

Dr inż. Włodzimierz A. LUBNAUER

Katedra Dynamiki Maszyn Politechniki Łódzkiej

ANALIZA DYNAMIKI RUCHU WYBRANYCH MODELI UKŁADÓW WAHADEŁ PODWÓJNYCH

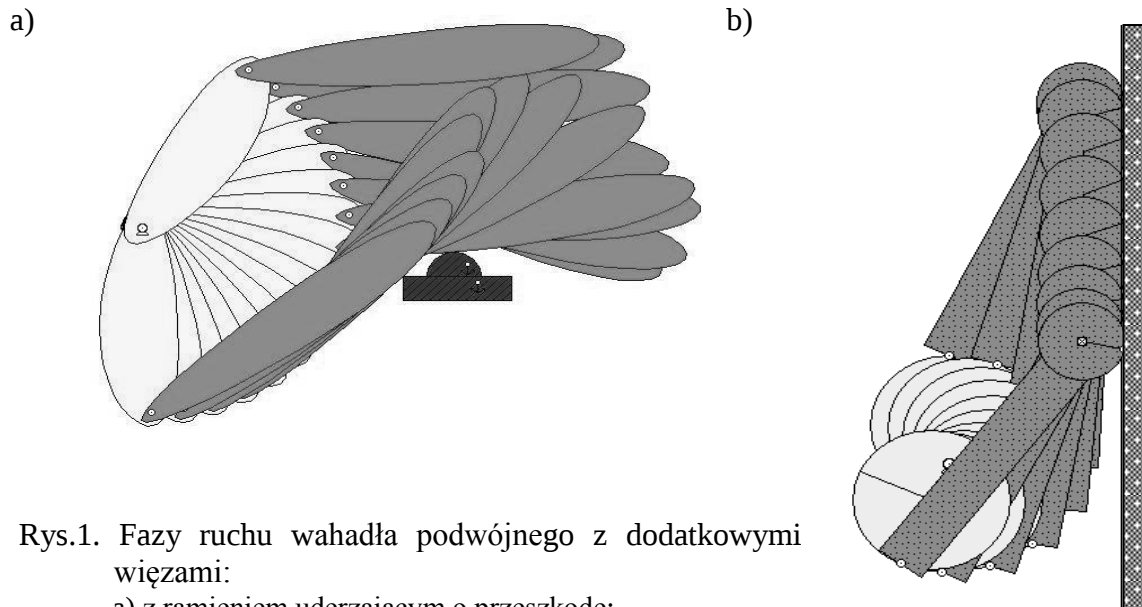
*Streszczenie: W pracy zaprezentowano badania dynamiki ruchu wybranych układów wahadeł podwójnych dokonane poprzez komputerową symulację ruchu ich wirtualnych modeli. Dla charakterystycznych układów wahadeł pokazano możliwości symulacyjne, jakie ma wykorzystywany do tego celu, program **Working Model**[®], firmy Design Simulation Technologies. Pokazano także jego możliwości obliczeniowe i prezentacji wyników.*

ANALYSIS OF THE DYNAMICS OF THE CHOSEN FEW DOUBLE PENDULUM SYSTEMS

*Abstract: In this paper the virtual simulation for analysis of dynamics of non-linear double pendulum systems using **Working Model**[®] software is presented. **Working Model** is an engineering simulation software. Virtual mechanical components are combine with objects in a 2D working space. After the software is run, the program can simulate the interaction of the model's parts and it can also graph the movement and force on any element in the project. It is useful for simulations of dynamics systems. Virtual simulations are the most efficient methods in analyzing the dynamics of the systems. In this paper some results from numerical simulations for chosen non-linear dynamics of double pendulums are shown as diagrams.*

1. WPROWADZENIE

Badania dynamiki wahadła fizycznego i układów wahadeł są ciągle przedmiotem analizy bardzo wielu badaczy. Pierwszy opis takich układów przedstawił w 1673 r. Christiaan Huygens, opisując w dziele *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum*, synchronizację dwóch wahadeł. Zjawisko to uczeni próbują ciągle powtarzać i analizować [9-11]. Od czasów Huygensa pojawiły się dziesiątki prac zajmujących się ruchem zarówno pojedynczego wahadła, jak i układów wahadeł. Aktualność problematyki uwypukla fakt pojawiających się ciągle nowych publikacji, zwłaszcza dla dużych wahań układów wahadeł wielokrotnych (w szczególności podwójnych i potrójnych), wahadeł odwróconych oraz układów wahadeł torsyjnych [4-9]. Analizowane są w nich systemy dynamiczne z wahadłami mającymi narzucone dodatkowe więzy, jak np.: dodatkowe więzy sprężyste [5] lub więzy tarcia oraz ograniczenia ruchu np. przez uwzględnienie uderzenia ramion wahadeł o przeszkody, jak pokazano na rysunku 1. Dynamika takich wahadeł może być badana wyłącznie metodami stosowanymi w analizie układów nieliniowych, układów z bifurkacjami, a zwłaszcza układów chaotycznych [1, 3, 16]. Wymaga to zaangażowania bardzo rozbudowanego aparatu matematycznego [2] lub też wykorzystywania wyspecjalizowanych programów do symulacji ruchu modeli wirtualnych w procesach komputerowych [12-16].



Rys.1. Fazy ruchu wahadła podwójnego z dodatkowymi więzami:

- a) z ramieniem uderzającym o przeszkodę;
- b) z ramieniem trącym o płaszczyznę

Wyniki analiz układów dynamicznych z wahadłami są wykorzystywane w robotyce, biomechanice, ortopedii oraz w analizie dynamiki konstrukcji rozmaitych wysięgników wieloczlonowych.

