

Autoreferat

Spis treści

1	Informacja o autorze	2
2	Osiągnięcie naukowe	2
2.1	Wprowadzenie	3
2.1.1	Podstawowe oznaczenia	3
2.1.2	Kontrakcje i twierdzenia o punkcie stałym	3
2.1.3	Podstawy teorii Hutchinsona–Barnsleya	4
2.2	Cel naukowy prezentowanego cyklu prac	6
2.2.1	Topologicznie zwężające iterowane układy odwzorowań i topologiczne fraktale	6
2.2.2	Uogólnione iterowane układy odwzorowań w sensie R. Miculescu i A. Mihaila	8
2.3	Omówienie wyników uzyskanych w cyklu prac	11
2.3.1	Remetryzacja topologicznie zwężających IFS-ów	11
2.3.2	Zanurzenia atraktorów w przestrzenie uniwersalne	14
2.3.3	Twierdzenia Hutchinsona–Barnsleya dla GIFS-ów	14
2.3.4	Zastosowania aparatu przestrzeni kodów dla GIFS-ów	16
2.3.5	GIFS-y nieskończonego rzędu	18
2.3.6	Przestrzenie zerowymiarowe jako topologiczne fraktale i atraktory GIFS-ów	20
3	Omówienie pozostałych wyników naukowych	24
3.1	Pewne pojęcia porowatości	25
3.2	Spójność atraktorów pewnych rodzin IFS-ów	26
3.3	Dalsze aspekty teorii GIFS-ów	27
3.4	Twierdzenia o punktach stałych dla odwzorowań określonych na przestrzeniach ciągów	28
3.5	Dychotomie w przestrzeniach funkcyjnych związane z własnościami mnożenia i splotu	29
3.6	Wolne podgrupy grup automorfizmów przeliczalnych struktur	32
3.7	Pewne uogólnienia topologii gęstości	32
3.8	Algebraizowalność i domknięta liniowalność pewnych podzbiorów przestrzeni funkcyjnych	33
3.9	Jednostajna otwartość pewnych odwzorowań dwu- i wieloliniowych	34
3.10	Typowe własności funkcji rzeczywistych związane z zachowaniem w nieskończoności	34
3.11	Porowatość pewnych podzbiorów przestrzeni uogólnionych odwzorowań nieoddalających	35
3.12	Dekryptywna złożoność rodziny autohomeomorfizmów zachowujących punkty gęstości	35
3.13	Zbiory cieniowe i ich modyfikacje	36
4	Literatura	36

1 Informacja o autorze

1. Imię i nazwisko: Filip Grzegorz Strobin

2. Posiadane tytuły i stopnie naukowe:

- 2011 – dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany w Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk; tytuł rozprawy doktorskiej: *Genericity and porosity of some subsets of function spaces*; promotor: prof. dr hab. inż. Jacek Jachymski;
- 2007 – dyplom magistra matematyki uzyskany na Wydziale Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej; tytuł pracy magisterskiej: *Typowe własności odwzorowań nieoddalających*; promotor: prof. dr hab. inż. Jacek Jachymski.

3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- 01.10.2009 – 31.12.2011 – asystent w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej;
- 01.10.2013 – 30.09.2014 – adiunkt w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Jana Kochanowskiego w Kielcach (w ramach stażu podoktorskiego NCN FUGA, Nr. 2013/08/S/ST1/00541);
- 01.01.2012 – – adiunkt w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej.

2 Osiągnięcie naukowe

(w rozumieniu art. 16 ust. 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki)

Moje osiągnięcie naukowe stanowi cykl dziewięciu publikacji powiązanych tematycznie pod tytułem:

Uogólnione iterowane układy odwzorowań, topologicznie zwężające iterowane układy odwzorowań oraz klasy ich atraktorów

w skład którego wchodzi następujące prace:

- [S1] F. Strobin, J. Swaczyna, *On a certain generalisation of the iterated function system*, Bull. Aust. Math. Soc. 87 (2013), no. 1, 37–54.
- [S2] T. Banakh, W. Kubiś, M. Nowak, N. Novosad, F. Strobin, *Contractive function systems, their attractors and metrization*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 46 (2015), no. 2, 1029–1066.
- [S3] T. Banakh, M. Nowak, F. Strobin, *Detecting topological and Banach fractals among zero-dimensional spaces*, Topology Appl. 196 A (2015), 22–30.
- [S4] T. Banakh, F. Strobin, *Embedding topological fractals in universal spaces*, J. Fractal Geom. 2 (2015), no. 4, 377–388.
- [S5] F. Strobin, *Attractors of generalized IFSs that are not attractors of IFSs*, J. Math. Anal. Appl. 422 (2015), no. 1, 99–108.
- [S6] P. Jaros, Ł. Maślanka, F. Strobin, *Algorithms generating images of attractors of generalized iterated function systems*, Numer. Algorithms 73 (2016), no. 2, 477–499.
- [S7] F. Strobin, J. Swaczyna, *A code space for a generalized IFS*, Fixed Point Theory 17 (2016), no. 2, 477–494.

- [S8] Ł. Maślanka, F. Strobina, *On generalized iterated function systems defined on ℓ_∞ -sum of a metric space*, J. Math. Anal. Appl. 461 (2018), no. 2, 1795–1832.
- [S9] Ł. Maślanka, F. Strobina, *Zero-dimensional compact metrizable spaces as attractors of generalized iterated function systems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. <http://dx.doi.org/10.12775/TMNA.2018.049>.

2.1 Wprowadzenie

2.1.1 Podstawowe oznaczenia

Dla przestrzeni topologicznej X , przez $\mathbb{K}(X)$ oznaczać będziemy rodzinę zwartych niepustych podzbiorów X , rozważaną jako przestrzeń topologiczną z topologią Vietorisa. Gdy X jest metryczna, to na przestrzeni $\mathbb{K}(X)$ rozważać będziemy metrykę Hausdorffa, która jest zgodna z topologią Vietorisa (tj. indukuje tę topologię). Jeżeli $X_1, X_2, \dots$ są przestrzeniami topologicznymi, to na produkcie $\prod_{k \in \mathbb{N}} X_k := X_1 \times X_2 \times \dots$ rozważać będziemy topologię Tichonowa. Przez $|A|$ oznaczmy moc zbioru A . Symbol $\bar{A}$ będzie oznaczał domknięcie podzbioru A przestrzeni topologicznej.

Jeżeli A jest zbiorem, to przez A^k , gdzie $k \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$, oznaczmy iloczyn kartezjański k kopii A . Dodatkowo, niech $A^0 := \{\emptyset\}$ oraz $A^{<\omega} := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^k$. Jeżeli $\alpha = (\alpha_k)$ jest ciągiem nieskończonym i $k \in \mathbb{N}$, to niech $\alpha|_k := (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, przy tym $\alpha|_0 := \emptyset$. Dla ciągu skończonego $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ i elementu b , niech $\alpha \hat{\ } b := (\alpha_1, \dots, \alpha_k, b)$.

2.1.2 Kontrakcje i twierdzenia o punkcie stałym

Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i $f : X \mapsto X$. Jeżeli dla pewnej funkcji $\varphi : [0, \infty) \mapsto [0, \infty)$ spełniającej warunek $\varphi(t) < t$ dla $t > 0$, zachodzi

$$\forall x, y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq \varphi(d(x, y)), \quad (1)$$

to f nazywamy φ -kontrakcją. Jeżeli dodatkowo:

- $\varphi(t) = \alpha t$ dla pewnego $\alpha < 1$ (równoważnie, gdy stała Lipschitza $\text{Lip}(f) < 1$), to f nazywamy *kontrakcją Banacha*;
- odwzorowanie $(0, \infty) \ni t \mapsto \frac{\varphi(t)}{t}$ jest nierosnące, to f nazywamy *kontrakcją Rakotcha*;
- φ jest niemalejąca i dla dowolnego $t \geq 0$, ciąg iteracji $(\varphi^{(k)}(t))$ jest zbieżny do 0, to f nazywamy *kontrakcją Matkowskiego*.

Jeżeli f spełnia warunek

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y), \quad (2)$$

to f nazwiemy *kontrakcją Edelsteina*.

Powyższe warunki rozważa się w kontekście problemu istnienia punktu stałego odwzorowania f . Okazuje się, że gdy X jest przestrzenią zupełną, to każda kontrakcja Matkowskiego spełnia tezę twierdzenia Banacha o punkcie stałym, tzn. ma tzw. *kontrakcyjny punkt stały* (ang. *contractive fixed point*), tj. taki jedyny punkt stały x_* , że dla dowolnego $x_0 \in X$, ciąg iteracji $(f^{(k)}(x_0))$ jest zbieżny do x_* . Jest to teza twierdzenia Matkowskiego [61] o punkcie stałym, jednego z bardziej ogólnych rozszerzeń twierdzenia Banacha. Ponieważ każda kontrakcja Rakotcha jest też kontrakcją Matkowskiego, to również takie kontrakcje mają kontrakcyjny punkt stały (co z kolei było wcześniej udowodnione przez E. Rakotcha w [83]). Natomiast warunek (2) nie jest wystarczający do istnienia punktu stałego, chyba że dodatkowo założymy zwartość przestrzeni X (mówi o tym twierdzenie Edelsteina [39]). Jednakże,

gdy X jest zwarta, to f jest kontrakcją Rakotcha wtedy i tylko wtedy, gdy f jest kontrakcją Edelsteina. Twierdzenie Edelsteina jest więc konsekwencją twierdzenia Rakotcha.

W literaturze funkcjonuje bardzo dużo innych warunków kontrakcyjnych osłabiających założenie $\text{Lip}(f) < 1$ i gwarantujących istnienie kontrakcyjnego punktu stałego; artykuł J. Jachymskiego i I. Jóźwik [46] porządkuje wiele zależności między nimi. Ograniczyłem się do tych, moim zdaniem, najbardziej naturalnych, jak i związanych najmocniej z przedstawionymi dalej wynikami.

2.1.3 Podstawy teorii Hutchinsona–Barnsleya

W tej części autoreferatu wprowadzę podstawowe pojęcia i fakty związane z teorią Hutchinsona–Barnsleya. Są one szeroko znane a zdecydowałem się je tutaj przytoczyć głównie po to, by ustalić notację i móc w dalszej części odwoływać się do konkretnych sformułowań.

Iterowanym układem odwzorowań (ang. *iterated function system*; w skrócie IFS-em), nazwiemy każdą skończoną rodzinę $\mathcal{F}$ ciągłych przekształceń¹⁾ przestrzeni topologicznej X w X . Dla IFS-u $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ oraz liczby $k \in \mathbb{N}$, oznaczmy

$$\mathcal{F}^k := \{f_\alpha : \alpha \in I^k\},$$

gdzie dla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in I^k$, niech

$$f_\alpha := f_{\alpha_1} \circ \dots \circ f_{\alpha_k}.$$

Dodatkowo niech $\mathcal{F}^0$ będzie złożona tylko z funkcji identycznościowej $f_\emptyset := \text{Id}_X$. Jeżeli $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ jest IFS-em na X , to tym samym symbolem $\mathcal{F}$ oznaczmy odwzorowanie z $\mathbb{K}(X)$ w $\mathbb{K}(X)$ zdefiniowane przez

$$\mathcal{F}(K) := \bigcup_{i \in I} f_i(K)$$

i nazywane *operatorem Hutchinsona*²⁾ dla IFS-u $\mathcal{F}$.

