	10	10	10
6	10	6	22	13	19
22	10	22	19	6	13
13	10	13	6	19	22
19	10	19	13	22	6

Uzupełnij.

$$22^{-1} = \boxed{}.$$

$$(13 \odot 19) \odot 22 = \boxed{}.$$

$$(13 \odot 13) \odot 13 = \boxed{}.$$

$$13 \odot \boxed{} = 13.$$

$$13 \odot \boxed{} = 19.$$

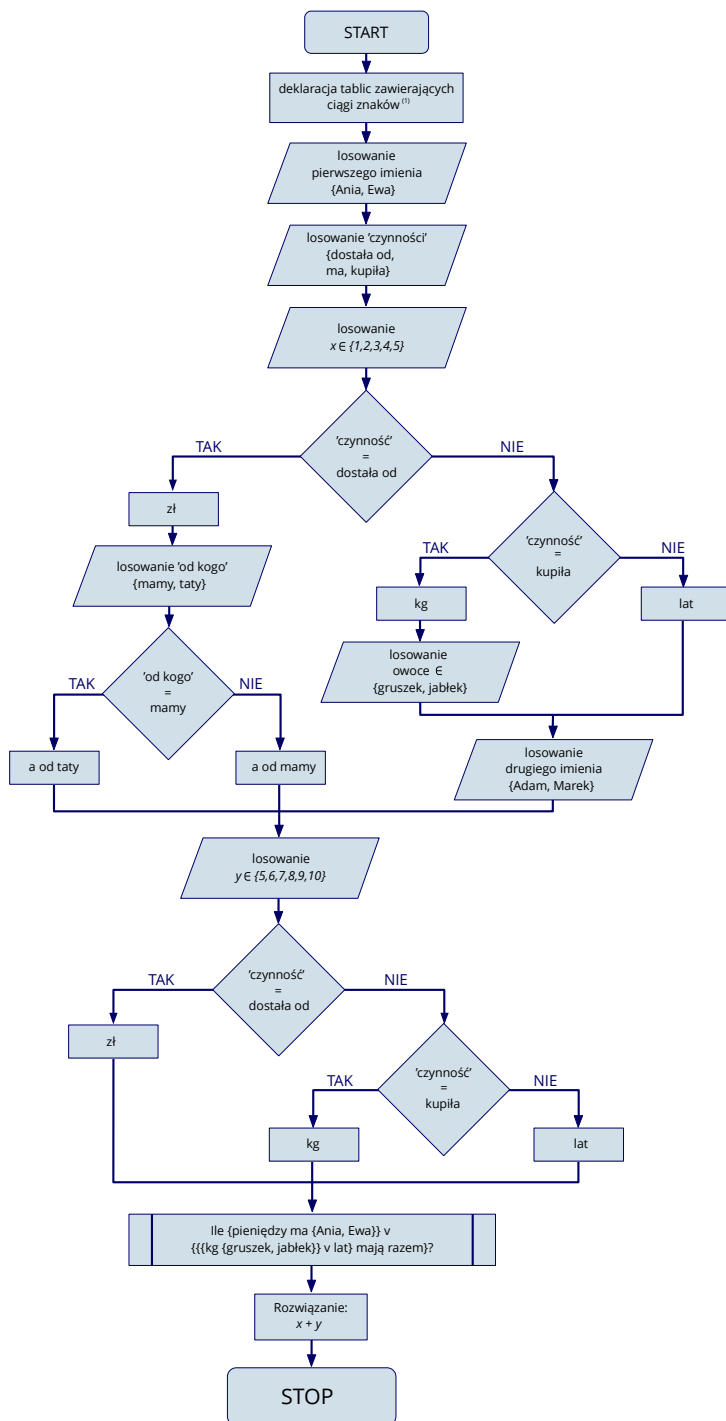
Rys. 3.41. Implementacja zadania generatorowego

Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php> [2019, styczeń].

Implementacja i schemat blokowy algorytmu do wybranych zadań generatorowych.

Przykład 3

$\{\text{Ania} \mid \text{Ewa}\}$ $\{\text{dostała od } \{\text{mamy} \mid \text{taty}\} \mid \text{ma} \mid \text{kupiła}\} x \{\text{zł, lat, kg} \mid \{\text{gruszek} \mid \text{jabłek}\}\}$ a $\{\text{od } \{\text{taty, mamy}\}, \{\text{Adam} \mid \text{Marek}\}\} y \{\text{zł, lat, kg}\}$. Ile $\{\text{pieniędzy, lat, kg} \mid \{\text{gruszek, jabłek}\}\}$ ma $\{\text{Ania} \mid \text{Ewa}\}$?



Rys. 3.42. Schemat blokowy zadania generatorowego

Źródło: opracowanie własne.

```
(1) this.tableOfColors = ["white", "brown", "black", "purple",  
"blue", "orange", "pink", "gray", "yellow", "red", "green"];
```

```
(2) switch(figureNumber) {  
case 1: //koło  
svg.circle(currentXposition+25,25,25,outlineColor,2,  
figureColor,0.9,'','');  
break;  
case 2: //kwadrat  
svg.rect(currentXposition,50,50,50,outlineColor,2,  
figureColor,0.9,'','');  
break;  
case 3: //prostokąt  
svg.rect(currentXposition,35,50,35,outlineColor,2,  
figureColor,0.9,'','');  
break;  
case 4: //trójkąt  
svg.polygon([currentXposition+25,50,currentXposition+50,  
0,currentXposition,0],outlineColor,2,figureColor,0.9, '', '');  
break;  
}
```

Ania dostała od mamy 7 zł a od taty 88 zł. Ile pieniędzy ma Ania?

Odp. Ania ma zł.

Ewa kupiła 5 kg gruszek a Adam 9 kg. Ile kg gruszek mają razem?

Odp. Ewa i Adam mają razem kg gruszek.

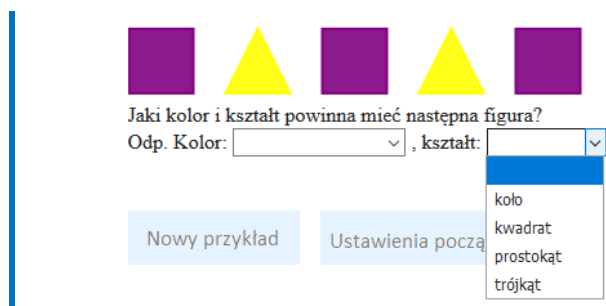
Ewa ma 7 lat a Marek 8 lat. Ile lat mają razem?

Odp. Ewa i Marek mają razem lat.

Rys. 3.43. Implementacja zadania generatorowego w trzech losowaniach

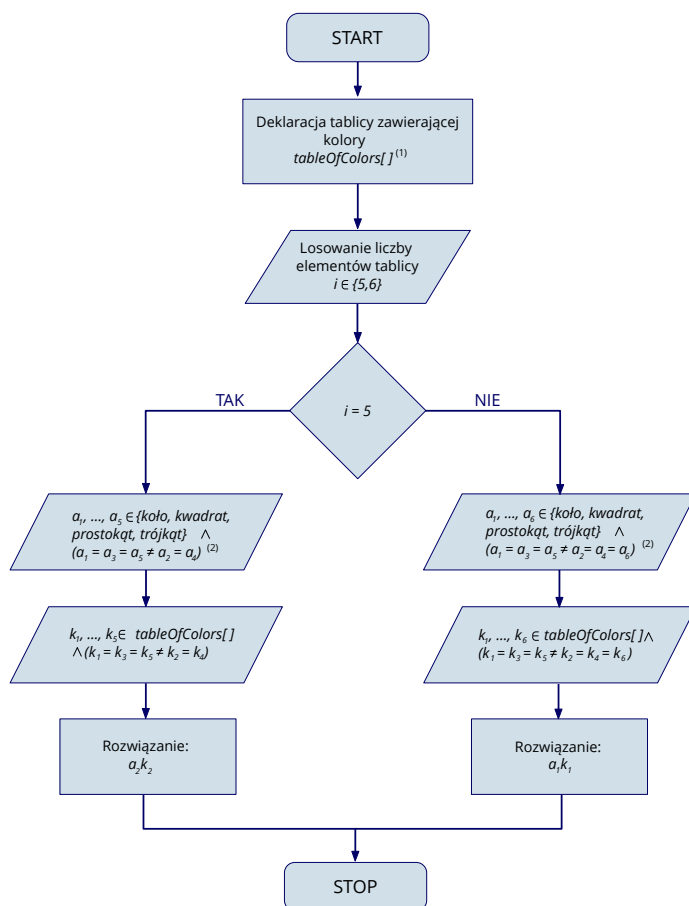
Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php>
[2019, styczeń].

Przykład 2



Rys. 3.44. Implementacja zadania generatorowego

Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php> [2019, styczeń].



Rys. 3.45. Schemat blokowy zadania generatorowego

Źródło: opracowanie własne.

```

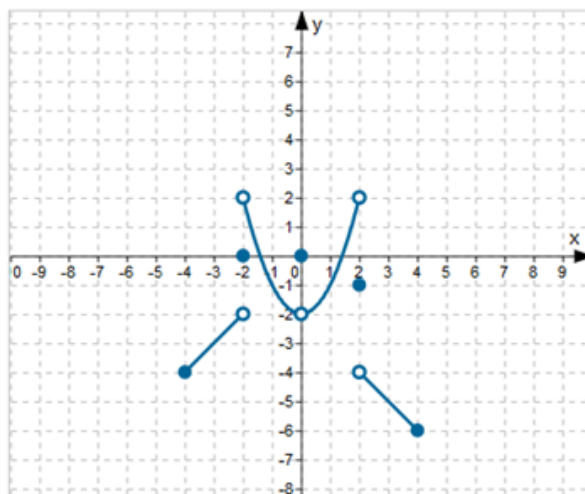
(1) this.tableOfColors = ["white", "brown", "black", "purple",
"blue", "orange", "pink", "gray", "yellow", "red", "green"];

(2) switch (figureNumber) {
case 1: //koło
svg.circle (currentXposition+25,25,25,outlineColor,2,
figureColor,0.9,'','');
break;
case 2: //kwadrat
svg.rect (currentXposition,50,50,50,outlineColor,2,
figureColor,0.9,'','');
break;
case 3: //prostokąt
svg.rect (currentXposition,35,50,35,outlineColor,2,
figureColor,0.9,'','');
break;
case 4: //trójkąt
svg.polygon ([currentXposition+25,50,currentXposition+50,
0,currentXposition,0],outlineColor,2,figureColor,0.9, '', '');
break;}

```

Przykład 3

Poniższy rysunek przedstawia wykres funkcji f .



Na podstawie wykresu, uzupełnij

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \boxed{}$$

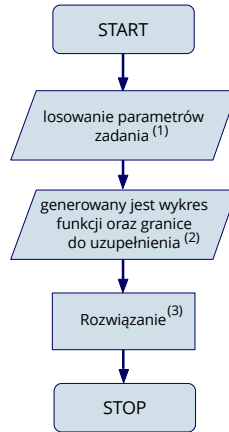
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \boxed{}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \boxed{}$$

Rys. 3.46. Implementacja zadania generatorowego

Źródło: opracowanie własne, protokół dostępu: <http://cmf.p.lodz.pl/zadania/index.php> [2019, styczeń].



Rys. 3.47. Schemat blokowy zadania generatorowego

Źródło: opracowanie własne.

⁽¹⁾ $a \in \{1, 2, 3\}$, $b \in \{1, 2, 3\}$, $c \in \{-2, 2\}$, $s \in \{-1, 1\}$, $s' \in \{-1, 1\}$, $u \in \{2s'c, sc\}$

```

a = math.rand(1,3);
b = math.rand(1,3);
c = 2*(1-2*math.rand(0,1));
s = 1 - 2*math.rand(0,1);
s1 = 1 - 2*math.rand(0,1);
u = (math.rand(0,1)) ? s1*2*c: s*c;

```

⁽²⁾ wzór generowanej funkcji:

$$f(x) = \begin{cases} -3as + sc, & x = -2a \\ s(x+a) - 2as + sc, & x \in (-2a, -a) \\ \frac{1}{2}(sc + u - 2as), & x = -a \\ x^2 + (a-b)x - ab + u, & x \in (-a, 0) \cup (0, b) \\ 0, & x = 0 \\ s'(x-b) + 2s'c, & x \in (b, 2b) \\ s'b + 2s'c, & x = 2b \end{cases}$$

```

svg.segment(-2*a, s*(-3*a)+s*c, -a, s*(-2*a)+s*c, svg.blue, 3,
'', '');
svg.segment(b, s1*2*c, 2*b, s1*b+s1*2*c, svg.blue, 3, '', '');
svg.plotFunc(-a,b, 'poly', [1,a-b,-a*b+u], svg.blue, 3, '', '');
svg.circle(0, -a*b+u, 5/svg.un, svg.blue, 3, '#ffffff', 1, '', '');
svg.circle(b, s1*2*c, 5/svg.un, svg.blue, 3, '#ffffff', 1, '', '');
svg.circle(-a, s*(-2*a)+s*c, 5/svg.un, svg.blue, 3, '#ffffff', 1,
'', '');
svg.circle(-a, u, 5/svg.un, svg.blue, 3, '#ffffff', 1, '', '');

```

```

svg.circle(b,u, 5/svg.un, svg.blue, 3, '#ffffff', 1, '', '');
svg.circle(-2*a, s*(-3*a)+s*c, 5/svg.un, svg.blue, 2, svg.blue, 1,
'', '');
svg.circle(2*b, s1*b+s1*2*c, 5/svg.un, svg.blue, 2, svg.blue, 1,
'', '');
svg.circle(0,0, 5/svg.un, svg.blue, 2, svg.blue, 1, '', '');
svg.circle(-a,(s*c+u-2*s*a)/2, 5/svg.un, svg.blue, 2, svg.blue, 1,
'', '');
svg.circle(b,(s1*2*c+u)/2, 5/svg.un, svg.blue, 2, svg.blue, 1, '',
'');

str = mML.begin();
str += this.limes(-a, '-');
str += mML.end();
$(this.placeholder).find('span.dynamicMath').eq(0).html(str);

str = mML.begin();
str += this.limes(-a, '+');
str += mML.end();
$(this.placeholder).find('span.dynamicMath').eq(1).html(str);

str = mML.begin();
str += this.limes(b, '-');
str += mML.end();
$(this.placeholder).find('span.dynamicMath').eq(2).html(str);

str = mML.begin();
str += this.limes(b, '+');
str += mML.end();
$(this.placeholder).find('span.dynamicMath').eq(3).html(str);

str = mML.begin();
str += this.limes(0, '');
str += mML.end();
$(this.placeholder).find('span.dynamicMath').eq(4).html(str);

```

(3) walidacja rozwiązań na podstawie wzorów:

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f(x) = sc - 2as,$$

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f(x) = u,$$

$$\lim_{x \rightarrow -b^-} f(x) = u,$$

$$\lim_{x \rightarrow -b^+} f(x) = 2s'c,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -ab + u,$$

```

this.correctInput[0] = s*c-2*s*a;
this.correctInput[1] = u;
this.correctInput[2] = u;
this.correctInput[3] = s1*2*c;
this.correctInput[4] = -a*b+u;

```

3.5.4. Zadania sterowane strumieniem danych rzeczywistych

Strumień danych to sekwencja elementów, które napływają w sposób ciągły w zmiennych interwałach czasu.

Formalna definicja

Niech θ będzie uporządkowaną, dyskretną przestrzenią czasową. Strumień S jest nieograniczonym zbiorem elementów $[s, r]$, w którym s jest krotką należącą do schematu strumienia, a $r \in \theta$ jest stemplem czasowym elementu²⁰¹.

Definicja zadania sterowanego²⁰². Niech $X = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, gdzie $S_1, S_2, \dots, S_n$ są zbiorami strumieni danych. Zadaniem (problemem) sterowanym strumieniem rzeczywistych danych n -wymiarowym $Z(x)$ nazywamy wyrażenie językowe, które staje się zadaniem (problemem), jeśli za x podstawimy element ze zbioru X .

Przykład 1

Zadanie generatorowe

Zadanie. Jest " a ". Jaki dzień tygodnia będzie za " b " dni?

Parametry: $X = X_1 \times X_2$, gdzie $X_1 = \{\text{poniedziałek, wtorek, środa, czwartek, piątek, sobota, niedziela}\}$, $X_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $a \in X_1$, $b \in X_2$.

Zadanie sterowane strumieniem rzeczywistych danych

Zadanie. Jaki dzień tygodnia będzie za " b " dni?

Parametry: $X = X_1 \times X_2$, gdzie $S_1 = \{\text{poniedziałek, wtorek, środa, czwartek, piątek, sobota, niedziela}\}$, $X_2 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $a \in S_1$, $b \in X_2$.

Poniżej przedstawiono zestawienie wad i zalet zadań sterowanych strumieniem danych rzeczywistych (Tabela 3.21, Tabela 3.22).

Tabela 3.21. Wady zadań sterowanych strumieniem rzeczywistych danych

Wady	Przykład
Zaufanie do danych rzeczywistych	Złe ustawienie zegara komputerowego w trakcie pobierania zmiennej definiującej czas powoduje zakłócenie rzeczywistości.

²⁰¹ Arasu A., Babu S., Widom J., *Cql: A language for continuous queries over streams and relations*, Lausen G., Suciu D., (red.), DBPL, Vol. 2921, Lecture in Computer Science, Springer 2003, ss. 1-19.

Za: Malczok R., *Wybrane problemy indeksowania i agregowania strumieni danych w hurtowniach danych*, rozprawa doktorska, Politechnika Śląska w Gliwicach, 2011, s. 22.

²⁰² Opracowanie własne.

Dane powodujące podniesienie trudności zadania	Zadanie. Która godzina będzie za 3 godziny i 32 minuty? Jeśli czas rzeczywisty to godz. 14.00, to zadanie jest dość łatwe. Jeśli czas rzeczywisty jest 14.52, to zadanie staje się trudniejsze.
Brak dostępu do danych rzeczywistych	Podczas podróży przemieszczanie się powoduje, że dostęp do internetu może zanikać.

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3.22. Zalety zadań sterowanych strumieniem rzeczywistych danych

Zalety	Przykład
Rozwiązywanie problemów w świecie rzeczywistym	Zadanie. Ile zapłacimy za 30 litrów benzyny bezołowiowej?
Zadania operują aktualnymi danymi	Zadanie. Ile lat upłynęło od II wojny światowej?

Źródło: opracowanie własne.

3.5.5. Strategie oceniania zadań

Proces transformacji dokonujący się w Europie – w kontekście budowania Europejskich Ram Kwalifikacji – stawia przed nami nowe wymagania oceniania i walidacji efektów uczenia się. W egzaminach zewnętrznych do roku 2010 dominowało ocenianie analityczne, a po roku 2010 – ocenianie holistyczne.

W 2009 roku Centralna Komisja Egzaminacyjna realizowała Projekt pt. „Pilotaż nowych egzaminów maturalnych i eksternistycznych”, w ramach którego opracowano zasady oceniania zadań otwartych, schematy oceniania i przeprowadzono ocenę prac egzaminacyjnych. Zespół Projektowy wypracował nowe podejście do oceniania, zwane holistycznym²⁰³.

Ocenianie analityczne

²⁰³ Centralna Komisja Egzaminacyjna, Centralny Zespół Ekspertów Matematycznych (CZEM), *O schematach oceniania zadań otwartych próbnej matury z matematyki*, 2009, ss. 1-4.

Uczący się otrzymuje punkt za każdą czynność. Wady i zalety oceniania analitycznego przedstawiono poniżej (Tabela 3.23).

Tabela 3.23. Ocenianie analityczne

Ocenianie analityczne	
Wady	Zalety
– Barak gwarancji osiągnięcia efektu uczenia się.	– Porównywalność.
– Niezależność oceny umiejętności.	– Jednoznaczność przyznawania punktów.
– Brak możliwości oceny myślenia.	– Łatwość skonstruowania narzędzia pomiarowego.
	– Sprawdzenie szczegółowych umiejętności.

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury.

Ocenianie holistyczne

Ocenianie całościowe, a nie poszczególnych umiejętności. Przykładowe fazy oceniania holistycznego:

- rozwiązanie, w którym brak istotnego postępu 0 pkt,
- dokonano istotnego postępu w rozwiązaniu zadania i nie pokonano zasadniczej trudności zadania (dopuszcza się drobne błędy) 1 pkt,
- pokonane zasadnicze trudności zadania i kontynuowano błędnie rozwiązanie 2 pkt,
- pokonane zasadnicze trudności zadania i doprowadzenie do rozwiązania z drobnymi błędami 3 pkt,
- rozwiązanie zadania bezbłędnie 4 pkt.

Wady i zalety oceniania holistycznego przedstawiono poniżej (Tabela 3.24).

Tabela 3.24. Ocenianie holistyczne

Ocenianie holistyczne	
Wady	Zalety
– Niejednoznaczna porównywalność.	– Ocenianie różnych metod rozwiązań.
– Autonomia w egzaminach zewnętrznych.	– Zależność oceny od grupy umiejętności.
– Narażenie na nierzetelną ocenę.	– Autonomia w indywidualnej ocenie uczącego się.
	– Ocena wypowiedzi ustnych.

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury.

Dokonano porównania oceniania analitycznego oraz holistycznego i stwierdzono, że typ oceniania nie ma znaczącego wpływu na wyniki egzaminów²⁰⁴.

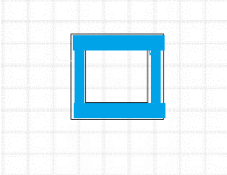
W kontekście walidacji efektów uczenia się proponuję, aby ocena zadania była zero-jedynkowa, tzn. 0 pkt – źle rozwiązane zadanie, 1 pkt – w pełni rozwiązane zadanie.

Ocenianie zadań otwartych z zastosowaniem przetwarzania obrazu

Do oceniania zadań zamkniętych i niektórych zadań otwartych może być zastosowany automatyczny system oceniania, jak pokazano dla zadań generatorowych i zadań sterowanych strumieniem rzeczywistych danych. Do automatycznego oceniania innej grupy zadań otwartych może być zastosowana metoda przetwarzania obrazu²⁰⁵.

Przykład 1

Tabela 3.25. Schematyczny model oceniania zadania z zastosowaniem przetwarzania obrazu

Zadanie Narysuj kwadrat o długości 3 kratek.		Automatyczne ocenianie polega na zeskanowaniu obrazu, następnie rozpoznaniu, czy narysowana figura spełnia założone warunki oceny zadania.
Wzorzec do rozpoznania		Jeśli narysowany kwadrat zawiera się w części zaciemnionej, to zadanie zostaje ocenione pozytywnie²⁰⁶.

Źródło: opracowanie własne.

Automatyczne ocenianie zadań otwartych polegające na zeskanowaniu i przetworzeniu obrazu może być zastosowane w obszarze:

- wyrażen algebraicznych,

²⁰⁴ Kołodziej K., Mazur U., *W drodze do oceniania holistycznego egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej*, [w:] B. Niemierko, M.K. Szmigel (red.), *Teraźniejszość i przyszłość oceniania szkolnego*. Wyd. Grupa TOMAMI, Kraków 2010, s. 616.

²⁰⁵ Bieniecki W., Stańdo J., Stoliński S., *Information technologies in a process of examination in Poland. Information systems in management*, WULS Press, Warsaw 2010, ss. 29-39.

²⁰⁶ Jest to bardzo uproszczony model oceniania zadania. Ma on jedynie pełnić w tym przykładzie funkcję poglądową.

- wykresów funkcji,
- konstrukcji geometrycznych,
- dowodów twierdzeń.

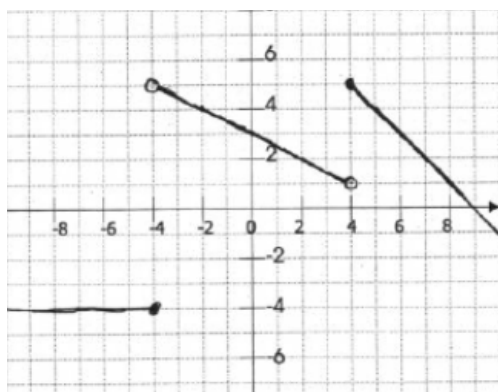
Należy zdawać sobie sprawę, że dla dużej grupy zadań otwartych nie da się wdrożyć automatycznego oceniania. W takim przypadku pozostaje już tylko egzaminator.

W badaniach wykazano, że jest możliwe automatyczne rozpoznawanie zeskanowanych zadań otwartych i ich skuteczna ocena na przykładzie rysowania wykresu funkcji liniowej, kwadratowej i funkcji sklejanej²⁰⁷.

Przykład 2

Zadanie. Narysuj wykres funkcji:
$$f(x) = \begin{cases} -4 & x \leq -4 \\ \frac{1}{2}x + 3 & -4 < x < 4 \\ -x & x \geq 4 \end{cases}$$

Przykładowe rozwiązanie zadania zostało pokazane poniżej (Rys. 3.48).



Rys. 3.48. Wykres funkcji narysowany odrębnie, oceniony pozytywnie przez automatyczne rozpoznanie obrazu

Źródło: Bieniecki W., Stoliński S., Stańdo J., *Automatic Evaluation of Examination Tasks in the Form of Function Plot*, Proceedings of the 6th International IEEE Conference MEMSTECH 2010, Lviv-Polyana, Ukraine, ss. 140-143.

W niedalekiej przyszłości można rozpocząć prace badawcze nad zbudowaniem typologii otwartych zadań z matematyki, które mogą być sprawdzane za

²⁰⁷ Bieniecki W., Stoliński S., Stańdo J., *Automatic Evaluation of Examination Tasks in the Form of Function Plot*, Proceedings of the 6th International IEEE Conference MEMSTECH 2010, Lviv-Polyana, Ukraine, ss. 140-143.

pomocą rozpoznania obrazu. Także do przetwarzania obrazów mogą być użyte zaawansowane metody, np. sztuczna inteligencja.

3.5.6. Typologia walidacji efektów uczenia się

Typologia walidacji efektów uczenia się²⁰⁸:

- dyskretna – W_d ;
- klasyczna – $W_{90 \times 90}$,
- probabilistyczna – W_p ;
- probabilistyczna z parametrem b – $W_p(b)$.

Dyskretna walidacja

Załóżmy, że dysponujemy surowymi wynikami testu lub pojedynczego zadania.

Definicja dyskretniej walidacji efektu uczenia się²⁰⁹

Powiemy, że dokonano dyskretniej walidacji efektu uczenia się W_d , jeśli zadanie, które mierzy efekt uczenia się, zostało rozwiązane prawidłowo.

Przykład

Zadanie (2 pkt). Rozwiąż równanie różniczkowe $\frac{dy}{dx} = x^3 + 1$ z warunkiem początkowym $y(0) = 0$.

Schemat punktowania (Tabela 3.26).

Tabela 3.26. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
Zapisanie rozwiązania ogólnego: $y(x) = \frac{x^4}{4} + x + c$	1
Podanie rozwiązania: $y(x) = \frac{x^4}{4} + x$	2

Źródło: opracowanie własne, zadanie egzaminacyjne, Politechnika Łódzka, 2015.

Poniżej przedstawiono przykładowe odpowiedzi studentów oraz ich walidację (Tabela 3.27).

²⁰⁸ Opracowanie własne.

²⁰⁹ Opracowanie własne.

Tabela 3.27. Walidacja efektu uczenia się niepełnych rozwiązań

Student	Odpowiedź	Liczba punktów za zadanie	Dyskretna walidacja efektu uczenia się
Student A	$y(x) = \frac{x^4}{4} + x + c$	1	Nie
Student B	$y(x) = \frac{x^4}{4} + x + 1$	1	Nie
Student C	$y(x) = \frac{x^4}{4} + x$	2	Tak

Źródło: opracowanie własne, odpowiedzi udzielone przez studentów.

Klasyczna walidacja

Skala staninowa

Znormalizowana skala, opracowana na podstawie rozkładu normalnego. Wyniki są uporządkowane od najniższego do najwyższego (Tabela 3.28). Skala staninowa stosowana jest powszechnie przez Centralną Komisję Egzaminacyjną w raportach z egzaminów zewnętrznych²¹⁰.

Tabela 3.28. Skala staninowa

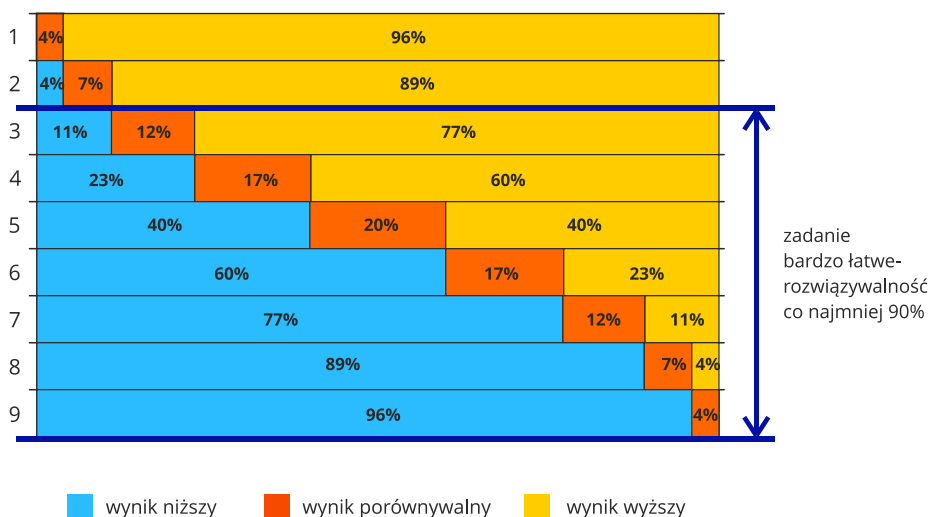
Stanin	Nazwa stanina	Przedział wyników w %
1	Najniższy	<4%
2	Bardzo niski	4%-10%
3	Niski	11%-22%
4	Niżej średni	23%-39%
5	Średni	40-59%
6	Wyżej średni	60%-76%
7	Wysoki	77%-88%
8	Bardzo wysoki	89%-95%
9	Najwyższy	>95%

Źródło: Centralna Komisja Egzaminacyjna.

²¹⁰ Egzamin Maturalny w roku szkolnym 2017/2018. Tabela wyników z poszczególnych przedmiotów w skali staninowej, Centralna Komisja Egzaminacyjna, maj 2018.

Definicja klasycznej walidacji efektu uczenia się²¹¹

Powiemy, że dokonano klasycznej walidacji efektu uczenia się $W_{90 \times 90}$, jeśli w zakresie od niskiego do najwyższego stanina zadanie mierzące efekt uczenia się jest bardzo łatwe (tzn. rozwiązywalność wynosi powyżej 90%) (Rys. 3.49).



Rys. 3.49. Klasyczna walidacja efektu uczenia się

Źródło: opracowanie własne.

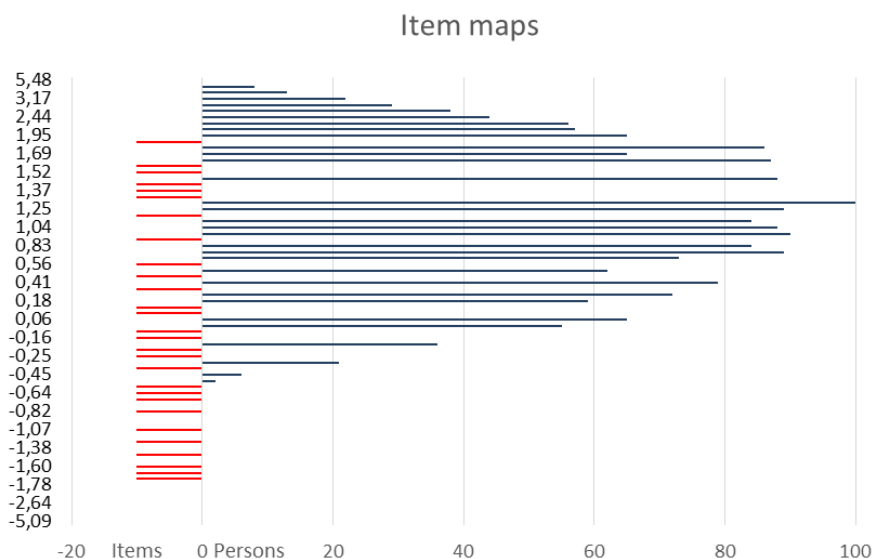
Typologia probabilistyczna

Naukowcy coraz częściej stosują walidację opartą nie na klasycznej teorii testu, ale wykorzystującą model Rascha²¹². Wyniki testu przedstawiane są za pomocą mapy Wrighta (Rys. 3.50)²¹³.

²¹¹ Opracowanie własne.

²¹² Jing Gong, Dehong Luo, Application of Rasch Model in Test Paper Quality Analysis—With the Case of Reading Literacy Pilot Test Paper for Grade 5–6 Students in Guangxi, Pacific Rim Objective Measurement Symposium (PROMS) 2014 Conference Proceedings, ss. 145-154.

²¹³ Boone W.J., Staver J.R., Yale M.S., *Wright Maps: First Steps*. [In:] *Rasch Analysis in the Human Sciences*, Springer, Dordrecht 2014.

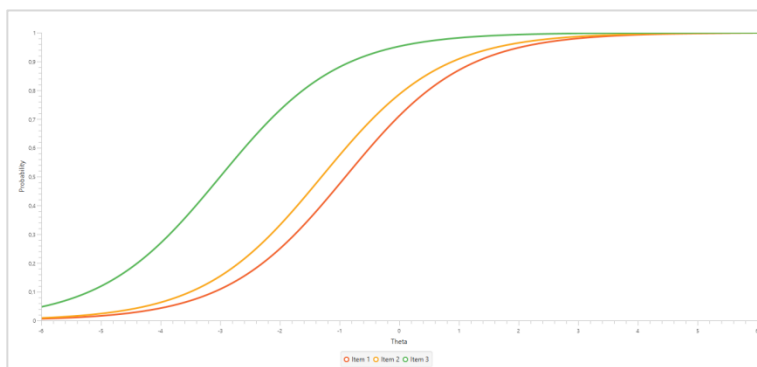


Rys. 3.50. Przykładowa mapa Wrighta

Źródło: opracowanie własne na podstawie konstrukcji mapy Wrighta.