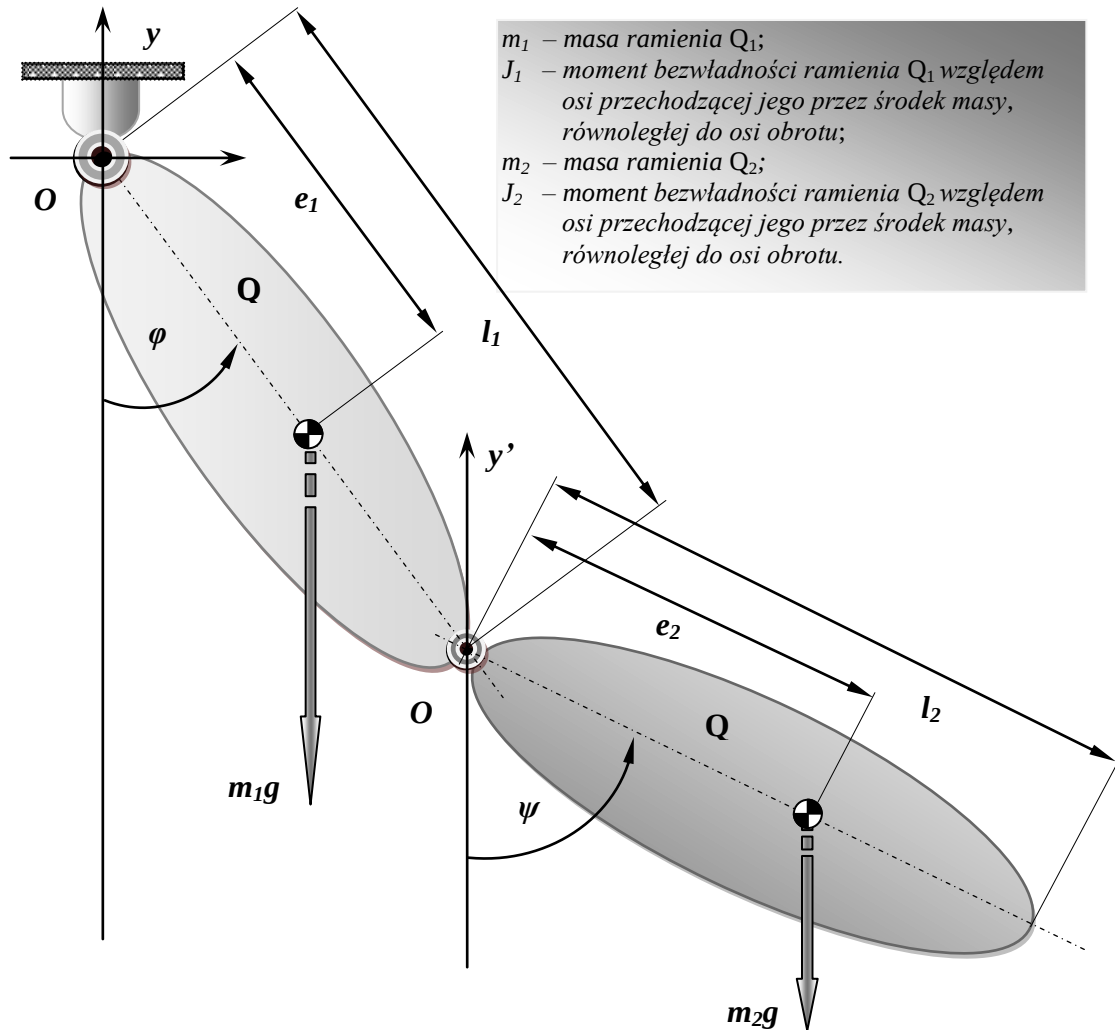
W dalszej części pracy przedstawiono sposób wykorzystania obiektowego programu **Working Model**[®] firmy Design Simulation Technologies, Inc. do opisanie dynamiki wybranych, silnie nieliniowych układów mechaniki klasycznej oraz do modelowania i zasymulowania ruchu tych układów [15,18]. W bogatym wachlarzu oprogramowania znajdującego się w dyspozycji badaczy i inżynierów, program **Working Model**[®] jest jednym z łatwiejszych w obsłudze i interpretacji otrzymywanych wyników [12-14]. Możliwości symulacyjne wirtualnego środowiska, stwarzanego przez **Working Model**[®], zaprezentowano dla wybranych przykładów, rozwiązanych wcześniej innymi metodami. Rozwiązania weryfikowano za pomocą pakietu obliczeniowego **Mathematica**[®] firmy Wolfram Research. Program **Mathematica**[®], istniejący na rynku od ponad 20 lat, jest programem powszechnie znanym i nie wymaga szerszej rekomendacji.

2. WAHADŁO PODWÓJNE GRAWITACYJNE

Na rysunku 2 przedstawiono ogólny, podstawowy model grawitacyjnego wahadła podwójnego. Wahadło składa się z dwóch sztywnych ciał połączonych przegubem O' , stanowiących ramiona wahadła, odpowiednio Q_1 i Q_2 . Jedno z ramion jest przymocowane do przegubu stałego O . (Jeżeli przegub stały wahadła podwójnego O , podczas jego ruchu, znajduje się ciągle poniżej środków ciężkości obu ramion, wówczas wahadło to jest wahadłem inwersyjnym).

Na rysunku pokazano podstawowe wymiary ramion wahadła. W celu analizy dynamiki układu wprowadzono dwie współrzędne uogólnione w postaci kątów φ i ψ , odczytanych od linii sił grawitacyjnych. Przyjęto, że momenty bezwładności ramion, obliczone względem osi prostopadłych do płaszczyzny wahań i przechodzących przez środki mas ramion wynoszą odpowiednio: J_1 dla ramienia Q_1 i J_2 dla ramienia Q_2 . Wymiary e_1 i e_2 określają odległości środków mas m_1 i m_2 ramion od odpowiednich przegubów, jak pokazano na rysunku 2. Oba

ramiona wahadła poruszają się w jednej płaszczyźnie, przy czym ramię Q_1 wykonuje ruch obrotowy, a ramię Q_2 porusza się ruchem płaskim.



Rys. 2. Podwójne wahadło grawitacyjne

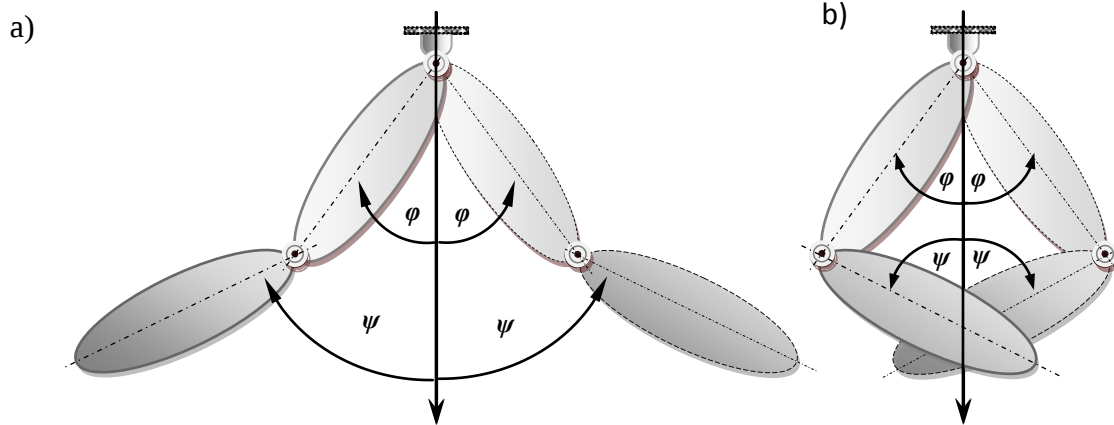
Analizy dynamiki ruchu wahadła podwójnego można dokonać, wykorzystując równania Lagrange’a [3, 17]. W tym celu niezbędne jest określenie energii kinetycznej T i potencjalnej V całego wahadła podwójnego. Obie energie opisane są następującymi wyrażeniami:

$$T = \frac{1}{2} \left[J_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + m_1 \cdot e_1^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + J_2 \cdot \dot{\psi}^2 + m_2 \cdot e_2^2 \cdot \dot{\psi}^2 + m_2 \cdot (l_1^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2l_1 e_2 \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot \cos(\psi - \varphi)) \right] \quad (1)$$

$$V = -m_1 g e_1 \cdot \cos \varphi - m_2 g \cdot (l_1 \cdot \cos \varphi + e_2 \cdot \cos \psi)$$

