

ZDZISŁAW WIĘCKOWSKI

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska
Politechniki Łódzkiej
Katedra Mechaniki Materiałów

MODELOWANIE PROCESU INSTALACJI PAŁA W GRUNCIE¹

Opiniodawca: **dr hab. inż. Andrzej Truty, prof. PK**

W pracy rozważa się zagadnienie modelowania procesu instalacji pała w gruncie. Zjawisko bardzo dużych odkształceń gruntu, występujące w tym procesie, zostało przeanalizowane za pomocą metody punktów materialnych – wariantu metody elementów skończonych, sformułowanego w dowolnym materialno-przestrzennym opisie ruchu.

1. Wprowadzenie

W wielu zagadnieniach mechaniki gruntów i ośrodków sypkich występuje konieczność analizy dużych odkształceń. Jako przykłady takich zagadnień można wymienić modelowanie procesu instalacji pała w gruncie, analizę skutków awarii ściany oporowej [12] oraz procesy opróżniania i napełniania zbiorników na materiały sypkie [8, 12]. Modelowanie wspomnianych procesów jest zagadnieniem o znacznym stopniu złożoności obliczeniowej. Wynika to z takich czynników, jak: dynamika procesu, nieliniowości fizyczne – nieliniowy model konstytutywny materiału i zjawisko tarcia materiału o ścianę zbiornika lub oporową, nieliniowości geometryczne – skończone przemieszczenia i odkształcenia. Niektóre z zagadnień można stosunkowo łatwo rozwiązać stosując opis ruchu Eulera, np. modelowanie

¹Praca jest poświęcona pamięci Profesora PŁ, dra hab. inż. Wojciecha Barańskiego (1940–2011).

procesu opróżniania zbiornika w przypadku założenia, że zawartość zbiornika jest stale uzupełniana w trakcie procesu [2, 3].

W analizie procesu instalacji pala w gruncie, gdzie istnieje konieczność śledzenia powierzchni styku pala i gruntu bardziej korzystne jest zastosowanie opisu ruchu Lagrange'a. Wykorzystanie tego opisu jest również wygodniejsze w przypadku modelowania procesu opróżniania zbiornika bez uzupełniania jego zawartości, ponieważ łatwiej w tym opisie śledzić położenie powierzchni swobodnej, a także w przypadku modelowania awarii ściany oporowej, gdzie dodatkowo należy wyznaczyć bieżącą powierzchnię kontaktu powierzchni ściany i gruntu [8, 12]. W przypadku zastosowania standardowo sformułowanej w opisie Lagrange'a metody elementów skończonych prowadzi to jednak do znacznych zniekształceń elementów siatki obliczeniowej (modyfikowanej po każdym przyroście czasu), co oznacza konieczność stosowania regeneracji siatki i odwzorowywania zmiennych stanu ze starej siatki do nowej [7]. Odwzorowanie to jest procedurą złożoną i numerycznie kosztowną. Ponadto wprowadza dodatkowe błędy obliczeniowe, powodujące ograniczenie niezawodności metody elementów skończonych w jej standardowym sformułowaniu.

W ostatnich latach obserwuje się rozwój metod obliczeniowych, w których dyskretyzacji obszaru ciała dokonuje się raczej za pomocą zbioru punktów, a nie siatki elementów. Jedną z nich jest metoda punktów materialnych, znana w literaturze anglojęzycznej jako *particle-in-cell method* lub *material point method* (MPM). Metoda ta jest szerzej znana w mechanice płynów [4], a w ostatnim dziesięcioleciu XX wieku została wykorzystana również w mechanice ciała stałego [5, 6], także w analizie procesów opróżniania i napełniania zbiornika [8, 12]. Metodę punktów materialnych można zaliczyć do grupy metod wykorzystujących materialno-przestrzenny opis ruchu, ponieważ równania ruchu są sformułowane w opisie Eulera, a historia pól naprężeń, odkształceń i innych zmiennych stanu jest śledzona na zbiorze punktów związanych z cząstkami ciała. Szczegółowy opis metody punktów materialnych i jej zastosowania w zagadnieniach przepływów materiałów sypkich można znaleźć w pracach [8]–[12].

Własności mechaniczne gruntu lub materiału sypkiego można opisać za pomocą modelu sprężysto-idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Druckera–Pragera i niestowarzyszonym prawem, jak w pracach [7, 8] lub stosując model sprężysto-lepkoplastyczny jak w pracy [12]. Zależność pomiędzy dewiatorami prędkości naprężenia i odkształcenia w tym drugim modelu można traktować jako regularyzację modelu sprężysto-idealnie plastycznego. W przypadku zagadnienia dynamicznego, model sprężysto-lepkoplastyczny pozwala wyznaczyć rozwiązanie, które nie charakteryzuje się zależnością szerokości pasm ścinania od wielkości elementów siatki obliczeniowej, co ma miejsce w przypadku modelu sprężysto-idealnie plastycznego lub modeli z osłabieniem. W niniejszej pracy do

opisu gruntu zastosowano model sprężysto-lepkoplastyczny. Wykorzystanie innych, w tym bardziej złożonych modeli konstytutywnych, jak modele hipoplastyczne, opisano w pracach [9]–[11].