Okazuje się, że jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną i $\mathcal{F}$ jest IFS-em złożonym z φ -kontrakcji (dla tej samej niemalejącej funkcji φ), to również jego operator Hutchinsona jest φ -kontrakcją. Jednocześnie zupełność X implikuje zupełność $\mathbb{K}(X)$, więc z twierdzenia Matkowskiego otrzymujemy:

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli przestrzeń (X, d) jest zupełna i $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ jest IFS-em na X złożonym z kontrakcji Matkowskiego, to operator Hutchinsona $\mathcal{F} : \mathbb{K}(X) \mapsto \mathbb{K}(X)$ posiada dokładnie jeden kontrakcyjny punkt stały, tj. istnieje dokładnie jeden taki zbiór $A_{\mathcal{F}} \in \mathbb{K}(X)$, że*

$$A_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i \in I} f_i(A_{\mathcal{F}}), \tag{3}$$

przy tym dla dowolnego $K_0 \in \mathbb{K}(X)$, ciąg iteracji $(\mathcal{F}^{(k)}(K_0))$ jest zbieżny do $A_{\mathcal{F}}$ względem metryki Hausdorffa.

Kontrakcyjny punkt stały $A_{\mathcal{F}}$ będziemy nazywać *atraktorem* lub *fraktalem* IFS-u $\mathcal{F}$ (najczęściej pojęcie *fraktal* odnosi się do zbiorów odpowiednio skomplikowanych, np. mających ułamkowy wymiar; ja jednak będę je stosował w takim, szerszym znaczeniu).

Warunek (1) dla niemalejącej funkcji φ gwarantuje, że $\text{diam}(f(A)) \leq \varphi(\text{diam}(A))$, skąd wynika naturalny rozkład atraktora $A_{\mathcal{F}}$ i pewne jego dalsze własności:

¹⁾Często za IFS uważa się parę $(X, \mathcal{F})$; dla prostoty zapisu i formułowania pewnych treści zdecydowałem się za IFS uważać samą rodzinę $\mathcal{F}$; dodajmy jeszcze, że w literaturze rozważa się też IFS-y złożone z nieskończonej liczby odwzorowań, a także IFS-y złożone z odwzorowań nieciągłych.

²⁾Operator Hutchinsona rozważa się też na szerszych klasach zbiorów niż $\mathbb{K}(X)$, np. na rodzinie zbiorów domkniętych i ograniczonych.

Twierdzenie 2.2. Przy założeniach i oznaczeniach Twierdzenia 2.1, mamy:

- (i) $A_{\mathcal{F}} = \overline{\{x_{\alpha} : \alpha \in I^{<\omega}\}}$, gdzie x_{α} to punkt stały odwzorowania f_{α} ;
- (ii) dla dowolnego $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz $\alpha \in I^k$, $f_{\alpha}(A_{\mathcal{F}}) = \bigcup_{i \in I} f_{\alpha i}(A_{\mathcal{F}})$;
- (iii) dla dowolnego ciągu $\alpha \in I^{\omega}$, zbiór $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{\alpha|_k}(A_{\mathcal{F}})$ jest jednopunktowy – oznaczmy jego jedyny element przez $\pi(\alpha)$;
- (iv) dla dowolnego $\alpha \in I^{\omega}$ oraz $K \in \mathbb{K}(X)$, ciąg $(f_{\alpha|_k}(K))$ jest zbieżny do $\{\pi(\alpha)\}$;
- (v) odwzorowanie $\pi : I^{\omega} \mapsto X$ ma następujące własności:
 - (v_a) π jest ciągle;
 - (v_b) $\pi(I^{\omega}) = A_{\mathcal{F}}$;
 - (v_c) dla dowolnego $i \in I$ zachodzi równość $f_i \circ \pi = \pi \circ \tau_i$, gdzie $\tau_i : I^{\omega} \mapsto I^{\omega}$ jest dane przez $\tau_i((\alpha_k)) := (i, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

Odwzorowanie π nazywamy *odwzorowaniem kodującym* (ang. *coding map*), a przestrzeń I^{ω} – *przestrzenią kodów* (ang. *code space*)³⁾ dla $\mathcal{F}$. Rodzinę $\mathcal{T} := \{\tau_i : i \in I\}$ możemy uważać za kanoniczny IFS na przestrzeni kodów – cała przestrzeń I^{ω} jest jego atraktorem, przy tym $\text{Lip}(\tau_i) < 1$ przy rozważaniu standardowej metryki.

Twierdzenia 2.1 oraz 2.2 (zwane dalej twierdzeniami Hutchinsona–Barnsleya) w przypadku gdy $\mathcal{F}$ jest złożony z kontrakcji Banacha, zostały udowodnione w pracy J. Hutchinsona⁴⁾ [44] z 1981 r. i spopularyzowane przez M. Barnsleya w [13], jednak zbiory $\mathcal{F}$ -niezmiennicze, tj. spełniające (3) były badane już wcześniej.

Wprowadzę jeszcze kilka oznaczeń i definicji. Jeżeli $\mathcal{F}$ jest IFS-em na przestrzeni metrycznej X , to niech $\text{Lip}(\mathcal{F}) := \max\{\text{Lip}(f) : f \in \mathcal{F}\}$. Jeżeli $\text{Lip}(\mathcal{F}) < 1$, to $\mathcal{F}$ będziemy nazywać *ściśłym* IFS-em, natomiast jeżeli jest złożony z kontrakcji Matkowskiego, to *słabym* IFS-em⁵⁾. Przypomnijmy, że jeżeli X jest zwarta, to pojęcia kontrakcji Rakotcha, Matkowskiego i Edelsteina się pokrywają, więc w tym przypadku słabe IFS-y to po prostu IFS-y złożone z kontrakcji Edelsteina lub, równoważnie, Rakotcha.

W związku z prezentowanym przeze mnie cyklem prac, chciałbym wyróżnić dwa problemy teorii Hutchinsona–Barnsleya:

- (I) Co wystarczy założyć o odwzorowaniach rodziny $\mathcal{F}$, aby generowała ona zbiór $A_{\mathcal{F}}$, który można nazwać jej atraktorem? Jakie własności mają tak rozumiane atraktory?
- (II) Które zbiory czy przestrzenie są atraktorami generowanymi przez pewien układ odwzorowań?

Problem (I) jest bardzo szeroki i jest rozważany w literaturze wielotorowo. Np. twierdzenia Hutchinsona–Barnsleya dla słabych IFS-ów zostały odkryte dość szybko (patrz np. [42]). Nadal pojawiają się prace w których dowodzone są wersje twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya dla jeszcze słabszych kontrakcji niż kontrakcje Matkowskiego, choć duża część z nich nie wydaje się mieć większej wartości poznawczej. Co więcej, jak pokażę w dalszej części, w pewnym zakresie IFS-y złożone z kontrakcji Rakotcha tłumaczą wszelkie inne tego typu uogólnienia.

³⁾W literaturze funkcjonuje też kilka innych nazw na te obiekty.

⁴⁾J. Hutchinson udowodnił je jednak bez wykorzystania twierdzenia Banacha o punkcie stałym i w ogólniejszym przypadku – dla zbiorów ograniczonych.

⁵⁾W zasadzie moglibyśmy założyć, że *słabe* IFS-y to wszelkie IFS-y, które gwarantują zachodzenie tez twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya.

W związku z Problemem (II) badania polegały w dużej mierze na analizowaniu zbiorów w przestrzeniach euklidesowych. S. Crovisier i M. Rams w [31] skonstruowali zbiór zbiorów typu Cantora⁶⁾ na prostej $\mathbb{R}$ niebędący atraktorem słabego IFS-u. M. Kwieciński w [55] skonstruował kontinuum Peano na płaszczyźnie niebędące atraktorem ścisłego IFS-u. M. Kulczycki i M. Nowak w [54] podali przykład takiego kontinuum Peano, które nie jest atraktorem słabego IFS-u. Z kolei T. Banach i M. Nowak w [11] podali przykład kontinuum Peano na płaszczyźnie, które nie jest homeomorficzne z atraktorem żadnego ścisłego IFS-u. M. Sanders w [90] zdefiniował klasę łuków w $\mathbb{R}^n$ niebędących atraktorami ścisłych IFS-ów.

2.2 Cel naukowy prezentowanego cyklu prac

Badania podjęte w ramach prezentowanego cyklu prac w dużej mierze są związane z Problemami (I) oraz (II) dla ogólniejszych wersji iterowanych układów odwzorowań, tzw. *topologicznie zwężających IFS-ów* oraz *uogólnionych IFS-ów w sensie R. Miculescu i A. Mihaila*. W kolejnych dwóch podrozdziałach przedstawię pokrótce te pojęcia i sformułuję bardziej precyzyjnie problemy analizowane w moich badaniach.

2.2.1 Topologicznie zwężające iterowane układy odwzorowań i topologiczne fraktale

A. Mihail w 2012 r. w pracy [76] zdefiniował pojęcie *topologicznie zwężającego IFS-u*. Powiemy, że IFS $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ na przestrzeni Hausdorffa X jest *topologicznie zwężający* (ang. *topologically contracting iterated function system*⁷⁾; w skrócie TIFS), jeżeli spełnione są warunki:

- (t1) dla każdego $K \in \mathbb{K}(X)$ istnieje taki $C \in \mathbb{K}(X)$, że $K \subset C$ oraz $\mathcal{F}(C) \subset C$;
- (t2) dla każdego $K \in \mathbb{K}(X)$ takiego, że $\mathcal{F}(K) \subset K$ i każdego $\alpha \in I^\omega$, zbiór $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{\alpha|_k}(K)$ jest jednopunktowy.

A. Mihail udowodnił w [76], że każdy TIFS spełnia tezy twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya i w szczególności generuje jedyny atraktor. Nietrudno zauważyć, że zachodzi też implikacja odwrotna – jeżeli IFS $\mathcal{F}$ spełnia tezy twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya, to $\mathcal{F}$ jest topologicznie zwężający. Istotnie, warunek (t1) wynika z drugiej części Twierdzenia 2.1, zaś warunek (t2) wynika z punktu (iv) Twierdzenia 2.2. W szczególności, każdy słaby IFS na przestrzeni zupełnej jest TIFS-em.