Formy obu wyznaczonych energii wskazują, że wyprowadzone na ich podstawie różniczkowe równania ruchu będą silnie nieliniowe a ich rozwiązanie analityczne możliwe będzie jedynie dla pewnych szczególnych przypadków ruchu lub szczególnego doboru danych [2, 3, 16] – np. bardzo małych wahań wokół położenia równowagi statycznej [1, 17].

Na rysunku 3 pokazano dwie charakterystyczne postacie ruchu ramion wahadła podwójnego: wychylenia w fazie i wychylenia w przeciwfazie.



Rys. 3. Dwie postacie drgań głównych wahadła podwójnego:

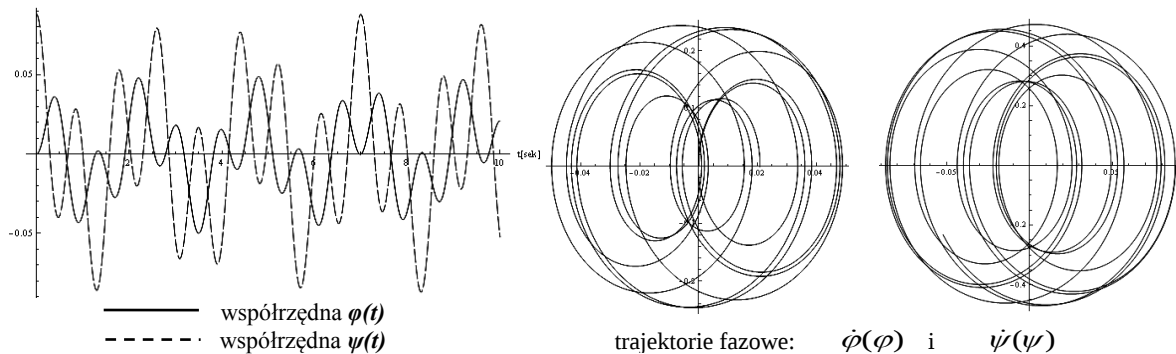
a) w fazie; b) w przeciwfazie

Dla analizy dowolnego przypadku ruchu wahadła podwójnego, opisujące ten ruch nieliniowe równania różniczkowe należy rozwiązać numerycznie z wykorzystaniem metod komputerowych, np. programu **Mathematica** [12, 13].

W związku z tym zadanie wygenerowania równań ruchu na podstawie zdefiniowanych energii T i V należy pozostawić programowi komputerowemu, który poradzi sobie z tym zagadnieniem szybko i bezbłędnie, i – co warto podkreślić – działania te zostaną wykonane w postaci symbolicznej.

Otrzymane w ten sposób rozwiązania równań różniczkowych można przedstawić w postaci stosownych wykresów.

Na rysunku 4 przedstawiono przebiegi współrzędnych uogólnionych $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ oraz ich trajektorie fazowe wyliczone przez program **Mathematica 8** dla wahadła zbudowanego z dwóch jednakowych cienkich prętów.



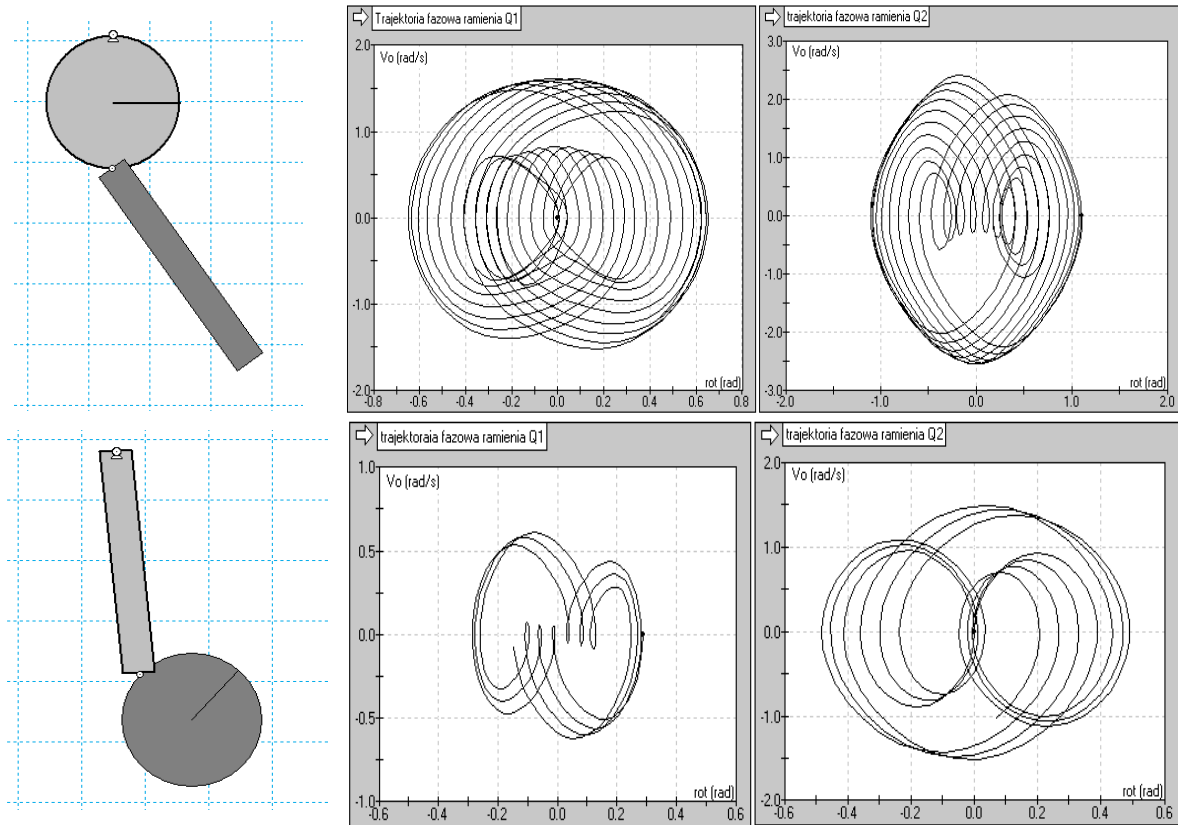
Rys. 4. Wykresy przemieszczeń kątowych ramion wahadła i ich trajektorie fazowe