2. Sformułowanie zagadnienia

Niech $\Omega \subset \mathcal{R}^3$ oznacza obszar zajmowany przez materiał sypki w chwili $t \in I \equiv [0, T]$, gdzie $T > 0$. Załóżmy, że brzeg obszaru składa się z dwóch podobszarów Γ_u i Γ_σ takich, że $\overline{\Gamma_u} \cup \overline{\Gamma_\sigma} = \partial\Omega$, $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$.

Rozwiązanie rozważanego zagadnienia spełnia związki przedstawione w poniższych punktach.

2.1. Równania ruchu

Równania ruchu mają następującą postać:

$$\sigma_{ij,j} + \rho b_i - \rho a_i = 0 \quad \text{na } \Omega,$$

gdzie σ_{ij} oznacza tensor naprężenia Cauchy'ego, ρ – gęstość, b_i i a_i są odpowiednio wektorami sił masowych i przyspieszenia.

2.2. Związki konstytutywne

W analizie przedstawionego w pracy zagadnienia wykorzystano model sprężysto-lepkoplastyczny gruntu, który jest regularyzacją modelu sprężysto-idealnie plastycznego z warunkiem plastyczności Druckera–Pragera i niestowarzyszonym prawem płynięcia, które spełnia warunek plastycznej nieściśliwości materiału. Niech B oznacza wypukły zbiór naprężeń plastycznie dopuszczalnych,

$$B = \{\tau_{ij} : f(\tau_{ij}) \equiv q - mp \leq 0\},$$

gdzie parametr $m = 18 \sin \varphi / (9 - \sin^2 \varphi)$ jest funkcją kąta tarcia wewnętrznego φ , p i q są niezmiennikami stanu naprężenia

$$p = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}, \quad q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}},$$

gdzie $s_{ij} \equiv \sigma_{ij} + p \delta_{ij}$ oznacza dewiator tensora naprężenia. Niech d_{ij} i e_{ij} oznaczają – odpowiednio – tensor prędkości odkształceń i jego część dewiacyjną zgodnie z poniższymi związkami:

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}), \quad e_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{3} d_{kk} \delta_{ij},$$

gdzie kropka ponad symbolem pola przemieszczenia u oznacza pochodną względem czasu. Związki konstytutywne w przypadku modelu sprężysto-idealnie plastycznego można zapisać w następującej postaci:

$$\dot{p} = -K d_{kk}, \quad (1)$$

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p, \quad (2)$$

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij}, \quad (3)$$

$$e_{ij}^p = \begin{cases} \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} & \text{jeśli } f(\sigma_{ij}) = 0 \\ 0 & \text{jeśli } f(\sigma_{ij}) < 0 \end{cases}, \quad (4)$$

gdzie $\dot{\lambda} \geq 0$, a g oznacza funkcję płynięcia zdefiniowaną związkiem $g = q$. Powyżej użyto następujących oznaczeń: e_{ij}^e i e_{ij}^p oznaczają odpowiednio części sprężystą i plastyczną dewiatora tensora prędkości deformacji, $\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj} - \sigma_{jk} \dot{\omega}_{ki}$ jest miarą Zaremby–Jaumanna tensora prędkości naprężeń, $\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} (\dot{u}_{j,i} - \dot{u}_{i,j})$ oznacza tensor spinu, K jest modułem ściśliwości, a G – modułem Kirchhoffa.

Wykorzystany w pracy model konstytutywny jest lepkoplastyczną regularyzacją modelu sprężysto-idealnie plastycznego, przedstawionego powyżej. Jest on opisany następującymi związkami:

$$\dot{p} = -K d_{kk}, \quad (5)$$

$$e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^{vp}, \quad (6)$$

$$e_{ij}^e = \frac{1}{2G} s_{ij}, \quad (7)$$

$$e_{ij}^{vp} = \begin{cases} \gamma \Phi(f) \frac{\partial g}{\partial s_{ij}} & \text{jeśli } f > 0 \\ 0 & \text{jeśli } f \leq 0 \end{cases}, \quad (8)$$

gdzie e_{ij}^{vp} oznacza część lepkoplastyczną dewiatora odkształcenia, γ jest współczynnikiem lepkości, a funkcja $\Phi(f)$ jest zdefiniowana związkiem

$$\Phi(f(\sigma_{ij})) = \left(\frac{q - m p}{m p} \right)^N, \quad N > 0.$$

2.3. Warunki brzegowe i kontaktu

Zakłada się, że na brzegach Γ_u i Γ_σ dane są odpowiednio przemieszczeniowe i naprężeniowe warunki brzegowe

$$\begin{aligned} u_i &= U_i \text{ na } \Gamma_u, \\ \sigma_{ji} n_j &= t_i \text{ na } \Gamma_\sigma, \end{aligned}$$

gdzie t_i oznacza wektor Cauchy'ego, a n_i jednostkowy wektor zewnętrznym normalny do powierzchni $\partial\Omega$.