Szczególne wersje topologicznie zwężających IFS-ów były rozważane już wcześniej, np. przez A. Edalata w [38] (zwane tam *słabo hiperbolicznymi IFS-ami*, ang. *weakly hyperbolic IFSs*) oraz B. Kieningera w [51] (nazwane *punktowo włóknistymi IFS-ami*, ang. *point fibred IFSs*). A. Kameyama w [50] (por. też wcześniejszą pracę A. Kameyamy [49] i J. Kigamiego [52]) zdefiniował pojęcie *przestrzeni topologicznie samopodobnej* (ang. *topological self similar set*) jako takiej topologicznej przestrzeni zwartej Hausdorffa X , że dla pewnego IFS-u $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ spełnione są warunki:⁸⁾

- (s1) $X = \bigcup_{i \in I} f_i(X)$;
- (s2) dla dowolnego $\alpha = (\alpha_k) \in I^\omega$, zbiór $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{\alpha|_k}(X)$ jest jednopunktowy.

Przestrzenie topologicznie samopodobne są więc dokładnie atraktorami TIFS-ów i w dalszym ciągu będę je nazywał krócej *topologicznymi fraktalami* (ang. *topological fractals* lub *topological IFS-fractals*) – takie nazewnictwo stosowaliśmy w pracach [S3], [S4] oraz [S9]. Zauważmy, że jest to czysto

⁶⁾Przez zbiory *typu Cantora* będę rozumiał wszelkie zbiory konstruowane w podobny sposób, co klasyczny trójkowy zbiór Cantora, tzn. przez „w miarę regularne” usuwanie części zbioru w kolejnych krokach; z kolei przez *przestrzeń Cantora* będę rozumiał każdą przestrzeń homeomorficzną z trójkowym zbiorem Cantora.

⁷⁾A. Mihail stosował nazwę *topological IFS*.

⁸⁾Podaję tu definicję równoważną; oryginalna wykorzystuje pojęcie odwzorowania kodującego π jak w Twierdzeniu 2.2, patrz Definicja 0.3 i Uwaga 1.3 w [50].

topologiczne pojęcie – jeżeli X jest topologicznym fraktalem i $\mathcal{F}$ jest świadczącym o tym IFS-em, to dowolna przestrzeń Y homeomorficzna z X jest topologicznym fraktalem i świadczy o tym IFS $\mathcal{F}_* := \{h \circ f \circ h^{-1} : f \in \mathcal{F}\}$, gdzie $h : X \mapsto Y$ jest homeomorfizmem. Podobnie, pojęcie TIFS-u jest czysto topologiczne.

A. Kameyama udowodnił, że topologiczny fraktal X jest metryzowalny, przy tym, dla świadczącego o tym IFS-u $\mathcal{F}$ można zdefiniować rodzinę ciągłych pseudometryk⁹⁾ $d_\lambda^\mathcal{F}$, $\lambda \in (0, 1)$, o tej własności, że dla $f \in \mathcal{F}$, stała Lipschitza $\text{Lip}(f) \leq \lambda$ względem $d_\lambda^\mathcal{F}$, oraz następujące warunki są równoważne:

- (i) na X istnieje taka metryka d zgodna z topologią na X , że $\text{Lip}(\mathcal{F}) < 1$ względem d ;
- (ii) istnieje taka liczba $\lambda \in (0, 1)$, że $d_\lambda^\mathcal{F}$ jest metryką.¹⁰⁾

Twierdzenie to daje pewną charakteryzację tych topologicznych fraktali, które są homeomorficzne z atraktorami ścisłych IFS-ów. Istotnie, istnienie odpowiedniej metryki w zasadzie oznacza to samo, co istnienie odpowiedniego homeomorfizmu (w dalszej części autoreferatu będę zamiennie odwoływał się do tych dwóch podejść). Jednocześnie A. Kameyama podał przykład topologicznego fraktala który nie spełnia warunków z tej charakteryzacji. Inny można podać w opaciu o wynik D. Dumitru z [37] – jest to nieskończenie wymiarowe continuum Peano z tzw. *wolnym łukiem*. Naturalny jest więc następujący:

Problem 2.1. Niech $\mathcal{F}$ będzie topologicznie zwężającym IFS-em na przestrzeni metryzowalnej X [ew. w sposób zupełny]. Czy istnieje na X taka metryka zgodna [i ew. zupełna] d , że $\mathcal{F}$ jest słabym IFS-em względem d ? W szczególności, czy jest tak gdy $X = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f(X)$, czyli gdy X jest topologicznym fraktalem?

Pozytywna odpowiedź będzie oznaczała m. in., że dla przestrzeni metryzowalnych w sposób zupełny, zachodzenie tez twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya jest równoważne istnieniu zgodnej zupełnej metryki względem której dany IFS jest złożony ze słabych kontrakcji. Dałaby też możliwość rozróżnienia klas topologicznie zwężających IFS-ów ze względu na własności odpowiednich metryk. Dodajmy, że w przypadku gdy $\mathcal{F}$ składa się z jednego odwzorowania, Problem 2.1 ma pozytywne rozwiązanie i wynika ono np. z remetryzacyjnych twierdzeń z [47], [56] czy [62].

W pełnej ogólności można zapytać:

Problem 2.2. Czy warunek topologicznego zwężania daje się połączyć z jakąś formą zwężania typu metrycznego, nawet gdy przestrzeń X nie jest metryzowalna?

Nakreślony wcześniej Problem (II) można odnieść do topologicznych fraktali¹¹⁾. Wspomniałem już o wyniku D. Dumitru z [37]. W dalszym ciągu skupię się na przestrzeniach zerowymiarowych, zwartych i metryzowalnych (dla skrótu pisać będę ZZM). Dla przeliczalnej ZZM przestrzeni X (równoważnie – zwartej i metryzowalnej przestrzeni *rozproszonej*¹²⁾, ang. *scattered space*), przez $\text{ht}(X)$ oznaczmy tzw. *wysokość rozproszenia* (ang. *scattered height*), definiowaną jako

$$\text{ht}(X) := \min\{\alpha : X^{(\alpha)} \text{ jest zbiorem skończonym}\},$$

gdzie $X^{(\alpha)}$ jest pochodną Cantora–Bendixsona rzędu α . Wiadomo, że $\text{ht}(X)$ jest poprawnie określoną przeliczalną liczbą porządkową. Jeżeli $|X^{(\text{ht}(X))}| = 1$, tzn. gdy $X^{(\text{ht}(X))}$ jest jednoelementowy, to mówimy, że X jest *unitalna*. M. Nowak w [79] udowodniła następujące:

⁹⁾Przez pseudometrykę rozumiem funkcję spełniającą wszystkie warunki metryki oprócz warunku $(\rho(x, y) = 0) \Rightarrow (x = y)$.

¹⁰⁾Wobec jej ciągłości i zwartości X , jest ona automatycznie zgodna.

¹¹⁾Lub nawet ich dalszych uogólnień – patrz [22].

¹²⁾Przestrzeń jest rozproszona, jeżeli każda jej podprzestrzeń zawiera punkt izolowany.

Twierdzenie 2.3. Niech X będzie przeliczalną przestrzenią ZZM.

- 1) Jeżeli $\text{ht}(X)$ jest następnikowa, to dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$, X jest homeomorficzna z atraktorem IFS-u $\mathcal{F}$ na prostej $\mathbb{R}$ takiego, że $\text{Lip}(\mathcal{F}) < \varepsilon$, i przy tym liczność $|\mathcal{F}| = 2|X^{(\text{ht}(X))}|$ (w szczególności, jeżeli X jest unitalna, to $\mathcal{F}$ jest złożony z dwóch odwzorowań).
- 2) Jeżeli $\text{ht}(X)$ jest graniczna, to X nie jest topologicznym fraktalem.¹³⁾
- 3) X jest homeomorficzna z podzbiorem $A \subset \mathbb{R}$, który nie jest atraktorem słabego IFS-u na $\mathbb{R}$.

W kontekście punktu 1) zauważmy, że problem szukania minimalnej liczności potrzebnego IFS-u wydaje się ciekawy sam w sobie – taka wartość niesie bowiem pewną informację o strukturze samej przestrzeni. Podkreślimy też, że warunek typu $\text{Lip}(\mathcal{F}) < \varepsilon$ jest sens rozważać tylko wtedy, gdy ograniczamy licznosc IFS-u, gdyż mając ścisły IFS $\mathcal{F}$, dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, również $\mathcal{F}^k$ jest ścisłym IFS-em z tym samym atraktorem, i przy tym $\text{Lip}(\mathcal{F}^k) \leq \text{Lip}(\mathcal{F})^k$.

Pozostaje więc rozważyć:

Problem 2.3. Czy nieprzeliczalne przestrzenie ZZM są topologicznymi fraktalami? Jeśli tak, to w jak mocnym sensie?

W szczególności można pytać o to, czy takie przestrzenie można zanurzyć w prostą $\mathbb{R}$ jako atraktory ścisłych IFS-ów, np. w podobny sposób jak w punkcie 1) Twierdzenia 2.3.

Inny problem związany z teorią Hutchinsona–Barnsleya dotyczy pytania na ile „wewnętrzne” jest pojęcie atraktora:

Problem 2.4. Niech A będzie atraktorem pewnego IFS-u. Czy A można zanurzyć (izometrycznie, homeomorficznie, etc.) w szerszą przestrzeń X jako atraktor odpowiedniego IFS-u na X ?

W pewnych przypadkach ten problem ma łatwe rozwiązanie. Np. jeżeli K jest podzbiorem przestrzeni Hilberta X i $\mathcal{F}$ jest IFS-em na K złożonym z kontrakcji Rakotcha [ew. kontrakcji Banacha], to korzystając z ogólnej wersji twierdzenia Kirszbrauna–Valentine’a (patrz [19]) oraz charakteryzacji kontrakcji Rakotcha z [46], można rozszerzyć funkcje z $\mathcal{F}$ na całą przestrzeń X tak, by te rozszerzenia pozostały kontrakcjami Rakotcha [ew. kontrakcjami Banacha]. Oczywiście atraktor tego rozszerzonego IFS-u na X jest taki sam, jak atraktor $\mathcal{F}$. Podobnie możemy postąpić gdy K jest podzbiorem przestrzeni ℓ^∞ (patrz [19]).

2.2.2 Uogólnione iterowane układy odwzorowań w sensie R. Miculescu i A. Mihaila

Ciekawe podejście do Problemu (I) zaproponowali w 2008 roku R. Miculescu i A. Mihail – zamiast odwzorowań przestrzeni X w siebie, rozważyli przekształcenia skończonego produktu X^m w X , gdzie $m \in \mathbb{N}$. Skończoną rodzinę $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ takich ciągłych odwzorowań nazwiemy *uogólnionym IFS-em rzędu m* (ang. *generalized iterated function system*; w skrócie GIFS-em). Tym samym symbolem $\mathcal{F}$ oznaczmy odwzorowanie z $\mathbb{K}(X)^m$ w $\mathbb{K}(X)$ zdefiniowane przez:

$$\mathcal{F}(K_1, \dots, K_m) := \bigcup_{i \in I} f_i(K_1 \times \dots \times K_m),$$

będące naturalnym odpowiednikiem operatora Hutchinsona.