Wykorzystanie wyłącznie programu typu **Mathematica** do analizy dynamiki ruchu wahadła ma pewną ułomność. Pozwala mianowicie opisać ruch dla jednego, konkretnego, zadanego a priori zestawu danych fizycznych układu dynamicznego oraz dla konkretnych warunków początkowych, od których dynamika układów nieliniowych jest silnie uzależniona [2, 14, 16]. Powyższe niedogodności można wyeliminować, stosując w analizie symulację ruchu modelu wirtualnego układu dynamicznego, w tym przypadku wirtualnego modelu wahadła [12-14]. Największymi zaletami symulacji są możliwości:

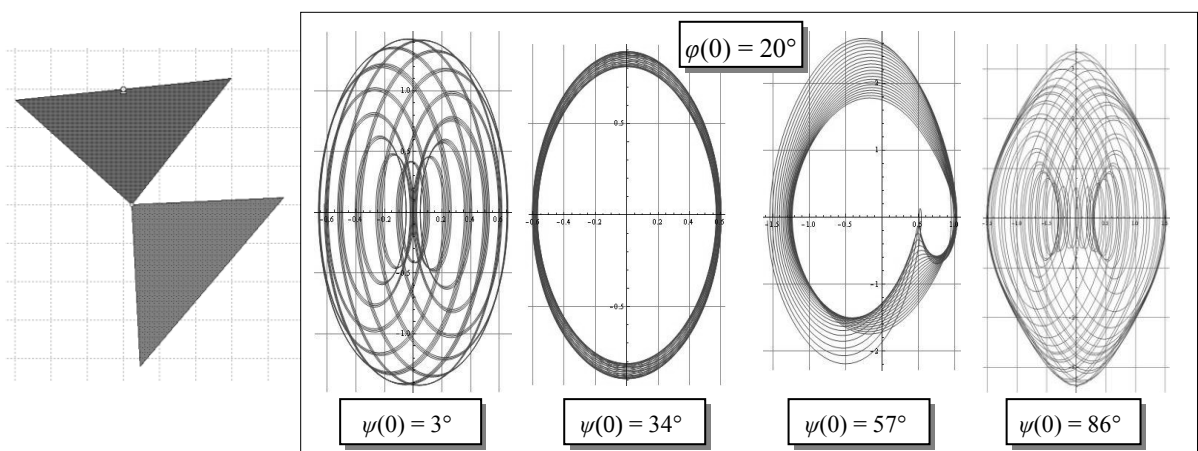
- bardzo szybkich zmian cech mechanicznych modelu wirtualnego;
- bardzo szybkich zmian geometrii modelu (wymiarów);
- natychmiastowej obserwacji wpływu wszelkich zmian na dynamikę ruchu modelu.

2.1. Wybrane wyniki analizy symulacyjnej dynamiki ruchu wahadła podwójnego

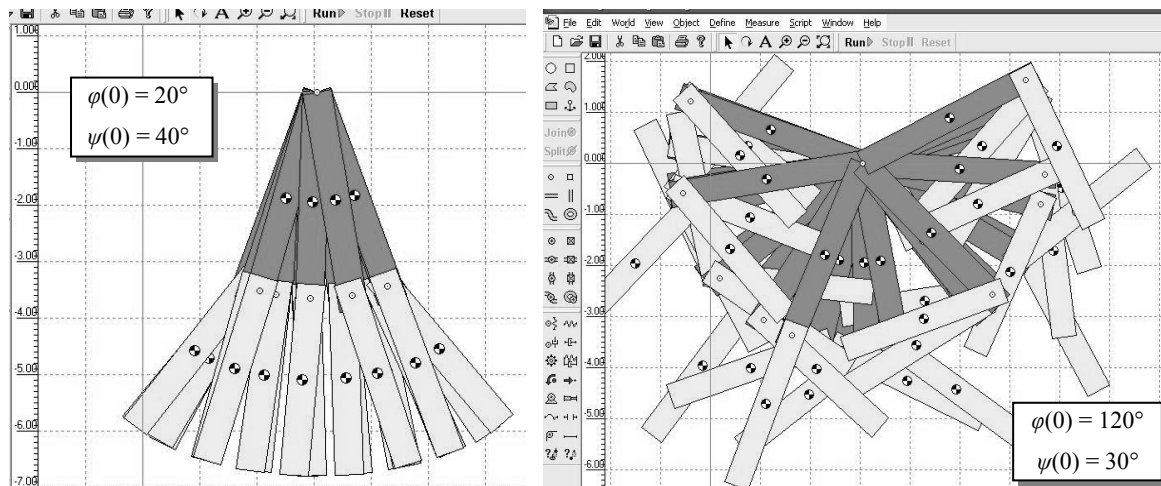
Do symulacyjnej analizy dynamiki ruchu grawitacyjnego wahadła podwójnego wykorzystano program komputerowy **Working Model**[®] firmy Design Simulation Technologies [13, 14]. Poniżej przedstawiono niektóre wyniki symulacji komputerowych uzyskane dla rozmaitych modeli wirtualnych wahadła podwójnego, przy czym ograniczono się do pokazania wyłącznie trajektorii fazowych współrzędnych uogólnionych φ i ψ jako najbardziej reprezentatywnych i równocześnie charakterystycznych wizualizacji ruchu ramion.



Rys. 5. Wpływ zmiany geometrii na trajektorie fazowe współrzędnych uogólnionych (zamiana ramion miejscami – pozostałe parametry i warunki początkowe takie same)