Definicja probabilistyczna walidacji efektu uczenia się²¹⁴

Powiemy, że dokonano probabilistycznej walidacji efektu uczenia się W_p , jeśli w modelu Rascha zadanie mierzące efekt uczenia się ma współczynnik trudności $b < -0,9$.



Wykres 3.4. Krzywa charakterystyczna zadania dla różnych parametrów trudności, Item 1 dla $b = -0,9$, Item 2 dla $b = -1,2$, Item 3 dla $b = -3$

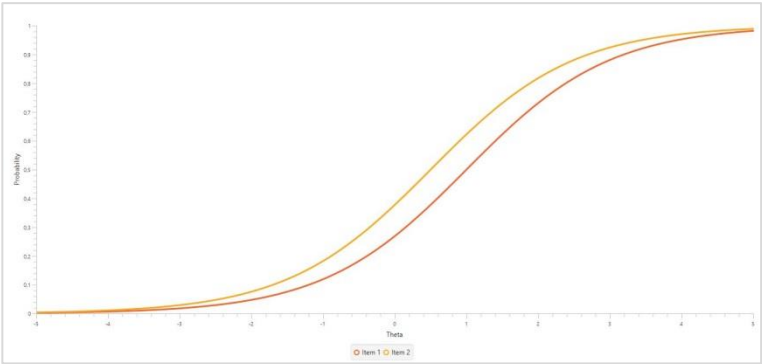
Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu IRT Illustrator.

²¹⁴ Opracowanie własne.

Uwaga! W przypadku walidacji efektu uczenia się w sytuacji, gdy nie uczestniczy cała populacja, współczynnik trudności powinien spełniać bardziej rygorystyczny warunek: $b < -1,8$. Na przykład w egzaminie gimnazjalnym ze względu na jego powszechność uczestniczy cała populacja, a egzamin maturalny z matematyki zdaje około 80% całej populacji.

Definicja probabilistyczna walidacji efektu uczenia się z parametrem b ²¹⁵

Powiemy, że dokonano probabilistycznej walidacji efektu uczenia się z parametrem b ($W_p(b)$), jeśli w modelu Rascha zadanie mierzące efekt uczenia się ma współczynnik trudności $b > -0,9$.



Wykres 3.5. Krzywa charakterystyczna zadania dla różnych parametrów trudności, Item 1 dla $b = 0,5$, Item 2 dla $b = 1$

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu IRT Illustrator.

Trudność zadania w modelu 4D

W tabeli przedstawiono trudności A, B, C.

Tabela 3.29. Trudności A, B, C

Trudność zadania	Staniny	Rozwiązywalność	Model Rascha
A	1, 2	[0,90; 1,00]	$b \leq -0,9$
B	3, 4, 5, 6, 7, 8	(0,90; 0,20]	$b > -0,90$ i $b \leq 2,00$
C	9	(0,20; 0,01)	$b > 2,00$

Źródło: opracowanie własne.

²¹⁵ Opracowanie własne.

Podsumowanie

Jako podsumowanie przedstawię wady i zalety opisanych metod walidacji (Tabela 3.30).

Tabela 3.30. Walidacja efektów uczenia się

Walidacja	Zalety	Wady
Dyskretna – W_d	Bezwzględna pozytywna informacja o osiągnięciu efektu uczenia się.	Nieczuła na sytuacje losowe.
Klasyczna – $W_{90 \times 90}$	Może być zastosowana w małych grupach, np. klasa licząca 25 uczniów.	Słaba rzetelność pomiaru. Nie stosuje się jej do dużej populacji.
Probabilistyczna – W_p	Rzetelny pomiar. Może być stosowana w egzaminach zewnętrznych.	Wymagana duża grupa badawcza (ponad 1000 uczących się).
Probabilistyczna z parametrem b – $W_p(b)$	Monitoring pomiaru efektów uczenia się.	Wymagana duża grupa badawcza (ponad 1000 uczących się).

Źródło: opracowanie własne.

Weryfikacja hipotezy: HS_2

Wprowadzono nowe modele walidacji efektu uczenia się.

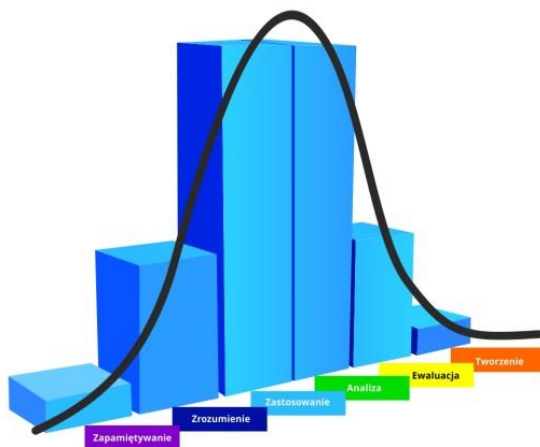
3.6. Typologia efektów uczenia się

Definicja obligatoryjnego efektu uczenia się.

Obligatoryjnym efektem uczenia się²¹⁶ nazywamy efekt, który został przypisany do danego poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji i przeszedł dyskretną lub probabilistyczną walidację.

²¹⁶ Opracowanie własne.

Rozkład liczby obligatoryjnych efektów uczenia się na danym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji w kontekście taksonomii Blooma powinien spełniać warunek przedstawiony poniżej (Rys. 3.51).



Rys. 3.51. Obligatoryjne efekty uczenia się w Modelu 4D

Źródło: opracowanie własne.

Obligatoryjne efekty uczenia się określają to, co uczący się osiągnął, to co założyliśmy, że uczący się osiągnie, a nie to WSZYSTKO, co było realizowane w procesie uczenia się na danym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji.

„We współczesnej edukacji matematycznej aktualne są dwa kluczowe zagadnienia, które sformułował S. Steckel (1938). Są one wyzwaniem dla środowisk edukacyjnych i dydaktyków matematyki do poszukiwania odpowiedzi między innymi na pytania:

- Jak stymulować rozwój ucznia zdolnego do matematyki, aby wydobyć możliwości jego potencjału umysłowego?
- Jak pomóc rozwijać się uczniowi niezdolnemu do matematyki, aby mógł sprostać pewnym koniecznym wymaganiom na danym etapie edukacji matematycznej?”²¹⁷

Pomoc uczniowi polega na zbudowaniu obligatoryjnych efektów uczenia się, tak, aby mógł sprostać koniecznym wymaganiom.

²¹⁷ Pardała A., *Geometryczne kształcenie uczniów w dobie upowszechnienia wykształcenia ogólnego – u nas i gdzie indziej*, XXIII Szkoła Dydaktyki Matematyki, Poznań-Będlewo 2009.

Definicja rozszerzonego efektu uczenia się.

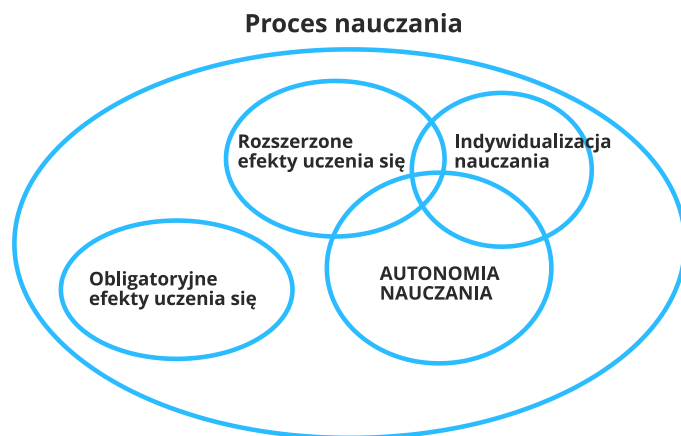
Rozszerzonym efektem uczenia się²¹⁸ nazywamy efekt, który został przypisany do danego poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji i przeszedł *probabilistyczną walidację z parametrem b* .

Definicja poziomującego efektu uczenia się.

Poziomującym efektem uczenia się²¹⁹ nazywamy efekt, który przeszedł *probabilistyczną walidację z większą wartością parametru b* niż dla rozszerzonego lub obligatoryjnego efektu uczenia się. Inaczej mówiąc, jest to zadanie trudniejsze, które mierzy ustalony efekt uczenia się.

Proces kształcenia a autonomia kształcenia

Obligatoryjne efekty uczenia się nie są zagrożeniem dla autonomii kształcenia. Stanowią one warunek konieczny indywidualizacji, samodzielności i autonomii kształcenia (Rys. 3.52).



Rys. 3.52. Czynniki w procesie nauczania

Źródło: opracowanie własne.

„...część nauczycieli i decydentów jest niezmiennie przekonana o nienaruszalności zcentralizowanych podstaw systemu edukacji, pomimo że prowadzą one często do złowrogich rezultatów”²²⁰.

„...powstał projekt, by w zestawach maturalnych dominowały zadania istotnie „nowe”, tzn. zadania, z którymi uczniowie wcześniej nie spotkali się, ale

²¹⁸ Opracowanie własne.

²¹⁹ Opracowanie własne.

²²⁰ Piotrowski M., *Błędne podstawy edukacji matematycznej i sposoby ich naprawienia. "Żandarma" trzeba odwołać, chociaż jest w nas samych*, Studia z Teorii Wychowania, 2016 3 (16) ss. 95-122.

posiadają wiedzę pozwalającą znaleźć ich rozwiązanie. Argumentacja uzasadniająca potrzebę wprowadzenia tego typu zadań wydawała się być przekonująca, ale niepokojący był brak badań pozwalających stwierdzić, czy rzeczywiście uczniowie są przygotowani do rozwiązywania tego typu zadań (nie chodzi o wiedzę merytoryczną, ale o odpowiednią giętkość i elastyczność myślenia matematycznego)”²²¹.

Nie każdy nauczyciel w procesie nauczania matematyki w szkole podstawowej musi – czy nawet powinien – uczyć na przykład o hipotezie Goldbacha. To autonomia kształcenia powinna umożliwić nauczycielowi decyzję o realizacji tego zagadnienia. Jednak dla zrozumienia tej hipotezy niezbędna jest walidacja obligatoryjnego efektu uczenia się: posługuje się liczbami pierwszymi.

B. Śliwerski twierdzi, że „Konieczne jest sukcesywne odchodzenie od linearnej reprodukcji podawanej wiedzy na rzecz stymulowania uczniów do bycia architektami oraz współtwórcami własnej mądrości o kompetencji”²²².

„Nie ma wykształcenia jako wartości osobistej bez wolności i spontaniczności każdej osoby, zaś każdy akt kształcenia jest aktem duchowym, w którym spotykają się ze sobą nauczyciel i uczeń. Jeśli jest między nimi dystans, a tym bardziej między uczniem czy nauczycielem a przedmiotem uczenia się, to wówczas nie zachodzi proces kształcenia”²²³.

„Uczeń, który świadomie, samodzielnie i z autentycznym zainteresowaniem rozwiązuje zadanie matematyczne, kształci się moralnie znacznie bardziej niż ten, który biernie uczestniczy w zajęciach na temat moralności, grzecznie wysłuchuje moralizujących uwag nauczyciela i powtarza jego słowa o moralności”²²⁴.

Model procesu kształcenia z uwzględnieniem poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji

Poniżej przedstawiony jest proces kształcenia z uwzględnieniem obligatoryjnych i rozszerzonych efektów uczenia się (Rys. 3.53). Ważną rolę odgrywa dobór treści do budowania efektów uczenia się.

Henryk Kąkol: „Jakich treści matematycznych powinno dotyczyć nauczanie szkolne? Ich dobór jest zmienny historycznie. Niektóre z haseł znikają (jak na przykład suwak logarytmiczny), inne zmieniają swoje znaczenie i zakres. Pojawiają też się nowe dziedziny (na przykład statystyka opisowa, rachunek

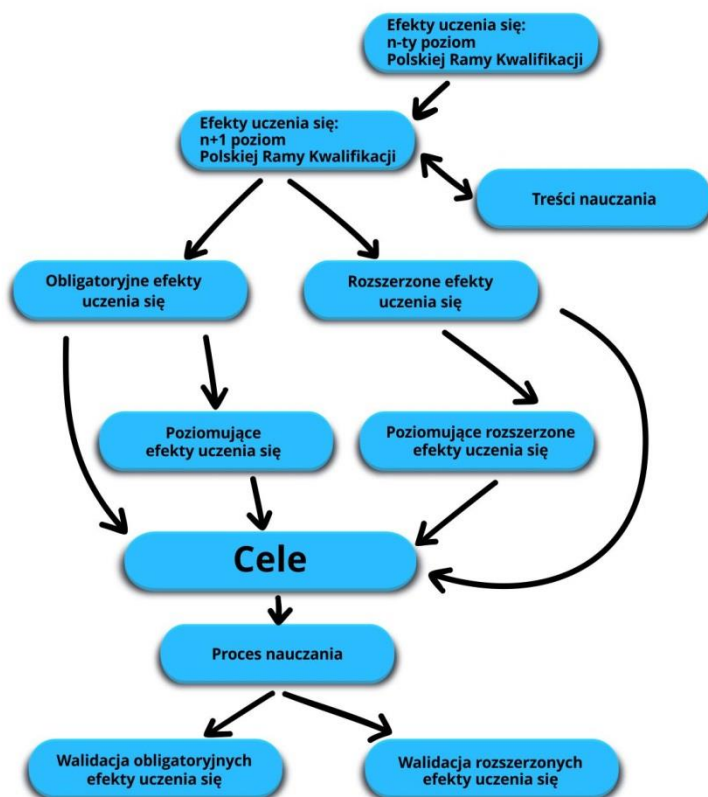
²²¹ Pawlak R., *Problemy rozumienia podstawowych pojęć matematycznych. Doformalizowywanie*, Czasopismo "Nauczyciele i Matematyka + Technologia Informacyjna", nr 61, rok 2007, s. 20.

²²² Śliwerski B. *Edukacja alternatywna: próba syntezy i określenia współczesnej roli*, [w:] Alternatywy w edukacji, pod red. Śliwerskiego B. i Rozmusa A., Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania z siedzibą w Rzeszowie, Impuls, Kraków 2018, s. 47.

²²³ Śliwerski B., *Hessen znany i nieznany, ale wciąż aktualny*, *Ruch Pedagogiczny* 1, Rok LXXXVIII, Warszawa 2018, s. 100.

²²⁴ Hessen S., *Světový názor a pedagogika, Studie k problému autonomie*, přeložila Žofie Pohorecká, Nákladem Dědictví Komenského, Praha, 1937, s. 102.

prawdopodobieństwa). Oczywiście treści nauczania należy dobierać tak, aby umożliwić uczniom przechodzenie do dalszych etapów kształcenia i zapewnić jego ciągłość. Należy wyposażyć absolwentów w takie wiadomości, sprawności i umiejętności, jakie będą im potrzebne w życiu, na studiach, w pracy”²²⁵.



Rys. 3.53. Proces kształcenia i Schemat efektów uczenia się realizowanych w procesie nauczania

Źródło: opracowanie własne.

²²⁵ Kąkol H., *O procesie nauczania matematyki*, Wiadomości Matematyczne 46 (2) 2010, s. 198.

4. Badania część pierwsza

Od pomysłu do realizacji...

Głównym celem badawczym było poszukiwanie efektów uczenia się, które spełniają warunek klasycznej lub probabilistycznej walidacji efektu uczenia się. W poniższych badaniach przedstawiono zadania wraz z efektami uczenia się, które spełniają te warunki.

4.1. Wprowadzenie

Egzamin gimnazjalny został przeprowadzony w Polsce po raz pierwszy w kwietniu 2002 roku. Celem egzaminu było sprawdzenie opanowania wiedzy i umiejętności, dostarczenie informacji zwrotnej na temat jakości kształcenia, aby wpłynąć na zmiany w procesie nauczania, oraz dostarczenie obiektywnej i porównywalnej informacji o osiągnięciach gimnazjalistów. Informacje o wynikach egzaminu odnosiły się do jednolitych standardów i kryteriów oceniania w całej Polsce, co czyni je porównywalnymi.

16 października 2001 roku został przeprowadzony w całym kraju po raz pierwszy ogólnopolski próbny egzamin gimnazjalny. Próbą objęci zostali uczniowie trzecich klas gimnazjów. Gimnazjaliści uczestniczyli w jednej z dwóch części egzaminu – humanistycznej lub matematyczno-przyrodniczej (zasady podziału zespołu klasowego zostały podane w dniu egzaminu). Kilka dni później, 20 października 2001 roku, w Łodzi odbył się próbny, dodatkowy egzamin dla uczniów klas trzecich gimnazjów. Uczniowie z całego województwa łódzkiego otrzymali szansę sprawdzenia wiedzy i umiejętności z tej części egzaminu, której nie mogli pisać w swojej szkole podczas ogólnopolskiej próby.

Celem projektu edukacyjnego „Dogrywka dla gimnazjalistów 2001” (czyli dodatkowego egzaminu próbnego) było uzupełnienie informacji na temat uzdolnień uczniów w odniesieniu do części humanistycznej lub matematyczno-przyrodniczej i uzyskanie informacji o własnych postępach w nauce. W projekcie wzięło udział ponad 1200 uczniów z województwa łódzkiego. Spotkał się on z dużym zainteresowaniem młodzieży, a także stał się tematem wielu relacji w prasie i telewizji. Testy próbnego egzaminu matematyczno-przyrodniczego i humanistycznego służą jako duża pomoc w przygotowania się do egzaminów²²⁶.

²²⁶ Stańdo J. i in., *Zacznij od dziś. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty matematyczno-przyrodnicze*, WSiP, 2003; Stańdo J. i in., *Zacznij od dziś. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty humanistyczne*, WSiP 2003; Stańdo J. i in., *Zacznij od dziś. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty matematyczno-przyrodnicze*, CD, WSiP, 2003; Stańdo J. i in., *Zacznij od dziś. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty humanistyczne*, CD, WSiP, 2003.

Były to moje pierwsze badania przeprowadzone na tak dużą skalę. Byłem pomysłodawcą, inicjatorem, koordynatorem i współautorem zadań próbnego egzaminu w Łodzi.

4.2. Badanie I

Test pt. „Wspólna Europa” z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych składał się z 35 zadań, wśród których znajdowało się 25 zadań zamkniętych i 10 zadań otwartych. Projekt, który zainicjowałem i koordynowałem był finansowany przez Wyższą Szkołę Informatyki w Łodzi. Do badania wylosowano 25 spośród 56 gimnazjów w Łodzi. W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Tabela 4.1. Dane próby

Opis badania	
Rok	2
Liczba uczniów	1950
Liczba szkół (gimnazjów)	25

Źródło: badania własne.

Analiza wybranych zadań

Zadanie 26 (2 pkt)²²⁷

Za zakupy klient zapłacił 2 euro i 3 centy. Wypisz wszystkie możliwości zapłaty, określając nominały użytych monet, jeśli wiadomo, że klient podał kasjerce cztery monety i nie otrzymał reszty.



Rys. 4.1. Monety euro

Źródło: opracowanie własne.

²²⁷ Stańdo J. i in., *Zacznij od dziś. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty matematyczno-przyrodnicze*, WSiP, 2003, s. 15.

Schemat punktowania

Tabela 4.2. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
Podanie jednej możliwości: 2 euro, 1 cent, 1 cent, 1 cent albo 1 euro, 1 euro, 1 cent, 2 centy. W przypadku gdy uczeń poda jedną poprawną i pozostałe niepoprawne.	1
Podanie dwóch możliwości: 2 euro, 1 cent, 1 cent, 1 cent i 1 euro, 1 euro, 1 cent, 2 centy.	2

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.3. Dane do zadania 26a)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Dokonyje zapłaty przy postawionym warunku
Rozwiązywalność zadania	0,91
Klasyczna walidacja	0,95

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.4. Dane do zadania 26a) i b)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Analizuje sytuację problemową
Rozwiązywalność zadania	0,80
Klasyczna walidacja	0,83

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 31. (2 pkt)²²⁸

Oblicz, ile głosów przypada średnio na jeden kraj członkowski i wymień kraje, których liczba głosów jest większa od tej średniej.

Tabela 4.5. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
Obliczenie średniej: $\frac{87}{15} = 5,8$ lub około 6 głosów	1
Podanie nazw krajów mających liczbę głosów powyżej średniej	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.6. Dane do zadania 31a)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Oblicza średnią arytmetyczną
Rozwiązywalność zadania	0,80
Klasyczna walidacja	0,89

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: HS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano na podstawie badań efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

²²⁸ Stańdo J. i in., *Zacznij od dziś. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty matematyczno-przyrodnicze*, WSiP, 2003, s. 17.

4.3. Badanie II

Test egzaminacyjny próbnego egzaminu z 2005 i 2006 roku z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych zatytułowany „Zima” składał się z 32 zadań, wśród których znajdowało się 25 zadań zamkniętych i 7 zadań otwartych. Zadania sprawdzały opanowanie wiedzy i umiejętności opisanych w standardach egzaminacyjnych i podstawie programowej.

Celem badania było:

- dostarczenie szkołom informacji o stopniu opanowania wiedzy i umiejętnościach uczniów z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych,
- wykonanie badania polegającego na porównaniu wiedzy i umiejętności łódzkich gimnazjalistów z międzynarodowymi badaniami PISA. W próbnym egzaminie zostało zakotwiczonych kilka zadań z testu PISA²²⁹,
- uzyskanie informacji efektach uczenia się także w kontekście badań PISA.

Celowym działaniem było powtórzenie po roku badania polegającego na pisaniu tego samego testu przez kolejny rocznik uczniów klas trzecich gimnazjum. Została przeprowadzona przede wszystkim analiza porównawcza. Do badania wylosowano 26 spośród 56 gimnazjów w Łodzi. W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Tabela 4.7. Dane próby

Opis badania		
Rok	2005	2006
Liczba uczniów	1993	1975
Liczba szkół (gimnazjów)	26	26

Źródło: badania własne.

Analiza zadań

Zadanie 15 (1 pkt)²³⁰

Długość narty wynosi 2 metry i 32 centymetry, czyli jest to:

- A. 232 decymetrów.
- B. 23,2 decymetra.
- C. 23 200 centymetrów.
- D. 2320 centymetrów.

²²⁹ Protokół dostępu: <http://www.ibe.edu.pl/pl/projekty-miedzynarodowe/pisa> [2019, styczeń].

²³⁰ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s. 64.

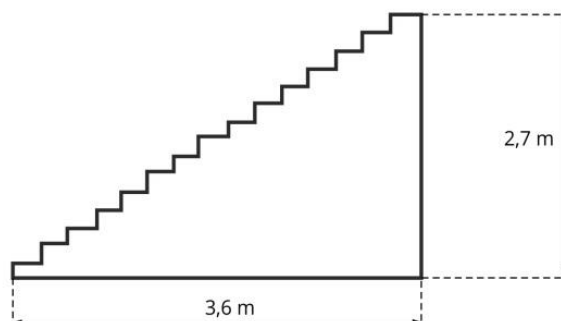
Tabela 4.8. Dane do zadania 15

Opis zadania		
Efekt uczenia się	Zamienia jednostki długości	
	2005	2006
Rok	2005	2006
Rozwiązywalność zadania	0,86	0,87
Klasyczna walidacja	0,90	0,90
Probabilistyczna walidacja	-1,33	-1,37

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 17 (1 pkt)²³¹

Na rysunku przedstawiono schemat schodów schroniska, w którym mieszkali gimnazjaliści podczas pobytu na feriach zimowych.



Rys. 4.2. Schody

Źródło: opracowanie własne.

Jaka jest wysokość każdego z 15 schodków?

- A. 56 cm.
- B. 42 cm.
- C. 24 cm.
- D. 18 cm.

²³¹ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s. 64.

Tabela 4.9. Dane do zadania 17

Opis zadania		
Efekt uczenia się	Wykonuje dzielenia na ułamkach w praktycznych zastosowaniach	
Rok	2005	2006
Rozwiązywalność zadania	0,85	0,85
Klasyczna walidacja	0,89	0,88
Probabilistyczna walidacja	-1,24	-1,20

Źródło: opracowanie własne.

Aby prawidłowo rozwiązać zadanie, uczniowie musieli odróżnić wysokość schodka od jego długości. Jeden z dystraktorów przewidywał taki stan rzeczy.

Zadanie 31 (1 pkt)²³²

Na podstawie poniższej tabeli oblicza się punktową jakość opon [J], według wzoru:

$$J = 3 \cdot R + 2 \cdot S + 2 \cdot C.$$

Tabela 4.10. Dane

Firma	Rodzaj gumy [R]	Ścieralność opony [S]	Cena [C]
Firma „OP1”	3	1	1
Firma „OP2”	1	3	3
Firma „OP3”	2	2	1
Firma „OP4”	2	1	2

Źródło: opracowanie własne.

Oblicz „punktową jakość opon” dla firmy „OP2”.

.....

.....

²³² Praca zbiorowa, Stańdo J. i inni, Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s. 70.

Tabela 4.11. Dane do zadania 31

Opis zadania		
Efekt uczenia się	Wykonuje obliczenia na podstawie danych w tabeli	
Rok	2005	2006
Rozwiązywalność zadania	0,89	0,90
Klasyczna walidacja	0,93	0,94
Probabilistyczna walidacja	-1,69	-1,87

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 2 (1 pkt)²³³

W tym roku Kasia pojedzie na ferie zimowe do Zakopanego. Drogowskaz z miejscowości, w której mieszka, wskazuje odległość 60 km. Jaka jest długość drogi na mapie wykonanej w skali 1: 3 000 000?

- A. 50 cm.
- B. 20 cm.
- C. 5 cm.
- D. 2 cm.

Tabela 4.12. Dane

Opis zadania		
Efekt uczenia się	Oblicza długość odcinka w skali	
Rok	2005	2006
Rozwiązywalność zadania	0,80	0,78
Klasyczna walidacja	0,83	0,81
Probabilistyczna walidacja	-0,91	-0,89

Źródło: opracowanie własne.

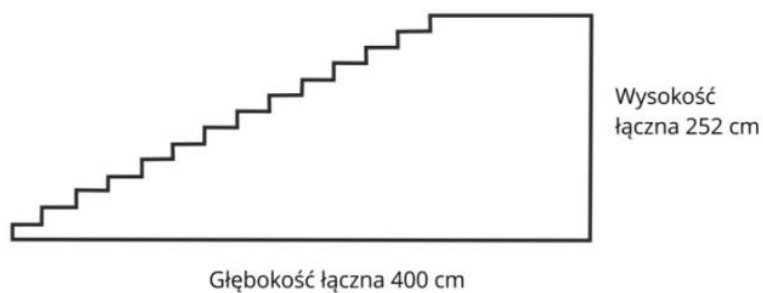
²³³ Praca zbiorowa, Stańdo J. i inni, Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s. 62.

Porównanie wyników z badaniami PISA

Zadanie w badaniu PISA

Pytanie 1: Schody (Przestrzeń i kształt)

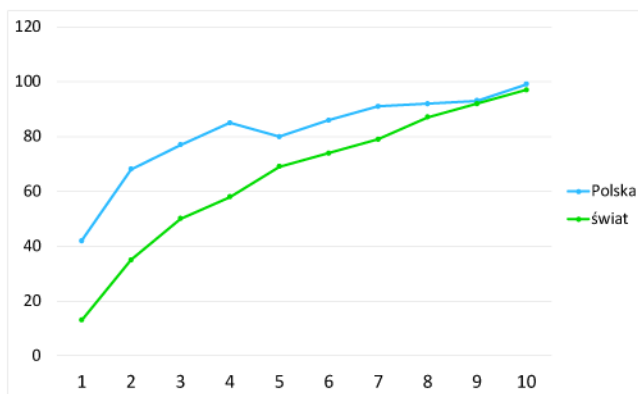
Na rysunku przedstawiono schody o wysokości 253 cm, złożone z 14 schodów.



Rys. 4.3. Zadanie Schody

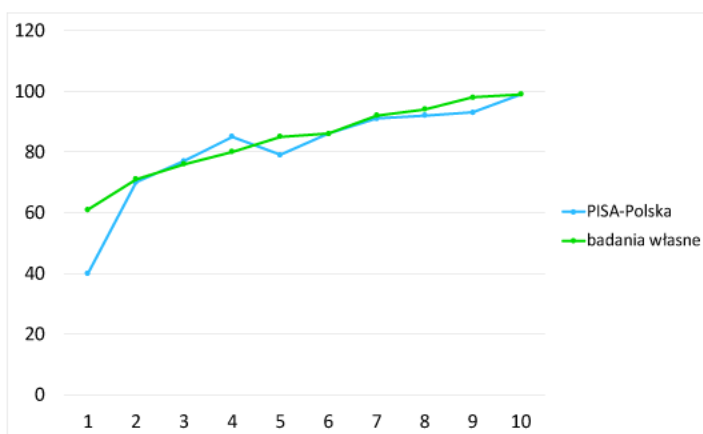
Źródło: Raport PISA, 2003.

Jaka jest wysokość każdego z 14 stopni? Odpowiedź: Wysokość cm.



Wykres 4.1. Wyniki: zadanie Schody

Źródło: Raport PISA, 2003.



Wykres 4.2. Porównanie wyników

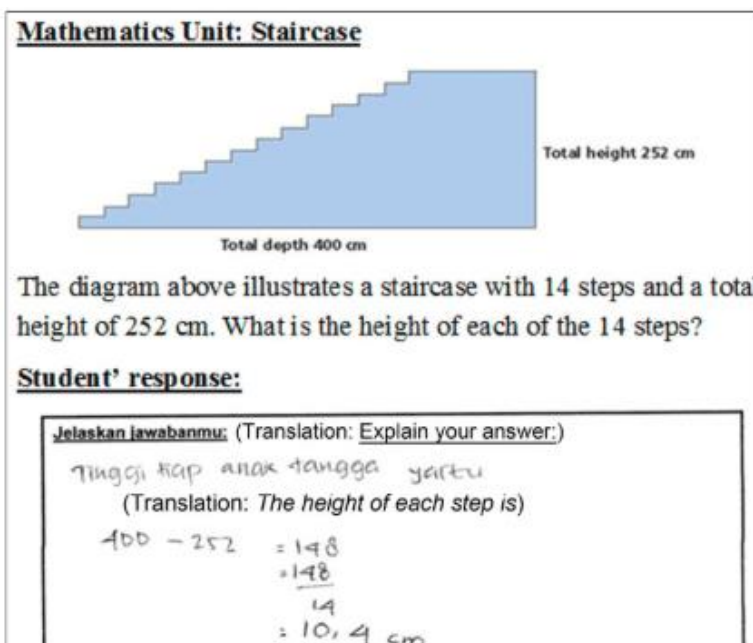
Źródło: opracowanie własne z uwzględnieniem raportu PISA, 2003.

To zadanie było także przedmiotem analizy w idonezyjskich szkołach²³⁴. Przeprowadzono je z udziałem 362 uczniów w dziewiątej i dziesiątej klasie. Trudności uczniów zostały zidentyfikowane za pomocą kategorii błędów Newmana, które były powiązane z procesem modelowania opisanym przez Bluma i Leissa oraz stopniami matematycznymi PISA, w tym:

- (1) zrozumienie zadania,
- (2) przekształcenie zadania w problem matematyczny,
- (3) przetwarzanie procedur matematycznych oraz
- (4) interpretowanie lub kodowanie rozwiązania pod kątem rzeczywistej sytuacji.

Wyniki badań w 2005 i 2006 roku są podobne i porównywalne z międzynarodowym badaniem PISA przeprowadzonym w Polsce.

²³⁴ Wijaya A., van den Heuvel-Panhuizen M., Doorman M., Robitzsch A., *Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors*, The Mathematics Enthusiast, 11 (3), 555-584.



Rys. 4.4. Przykładowe błędne rozwiązanie ucznia, zawierające błąd w wyborze informacji
 Źródło: Raport PISA, 2003, Indonezja.

Uczeń nie podzielił wysokości wszystkich schodów, wynoszącej 252 cm, przez liczbę schodów – 14. Odjął od 400 wysokość 252 i następnie podzielił przez 14 schodów.

Podsumowanie

Do badań własnych została wybrana na tyle reprezentatywna grupa uczniów, że wyniki nie odbiegały statystycznie od wyników testów ogólnopolskich i PISA. Potwierdza to wiarygodność przeprowadzonych badań.

Weryfikacja hipotezy: HS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano na podstawie badań efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.4. Badanie III

W celu porównania wyników różnych edycji badań zamieszcza się w teście kilka tych samych zadań. Nazywamy je *zadaniami kotwiczącymi*²³⁵.

Celowym działaniem było wprowadzenie jednego z zadań (zadanie 8), aby potwierdzić, że uczniowie opanowali efekt uczenia się, który przypisany jest do niższego poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji. Celowym działaniem było także zakotwiczenie kilku zadań. Dzięki temu została przeprowadzona analiza porównawcza. Do badania wylosowano 29 spośród 59 gimnazjów w Łodzi i okolic. W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Tabela 4.13. Dane

Opis badania	
Rok	2
Liczba uczniów	2335
Liczba szkół (gimnazjów)	29

Źródło: badania własne.

Analiza zadań

Zadanie 8 (1 pkt)²³⁶

Poniżej przedstawione są ceny przejazdów wyciągiem:

- Karnet 5 przejazdów – 6 euro,
- Jeden przejazd – 2 euro,
- Karnet 10 przejazdów – 9 euro,
- Karnet całodzienny – 25 euro.

Rano Kasia kupiła karnet na 10 przejazdów, po południu karnet na pięć przejazdów i jeszcze na dwa pojedyncze przejazdy. Ile pieniędzy zapłaciła Kasia?