Rozważając metrykę maksimum d_m na X^m , możemy w oczywisty sposób rozszerzyć definicje φ -kontrakcji, kontrakcji Banacha, Rakotcha, Matkowskiego czy Edelsteina, na przypadek odwzorowań z X^m w X . W takich przypadkach będziemy mówić o *uogólnionych* kontrakcjach Banacha, Rakotcha, etc. W pracach [65], [67] oraz [74] wspomniani matematycy udowodnili następujący odpowiednik Twierdzenia 2.1:

¹³⁾W [79] pokazane jest, że X nie jest homeomorficzna z atraktorem słabego IFS-u, jednak, jak pokażę w dalszej części autoreferatu, postawiony wyżej Problem 2.1 dla topologicznych fraktali ma pozytywne rozwiązanie.

Twierdzenie 2.4. Niech $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ będzie GIFS-em rzędu m na przestrzeni metrycznej X i załóżmy, że zachodzi jeden z warunków:

- (i) X jest zupełna i $\mathcal{F}$ jest złożony z uogólnionych kontrakcji Banacha;
- (ii) X jest zwarta i $\mathcal{F}$ jest złożony z uogólnionych kontrakcji Edelsteina.

Wówczas istnieje dokładnie jeden taki zbiór $A_{\mathcal{F}} \in \mathbb{K}(X)$, że

$$A_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i \in I} f_i(A_{\mathcal{F}} \times \dots \times A_{\mathcal{F}}).$$

Ponadto, dla dowolnych $K_1, \dots, K_m \in \mathbb{K}(X)$, ciąg (K_k) zdefiniowany przez:

$$K_{k+m} := \mathcal{F}(K_k, \dots, K_{k+m-1}), \quad k \geq 1, \quad (4)$$

jest zbieżny do $A_{\mathcal{F}}$.

Zbiór $A_{\mathcal{F}}$ z powyższej tezy nazwiemy *atraktorem* lub *fraktalem* generowanym przez GIFS $\mathcal{F}$.

Dowód Twierdzenia 2.4 opiera się na następującym odpowiedniku twierdzeń Banacha i Edelsteina, również udowodnionym w przytoczonych pracach¹⁴⁾:

Twierdzenie 2.5. Niech X będzie przestrzenią metryczną, $m \in \mathbb{N}$ i $f : X^m \mapsto X$. Załóżmy, że zachodzi jeden z warunków:

- (i) X jest zupełna i f jest uogólnioną kontrakcją Banacha;
- (ii) X jest zwarta i f jest uogólnioną kontrakcją Edelsteina.

Wówczas istnieje dokładnie jeden taki punkt $x_* \in X$, że

$$f(x_*, \dots, x_*) = x_*. \quad (5)$$

Ponadto, dla dowolnych $x_1, \dots, x_m \in X$, ciąg (x_k) zdefiniowany przez¹⁵⁾

$$x_{k+m} := f(x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+m-1}), \quad k \geq 1, \quad (6)$$

jest zbieżny do x_* .

Naturalnie jest nazwać punkt x_* spełniający (5) *uogólnionym punktem stałym* f (ang. *generalized fixed point*). Jeśli zaś dodatkowo ciągi zdefiniowane zgodnie z (6) są zbieżne do x_* , to x_* nazwiemy *kontrakcyjnym uogólnionym punktem stałym* (ang. *contractive generalized fixed point*)¹⁶⁾. Uwzględniając tę terminologię powiemy, że atraktorem GIFS-u $\mathcal{F}$ jest kontrakcyjny uogólniony punkt stały operatora $\mathcal{F} : \mathbb{K}(X)^m \mapsto \mathbb{K}(X)$.

Twierdzenie 2.5 w połączeniu z twierdzeniem Matkowskiego sugeruje pytanie o możliwość wzmocnienia Twierdzenia 2.4 na przypadek GIFS-ów złożonych z uogólnionych kontrakcji Matkowskiego (jak nietrudno pokazać, gdy przestrzeń X jest zwarta, to f jest uogólnioną kontrakcją Edelsteina wtedy i tylko wtedy, gdy jest uogólnioną kontrakcją Rakotcha).

A. Mihail w pracy [75] udowodnił odpowiednik Twierdzenia 2.2 dla GIFS-ów rzędu 2 złożonych z uogólnionych kontrakcji Banacha. W szczególności zdefiniował pewną wersję przestrzeni kodów i odwzorowania kodującego, jednak jego podejście nie jest według mnie w pełni satysfakcjonujące. Przez

¹⁴⁾Tego typu twierdzenia były dowodzone wcześniej – patrz np. [94].

¹⁵⁾We wspomnianych pracach definicja jest nieco inna – przyjmowane jest $x_{k+m} := f(x_{k+m-1}, \dots, x_k)$, i podobnie w warunku (4). Są to jednak tylko formalne różnice.

¹⁶⁾W omawianych pracach nie pojawia się ta druga definicja, wprowadzam ją na potrzeby tego autoreferatu.

przesadną komplikację zaproponowanej konstrukcji oraz (moim zdaniem) niezbyt staranną redakcję, całość jest trudna w czytaniu. Wydaje się więc zasadne poszukanie bardziej naturalnej wersji konstrukcji z [75] i ewentualne rozszerzenie wyników na przypadek GIFS-ów dowolnego rzędu złożonych ze słabszych wersji uogólnionych kontrakcji. Podsumowując, można postawić:

Problem 2.5. Czy można udowodnić wersję twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya dla GIFS-ów złożonych z uogólnionych kontrakcji Matkowskiego? W szczególności, czy można zdefiniować naturalne odpowiedniki przestrzeni kodów i odwzorowania kodującego?

Twierdzenie 2.2, a dokładniej związek przestrzeni kodów I^ω z danym IFS-em $\mathcal{F}$, pozwala na badanie struktury atraktora $A_{\mathcal{F}}$. Na przykład przy pomocy przestrzeni kodów może być uzasadniona poprawność klasycznego algorytmu *gry w chaos* (ang. *chaos game*) pozwalającego otrzymać obrazy zbiorów $A_{\mathcal{F}}$, czy też może być badany problem spójności atraktorów. Stąd z Problemem 2.5 wiąże się następny:

Problem 2.6. Czy aparat przestrzeni kodów dla GIFS-ów może być zastosowany do badania dalszych aspektów teorii GIFS-ów, np. do zdefiniowania algorytmu *gry w chaos* dla GIFS-ów, czy też do zbadania problemu spójności atraktorów?

Problem spójności był badany przez A. Mihaila i N. Secleana w [78], jednak, ponownie, badania były ograniczone do podstawowej wersji GIFS-ów.

Przy rozważaniu uogólnienia jakiegokolwiek pojęcia naturalne i ważne jest pytanie o to, na ile jest ono istotne¹⁷⁾. Nietrudno pokazać, że atraktor GIFS-u rzędu m jest też atraktorem GIFS-u rzędu $m+1$ (patrz np. Lemat 2.1 w [S9]). Należy więc postawić:

Problem 2.7. Czy klasa atraktorów generowanych przez GIFS-y jest istotnie szersza niż klasa atraktorów klasycznych IFS-ów?

Częściową odpowiedź uzyskali R. Miculescu i A. Mihail w [67]: kostka Hilberta

$$I := [0, 1] \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \times \left[0, \frac{1}{4}\right] \times \dots$$

jest atraktorem ścisłego GIFS-u $\mathcal{F} = \{f, g\}$ rzędu 2, gdzie

$$f((x_k), (y_k)) := \left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}y_1, \frac{1}{2}y_2, \dots\right) \quad \text{oraz} \quad g((x_k), (y_k)) := \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y_1, \frac{1}{2}y_2, \dots\right),$$

jednak nie może być atraktorem ścisłego IFS-u, gdyż ma nieskończony wymiar topologiczny. Z drugiej strony nie jest wiadomo, czy I jest atraktorem słabego IFS-u, czy chociaż topologicznym fraktalem.

W kontekście Problemu 2.7 oraz Twierdzenia 2.3 można rozważyć przestrzenie ZZM.

Problem 2.8. Przeanalizowanie przestrzeni ZZM jako atraktorów GIFS-ów.

W szczególności, znalezienie przeliczalnej ZZM o granicznej wysokości, będącej atraktorem ścisłego GIFS-u w pełni rozwiąże Problem 2.7. Można też, podobnie jak w Twierdzeniu 2.3, pytać o odpowiednie zanurzenia tych przestrzeni w prostą $\mathbb{R}$.

N. Seclean w artykule [92] rozważał możliwość rozwinięcia teorii GIFS-ów dla odwzorowań określonych na produkcie nieskończonym przestrzeni. Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną, to niech $\sum_\infty(X)$ oznacza zbiór ograniczonych ciągów¹⁸⁾ o wyrazach z X i niech d_s będzie metryką supremum na $\sum_\infty(X)$. N. Seclean zaczął od odpowiedniego twierdzenia o punkcie stałym:

¹⁷⁾W przypadku topologicznie zwięzających IFS-ów, rozwiązanie Problemu 2.1 pokaże, że w pewnym sensie nie dają one nic nowego.

¹⁸⁾N. Seclean stosował symbol $\ell_\infty(X)$.

Twierdzenie 2.6. *Jeżeli X jest zupełna i $f : \sum_{\infty}(X) \mapsto X$ spełnia warunek $\text{Lip}(f) < 1$, to istnieje dokładnie jeden taki punkt $x_* \in X$ (nazywany uogólnionym punktem stałym f), że*

$$f(x_*, x_*, \dots) = x_*.$$

Ponadto, dla dowolnego $(x_k) \in \sum_{\infty}(X)$, ciąg (y_k) zdefiniowany przez

$$y_k := f(f_s^{(k)}(x_1), f_s^{(k)}(x_2), \dots), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

jest zbieżny do x_ , gdzie $f_s(x) := f(x, x, \dots)$ dla $x \in X$.*

Następnie pokazał, że jeżeli $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ jest skończoną rodziną odwzorowań z $\sum_{\infty}(X)$ w X (nazwijmy takie rodziny GIFS-ami rzędu ∞ , w skrócie GIFS $_{\infty}$ -ami) taką, że $\text{Lip}(f_i) < 1$ dla $i \in I$, oraz dodatkowo $f_i(K) \in \mathbb{K}(X)$ dla $K \in \sum_{\infty}(\mathbb{K}(X))$ oraz $i \in I$, to operator¹⁹⁾ $\mathcal{F} : \sum_{\infty}(\mathbb{K}(X)) \mapsto \mathbb{K}(X)$ dany przez

$$\mathcal{F}(K_1, K_2, \dots) := \bigcup_{i \in I} f_i(K_1 \times K_2 \times \dots)$$

spełnia założenia Twierdzenia 2.6. W szczególności $\mathcal{F}$ generuje jedyny zbiór $A_{\mathcal{F}}$ (zwany *atraktorem* lub *fraktalem generowanym przez $\mathcal{F}$*), dla którego zachodzi równość:

$$A_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i \in I} f_i(A_{\mathcal{F}} \times A_{\mathcal{F}} \times \dots),$$

przy tym ciągi zbiorów zwartych zdefiniowane zgodnie z procedurą (7) zbiegają do $A_{\mathcal{F}}$.