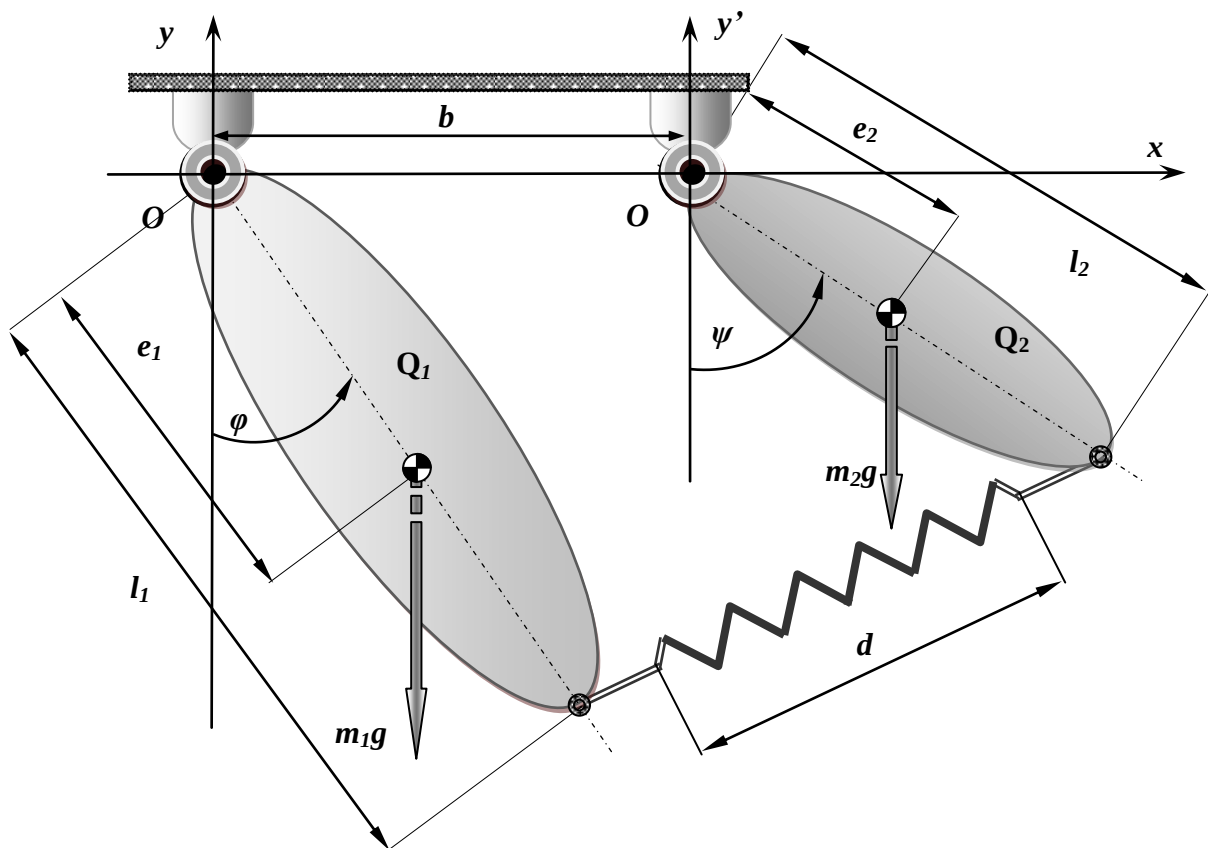
Rys. 6. Trajektorie fazowe ruchu dolnego ramienia wahadła dla różnych wartości jego kąta położenia początkowego $\psi(0)$; wartość początkowa kąta $\varphi(0) = 20^\circ$



Rys. 7. Fazy ruchu ramion wahadła dla niewielkich i dużych wartości początkowych kątów wychyleń. Wahadło na prawym rysunku wykonuje ruch chaotyczny

3. WAHADŁO PODWÓJNE SPRĘŻONE WIĘZAMI SPRĘŻYSTYMI

Na rysunku 8 przedstawiono ogólny, podstawowy model wahadła podwójnego, sprzężonego więzami sprężystymi. W rzeczywistości są to dwa obracające się w tej samej płaszczyźnie ciała, tworzące wahadła fizyczne, połączone sprężystym łącznikiem (sprężyną). Zastosowano taki sam sposób wymiarowania, jak dla wahadła podwójnego grawitacyjnego.

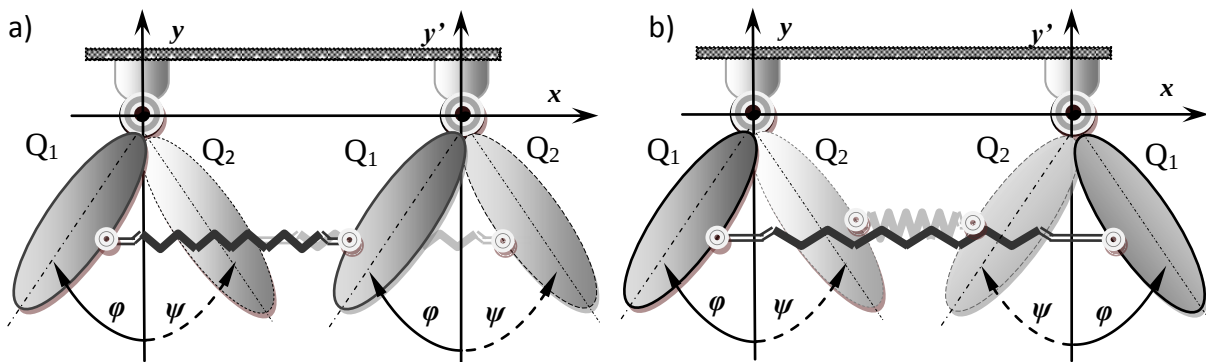


Rys. 8. Wahadło podwójne sprzężone z więzami sprężystymi

Na rysunku 8 pokazano podstawowe wymiary ramion wahadła. W celu analizy dynamiki układu wprowadzono dwie współrzędne uogólnione w postaci kątów φ i ψ , odmierzanych od linii sił grawitacyjnych. Przyjęto, jak poprzednio, że momenty bezwładności ramion obliczone względem osi prostopadłych do płaszczyzny wahań i przechodzących przez środki mas ramion wynoszą odpowiednio: J_1 dla ramienia Q_1 i J_2 dla ramienia Q_2 . Wymiary e_1 i e_2 określają odległości środków mas m_1 i m_2 ramion od odpowiednich przegubów.

Wahadło podwójne tego typu, z identycznymi ramionami i poziomą sprężyną, znane było już w XVIII stuleciu pod nazwą wahadła sympatycznego (z fr. pendule sympathique). Szwajcarski zegarmistrz Abraham Louis Breguet (1747-1823) używał wahadła sympatycznego do synchronizacji zegarów.

Na rysunku 9 pokazano dwie postacie synchronizacji wahadeł sympatycznych: w fazie i przeciwfazie. (Warto zauważyć, że przy wahadłach wahających się w fazie, sprężyna może pozostawać nienapięta).