W pracy przyjęto, że na styku powierzchni pala i gruntu nie występuje względny poślizg cząstek obu materiałów. Analiza takiego modelu jednostronnego kontaktu metodą punktów materialnych jest możliwa bez stosowania dodatkowych narzędzi obliczeniowych, takich jak np. elementy kontaktowe w przypadku metody elementów skończonych. Poślizg w rozważanym modelu zachodzi w cienkiej warstwie materiału sypkiego (gruntu) w otoczeniu powierzchni pala. Metoda punktów materialnych umożliwia separację dwóch ciał będących w potencjalnym stanie kontaktu, ale jednocześnie zapobiega wzajemnej penetracji (przenikania się) obu ciał.

2.4. Warunki początkowe

Warunki początkowe mają postać

$$u_i(0) = u_i^s, \quad \dot{u}_i(0) = v_i^s, \quad \sigma_{ij}(0) = \sigma_{ij}^s,$$

gdzie u_i^s jest statycznym polem przemieszczeń wywołanym obciążeniem grawitacyjnym, $v_i^s = 0$, σ_{ij}^s oznacza odpowiadające przemieszczeniom pole naprężeń. Początkowe pola przemieszczenia i naprężenia wyznaczono, rozwiązując zagadnienie quasi-statyczne, przy założeniu, że obciążenie grawitacyjne rośnie monotonicznie od wartości zerowej do wartości określonej przez przyspieszenie ziemskie.

3. Rozwiązanie zagadnienia

Rozważane zagadnienie rozwiązano za pomocą metody punktów materialnych, której punktem wyjścia jest – podobnie jak i standardowej metody elementów skończonych – zasada pracy wirtualnej

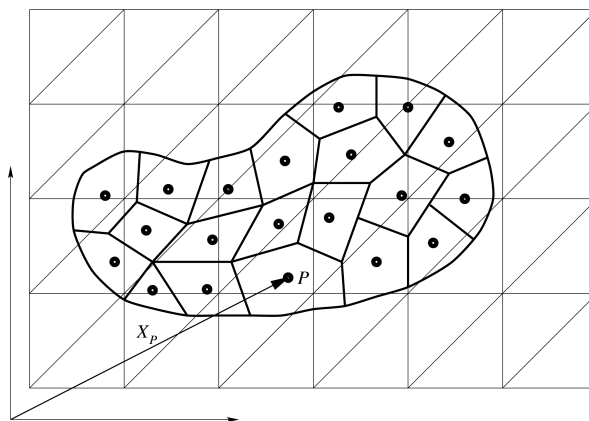
$$\int_{\Omega} \varrho (a_i w_i + \frac{1}{\varrho} \sigma_{ij} w_{i,j}) dx = \int_{\Omega} \varrho b_i w_i dx - \int_{\Gamma_\sigma} \sigma_{ij} n_j w_i ds \quad \forall \mathbf{w} \in V_0, \quad (9)$$

gdzie V_0 oznacza przestrzeń kinematycznie dopuszczalnych pól przemieszczeń $V_0 = \{\mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^3 : w_i = 0 \text{ na } \Gamma_u\}$.

W metodzie punktów materialnych stosuje się dwa rodzaje dyskretyzacji względem przestrzeni: Lagranżowską i Eulerowską. W pierwszej z nich obszar zajmowany w chwili początkowej przez analizowane ciało zostaje podzielony na skończoną liczbę podobszarów. Każdy z tych podobszarów jest reprezentowany przez jeden z punktów należących do podobszaru (np. środek ciężkości podobszaru) – punkt ten jest nazywany punktem materialnym. Zakłada się, że cała masa podobszaru jest skupiona w tym punkcie, czyli że pole gęstości materiału spełnia następujący związek:

$$\varrho(\mathbf{x}) = \sum_{P=1}^N M_P \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_P), \quad (10)$$

gdzie M_P i $\mathbf{X}_P$ oznaczają odpowiednio masę i położenie P -tego punktu materialnego, $\delta(\mathbf{x})$ oznacza funkcję Diraca, a N – liczbę punktów materialnych. Historia wszystkich zmiennych stanu, jak pola prędkości, naprężenia, odkształcenia, gęstości masy jest śledzona w punktach materialnych, co jest cechą charakterystyczną Lagranżowskiego sposobu opisu ruchu. Z drugiej strony, równanie pracy wirtualnej jest sformułowane i rozwiązane przy użyciu tzw. siatki obliczeniowej, jak w sformułowaniu Eulerowskim. Siatka obliczeniowa powinna pokrywać obszar możliwych konfiguracji analizowanego ciała i może być definiowana w sposób dowolny – może pozostawać niezmienna w całym procesie obliczeniowym lub być modyfikowana. Oba rodzaje dyskretyzacji przestrzennej przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Dyskretyzacja przestrzenna w metodzie punktów materialnych – punkty materialne i obliczeniowa siatka elementów

Fig. 1. Spatial discretisation in the material point method, material points and a computational element mesh