- A. 25 euro.
- B. 30 euro.
- C. 19 euro.
- D. 22 euro.

²³⁵ Program międzynarodowej oceny umiejętności uczniów. Wyniki badań PISA w Polsce, 2015, s. 20.

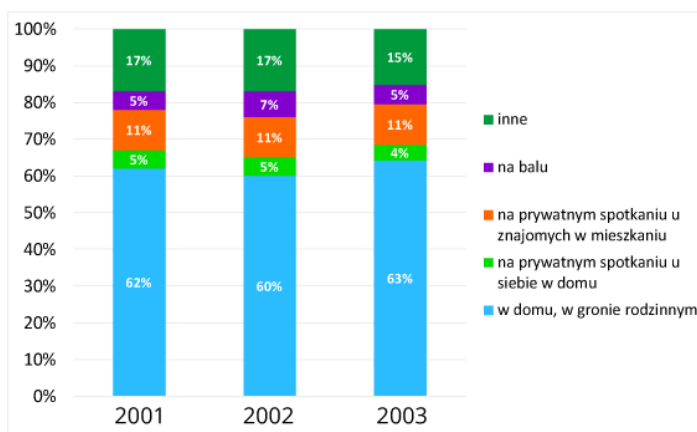
²³⁶ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s.79.

Tabela 4.14. Dane do zadania 8

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Na podstawie danych wykonuje obliczenia
Rozwiązywalność zadania	0,97
Klasyczna walidacja	0,98
Probabilistyczna walidacja	-3,35

Źródło: opracowanie własne.

Informacja do zadania 15 i 16 (zadania kotwiczące)



Wykres 4.3. Formy spędzania sylwestra w poszczególnych latach

Źródło: <https://www.cbos.pl>, 2004.

Zadanie 15 (1 pkt)²³⁷

Sylwestra w domu, w gronie rodzinnym w 2003 roku spędza:

- A. 15% osób.
- B. 17% osób.
- C. 60% osób.
- D. 63% osób.

²³⁷ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s. 80.

Tabela 4.15. Dane do zadania 15

Opis zadania	
Klasyczna walidacja	Odczytuje dane z diagramu
Rozwiązywalność zadania	0,97
Klasyczna walidacja	0,98
Probabilistyczna walidacja	-3,77

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 16 (1 pkt)²³⁸

W 2001 i 2003 roku taki sam procent osób spędzało Sylwestra:

- A. na balu,
- B. w domu, w gronie rodzinnym,
- C. na prywatnym spotkaniu u znajomych w mieszkaniu,
- D. na prywatnym spotkaniu u siebie w domu.

Tabela 4.16. Dane do zadania 16

Opis zadania	
Klasyczna walidacja	Analizuje dane z diagramu
Rozwiązywalność zadania	0,89
Klasyczna walidacja	0,91
Probabilistyczna walidacja	-1,99

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 28 (4 pkt)²³⁹

Przy określeniu prawidłowej wagi ciała bierze się pod uwagę współczynnik masy ciała (BMI) dany wzorem: $BMI = \frac{m}{w^2}$, gdzie: BMI – współczynnik masy ciała, m – masa ciała w kilogramach, w – wzrost w metrach.

²³⁸ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s. 80.

²³⁹ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s.83.

Tabela 4.17. Dane BMI

BMI	Grupa wagowa
Mniej niż 20	Niedowaga
Od 20 do 25	Waga prawidłowa
Więcej niż 25	Nadwaga

Źródło: WHO: Global Database on Body Mass Index.

- Kasia waży 64 kg i mierzy 1,6 metra. Zakwalifikuj ją do odpowiedniej grupy wagowej.
- Wyznacz wzór na masę ciała.
- Oblicz, w jakim zakresie powinna mieścić się prawidłowa waga ciała człowieka o wzroście 2 metry.

Tabela 4.18. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
a) Podstawienie do wzoru: $BMI = \frac{64}{2,56}$.	1
Obliczenie BMI i zakwalifikowanie do odpowiedniej grupy wagowej: $BMI \approx 25$, Kasia ma prawidłową wagę.	1
b) Wyznaczenie wzoru na masę ciała: $m = BMI \cdot w^2$.	1
c) Podanie zakresu wag: 80-100 kg.	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.19. Dane do zadania 28a)

Opis zadania	
Klasyczna walidacja	Podstawia dane do wzoru
Rozwiązywalność zadania	0,84
Klasyczna walidacja	0,90

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 17 (1 pkt)²⁴⁰

Liczba badanych respondentów w każdym roku wynosiła 1200 osób. Oblicz, ile osób odpowiedziało w ankiecie, że spędzą sylwestra na balu w 2001 roku.

- A. 60.
- B. 84.
- C. 132.
- D. 720.

Tabela 4.20. Dane do zadania 17

Opis zadania	
Klasyczna walidacja	Oblicza procent z liczby
Rozwiązywalność zadania	0,81
Klasyczna walidacja	0,87

Źródło: opracowanie własne.

Parametry zadania

Rozwiązywalność zadań w podziale na gimnazja została przedstawiona na poniższych wykresach.



Wykres 4.4. Rozwiązywalność zadania 8 w zależności od gimnazjum

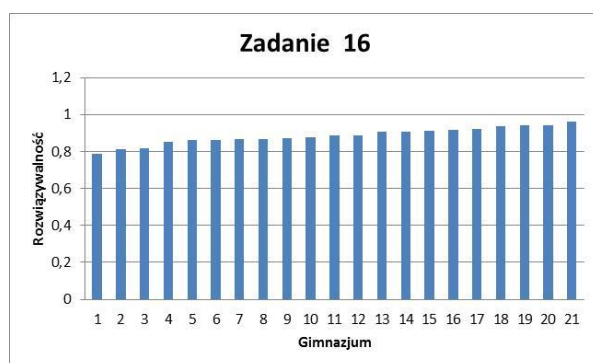
Źródło: opracowanie własne.

²⁴⁰ Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP, 2007, s. 80.



Wykres 4.5. Rozwiązywalność zadania 15 w zależności od gimnazjum

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 4.6. Rozwiązywalność zadania 16 w zależności od gimnazjum

Źródło: opracowanie własne.



Wykres 4.7. Rozwiązywalność zadania 15 w zależności od gimnazjum

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: PS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano, na podstawie badań, efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.5. Badanie IV

Do badania wylosowano 32 spośród 59 gimnazjów w Łodzi i okolic. W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Tabela 4.21. Dane

Opis badania	
Rok	2008
Liczba uczniów	2607
Liczba szkół (gimnazjów)	32

Źródło: badania własne.

Zadanie 16 (1 pkt)

Mecz rozpoczął się o godzinie 11.00. Czas trwania meczu: 90 minut, przerwa: 15 minut i sędzia przedłużył 3 minuty mecz. O której godzinie zakończy się mecz?

- A. 12.18.
- B. 13.18.
- C. 12.48.
- D. 12.33.

Tabela 4.22. Dane do zadania 16

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wykonuje działania związane z czasem
Rozwiązywalność zadania	0,89
Klasyczna walidacja	0,92
Probabilistyczna walidacja	-1,74

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 17 (1 pkt)

Mecz w piłce nożnej trwa 90 minut. Ile to sekund?

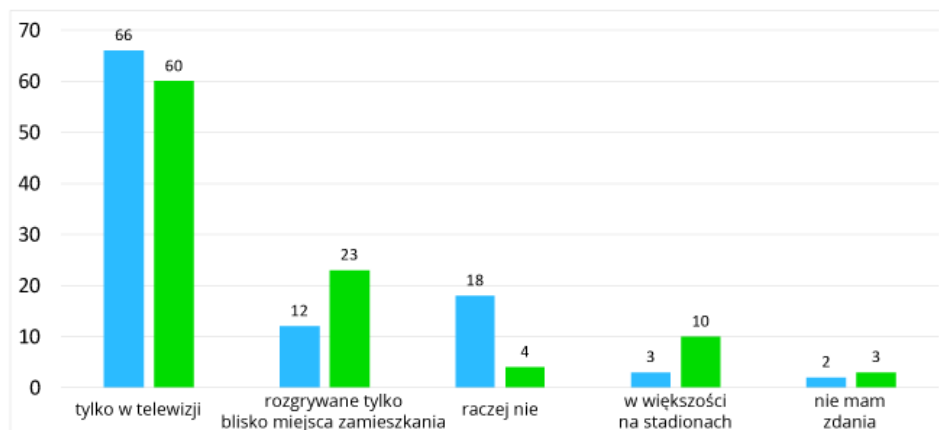
- A. 150 s.
- B. 1500 s.
- C. 540 s.
- D. 5400 s.

Tabela 4.23. Dane do zadania 17

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wykonuje działania związane z czasem
Rozwiązywalność zadania	0,87
Klasyczna walidacja	0,90
Probabilistyczna walidacja	-1,47

Źródło: opracowanie własne.

W badaniu wzięło udział 1010 respondentów, w tym 510 mężczyzn i 500 kobiet.



Wykres 4.8. Dane statystyczne

Źródło: www.ipsos.pl

Zadanie 24 (1 pkt)

Ile procent kobiet raczej nie będzie oglądać meczów?

- A. 66%.
- B. 12%.
- C. 4%.
- D. 17%.

Tabela 4.24. Dane do zadania 24

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Odczytuje dane z diagramu
Rozwiązywalność zadania	0,92
Klasyczna walidacja	0,94
Probabilistyczna walidacja	-2,07

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 25 (1 pkt)

Ile procent mężczyzn na powyższe pytanie odpowiedziało, że większość meczów będzie oglądać na stadionach?

- A. 10%.
- B. 4%.
- C. 3%.
- D. 23%.

Tabela 4.25. Dane do zadania 25

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wykonuje obliczenia procentowe
Rozwiązywalność zadania	0,89
Klasyczna walidacja	0,91
Probabilistyczna walidacja	-1,69

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 26 (2 pkt)

Oblicz, ilu respondentów odpowiedziało, że mecze będą oglądać tylko w telewizji. Zapisz obliczenia.

Tabela 4.26. Dane do zadania 26

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Analizuje obliczenia procentowe
Rozwiązywalność zadania	0,53
Klasyczna walidacja	0,63
Probabilistyczna walidacja	0,51

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: PS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano, na podstawie badań, efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.6. Badanie V

Do badania wylosowano 23 spośród 56 gimnazjów w Łodzi. W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej

Tabela 4.27. Dane

Opis badania	
Rok	2009
Liczba uczniów	1943
Liczba szkół (gimnazjów)	23

Źródło: badania własne.

Analiza zadań

Przy określeniu prawidłowej wagi ciała bierze się pod uwagę współczynnik masy ciała (BMI) dany wzorem: $BMI = \frac{m}{w^2}$, gdzie: BMI – współczynnik masy ciała, m – masa ciała w kilogramach, w – wzrost w metrach.

Tabela 4.28. Dane BMI

BMI	Grupa wagowa
Mniej niż 20	Niedowaga
Od 20 do 25	Waga prawidłowa
Więcej niż 25	Nadwaga

Źródło: WHO: Global Database on Body Mass Index.

Zadanie 2 (1 pkt)

Wojtek jest siatkarzem i stwierdzono u niego niedowagę. Jego wzrost wynosi dwa metry. Wojtek waży:

- A. mniej niż 80 kg,
- B. więcej niż 80 kg, ale mniej niż 100 kg,
- C. więcej niż 100 kg, ale mniej niż 120 kg,
- D. więcej niż 120 kg.

Tabela 4.29. Dane do zadania 2

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Na podstawie danych wykonuje obliczenia
Rozwiązywalność zadania	0,87
Klasyczna walidacja	0,92

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: HS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano, na podstawie badań, efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.7. Badanie VI

4 marca 2008 roku z mojej inicjatywy koordynowałem pierwszy w Polsce próbny egzamin gimnazjalny z części matematyczno-przyrodniczej, przeprowadzany drogą elektroniczną, „E-egzamin 2008”²⁴¹. Organizatorami i sponsorami e-egzaminu byli: Wyższa Szkoła Humanistyczno-Ekonomiczna w Łodzi oraz Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne. Patronat nad projektem objęli: Minister Edukacji Narodowej, Dyrektor Centralnej Komisji Egzaminacyjnej i telewizja Patio.

Próbny egzamin gimnazjalny pisało w tym samym czasie około 2,5 tysiąca gimnazjalistów z ponad 300 polskich szkół. Test z części matematyczno-przyrodniczej składał się z 39 zadań, które zostały opracowane przeze mnie.

Uczestników e-egzaminu ze zgłoszonych szkół wylosował specjalnie przygotowany system, biorąc pod uwagę m.in. liczbę uczniów każdej placówki oraz liczbę dostępnych w niej stanowisk komputerowych. Średnio w każdej szkole egzamin zdawało 8-10 gimnazjalistów. Uczniów przed internetowym testem wspierał w Łodzi wiceprezydent Jarosław Wojcieszek.

Projekt miał na celu przybliżenie możliwości, jakie przed edukacją otwierała nowoczesna technologia, był także swoistym eksperymentem w dziedzinie e-learningu. Wyniki elektronicznego egzaminu znane były w ciągu kilku dni.

Idea multimedialnych egzaminów jest jednym z najnowocześniejszych trendów współczesnej edukacji. Jej realizacja oznacza dla nauczycieli znaczne uproszczenie procesu egzaminu, a dla uczniów – nowe wyzwania. Projekt wywołał duże zainteresowanie mediów. Kilkanaście stacji radiowych i telewizyjnych relacjonowało „E-egzamin” (także bezpośrednio)²⁴².

Celem „E-egzaminu 2008” było upowszechnianie idei wspierania edukacji technologią informatyczną przez:

- wypracowanie dobrych praktyk w zakresie egzaminowania z użyciem tej technologii,
- prezentację potencjału multimediiów i technik informacyjnych w procesie egzaminowania,
- sprawdzenie elektronicznego systemu egzaminowania i oceniania,
- przeprowadzenie ogólnopolskich badań edukacyjnych.

Zestaw egzaminacyjny składał się z 39 zadań²⁴³. Za poprawne rozwiązanie wszystkich zadań uczeń mógł otrzymać 50 punktów. Zadania sprawdzały wiadomości i umiejętności w czterech obszarach standardów.

²⁴¹ Dąbrowicz-Tlałka A., Stańdo J., Wikiel B., *E-egzamin, analiza statystyczna wyników*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2008, ss. 23-32.

²⁴² Markowski M., *E-learning w gimnazjach*, Gazeta Wyborcza, 2008.03.04, cytat: „Zadania na dzisiejszy egzamin opracował dr Jacek Stańdo z Politechniki Łódzkiej”.

²⁴³ Szaleniec H., Stańdo J., *E-egzamin 2008, Raport z projektu edukacyjnego*, WSiP, 2008.

1. Umiejętne stosowanie terminów, pojęć i procedur z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych niezbędnych w praktyce życiowej i dalszym kształceniu.
2. Wyszukiwanie i stosowanie informacji.
3. Wskazywanie i opisywanie faktów, związków i zależności, w szczególności przyczynowo-skutkowych, funkcjonalnych, przestrzennych i czasowych.
4. Stosowanie zintegrowanej wiedzy i umiejętności do rozwiązywania problemów.

Opis doboru próby

Uczelnia przygotowała specjalny system do przeprowadzenia rekrutacji oraz egzaminowania. Wydawnictwo WSiP było odpowiedzialne za rekrutację i wykorzystało wieloletnią współpracę ze szkołami z terenu całej Polski. Poniższa tabela przedstawia dane z próby. Na wstępie wybrano 330 gimnazjów. Następnie sprawdzono, czy dobór szkół pobranych do analiz jest rozkładem normalnym. Okazało się, że na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że próba miała charakter losowy.

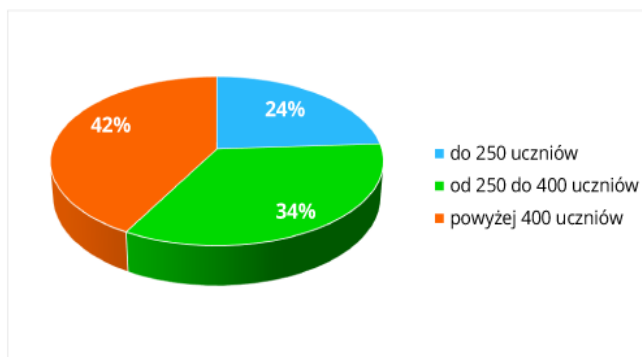
Tabela 4.30. Dane z próby

Opis badania	
Rok	2008
Liczba uczniów	2340
Liczba szkół	330

Źródło: opracowanie własne.

System rekrutacyjny zarejestrował 330 szkół. Na potrzeby próbnego e-egzaminu były przeprowadzone badania ankietowe. Każda szkoła podawała informację na temat liczby klas trzecich gimnazjum, liczby uczniów w klasie oraz liczby komputerów z dostępem do internetu, spełniających wymogi sprzętowe i programistyczne. Z tak przedstawionych danych system losował uczniów przystępujących do próbnego e-egzaminu. Zróżnicowanie szkół pod względem liczby uczniów, liczby komputerów i dostępu do internetu było bardzo duże²⁴⁴.

²⁴⁴ Szaleniec H., Stańdo J., *E-egzamin 2008, Raport z projektu edukacyjnego*, WSiP, 2008.

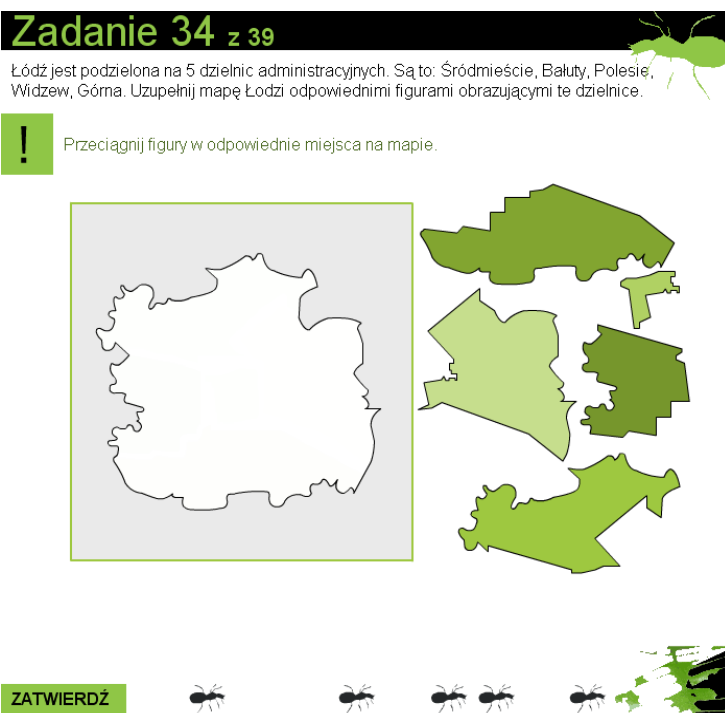


Wykres 4.9. Szkoły biorące udział w e-egzaminie

Źródło: opracowanie merytoryczne własne, dane: Polski Uniwersytet Wirtualny.

Analiza wybranych zadań

Celowym działaniem było wprowadzenie jednego z zadań (zadanie 34), aby potwierdzić, że uczniowie opanowali efekty uczenia się z niższego poziomu ram kwalifikacji.



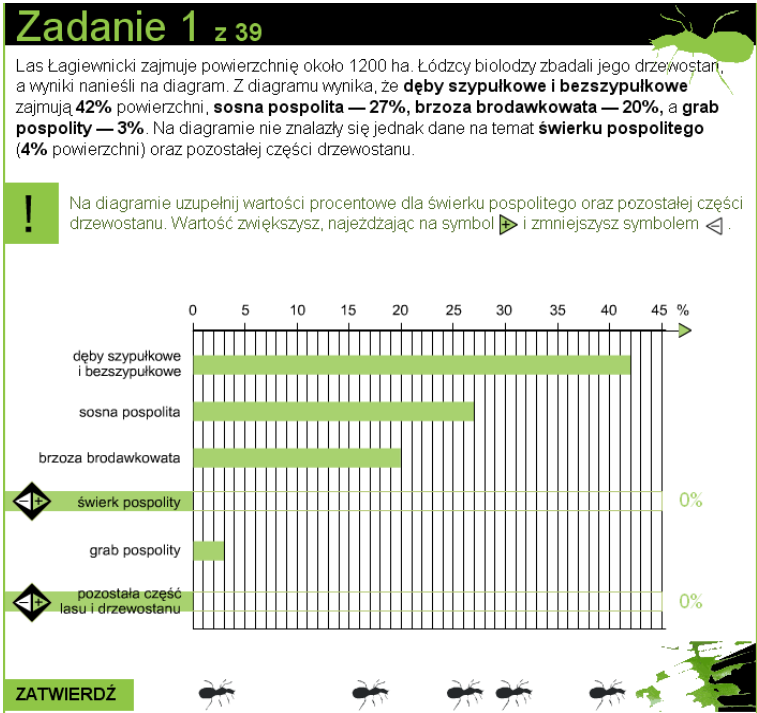
Rys. 4.5. Zadanie 34

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.31. Dane – zadanie 34

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Dostrzega kształty figur
Rozwiązywalność zadania	0,98
Klasyczna walidacja	0,99
Probabilistyczna walidacja	-2,20

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4.6. Zadanie 1

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.32. Dane – zadanie 1

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Interpretuje tekst matematyczny
Rozwiązywalność zadania	0,89
Klasyczna walidacja	0,92
Probabilistyczna walidacja	-1,66

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 16 z 39

Grupa turystów wkrótce odwiedzi Łódź. Na mapce zaznaczono trasę, którą turyści pokonają pierwszego dnia. Po dotarciu na dworzec kolejowy Łódź-Żabieniec pojadą do Arturówka (długość trasy: 5 km), skąd udadzą się na Bałuty (długość trasy: 4 km). Po zwiedzeniu Bałut turyści wrócą na Żabieniec.



Wykonaj obliczenia i zaznacz prawidłową odpowiedź.
Kliknij odpowiednie kółeczko.

Jaką odległość pokonają turyści, jadąc z Bałut na Żabieniec?

- ☐ 2,0 km
- ☐ 2,5 km
- ☐ 3,0 km
- ☐ 3,5 km



◀ POWTÓRZ ANIMACJĘ

ZATWIERDŹ



Rys. 4.7. Zadanie 16

Źródło: opracowanie: merytoryczne własne, graficzne Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.33. Dane zadanie 16

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Przywołuje podstawowy trójkąt prostokątny
Rozwiązywalność zadania	0,86
Klasyczna walidacja	0,90
Probabilistyczna walidacja	-1,30

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 18 z 39

Michał studiuje w Dublinie. Jego siostra Ania mieszka w Łodzi, więc Michał często ją odwiedza. Michał lata z Dublinu samolotami na lotnisko w Łodzi. Podróż trwa zawsze tyle samo czasu. Oto rozkład lotów, z którego korzysta Michał:

Wylot z Dublinu	Przylot do Łodzi
16:15	19:55
17:05	



Wykonaj obliczenia i odpowiedz na pytanie. Zaznacz prawidłową odpowiedź, klikając odpowiednie kółeczko.

O której godzinie Michał przyleci do Łodzi, jeśli z Dublinu wystartuje o 17:05?

- ☐ o 20:45
- ☐ o 20:55
- ☐ o 21:45
- ☐ o 22:05



ZATWIERDŹ



Rys. 4.8. Zadanie 18

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.34. Dane – zadanie 18

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wykonuje obliczenia związane z czasem
Rozwiązywalność zadania	0,88
Klasyczna walidacja	0,91
Probabilistyczna walidacja	-1,51

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 21 z 39


Zarząd łódzkiego Portu Lotniczego im. Wł. Reymonta ustalił nowe ceny za parkowanie samochodów osobowych i autokarów na parkingu zewnętrznym. Nowe ceny zostały umieszczone na tablicy poniżej:

OPLATA PARKINGOWA		
CZAS PARKOWANIA	OSOBOWE	AUTOKARY
za 1 tydzień	100,00 zł	400,00 zł
za każdą następną dobę powyżej 1 tygodnia	10,00 zł	40,00 zł
za 2 tygodnie	150,00 zł	600,00 zł
za każdą następną dobę powyżej 2 tygodni	10,00 zł	40,00 zł
za 1 miesiąc	250,00 zł	1000,00 zł
za każdą rozpoczętą dobę powyżej 1 miesiąca	15,00 zł	60,00 zł

!

Dokonaj obliczeń i uzupełnij poniższe zdanie, klikając kółeczko przy prawidłowej odpowiedzi.

Opłaty za parkowanie samochodu osobowego na parkingu lotniska są:

- ☐ 10% niższe niż za autokar
- ☐ czterokrotnie niższe niż za autokar
- ☐ czterokrotnie wyższe niż za autokar
- ☐ 10% wyższe niż za autokar

ZATWIERDŹ








Rys. 4.9. Zadanie 21

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.35. Dane – zadanie 21

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Na podstawie danych w tabeli wykonuje obliczenia procentowe
Rozwiązywalność zadania	0,90
Klasyczna walidacja	0,94
Probabilistyczna walidacja	-1,78

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 29 z 39

Zosia i Maciek przygotowują gazetkę szkolną. Szukając materiałów do następnego wydania na temat krwiodawstwa w Polsce, znaleźli poniższy wykres:

Rok	Liczba dawców (w tysiącach)
2001	413,084
2002	425,32
2003	428,676
2004	424,108
2005	499,13

! Skorzystaj z danych na wykresie i uzupełnij poniższe zdanie. Kliknij kółeczko przy prawidłowej odpowiedzi.

Jaka była największa liczba dawców krwi między rokiem 2001 a 2004?

☐ 413 084
☐ 424 108
☐ 428 676
☐ 499 130

ZATWIERDŹ

Rys. 4.10. Zadanie 29

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.36. Dane – zadanie 29

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Odczytuje dane z wykresu funkcji
Rozwiązywalność zadania	0,92
Klasyczna walidacja	0,95
Probabilistyczna walidacja	-2,03

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 9 z 39

Ze względu na występowanie wielu rzadkich gatunków roślin i zwierząt w 1996 r. z części Lasu Łagiewnickiego o powierzchni 1200 ha utworzono rezerwat przyrody. Ma on powierzchnię około 70 ha.
Ile procent powierzchni Lasu Łagiewnickiego stanowi rezerwat?





Wykonaj obliczenia z dokładnością do jednego procenta.
Zaznacz prawidłową odpowiedź, klikając odpowiednie kółeczko.

☐ 2%

☐ 6%

☐ 17%

☐ 19%

ZATWIERDŹ










Rys. 4.11. Zadanie 9

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.37. Dane – zadanie 9

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Oblicza, jaki procent danej liczby stanowi inna liczba
Rozwiązywalność zadania	0,81
Klasyczna walidacja	0,86
Probabilistyczna walidacja	-0,93

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 10 z 39


Pracownicy Urzędu Statystycznego w Łodzi przygotowali zestawienie liczby bezrobotnych w największych miastach Polski. Poniższa tabela przedstawia stan na 2006 r. Miasta ułożone są od największego do najmniejszego pod względem liczby ludności.

WYSZCZEGÓLNIENIE	ROK	WARSZAWA	ŁÓDŹ	KRAKÓW	POZNAŃ
Zarejestrowani bezrobotni w tys.	2005	58,4	54,7	25,3	19,6
	2006	49,4	38,7	20,3	15,8
Liczba bezrobotnych na 1 ofertę pracy	2005	47	105	15	76
	2006	45	28	7	31
Stopa bezrobocia w %	2005	5,6	16,4	6,9	6,1
	2006	4,6	11,9	5,5	4,9

!

Przeanalizuj dane z tabeli i uzupełnij zdanie.
Kliknij kółeczko przy prawidłowej odpowiedzi.

Drugą co do wielkości stopę bezrobocia w 2005 roku zanotowano w:

☐ Krakowie

☐ Poznaniu

☐ Łodzi

☐ Warszawie

ZATWIERDŹ







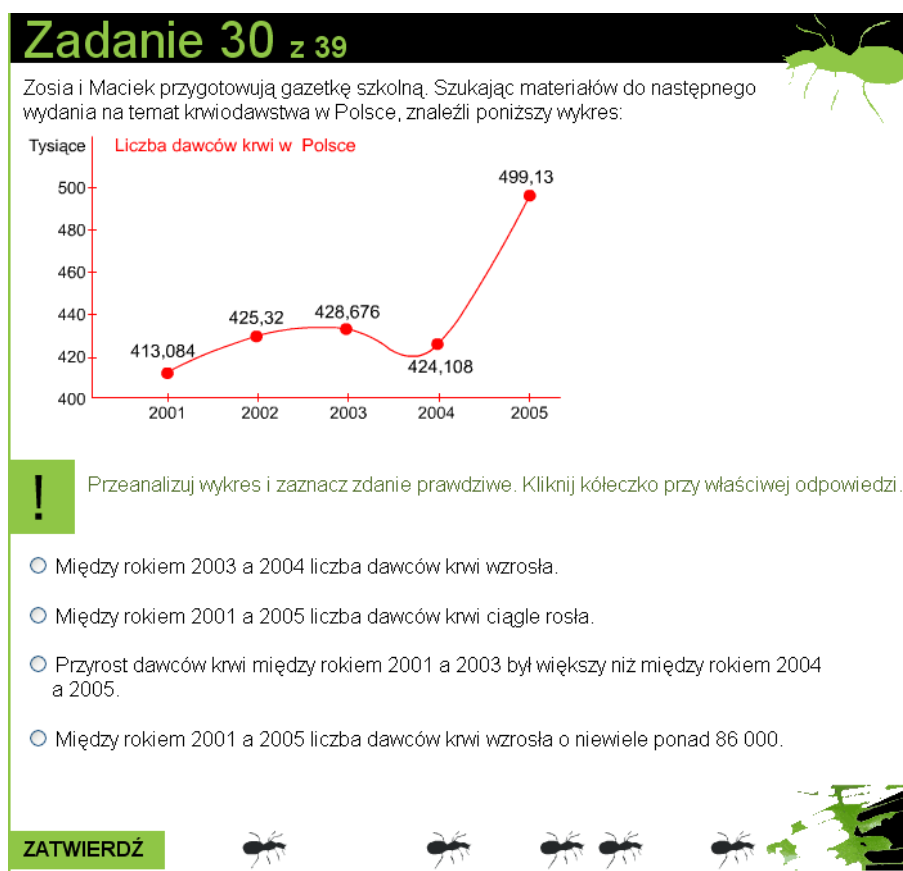

Rys. 4.12. Zadanie 10

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.38. Dane – zadanie 10

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Analizuje dane z tabeli
Rozwiązywalność zadania	0,80
Klasyczna walidacja	0,83
Probabilistyczna walidacja	-0,88

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4.13. Zadanie 30

Źródło: opracowanie: merytoryczne – własne, graficzne – Polski Uniwersytet Wirtualny.

Tabela 4.39. Dane – zadanie 30

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Analizuje dane z wykresu funkcji
Rozwiązywalność zadania	0,80
Klasyczna walidacja	0,85
Probabilistyczna walidacja	-0,88

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: **PS_4**

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano na podstawie badań efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.8. Badanie VII

E-diagnoza

W latach 2011-2012 z mojej inicjatywy koordynowałem trzy części projektu edukacyjnego Policzmy to razem – Ogólnopolska Akcja Diagnozy Matematycznej. W projekcie brało udział około 3 tysięcy uczniów z ponad 60 gimnazjów z całej Polski. Celem ogólnym projektu było:

- monitorowanie wiedzy i umiejętności matematycznych gimnazjalistów przez udział w próbnym e-egzaminach,
- monitorowanie pomiaru efektów uczenia się.

Do badania wylosowano 62 spośród 173 gimnazjów z całej Polski (baza gimnazjów współpracujących z wydawnictwem). W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Analiza wybranych zadań

E-diagnoza cz. 1



Rys. 4.14. Zadanie 3

Źródło: opracowanie merytoryczne własne.

Tabela 4.40. Dane – zadanie 3

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Zamienia liczbę z systemu rzymskiego na system arabski
Rozwiązywalność zadania	0,92
Klasyczna walidacja	0,94

Źródło: opracowanie własne.

Zadania:

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20

21

22

Zadanie 20. (kategoria 1)

Do sklepu przywieziono 120 kg pomarańczy. Pierwszego dnia sprzedano 10% dostarczonych pomarańczy. Drugiego dnia sprzedano o 5 kilogramów więcej niż pierwszego dnia. Uzupełnij zdania:

Pierwszego dnia sprzedano kilogramów pomarańczy.

Drugiego dnia sprzedano kilogramów pomarańczy.

Po dwóch dniach w sklepie pozostało kilogramów pomarańczy.

p

oprzednie pytanie

wyczyść

n

astępne pytanie

Pomoc:

Należy w zakropkowane pola wpisać liczbę która według Ciebie jest poprawnym rozwiązaniem lub wybrać odpowiedź z listy rozwijanej. Aby wpisać liczbę ujemną, należy postawić przed liczbą znak '-'. W celu wstawienia ułamka zwykłego należy użyć znaku '/' - na przykład 1/2. Aby wpisać ułamek dziesiętny, należy użyć znaku przecinka.

Rys. 4.15. Zadanie 20

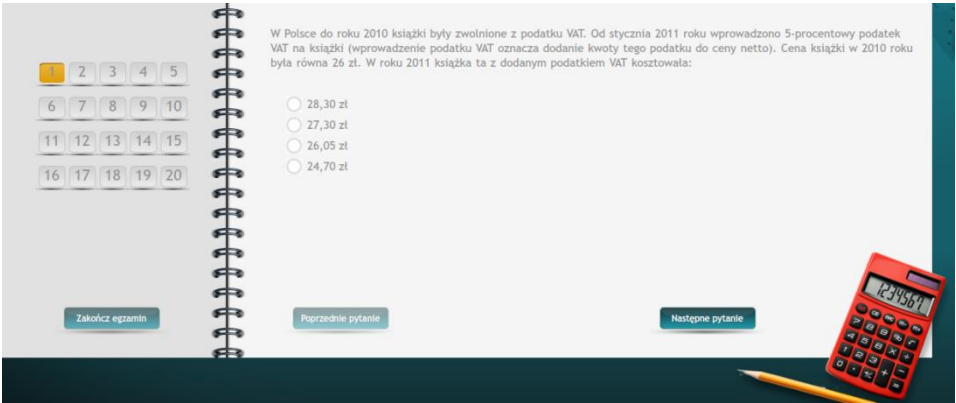
Źródło: opracowanie merytoryczne własne.