Rys. 9. Synchronizacja wahadeł sympatycznych dwie postacie drgań głównych:

a) w fazie; b) w przeciwfazie

Wyrażenia opisujące energię kinetyczną T i potencjalną V potrzebne do ułożenia równań Lagrange'a mają postać (2):

$$T = \frac{1}{2} (J_1 \cdot \dot{\varphi}^2 + m_1 \cdot e_1^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + J_2 \cdot \dot{\psi}^2 + m_2 \cdot e_2^2 \cdot \dot{\psi}^2)$$

$$V = -m_1 g e_1 \cos \varphi - m_2 g e_2 \cdot \cos \psi + \frac{1}{2} c \cdot (d - d_0)^2$$
(2)

gdzie: d i d_0 oznaczają odpowiednio:

d – długość sprężyny w dowolnej chwili czasu (ruchu);

d_0 – długość sprężyny w chwili początkowej.

$$d = \sqrt{(b - l_1 \sin \varphi + l_2 \sin \psi)^2 + (l_1 \cos \varphi + l_2 \cos \psi)^2}$$

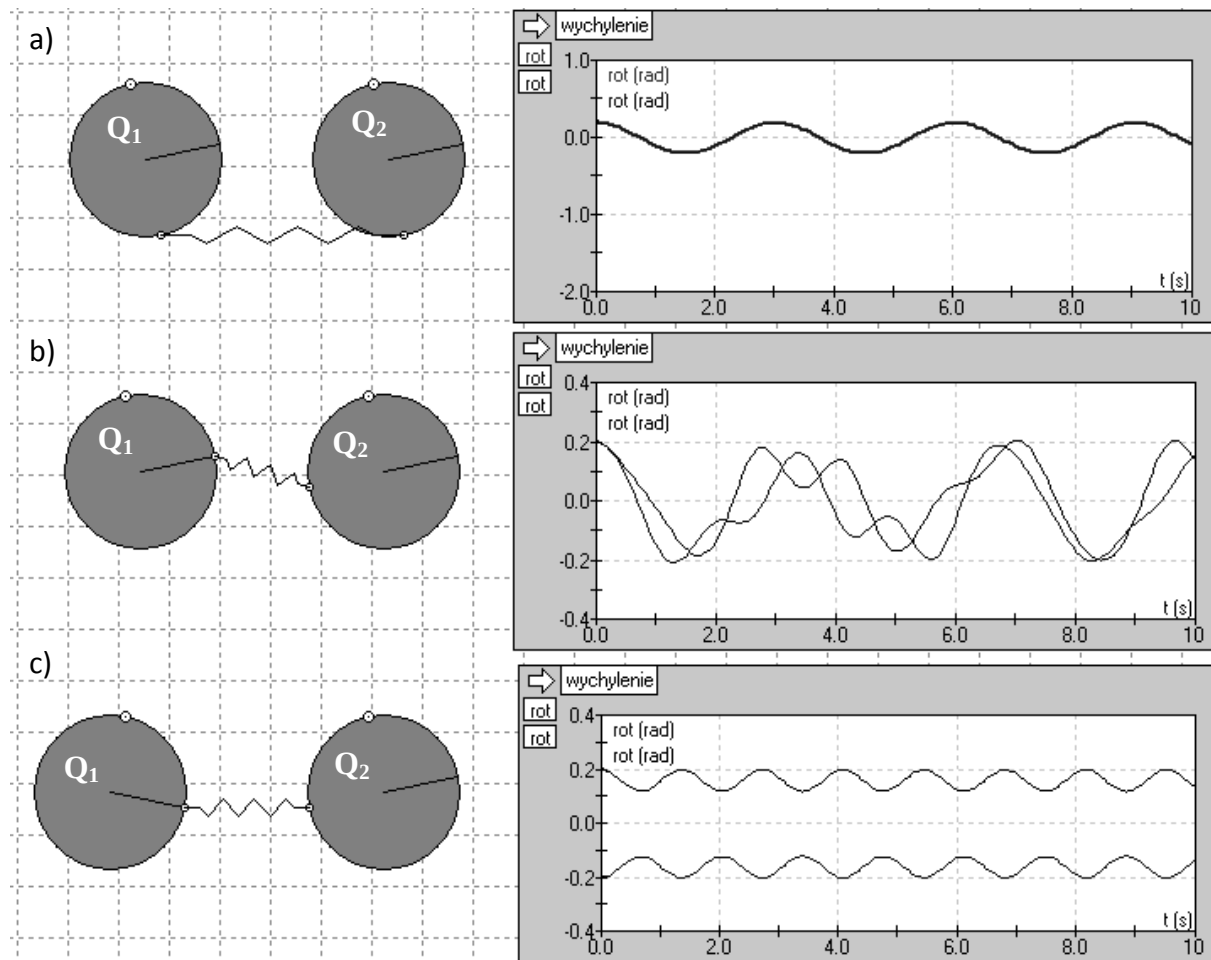
$$d_0 = \sqrt{(b - l_1 \sin \varphi_0 + l_2 \sin \psi_0)^2 + (l_1 \cos \varphi_0 + l_2 \cos \psi_0)^2}$$
(3)

Formy obu wyznaczonych energii wskazują, że wyprowadzone na ich podstawie różniczkowe równania ruchu, analogicznie jak dla wahadła podwójnego grawitacyjnego, będą silnie nieliniowe, a ich rozwiązanie analityczne możliwe będzie jedynie dla pewnych szczególnych przypadków ruchu lub danych, np. dla bardzo małych wahań lub gdy wahadła są cienkimi, jednorodnymi prętami.

3.1. Wybrane wyniki analizy symulacyjnej dynamiki ruchu wahadła sprzężonego

Poniżej przedstawiono niektóre wyniki symulacji komputerowych dla wybranych wirtualnych modeli podwójnych wahadeł sprzężonych.

Na rysunku 10 pokazano wpływ oddziaływania sprężyny w zależności od sposobu sprzężenia wahadeł.

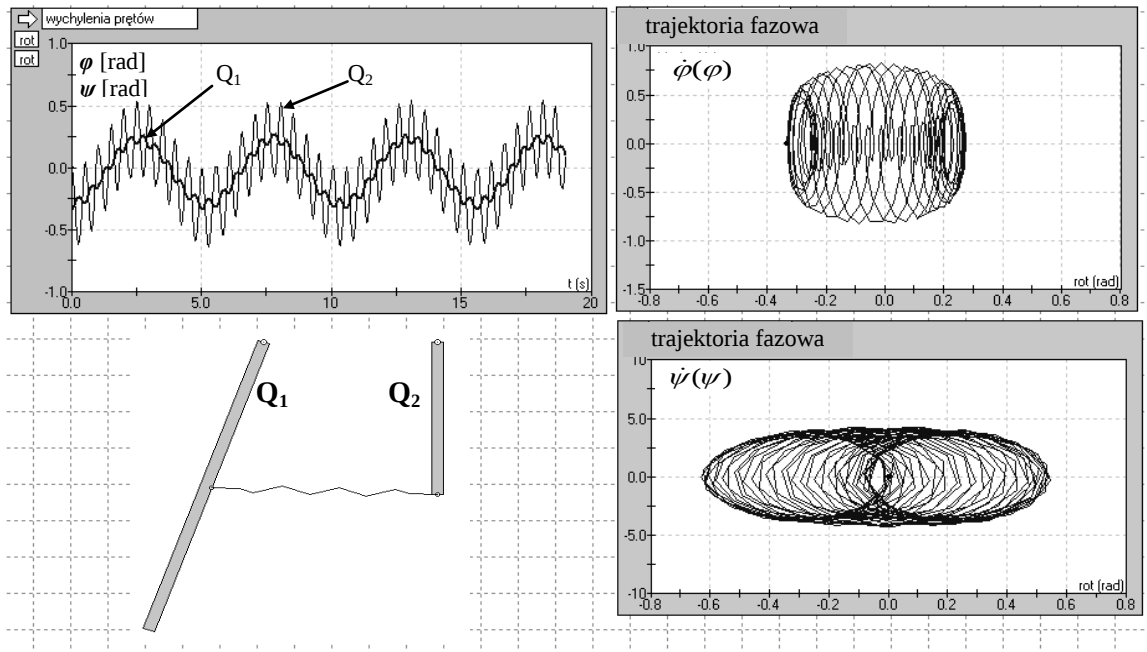


Rys. 10. Przemieszczenia wahadeł sprzężonych:

- a) ruch w fazie (współbieżny) z jednakowymi amplitudami;
- b) ruch quasiwspółbieżny, sprężyna jako ciało nie porusza się ruchem postępowym;
- c) ruch w przeciwfazie (antywspółbieżny) z jednakowymi amplitudami

Sprężenie więzami sprężystymi (połączenie sprężyną) dwóch wahadeł w sposób dowolny skutkuje tym, że wahadła nie będą mogły nigdy praktycznie uzyskać stanu trwałej synchronizacji ruchu. Przy dużych wartościach początkowych kątów φ i ψ ruch obu wahadeł stanie się chaotyczny.

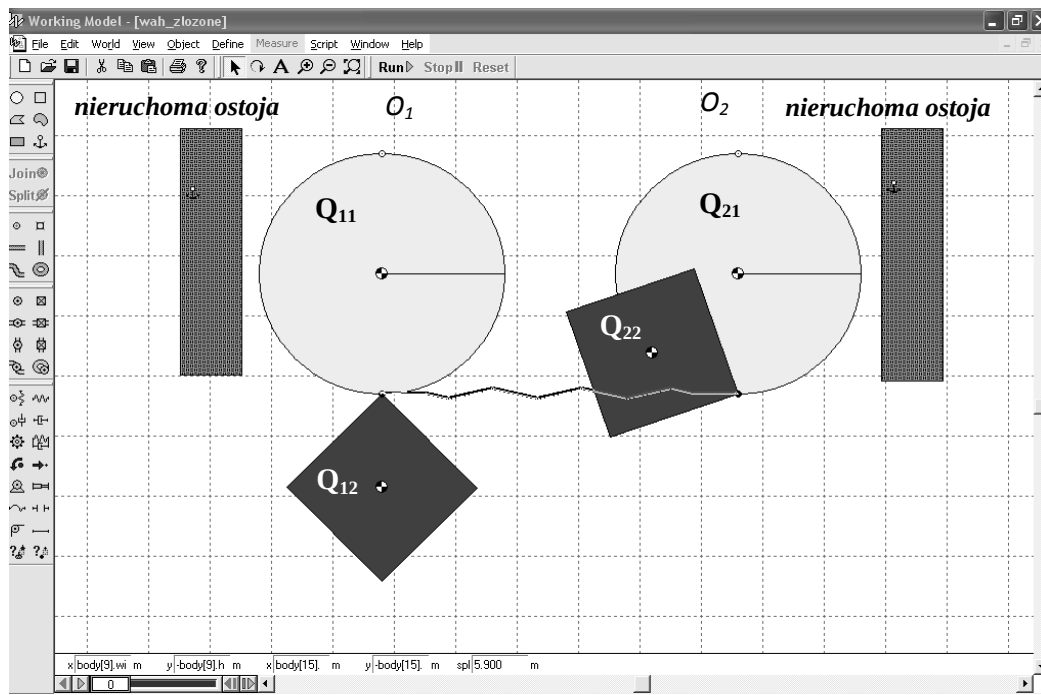
Na rysunku 11 pokazano ruch mający cechy pseudosynchronizacji – synchronizacji rzekomej.



Rys. 11. Wahadło sprzężone, o ramionach różniących się dwukrotnie masą i długością

4. WAHADŁA PODWÓJNE ZŁOŻONE

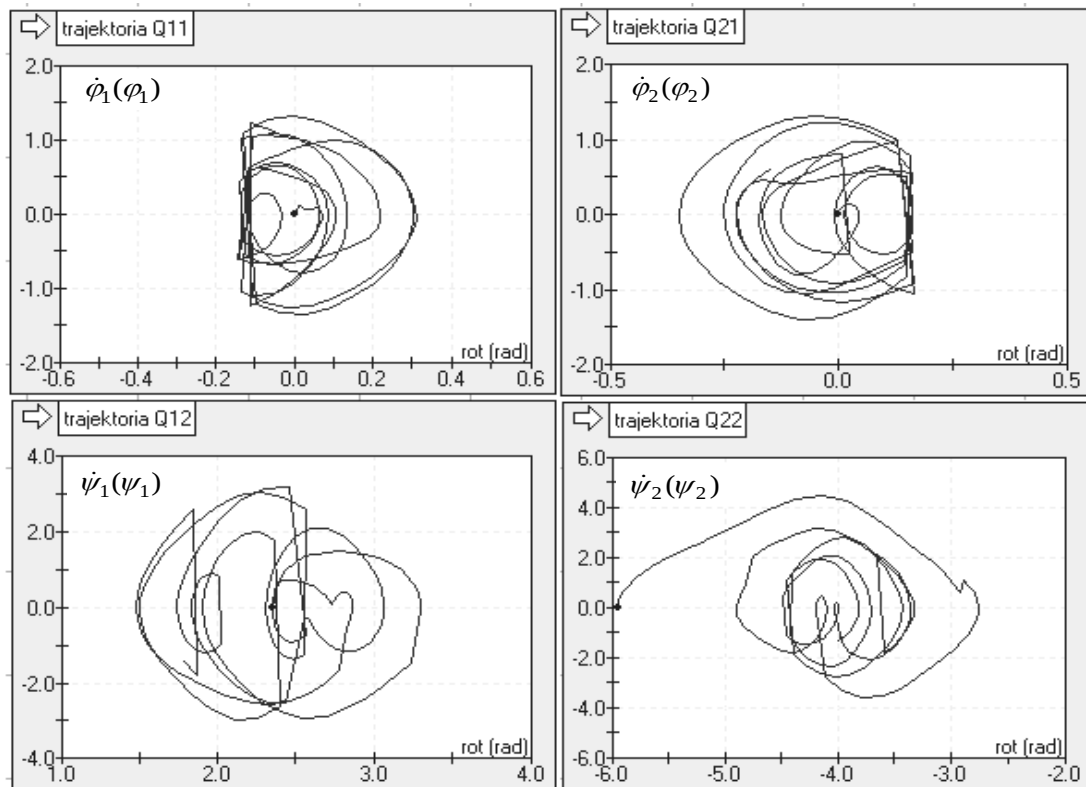
Na rysunku 12 przedstawiono wirtualny model wahadła złożonego, będącego połączeniem wahadła podwójnego grawitacyjnego i wahadła sprzężonego więzami sprężystymi. Ruch tego układu jest dodatkowo ograniczony poprzez wprowadzenie więzów jednostronnych z uderzeniem.