Wykorzystując związek (10) w równaniu pracy wirtualnej (9), otrzymujemy

$$\sum_{P=1}^N M_P \left(a_i(\mathbf{X}_P) w_i(\mathbf{X}_P) + \sigma_{ij}^e(\mathbf{X}_P) w_{i,j}(\mathbf{X}_P) \right) = \sum_{P=1}^N M_P b_i(\mathbf{X}_P) w_i(\mathbf{X}_P) + \int_{\Gamma_\sigma} t_i w_i ds, \quad (11)$$

gdzie $\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}/\varrho$. Równanie (11) jest ważne również w przypadku zagadnienia osiowosymetrycznego, gdzie zamiast równania (10) należy wykorzystać związek

$$\varrho(\mathbf{x}) = \sum_{P=1}^N M_P \frac{1}{2\pi x} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}_P), \quad (12)$$

przy czym zakłada się, że współrzędne są oznaczone symbolami (x, y, Θ) zamiast (r, z, Θ) . Pola $\mathbf{a}$ i $\mathbf{w}$ przybliża się analogicznie jak w metodzie elementów skończonych. W przypadku zagadnień dwuwymiarowych przybliżenia tych pól mają następującą postać macierzową:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{a}, \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} w_x \\ w_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{w}, \quad (13)$$

gdzie $\mathbf{N}$ jest globalną macierzą funkcji interpolacyjnych określonych na obliczeniowej siatce elementów

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) & 0 & \dots & N_n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & N_1(\mathbf{x}) & 0 & N_2(\mathbf{x}) & \dots & 0 & N_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix},$$

natomiast

$$\mathbf{a} \equiv [a_{1x} \ a_{1y} \ a_{2x} \ \dots \ a_{nx} \ a_{ny}]^T, \\ \mathbf{w} \equiv [w_{1x} \ w_{1y} \ w_{2x} \ \dots \ w_{nx} \ w_{ny}]^T$$

są wektorami wartości węzłowych pól odpowiednio $\mathbf{a}$ i $\mathbf{w}$, wskaźnik n oznacza liczbę węzłów siatki obliczeniowej.

Niech będą zdefiniowane następujące wektory:

$$\mathbf{s}^e = \frac{1}{\varrho} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{\Theta\Theta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

gdzie w definicji wektora $\mathbf{s}^\varrho$ ostatni wyraz występuje w przypadku zagadnienia osiowosymetrycznego. Stosując związki (13) i (14) w równaniu (11), otrzymujemy dyskretną postać równania pracy wirtualnej w rozpatrywanym zagadnieniu dynamicznym

$$\begin{aligned} & \mathbf{w}^T \sum_{P=1}^N M_P \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_P) \mathbf{N}(\mathbf{X}_P) \mathbf{a} + \mathbf{w}^T \sum_{P=1}^N M_P \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_P) \mathbf{s}^\varrho(\mathbf{X}_P) = \\ & \mathbf{w}^T \sum_{P=1}^N M_P \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_P) \mathbf{b}(\mathbf{X}_P) + \mathbf{w}^T \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, ds. \end{aligned}$$

Ponieważ równanie to powinno być spełnione w przypadku dowolnego wektora $\mathbf{w}$ z wyjątkiem stopni swobody określonych w węzłach leżących na Γ_u , otrzymujemy następujący układ równań dynamicznych:

$$\mathbf{M} \mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{R}, \quad (15)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \sum_{P=1}^N M_P \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_P) \mathbf{N}(\mathbf{X}_P), \\ \mathbf{F} &= \sum_{P=1}^N M_P \mathbf{N}^T(\mathbf{X}_P) \mathbf{b}(\mathbf{X}_P) + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, ds, \\ \mathbf{R} &= \sum_{P=1}^N M_P \mathbf{B}^T(\mathbf{X}_P) \mathbf{s}^\varrho(\mathbf{X}_P). \end{aligned} \quad (16)$$

Macierz $\mathbf{B}$ występująca w definicji wewnętrznych sił węzłowych (16)₃ wyraża zależność między odkształceniami w punkcie materialnym i przemieszczeniami węzłów elementu siatki obliczeniowej – macierz ta ma taką samą budowę jak analogiczna macierz w klasycznej metodzie elementów skończonych

$$\mathbf{B}(\mathbf{X}_P) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x}(\mathbf{X}_P) & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x}(\mathbf{X}_P) & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y}(\mathbf{X}_P) & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y}(\mathbf{X}_P) & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial y}(\mathbf{X}_P) & \frac{\partial N_1}{\partial x}(\mathbf{X}_P) & \frac{\partial N_2}{\partial y}(\mathbf{X}_P) & \frac{\partial N_2}{\partial x}(\mathbf{X}_P) & \dots \\ \frac{N_1}{x}(\mathbf{X}_P) & 0 & \frac{N_2}{x}(\mathbf{X}_P) & 0 & \dots \end{bmatrix},$$

gdzie ostatni wiersz występuje w przypadku zagadnienia osiowosymetrycznego.