Tabela 4.41. Dane – zadanie 20

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wykonuje obliczenia procentowe
Rozwiązywalność zadania	0,88
Klasyczna walidacja	0,90

Źródło: opracowanie własne.

E-diagnoza część 2



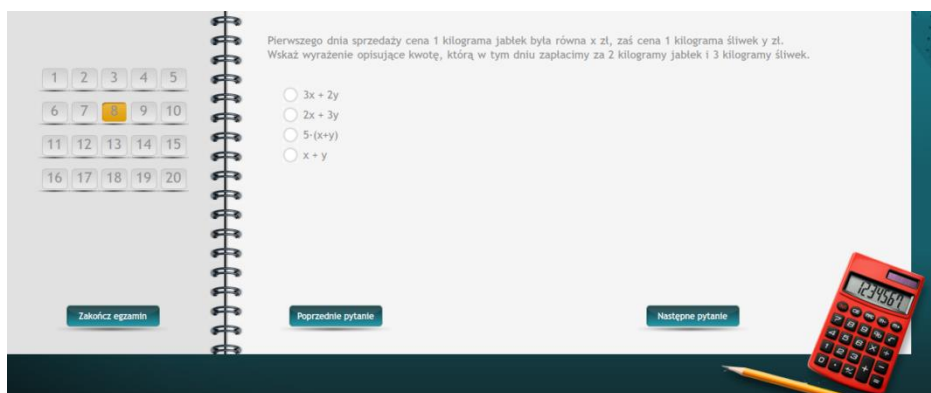
Rys. 4.16. Zadanie 1

Źródło: opracowanie merytoryczne własne.

Tabela 4.42. Dane – zadanie 1

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Oblicza procent z danej liczby
Rozwiązywalność zadania	0,84
Klasyczna walidacja	0,88

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4.17. Zadanie 8

Źródło: opracowanie merytoryczne własne.

Tabela 4.43. Dane – zadanie 8

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Zapisuje wyrażenie algebraiczne
Rozwiązywalność zadania	0,91
Klasyczna walidacja	0,93

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: HS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano, na podstawie badań, efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.9. Badanie IX

Próbna matura 2008

Do badania wylosowano 24 spośród 46 szkół średnich w Łodzi. W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej.

Tabela 4.44. Dane z próby

Opis badania	
Rok	2008
Liczba uczniów	266
Liczba szkół	24

Źródło: badania własne.

Zadanie 2 (3 pkt)

Rozwiąż równanie: $(x - 37)(x^2 - 7x + 6) = 0$.

Odpowiedź.....

Tabela 4.45. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
Wyznaczenie pierwiastka równania liniowego: $x = 37$.	1
Wyznaczenie pierwiastków równania kwadratowego: $x_1 = 1, x_2 = 6$.	2

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.46. Dane – zadanie

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Rozwiązuje równanie wielomianowe
Rozwiązywalność zadania	0,85
Klasyczna walidacja	0,90

Źródło: opracowanie własne.

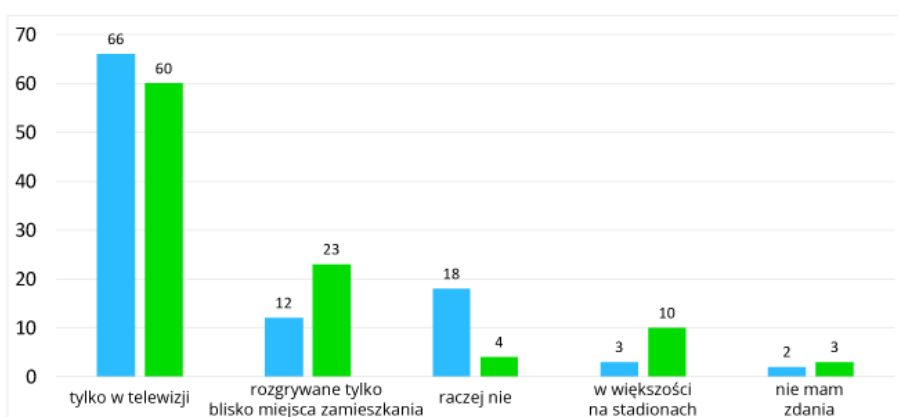
Zadanie 9 (4 pkt)²⁴⁵

W badaniu wzięło udział 1010 respondentów, w tym 510 mężczyzn i 500 kobiet. Oblicz, ilu respondentów odpowiedziało, że mecze będą oglądać tylko w telewizji. Zapisz obliczenia.

Odpowiedź. Liczba respondentów.....

Oblicz, ile procent kobiet raczej nie będzie oglądać meczów w telewizji.

Odpowiedź.....



Źródło: www.ipsos.pl

Tabela 4.47. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
a) Zapisanie: $1010 \cdot 20\%$.	1
Obliczenie: $1010 \cdot 20\%$.	1
b) Zapisanie: $500 \cdot 40\%$.	1
Obliczenie: $500 \cdot 40\%$.	1

Źródło: opracowanie własne.

²⁴⁵ Opracowanie własne, próbna matura podstawowa 2008 r.

Tabela 4.48. Dane – zadanie 9a)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Oblicza procent z danej liczby
Rozwiązywalność zadania	0,22
Klasyczna walidacja	0,94

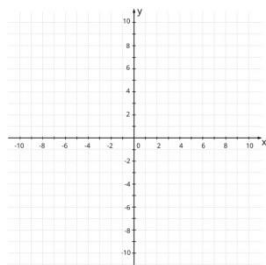
Źródło: opracowanie własne.

Część rozszerzona

Zadanie 1 (9 pkt)²⁴⁶

Dana jest funkcja $f(x) = \begin{cases} x & x \in (-\infty, 1] \\ (x-2)^2 & x \in (1, \infty) \end{cases}$.

a) Naskicuj wykres funkcji f .



b) Podaj zbiór wartości funkcji f .

Odpowiedź.....

c) Podaj miejsca zerowe funkcji f .

Odpowiedź.....

d) Podaj zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartość 4.

Odpowiedź.....

²⁴⁶ Opracowanie własne, próbna matura rozszerzona, 2008.

e) Podaj wzór funkcji g , gdzie $g(x) = f(x + 2)$.

Odpowiedź.

f) Podaj przedział, w którym funkcja f jest malejąca.

Odpowiedź.

Tabela 4.49. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
a) Szkicuje wykres funkcji.	2
b) Wyznacza zbiór wartości funkcji.	1
c) Wyznacza miejsca zerowe funkcji.	1
d) Wyznacza zbiór argumentów funkcji dla ustalonej wartości.	1
e) Wyznacza wzór funkcji $f(x + a)$.	2
f) Wyznacza zbiór, w którym funkcja jest malejąca.	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.50. Dane – zadanie 2a)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Rozwiązuje równanie wielomianowe
Rozwiązywalność zadania	0,98
Klasyczna walidacja	0,99

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.51. Dane – zadanie 2b)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Rozwiązuje nierówność wielomianową
Rozwiązywalność zadania	0,90
Klasyczna walidacja	0,94

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 2 (5 pkt)²⁴⁷Rozwiąż nierówność: $(x - 37)(x^2 - 7x + 6) < 0$.

Rozwiązanie.

Tabela 4.52. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
a) Wyznaczenie pierwiastka równania liniowego: $x = 37$.	1
Wyznaczenie pierwiastków równania kwadratowego: $x_1 = 1, x_2 = 6$.	2
b) Zastosowanie metody rozwiązywania nierówności: np. narysowanie przybliżonego wykresu wielomianu, narysowanie siatki znaków.	1
Zapisanie rozwiązania nierówności: $x \in (-\infty, 1) \cup (6, 37)$.	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.53. Dane – zadanie 2a)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Rozwiązuje równanie wielomianowe
Rozwiązywalność zadania	0,98
Klasyczna walidacja	0,99

Źródło: opracowanie własne.

²⁴⁷ Opracowanie własne, próbna matura rozszerzona, 2008.

Tabela 4.54. Dane – zadanie 2b)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Rozwiązuje nierówność wielomianową
Rozwiązywalność zadania	0,90
Klasyczna walidacja	0,94

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 5 (3 pkt)²⁴⁸

Założmy, że piłka jest w kształcie kuli. Oblicz objętość piłki, jeśli jej średnica wynosi 20 cm. (Wzór na objętość kuli: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, r – promień kuli. Do obliczeń przyjmij, że $\pi = 3$). Zapisz obliczenia.

Tabela 4.55. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
a) Wyznaczenie promienia kuli: $R = 10$ cm.	1
b) Wstawienie danych do wzoru: $V = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$.	1
c) Obliczenie objętości kuli $V = 4000 \text{ cm}^3$.	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.56. Dane – zadania 5a), b), c)

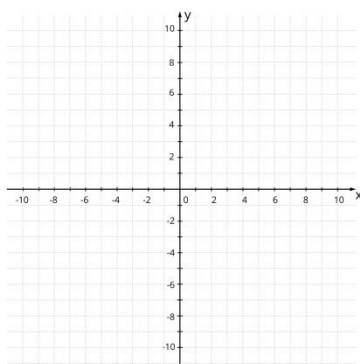
Opis zadania	
Efekt uczenia się	Oblicza objętość kuli, mając dany wzór
Rozwiązywalność zadania	0,95
Klasyczna walidacja	0,96

Źródło: opracowanie własne.

²⁴⁸ Opracowanie własne, próbna matura rozszerzona, 2008.

Zadanie 3 (7 pkt)

Dany jest kwadrat $ABCD$, gdzie $A = (1, 1)$ oraz jego środek symetrii $S = (2, 1)$. Wyznacz współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu oraz napisz równanie okręgu opisanego na kwadracie.



Odpowiedź.....

Tabela 4.57. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
a) Metoda na wyznaczenie współrzędnych wierzchołka C .	1
b) Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka C .	1
c) Metoda na wyznaczenie współrzędnych wierzchołków B, D .	2
d) Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka B .	1
e) Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka D .	2
f) Wyznaczenie równania okręgu opisanego na kwadracie.	1

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.58. Dane – zadania 3a), b), c), d), e)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wyznacza współrzędne kwadratu, mając dany jeden z wierzchołków i środek
Rozwiązywalność zadania	0,89
Klasyczna walidacja	0,93

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 4.59. Dane – zadanie 3f)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wyznacza wzór okręgu opisanego na kwadracie
Rozwiązywalność zadania	0,85
Klasyczna walidacja	0,90

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 9 (3 pkt)²⁴⁹

Wykaż tożsamość trygonometryczną: $tg(x) + ctg(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$.

Odpowiedź.

Tabela 4.60. Schemat punktowania

Kryterium punktowania	Liczba punktów
a) Wykorzystanie tożsamości: $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $ctg(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$.	1
b) Wykorzystanie tożsamości: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.	1
c) Wykazanie tożsamości.	1

Źródło: opracowanie własne.

²⁴⁹ Opracowanie własne, próbna matura rozszerzona, 2008.

Tabela 4.61. Dane – zadania 9a), b), c)

Opis zadania	
Efekt uczenia się	Wykazuje tożsamość trygonometryczną
Rozwiązywalność zadania	0,95
Klasyczna walidacja	0,98

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: PS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano na podstawie badań efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.10. Badanie XI

E-matura 2009

29 października w 2009 roku po raz pierwszy w Polsce i na tak dużą skalę w Europie został przeprowadzony drogą elektroniczną próbny egzamin maturalny z matematyki w zakresie podstawowym. Około 4 tysięcy maturzystów z ponad 150 szkół (Rys. 4.18) zasiadło przed komputerami podłączonymi do internetu, by zmierzyć się z „królową nauk”. Egzamin rozpoczął się o godz. 9.00 i trwał 170 minut. Na wstępie wybrano 150 szkół ponadgimnazjalnych. Następnie sprawdzono, czy dobór szkół pobranych do analiz jest rozkładem normalnym. Okazało się, że na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, że próba miała charakter losowy.

W trakcie e-matury na Politechnice Łódzkiej odbyła się konferencja poświęcona tematyce matury z udziałem przedstawicieli z okręgowych komisji egzaminacyjnych, Kuratorium Oświaty w Łodzi i dyrektorów szkół. Dziennikarze mieli możliwość przeprowadzenia wywiadów i rozmów.

Już następnego dnia, czyli 30 października, każdy ze zdających poznał wyniki egzaminu, natomiast szkoła otrzymała zadania egzaminacyjne do wykorzystania w pracy dydaktycznej.

Projekt e-matura został objęty patronatem Ministra Edukacji Narodowej, Dyrektor Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Łodzi i Marszałek Województwa Łódzkiego. Firma IBM przekazała Politechnice Łódzkiej odpowiedni sprzęt komputerowy do przeprowadzenia e-matury. Rekrutację szkół do projektu wsparło Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON.

Byłem pomysłodawcą, inicjatorem i autorem zadań projektu e-matura.



Rys. 4.18. Szkoły biorące udział w e-maturze

Źródło: opracowanie własne.

Analiza zadań

Zadanie 14 (1 pkt)²⁵⁰

Pozostały czas: **41 min 33 sek**

Status:

- rozwiązane: **1/35**
- zadania pominęte:
 - zadanie 1 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 2 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 3 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 4 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 5 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 6 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 7 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 8 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 9 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 10 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 12 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 13 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 14 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 15 ([rozwiąż](#))
 - zadanie 16 ([rozwiąż](#))

Zadania: [1](#) [2](#) [3](#) [4](#) [5](#) [6](#) [7](#) [8](#) [9](#) [10](#) [11](#) [12](#) [13](#) [14](#) [15](#) [16](#) [17](#) [18](#) [19](#) [20](#) [21](#) [22](#) [23](#) [24](#) [25](#) [26](#) [27](#) [28](#) [29](#) [30](#) [31](#) [32](#) [33](#) [34](#) [35](#)

ematura.com>egzamin>

Zadanie 14. (kategoria 2)

Rozwiązaniem równania $\frac{2x+1}{x-4} = 11$ jest

☐ $x = 4$
☐ $x = 5$
☐ $x = 12$
☐ $x = 7$

p [oprzednie pytanie](#) **n** [następne pytanie](#)

Rys. 4.19. Zrzut ekranu z zadania 14, e-matura

Źródło: treść zadania: opracowanie własne.

²⁵⁰ Opracowanie własne.

Tabela 4.62. Dane – zadanie 14

Opis zadania	
Efekt uczenia	Sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania wymiernego
Rozwiązywalność zadania	0,93
Klasyczna walidacja	0,95

Źródło: opracowanie własne.

Zadanie 17 (1 pkt)²⁵¹

Status:

rozwiązane: 1/35

zadania pominięte:

zadanie 1 (rozwiąż)

zadanie 2 (rozwiąż)

zadanie 3 (rozwiąż)

zadanie 4 (rozwiąż)

zadanie 5 (rozwiąż)

zadanie 12 (rozwiąż)

zadanie 13 (rozwiąż)

zadanie 14 (rozwiąż)

zadanie 15 (rozwiąż)

zadanie 16 (rozwiąż)

zadanie 17 (rozwiąż)

zadanie 18 (rozwiąż)

zadanie 19 (rozwiąż)

zadanie 20 (rozwiąż)

zadanie 21 (rozwiąż)

zadanie 22 (rozwiąż)

Zadania:

123456789101112131415161718

1920212223242526272829303132333435

ematura.com>egzamin>

Zadanie 34. (kategoria 1)

Długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego wynosi 12 cm. Wówczas promień koła opisanego na tym trójkącie jest równy:

☐ 10 cm.

☐ 8 cm.

☐ 6 cm.

☐ 4 cm.

p poprzednie pytanie

n następne pytanie

wyczyść

Rys. 4.20. Zrzut ekranu z zadania 17, e-matura

Źródło: treść zadania: opracowanie własne.

Tabela 4.63. Dane – zadanie 17

Opis zadania	
Efekt uczenia	Wyznacza długość promienia okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym
Rozwiązywalność zadania	0,88
Klasyczna walidacja	0,92

Źródło: opracowanie własne.

²⁵¹ Opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: PS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano na podstawie badań efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.11. Badanie X

Badanie zostało przeprowadzono w 2012 roku, którego byłem inicjatorem i koordynatorem. Celem badania była analiza porównywalności próbnej e-matury przeprowadzonej w lutym 2012 roku z egzaminami zewnętrznymi.

Przebieg badania

Dokonano fuzji danych z egzaminów zewnętrznych poczynając od sprawdzianu po szkole podstawowej w 2006 roku, przez egzamin gimnazjalny z części matematyczno-przyrodniczej w 2009 i maturę podstawową z matematyki w 2012 roku. Dane pochodziły z Okręgowej Komisji Egzaminacyjnej w Łodzi, (Tabela 4.64). W badaniu wzięło udział 1232 uczniów. Do badania wylosowano 96 spośród 121 szkół średnich w województwie Łódzki. W doborze próby zastosowano metodę bez zwracania. Sprawdzając założenia losowego charakteru zastosowano test serii losowości próby, sprawdzając hipotezę zerową, że próba ma charakter losowy, wobec hipotezy alternatywnej, że próba nie ma charakteru losowego. Na poziomie istotności 0,05 brak było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. **W skali kraju było to badanie unikatowe.**

Tabela 4.64. Dane badania

Dane	Liczba zadań	Rok
Sprawdzian po szkole podstawowej	33	2006
Egzamin gimnazjalny z części matematyczno-przyrodniczej	36	2009
Próbna e-matura	32	luty 2012
Matura z matematyki (egzamin zewnętrzny)	24	maj 2012

Źródło: opracowanie własne.

Poniżej przedstawiono zadania, które spełniły probabilistyczną walidację w e-maturze 2012.

Zadania. 1²⁵².

Wyznacz 15% z liczby 120.

- A) 8
- B) 80
- C) 1,8
- D) 18

Zadanie 12²⁵³.

Jeśli prosta L jest równoległa do prostej K oraz prosta K jest prostopadła do prostej M , to

- a) prosta M jest równoległa do prostej L .
- b) prosta L jest równoległa do prostej M .
- c) prosta L jest prostopadła do prostej M .
- d) jest za mało danych, aby ustalić wzajemne położenie prostych M oraz L .

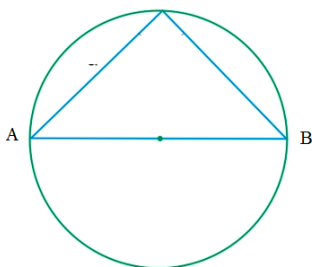
Zadanie 19²⁵⁴.

Kuba za 24 kilogramy gruszek i 12 kilogramów jabłek zapłacił 120 zł. Adrian w tym samym sklepie za 6 kilogramów gruszek i 4 kilogramy jabłek zapłacił

- a) więcej niż 20 zł ale mniej niż 30 zł.
- b) 30 zł.
- c) więcej niż 30 zł ale mniej niż 40 zł.
- d) więcej niż 40 zł ale mniej niż 50 zł.

Zadanie 30²⁵⁵.

Dany jest okrąg i wpisany w niego trójkąt. Bok AB trójkąta jest jednocześnie średnicą okręgu (patrz rysunek).



Miara kąta przy wierzchołku A jest równa 43° . Wtedy miara kąta przy wierzchołku B jest równa

²⁵² Opracowanie własne.

²⁵³ Opracowanie własne.

²⁵⁴ Opracowanie własne.

²⁵⁵ Opracowanie własne.

W trakcie badania został wyznaczony współczynnik ***b*** (trudność) z modelu Rascha. Początkowo został on wyznaczony na podstawie fuzji wszystkich zadań z egzaminów zewnętrznych i próbnej e-matury. Następnie został wyznaczony współczynnik trudności tylko dla e-matury. Porównywalność tych współczynników dla zadań mierzących efekty uczenia się świadczy o porównywalnym z egzaminami zewnętrznymi przygotowaniu zestaw zadań, które przygotowałem w e-maturze 2012.

Tabela 4.65. Dane wyznaczone z modelu Rascha

Numer zadania	Trudność (Fuzja danych)	Błąd (Fuzja danych)	Trudność (e-matura 2012)	Błąd (e-matura 2012)
1	-3,24	0,21	-3,40	0,21
12	-2,21	0,13	-2,38	0,13
19	-1,04	0,09	-1,05	0,09
30	-1,28	0,09	-1,41	0,09

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: HS_4

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że zidentyfikowano na podstawie badań efekty uczenia się, które przeszły walidację na innych poziomach Polskiej Ramy Kwalifikacji niż szósty.

4.12. Badanie XI

Badanie „Kompetencje 2018” zostało przeprowadzone 10-29 maja 2018 roku według ustalonego harmonogramu²⁵⁶. Badanie odbywało się w czasie lekcji w obecności nauczyciela wyznaczonego przez szkołę. Test trwał 35 minut i był przeprowadzony elektronicznie. Poniżej przedstawiono informacje o szkołach biorących udział w badaniu (Tabela 4.66).

²⁵⁶ Protokół dostępu: <https://www.evidenceinstitute.pl/kompetencje-2018/harmonogram/> [2019, styczeń].

Tabela 4.66. Dane badania

Województwo	Liczba przebadanych szkół	Liczba przebadanych uczniów
dolnośląskie	1	67
kujawsko-pomorskie	49	2369
lubelskie	7	134
mazowieckie	77	3994
małopolskie	2	53
opolskie	1	8
podkarpackie	35	1622
podlaskie	8	131
pomorskie	1	37
warmińsko-mazurskie	1	12
wielkopolskie	12	472
zachodniopomorskie	1	14
łódzkie	8	338
świętokrzyskie	1	10

Źródło: Evidence Institute.

Każda szkoła otrzymała raport, w którym oprócz zestawień wyników dla szkoły i badanych klas zamieszczono indywidualne wyniki uczniów: odpowiedzi na każde jawne zadanie testu oraz wynik sumaryczny na skali staninowej i decylowej. W instrukcji do badania zaznaczono wyraźnie: wyniki uzyskane przez uczniów w badaniu „Kompetencje 2018” nie mogą w jakikolwiek sposób wpływać na ich szkolne oceny z przedmiotów testowych. Byłem współautorem zadań testowych.

Test był przeprowadzony dla klas szóstych szkoły podstawowej. Składał się z 16 zadań i występował w 100 wersjach. W części jawnej (stałej między wersjami) znajdowało się 10 zadań, które były zadaniami kotwiczącymi, pochodzącymi z egzaminów zewnętrznych z matematyki z lat 2002-2016. Pozostałe zadania były losowane z 16 zadań. Zadania egzaminacyjne dobrano na podstawie ich parametrów psychometrycznych (preferowaliśmy zadania o korelacji powyżej 0,2 oraz klasycznej łatwości 0,25-0,8).

Wyniki badań

Poniżej przedstawiono wyniki badań.

Tabela 4.67. Wyniki łatwości zadań kotwiczących

Zadania kotwiczące	Łatwość zadania Badanie 2018	Łatwość zadania w kraju
Sprawdzian 2005 zadanie 2	0,86	0,84
Sprawdzian 2015 zadanie 2	0,38	0,39
Sprawdzian 2014 zadanie 14	0,50	0,49
Sprawdzian 2011 zadanie 20	0,72	0,72
Sprawdzian 2002 zadanie 18	0,79	0,82
Sprawdzian 2004 zadanie 12	0,54	0,52
Sprawdzian 2015 zadanie 23	0,68	0,71
Sprawdzian 2011 zadanie 16	0,53	0,51
Sprawdzian 2012 zadanie 19	0,49	0,46
Sprawdzian 2006 zadanie 9	0,54	0,52

Źródło: Evidence Institute.

Jak widać, wyniki uczniów biorących udział w badaniu mają rozkład bardzo podobny do rozkładu populacji egzaminacyjnej.

Jednym z ważnych efektów uczenia się jest wykonywanie obliczeń procentowych dla 5%, 10%, 20%, 25%, 50% i 75%. Zaproponowałem, aby w badaniu przeprowadzono walidację efektu uczenia się za pomocą zadania:

Zestaw surówek kosztował 4 zł, a po obniżce – 3 zł. O ile procent cena została obniżona?

- A) 5%.
- B) 10%.
- C) 20%.
- D) 25%.

Analiza statystyczna dla jednoparametrowego modelu Rascha pokazała, że współczynnik trudności zadania wyniósł $b = -0,78$.

W klasie szóstej, na drugim poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji nie osiągnięto walidacji probabilistycznej efektu uczenia się: wykonuje obliczenia procentowe dla 5%, 10%, 20%, 25%, 50%, 75%. Powinien być spełniony warunek: $b < -0,9$.

Trudno dziś sobie wyobrazić funkcjonowanie człowieka we współczesnym świecie bez znajomości procentów. Jeszcze trudniej wyobrazić sobie to, że dotyczy to uczniów w polskiej szkole.

4.13. Efekty uczenia się a płeć

Wyniki rozwiązywania zadań z matematyki w odniesieniu do płci stanowią problem badawczy opisywany niejednokrotnie. Np. A. Zawistowska zbadała osiągnięcia najzdolniejszych uczniów na podstawie testów PISA, egzaminów szkolnych i olimpiad matematycznych. Okazuje się, że chłopcy stanowią większość wśród najlepszych uczniów, mają lepsze wyniki w zadaniach wykorzystujących relacje przestrzenne, dodatkowo różnica ta pogłębia się wraz ze stopniem zaawansowania zadań²⁵⁷.

Test może zawierać zadania, których rozwiązywalność jest niestabilna ze względu na płeć. Zdarza się, że jedna z płci może wyraźnie lepiej rozwiązywać dane zadanie. Jednym z powodów takiego zjawiska jest motywacja²⁵⁸. Biorąc pod uwagę szerokie zainteresowanie problemem rozwiązywalności zadań z podziałem na płeć, zbadanie osiągania konkretnych efektów uczenia się w matematyce wydaje się być zasadne.

Do pomiaru siły związku między cechą wyrażoną na skali przedziałowo-ilorazowej (zmienną ciągłą) i nominalnej (zmienną dychotomiczną) stosowany jest współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej, r_{pbi} ²⁵⁹. Zmienna dychotomiczna to taka, gdy wyróżnia się dwie wzajemnie wykluczające się kategorie badanej cechy, np. płeć męska – żeńska. Zazwyczaj jedną kategorię zmiennej dychotomicznej koduje się symbolem 1, a drugą – symbolem 0, stąd nazywana jest ona „zmienną zero-jedynkową”²⁶⁰. Wyżej opisany współczynnik obliczany jest z następującego wzoru:

²⁵⁷ Zawistowska A., „Płeć matematyki” – Zróznicowania osiągnięć ze względu na płeć wśród uzdolnionych uczniów, *Studia Socjologiczne*, 2013, 3(210), ss. 75-95.

²⁵⁸ Jakubowski M., Pokropek A., *Badając egzaminy. Podejście ilościowe w badaniach edukacyjnych*, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2009, s. 25.

²⁵⁹ Subskrypt pbi to akronim utworzony od angielskiej nazwy point biserial correlation.

²⁶⁰ Guilford J.P., *Podstawowe metody statystyczne w psychologii i pedagogice*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1960, s. 334-348; Nowaczyk Cz., *Podstawy metod statystycznych dla pedagogów*, Wydawnictwo PWN, Warszawa-Poznań 1985, s. 200.

$$r_{pbi} = \frac{M_p - M_q}{S_t} \sqrt{pq}$$

gdzie:

M_p – średni wynik całego testu dla osób, które wybrały daną odpowiedź,

M_q – średni wynik całego testu dla osób, które wybrały inną odpowiedź,

S_t – odchylenie standardowe wyników całego testu,

p – odsetek zdających, którzy wybrali daną odpowiedź,

q – odsetek zdających, którzy wybrali inną odpowiedź.

Współczynnik pokazuje siłę (wartość bezwzględna) i kierunek (znak) współzależności dwóch cech. Przyjmuje wartości z przedziału liczbowego $[-1, 1]$, im bliższy krańcom przedziału, tym związek jest silniejszy.

Znak współczynnika informuje o kierunku współzależności, a wartość bezwzględna – o jego sile; do oceny siły zależności można przyjąć następujące przedziały (w analizach podano moduł ww. współczynnika):

$(0,0; 0,3]$ – współzależność słaba,

$(0,3; 0,6]$ – współzależność umiarkowana,

$(0,6; 1,0]$ – współzależność silna.

Do badania istotności statystycznej współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej zastosowano test istotności dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej²⁶¹.

Badanie – rok 2004

Badano 1946 uczniów (1041 dziewcząt i 905 chłopców), którzy rozwiązywali próbny egzamin. Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 4.68, Tabela 4.69).

Tabela 4.68. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 26	2,03	0,05	1,96	0,0455	0,046
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

²⁶¹ Domański C., *Testy statystyczne*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1990, ss. 178-179.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.68) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 26 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 26.

Tabela 4.69. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_{α}	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 31	2,38	0,05	1,96	0,0455	0,046
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.69) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 31 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 31.

Tabela 4.70. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_{α}	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – wszystkie zadania	4,74	0,05	1,96	0,0001	0,108
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.70) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych ze wszystkich zadań a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych ze wszystkich zadań.

Badano 1990 uczniów (1038 dziewcząt i 952 chłopców), którzy rozwiązywali próbny egzamin. Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 4.71, Tabela 4.72).

Tabela 4.71. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 2	1,64	0,05	1,96	0,0981	0,037
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.71) nie potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 2 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 2.

Tabela 4.72. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 15	2,59	0,05	1,96	0,0092	0,058
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 15 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 15.

Tabela 4.73. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 17	1,47	0,05	1,96	0,1358	0,033
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.73) nie potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 17 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 17.

Tabela 4.74. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 31a	2,59	0,05	1,96	0,0092	0,058
Niezależna – płeć					

Źródło: obliczenia własne na podstawie badań.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.74) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 31a a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 31a.

Badanie – rok 2006

Badano 1975 uczniów (1011 dziewcząt i 964 chłopców), którzy rozwiązywali próbny egzamin. Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 4.75, Tabela 4.76).

Tabela 4.75. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 2	0,48	0,05	1,96	0,6187	0,011
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.75) nie potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 2 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 2.

Tabela 4.76. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 15	5,05	0,05	1,96	0,0092	0,112
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.76) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 15 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 15.

Tabela 4.77. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 15	3,30	0,05	1,96	0,0010	0,074
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.77) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 17 a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 17.

Tabela 4.78. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadanie 31a	2,49	0,05	1,96	0,0135	0,056
Niezależna – płeć					

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.78) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadania 31a a płcią ucznia. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu płci na liczbę punktów uzyskanych z zadania 31a.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: HS_5

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że istnieją efekty uczenia się, których osiągnięcie jest zróżnicowane ze względu na płeć.

4.14. Efekty uczenia się a warunki mieszkaniowe uczących się

Badania przedstawiają zależność warunków mieszkaniowych w odniesieniu do otrzymanych wyników zadań, które walidują efekty uczenia się.

Badanie – rok 2007

Badano 2076 uczniów (z czego 734 mieszkało w kamienicy lub bloku i nie miało własnego pokoju, a 1343 mieszkało w bloku i miało własny pokój lub w domku jednorodzinnym).

Tabela 4.79. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadania 8, 15, 16					
Niezależna – mieszkanie w kamienicy, bloku bez własnego pokoju/ mieszkanie w bloku we własnym pokoju, domku jednorodzinnym	6,334	0,05	1,96	0,0001	0,138

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.79) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadań (suma punktów z zadań 8, 15, 16) a rodzajem mieszkania. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu rodzaju mieszkania na liczbę punktów uzyskanych z zadań (suma punktów).

Badanie – rok 2008

Badano 1630 uczniów (z czego 446 mieszkało w kamienicy lub bloku i nie miało własnego pokoju, a 1185 mieszkało w bloku i miało własny pokój lub w domku jednorodzinnym).

Tabela 4.80. Wyniki testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu	Współczynnik korelacji punktowo-dwuseryjnej r_{pbi}
Zależna – zadania 8, 15, 16					
Niezależna – mieszkanie w kamienicy, bloku bez własnego pokoju/ mieszkanie w bloku we własnym pokoju, domku jednorodzinnym	5,755	0,05	1,96	0,0001	0,141

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej (Tabela 4.80) potwierdza istotnie statystyczną zależność między liczbą punktów uzyskanych z zadań (suma punktów z zadań 8, 15, 16) a rodzajem mieszkania. Obliczona wartość współczynnika korelacji punktowo-dwuseryjnej wskazuje na słabą siłę wpływu rodzaju mieszkania na liczbę punktów uzyskanych z zadań (suma punktów).

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: HS_6

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że istnieją efekty uczenia się, których osiągnięcie jest zróżnicowane ze względu na warunki środowiskowe.

