

Ryszard Szwarc
Instytut Matematyczny
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 13 września 2017

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
„Wybrane analogie między zbiorami zerowymi Haara a zbiorami
pierwszej kategorii Haara oraz pewne zastosowania do równań
funkcyjnych”
dr. Elizy Jabłońskiej

Rozprawa habilitacyjna składa się z 6 niedługich prac opublikowanych w *Annales Mathematicae Silesianae*, *Aequationes Mathematicae*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Journal of Mathematical Inequalities*, *Analysis Mathematica* oraz w *Topology and its Applications*. Tak więc rozprawa opublikowana została w czasopismach matematycznych o dobrym i średnim poziomie. Wszystkie prace rozprawy są samodzielne.

Po doktoracie w 2007 dr Eliza Jabłońska opublikowała poza tym 21 prac, m.in. w *Nonlinear Analysis*, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *Acta Mathematica Hungarica*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* oraz w *Journal of Fixed Point Theory and Applications*. Mathematical Reviews podaje informacje o 103 cytowaniach przez 25 autorów prac Elizy Jabłońskiej. Według serwisu Google Scholar liczba cytowań wynosi 105.

Tematyka rozprawy dotyczy małych zbiorów w przemiennej polskiej grupach topologicznych, czyli grupach homeomorficznych z ośrodkowymi zupełnymi przestrzeniami metrycznymi oraz równań funkcyjnych na tych grupach. W szczególności wyniki rozprawy można zastosować do ośrodkowych przestrzeni Banacha. Część badań została zainspirowana dwoma twierdzeniami Steinhausa:

1. Jeśli A jest podzbiorem $\mathbb{R}$ dodatniej miary Lebesgue'a, to liczba 0 leży we wnętrzu różnicy kompleksowej zbioru A , czyli w $\text{int}(A - A)$.
2. Jeśli A i B są zbiorami dodatniej miary Lebesgue'a na prostej, to zbiór $A + B$ ma niepuste wnętrze.

Twierdzenia te przenoszą się na lokalnie zwarte polskie grupy abelowe, gdzie miara Lebesgue'a jest zastąpiona miarą Haara. Są również topologiczne odpowiedniki, gdzie miara jest zastąpiona przez kategorię Baire'a. Rolę zbioru o dodatniej mierze pełni zbiór drugiej kategorii Baire'a.

W przypadku przemiennych polskich grup topologicznych miara Haara nie musi istnieć, ze względu na brak lokalnej zwartości. Pomimo to w pracach P. Christensena z lat 70-tych zaproponowano określenie tzw. zbiorów zerowych Haara. Z drugiej strony w pracy U. Darje'go wprowadzono określenie tzw. zbiorów Haara pierwszej kategorii. To stało się punktem wyjścia do badań dr. Elizy Jabłońskiej w pracach [J3], [J5] i [J6]. W szczególności w pracy [J3] udowodnione zostało twierdzenie analogiczne do 1. dla zbiorów borelowskich, które nie są zbiorami pierwszej kategorii Haara. W pracy [J3] badane są relacje pomiędzy wymienionymi wyżej własnościami. W szczególności skonstruowano w przestrzeniach ciągłych przykład zbioru pierwszej kategorii Haara, nie będący zbiorem zerowym Haara. Podano konstrukcję zbioru zerowego Haara, który nie jest pierwszej kategorii Haara, ale jest pierwszej kategorii Baire'a. Narzędziem do uzyskania tych przykładów było badanie zachowania się wymienionych własności przy iloczynie kartezjańskim przestrzeni.

Praca [J6] również zawiera twierdzenia analogiczne do 1. Rozumowania są modyfikacją argumentów użytych w pracy Z. Gajdy z 1986. Podobne badania były przeprowadzone w pracy [J5].

W pracach [J1], [J2] i [J4] rozważana jest automatyczna ciągłość funkcji spełniających pewne równania funkcyjne: np. funkcji addytywnych, funkcji wypukłych w sensie Jensena tzn. spełniających warunek

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Badane są też równania Gołąba-Schinzla czyli równania

$$f(x + f(x)y) = f(x)f(y)$$

i jego uogólnień. W szczególności kandydatka bada równanie

$$f(x + M(f(x))y) = f(x)f(y).$$

W pracy [J2] podana jest charakteryzacja funkcji f i M , dla których równanie ma rozwiązanie, przy czym $M : \mathbb{R} \longleftrightarrow \mathbb{R}$ natomiast $f : X \longleftrightarrow \mathbb{R}$, gdzie X jest rzeczywistą polską przestrzenią liniową. Trochę zdziwił mnie fakt, że w pracy [J2] nie jest cytowana praca A. Mureńko, On solutions of a common generalization of the Gołab-Schinzel equation and of the addition formulae, *J. Math. Anal. Appl.* **341** (2008) 1236–1240, w której rozważane jest to samo równanie, ale $X = \mathbb{R}$.

Pomimo, że wiele wyników z rozprawy habilitacyjnej można uznać za wartościowe, to w mojej opinii dotyczą one dziedziny, która leży nieco obok

głównych nurtów badań w analizie matematycznej i topologii. Badane pojęcia i obiekty nie leżą w centrum zainteresowania analizy. Dr Eliza Jabłońska brała udział w wielu konferencjach dotyczących omawianej wyżej tematyki. Jednak trudno uznać, że konferencje te gromadziły liczących się specjalistów z analizy rzeczywistej i topologii.

Prace nie wchodzące w skład rozprawy habilitacyjnej dotyczą zagadnień bliskich tematyce rozprawy. W większości tych prac badane są równania Gołąba-Schinzla.

Podsumowując nie jestem w pełni przekonany, że osiągnięcia dr. Elizy Jabłońskiej w pracach [J1-J6] stanowią znaczny wkład w rozwój analizy rzeczywistej i topologii. Kilka wyników jest wartych uwagi (np. z prac [J2], [J3], [J5]). W cyklu prac habilitacyjnych nie odnalazłem jednak istotnie nowych, oryginalnych metod dowodowych, które można przypisać dr. Elizie Jabłońskiej. Na korzyść kandydatki przemawiają liczne prace opublikowane po uzyskaniu doktoratu. Nie odnalazłem jednak wyników, które mógłbym uznać za znaczące. Dr Eliza Jabłońska uzyskała nagrody naukowe z Politechniki Rzeszowskiej, ale brak jest informacji o grantach zewnętrznych.

W mojej opinii zarówno rozprawa habilitacyjna, jak i dorobek poza rozprawą, nie spełniają wymagań wystarczających do przyznania stopnia doktora habilitowanego. W związku z powyższym nie popieram wniosku o nadanie dr. Elizie Jabłońskiej stopnia dr. hab..

R. L. Sc