Ponieważ pole gęstości masy jest reprezentowane przez kombinację liniową funkcji Diraca, macierz mas $\mathbf{M}$ jest osobliwa w przypadku ciała swobodnego. Aby rozwiązać układ równań (15), macierz $\mathbf{M}$ należy zastąpić macierzą zdiagonalizowaną $\mathbf{M}_l$, która ma składowe

$$M_{lij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^n M_{ik} & \text{jeśli } i = j, \\ 0 & \text{jeśli } i \neq j, \end{cases}$$

lub macierzą prawie konsekwentą $\mathbf{M}_\alpha = \alpha \mathbf{M} + (1 - \alpha) \mathbf{M}_l$, gdzie $0 \leq \alpha < 1$ [1]. W niniejszym artykule zastosowano macierz zdiagonalizowaną, co zmniejsza czasochłonność obliczeń.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że inaczej niż w przypadku metody elementów skończonych sformułowanej w materialnym opisie ruchu, macierz mas $\mathbf{M}$ i składnik wektora sił węzłowych $\mathbf{F}$, odpowiadający obciążeniom masowym, nie są stałe i zależą od położenia punktów materialnych względem siatki obliczeniowej.

Rozwiązanie układu równań dynamicznych (15) wyznaczono rozpatrując dyskretny zbiór chwil czasu $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots \in I$ ($0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \dots < T$), stosując jawną procedurę całkowania względem czasu. Obliczenia odpowiadające każdemu przyrostowi czasu można podzielić na dwa kroki: krok Lagranżowski i krok konwekcyjny.

W kroku Lagranżowskim obliczenia wykonuje się jak w przypadku klasycznej metody elementów skończonych sformułowanej w materialnym opisie ruchu – zakłada się, że siatka obliczeniowa odkształca się razem z analizowanym ciałem. Wartości zmiennych stanu są obliczane w punktach materialnych przy użyciu funkcji interpolacyjnych zdefiniowanych na elementach siatki obliczeniowej. Po wyznaczeniu przyspieszeń węzłów siatki na drodze rozwiązania układu równań (15) i obliczeniu prędkości w węzłach, wektor prędkości P -tego punktu materialnego $\mathbf{V}_P \equiv [V_{Px} \ V_{Py}]^T$ oblicza się ze związku

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{N}(\mathbf{X}_P) \mathbf{v}^e,$$

gdzie

$$\mathbf{v}^e = [v_{1x} \ v_{1y} \ v_{2x} \ v_{2y} \ \dots \ v_{n_{ex}} \ v_{n_{ey}}]^T$$

jest wektorem prędkości węzłów elementu, w obszarze którego leży rozpatrywany punkt materialny. Przyrost odkształcenia wyznacza się, wykorzystując macierz $\mathbf{B}$, według wzoru

$$\Delta \mathbf{e} = \Delta t \mathbf{B}(\mathbf{X}_P) \mathbf{v}^e,$$

gdzie

$$\Delta \mathbf{e} \equiv \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{xx} \\ \Delta \varepsilon_{yy} \\ \Delta \gamma_{xy} \\ \Delta \varepsilon_{\theta\theta} \end{Bmatrix} = \Delta t \begin{Bmatrix} d_{xx} \\ d_{yy} \\ d_{xy} \\ d_{\theta\theta} \end{Bmatrix}.$$

Następnie oblicza się naprężenia, stosując związki konstytutywne.

Krok konwekcyjny polega na odwzorowaniu pola prędkości z punktów materialnych do węzłów obliczeniowej siatki elementów, która może pozostać taka sama jak w poprzednim kroku czasowym albo przyjąć dowolnie inne położenie. Wektor prędkości węzłowych

$$\mathbf{v} = [v_{1x} \ v_{1y} \ v_{2x} \ v_{2y} \ \dots \ v_{nx} \ v_{ny}]^T$$

wyznacza się, rozwiązując układ równań [1, 5, 6]

$$\mathbf{M} \mathbf{v} = \mathbf{S}^T \mathbf{M}_d \mathbf{V}, \quad (17)$$

którego lewa strona reprezentuje pęd układu wyrażony przez prędkości punktów materialnych, a prawa – pęd układu wyrażony przez prędkości węzłów siatki obliczeniowej, gdzie