Dodajmy jeszcze, że N. Secelean badał różne wersje tego twierdzenia (m.in. dla nieskończonych rodzin $\mathcal{F}$, ze słabszymi warunkami zwięźania etc.) przy czym przytoczona wersja jest reprezentatywna dla całości. W szczególności widać pewien, moim zdaniem, mankament – procedura iteracyjna (7) nie jest odpowiednikiem (6) z Twierdzenia 2.5, bliżej jej raczej do iterowania funkcji f_s która, jak łatwo sprawdzić, jest po prostu kontrakcją Banacha (ew. słabą kontrakcją w ogólniejszych przypadkach).

Naturalny jest więc:

Problem 2.9. Czy można zdefiniować wersję GIFS-ów nieskończonego rzędu tak, by zachodził pełny odpowiednik Twierdzenia 2.1? Jakie korzyści płynęłyby z takiej wersji?

W dalszej kolejności można pytać o inne aspekty teorii GIFS $_{\infty}$ -ów:

Problem 2.10. Czy można rozwinąć aparat przestrzeni kodów dla GIFS-ów nieskończonego rzędu i czy jej związki z danymi GIFS $_{\infty}$ -ami będą analogiczne do tych z klasycznymi IFS-ów, tzn. czy zachodzi odpowiednik Twierdzenia 2.2? Czy uwidoczni się różnica między podejściem N. Seceleana, a tym (ewentualnie) bardziej restrykcyjnym z Problemu 2.9? Czy klasa atraktorów generowanych przez GIFS-y nieskończonego rzędu jest istotnie szersza niż klasa atraktorów generowanych przez GIFS-y skończonego rzędu?

2.3 Omówienie wyników uzyskanych w cyklu prac

2.3.1 Remetryzacja topologicznie zwięźających IFS-ów

W pracy [S2], napisanej wspólnie z T. Banakhem²⁰⁾, W. Kubisiem, M. Nowak i N. Novosad rozważaliśmy Problemy 2.1 oraz 2.2. W szczególności, zaproponowaliśmy kilka warunków topologicznego zwięźania ([S2, Definition 2.1]).

¹⁹⁾Początek Rozdziału 3.2 w [92] sugeruje, że N. Secelean rozważał nieco szerszą przestrzeń niż $\sum_{\infty}(\mathbb{K}(X))$. Wydaje się jednak że to pomyłka.

²⁰⁾T. Banakh był opiekunem mojego stażu doktorskiego na Uniwersytecie Jana Kochanowskiego w Kielcach.

Tu przytoczę dwa z nich – najsłabszy i najsilniejszy. Powiemy, że IFS $\mathcal{F}$ na przestrzeni Hausdorffa X , spełniający warunek $\mathcal{F}(C) \subset C$ dla pewnego $C \in \mathbb{K}(X)$, jest:

1. *zwar to zwężający* (ang. *compactly contracting*), jeżeli dla każdego $K \in \mathbb{K}(X)$ i każdego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X , istnieje taki $n \in \mathbb{N}$, że rodzina $\{f(K) : f \in \mathcal{F}^k, k \geq n\}$ jest wpisana²¹⁾ w $\mathcal{U}$;
2. *globalnie zwężający* (ang. *globally contracting*), jeżeli dla każdego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X , istnieje takie $n \in \mathbb{N}$, że rodzina $\{f(X) : f \in \mathcal{F}^k, k \geq n\}$ jest wpisana w $\mathcal{U}$.

Okazuje się (punkt (a) wynika z Twierdzenia 2.2 w [S2], punkt (b) wynika wprost z (a)), że IFS $\mathcal{F}$:

- (a) jest topologicznie zwężający wtedy i tylko wtedy, gdy jest zwar to zwężający;
- (b) jest topologicznie zwężający wtedy i tylko wtedy, gdy jest globalnie zwężający, o ile przestrzeń X jest zwarta.

W związku z Problemem 2.1 kluczowe jest następujące twierdzenie (będące konsekwencją Stwierdzenia 6.2 w [S2]; patrz też Wniosek 6.4 w [S2]):

Twierdzenie 2.7. *Załóżmy, że (X, d) jest przestrzenią metryczną i $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ jest topologicznie zwężającym IFS-em na X . Jeżeli (a_k) jest ściśle rosnącym ciągiem takim, że $1 \leq a_k \leq 2$ dla $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, to funkcja*

$$\hat{d}(x, y) := \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \max_{f \in \mathcal{F}^k} a_k d(f(x), f(y)), \quad x, y \in X \quad (8)$$

jest taką zgodną metryką w X , że:

- (i) *każda f_i , $i \in I$, jest kontrakcją Edelsteina względem $\hat{d}$;*
- (ii) *jeżeli $\mathcal{F}$ jest globalnie zwężający, to każda f_i , $i \in I$, jest kontrakcją Rakotcha względem $\hat{d}$;*
- (iii) *jeżeli d jest zupełna, to $\hat{d}$ jest zupełna.*

Teza związana z punktem (ii) daje pełne rozwiązanie Problemu 2.1 dla globalnie zwężających IFS-ów (w szczególności dla topologicznych fraktali). W ogólności, choć istnieją IFS-y złożone z kontrakcji Edelsteina bez atraktora, to nie jest tak przy dodatkowym założeniu (t1). Istotnie, biorąc dowolny $K \in \mathbb{K}(X)$, dobieramy (na mocy warunku (t1)) zwarty zbiór $C \in \mathbb{K}(X)$ tak, by $K \subset C$ i $\mathcal{F}(C) \subset C$ oraz stosujemy Twierdzenia 2.1 i 2.2 do przestrzeni C i IFS-u $\mathcal{F}_C := \{f|_C : f \in \mathcal{F}\}$ (złożonego już z kontrakcji Rakotcha). W szczególności, możemy w ten sposób uzasadnić tezy twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya dla TIFS-ów przez Twierdzenie 2.7. To rozumowanie pokazuje też jak kluczowy jest warunek (t1) w definicji topologicznego zwężania pozwalający ograniczyć rozważania do przestrzeni zwartej.

Dodajmy, że R. Miculescu i A. Mihail w [70] niezależnie od nas rozwiązali Problem 2.1 dla topologicznych fraktali, a zdefiniowana przez nich metryka jest bliźniaczo podobna do $\hat{d}$ (mogli się inspirować pracą M. Barnsleya i K. Igudesmana [14] w której pojawia się wzór (8), ale bez tych współczynników a_k , przez co odwzorowania z $\mathcal{F}$ są tylko nieoddalające względem $\hat{d}$, tj. $\text{Lip}(f) \leq 1$ dla $f \in \mathcal{F}$).

Z drugiej strony, wyniki otrzymane przeze mnie i moich współautorów są znacznie szersze. Nie tylko rozważyliśmy i porównaliśmy różne warunki topologicznego zwężania, ale też analiza wykroczyła poza przestrzenie metryzowalne. Załóżmy, że X jest przestrzenią Tichonowa. W takim przypadku topologia na X jest generowana przez pewną rozdzielałą rodzinę pseudometryk $\mathcal{D}$ i, jak się okazało, można naturalnie przenieść teorię Hutchinsona–Barnsleya (i, przy okazji, elementy teorii punktów stałych²²⁾)

²¹⁾ Powiemy, że rodzina $\mathcal{A}$ jest *wpisana* w rodzinę $\mathcal{B}$, jeżeli dla dowolnego $A \in \mathcal{A}$ istnieje taki $B \in \mathcal{B}$, że $A \subset B$.

²²⁾ Co, jak się zorientowaliśmy już po opublikowaniu artykułu, było robione wcześniej. W szczególności, wersje Twierdzenia 4.4 o punkcie stałym z [S2] znaleźć można w [57] i [96].

na przypadek przestrzeni X wyposażonej w rozdzielającą rodzinę pseudometryk $\mathcal{D}$. Taką parę $(X, \mathcal{D})$ nazwaliśmy *przestrzenią multimetryczną*. W szczególności zdefiniowaliśmy różne wersje zwięzania IFS-u względem multimetryki (Definicja 5.1 z [S2]) i otrzymaliśmy następujące uogólnienie Twierdzenia 2.1 (podaję tu szczególną wersję Twierdzenia 5.6 z [S2]).

Twierdzenie 2.8. *Jeżeli $(X, \mathcal{D})$ jest ciągowo zupełną przestrzenią multimetryczną, zaś $\mathcal{F}$ jest słabym IFS-em na X , to $\mathcal{F}$ jest topologicznie zwięzający.*

Warto dodać, że teza nie wynika bezpośrednio z odpowiedniego twierdzenia o punkcie stałym dla przestrzeni multimetrycznych gdyż, jak pokazuje Przykład 3.9 z [S2], ciągowa zupełność przestrzeni $(X, \mathcal{D})$ nie implikuje ciągowej zupełności odpowiadającej jej rodzinie multimetryk na przestrzeni zbiorów zwartych $\mathbb{K}(X)$.

Wzór (8) może być z powodzeniem zastosowany do pseudometryk (kluczowe dla większości cytowanych dalej wyników Stwierdzenie 6.2 w [S2] jest właśnie sformułowane dla pseudometryki) i okazuje się (Twierdzenie 6.8 w [S2]), że dla TIFS-u $\mathcal{F}$ na przestrzeni zwartej X istnieje taka zgodna rodzina multimetryk $\mathcal{D}$, że $(X, \mathcal{D})$ jest ciągowo zupełna²³⁾ i $\mathcal{F}$ jest słabym IFS-em względem $\mathcal{D}$ (nawet złożonym z kontrakcji typu Rakotcha). Otrzymujemy więc przeciwną implikację w Twierdzeniu 2.8. W ogólności, bez założenia zwartości X , zawsze możemy przejść do odpowiednio dużego zbioru zwanego C (a więc w szczególności będącego przestrzenią Tichonowa), więc otrzymane twierdzenia dają rozwiązanie Problemu 2.2.

W Twierdzeniach 6.3, 6.7 czy 6.11 z [S2] bardziej szczegółowo analizujemy zależności między różnymi typami topologicznego zwięzania a multimetrycznego zwięzania, z kolei w Stwierdzeniach 6.12 czy 6.15 z [S7] otrzymanaliśmy kolejne wersje remetryzacji. Wspomnę jeszcze o Przykładzie 5.2 z [S2], w którym pokazujemy, że istnieją dwa nieoddalające odwzorowania $f, g : [0, 2] \mapsto [0, 2]$ takie, że $f \circ f([0, 2])$ i $g \circ g([0, 2])$ są zbiorami jednopunktowymi a przy tym IFS $\mathcal{F} = \{f, g\}$ nie jest topologicznie zwięzający (a nawet, jak łatwo sprawdzić, istnieje nieskończenie wiele zbiorów zwartych i $\mathcal{F}$ -niezmienniczych). Pokazuje to w szczególności, że nawet, gdy każde z odwzorowań z danego IFS-u jest kontrakcją Banacha dla pewnej metryki²⁴⁾, to może nie istnieć jedna metryka przy której wszystkie odwzorowania są zwięzające. W terminologii z [S2] oznacza to też, że IFS złożony z odwzorowań *ostatecznie zwięzających* (ang. *eventually contracting*; patrz Definicja 4.1 w [S2]) nie musi być topologicznie zwięzający²⁵⁾. Przykład ten pokazuje też naturalne ograniczenie przy próbie rozszerzania pojęcia topologicznego zwięzania.