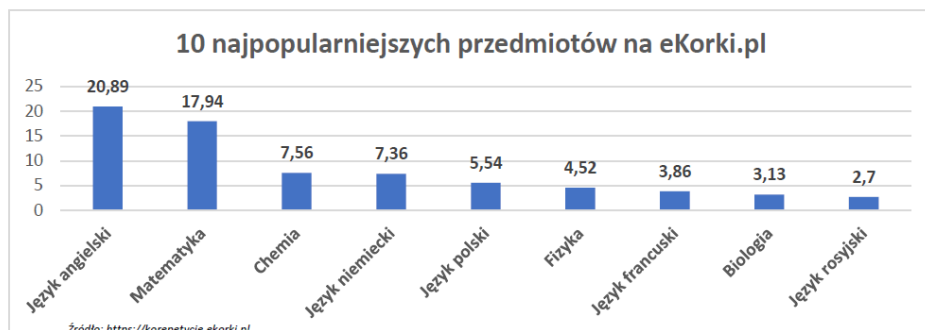
4.15. Efekty uczenia się, problem korepetycji

Problem korepetycji jest powszechnie znany, jednak nie ma zbyt wielu badań na ten temat. Jako „cień systemu szkolnictwa” określił go Mark Bray w swojej książce „Cień rzucany przez szkoły” będącej raportem Międzynarodowego Instytutu Planowania Kształcenia (IIEP)²⁶². Badania prowadzone były na całym świecie, również w Polsce pod egidą UNESCO. Autor opisuje zasięg korepetycji i natężenie tego zjawiska, które występuje powszechnie za wyjątkiem krajów Skandynawii. Wskazuje skutki pedagogiczne, społeczne, ekonomiczne oraz polityczne. Na przykład w Polsce „rynek korepetycji” gwałtownie rozwinął

²⁶² Bray M., *Korepetycje. Cień rzucany przez szkoły*, Wolters Kluwer, Warszawa 2012.

się wraz ze zmianą systemu na początku lat 90-tych XX wieku. Anna Giza-Poleszczuk, Mirosława Marody i Andrzej Rychard (1999) prowadząc badania strategii Polaków wobec tych zmian, odkryli że korepetycje traktowane są jako najskuteczniejsza strategia budowania kapitału rodzinnego²⁶³.

Obecnie w Polsce największy rynek korepetycji stanowią zajęcia dodatkowe z języka angielskiego i matematyki. Porównując język angielski z matematyką, należy zwrócić uwagę, że w przypadku tego pierwszego przedmiotu istnieje relatywnie małe zagrożenie słabą oceną, natomiast w drugim przypadku zagrożenie to jest znaczne.



Rys. 4.21. Najpopularniejsze przedmioty na ekorki.pl

Źródło: Protokół dostępu: <https://korepetycje.ekorki.pl>, Raport 27.08.2018 [2019, styczeń].

W roku 2009 uczniowie, którzy kończyli gimnazjum, po raz pierwszy zdawali egzamin z języka obcego nowożytnego. Od roku szkolnego 2008/2009 egzamin kończący gimnazjum składał się z trzech części:

- z części pierwszej – sprawdzającej wiadomości i umiejętności z zakresu przedmiotów humanistycznych,
- z części drugiej – sprawdzającej wiadomości i umiejętności z zakresu przedmiotów matematyczno-przyrodniczych,
- z części trzeciej – sprawdzającej wiadomości i umiejętności z zakresu języka obcego nowożytnego.

Skala korepetycji z matematyki – analiza statystyczna

Problem korepetycji w 2008 roku został dostrzeżony przez Ministerstwo Edukacji Narodowej. Rozpoczęto wyrównywanie szans i walkę z plagą korepetycji. Zaproponowano obowiązkowe lekcje uzupełniające z matematyki i języka polskiego. Profesor Zbigniew Marciniak, ówczesny wiceminister edukacji zapewnił, że „...będą to obowiązkowe godziny zajęć uzupełniających z dwóch głównych szkolnych przedmiotów: matematyki i języka polskiego. Na tych godzinach słabsi

²⁶³ Tamże.

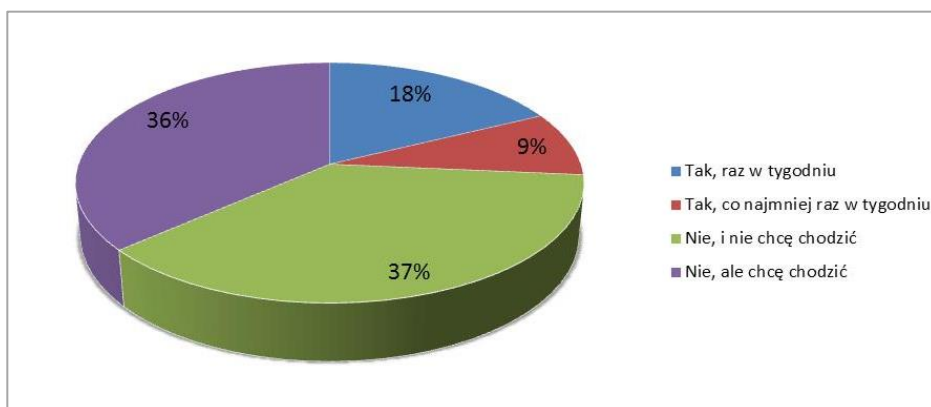
uczniowie pod okiem nauczyciela będą nadrabiali zaległości, a ci, którzy nie mają problemów z nauką, rozwiązywali dodatkowe ćwiczenia”²⁶⁴.

W trakcie próbnych egzaminów, które przeprowadziłem w latach 2006-2019, badane było zjawisko pozaformalnego nauczania – korepetycji. Uczniowie wypełniali ankietę, a jedno z pytań ankietowych dotyczyło zjawiska korepetycji z matematyki w Polsce. Przebieg badania przedstawiono poniżej.

Tabela 4.81. Liczebność próbek badanych w wybranych latach

Nazwa badania	Poziom	Liczba ankiet
E-matura 2009	Klasy maturalne	1887
E-matura 2011	Klasy maturalne	1053
E-matura 2012	Klasy maturalne	3381
E-diagnoza 2012	Klasy kończące gimnazjum	1369

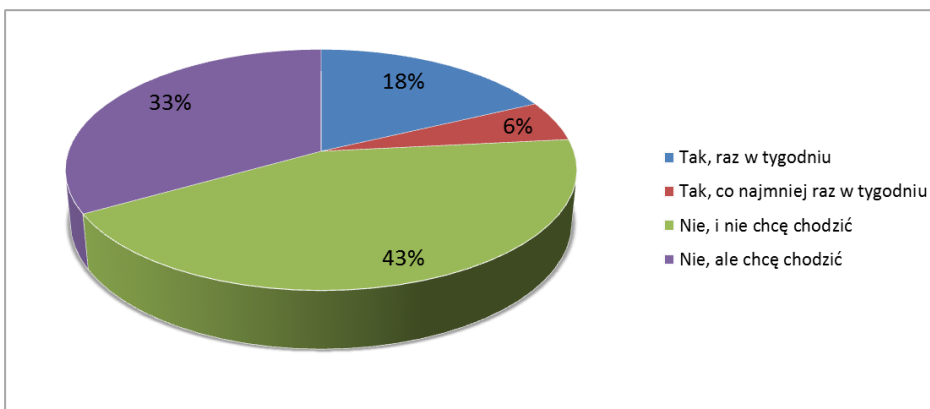
Źródło: opracowanie własne.



Wykres 4.10. Czy chodzisz na dodatkowe lekcje z matematyki? E-matura 2009

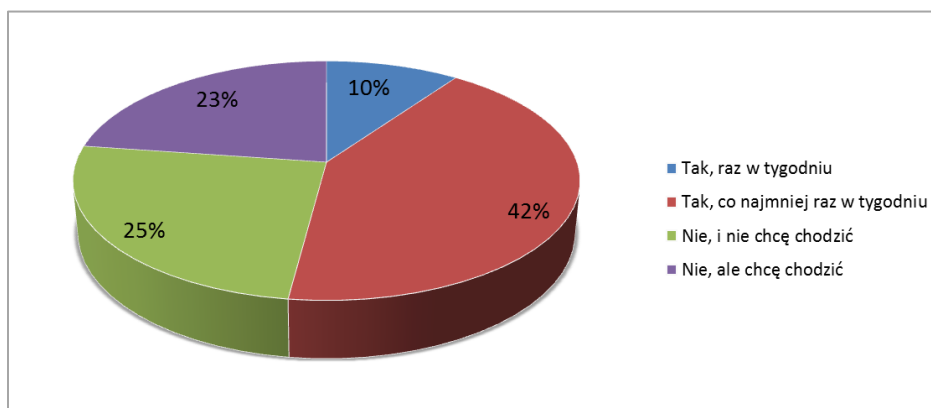
Źródło: opracowanie własne.

²⁶⁴ *Rzeczpospolita*, 11 września 2012.



Wykres 4.11. Czy chodzisz na dodatkowe lekcje z matematyki? E-matura 2011

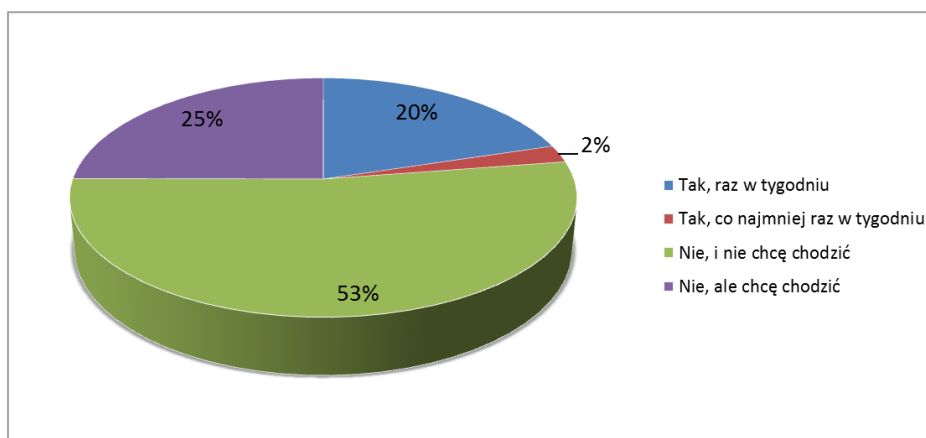
Źródło: opracowanie własne.



Wykres 4.12. Czy chodzisz na dodatkowe lekcje z matematyki? E-matura 2012

Źródło: opracowanie własne.

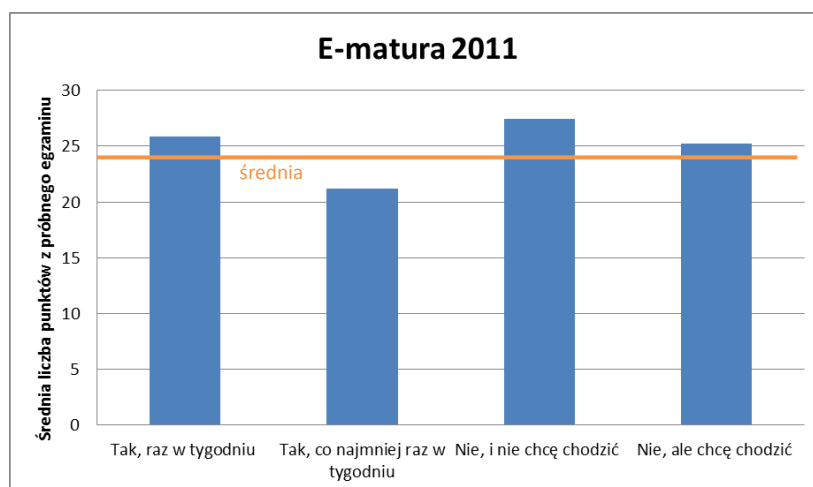
Porównując trzy badania przeprowadzone wśród maturzystów możemy zauważyć, że w latach 2009 i 2011 wyniki utrzymują się na podobnym poziomie. Około 25% korzysta z korepetycji z matematyki, a połowa pozostałej części chciałaby. Sytuacja zmienia się diametralnie w 2012 roku. Wówczas okazuje się, że ponad połowa uczniów już korzysta z lekcji dodatkowych, a kolejne 25% wyraża taką chęć. Wpływ na taki stan rzeczy może mieć wprowadzenie obowiązkowego egzaminu maturalnego z matematyki na poziomie podstawowym.



Wykres 4.13. Czy chodzisz na dodatkowe lekcje z matematyki? E-diagnoza 2012

Źródło: opracowanie własne.

Inaczej rozkładają się głosy wśród gimnazjalistów. Należy zwrócić uwagę, że część uczniów z badanej populacji w tym przypadku nie stanie przed możliwością zdawania matury nie podejmując dalszej nauki w liceach lub technikach.



Wykres 4.14. Średnia liczba punktów z egzaminu próbnego w kontekście uczestniczenia w korepetycjach. E-matura 2011

Źródło: opracowanie własne.

Uczniowie, którzy nie chcą korzystać z dodatkowych lekcji, osiągają wyższe wyniki na poziomie egzaminu maturalnego z matematyki niż średnia. Uczniowie, którzy korzystają z korepetycji co najmniej raz w tygodniu osiągają niższe

wyniki niż średnia. Wyniki te różnią się istotnie statystycznie na poziomie istotności 0,05.

M. Makiewicz na podstawie badań stwierdza, że „nauczane w szkołach ponadgimnazjalnych treści oraz umiejętności matematyczne mają znaczenie praktyczne tylko dla grupy absolwentów zamierzających kontynuować naukę związaną z matematyką”²⁶⁵.

Podsumowanie

Weryfikacja hipotezy: HS_6

W świetle powyższych badań można stwierdzić, że istnieją efekty uczenia się, których osiągnięcie jest zróżnicowane ze względu na warunki środowiskowe.

E-pogotowie matematyczne

Projekt „E-pogotowie matematyczne” był realizowany w ramach Priorytetu IX, Rozwój wykształcenia i kompetencji w regionach, Działanie 9.1, Wyrównywanie szans edukacyjnych i zapewnienie wysokiej jakości usług edukacyjnych świadczonych w systemie oświaty, Poddziałanie 9.1.2, Wyrównywanie szans edukacyjnych uczniów z grup o utrudnionym dostępie do edukacji oraz zmniejszenie różnic w jakości usług edukacyjnych, Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki. Okres realizacji projektu to 1 września 2009 roku – 31 sierpnia 2011 roku.

Byłem pomysłodawcą, autorem i koordynatorem tego projektu.

Skąd pomysł na projekt?

Bardzo dużo firm oferowało i nadal oferuje za pieniądze rozwiązywanie zadań z matematyki. Uczniowie coraz częściej korzystają z tej wątpliwej formy pomocy. Otrzymują gotowe rozwiązania zadań, często ich nie rozumiejąc. Uważa się, że działania te wynikają z lenistwa uczniów i braku ich odpowiedzialności. Wychodząc naprzeciw temu problemowi, stworzyłem koncepcję i zrealizowałem projekt pod nazwą: „E-pogotowie matematyczne”, który w całości był finansowany z funduszy unijnych (wartość projektu: około 1,5 miliona złotych).

Celem projektu była profesjonalna doraźna pomoc w zakresie matematyki dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych prowadzona w czasie rzeczywistym. Przez okres dwóch lat, codziennie w czasie roku szkolnego, od niedzieli do czwartku w godzinach 17-22 czterech wykładowców udzielało pomocy za

²⁶⁵ Makiewicz M., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura, Studia Pedagogiczne t. L XIV/2011 PL, 2011 ss. 291-292.

pośrednictwem platformy edukacyjnej specjalnie stworzonej do tego celu. Uczeń, który miał kłopot z rozwiązaniem zadania z pracy domowej z matematyki lub nie rozumiał jakiegoś zagadnienia przedstawionego na lekcji, mógł połączyć się z wykładowcą za pomocą internetu. Nie dostawał od razu gotowego rozwiązania. Musiał wykazać się aktywnością podczas prowadzenia dyskusji z nauczycielem e-pogotowia. Wszystko odbywało się w czasie rzeczywistym.

Przykładowa pomoc

Justyna [21:28:04]: Co mam zrobić dalej z zadaniem, jeśli wyjdzie mi tangens alfy równy pierwiastek z 3?

Justyna [21:28:18]: Jaki wyjdzie mi wtedy kąt?

Justyna [21:28:40]: A, i dziękuję za to zadanie.

Twój Wykładowca [21:30:29]: Nie musisz się uczyć tego na pamięć.

Twój Wykładowca [21:30:57]: Wszystkie wartości odczytasz z trójkąta równobocznego.

Justyna [21:31:36]: Czyli to będzie kąt po prostu 60 stopni?

Twój Wykładowca [21:33:36]: Czy jasne?

Twój Wykładowca [21:34:05]: Pokażę ci, jak szukać dla kątów 45 stopni.

Twój Wykładowca [21:35:33]: Nie musisz uczyć się tego na pamięć,

Twój Wykładowca [21:36:33]: I najlepiej korzystać z własności funkcji takich jak parzystość lub nieparzystość.

Justyna [21:36:55]: Dobrze, dziękuję bardzo.

Justyna [21:37:01]: :)

Twój Wykładowca [21:37:04]: Ja również dziękuję i pozdrawiam.

Justyna [21:37:16]: Do usłyszenia.

The screenshot shows a virtual classroom interface. On the left, there is a video window showing a person's face. Below it is a chat window with a list of messages. On the right, there is a large whiteboard area. The whiteboard contains the following content:

Top left: $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{a}{a} = 1 = \cot \frac{\pi}{4}$

Center: A square with side length a . A diagonal line is drawn from the bottom-left corner to the top-right corner. The diagonal is labeled $a\sqrt{2}$. The angle at the bottom-left corner is labeled $\frac{\pi}{4}$.

Bottom: $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos \frac{\pi}{4}$

Rysunek 4.22. Pomoc w czasie rzeczywistym

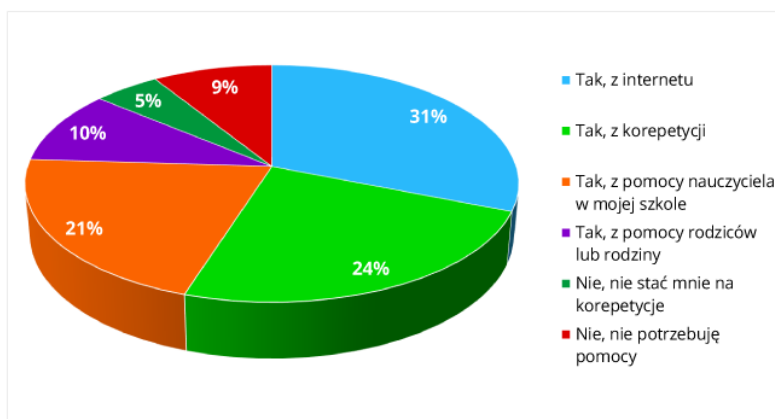
Źródło: „E-pogotowie matematyczne”.

Badanie ankietowe zostało przeprowadzone po drugim roku funkcjonowania „e-pogotowia matematycznego”. Ankiety zostały rozesłane do szkół tylko do tych uczniów, którzy brali udział w projekcie. Zwrotność ankiet wyniosła 670. Przeciennie 5-6% uczniów nie udzielało odpowiedzi na poszczególne pytania.

Badania ankietowe badały założone wskaźniki. Projekt miał się przyczynić się do:

- przyrostu wiedzy z matematyki mierzonego zmodyfikowaną miarą EWD (edukacyjna wartość dodana),
- uzupełnienia i poszerzenia wiedzy oraz umiejętności z matematyki,
- nabycia umiejętności praktycznych w posługiwaniu się nowoczesnymi technologiami informatycznymi,
- zmniejszenia liczby uczniów uczęszczających na korepetycje z matematyki,
- zmotywowania ucznia do samodzielnego myślenia przez udział w konsultacjach e-pogotowia.

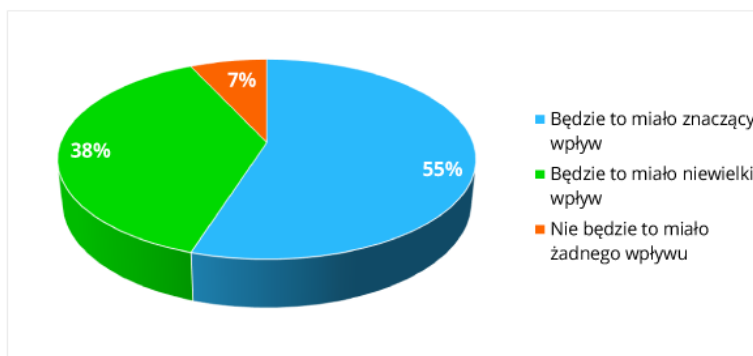
Podczas badań okazało się, że udział w „e-pogotowiu” przyczynił się do zmniejszenia korzystania z korepetycji.



Wykres 4.15. Pytanie ankietowe: Czy przed przystąpieniem do projektu korzystałeś z pomocy w zakresie matematyki?

Źródło: opracowanie własne, raport z projektu „e-pogotowie matematyczne”.

Z przedstawionych danych wynika, że bardzo duża grupa młodzieży potrzebuje pomocy z matematyki. Tylko 9% uczniów stwierdza, że całkowicie nie potrzebuje pomocy w matematyce. Te dane dowodzą trafności postawionego i realizowanego głównego celu projektu: doraźnej pomocy uczniom w matematyce.



Wykres 4.16. Pytanie ankietowe: Czy udział w e-pogotowiu matematycznym zmniejszy liczbę uczniów uczęszczających na korepetycje?

Źródło: opracowanie własne, raport z projektu „e-pogotowie matematyczne”.

Z przeprowadzonego badania wynika, że większa część uczniów uważa, że narzędzia e-learningowe, takie jak platforma „e-pogotowie matematyczne”, zmniejszą liczbę uczniów korzystających z tradycyjnych korepetycji.

Projekt „e-pogotowie matematyczne” był wielokrotnie pokazywany w mediach, między innymi przez gazety o zasięgu ogólnopolskim: Rzeczpospolitą, Gazetę Wyborczą, Przekrój a także przez gazety lokalne, takie jak: Dziennik Łódzki czy Ekspres. Był także komentowany w ogólnopolskim radiu (Radio Zet) i wielu innych. Na zakończenie pozwolę sobie przytoczyć fragment wywiadu, jakiego udzielił jeden z uczniów:

„Był wrzesień. Na lekcję wszedł dyrektor. Powiedział, że Politechnika ma fajny pomysł. Chce nam pomóc w matematyce. Za darmo, wystarczy mieć internet! Zapisalem się i nie żałuję – opowiada Michał Siwik, tegoroczny maturzysta z Zespołu Szkół Ponadgimnazjalnych nr 4 w Bełchatowie.

Dostał hasło dostępu do platformy umożliwiającej kontakt z wykładowcami łódzkiej uczelni i o całej sprawie... zapomniał. Przypomniał sobie w styczniu.

– Rozwiązywałem arkusz, czegoś nie wiedziałem, i wtedy pierwszy raz zalogowałem się na tę platformę. Zadziałało! Z ekranu odezwał się do mnie matematyk i pomógł rozwiązać zadanie – wspomina Michał.

Od tej pory był stałym gościem platformy. Wspólnie z wykładowcami nawet trzy razy w tygodniu rozwiązywał zadania z kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa:

– No i z geometrii. To moja pięta achillesowa. Nie zdarzyło się, bym nie uzyskał pomocy. Często nauka zamieniała się w zabawę. Wykładowca pokazywał, na ile różnych sposobów można rozwiązać jedno zadanie. Wychodził poza program. Proponował książki, które warto przeczytać²⁶⁶.

²⁶⁶ Markowski M., Gazeta Wyborcza, 5.04.2010.

5. Badania część druga – wprowadzenie systemu walidacji efektów uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji

5.1. Kształcenie studentów studiów inżynierskich

Kształcenie na studiach inżynierskich, szczególnie na pierwszych semestrach, wymaga od nauczyciela wiedzy o kształceniu dorosłych zarówno w ujęciu pedagogicznym, jak i andragogicznym. Analiza grup studentów pod kątem wieku, typu ukończonej szkoły ponadgimnazjalnej (liceum ogólnokształcące, technikum) i doświadczenia zawodowego wskazuje, że są one heterogeniczne. Wymaga to specyficznego planowania procesu nauczania i uczenia się przedmiotów zawodowych i ogólnoakademickich, takich jak matematyka.

Studenci studiów stacjonarnych to przede wszystkim osoby, które stosunkowo niedawno ukończyły naukę w szkole ponadgimnazjalnej, są zatem przyzwyczajone do systemu nauczania-uczenia się charakterystycznego dla oświaty. Studenci ci najczęściej chętnie i sprawnie posługują się technologiami informacyjnymi.

Tymczasem wśród studentów studiów niestacjonarnych są osoby, które maturę zdały kilka lat temu, mają doświadczenie zawodowe i edukacyjne spoza systemu oświaty. Oczekują one innego planowania i realizacji zajęć wykorzystujących ich doświadczenia.

Warto zwrócić także uwagę na różnice między studentami, którzy są absolwentami różnych typów szkół. Osoby, które ukończyły liceum ogólnokształcące, mogą mieć większe kompetencje w zakresie matematyki, lecz nie mają doświadczenia w postrzeganiu jej zastosowania w zdobywaniu wiedzy związanej z zawodem. Absolwenci technikum mogą mieć trudności w uczeniu się zaawansowanej matematyki, ale będą łatwiej dostrzegać i rozumieć jej związek z wiedzą kierunkową.

Studenci różnią się także umiejętnością uczenia się. Może to być związane z dotychczasowym doświadczeniem, uzdolnieniami oraz wcześniejszą edukacją.

Nauczyciel, który dobrze zna strukturę grupy, może lepiej zaplanować rozkład treści i wykorzystanie różnych metod nauczania-uczenia się, a tym samym lepiej motywować studentów do uczenia się.

W planowaniu tym może pomóc znajomość modelu andragogicznego²⁶⁷:

- „Dorośli chcą wiedzieć, dlaczego powinni czegoś się uczyć
- Dorośli pragną samodzielności.
- Dorośli mają większy i bardziej zróżnicowany zasób doświadczeń niż dzieci i młodzież.

²⁶⁷ Karawajczyk W., *Kształcenie dorosłych w ujęciu andragogicznym*, Colloquium Wydziału Nauk Humanistycznych i Społecznych, Rocznik I/2009, ss. 97-101.

- Dorośli przejawiają większą gotowość do uczenia się, kiedy w swoim życiu odczuwają potrzebę znajomości czegoś, ze względu na to, że pozwala to skuteczniej działać lub daje satysfakcję.
- Dorośli podejmują kształcenie, mając orientację zadaniową (tzn. koncentrują się na problemach).
- Dorośli są motywowani do nauki zarówno przez czynniki zewnętrzne, jak i wewnętrzne”.

W związku z powyższym ważne jest nie tylko informowanie studentów o tym, czego będą się uczyli, ale także, **które efekty uczenia się będą musieli potwierdzić** oraz jaka będzie korelacja zdobytych kompetencji matematycznych z wiedzą i umiejętnościami kierunkowymi.

Planując wykorzystanie różnorodnych metod nauczania i uczenia się, warto sięgnąć po te, które wykorzystują m.in. różnorodne doświadczenia uczących się i umiejętność samodzielnego uczenia się. Większy nacisk należy także położyć na indywidualizację uczenia się. Ważne jest również umiejętne włączenie technologii informacyjnych w proces uczenia się.

Dobór metod musi uwzględniać specyfikę przedmiotu, np. matematyki. Przykłady metod aktywizujących uczenie się matematyki:

- Rozwiązywanie problemów
To jedna z ważniejszych metod w nauczaniu i uczeniu się matematyki, ponieważ wzbogaca wiedzę i doskonali umiejętności. Rozwiązywanie problemów „jest myśleniem stosowanym, które przeciwstawić można myśleniu twórczemu i myśleniu krytycznemu. Myślenie twórcze i krytyczne to podstawowe formy myślenia badawczego, a badanie może być prowadzone dla samego badania lub posłużyć do rozwiązywania problemu²⁶⁸”. Rozwiązywanie problemów pozwala także na rozwijanie kompetencji społecznych, które są niezwykle ważne w procesie kształcenia zawodowego.
- Kształcenie wyprzedzające
Jedną z metod organizacji uczenia się matematyki w grupach heterogenicznych o różnym doświadczeniu zawodowym i edukacyjnym może być kształcenie wyprzedzające. Jego głównym założeniem jest samodzielne zdobycie wiedzy na dany temat przed zajęciami²⁶⁹. Kształcenie wyprzedzające oprócz odwołania się do wcześniejszej wiedzy i umiejętności uczącego się zachęca go do poszukiwania i porządkowania informacji z wykorzystaniem technologii informacyjnej.
- Praca w grupach
Efektywną pracę w grupach można zorganizować tylko wtedy, gdy zna się dobrze studentów. W uczeniu się dorosłych warto tworzyć grupy hetero-

²⁶⁸ Fisher R., *Uczymy jak myśleć*, WSiP, 1999, s. 107.

²⁶⁹ *Strategia kształcenia wyprzedzającego*, praca zbiorowa pod redakcją naukową Stanisława Dylaka, Ogólnopolska Fundacja Edukacji Komputerowej, Poznań 2013.

geniczne pod względem doświadczenia zawodowego i edukacyjnego. Pozwoli to na lepsze wykorzystanie ich dotychczasowej wiedzy i umiejętności. Pracę w grupach można wykorzystać zarówno do rozwiązywania problemów, jak i kształcenia wyprzedzającego.

– Wykład konwersatoryjny

Pobudza intelektualną aktywność uczących się. Pozwala im na uczestniczenie w odkrywaniu pojęć oraz formułowanie i dowodzenie twierdzeń matematycznych w oparciu o wcześniejszą wiedzę i/lub doświadczenie.

Proces uczenia się dorosłych warto wspierać przy użyciu technologii informacyjnych. Stała dostępność zasobów pozwalających na doskonalenie wiedzy i umiejętności online wspiera samodzielność (wybór miejsca i czasu uczenia się) oraz odpowiedzialność u uczących się.

Wiedza o kształceniu dorosłych była jedną z podstaw tworzenia systemu Planowania – Osiągania – Potwierdzania Efektów Uczenia się i jego pilotażowego wdrożenia. **Nazwano go w dalszej części systemem walidacji efektów uczenia się.**

5.2. Opis badania

Na podstawie analizy kilkunastu kart przedmiotów, programów kształcenia, przykładowych kolokwii i egzaminów w zakresie matematyki na szóstym Poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji zostały sklasyfikowane najważniejsze i najczęściej powtarzające się efekty uczenia się. Należy zauważyć, że w zakresie doboru uszczegółowionych efektów uczenia się w obszarze matematyki polskie uczelnie posiadają autonomię.

Badany materiał pochodził z Politechniki Łódzkiej, Politechniki Gdańskiej, Politechniki Warszawskiej i Politechniki Wrocławskiej oraz Akademii Górniczo-Hutniczej z Krakowa.

„Wypracowując koncepcję edukacji matematycznej wygodnie kierować się schematem, opisującym główne składowe procesy nauczania. Szukamy odpowiedzi na pytania:

- Czego uczyć ?

Należy ustalić system celów kształcenia oraz treści nauczania w zestawieniu ze standardami kształcenia oraz charakterystyką sylwetki absolwenta.

- Kogo uczyć?

Konfrontujemy rzeczywiste umiejętności studentów z tymi, które powinni nabyć.

- Jak uczyć?

Dobieramy takie postępowanie dydaktyczne wraz z obudową metodyczną, które jest najbardziej korzystne dla wyzwalań pożądanych aktywności matematycznych (wypracowujemy tzw. dydaktyczną filozofię matematyki dla geodetów).

- **Jakie zakładamy efekty?**

Należy zakreślić konieczne efekty nauczania, osiągnięcia studentów oraz sposoby diagnozowania rezultatów kształcenia”²⁷⁰.

Poglądy osób realizujących przedmiot Matematyka, na temat zakresu oraz doboru materiału, są dość zróżnicowane. Nie rzadko zdarza się, że poszerzają one treści, a także wykładają je językiem struktur na znacznie podwyższonym poziomie ogólności²⁷¹.

Zbudowano system walidacji efektów uczenia się oraz został on zaimplementowany w postaci zadań generatorowych (rozdział 5.3.). Opracowano zasady przeprowadzenia egzaminu/zaliczenia (walidacji efektów uczenia się)²⁷²:

- Student może przystąpić do egzaminu w trzech terminach.
- W każdym terminie student ma dostęp do wszystkich zadań.
- Jeśli zadanie zostało pozytywnie rozwiązane, to student w kolejnym terminie rozwiązuje tylko te zadania, których wcześniej nie rozwiązał lub rozwiązał z oceną negatywną.
- Jeśli student w trzech terminach uzyskał pozytywne oceny ze wszystkich zadań, otrzymuje kwalifikację z matematyki na Szóstym Poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji.
- W przypadku zadania niezaliczonego w formie elektronicznej dopuszcza się, aby egzaminator przeprowadził inną formę walidacji efektu uczenia się, np. odpowiedź ustna.

Refleksja przed skonstruowaniem systemu walidacji efektów uczenia się

1. Czy skonstruowane i osiągnięte przez studentów efekty uczenia się są w mojej ocenie wystarczające dla danego poziomu Polskiej Ramy Kwalifikacji i kierunku studiów?
2. Czy nie zostały pominięte efekty uczenia się, które są ważne w dalszym procesie nauczania?
3. Czy wśród zaproponowanych efektów uczenia się znajdują się takie, które należy usunąć lub zmodyfikować lub należy wprowadzić zmiany w procesie nauczania?
4. Czy nauczyciele, uczelnie, instytucje akceptują prezentowany system walidacji efektów uczenia się?
5. Czy w ocenie nauczycieli, uczelni, instytucji prezentowany system walidacji efektów uczenia się jest wiarygodny?
6. Czy system walidacji efektów uczenia się jest kompatybilny z innymi kursami na tym samym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji i wystarczający do ich realizacji?

²⁷⁰ Treliński G., *Edukacja matematyczna w systemie kształcenia studentów kierunku geodezja i kartografia*, Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 35-36, 89-114, 2011, s. 97.

²⁷¹ Tamże.

²⁷² Opracowanie własne.

5.3. System walidacji efektów uczenia się

System walidacji efektów uczenia się w zakresie matematyki na szóstym poziomie ram kwalifikacji (dla pierwszego semestru kierunków inżynierskich).