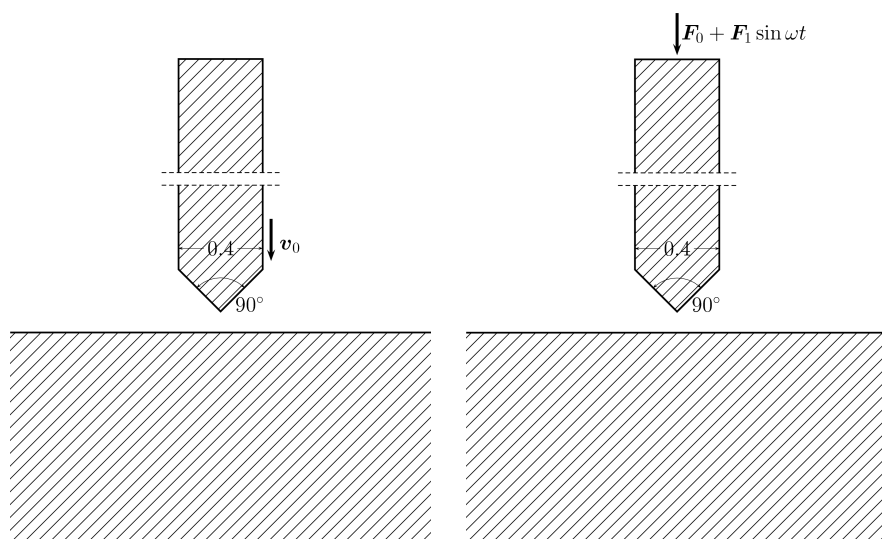
$$\mathbf{V} = [V_{1x} \ V_{1y} \ V_{2x} \ V_{2y} \ \dots \ V_{Nx} \ V_{Ny}]^T \quad (18)$$

jest wektorem prędkości wszystkich punktów materialnych, a macierze $\mathbf{S}$ i $\mathbf{M}_d$ są zdefiniowane następująco:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}(\mathbf{X}_1) \\ \mathbf{N}(\mathbf{X}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{N}(\mathbf{X}_N) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} M_i & 0 \\ 0 & M_i \end{bmatrix}. \quad (19)$$

4. Wyniki obliczeń

Rozważono zagadnienie instalacji pała (brusa) o przekroju poziomym w kształcie wydłużonego prostokąta w gruncie bez kohezji. Przekrój pionowy pała przedstawiono na rys. 2. Przyjęto dwa warianty instalacji pała: 1) wciskanie ze stałą prędkością; 2) instalacja wymuszona siłą przyłożoną na górnym końcu pała. Zachowanie mechaniczne gruntu opisano modelem ciała sprężysto-lepkoplastycznego, natomiast pała – modelem ciała liniowo sprężystego. Przyjęte w obliczeniach parametry materiałowe zestawiono w tabeli 1.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny pała, grubość ścianki w m. Wciskanie pała ze stałą prędkością (po lewej), instalacja wymuszona siłą na górnym końcu (po prawej)

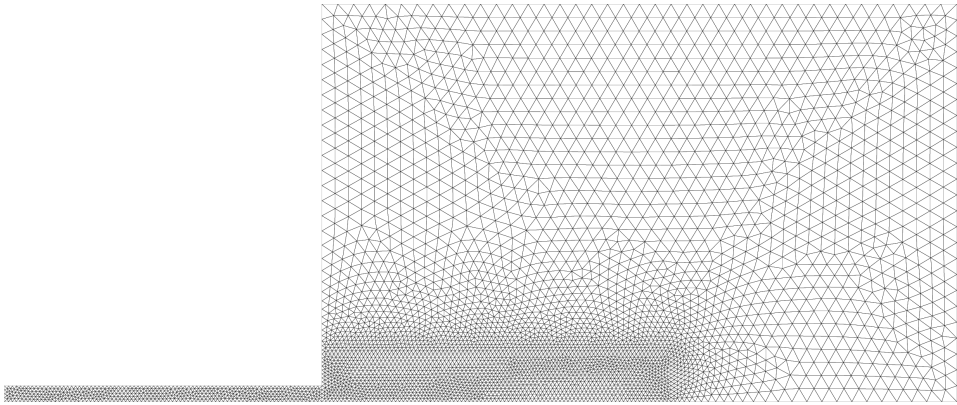
Fig. 2. Cross-section of a plank pile, wall thickness in metres. Pile driving with a constant velocity (left), pile driven with a force applied on the top (right)

Tabela 1. Parametry materiałowe

Table 1. Material parameters

parametr	jednostka miary	grunt	pał
E	Pa	$2 \cdot 10^6$	$3.5 \cdot 10^{10}$
ν	—	0.3	0.1667
φ	°	30	—
γ	s^{-1}	50	—
N	—	1	—
ϱ	kg/m^3	1500	2500

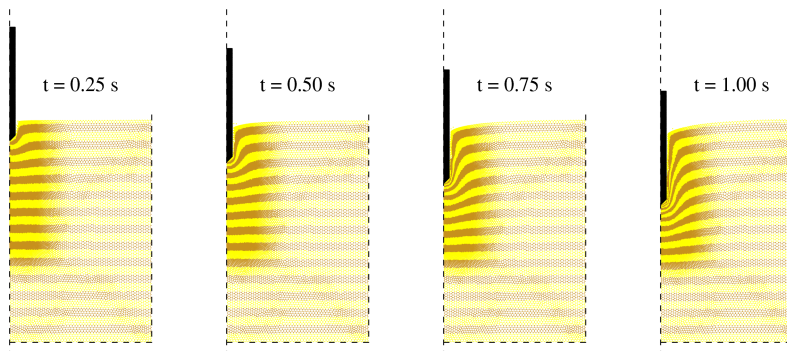
Zastosowana w obliczeniach siatka obliczeniowa zawiera 8516 trójwęzłowych elementów trójkątnych i 4451 węzłów (rys. 3); liczba wprowadzonych punktów materialnych jest równa 33920. Wykorzystując symetrię układu, w analizie rozpatrzone jedną połowę obszaru obliczeniowego. Wielkość przyrostu czasu w jawnej procedurze całkowania równań dynamicznych przyjęto $\Delta t = 5 \cdot 10^{-6}$ s. Przedstawione poniżej wyniki liczbowe uzyskano przy założeniu, że szerokość pała w kierunku prostopadłym do płaszczyzny rys. 2 jest równa 1 m.