Rys. 12. Model wirtualny wahadła podwójnego z więzami sprężystymi i uderzeniami

Górne ramiona Q_{11} i Q_{21} wahadeł stanowią jednakowe ciała koliste, obracające się odpowiednio dookoła przegubów O_1 i O_2 . Ramiona Q_{12} i Q_{22} wahadeł są kwadratami, mogącymi obracać się dookoła jednego z narożników, jak pokazano na rysunku 12. Przeguby łączące koła z kwadratami dodatkowo połączone są elastycznym ciędnem (*sprężyną liniową*).

Na rysunku 13 przedstawiono jeden z wyników badań symulacyjnych modelu wirtualnego z rysunku 12. Pokazano trajektorie fazowe współrzędnych uogólnionych φ_1 , ψ_1 , φ_2 , ψ_2 , określających ruch poszczególnych ciał (ramion wahadeł) analizowanego układu dynamicznego uderzeniami.



Rys. 13. Trajektorie fazowe współrzędnych uogólnionych dla ramion wahadeł z rysunku 12

5. PODSUMOWANIE

Analiza dynamiki układów wahadeł należy do grupy zagadnień charakteryzujących się znaczną praco- i czasochłonnością ze względu na ich silną nieliniowość, prowadzącą niejednokrotnie do rozwiązań w sferze chaosu. Bez względu na to, jaką metodę zastosuje się do rozwiązywania problemu, konieczna jest weryfikacja poprawności otrzymanych wyników. Zaprezentowany w niniejszej pracy sposób wykorzystania do tego celu programu komputerowego **Working Model**[®] i stworzenie rzeczywistości wirtualnej, w której prowadzono badania symulacyjne, w sposób zdecydowany ułatwił i przyspieszył analizę dynamiki opisywanych wyżej układów. Główną zaletą programu **Working Model**[®] jest szybkość konstruowania i modyfikacji modeli wirtualnych bez konieczności szczegółowego podawania każdorazowo wielu danych, takich jak np.: momenty bezwładności, położenia środków mas itp. Parametry te są generowane automatycznie.

Końcowy wniosek, jaki nasuwa się w wyniku przeprowadzonych badań symulacji dynamiki ruchu wybranych układów wahadeł podwójnych jest taki, iż można sformułować następujący, ogólny algorytm postępowania podczas takich badań:

- za pomocą programu **Working Model**[®] przeprowadzić badania i symulacje wstępne
- po dokonaniu symulacji wirtualnych dokonać weryfikacji obliczeń i analiz za pomocą innego narzędzia, np. programu **Mathematica**[®].

Taki sposób postępowania pozwala na rozwiązywanie nie tylko małych wahań, dość dokładnie opisywanych w literaturze światowej, ale także na analizę układów dynamicznych, w których pojawiają się bifurkacje i chaos. Zastosowane oprogramowanie i wykorzystanie wirtualnej rzeczywistości są dobrym narzędziem dla inżynierów, badaczy i studentów.

Nie wolno jednakże zapominać, że poleganie wyłącznie na rzeczywistości wirtualnej może w szczególnych przypadkach prowadzić do wygenerowania zupełnie nowej jakości istniejącej wyłącznie wirtualnie i nie mającej żadnego związku ze światem rzeczywistym.

(Wszystkie rysunki zawierające wykresy i modele wirtualne podnośników są oryginalnymi kopiami obrazów ekranowych otrzymywanych przez autora podczas symulacji)

LITERATURA

- [1] Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J.T.: *Drgania układów fizycznych*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008, s. 474.
- [2] Awrejcewicz J.: *Matematyczne metody mechaniki*, Łódź 1995, s. 251.
- [3] Awrejcewicz J.: *Mechanika techniczna*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2009.
- [4] Awrejcewicz J.: *Dynamika układu wahadeł fizycznych*, Mat. Konf. pt. „Współczesne problemy inżynierii mechanicznej”, Monografie Wyd. Inżynierii Mechanicznej i Robotyki AGH, vol. 34, Kraków 2007, s. 53-81.
- [5] Awrejcewicz J., Sendkowski D.: *Pendulum*, Applied Mechanics and Materials, Vol. 9 2008 Trans. Tech Publications, Switzerland, pp. 19-29.
- [6] Awrejcewicz J., Sendkowski D., Kaźmierczak M.: *Geometrical approach to the swinging pendulum dynamics*, Computers and Structures, 84, 2006, pp. 1577-1583.
- [7] Baker G. L., Blackburn J. A.: *The Pendulum. A Case Study in Physics*. Oxford University Press, 2005, pp. 594.
- [8] Bennett M., Schat M., Rockwood H., Wiesenfeld K.: *Huygens's clocks*, Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, vol. 458 (2019), 2002, London, pp. 563-579.
- [9] Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.: *Clustering of Huygens' Clocks*, Prog. Theor. Phys. Vol. 122, No. 4, October 2009, Letters
- [10] Czolczyński K., Perlikowski P., Stefański A., Kapitaniak T.: *Huygens' odd sympathy experiment revisited*, International Journal Bifurcation and Chaos (2010), *accepted for publication*.
- [11] Lubnauer W.A.: *Modelowanie i symulacja ruchu nieliniowych układów mechaniki klasycznej*, Mechanik, nr 7, 2010, art. nr 33 w zał. CD.
- [12] Lubnauer W.A.: *Wykorzystanie programu Working Model[®] do symulacji ruchu układów mechanicznych*, Materiały XIII Szkoły Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji, Jurata 2009.

- [13] Lubnauer W.A.: *Wirtualne modelowanie układów mechanicznych z wykorzystaniem środowiska komputerowego*, V Konf. Naukowa „Modelowanie i Symulacja” MiS-5, Kościelisko 2008.
- [14] Morrison F.: *Sztuka modelowania układów dynamicznych*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996, s. 432.
- [15] Nusse H.E., Yorke J.A.: *Dynamics: Numerical Explorations (Applied Mathematical Sciences)*, Springer-Verlag, 2nd rev. 1998, pp. 609.
- [16] Taylor J.R.: *Mechanika klasyczna*, t. I, PWN, Warszawa 2006, s. 486.
- [17] *Working Model Tutorial Guide*, MSC Knowledge Revolt., Redwood City USA, 2005.