R. Miculescu i A. Mihail w artykułach [71], [72] i [73] rozwijali pomysły z naszej pracy [S2] i ze swojej [70]. W [71] zdefiniowali warunek (C) dla IFS-u $\mathcal{F}$ i udowodnili, że implikuje on istnienie zupełnej metryki, przy której odwzorowania z $\mathcal{F}$ stają się słabymi kontrakcjami. Nietrudno pokazać (np. korzystając z Faktu 2 z [71] i definicji zwarto-zwięzania), że IFS-y spełniające (C) są topologicznie zwięzające, więc z Twierdzenia 2.7(i) otrzymujemy nieco słabszy rezultat, ale również wiążący warunek (C) z metrycznym zwięzaniem. W [73] autorzy zaproponowali inne podejście – zdefiniowali czysto mnogościowy warunek zwięzania dla IFS-u $\mathcal{F}$ i udowodnili, że implikuje on istnienie odpowiedniej zupełnej metryki, przy której odwzorowania z $\mathcal{F}$ stają się słabymi kontrakcjami. Korzystając z Twierdzenia 2.7(ii),(iii) można nieco uprościć ich dowód – np. pokazując, że rozważany IFS jest globalnie zwięzający w topologii generowanej przez metrykę ρ ze Stwierdzenia 3.16 w [73]. W pracy [72] autorzy uogólnili swój wynik z [70] na przypadek IFS-ów złożonych z nieskończenie wielu funkcji. Wydaje się, że Twierdzenie 2.7 można również uogólnić w tym kierunku, tzn. otrzymać analogiczną tezę dla takich nieskończonych IFS-ów.

²³⁾To akurat wynika ze zwartości X – Stwierdzenie 3.4 w [S2].

²⁴⁾Odwzorowania f i g spełniają założenia wspomnianych twierdzeń remetryzacyjnych z [47], [56] czy [62]. Tego rodzaju kontrakcje badane też były w [28].

²⁵⁾Wbrew temu co omyłkowo napisaliśmy we wstępie w [S2]; wspomnę przy okazji o usterce w sformułowaniu Lematu 3.3, gdzie x powinien być wzięty z K .

2.3.2 Zanurzenia atraktorów w przestrzenie uniwersalne

W pracy [S4], napisanej wspólnie z T. Banachem, rozważaliśmy Problem 2.4 pod kątem szukania zanurzeń w przestrzeni *topologicznie uniwersalne*, tj. zawierające homeomorficzne kopie wszystkich przestrzeni zwartych i metryzowalnych oraz w *uniwersalną przestrzeń Urysohna* $\mathbb{U}$, tj. jedyną (z dokładnością do izometrii) ośrodkową zupełną przestrzeń metryczną zawierającą izometryczne kopie wszystkich przestrzeni skończonych i taką, że izometrie między skończonymi podzbiórmi $\mathbb{U}$ rozszerzają się do izometrii na $\mathbb{U}$. Udowodniliśmy następujące twierdzenia (Twierdzenia 1.3 i 1.4 w [S4]):

Twierdzenie 2.9. *Załóżmy, że X jest topologicznie uniwersalną przestrzenią Tichonowa. Wówczas każdy topologiczny fraktal jest homeomorficzny z atraktorem pewnego globalnie zwięzającego IFS-u $\mathcal{F}$ na X . Przy tym, jeżeli X jest metryzowalna, to $\mathcal{F}$ jest złożony z kontrakcji Rakotcha względem pewnej ograniczonej metryki zgodnej²⁶⁾ na X .*

Twierdzenie 2.10. *Jeżeli zwarta przestrzeń metryczna K jest atraktorem słabego [ew. ścisłego] IFS-u, to K jest izometryczna z atraktorem IFS-u na $\mathbb{U}$ złożonego z kontrakcji Rakotcha [ew. kontrakcji Banacha].*

Dowód Twierdzenia 2.9 opiera się na Twierdzeniu 2.7 oraz zanurzeniu przestrzeni K w zwartą przestrzeń miar probabilistycznych i rozszerzeniu na nią oryginalnego IFS-u (pojawiają się tu idee podobne do tych z analizy operatora Markowa). Z kolei w dowodzie Twierdzenia 2.10 kluczowy jest Lemat 3.1 z [S4], który mówi o możliwości rozszerzenia odwzorowań działających w $\mathbb{U}$ z zachowaniem modułu ciągłości o odpowiednich własnościach.

Dalsze badania nad problemem zanurzeń fraktali w szersze przestrzenie przedstawiliśmy w napisanym wspólnie z T. Bankhem i M. Nowak artykule [12], który znajduje się aktualnie w recenzji. Pokazaliśmy na przykład (Twierdzenie 2.1 w [12]), że teza Twierdzenia 2.10 dla atraktora ścisłego IFS-u zachodzi dla każdej zupełnej przestrzeni metrycznej zawierającej izometryczne kopie wszystkich przestrzeni metrycznych zwartych.

2.3.3 Twierdzenia Hutchinsona–Barnsleya dla GIFS-ów

Artykuł [S1] napisany wspólnie z J. Swaczyną²⁷⁾ został w dużej mierze poświęcony Problemowi 2.5. Główny wynik (pierwsza część²⁸⁾ Twierdzenia 3.11 w [S1]) to wersja Twierdzenia 2.4 dla GIFS-ów złożonych z uogólnionych kontrakcji typu Browdera. Dowód bazuje na odpowiednim wzmocnieniu Twierdzenia 2.5 (Twierdzenie 3.1 w [S1]) dla tego typu uogólnionych kontrakcji i obserwacji, że operator $\mathcal{F} : \mathbb{K}(X)^m \mapsto \mathbb{K}(X)$ jest uogólnioną φ -kontrakcją, o ile $\mathcal{F}$ składa się z uogólnionych φ -kontrakcji i φ jest niemalejąca. Chociaż zwięzanie typu Browdera jest nieco silniejsze niż zwięzanie typu Matkowskiego (patrz [46]), to nietrudno się przekonać, że dowód działa dla uogólnionych kontrakcji Matkowskiego. Kluczowa obserwacja²⁹⁾ jest bowiem taka, że $f : X^m \mapsto X$ ma uogólniony kontrakcyjny punkt stały wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja $\tilde{f} : X^m \mapsto X^m$ zdefiniowana przez $\tilde{f}(x_1, \dots, x_m) := (x_2, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m))$ ma kontrakcyjny punkt stały, przy czym ten ostatni warunek zachodzi przy założeniu, że f jest uogólnioną kontrakcją Matkowskiego³⁰⁾. Pełny dowód Twierdzenia 2.4 dla GIFS-ów złożonych z kontrakcji Matkowskiego znaleźć można w artykule [S16], który omówię w dalszej części autoreferatu (na str. 27).

²⁶⁾Co więcej, choć nie jest to podkreślone w oryginalnej tezie, odpowiednia metryka na X jest zupełna, o ile X jest metryzowalna w sposób zupełny.

²⁷⁾Studentem, który był pod moją opieką w ramach Indywidualnego Programu Studiów.

²⁸⁾W sformułowaniu drugiej części tego twierdzenia pojawia się literówka – brakuje założenia o tym że $\liminf_{t \rightarrow \infty} (t - \varphi(t)) > 0$, co jest potrzebne w związku zastosowaniem Twierdzenia 2.1(ii) z [S1].

²⁹⁾Nie ma jej explicite napisanej w [S1], ale to do niej się sprowadza rozumowanie.

³⁰⁾Tak naprawdę jest spełniony także dla jeszcze ogólniejszych warunków zwięzania. Swoje rozważania ograniczyłem do zwięzania typu Matkowskiego, gdyż jest ono z jednej strony bardzo ogólne, a z drugiej daje się wyrazić w naturalny sposób przez zachowanie funkcji φ . W pracy [93] N. Seclean rozważał GIFS-y złożone z tzw. *F-kontrakcji* i przytoczona obserwacja pozwala nieco uprościć dowód jednego z jego twierdzeń.

Od tej pory GIFS-y złożone z uogólnionych kontrakcji Banacha nazywać będę *ściśłymi*, a złożone z uogólnionych kontrakcji Matkowskiego *słabymi*.

W kolejnej pracy napisanej z J. Swaczyną, [S7], skupiliśmy się na drugiej części Problemu 2.5 (rozważaliśmy już GIFS-y złożone z uogólnionych kontrakcji Matkowskiego). W szczególności, zdefiniowaliśmy i zbadaliśmy znacznie bardziej przyjazną wersję przestrzeni kodów dla GIFS-ów niż tą zaprezentowaną w [75]. Przytoczę tu pełne konstrukcje z [S7], aby z jednej strony pokazać, że pewnych trudności technicznych nie dało się uniknąć, a z drugiej strony, by móc się na nie powoływać w dalszej części autoreferatu.

Niech $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ będzie GIFS-em rzędu m . Zdefiniujemy zbiory $\Omega_1, \Omega_2, \dots$ następująco:

$$\Omega_1 := I \text{ oraz dla } k \geq 1, \quad \Omega_{k+1} := (\Omega_k)^m = \Omega_k \times \dots \times \Omega_k$$

i przyjmijmy:

$$\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3 \times \dots = \prod_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k.$$

Przestrzeń $\Omega_{\mathcal{F}} := \Omega$ nazywamy *przestrzenią kodów dla $\mathcal{F}$* . Jest jasne, że dla $m = 1$ otrzymujemy klasyczną wersję przestrzeni kodów dla IFS-ów, tj. I^{ω} .