Przedmiot: Algebra z geometrią analityczną

Efekt uczenia się: Wykonuje obliczenia na liczbach zespolonych.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 1

Dane są liczby zespolone $z_1 = -5 + 14i$, $z_2 = -4 + i$. Oblicz $\frac{z_1}{z_2}$.

Odp. $\frac{z_1}{z_2} = \boxed{} + \boxed{}i$.

Rys. 5.1. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Zapisuje liczbę w postaci trygonometrycznej.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 2

Zapisz liczbę $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ w postaci trygonometrycznej.

Odp.

$z = \boxed{} (\cos \boxed{}^\circ + i \sin \boxed{}^\circ)$.

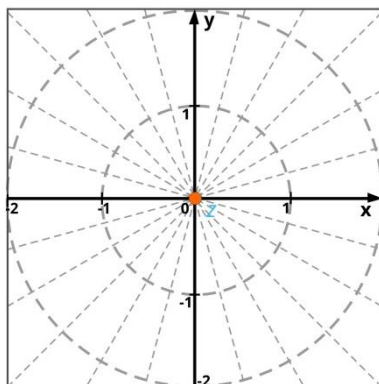
Rys. 5.2. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Prezentuje liczbę zespoloną w postaci graficznej.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 3

Przedstaw graficznie liczbę $(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)^5$.



Rys. 5.3. Zadanie 3

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Rozwiązuje równanie kwadratowe w dziedzinie zespolonej.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 4

Rozwiąż równanie w dziedzinie zespolonej $x^2 + 4x + 13 = 0$.

Odp. $x_1 = \boxed{} + \boxed{}i$, $x_2 = \boxed{} - 3i$.

Rys. 5.4. Zadanie 4

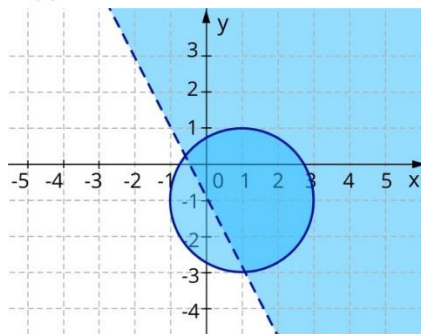
Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Opisuje zbiory na płaszczyźnie zespolonej.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 5

Uzupełnij, aby układ opisywał podziór płaszczyzny zespolonej zaznaczony ciemnym kolorem.

$$\begin{cases} |z - (1 - i)| \leq 2 \\ \operatorname{Im}(z) \leq -2\operatorname{Re}(z) - 1. \end{cases}$$



Rys. 5.5. Zadanie 5

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wykonuje działania na macierzach.

Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 6

Oblicz $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}.$

Rys. 5.6. Zadanie 6

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Oblicza wyznacznik macierzy.

Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 7

Oblicz $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \boxed{}.$

Rys. 5.7. Zadanie 7

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza macierz odwrotną.
Pomiar efektów uczenia się.

Exercise 8

Oblicz $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}.$

Rys. 5.8. Zadanie 8
Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Rozwiązuje równanie macierzowe.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 9

Rozwiąż równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

Odp. $X = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix}.$

Rys. 5.9. Zadanie 9
Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Rozwiązuje układ równań liniowych metodą macierzy odwrotnej.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 10

Rozwiąż układ $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -3x - 7y = 2 \end{cases}$ metodą macierzy odwrotnej.

Odp. $A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{bmatrix},$

$\begin{cases} x = \boxed{} \\ y = \boxed{} \end{cases}.$

Rys. 5.10. Zadanie 10
Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Rozwiązuje układ równań liniowych metodą Cramera.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 11

Rozwiąż układ Cramera $\begin{cases} -x + 2y + z = 5 \\ 3y - 2z = 10 \\ 4z = -8 \end{cases}$ metodą wyznaczników.

Odp. $W_g = \begin{vmatrix} \boxed{} & 2 & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ 0 & \boxed{} & 4 \end{vmatrix} = \boxed{}, W_x = \boxed{}, W_y = \boxed{}, W_z = \boxed{},$

$\begin{cases} x = \boxed{} \\ y = \boxed{} \\ z = \boxed{} \end{cases}.$

Rys. 5.11. Zadanie 11

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Konstruuje układ równań liniowych niekramerowski.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 12

Uzupełnij, aby rozwiązaniem układu

$\begin{cases} x - 2y - 3z = 3 \\ -3x + \boxed{}y + 9z = \boxed{} \end{cases}$

był zbiór pusty.

Rys. 5.12. Zadanie 12

Źródło: opracowanie własne.

Efekty uczenia się: wyznacza równanie prostej, płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej, interpretuje położenie prostych i płaszczyzn w przestrzeni trójwymiarowej, wyznacza kąty, odległości, objętości w przestrzeni trójwymiarowej, wyznacza kąty, odległości, objętości figur w przestrzeni trójwymiarowej.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 13

Dane są punkty $A = (-3, 1, 3)$, $B = (-2, 3, -1)$, $C = (-2, 3, 3)$,
 $D = (-2, 1, 3)$.

a) Wyznacz równanie prostej L_{AB} przechodzącej przez punkty A i B .

Odp.

$$\begin{cases} x(t) = -3 + t \\ y(t) = \boxed{} + \boxed{} \cdot t. \\ z(t) = \boxed{} + \boxed{} \cdot t \end{cases}$$

b) Napisz równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez punkt C i równoległej do prostej L_{AB} .

Odp.

$$\frac{x+2}{\boxed{}} = \frac{y-\boxed{}}{2} = \frac{z-\boxed{}}{\boxed{}}.$$

c) Wyznacz równanie płaszczyzny Π_{ABC} przechodzącej przez punkty A , B i C

Odp. $\boxed{} \cdot x + \boxed{} \cdot y + 0 \cdot z + \boxed{} = 0.$

d) Wyznacz odległość punktu D od płaszczyzny Π_{ABC}

Odp. $d(D, \Pi_{ABC}) = \boxed{}.$

e) Wyznacz równanie prostej L prostopadłej do płaszczyzny Π_{ABC} przechodzącej przez punkt D

Odp.

$$\begin{cases} x(t) = \boxed{} + \boxed{} \cdot t \\ y(t) = 1 + \boxed{} \cdot t. \\ z(t) = 3 + 0 \cdot t \end{cases}$$

f) Wyznacz pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Odp. $P = \boxed{}.$

g) Wyznacz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{AD}$.

Odp. $V = \boxed{}.$

h) Wyznacz kąt między wektorem $\overrightarrow{AD}$ i wektorem $u = [3, 3\sqrt{3}, 0]$.

Odp. $\angle(\overrightarrow{AD}, \vec{u}) = \boxed{}^\circ.$

Rys. 5.13. Zadanie 13

Źródło: opracowanie własne.

Przedmiot: Analiza matematyczna

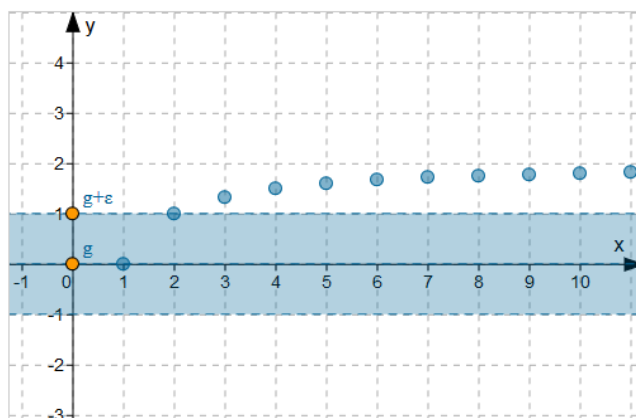
Efekt uczenia się: Interpretuje definicję granicy ciągu.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 1

Podaj interpretację geometryczną granicy ciągu $a_n = \frac{2n-2}{n}$.

Uzupełnij: Przyjmijmy, że granica $g = \square$. Niech $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Zauważmy, że istnieje takie $k = \square$, że dla dowolnego $n > k$ spełniona jest nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$. (Dodatkowo, nierówność dla $k - 1$ jest fałszywa.)



Rys. 5.14. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza granicę ciągu.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 2

Wyznacz granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+3}\right)^{3n-1}$.

Odp. .

Rys. 5.15. Zadanie 2

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Bada zbieżność szeregu liczbowego.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 3

Uzupełnij. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n^3+4}$ jest na mocy kryterium porównawczego, ponieważ

$\frac{2n+5}{3n^3+4} \leq \frac{\text{ } n}{\text{ } n^3} = \text{ } n \text{ } \text{ }.$

Rys. 5.16. Zadanie 3

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Określa zbieżność szeregu liczbowego.
Pomiar efektu uczenia.

Exercise 4

Czy szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ jest zbieżny?

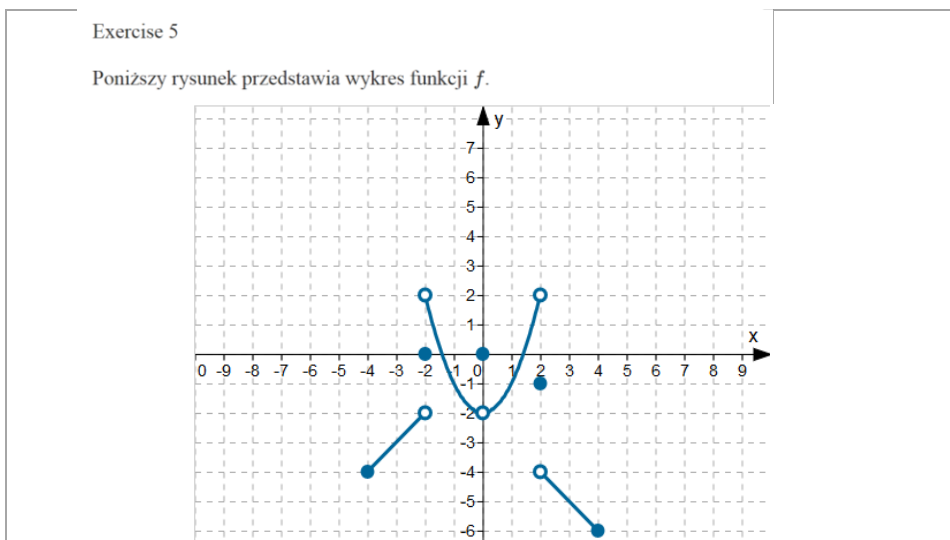
☐ Tak

☐ Nie

Rys. 5.17. Zadanie 4

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Odczytuje granice funkcji na podstawie jej wykresu.
Pomiar efektu uczenia się.



Na podstawie wykresu, uzupełnij:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \square$,

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \square$,

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \square$,

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \square$,

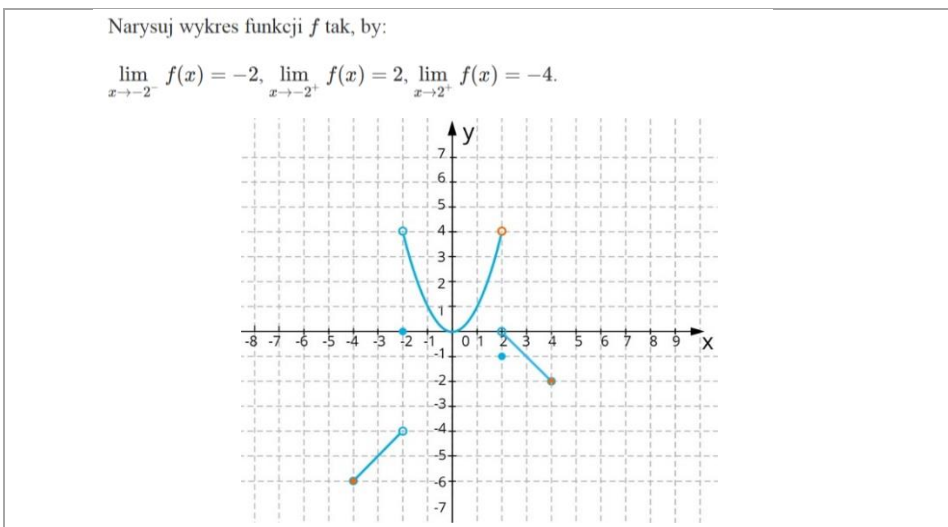
$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$.

Rys. 5.18. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Konstruuje wykres funkcji na podstawie granic funkcji w wybranych punktach.

Pomiar efektu uczenia się.



Rys. 5.19. Zadanie 6

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza granicę funkcji w punkcie.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 7

Wyznacz granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{-4x^3+2x-3}{-x+2}\right)$.

Odp. $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{-4x^3+2x-3}{-x+2}\right) =$.

Rys. 5.20. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Konstruuje wzór funkcji ciągłej.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 8

Uzupełnij, aby funkcja f była ciągła w punkcie $x_0 = -3$.

$$\begin{cases} x^2 + \boxed{} & x > -3 \\ \boxed{} & x = -3 \\ -3x + 2 & x < -3 \end{cases}$$

Rys. 5.21. Zadanie 8

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza asymptoty funkcji.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 9

Wyznacz asymptoty dla funkcji $f(x) = \frac{2x^2+4x-6}{x^2-1}$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Odp. $x =$, $y =$.

Rys. 5.22. Zadanie 9

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza pochodną funkcji na podstawie definicji.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 10

Uzupełnij. Niech $f(x) = -2x^2 + 3x + 1$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (\boxed{} x + \boxed{} h + \boxed{}) = \boxed{} x + \boxed{}.$$

Rys. 5.23. Zadanie 10

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Oblicza pochodną funkcji.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 11

Oblicz pochodną funkcji $f(x) = -\sin(x) + 3\operatorname{ctg}(x) - 2x^2 + e^x - 3\ln(x)$ dla $x > 0$.

Odp. $f'(x) = \boxed{} \sin(x) + \boxed{} \cos(x) + \frac{\boxed{}}{\sin^2(x)} + \frac{\boxed{}}{\cos^2(x)} + \boxed{} x^{\boxed{}} + \boxed{} e^x + \frac{\boxed{}}{x}.$

Rys. 5.24. Zadanie 11

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Analizuje funkcję (monotoniczność, wypukłość, ekstrema, punkty przegięcia).
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 12

Niech $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x + 12$.

Uzupełnij. Funkcja f

- a) posiada minimum dla $x = \boxed{}$,
- b) posiada maksimum dla $x = \boxed{}$,
- c) jest w przedziałach $(-\infty, \boxed{})$, $(\boxed{}, \infty)$,
- d) jest w przedziale $(\boxed{}, \boxed{})$,
- e) posiada punkt przegięcia dla $x = \boxed{}$,
- f) jest w przedziale $(-\infty, \boxed{})$,
- g) jest w przedziale $(\boxed{}, \infty)$.

Rys. 5.25. Zadanie 12

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza styczną do wykresu funkcji.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 13

Wyznacz styczną do wykresu funkcji $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ w punkcie $x = -1$.

Odp. $y = \boxed{}x + \boxed{}$.

Rys. 5.26. Zadanie 13

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza promień zbieżności szeregu potęgowego.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 14

Wyznacz promień zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$.

Odp. $R = \boxed{}$.

Rys. 5.27. Zadanie 14

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Oblicza całkę, stosując wzór całkowania przez części.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 15

Uzupełnij.

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \frac{1}{\boxed{}} \cos \boxed{} x + c$$

Rys. 5.28. Zadanie 15

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Oblicza całkę, stosując wzór przez podstawienie.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 16

Uzupełnij:

$$\int (3x^2 - x + 1)^3 (6x - 1) dx = \frac{1}{\boxed{}} \left(\boxed{} x^{\boxed{}} + \boxed{} x + 1 \right)^{\boxed{}} + c$$

Rys. 5.29. Zadanie 16

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Oblicza całkę niewłaściwą
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 17

Oblicz.

$$\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx = \boxed{}.$$

Rys. 5.30. Zadanie 17

Źródło: opracowanie własne.

Efekt uczenia się: Wyznacza długość krzywej za pomocą całki.
Pomiar efektu uczenia się.

Exercise 18

Wyznacz długość krzywej $y = 2 \cdot \sqrt{1 - (x - 2)^2}$, $x \in [2, 3]$.

Odpowiedź: $l = \boxed{} \cdot \pi$

Rys. 5.31. Zadanie 1

Źródło: opracowanie własne.

5.4. Badania część IIa

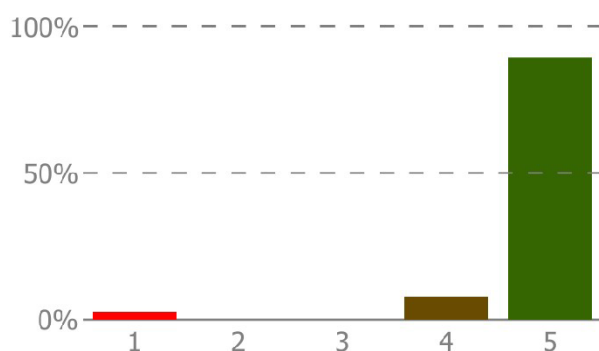
Opis badania

Badanie rozpoczęło się w październiku 2017 roku. Losowo wybrano pięć grup (112 studentów), dla których przeprowadzono elektroniczny system walidacji efektów uczenia się.

Losowo wybrano grupę w celu przeprowadzenia studenckiej ankiety ewaluacyjnej²⁷³ – oceny prowadzenia zajęć, którą wypełniło 38 studentów. Ankieta składała się z:

- 16 pytań ocenianych na 5-stopniowej skali Likerta,
- 2 pytań otwartych.

Ankieta potwierdziła skuteczność zaproponowanej walidacji efektów uczenia się. Poniżej zaprezentowano rozkład procentowy odpowiedzi na pytania dotyczące weryfikacji efektów uczenia się²⁷⁴ oraz oceniania.

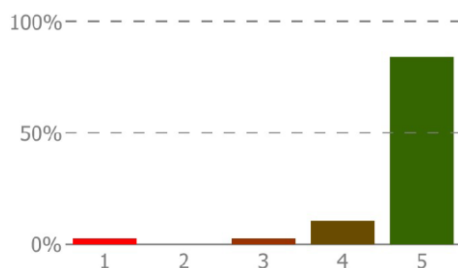


Wykres 5.1. ...zostałeś(aś) poinformowany(a) o metodach i kryteriach weryfikacji efektów kształcenia oraz wystawiania ocen?

Źródło: studencka ankieta ewaluacyjna – ocena prowadzenia zajęć. Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki PŁ.

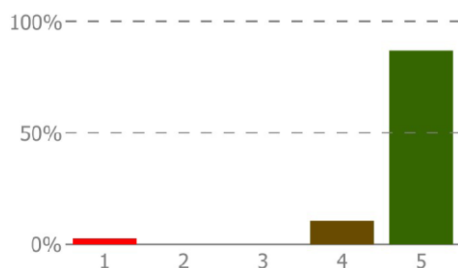
²⁷³ Uchwała Senatu PŁ z dnia 16 grudnia 2015 r. w sprawie ankietyzacji procesu kształcenia i hospitacji zajęć dydaktycznych, prowadzący zajęcia Jacek Stańdo, ankietyzacja na zlecenie dziekana wydziału.

²⁷⁴ W tytułach wykresów zgodnie z oryginałem używany jest termin efekty kształcenia.



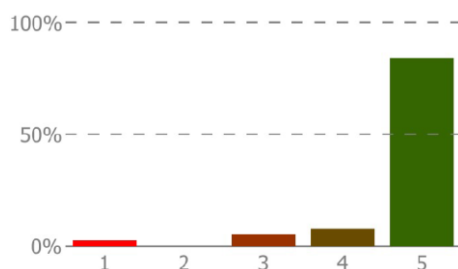
Wykres 5.2. ...realizowane treści przedmiotu były zgodne z tym, co przedstawiono na początku zajęć?

Źródło: studencka ankieta ewaluacyjna – ocena prowadzenia zajęć. Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki PŁ.



Wykres 5.3. ...ocenianie studentów dokonywane było zgodnie z przedstawionymi na początku zajęć metodami i kryteriami weryfikacji efektów kształcenia?

Źródło: studencka ankieta ewaluacyjna – ocena prowadzenia zajęć. Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki PŁ.



Wykres 5.4. ...ocenianie studentów dokonywane było obiektywnie?

Źródło: studencka ankieta ewaluacyjna – ocena prowadzenia zajęć. Wydział Elektrotechniki, Elektroniki, Informatyki i Automatyki PŁ.

Analizując przedstawione wykresy, należy zwrócić uwagę, że studenci docenili jasny i klarowny przekaz dotyczący wymagań, sposobu zaliczenia oraz ocenienia przedmiotu.

„Można wyodrębnić dwa podstawowe warunki, które muszą być spełnione, by uczeń chciał uczyć się matematyki:

- motywacja (w sensie Milana Hejny’ego) rozumiana jako pewien dyskomfort między tym, że czegoś nie wiemy, a chcemy wiedzieć,
- poczucie realności sukcesu”²⁷⁵.

Wśród pytań otwartych jedno dotyczyło sposobu prowadzenia zajęć (zaliczenia). Odpowiedzi udzieliło 19 studentów, jeden z nich sugerował zwiększenie wymagań, pozostali nie chcą dokonywać żadnych zmian.

5.5. Badanie wdrożenia

Opis badania

W kolejnym roku akademickim (2018/19) przeprowadzono ankietę dedykowaną ocenie systemu walidacji efektów uczenia się, którego prototyp został wdrożony rok wcześniej. Do badań ankietowych zastosowano skalę Likerta, która jest najczęściej stosowanym narzędziem do pomiaru postaw. Jest to skala pięciostopniowa, która pozwala wykryć nawet małe różnice²⁷⁶.

Opis kursów

Liczba godzin i treści nauczania:

- Analiza matematyczna: 30 godzin. Granica ciągu, szeregi liczbowe, granica funkcji, pochodna i jej zastosowania, całka oznaczona i nieoznaczona funkcji jednej zmiennej.
- Algebra liniowa z geometrią analityczną: 30 godzin. Liczby zespolone, macierze, układy równań liniowych, geometria przestrzenna.

Zagrożenia podczas walidacji efektów uczenia się

Problem 1. Zakłada się, że wszystkie (obligatoryjne) efekty uczenia się muszą być osiągnięte. Liczba wszystkich efektów uczenia się dla przedmiotów: analiza matematyczna i algebra liniowa z geometrią analityczną łącznie wynosi 31. Wiadomo, że w przypadku nieosiągnięcia chociaż jednego z efektów student nie otrzymuje zaliczenia przedmiotu.

²⁷⁵ Pawlak R., *Dobór treści matematycznych w nauczaniu szkolnym*, Wiadomości Matematyczne 46 (2) 2010, ss. 202-203.

²⁷⁶ Węziak-Białowolska D., *Operacjonalizacja i skalowanie w ilościowych badaniach społecznych*, Zeszyty Naukowe Instytutu Statystyki i Demografii SGH, nr 16, 2011, s. 21.

Zapobieganie – możliwość dodatkowej ustnej odpowiedzi.

Problem 2. Efekty uczenia się ograniczają indywidualizację nauczania.

Zapobieganie – proces uczenia się zakłada zdefiniowanie oprócz obligatoryjnych efektów uczenia się również poziomujących obligatoryjnych efektów uczenia się oraz rozszerzonych poziomujących efektów uczenia (Rys. 3.53), student uzyskuje możliwość uzyskania oceny dobrej i bardzo dobrej.

Problem 3. Warunki techniczne przeprowadzania walidacji, np. zawieszenie się systemu, błąd w sieci komputerowej, przerwa w zasilaniu itp.

Zapobieganie – istnieje możliwość wygenerowania testów i ich wydrukowania.

5.6. Badanie część IIb

Kwestionariusz ankiety wypełniło łącznie 123 studentów, w tym:

- 96 studentów studiów stacjonarnych:
 - 62 miało zaliczenie tylko z jednego przedmiotu z wykorzystaniem systemu elektronicznego – grupa AB,
 - 34 miało zaliczenie z dwóch przedmiotów w ramach kursu matematyki z wykorzystaniem systemu elektronicznego – grupa C,
- 27 studentów studiów niestacjonarnych miało zaliczenie tylko z jednego przedmiotu z wykorzystaniem systemu elektronicznego – grupa AB.

Narzędziem badania był opracowany na podstawie literatury przedmiotu autorski kwestionariusz ankiety, składający się z 24 pytań dotyczących opinii i oczekiwań w stosunku do zaproponowanego sposobu walidacji efektów uczenia się oraz formuły przeprowadzenia egzaminu/zaliczenia. Kwestionariusz zawierał 6 pytań otwartych, 8 pytań, gdzie odpowiedź oceniano na 5-stopniowej skali Likerta, oraz 7 pytań, gdzie odpowiedź oceniano na 4-stopniowej skali Likerta, (Tabela 5.1).

Tabela 5.1. Skala Likerta dla kwestionariusza

Skale					
5-stopniowa	1	2	3	4	5
4-stopniowa	Zdecydowanie zgadzam się				
	Zgadzam się				
	Nie zgadzam się				
	Zdecydowanie nie zgadzam się				

Źródło: opracowanie własne na podstawie literatury.

Metody analizy statystycznej

Dane z kwestionariusza ankietowego zostały zakodowane i wprowadzone do programu Excel i Statistica. W analizie statystycznej danych zastosowano następujące miary: wskaźniki struktury – frakcje (w przypadku gdy analizowana zbiorowość liczyła mniej niż 100 osób) lub odsetki (w przypadku gdy analizowana zbiorowość liczyła więcej niż 100 osób), miary położenia dla cech mierzalnych – średnia arytmetyczna. W pracy zastosowano metody wnioskowania statystycznego: test dla dwóch średnich oraz test dla dwóch wskaźników struktury (frakcji) do analiz badanych zmiennych.

W celu zweryfikowania założonych w badaniu hipotez statystycznych wykorzystano także nieparametryczny test U Manna-Whitneya²⁷⁷, mający zastosowanie do sprawdzenia hipotezy, że dwie zmienne niezależne (których pomiar dokonywany jest co najmniej na skali porządkowej) pochodzą z tej samej populacji i mają taki sam rozkład, czyli czy porównywane mediany w obu grupach są takie same.

Weryfikacji postawionych hipotez dokonywano na poziomie istotności $p < 0,05$ ²⁷⁸.

W celu zweryfikowania założonych w badaniu hipotez statystycznych wykorzystano test dla dwóch wskaźników struktury (frakcji)²⁷⁹. W badaniu wykorzystano ankiety studentów z grup AB i grupy C.

Analiza hipotezy: H^1

Pytanie ankietowe nr 7

Hipotezy: H^{10}

Okazało się, że w badanej grupie 122 studentów z grupy ABC (p_1) zgadza się ze stwierdzeniem: „Sposób przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że chętniej przystępuje do uczenia się”, a 1 student z grupy ABC (p_2) nie zgadza się z tym stwierdzeniem. Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.2).

²⁷⁷ Domański C., *Testy statystyczne*, PWN, Warszawa 1990, s. 144.

²⁷⁸ W opracowaniu danych przyjęto umowne oznaczenia: dla $p < 0,05$ – wynik testu istotny statystycznie, $p < 0,01$ – wynik testu wysoce istotny statystycznie oraz $p < 0,001$ – wynik testu bardzo wysoce istotny statystycznie.

²⁷⁹ Domański C., *Testy statystyczne*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1990, ss. 122-123.

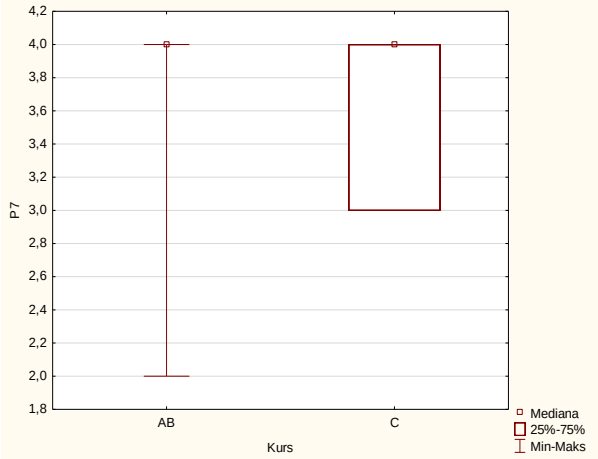
Tabela 5.2. Wyniki testu dla dwóch wskaźników struktury (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{10}: p_1 = p_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{10}: p_1 > p_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu
Sposób przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że chętniej przystępuje do uczenia się	15,429	0,05	1,645	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla dwóch wskaźników struktury potwierdza istotnie statystycznie większy odsetek studentów zgadzających się ze stwierdzeniem: „Sposób przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że chętniej przystępuje do uczenia się”, w porównaniu do niezgadzających się z tym stwierdzeniem.

Badano studentów z grupy AB (M_1) oraz C (M_2) ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Sposób przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że chętniej przystępuje do uczenia się”. Wyniki zaprezentowano poniżej (Wykres 5.5 oraz Tabela 5.3).



Wykres 5.5. Pytanie 7

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Statistica.

Tabela 5.3. Wyniki testu U Manna-Whitneya (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{10}: M_1 = M_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{10}: M_1 \neq M_2$)

Badane cechy	Wartość empiryczna statystyki Z	Mediana	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki Z_α	Poziom p dla testu
Stopień zgodności w grupie AB		4			
	0,809		0,05	1,960	0,418
Stopień zgodności w grupie C		4			

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu U Manna-Whitneya potwierdza, że nie ma istotnie statystycznej różnicy pomiędzy medianami ocen studentów z grup AB oraz C ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Sposób przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że chętniej przystępuje do uczenia się”, co oznacza, że studenci nie różnią się w odpowiedziach na to pytanie.

Pytanie ankietowe nr 8

Hipotezy: H^{11}

W badanej grupie 120 studentów z grupy ABC (p_1) zgadza się ze stwierdzeniem: „Przeprowadzenie egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że jest on mniej stresujący niż w tradycyjnej formie”, a 3 studentów z grupy ABC (p_2) nie zgadza się z tym stwierdzeniem. Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.4).

Tabela 5.4. Wyniki testu dla dwóch wskaźników struktury (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{11}: p_1 = p_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{11}: p_1 > p_2$)

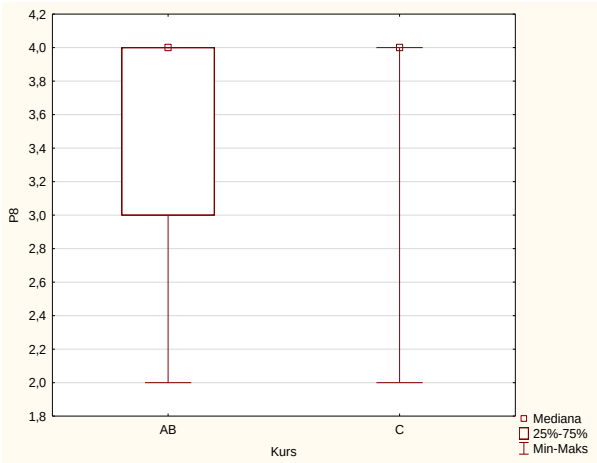
Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu
Sposób przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że jest on mniej stresujący niż w tradycyjnej formie	14,919	0,05	1,645	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla dwóch wskaźników struktury potwierdza istotnie statystycznie większy odsetek studentów zgadzających się ze stwierdzeniem: „Przeprowadzenie egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że jest on mniej stresujący niż w tradycyjnej formie”, w porównaniu do niezgadzących się z tym stwierdzeniem.

Badano studentów z grupy AB (M_1) oraz C (M_2) ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Przeprowadzenie egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że jest on mniej stresujący niż w tradycyjnej formie”.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Wykres 5.6 oraz Tabela 5.5).



Wykres 5.6. Pytanie 8

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Statistica.

Tabela 5.5. Wyniki testu U Manna-Whitneya (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{11}: M_1 = M_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_0^{11}: M_1 \neq M_2$)

Badane cechy	Wartość empiryczna statystyki Z	Mediana	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki Z_α	Poziom p dla testu
Stopień zgodności w grupie AB	-0,801	4	0,05	1,960	0,423
Stopień zgodności w grupie C		4			

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu U Manna-Whitneya potwierdza, że nie ma istotnie statystycznej różnicy pomiędzy medianami ocen studentów z grup AB oraz C ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Przeprowadzenie egzaminu (zaliczenia) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze sprawia, że jest on mniej stresujący niż w tradycyjnej formie”, co oznacza, że studenci nie różnią się w odpowiedziach na to pytanie.

Pytanie ankietowe nr 9

Hipotezy: H^{12}

Okazało się, że badanej grupie 120 studentów z grupy ABC (p_1) zgadza się ze stwierdzeniem: „Dobrym pomysłem jest brak konieczności powtórnego rozwiązywania zadań z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze, które zostały poprawnie zweryfikowane we wcześniejszych terminach”, a 3 studentów z grupy ABC (p_2) nie zgadza się z tym stwierdzeniem. Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.6).

Tabela 5.6. Wyniki testu dla dwóch wskaźników struktury (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{12}: p_1 = p_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{12}: p_1 > p_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu
Dobrym pomysłem jest brak konieczności powtórnego rozwiązywania zadań z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze, które zostały poprawnie zweryfikowane we wcześniejszych terminach	14,919	0,05	1,645	0,0001

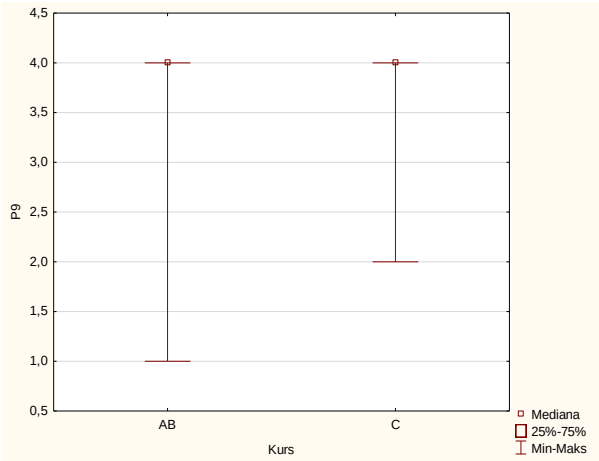
Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla dwóch wskaźników struktury potwierdza istotnie statystycznie większy odsetek studentów zgadzających się ze stwierdzeniem: „Dobrym pomysłem jest brak konieczności powtórnego rozwiązywania zadań z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze, które zostały poprawnie zweryfikowane we wcześniejszych terminach”, w porównaniu do niezgadzających się z tym stwierdzeniem.