Rys. 3. Zagadnienie wciskania pala – siatka obliczeniowa (obrócona o 90°)

Fig. 3. Problem of pile driving, computation mesh turned with 90 degrees

Na rys. 4 przedstawione są cztery fazy historii deformacji gruntu w przypadku procesu wciskania pala z ustaloną prędkością $v_0 = 3$ m/s. Obserwuje się bardzo duże odkształcenia postaciowe w otoczeniu powierzchni pala.



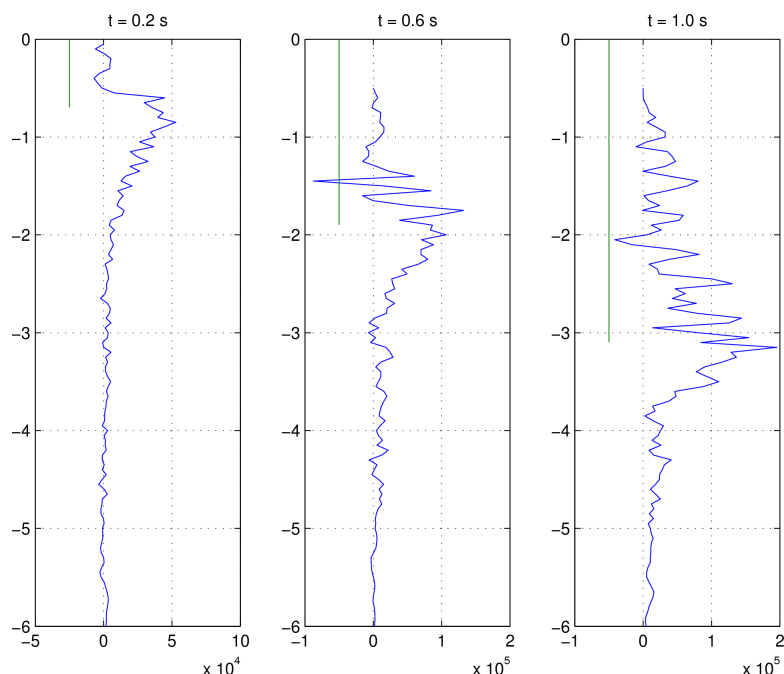
Rys. 4. Etapy procesu wciskania pala z ustaloną prędkością

Fig. 4. Stages of the process of pile driving with constant velocity

Na rys. 5 pokazany jest rozkład naprężeń stycznych na powierzchni bocznej pala i na jej przedłużeniu w gruncie poniżej głowicy w przypadkach trzech zagłębień pala odpowiadających chwilom czasu: 0.2, 0.6 i 1.0 s. Na wykresach zaznaczono aktualne zagłębienie pala; naprężenia styczne w obszarze położonym poniżej ostrza pala są wywołane przez falę generowaną ruchem pala.

Drugi z rozważonych w pracy przypadków instalacji pala jest związany z zastosowaniem obciążenia górnego końca pala pionową siłą, zależną od czasu zgodnie ze wzorem

$$F(t) = F_0 + F_1 \sin \omega t.$$



Rys. 5. Rozkład naprężeń stycznych [Pa] na pobocznicę pała i jej przedłużeniu

Fig. 5. Distribution of shear stresses in Pa on pile surface and its extension

Rozpatrzono cztery wielkości obciążenia zestawione w tabeli 2. Częstość siły wymuszającej przyjęto w obliczeniach równą $\omega = 31.416$ rad/s.