Aby sformułować wersję Twierdzenia 2.2 dla GIFS-ów, musimy jeszcze zdefiniować odpowiedniki rodzin złożzeń $\mathcal{F}^k$. Dla $k \in \mathbb{N}$ przyjmijmy

$${}_k\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_k.$$

Dalej, niech X_k , $k \in \mathbb{N}$, będą zdefiniowane następująco:

$$X_1 := X^m = X \times \dots \times X \text{ oraz dla } k \geq 1, \quad X_{k+1} := (X_k)^m = X_k \times \dots \times X_k. \quad (9)$$

Definicja rodzin $\mathcal{F}^k$ jest indukcyjna. Przyjmijmy $\mathcal{F}^1 := \mathcal{F}$. Wówczas $\mathcal{F}^1 = \{f_{\alpha} : \alpha \in {}_1\Omega\}$, gdzie $f_{\alpha} : X_1 \mapsto X$ dla $\alpha \in {}_1\Omega$. Załóżmy, że dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ zdefiniowaliśmy już $\mathcal{F}^k = \{f_{\alpha} : \alpha \in {}_k\Omega\}$, gdzie $f_{\alpha} : X_k \mapsto X$ dla $\alpha \in {}_k\Omega$. Dla $\alpha \in {}_{k+1}\Omega$ niech $f_{\alpha} : X_{k+1} \mapsto X$ będzie dana wzorem:

$$f_{\alpha}(x_1, \dots, x_m) := f_{\alpha^1}(f_{\alpha^1(1)}(x_1), \dots, f_{\alpha^1(m)}(x_m))$$

gdzie, przy oznaczeniu

$$\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{k+1}) = (\alpha^1, (\alpha_1^2, \dots, \alpha_m^2), \dots, (\alpha_1^{k+1}, \dots, \alpha_m^{k+1})),$$

przyjmujemy $\alpha(i) := (\alpha_i^2, \dots, \alpha_i^{k+1}) \in {}_k\Omega$ dla $i = 1, \dots, m$. Ostatecznie niech $\mathcal{F}^{k+1} := \{f_{\alpha} : \alpha \in {}_{k+1}\Omega\}$.

Definicja rodzin $\mathcal{F}^k$ jest dość skomplikowana (przy tym, dla $m = 1$ otrzymujemy po prostu rodziny k wielu złożzeń). Z drugiej jednak strony, jest ona ściśle powiązana z naturalnym rozkładem fraktala $A_{\mathcal{F}}$ dla danego słabego GIFS-u $\mathcal{F}$. Zauważmy bowiem, że przyjmując $A_1 := (A_{\mathcal{F}})^m$ oraz $A_2 := (A_1)^m$, mamy:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{F}} &= \bigcup_{i \in I} f_i(A_{\mathcal{F}} \times \dots \times A_{\mathcal{F}}) = \bigcup_{\alpha \in {}_1\Omega} f_{\alpha}(A_1) = \bigcup_{\alpha \in {}_1\Omega} f_{\alpha} \left(\left(\bigcup_{\beta_1 \in \Omega_1} f_{\beta_1}(A_1) \right) \times \dots \times \left(\bigcup_{\beta_m \in \Omega_1} f_{\beta_m}(A_1) \right) \right) = \\ &= \bigcup_{\alpha \in {}_1\Omega} \bigcup_{\beta_1 \in \Omega_1} \dots \bigcup_{\beta_m \in \Omega_1} f_{\alpha}(f_{\beta_1}(A_1) \times \dots \times f_{\beta_m}(A_1)) = \bigcup_{\alpha \in {}_2\Omega} f_{\alpha}(A_2) \end{aligned}$$

i procedurę tę można prowadzić dalej. W szczególności, otrzymujemy zapowiadaną wersję Twierdzenia 2.2 (wynika ona ze Stwierdzeń 3.3, 3.5 i 3.10, oraz Twierdzeń 3.7, 3.8 i 3.11 z [S7]). Przed sformułowaniem wprowadźmy jeszcze oznaczenia: jeżeli $A_{\mathcal{F}}$ jest atraktorem słabego GIFS-u $\mathcal{F}$, to zdefiniujemy zbiory A_k , $k \in \mathbb{N}$, zgodnie z procedurą (9); dodatkowo, niech h_k będzie naturalną bijekcją zbiorów X^{m^k} i X_k (pełna definicja h_k jest podana przed Stwierdzeniem 3.10 w [S7]).

Twierdzenie 2.11. Niech $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ będzie słabym GIFS-em rzędu m na zupełnej przestrzeni X . Wówczas spełnione są warunki:

- (i) $A_{\mathcal{F}} = \overline{\{x_{\alpha} : \alpha \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} {}_k\Omega\}}$, gdzie x_{α} to uogólniony punkt stały odwzorowania $f_{\alpha} \circ h_k$;
- (ii) dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in {}_k\Omega$, $f_{\alpha}(A_k) = \bigcup_{\beta \in \Omega_{k+1}} f_{\alpha\hat{\beta}}(A_{k+1})$;
- (iii) dla dowolnego $\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}$, zbiór $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{\alpha|_k}(A_k)$ jest jednopunktowy – oznaczmy jego jedyny element przez $\pi(\alpha)$;
- (iv) dla dowolnego $\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}$ i $K \in \mathbb{K}(X)$, ciąg $f_{\alpha|_k}(K_k) \rightarrow \{\pi(\alpha)\}$, gdzie K_k , $k \in \mathbb{N}$, są zdefiniowane zgodnie z (9);
- (v) odwzorowanie $\pi : \Omega_{\mathcal{F}} \mapsto X$ ma następujące własności:
 - (v_a) π jest ciągle;
 - (v_b) $\pi(\Omega_{\mathcal{F}}) = A_{\mathcal{F}}$;
 - (v_c) dla dowolnego $i \in I$, $f_i \circ \pi_1 = \pi \circ \tau_i$, gdzie $\tau_i : (\Omega_{\mathcal{F}})^m \mapsto \Omega_{\mathcal{F}}$ jest dane przez

$$\tau_i((\alpha_1^1, \alpha_1^2, \dots), \dots, (\alpha_m^1, \alpha_m^2, \dots)) := (i, (\alpha_1^1, \dots, \alpha_m^1), (\alpha_1^2, \dots, \alpha_m^2), \dots)$$

$$\text{zaś } \pi_1 : (\Omega_{\mathcal{F}})^m \mapsto X_1 \text{ przez } \pi_1(\alpha_1, \dots, \alpha_m) := (\pi(\alpha_1), \dots, \pi(\alpha_m)).$$

Wyjaśnienia wymaga punkt (v_a). Na przestrzeni kodów $\Omega_{\mathcal{F}}$ rozważamy topologię Tichonowa, przy założeniu, że zbiory Ω_k wypozażamy w topologię dyskretną (jest to naturalne założenie, gdyż są zbiory skończone). Dokładniej, na $\Omega_{\mathcal{F}}$ zdefiniowaliśmy metrykę:

$$d(\alpha, \beta) := \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{d_k(\alpha^k, \beta^k)}{(m+1)^k},$$

gdzie d_k jest metryką dyskretną na Ω_k . Przy takim założeniu, jak pokazaliśmy w Stwierdzeniu 2.4 w [S7], rodzina odwzorowań $\mathcal{T} := \{\tau_i : i \in I\}$ z punktu (v_c) jest GIFS-em na $\Omega_{\mathcal{F}}$ spełniającym $\text{Lip}(\mathcal{T}) \leq \frac{m}{m+1}$ i $\Omega_{\mathcal{F}}$ jest jego atraktorem. Stąd i z Twierdzenia 2.11, zasadne jest nazwanie przestrzeni $\Omega_{\mathcal{F}}$ – przestrzenią kodów, odwzorowania π – odwzorowaniem kodującym zaś GIFS $\mathcal{T}$ – kanonicznym GIFS-em na $\Omega_{\mathcal{F}}$. Podsumowując, Twierdzenie 2.11 w połączeniu z omówionymi wcześniej wynikami z [S1] dają pełne, pozytywne rozwiązanie Problemu 2.5.

2.3.4 Zastosowania aparatu przestrzeni kodów dla GIFS-ów

W tym podrozdziale omówię wyniki związane z Problemem 2.6. W pracy [S6], napisanej wspólnie z P. Jaros i Ł. Maślanką³¹⁾, zaproponowaliśmy trzy takie algorytmy na przypadek GIFS-ów, z czego dwa bazujące na aparacie przestrzeni kodów i Twierdzeniu 2.11. Dla każdego z nich stworzyliśmy odpowiedni pseudokod, który, zaimplementowany do programu Maple, pozwolił otrzymać odpowiednie ilustracje.

Najciekawszy, moim zdaniem, algorytm to odpowiednik gry w chaos. Podobnie jak klasyczna wersja może być uzasadniona poprzez Twierdzenie 2.2, tak zaproponowana konstrukcja przestrzeni kodów dla GIFS-ów i jej związki z atraktorem pozwalają wygenerować odpowiedni losowy algorytm w tym uogólnionym przypadku. Przypomnijmy pokrótce, jak działa klasyczna gra w chaos (podaję tu szkic elementarnego dowodu poprawności, patrz np. [60]). Jeżeli $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ jest słabym IFS-em na X i x_0 jest ustalonym punktem z X (dla prostoty założymy, że $x_0 \in A_{\mathcal{F}}$; w ogólnym przypadku postępuje się podobnie), to każdy ciąg $\alpha = (\alpha_k) \in I^{\omega}$ generuje ciąg punktów (x_k) , gdzie $x_k := f_{\alpha_k}(x_{k-1})$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wówczas z prawdopodobieństwem 1 (przy mierze produktowej na I^{ω}), ciąg α jest wybierany tak, że

³¹⁾Studentem będącym pod moją opieką w ramach Indywidualnego Programu Studiów.

każde skończone słowo $(i_1, \dots, i_k)$ pojawia się w ciągu α , przez co $x_j \in f_{(i_k, \dots, i_1)}(A_{\mathcal{F}})$ dla pewnego $j \in \mathbb{N}$. Zatem, wobec Twierdzenia 2.2, $\{x_j : j \in \mathbb{N}\} = A_{\mathcal{F}}$. Losując więc kolejne wartości α_k i generując kolejne punkty $x_k = f_{\alpha_k}(x_{k-1})$, prawie na pewno otrzymamy punkty coraz gęściej wypełniające atraktor $A_{\mathcal{F}}$.

Zaproponowana wersja gry w chaos dla GIFS-ów opiera się na podobnej idei – mając dany słaby GIFS $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ i $x_0 \in A_{\mathcal{F}}$, chcemy losowo generować taki ciąg (x_k) , by z prawdopodobieństwem 1 dla każdego $k \in \mathbb{N}$ i $\alpha \in {}_k\Omega$, istniał $j \in \mathbb{N}$ dla którego $x_j \in f_{\alpha}(A_k)$. Widać więc, że trzeba odpowiednio kodować losowany ciąg $\alpha \in I^{\omega}$ w ciąg $\tilde{\alpha} \in \Omega_{\mathcal{F}}$. Dodatkowy problem pojawia się w przypadku, gdy początkowy punkt $x_0 \notin A_{\mathcal{F}}$, gdyż tu generowany ciąg (x_k) ma odpowiednio zbliżać się do atraktora $A_{\mathcal{F}}$. Te problemy udało nam się rozwiązać i otrzymaliśmy prosty i łatwy w implementacji algorytm (Twierdzenie 15 z [S6] uzasadnia jego poprawność), niemal równie wydajny jak jego klasyczna wersja³²⁾.