Badano studentów z grupy AB (M_1) oraz C (M_2) ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Dobrym pomysłem jest brak konieczności powtórnego rozwiązywania zadań z algebry z geometrią analityczną lub analizy

matematycznej przy komputerze, które zostały poprawnie zweryfikowane we wcześniejszych terminach”.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Wykres 5.7 oraz Tabela 5.7).



Wykres 5.7. Pytanie 9

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Statistica.

Tabela 5.7. Wyniki testu U Manna-Whitneya (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{12}: M_1 = M_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{12}: M_1 \neq M_2$)

Badane cechy	Wartość empiryczna statystyki Z	Mediana	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki Z_α	Poziom p dla testu
Stopień zgodności w grupie AB	0,720	4	0,05	1,960	0,472
Stopień zgodności w grupie C		4			

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu U Manna-Whitneya potwierdza, że nie ma istotnie statystycznej różnicy pomiędzy medianami ocen studentów z grup AB oraz C ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Dobrym pomysłem jest brak konieczności powtórznego rozwiązywania zadań z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze, które zostały poprawnie zweryfikowane we wcześniejszych terminach”, co oznacza, że studenci nie różnią się w odpowiedziach na to pytanie.

Pytanie ankietowe nr 10

Hipotezy: H^{13}

Okazało się, że w badanej grupie 113 studentów z grupy ABC (p_1) zgadza się ze stwierdzeniem: „Forma egzaminu (zaliczenia) przy komputerze może przyczynić się do zmniejszenia zjawiska korepetycji”, a 10 studentów z grupy ABC (p_2) nie zgadza się z tym stwierdzeniem.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.8).

Tabela 5.8. Wyniki testu dla dwóch wskaźników struktury (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{13}: p_1 = p_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{13}: p_1 > p_2$)

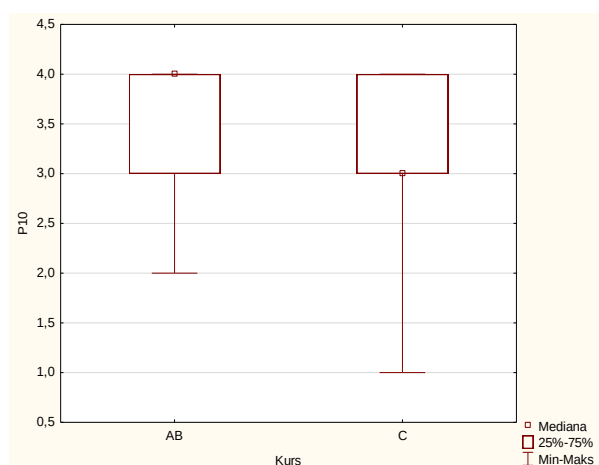
Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu
Forma egzaminu (zaliczenia) przy komputerze może przyczynić się do zmniejszenia zjawiska korepetycji	13,134	0,05	1,645	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla dwóch wskaźników struktury potwierdza istotnie statystycznie większy odsetek studentów zgadzających się ze stwierdzeniem: „Forma egzaminu (zaliczenia) przy komputerze może przyczynić się do zmniejszenia zjawiska korepetycji”, w porównaniu do niezgadzających się z tym stwierdzeniem.

Badano studentów z grupy AB (M_1) oraz C (M_2) ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Forma egzaminu (zaliczenia) przy komputerze może przyczynić się do zmniejszenia zjawiska korepetycji”.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Wykres 5.8 oraz Tabela 5.9).



Wykres 5.8. Pytanie 10

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Statistica.

Tabela 5.9. Wyniki testu U Manna-Whitneya (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{13}: M_1 = M_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{13}: M_1 \neq M_2$)

Badane cechy	Wartość empiryczna statystyki Z	Mediana	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki Z_α	Poziom p dla testu
Stopień zgodności w grupie AB	0,892	4	0,05	1,960	0,372
Stopień zgodności w grupie C		3			

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu U Manna-Whitneya potwierdza, że nie ma istotnie statystycznej różnicy pomiędzy medianami ocen studentów z grup AB oraz C ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Forma egzaminu (zaliczenia) przy komputerze może przyczynić się do zmniejszenia zjawiska korepetycji”, co oznacza, że studenci nie różnią się w odpowiedziach na to pytanie.

Pytanie ankietowe nr 14

Hipotezy: H^{14}

Okazało się, że w badanej grupie 122 studentów z grupy ABC (p_1) zgadza się ze stwierdzeniem: „Wcześniejsza znajomość zagadnień (efektów uczenia się), które będą oceniane na egzaminie (zaliczeniu) z algebry z geometrią analityczną

lub analizy matematycznej pomogła mi w uczeniu się”, a 1 student z grupy ABC (p_2) nie zgadza się z tym stwierdzeniem.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.10).

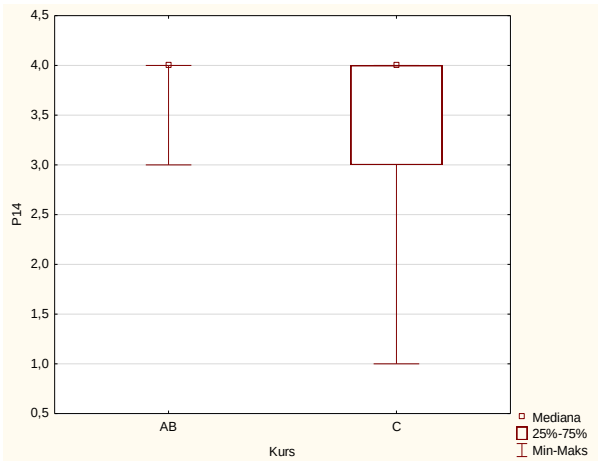
Tabela 5.10. Wyniki testu dla dwóch wskaźników struktury (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{14}: p_1 = p_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{14}: p_1 > p_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu
Wcześniejsza znajomość zagadnień (efektów uczenia się), które będą oceniane na egzaminie (zaliczeniu) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej pomogła mi w uczeniu się.	15,429	0,05	1,645	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla dwóch wskaźników struktury potwierdza istotnie statystycznie większy odsetek studentów zgadzających się ze stwierdzeniem: „Wcześniejsza znajomość zagadnień (efektów uczenia się), które będą oceniane na egzaminie (zaliczeniu) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej pomogła mi w uczeniu się”, w porównaniu do niezgadających się z tym stwierdzeniem.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Wykres 5.9 oraz Tabela 5.11).



Wykres 5.9. Pytanie 14

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Statistica.

Tabela 5.11. Wyniki testu U Manna-Whitneya (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{14}: M_1 = M_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{14}: M_1 \neq M_2$)

Badane cechy	Wartość empiryczna statystyki Z	Mediana	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki Z_α	Poziom p dla testu
Stopień zgodności w grupie AB	1,947	4	0,05	1,960	0,015
Stopień zgodności w grupie C		3			

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu U Manna-Whitneya potwierdza, potwierdza istotnie statystyczną różnicę pomiędzy medianami studentów z grup AB oraz C ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Wcześniejsza znajomość zagadnień (efektów uczenia się), które będą oceniane na egzaminie (zaliczeniu) z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej pomogła mi w uczeniu się”, co oznacza, że studenci różnią się w odpowiedziach na to pytanie.

Pytanie ankietowe nr 17

Hipotezy: H^{15}

Okazało się, że w badanej grupie 122 studentów z grupy ABC (p_1) zgadza się ze stwierdzeniem: „Możliwość przećwiczenia przykładowych zadań egzaminacyjnych przy komputerze w trakcie semestru (przed przystąpieniem do zaliczenia/egzaminu) daje poczucie bezpieczeństwa, ponieważ zwiększa możliwość uzyskania pozytywnego wyniku”, a 1 student z grupy ABC (p_2) nie zgadza się z tym stwierdzeniem.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.12).

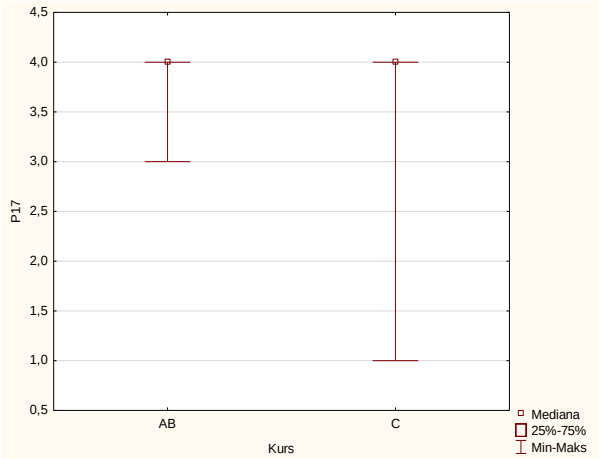
Tabela 5.12. Wyniki testu dla dwóch wskaźników struktury (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{15}: p_1 = p_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{15}: p_1 > p_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu
Możliwość przećwiczenia przykładowych zadań egzaminacyjnych przy komputerze w trakcie semestru (przed przystąpieniem do zaliczenia egzaminu) daje poczucia bezpieczeństwa, ponieważ zwiększa możliwość uzyskania pozytywnego wyniku	15,429	0,05	1,645	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla dwóch wskaźników struktury potwierdza istotnie statystycznie większy odsetek studentów zgadzających się ze stwierdzeniem: „Możliwość przećwiczenia przykładowych zadań egzaminacyjnych przy komputerze w trakcie semestru (przed przystąpieniem do zaliczenia/egzaminu) daje poczucia bezpieczeństwa, ponieważ zwiększa możliwość uzyskania pozytywnego wyniku”, w porównaniu do niezgadających się z tym stwierdzeniem.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Wykres 5.10 oraz Tabela 5.13).



Wykres 5.10. Pytanie 17

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Statistica.

Tabela 5.13. Wyniki testu U Manna-Whitneya (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{15}: M_1 = M_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_0^{15}: M_1 \neq M_2$)

Badane cechy	Wartość empiryczna statystyki Z	Mediana	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki Z_α	Poziom pp dla testu
Stopień zgodności w grupie AB	1,412	4	0,05	1,960	0,158
Stopień zgodności w grupie C		4			

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu U Manna-Whitneya potwierdza, że nie ma istotnie statystycznej różnicy pomiędzy medianami ocen studentów z grup AB oraz C ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Możliwość przećwiczenia przykładowych zadań egzaminacyjnych przy komputerze w trakcie semestru (przed przystąpieniem do zaliczenia/egzaminu) daje poczucie bezpieczeństwa, ponieważ zwiększa możliwość uzyskania pozytywnego wyniku”, co oznacza, że studenci nie różnią się w odpowiedziach na to pytanie.

Pytanie ankietowe nr 19

Hipotezy: H^{16}

Okazało się, że w badanej grupie 120 studentów z grupy ABC (p_1) zgadza się ze stwierdzeniem: „Zastosowanie formuły egzaminu przy komputerze skraca czas przygotowania się do egzaminu (zaliczenia), ponieważ dokładnie wiadomo, czego należy oczekiwać”, a 3 studentów z grupy ABC (p_2) nie zgadza z tym stwierdzeniem.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.14).

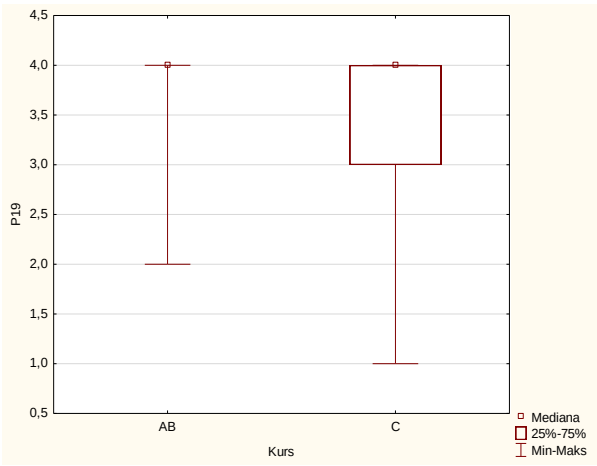
Tabela 5.14. Wyniki testu dla dwóch wskaźników struktury (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{16}: p_1 = p_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{16}: p_1 > p_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom p dla testu
Zastosowanie formuły egzaminu przy komputerze skraca czas przygotowania się do egzaminu (zaliczenia), ponieważ dokładnie wiadomo, czego należy oczekiwać.	14,919	0,05	1,645	0,0001

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu dla dwóch wskaźników struktury potwierdza istotnie statystycznie większy odsetek studentów zgadzających się ze stwierdzeniem: „Zastosowanie formuły egzaminu przy komputerze skraca czas przygotowania się do egzaminu (zaliczenia), ponieważ dokładnie wiadomo, czego należy oczekiwać”, w porównaniu do niezgadających się z tym stwierdzeniem.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.15 oraz Wykres 5.11).



Wykres 5.11. Pytanie 19

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu Statistica.

Tabela 5.15. Wyniki testu U Manna-Whitneya (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{16}: M_1 = M_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_0^{16}: M_1 \neq M_2$)

Badane cechy	Wartość empiryczna statystyki Z	Mediana	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki Z_α	Poziom p dla testu
Stopień zgodności w grupie AB	2,593	4	0,05	1,960	0,009
Stopień zgodności w grupie C		4			

Źródło: opracowanie własne.

Wynik testu U Manna-Whitneya potwierdza, potwierdza istotnie statystyczną różnicę pomiędzy medianami ocen studentów z grup AB oraz C ze względu na stopień zgodności ze stwierdzeniem: „Zastosowanie formuły egzaminu przy komputerze skraca czas przygotowania się do egzaminu (zaliczenia), ponieważ dokładnie wiadomo, czego należy oczekiwać”, co oznacza, że studenci różnią się w odpowiedziach na to pytanie.

5.7. Badania część IIc

W badaniu wykorzystano ankiety studentów z grupy AB.

Pytanie ankietowe 1 i 2

Hipoteza: H^2

W badaniu studentów z grupy AB okazało się, że „średnia ocena zgodności zadań rozwiązywanych na egzaminie (zaliczeniu) przy komputerze z kursu algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej” była wyższa od „średniej oceny zgodności zadań rozwiązywanych na egzaminie (zaliczeniu) prowadzonym w tradycyjnej formie (nie przy komputerze) z kursu algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej”.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.16).

Tabela 5.17. Wyniki testu dla dwóch średnich (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{31}: \mu_1 = \mu_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{31}: \mu_1 > \mu_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom μ dla testu
Poziom informacji na temat sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna (ocenianego przy komputerze)	10,041	0,05	1,645	0,0001
Poziom informacji na temat sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna, który był oceniany w tradycyjnej formie (nie przy komputerze)				

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki testu potwierdzają istotną statystycznie różnicę średnich. Można stwierdzić, że „średni poziom informacji na temat sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna (ocenianego przy komputerze)” jest większy od „średniego poziomu informacji na temat sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna, który był oceniany w TRADYCYJNEJ FORMIE (NIE przy komputerze)”.

Pytanie ankietowe 5 i 6

Hipoteza: H^4

W badaniu studentów z grupy AB okazało się, że „średni poziom akceptacji sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra geometrią analityczną lub analiza matematyczna (przy komputerze)” był wyższy od „średniego poziomu akceptacji sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna w TRADYCYJNEJ FORMIE (NIE przy komputerze)”.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.18).

Tabela 5.18. Wyniki testu dla dwóch średnich (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{40}: \mu_1 = \mu_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{40}: \mu_1 > \mu_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom μ dla testu
Poziom akceptacji sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna (przy komputerze)	19,963	,05	1,645	0,0001
Poziom akceptacji sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna w tradycyjnej formie (nie przy komputerze)				

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki testu potwierdzają istotną statystycznie różnicę średnich. Można stwierdzić, że „średni poziom akceptacji sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna (przy komputerze)” jest większy od „średniego poziomu akceptacji sposobu przeprowadzenia egzaminu i kryteriów oceny kursu algebra z geometrią analityczną i analiza matematyczna w TRADYCYJNEJ FORMIE (NIE przy komputerze)”.

Pytanie ankietowe 20 i 21

Hipoteza: H^5

W badaniu studentów z grupy AB okazało się, że „średni poziom akceptacji sposobu oceniania zadań na egzaminie (zaliczeniu) kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna (przy komputerze)” był wyższy od „średniego poziomu akceptacji sposobu oceniania zadań na egzaminie (zaliczeniu) kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna w TRADYCYJNEJ FORMIE (NIE przy komputerze)”.

Wyniki zaprezentowano poniżej (Tabela 5.19).

Tabela 5.19. Wyniki testu dla dwóch średnich (sprawdzana hipoteza zerowa: $H_0^{50}: \mu_1 = \mu_2$ wobec hipotezy alternatywnej: $H_1^{50}: \mu_1 > \mu_2$)

Badana cecha	Wartość empiryczna statystyki U	Poziom istotności α	Wartość krytyczna statystyki U_α	Poziom μ dla testu
Poziom akceptacji sposobu oceniania zadań na egzaminie (zaliczeniu) kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna (przy komputerze)	12,797	,05	1,645	0,0001
Poziom akceptacji sposobu oceniania zadań na egzaminie (zaliczeniu) kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna w TRADYCYJNEJ FORMIE (NIE przy komputerze)				

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki testu potwierdzają istotną statystycznie różnicę średnich. Można stwierdzić, że „średni poziom akceptacji sposobu oceniania zadań na egzaminie (zaliczeniu) kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna (przy komputerze)” jest większy od „średniego poziomu akceptacji sposobu oceniania zadań na egzaminie (zaliczeniu) kursu algebra z geometrią analityczną lub analiza matematyczna w tradycyjnej formie (nie przy komputerze)”.

5.8. Badania część II d

Analiza pytań otwartych

Oceniając sposób przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z kursu z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej przy komputerze respondenci najczęściej podawali:

- znajomość efektów uczenia się, które będą podlegały walidacji – 36 wskazań (37% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi),
- natychmiastowa znajomość wyniku zaliczenia – 28 wskazań (29% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi),
- możliwość rozwiązywania zadań dostępnych na stronie internetowej w domu – 23 wskazania (23% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi),
- mniejszy stres w trakcie zaliczenia – 22 wskazania (22% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi).

25 studentów (20%) nie podało żadnego uzasadnienia swojej oceny. Warto podkreślić, że uzasadnienia oceny sposobu przeprowadzenia egzaminu przedstawione przez studentów były takie same bez względu na to, do której grupy (AB, C) należeli.

Przykładowe wypowiedzi studentów nt. sposobu przeprowadzenia egzaminu przy komputerze:

- Niebywała klarowność co do zakresu materiału do opanowania, w prosty sposób student jest w stanie nauczyć się, a samo zaliczenie przebiega bezstresowo.
- Ta forma egzaminowania jest o wiele mniej stresująca z racji możliwości zweryfikowania swoich umiejętności w domu oraz natychmiastowego otrzymania wyników egzaminu po jego zakończeniu.
- Wszystkie informacje były podane, a zadania można było spokojnie przećwiczyć, co było bardziej zachęcające do nauki.
- Nauka do niego jest dużo prostsza. Nie trzeba szukać zadań w internecie, wszystko jest pod nosem.
- Warunki zaliczenia były jasno wytłumaczone, a forma zaliczenia była wygodna i dostarczała mniej stresu z uwagi na to, że miałam świadomość, że nie muszę od razu zrobić wszystkich zadań, ale mogę się skupić na dobrze znanych mi zagadnieniach.
- Sposób oceniania jest wygodny i daje takie same szanse każdemu studentowi.
- Natychmiastowe wyniki, możliwość ćwiczeń w domu, z odpowiedziami.
- Dzięki metodzie stosowanej przez dr Stańdo studenci są sprawdzani z opanowania konkretnych umiejętności ujętych w programie przedmiotu, a błyskawiczna odpowiedź zwrotna o zaliczeniu pozwala szybciej i skuteczniej uzupełnić braki wiedzy.
- Brak stresu; szybkie wyniki; zadania pokrywające się z zadaniami na ćwiczeniach.
- Forma ta jest wygodniejsza, łatwiej się do niej przygotować i wiemy, gdzie popełniamy błędy, ucząc się w domu. W klasycznym sposobie nikt nas nie poprawi.

Studentów z grupy AB poproszono o ocenę sposobu przeprowadzenia egzaminu (zaliczenia) z kursu z algebry z geometrią analityczną lub analizy matematycznej w TRADYCYJNEJ FORMIE (NIE przy komputerze).

Najwięcej osób (20) napisało, że nie wiedziało, jakie umiejętności będą sprawdzane na zaliczeniu, a zadania rozwiązywane w trakcie ćwiczeń różniły się od tych na zaliczeniu. 14 respondentów napisało, że w przypadku tradycyjnego zaliczenia trzeba bardzo długo czekać na jego wynik. 6 respondentów stwierdziło, że tradycyjna forma zaliczenia wywołuje u nich duży stres. 4 studentów napisało, że brakowało im zadań do samodzielnego rozwiązywania w domu oraz taka sama liczba wskazała, że zadania na egzaminie były trudniejsze niż te rozwiązywane

podczas zajęć. 40 z 89 respondentów nie podało żadnego uzasadnienia swojej oceny sposobu przeprowadzenia zaliczenia w tradycyjnej formie.

Przykładowe wypowiedzi studentów nt. sposobu przeprowadzenia egzaminu w tradycyjnej formie:

- Ze względu na swoją formę egzaminy te są o wiele bardziej stresujące dla studenta, co prowadzi często do popełniania błędów i pomyłek w wyniku stresu.
- Można zaliczyć, znając nie wszystkie partie materiału.
- Tradycyjna forma egzaminu wywołuje stres oraz chęć ściągania, co nie pomaga w nauce. Przy nowej formie student może podejrzec jedynie sposób rozwiązania, co zmusza do myślenia.
- Nigdy nie wiemy, co pojawi się na egzaminie,
- Wszystkie informacje były podane, tylko mieliśmy dostęp do jednego arkusza próbnego, co nie pozwalało przećwiczyć wszystkich przykładów płynnie.
- Czasem zadań z przykładowych kolokwiów jest mało, więc zaczyna się szukać w internecie – przez co nie zawsze są to zadania podobne. Dodatkowo mogą występować różnice w trudności między zaliczeniami u różnych wykładowców.
- Ciężiej się uczyć, ograniczone przykłady do ćwiczeń i brak możliwości sprawdzenia poprawności w domu.
- Stosunkowo długi czas oczekiwania na informację o zaliczeniu egzaminu.
- Nie zgadzam się z ocenieniem każdego zadania z osobna i nie zaliczaniem przez to kolokwium.
- Nie rozumiałem, dlaczego niektóre zadania nie były zaliczone.
- U niektórych wykładowców trzeba poprawiać zadania, nawet jeśli zaliczyło się kolokwium, co powoduje uczenie się ciągle tego samego.
- Zadania na wyższe oceny wymieszane z zadaniami wymaganymi do zaliczenia.
- Trudne zadania, różniące się od tych, które były podczas zajęć. Długi czas oczekiwania na wyniki, duża liczba popraw, na co marnuje się dużo czasu, który można by było zagospodarować na inne przedmioty.
- Nie wiemy, gdzie popełniamy błędy, ciężiej się przygotować.
- Zdania są bardziej skomplikowane.
- Trudniejsze zdania niż na ćwiczeniach.

Respondentów z grupy ABC poproszono o podanie zalet i wad przeprowadzania egzaminu/zaliczenia z wykorzystaniem komputera. Zalety takiej formy egzaminu/zaliczenia podało 113 ze 123 respondentów (92%). Prawie połowa z nich wymieniła trzy zalety:

- mniejszy stres w trakcie zaliczenia – 52 wskazania (46% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi),

- natychmiastowa znajomość wyniku zaliczenia – 50 wskazań (44% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi),
- możliwość rozwiązywania zadań dostępnych na stronie internetowej w domu – 50 wskazań (44% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi).

W kategorii „możliwość rozwiązywania zadań dostępnych na stronie internetowej w domu” znalazły się wypowiedzi podkreślające, że dużą zaletą jest możliwość rozwiązywania zadań na urządzeniach mobilnych, w dowolnym miejscu i czasie oraz duża liczba zadań dostępnych na stronie internetowej z możliwością natychmiastowej informacji zwrotnej o poprawności rozwiązania. 33 respondentów (29% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi) napisało, że zaletą zaliczenia z wykorzystaniem komputerów jest znajomość efektów uczenia się, które będą podlegały walidacji.

13 studentów (12% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi) za zaletę systemu uznało fakt, że do pełnego zaliczenia można „podchodzić” w trzech terminach i poprawia się tylko te zadania, w których popełniło się błąd lub których wcześniej się nie rozwiązywało.

Wady i zalety przeprowadzania egzaminu/zaliczenia z wykorzystaniem komputera przedstawione przez studentów były takie same bez względu na to, do której grupy (AB lub C) należeli.

Przykładowe wypowiedzi studentów na temat zalet systemu:

- podczas zaliczenia wiadomo, co dokładnie trzeba umieć, jasne zasady zaliczenia, znane wymagania do uzyskania oceny pozytywnej,
- wiemy dokładnie, jaka wiedza i jej zastosowanie będzie potrzebne do zaliczenia,
- zadania na egzaminie były bardzo zbliżone do tych na zajęciach,
- natychmiastowa weryfikacja poprawności odpowiedzi,
- możliwość wcześniejszego przeanalizowania zadań,
- raz zaliczone zadanie jest zaliczone już do końca przedmiotu, poprawiamy tylko to, co zrobimy źle,
- informacja, w którym miejscu konkretnie popełniło się błąd,
- możemy przygotować się na poprawę, skupiając się na zadaniach, których nie byliśmy w stanie rozwiązać w dniu pierwszego egzaminu,
- łatwość przygotowania się do zaliczenia,
- możliwość solidnego przećwiczenia zadań w domu,
- możliwość wcześniejszego przeprowadzenia egzaminu w domu na własną rękę i możliwość zweryfikowania swoich umiejętności,
- możliwość podziału materiału na mniejsze części,
- rozłożenie zaliczenia na kilka etapów; można rozplanować zaliczenie,
- możliwość ćwiczenia pewnego zadania do skutku; możliwość generowania nowych przykładów w przypadku błędnego rozwiązania poprzednich,
- niektórym może być łatwiej zacząć naukę – przystępność,
- praktycznie nieskończona liczba przykładów, na których można ćwiczyć,

- możliwość sprawdzenia wyniku,
- jednakowe wymagania dla wszystkich,
- każdy ma inny przykład, co zapobiega ściąganiu,
- porównywalny stopień trudności zadań dla wszystkich,
- jasny system oceniania,
- brak narzuconej metody rozwiązania,
- można poprawić tylko źle zrobione zadania, a nie całe kolokwium od nowa,
- gdy zajęcia nie odbędą się z losowych powodów, można samodzielnie się przygotować i nadrobić,
- mniejszy stres niż przy tradycyjnym ocenianiu,
- prosty dostęp,
- wolny i łatwy dostęp,
- bardziej przejrzysty (np. kiedy ktoś bazarze),
- jest to wygodniejsze; jest to mniej stresujące; jest to ciekawe,
- dla nauczyciela to też jest łatwiejsze, jak zobaczy, że zdaliśmy i może od razu wystawić ocenę; może więcej czasu poświęcić studentom, a nie sprawdzaniu.

35 respondentów (28% wszystkich respondentów) nie wypowiedziało się na temat wad zaliczenia z wykorzystaniem komputerów. 40 (33%) napisało, że taka forma nie posiada wad. Wady systemu wskazało 48 respondentów (39% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi).

Studenci, którzy opisali wady systemu, najczęściej wskazywali trudności z dostępem do komputerów i laboratoriów wyposażonych w komputery, a także błędy strony internetowej i problemy techniczne.

Przykładowe wady systemu podane przez respondentów:

- mały błąd powoduje całkowity brak punktów,
- zależność od komputera i jego działania; jeśli nie masz komputera, trudno ćwiczyć zadania,
- ryzyko problemów sprzętowych i utraty postępu,
- jeśli odświeży się przez przypadek stronę, to sprawdzanie zadań jest niemożliwe,
- dostęp do internetu,
- konieczność zamówienia sali komputerowej dla całej grupy,
- słaby sprzęt w pracowniach,
- możliwość wystąpienia błędu systemu, czasami nie wczytują się wykresy,
- ciężiej dostać lepszą ocenę,
- bardziej męczy wzrok,
- problemy z funkcjonowaniem na komórkach.

Kilkoro respondentów wyraziło opinie dotyczące jakości nauczania/uczenia się:

- obniżenie poziomu nauczania,
- niektórzy mogą uważać, że zakres zagadnień jest za mały,

- mało zróżnicowane zadania, można się nauczyć przykładów na pamięć, możliwość „strzelania”,
- nie jest oceniany tok rozumowania.

Kolejne pytanie dotyczyło możliwości rozłożenia zaliczenia na trzy etapy. 29 respondentów (24% wszystkich respondentów) napisało, że preferuje jednorazowe zaliczenie całego materiału. 92 (76% wszystkich respondentów) stwierdziło, że od razu zakładało rozłożenie zaliczenia na kilka etapów. 2 respondentów nie wybrało żadnej opcji.

Opcję jednorazowego zaliczenia całego materiału znacznie częściej wybierali studenci studiów niestacjonarnych (52%), podczas gdy opcję tę wybrało tylko 16% studentów studiów stacjonarnych.

Spośród studentów, którzy wybrali jednorazowe zaliczenie całego materiału, 7 nie podało żadnego uzasadnienia. Inni podawali następujące argumenty:

- kiedy znane są wymagania, łatwiej jest opanować materiał i zaliczyć test, gdy ma się na to czas – na początku semestru,
- ponieważ dzięki dostępności zadań potrafiłam je wszystkie przyswoić po rozwiązaniu kilkunastu przykładów,
- bo można cały czas ćwiczyć cały materiał, przez co jest prościej,
- zaliczany materiał stanowi spójną całość; uważam, że zadania w tych działach są elementarne i ściśle ze sobą powiązane,
- student musi rozpocząć naukę wcześniej niż noc przed zaliczeniem, co wymusza regularną pracę z własnej woli,
- próbowałam, ponieważ ćwiczyłam cały materiał wcześniej samodzielnie,
- zaliczając wszystko w pierwszym terminie, mamy czas wolny od nauki przez najbliższe trzy tygodnie,
- nie warto robić zaległości,
- nie musiałem się przejmować zaliczeniem i mogłem się skupić na trudniejszych przykładach,
- aby mieć z głowy jak najszybciej i szybko zamknąć sprawę zaliczenia,
- żeby mieć więcej czasu na przygotowanie się do innych przedmiotów,
- chcę mieć wszystko z głowy na początku sesji,
- łatwe przygotowanie się,
- aby nie musieć przystępować więcej razy.

112 respondentów (91%) zakładało rozłożenie zaliczenia na kilka etapów. Najczęściej respondenci pisali, że łatwiej jest przygotować się z mniejszej partii materiału (55 respondentów, 49% respondentów, którzy udzielili odpowiedzi).

Inne przykładowe uzasadnienia rozkładania zaliczenia na kilka etapów:

- łatwiej dobrze przygotować się do kilku konkretnych zadań, by być pewnym, że wszystko się zaliczy,
- mniejsza ilość materiału do jednego zaliczenia ułatwia powtarzanie i zapamiętanie materiału,

- ze względu na mniejszą możliwość popełnienia błędu, co może być powodem mniejszej ilości materiału do przyswojenia na dany termin,
- kumulacja egzaminów/zaliczeń z wielu przedmiotów w jednym terminie powoduje, że ilość materiału do przyswojenia może być kolosalna, dlatego lepsza jest opcja b),
- łatwiej się uczyć etapowo, po trochu, niż całego materiału na raz,
- można skupić się na konkretnych zadaniach,
- pozwala to na opanowanie kilku zajęć na raz i na porcjowanie wiedzy, co zmniejsza stres podczas nauki i zaliczenia,
- wydaje mi się, że łatwiej jest nauczyć się teoretycznych 4 działów w systemie tydzień – zaliczenie niż nauka przez miesiąc z dużym egzaminem,
- mam więcej czasu na opanowanie zagadnień/zadań dla mnie niezrozumiałych,
- ponieważ przy natłoku innych przedmiotów nie mam czasu, by poznać cały materiał na raz,
- łatwiej było mi połączyć pracę zawodową z nauką,
- pozwoliło mi to na zaliczenie z wyższym wynikiem,
- studia zaoczne – brak czasu na cały materiał,
- ponieważ materiał potrzebny do zaliczenia nie był przerobiony przed pierwszym terminem,
- można dopasować sobie termin do innych zaliczeń.

Respondentów poproszono o wskazanie możliwych udoskonaleń zaliczenia z wykorzystaniem komputerów.

20 respondentów napisało, że nic by w takiej formie zaliczenia nie zmieniło. 33 respondentów nie udzieliło żadnej odpowiedzi. Wśród możliwych udoskonaleń respondenci wskazali:

- dodanie dodatkowych zakładki pokazujących przykładowe rozwiązania (krok po kroku) danego zadania, samouczek dla osób jeszcze nieumiejących rozwiązać zadania,
- dodanie zagadnień teoretycznych przy zadaniach, by łatwiej przypomnieć sobie zagadnienie, animacje, filmiki z rozwiązanymi przykładami, wskazywanie, gdzie dokładnie popełniony jest błąd,
- większa różnorodność i pula zadań, dłuższe zadania i mniej schematyczne,
- udoskonalenie szaty graficznej,
- aplikacja na telefon umożliwiłaby rozwiązywanie zadań w czasie powrotu i drogi do szkoły,
- kompatybilność z każdą przeglądarką i zachowywanie wprowadzonych danych w przypadku np. omyłkowego zamknięcia przeglądarki,
- dodanie indywidualnych profili dla kont, dodanie czatu, możliwość wysłania rozwiązania do prowadzącego.