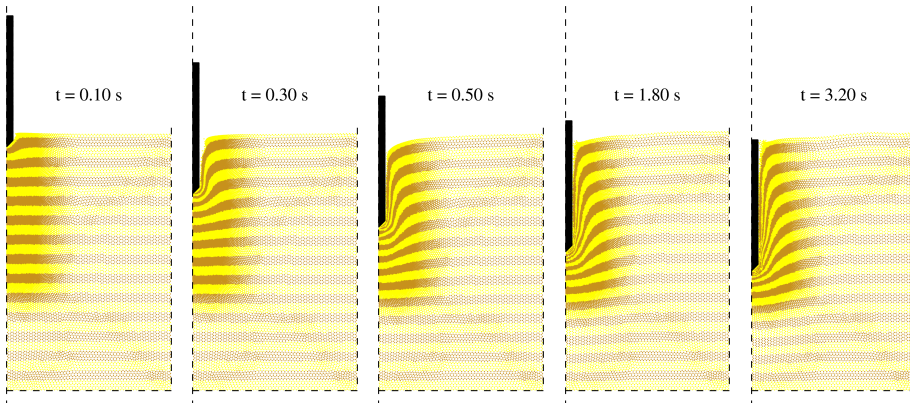
Tabela 2. Warianty obciążenia pała

Table 2. Pile load cases

wariant	F_0 [kN]	F_1 [kN]
1	2	2
2	10	10
3	50	50
4	100	100

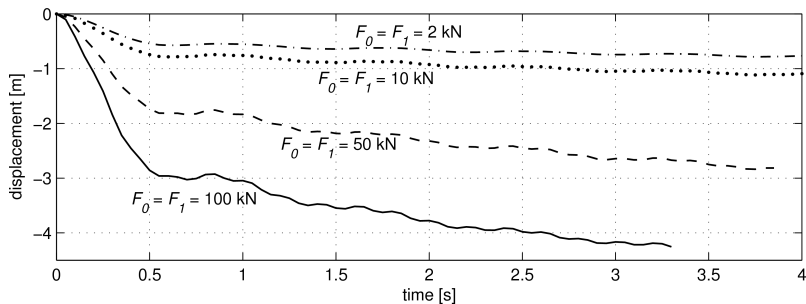
Kilka etapów procesu zagłębiania pała w przypadku zastosowania największej wartości obciążenia (wariant 4, tabela 2) jest przedstawionych na rys. 6. Podobnie jak w poprzednim przypadku, obserwuje się bardzo duże deformacje gruntu w otoczeniu ostrza pała i jego powierzchni.

Na rys. 7 zilustrowany jest przebieg w czasie zagłębiania ostrza pała w zależności od wielkości siły wymuszającej jego ruch. Z wykresu wynika, że zastosowana metoda pozwala oszacować obciążenie potrzebne do instalacji pała, a także oszacować jego nośność.



Rys. 6. Etapy procesu instalacji pała siłą przyłożoną na górnym końcu

Fig. 6. Phases of the installation process for pile driven by a force applied on the top



Rys. 7. Zależność zagłębienia ostrza pała w czasie w zależności od wielkości obciążenia

Fig. 7. Dependency of displacement of the pile edge on the force magnitude

Literatura

- [1] **Burgess D., Sulsky D., Brackbill J.U.**, Mass matrix formulation of the FLIP particle-in-cell method, *J. Comput. Phys.*, Vol. 103, 1–15 (1992).
- [2] **Eibl J., Jandahl H., Häussler U., Gladen W.**, Zur Frage des Silodrucks, *Beton- und Stahlbetonbau*, Vol. 4, 104–110, (1982).
- [3] **Häussler U., Eibl J.**, Numerical investigation on discharging silos, *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 110, 957–971, (1984).
- [4] **Harlow F.H.**, The particle-in-cell computing method for fluid dynamics, in *Methods for Computational Physics*, eds. B. Adler, S. Fernbach, M. Rotenberg, Vol. 3, 319–343, 1964.
- [5] **Sulsky D., Chen Z., Schreyer H.L.**, A particle method for history-dependent materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 118, 179–196, (1994).

- [6] **Sulsky D., Schreyer H.L.**, Axisymmetric form of the material point method with applications to upsetting and Taylor impact problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 139, 409–429, (1996).
- [7] **Więckowski Z., Klisiński M.**, Finite deformation analysis of motion of granular materials in a silo, *Arch. Mech.*, Vol. 47, 617–633, (1995).
- [8] **Więckowski Z., Youn S.K., Yeon J.H.**, A particle-in-cell solution to the silo discharging problem, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 45, 1203–1225, (1999).
- [9] **Więckowski Z.**, The material point method in dynamic problems for granular materials, *Proc. of TUL-ENTPE Workshop "Homogenization Methods in Civil Engineering,"* Szklarska Poręba, January 15–18, 2001, Technical University of Łódź, Department of Mechanics of Materials, Łódź, 99–122, 2002.
- [10] **Więckowski Z.**, Modelling of granular flow in silos: Application of various constitutive models of granular material, *Proc. of TUL-ENTPE Workshop "Experimental Knowledge versus Theoretical Model,"* Szklarska Poręba, March 3–6, 2004, Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat Vaulx-en-Velin, France, Technical University of Łódź, Łódź, Poland, 7–30, 2004.
- [11] **Więckowski Z.**, Zastosowanie metody elementów skończonych w pewnych nieliniowych zagadnieniach mechaniki ciała stałego, *Zeszyty Naukowe Nr 815, Rozprawy Naukowe, Z. 256*, Politechnika Łódzka, Łódź 1999.
- [12] **Więckowski Z.**, The material point method in large strain engineering problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 193, 4417–4438, (2004).

MODELLING OF PILE INSTALLATION PROCESS

Summary

Modelling of the process of pile installation is considered in the paper. The problem of large strains involved in the installation process is analysed with the help of the material point method, a variant of the finite element method formulated in an arbitrary Lagrangian–Eulerian description of motion.