Analiza części otwartych pytań pokazała, że w procesie poznawania, osiągania i potwierdzania efektów uczenia się w zakresie algebry z geometrią

analityczną oraz analizy matematycznej najważniejsze dla studentów są: możliwość rozwiązywania wielu zadań, do których znają odpowiedź, dostępnych na stronie internetowej w domu, znajomość efektów uczenia się, które będą podlegały walidacji oraz mniejszy poziom stresu. Z punktu widzenia ocenianego i oceniającego bezsprzecznie dużą zaletą jest znajomość wyniku zaliczenia bezpośrednio po zakończeniu egzaminu. Dla wielu respondentów ważna jest możliwość rozłożenia zaliczenia na kilka etapów, gdy w kolejnych etapach rozwiązują wyłącznie zadania, których wcześniej nie zaliczyli.

Dużo miejsca respondenci poświęcili propozycjom rozwoju strony internetowej zawierającej zadania oraz systemu zaliczeń z wykorzystaniem komputerów. Świadczy to o ich zainteresowaniu i chęci pomocy w rozwoju projektu. Mimo że system w formie pilotażowej, jaką otrzymali studenci do przetestowania, miał spełniać tylko rolę oceniającą, uczący się wskazali na potrzebę zamieszczenia materiałów e-learningowych. Pojawiły się głosy na temat udoskonalenia szaty graficznej i dostępności zadań na urządzeniach mobilnych.

Weryfikacja hipotezy: HS_3 .

Wprowadzona nowa forma przeprowadzenia procesu osiągania efektów uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji jest akceptowalna przez studentów.

Podsumowanie

„Szybko rozwijające się technologie i zmieniające się potrzeby współczesnego rynku pracy wymagają od dzisiejszej szkoły przygotowania studentów do kariery, do zawodów, które jeszcze nie istnieją, do technologii, które nie zostały wymyślane, do rozwiązywania problemów, które nie zostały jeszcze zidentyfikowane ani sformułowane jako takie”²⁸⁰.

²⁸⁰ Smyrnova-Trybulska E., Technologie informacyjno-komunikacyjne i e-learning we współczesnej edukacji, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2018, s. 16.

Weryfikacja hipotezy głównej –(*HG*)

Od 1 października 2019 roku, w związku ze zmianami Ustawy 2.0, na Politechnice Łódzkiej zostaje wdrożony: Obligatoryjny System Efektów Ucznia się na wybranym kierunku. W przyszłości Ujednolicony egzamin z matematyki na wszystkich kierunkach dla pierwszego roku będzie przeprowadzany elektronicznie lub wariantowo przez wygenerowany zbiór testów.

Zatem: Zbudowano i przeprowadzono walidację efektów uczenia się z matematyki na szóstym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji –(*HG*).

6. Perspektywy rozwoju

Koncepcja zbudowania systemu efektów uczenia się nie rozwiązuje wszystkich problemów w obszarze oceniania wiedzy, umiejętności i kompetencji społecznych w zakresie matematyki. Ma ona wprowadzić porównywalność na poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji, a w przyszłości Europejskiej Ramy Kwalifikacji.

Obligatoryjne efekty uczenia się dają silne podstawy do tworzenia spójnego procesu kształcenia. „Gdy uczymy się języka ojczystego lub języka obcego, jesteśmy zainteresowani opanowaniem współczesnego języka, a nie języka naszych przodków. Język Mikołaja Reya i Jana Kochanowskiego czy język Szekspira ma swój urok, ale nie zachwyca nas jako narzędzie myślenia i porozumiewania się z innymi, tu i teraz. Chcemy się uczyć się współczesnego języka..... To dotyczy również matematyki ...²⁸¹.

Planowanie krótkoterminowe

- Przygotowanie techniczne do wdrożenia systemu walidacji efektów uczenia się na wybranym kierunku w roku akademickim 2019/2020 w Politechnice Łódzkiej.
- Przeprowadzenie szkoleń nauczycieli akademickich do wdrożenia systemu.
- Testowanie systemu przez nauczycieli akademickich.

Planowanie średnioterminowe

- Wdrożenie systemu walidacji efektów uczenia się na rok akademicki 2019/2020 w Politechnice Łódzkiej na wszystkich wydziałach.
- Przeprowadzenie ewaluacji procesu wdrożenia.
- Dopracowanie systemu efektów uczenia się na pierwszym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji (zadania generatorowe zostały opracowane i zaimplementowane, czekają na wdrożenie; zostały już przeprowadzone testy na małej grupie).

Planowanie długoterminowe

- Prezentacja wdrożonego systemu efektów uczenia się na krajowych i międzynarodowych konferencjach.
- Budowa systemu efektów uczenia się i walidacji na pierwszym, drugim, trzecim i czwartym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji
- Przeprowadzenie badań na pierwszym, drugim, trzecim i czwartym poziomie Polskiej Ramy Kwalifikacji

²⁸¹ Mostowski K., Zawadowski W., Przeszkody i przeszkody epistemologiczne w uczeniu się matematyki, Czasopismo NiM+TI, nr 86, 2014.

Planowanie strategiczne

- Zbudowanie inteligentnego systemu uczenia się opartego na trajektorii efektu uczenia się. Model prototypu został przedstawiony w roku 2011²⁸².

Otwarty problem

Czy da się zbudować obligatoryjne efekty uczenia się na wszystkich poziomach, które mogłyby zostać przyjęte jako:

EUROPEJSKIE RAMY KWALIFIKACJI Z MATEMATYKI?

Taki cel strategiczny stawiam sobie jako wyzwanie.

²⁸² Stańdo J., *Model of mathematics teaching intelligent system*, Poland Information Systems in Management XI, Databases, Distant Learning and Web Solutions Technologies, Warszawa 2011, ss. 89-100.

LITERATURA

Anderson L.W., Krathwohl D.R., Airasian P.W., Cruikshank K.A., Mayer R.E., Pintrich P.R., Raths J., Wittrock M.C., A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives, New York: Pearson, Allyn & Bacon, 2001

Andrich D., Controversy and the Rasch model: a characteristic of incompatible paradigms?, *Med Care*. 2004 Jan;42(1 Suppl)

Arasu A., Babu S., Widom J., Cql: A language for continuous queries over streams and relations, Lausen G., Suciu D., (red.), DBPL, volumen 2921 **serii** Lecture in Computer Science, Springer 2003

Arends R.I., *Uczymy się nauczać*, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa, 1998

Barr V., Stephenson C., Bringing computational thinking to K-12: What is involved and what is the role of the computer science education community?, *ACM Inroads*, 2(1), 2011

Bieniecki W., Stańdo J., Stoliński S., Information technologies in a process of examination in Poland Information systems in management, WULS Press Warsaw 2010

Bieniecki W., Stoliński S., Stańdo J., Automatic Evaluation of Examination Tasks in the Form of Function Plot, Proceedings of the 6th International IEEE Conference MEMSTECH 2010, Lviv-Polyana, Ukraine

Biggs J.B. and Collis K.F., *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO Taxonomy*, New York: Academic Press, 1982

Bloom. (Ed.), Engelhart M.D., Furst E.J., Hill W.H., Krathwohl D.R., *Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: The Cognitive Domain*. New York: David McKay Co Inc., 1956

Boone W.J., Staver J.R., Yale M.S., Wright Maps: First Steps. In: *Rasch Analysis in the Human Sciences*, Springer, Dordrecht, 2014

Brabrand C., Dahl B., Using the SOLO Taxonomy to Analyze Competence Progression of University Science Curricula. Submitted for publication, 2008

Bray M., *Korepetycje. Ciężar rzucany przez szkoły*, Wolters Kluwer, 2012

Budnikowski A., Dąbrowski D., Gąsior U., Macioł S., *Pracodawcy o poszukiwanych kompetencjach i kwalifikacjach absolwentów uczelni – wyniki badania*, E-mentor, 4(46), 2012

- Charles C. Chan, M.S. Tsui, Mandy Y.C. Chan, Joe H. Hong, Applying the Structure of the Observed Learning Outcomes (SOLO) Taxonomy on Student's Learning Outcomes: An empirical study, *Assessment & Evaluation in Higher Education*, Vol. 27, No. 6, 2002
- Chick H.L., Student responses to a polynomial problem in the light of the SOLO taxonomy, *Australian Senior Mathematics Journal*, 2, 1998
- Chmielecka E., Proces boloński i krajowe ramy kwalifikacji dla szkolnictwa wyższego, *Studia BAS* Nr 3(35) 2013
- Chrost M., Kompetencje emocjonalne i społeczne młodzieży, *Akademia Ignatianum w Krakowie*, 2012
- Ciżkowicz B., Klasyczna i probabilistyczna teoria testu – analiza porównawcza, [w:] B. Niemierko, G. Szyling (red.), *Holistyczne i analityczne metody diagnostyki edukacyjnej*. Gdańsk: Wyd. Fundacji Rozwoju UG. 2005
- Clements D.H., Sarama J., Learning trajectories in mathematics education, *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 2004
- Coady C., Pegg J., Tertiary students' understanding of second order relationships in function notation, In G. Bell, 1994
- Dąbrowicz-Tłałka A., Stańdo J., Wikeł B., E-egzamin analiza statystyczna wyników, *Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej*, 2008
- Denek K., Cele edukacyjne lekcji, *Poznań-Kalisz* 1989
- Denning P.J., The profession of IT, Beyond computational thinking. *Communications of the ACM*, 52(8), 2009
- Domański Cz., *Testy statystyczne*, PWN, Warszawa 1990
- Dörner D., Funke J., Complex Problem Solving: What It Is and What It Is Not, *Front Psycholgy*, 2017
- Dylak S., Wprowadzenie do konstruowania szkolnych programów nauczania, *Wydawnictwo Szkolne PWN*, Warszawa 2000
- Filipiak E., Siadak G., Edukacja szkolna i pozaszkolna. Późna faza dorastania, *Niezbędnik Dobrego Nauczyciela* (red.), A. Brzezińskiej, seria III, tom 6, Warszawa 2014
- Ekeland I., *Chaos*, Książnica „Domino”, 1999
- Ernest P., *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*, 1997

Feisel L.D., Teaching Students to Continue Their Education, Proceedings of the Frontiers in Education Conference, 1986

Fisher R., Uczymy jak myśleć, WSiP, 1999

Funke J., Greiff S., Dynamic problem solving: multiple-item testing based on minimally complex systems, in Competence Assessment in Education. Research, Models and Instruments, eds. Leutner D., Fleischer J., Grünkorn J., Klieme E., editors. (Heidelberg: Springer) 2017

Funke J., Complex problem solving. In N.M. Seel (Ed.), Encyclopedia of the sciences of learning (Vol. 38). Heidelberg: Springer, 2012

Grajkowski W., Ostrowska B., Przykład powinien być tylko przykładem, czyli jakie zadania naprawdę sprawdzają umiejętności, Edukacja 3, (19), s. 31-45, 2012

Groth R., Bergner J., Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode, Mathematical Thinking and Learning, 8. 2006

Guilford J.P., Podstawowe metody statystyczne w psychologii i pedagogice, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1960

Hattie J.A.C., Brown G.T.L., Cognitive Processes in asTTle: The SOLO Taxonomy, asTTle Technical Report #43, University of Auckland/Ministry of Education, 2004

Hessen S., Světový názor a pedagogika, Studie k problému autonomie, přeložila Žofie Pohorecká, Nákladem Dědictví Komenského, Praha, 1937

Hook P., Gravett C., Howard M. and John E., SOLO Taxonomy in Maths. Strategies for thinking like a mathematician, Essential Resources Educational Publishers Limited, New Zealand. 2014

Jagiello-Rusiłowski A., Solarczyk-Szwec H., Kwerenda badań nad kompetencjami społecznymi, „Przegląd Badań Edukacyjnych”, 2013. E-mentor nr 5 (52) / 2013.

Jakubowski M., Pokropek A., BADAJĄC EGZAMINY. Podejście ilościowe w badaniach edukacyjnych, Centralna Komisja Egzaminacyjna, Warszawa 2009.

Jeleńska L., Szkoła kształcąca, PZWS, Warszawa 1957

Jing Gong, Dehong Luo, Application of Rasch Model in Test Paper Quality Analysis—With the Case of Reading Literacy Pilot Test Paper for Grade 5–6 Students in Guangxi, Pacific Rim Objective Measurement Symposium (PROMS) 2014 Conference Proceedings

Jodłowska B., Start zawodowy – twórcza praca nauczyciela klas początkowych, WSiP, Warszawa 1991

Kąkol H., O procesie nauczania matematyki, Wiadomości Matematyczne 46 (2) 2010

Kalelioglu F., Gulbahar Y. Kukla V., A Framework for Computational Thinking Based on a Systematic Research Review, Baltic J. Modern Computing, Vol. 4 (2016)

Karawajczyk W., Kształcenie dorosłych w ujęciu andragogicznym, COLLOQUIUM WYDZIAŁU NAUK HUMANISTYCZNYCH I SPOŁECZNYCH ROCZNIK I/2009

Kocór M., Strzebońska A., Keler K., Kogo chcą zatrudniać pracodawcy? Potrzeby zatrudnieniowe pracodawców i wymagania kompetencyjne wobec poszukiwanych pracowników, Polska Agencja Rozwoju Przedsiębiorczości, Warszawa 2012

Kołodziej K., Mazur U., W drodze do oceniania holistycznego egzaminu gimnazjalnego w części matematyczno-przyrodniczej, Teraźniejszość i przyszłość oceniania szkolnego, [w:] B. Niemierko, M.K. Szmigel (red.), Teraźniejszość i przyszłość oceniania szkolnego. Kraków: Wyd. Grupa TOMAMI, 2010 r., s. 616.

Kraśniewski A., Proces Boloński to już 10 lat, Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji Warszawa 2009

Krathwohl D.R., A Revision of Bloom's Taxonomy: An Overview, Theory Into Practice, 41(4), 2002

Krawczyk-Stańdo D., Rudnicki M., Stańdo J., Modern Regularization Techniques for Inverse Modelling: a Comparative Study, Journal of Applied Computer Science, Vol. 19, 2011

Krygowska Z., Koncepcje powszechnego matematycznego kształcenia w reformach programów szkolnych z lat 1960-1980, Kraków, Wydawnictwo Naukowe WSP

Krygowska Z., Zarys dydaktyki matematyki, cz. 1, Warszawa 1977

Kuligowska K., Doskonalenie lekcji, WSiP, Warszawa 1984

- Kupisiewicz C., Dydaktyka. Podręcznik Akademicki, Rozdział 4 Impuls, Kraków 2012
- Kupisiewicz C., Podstawy dydaktyki ogólnej, Wydawnictwo PWN
- Lewicki J., Nowe wyzwania walidacji w polskich uczelniach – potwierdzanie efektów uczenia się osiągniętych poza szkolnictwem wyższym
- Lord T., Baviskar S., Moving Students From Information Recitation to Information Understanding: Exploiting Bloom's Taxonomy in Creating Science Questions, J Coll Sci Teach 36 No. 5 Mr/Ap 2007
- Madalińska-Michalak J., Góralska R., Kompetencje emocjonalne nauczyciela, Wolters Kluwer, Warszawa 2012, Solarczyk-Szwec H., Walidacja kompetencji społecznych w kontekście Krajowych Ram Kwalifikacji dla Szkolnictwa Wyższego
- Majewska K., Trudności w nauczaniu programowania na poziomie edukacji wczesnoszkolnej z perspektywy nauczycieli – absolwentów szkół pedagogicznych, E-mentor nr 3 (75) / 2018
- Makiewicz M., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura, Studia Pedagogiczne t. L XIV/2011 PL ISSN 0081–6795
- Markowski M., E-learning w gimnazjach, Gazeta Wyborcza 2008.03.04, cytat: "Zadania na dzisiejszy egzamin opracował dr Jacek Stańdo z Politechniki Łódzkiej"
- Marzano R.J., Kendall J.S. (ed.), The New Taxonomy of Educational Objective, Corwin, Newbury Park CA 2006
- McMillan J.H., Classroom assessment: Principles and practice for effective instruction (2 ed.), Boston, MA, Allyn & Bacon., 2001
- Myo-Kyoung Kim, Pharm, Rajul A. Patel, Pharm, James A. Uchizono, Pharm, Lynn Beck, Incorporation of Bloom's Taxonomy into Multiple-Choice Examination Questions for a Pharmacotherapeutics Course, American Journal of Pharmaceutical Education, 76 (6) Article 114, 2012
- Niemierko B., Między oceną szkolną a dydaktyką, Warszawa, WSiP. 1999
- Niemierko B., Pomiar sprawdzający w dydaktyce, teoria i zastosowania. Warszawa, PWN 1990
- Niemierko B., Pomiar sprawdzający wielostopniowy. PWN 1990
- Niemierko B., Pomiar wyników kształcenia, WSiP, Warszawa 1999

- Nosarzewski J., Efekty uczenia się, uwarunkowane własnościami temperamentu, *Rocznik Psychologiczny* Tom II, 1999
- Nowaczyk C., Podstawy metod statystycznych dla pedagogów, Wydawnictwo PWN, Warszawa-Poznań 1985
- Nowak J., Sokal U., Wyzwania dydaktyczne stawiane nauczycielom akademickim, w *Paradygmaty współczesnej dydaktyki*, pod red. Huryło L., Klus-Stańska D., Łojko M., Impuls, Kraków 2009
- Nowak-Dziemianowicz M., Kompetencje społeczne jako jeden z efektów kształcenia w Krajowych Ramach Kwalifikacji w kontekście pytań o cele i funkcje edukacji, IBE 2012.
- Oliveira e Silva T., Herzog S., Pardi S., Empirical verification of the even Goldbach conjecture and computation of prime gaps up to $4 \cdot 10^{18}$, *Mathematics of Computation*, Vol. 83, No. 288, July 2014
- Palka S., Warunki efektywności nauczania w szkole średniej, WSiP, Warszawa 1997
- Pardała A., Geometryczne kształcenie uczniów w dobie upowszechnienia wykształcenia ogólnego – u nas i gdzie indziej, *XXIII Szkoła Dydaktyki Matematyki*, Poznań-Będlewo, 2009
- Pardała A., Praktyka kształtowania matematycznej twórczości uczniów, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis | Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, Vol. 2, 2009
- Pawlak R., Dobór treści matematycznych w nauczaniu szkolnym, *Wiadomości Matematyczne* 46 (2) 2010
- Pawlak R., Problemy rozumienia podstawowych pojęć matematycznych. Doformalizowywanie, *Czasopismo „Nauczyciele i Matematyka + Technologia Informacyjna”*, nr 61, rok 2007
- Pickard M.J., The New Bloom's Taxonomy: An Overview for Family and Consumer Sciences, *Journal of Family and Consumer Sciences Education*, 25(1), 2007
- Piotrowski M., Błędne podstawy edukacji matematycznej i sposoby ich naprawienia. „Żandarma” trzeba odwołać, chociaż jest w nas samych, *Studia z Teorii Wychowania*, 2016, 3 (16)
- Pod redakcją K. Kruszewskiego: *Sztuka nauczania. Czynności nauczyciela*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1992

- Pogoda Z., O klejeniu i zasadzie abstrakcji, XIV Konferencji Naukowej Dydaktyków Matematyki, „Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura”, MATH&ART., Pobierowo, 2019
- Praca zbiorowa, Stańdo J. i in., Egzamin gimnazjalny, część matematyczno-przyrodnicza, WSiP 2007
- Przyborowska B., Pedagogika innowacyjności. Między teorią a praktyką, Wyd. UMK, Toruń 2013
- Pułturzycki J., Lekcja w szkole współczesnej, WSiP, Warszawa 1985
- Radwiłowicz M., Radwiłowicz R., Metoda zadaniowo-sytuacyjna w nauczaniu początkowym, WSiP, Warszawa 1991
- Raport referencyjny – aktualizacja, Odniesienie Polskiej Ramy Kwalifikacji do Europejskiej Ramy Kwalifikacji, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2015
- Rasch G., Probabilistic models for some intelligence and attainment tests, Danish Institute for Educational Research, Copenhagen 1960.
- Rygał G., Borowiecka A., Poziom logicznego myślenia dzieci w wieku 9-10 lat. Komunikat z badań, Pedagogika Przedszkolna i Wczesnoszkolna Vol. 5 2/1 (10/1)/2017
- Sanford J.F., Naidu J.T., Computational thinking. Concepts for grade school, Contemporary Issues in Education Research, Vol. 9, No. 1, 2016
- Sapanowski S., Różnicowanie uczniów o tych samych osiągnięciach egzaminacyjnych, [w:] Niemierko B., Biuletyn – XXIII Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej – Diagnozowanie umiejętności praktycznych w toku kształcenia i egzaminowania, Łódź 2017
- Sarama J., Clements DH, Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children, New York, NY: Routledge, 2009
- Schumpeter J.A., The Theory of Economic Development: An Inquiry into Profits, Capital, Credit, Interest and The Business Cycle, „Harvard Economic Studies” Vol. 46, Harvard College, Cambridge, 1934
- Schwab K., The Fourth Industrial Revolution, Foreign Affairs, XII 2017
- Sektorowa Rama Kwalifikacji dla SEKTORA INFORMATYCZNEGO (SRK IT) na podstawie Gruza M., Ubysz J., Stanisław-Busch E., Sołtysiak M., Dziedzic A., Budzewski M., (2015). Wykonanie projektu Sektorowej ramy kwalifikacji dla sektora informatycznego w Polsce (SRK IT). Raport końcowy, Instytut Badań Edukacyjnych 2018

- Shepard L.A., The role of assessment in a learning culture, *Educational Researcher*, 29(7), 2000
- Shutea V., Suna Ch., Asbell-Clarke J., Demystifying computational thinking,
- Siegfried T., Top 10 mathematical innovations, *ScienceNews*, Magazine of the Society for science & the Public, August, 2014
- Sławiński S. i in., Słownik kluczowych pojęć związanych z krajowym systemem kwalifikacji, 2016
- Sławiński S., Chłoń-Domińczak A., Szymczak A., Ziewiec-Skokowska G. POLSKA RAMA KWALIFIKACJI Poradnik użytkownika, Instytut Badań Edukacyjnych, Warszawa 2018
- Śliwerski B., Hessen znany i nieznany, ale wciąż aktualny, *Ruch Pedagogiczny* 1, Rok LXXXVIII Warszawa 2018
- Solarczyk-Szwec H., Kopińska V., Matusiak A., Kompetencje społeczne na wejściu w dorosłość. Krytyczna analiza podstawy programowej kształcenia ogólnego dla IV etapu edukacyjnego, *Edukacja Dorosłych* 2016
- Solarczyk-Szwec H., Walidacja kompetencji społecznych w kontekście Krajowych Ram Kwalifikacji dla Szkolnictwa Wyższego, *E-mentor* nr 5 (52) / 2013
- Stańdo J., E-mature – Report of an Electronic Mathematics Exam, *Informatics Engineering and Information Science Communications in Computer and Information Science*, 2011, Vol. 251, Part 1, 33-41
- Stańdo J., First Electronic Examination for Mathematics and Sciences Held in Poland – Exercises and Evaluation System, *Digital Information and Communication Technology and Its Applications* (2011) 167: 463-472, Springer, 2011
- Stańdo J., Kisiel K., How can ICT effectively support educational processes? *Mathematical Emergency E-Services – Case Study*, Springer 2011
- Stańdo J., Using Neural Networks to Detect Errors in Coding Exams, *Informatics Engineering and Information Science* 252: 329-336, Springer, 2011
- Stańdo J. i in., ZACZNIJ OD DZIŚ. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty matematyczno-przyrodnicze, *WSiP* 2003
- Stańdo J. i in., ZACZNIJ OD DZIŚ. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty humanistyczne, *WSiP* 2003

Stańdo J. i in., ZACZNIJ OD DZIŚ. Egzamin po gimnazjum. Przedmioty matematyczno-przyrodnicze, Płyta CD WSiP 2003

Stańdo J. i zespół autorski Politechniki Łódzkiej, „E-podręcznik do matematyki dla klasy I szkoły ponadgimnazjalne, Odkryj, zrozum, zastosuj...”

Stańdo J., Diagnoza 2010

Stańdo J., Matura na poziomie rozszerzonym, Projekt Matpróbka 2007, zadanie 14, 2007

Stańdo J., Matura podstawowa z matematyki, Próbny egzamin, 2006

Stańdo J., Model of mathematics teaching intelligent system, Poland Information systems in Management XI, Data Bases, Distant Learning and Web Solutions Technologies, Warszawa 2011

Stańdo J., Mumryło M., Sposoby kształtowania u uczniów zdolności algorytmicznego rozwiązywania problemów, Seria: Rozwój myślenia komputacyjnego w szkole ponadpodstawowej, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2017

Stańdo J., Mumryło M., Sposoby kształtowania u uczniów zdolności algorytmicznego rozwiązywania problemów, Seria: Rozwój myślenia komputacyjnego w klasach IV-VIII szkoły podstawowej, Ośrodek Rozwoju Edukacji, Warszawa 2017

Stańdo J., Stasiak A., Myślenie komputacyjne w nauczaniu matematyki, EDUAKCJA Magazyn Edukacji Elektronicznej Nr 2 (16)/2018

Stewart I., Czy Bóg gra w kości, Wydawnictwo Naukowe PWN, 2001

Strategia kształcenia wyprzedzającego, praca zbiorowa pod redakcją naukową Stanisława Dylaka, Ogólnopolska Fundacja Edukacji Komputerowej, Poznań 2013

Świst K., Skórska P., Pokropek A., Kulon F., Pomiar umiejętności rozwiązywania problemów złożonych – znaczenie oraz możliwości i sposoby wykorzystania w badaniach edukacyjnych, Zastosowania diagnozy edukacyjnej, XXI Konferencja Diagnostyki Edukacyjnej, Bydgoszcz 2015

Swoboda E., Matematyka w szkołach zawodowych – uboga siostra królowej nauk?, [w:] Współczesne Problemy Nauczania Matematyki: Prace Monograficzne z Dydaktyki Matematyki, H. Kąkol (red.), Wyd: Koło SNM, Forum Dydaktyków Matematyki, 2015

Sysło M., Myślenie komputacyjne. Nowe spojrzenie na kompetencje informatyczne, Materiały z konferencji „Informatyka w Edukacji, XI, UMK Toruń, 2014

Szalaniec H., Stańdo J., E-egzamin 2008, Raport z projektu edukacyjnego, WSiP 2008

Szyling G. Koncepcja walidacji efektów uczenia się: obszary pedagogicznych redukcji i ich (nie)zamierzonych skutków

Szymańska P., Szymański B., Jeszcze jeden (elementarny) dowód rozbieżności szeregu odwrotności liczb pierwszych, Delta, lipiec 2016

Treliński G., Edukacja matematyczna w systemie kształcenia studentów kierunku geodezja i kartografia, Acta Scientifica Academiae Ostroviensis nr 35-36, 89-114, 2011

Węglińska M., Jak przygotować się do lekcji?, Impuls, Kraków 2010

Weintrop D., Beheshti E., Horn M., Orton K., Jona K., Trouille L., Wilensky U., Defining computational thinking for mathematics and science classrooms, Journal of Science Education and Technology, Springer 2015

Węziak-Białowolska D., Operacjonalizacja i skalowanie w ilościowych badaniach społecznych, Zeszyty naukowe Instytutu Statystyki i Demografii SGH, nr 16, 2011.

Wijaya A., van den Heuvel-Panhuizen M., Doorman M., Robitzsch A., Difficulties in solving context-based PISA mathematics tasks: An analysis of students' errors, The Mathematics Enthusiast 11 (3)

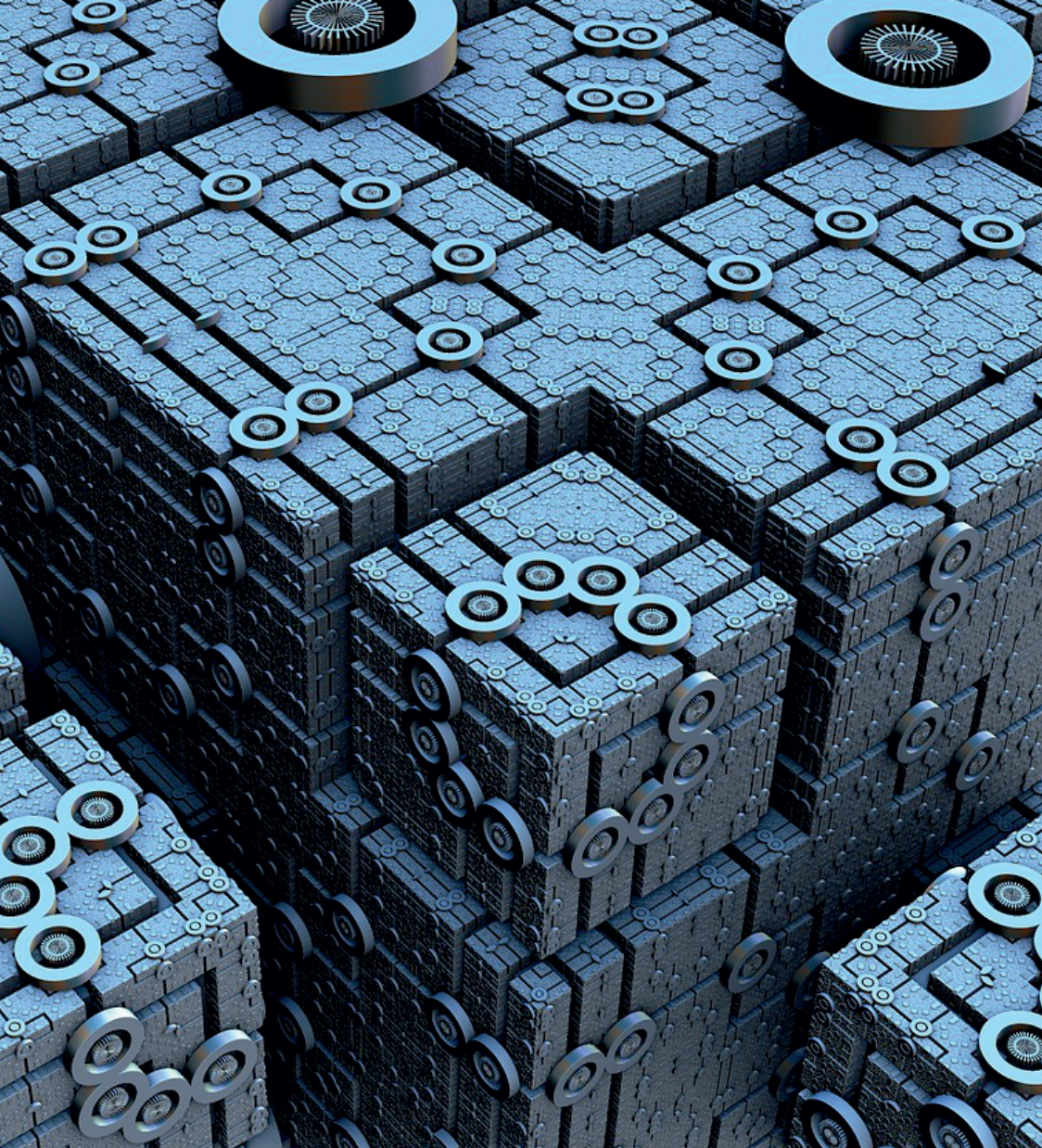
Wing J.M., Computational thinking, Communications of the ACM, 49(3), 2006

Wołodźko E., Wielowymiarowość autonomii nauczyciela akademickiego, [w:] Paradygmaty współczesnej dydaktyki, pod red. Huryło L., Klus-Stańska D., Łojko M., Impuls, Kraków 2009

Yadav A., Mayfield C., Zhou N., Hambruch S., & Korb J.T., Computational thinking in elementary and secondary teacher education, ACM Transactions on Computing Education, 14(1), 2014

Zawistowska A., „Płeć matematyki” – Zróżnicowania osiągnięć ze względu na płeć wśród uzdolnionych uczniów, Studia Socjologiczne 2013 | 3(210)

Żytko M., jak skutecznie rozbudzić i utrzymać zainteresowanie dzieci matematyką?, 2015



Definiowana jest trajektoria walidacji efektów kształcenia pozwalająca na zupełnie inne podejście do procesu oceniania, egzaminowania oraz zagadnień do omówienia w ramach kursu. Koncepcja ta mająca umocowanie w doświadczeniach badawczych i dydaktycznych w matematyce jest bardzo ciekawa i inspirująca. Pozwala bowiem przemysśleć strukturę nauczanych przedmiotów, również w kontekście wykładanych treści.

dr hab. Marek Galewski, prof. nadzw.

Przedstawiona do oceny praca prezentuje obszerne studium sposobu kształtowania procesu uczenia się i walidacji uzyskiwanych wyników w założonym wieloetapowym procesie edukacyjnym, wpisującym się w Polską Ramę Kwalifikacji. Dokonano krytycznej, ale wyważonej oceny istniejących rozwiązań i zaproponowano szereg modyfikacji i usprawnień oraz nowy model trajektorii uczenia się.

dr hab. inż. Przemysław Ignaciuk, prof. nadzw.

Jako matematyk, z pośród wielu spraw przedstawionych w tej monografii wyróżniłbym sprawę myślenia komputacyjnego, które przedstawia pewien styl myślenia dostępny już na początkowych szczeblach nauczania z prostym kalkulatorem w ręku za kilka złotych, ale w pełni ukazuje swoje zalety przy użyciu mocnych współczesnych narzędzi.

prof. em. dr hab. Wacław Zawadowski

ISBN 978-83-7283-993-0