Co ważne, zaproponowany algorytm nie jest tak oczywisty, jak może się wydawać na pierwszy rzut oka – nie wystarczy losowanie ciągu (x_k) zgodnie z procedurą:

$$x_{k+m} := f_{\alpha_k}(x_k, \dots, x_{k+m-1}),$$

co pokazaliśmy w Uwadze 19 z [S6]. Postępując w ten sposób otrzymalibyśmy rzut atraktora IFS-u $\tilde{\mathcal{F}}$ na X^m , naturalnie wygenerowanego przez GIFS $\mathcal{F}$, który, jak pokazuje przykład kostki Hilberta, czy zbioru typu Cantora z mojej pracy [S5], nie musi pokrywać się z atraktorem wyjściowego GIFS-u. Na takim pomysłe (tzn. na odpowiednim generowaniu IFS-u na X^m) oparł swoją definicję "nowego typu atraktora GIFS-u" E. Oliveira w [82].

Kolejny z zaproponowanych algorytmów jest w swojej naturze deterministyczny i został zdefiniowany dla tzw. *afinicznych* GIFS-ów $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$, tj. składających się z afinicznych przekształceń przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$:

$$f_i(x_1, \dots, x_m) := A_1^i x_1 + \dots + A_m^i x_m + B^i,$$

gdzie $A_1^i, \dots, A_m^i, B^i$ są odpowiednimi macierzami. Okazuje się, że w takim przypadku macierzowe współczynniki odwzorowań f_{α} z rodzin $\mathcal{F}^k$ mają stosunkowo naturalną postać (Twierdzenie 20 z [S6]), przy tym z Twierdzenia 2.11 wynika, że zbiory postaci $\bigcup_{\alpha \in {}_k\Omega} f_{\alpha}(K_k)$ coraz lepiej przybliżają $A_{\mathcal{F}}$ ³³⁾. Zaproponowany algorytm wyznacza te współczynniki macierzowe odwzorowań z $\mathcal{F}^k$, co pozwala otrzymywać odpowiednie aproksymacje atraktora. Zdefiniowaliśmy też prostszą (i bardziej ekonomiczną) wersję algorytmu dla przypadku, gdy startowy zbiór K jest równy $\{0\}$.

Trzeci algorytm rozważany w [S6] nie bazuje na aparacie przestrzeni kodów i jest odpowiednikiem klasycznego algorytmu deterministycznego – jego działanie polega na definiowaniu kolejnych zbiorów K_k zgodnie z procedurą (4). Rozważyliśmy też wersję generującą kolejne iteracje operatora $\bar{\mathcal{F}}(K) := \mathcal{F}(K, \dots, K)$.

W omawianym już artykule [S7] wykorzystaliśmy aparat przestrzeni kodów do badania problemu spójności atraktorów GIFS-ów – okazało się, że zachodzą analogiczne twierdzenia jak w klasycznym przypadku. W szczególności udowodniliśmy (patrz Twierdzenia 4.5 i 4.9 w [S7]):

Twierdzenie 2.12. *Niech $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ będzie słabym GIFS-em na zupełnej przestrzeni X .*

(1) *Jeżeli atraktor $A_{\mathcal{F}}$ GIFS-u $\mathcal{F}$ jest spójny, to jest lokalnie spójny.*

(2) *Następujące warunki są równoważne:*

(i) *$A_{\mathcal{F}}$ jest spójny;*

³²⁾W niektórych przypadkach konkretna realizacja algorytmu daje jednak nie do końca zamierzone efekty - np. charakterystyczna poprzeczka na Rysunku 2 w [S6] jest związana z tym, że $f_2(x, x) = (1.6, y)$ dla pewnego y - patrz Przykład 8 w [S6].

³³⁾Choć można też zauważyć, że są to kolejne iteracje operatora $\bar{\mathcal{F}} : \mathbb{K}(X) \mapsto \mathbb{K}(X)$ zdefiniowanego przez $\bar{\mathcal{F}}(K) := \mathcal{F}(K, \dots, K)$.

- (ii) $A_{\mathcal{F}}$ jest łukowo spójny;
- (iii) rodzina $\{f(A_{\mathcal{F}}) : f \in \mathcal{F}\}$ jest spójna w tym sensie, że każde dwa elementy $A_{\mathcal{F}}$ dają się połączyć łańcuchem zbiorów z tej rodziny.

Dowody wykorzystują głównie punkty (ii) oraz (iii) z Twierdzenia 2.11 i standardowe metody przy badaniu problemów związanych ze spójnością³⁴⁾. Jak napisałem wcześniej, A. Mihail i N. Seclean otrzymali w [78] tezę punktu (2) Twierdzenia 2.12 w przypadku ścisłych GIFS-ów rzędu 2.

Kolejne zastosowanie aparatu przestrzeni kodów zawarłem we wspomnianej pracy [S16] – dzięki niemu udało się zdefiniować odpowiednik topologicznie zwężających GIFS-ów i udowodnić dla nich wersje twierdzeń Hutchinsona–Barnsleya. Więcej napiszę o tym na stronie 27 autoreferatu.

R. Miculescu i S. A. Urziceanu w [64] zastosowali nasz aparat pojęciowy przestrzeni kodów do pokazania, że odwzorowanie kodujące $\pi : \Omega_{\mathcal{F}} \mapsto X$ może być otrzymane jako uogólniony punkt stały pewnego operatora na odpowiedniej przestrzeni funkcji ciągłych (analogiczny wynik dla klasycznych IFS-ów uzyskał A. Mihail w [77]). R. Miculescu i A. Mihail w [66] (patrz też [63]) pokazali³⁵⁾, że na atraktorze $A_{\mathcal{F}}$ odpowiednio zwężającego GIFS-u $\mathcal{F}$ (trzeba założyć coś więcej niż $\text{Lip}(\mathcal{F}) < 1$) uzupełnionego o układ prawdopodobieństw p_i , $i \in I$, istnieje jedyna probabilistyczna miara borelowska μ_* spełniająca:

$$\mu_*(A) = \sum_{i \in I} p_i (\mu_* \times \dots \times \mu_*)(f_i^{-1}(A)), \quad (10)$$

czyli odpowiednik znanej miary Hutchinsona. Miara μ_* otrzymana została jako uogólniony punkt stały odpowiednio zdefiniowanego operatora Markowa dla GIFS-ów. Korzystając z Twierdzenia 2.11, nietrudno jednak pokazać, że miara spełniająca (10) istnieje na atraktorze dowolnego słabego GIFS-u: zaczynając od miary $\mu_1(\{i\}) = p_i$ na $\Omega_1 = I$, definiujemy miary μ_k na Ω_k jako odpowiednie miary produktowe (definicja jest więc indukcyjna), i w końcu określamy na $\Omega_{\mathcal{F}}$ miarę μ jako miarę produktową. Ostatecznie, miara μ' zdefiniowana przez $\mu'(A) := \mu(\pi^{-1}(A))$ spełnia (10). Prace nad tymi zagadnieniami są nadal w toku.

2.3.5 GIFS-y nieskończonego rzędu

W artykule [S8], napisanym wspólnie z Ł. Maślanką, skupiliśmy się na Problemach 2.9 i 2.10. Po pierwsze, zaproponowaliśmy nieco bardziej restrykcyjne wersje GIFS $_{\infty}$ -ów względem tych z artykułu N. Secleana [92]. Na przestrzeni $\sum_{\infty}(X)$ rozważyliśmy rodzinę metryk³⁶⁾ $d_{s,q}$, $q \in (0, 1]$, gdzie

$$d_{s,q}(x, y) := \sup\{q^k d(x_k, y_k) : k \in \mathbb{N}\}.$$

Widać, że $d_{s,1} = d_s$, ale dla $q < 1$ dostajemy istotnie inne metryki. W związku z tym, dla $f : \sum_{\infty}(X) \mapsto X$, przez $\text{Lip}_q(f)$ oznaczmy stałą Lipschitza f względem metryki $d_{s,q}$. W nieco wcześniejszej pracy [S25], napisanej wspólnie z J. Jachymskim i Ł. Maślanką, udowodniliśmy następujący odpowiednik Twierdzenia 2.5 (jest to Twierdzenie 3.7 w [S25]):

Twierdzenie 2.13. *Załóżmy, że X jest przestrzenią zupełną i $f : \sum_{\infty}(X) \mapsto X$ spełnia $\text{Lip}_q(f) < 1$ dla pewnego $q \in (0, 1)$. Wówczas f posiada dokładnie jeden uogólniony punkt stały $x_* \in X$.*

Dodatkowo, dla dowolnego $(x_k) \in \sum_{\infty}(X)$, ciąg (x^k) zdefiniowany następująco:

$$x^1 := f(x_1, x_2, \dots), \text{ oraz dla } k \geq 1, \quad x^{k+1} := f(x^k, \dots, x^1, x_1, x_2, \dots) \quad (11)$$

³⁴⁾Dowód Twierdzenia 4.7 w [S7] zawiera usuwalną usterkę – należy nieco subtelniej przeprowadzić indukcję tak by z każdą parą punktów z podziału Δ_k wiązać już konkretny zbiór z rodziny $\mathcal{A}_k$. Z drugiej strony, jak się zorientowałem już po opublikowaniu pracy, w tezie Twierdzenia 4.7 w [S7] wystarczy zauważyć, że X jest spójny, gdyż każdy zwarty spójny i lokalnie spójny zbiór jest łukowo spójny ([40, 6.3.11]). Dodatkowo, rozważana w [S7] definicja łukowej spójności bardziej odpowiada pojęciu *drogowej* spójności (ang. *pathwise connectedness*), przy czym dla przestrzeni Hausdorffa pojęcia te się pokrywają ([40, 6.3.12]).

³⁵⁾Dla GIFS-ów rzędu 2, ale dowód działa dla GIFS-ów dowolnego rzędu.

³⁶⁾Analizowaliśmy też inną rodzinę metryk, $d_{p,q}$ dla $p \geq 1$ i $q \in (0, 1)$, uzyskując analogiczne rezultaty; dla czytelności, na potrzeby tego autoreferatu ograniczę się do metryk $d_{s,q}$.

jest zbieżny do x_* .

Wyda się, że ciągi (x^k) zdefiniowane zgodnie z (11) są naturalnymi odpowiednikami tych zdefiniowanych przez (6) w przypadku uogólnionych kontrakcji. Dlatego też uogólniony punkt stały x_* funkcji $f : \sum_{\infty}(X) \rightarrow X$ naturalnie jest nazwać *kontrakcyjnym uogólnionym punktem stałym* f , jeżeli dodatkowo ciągi określone przez (11) są do niego zbieżne. Twierdzenie 2.13 zostanie nieco szerzej przedyskutowane w dalszej części autoreferatu (str. 28), chociaż warto zauważyć, że jego założenia implikują te z Twierdzenia 2.6. Co ważne w kontekście Problemu 2.9, pozwala ono udowodnić następującą wersję Twierdzenia 2.4 (podaję tu skróconą wersję Twierdzenia 4.5 z [S8]):

Twierdzenie 2.14. *Załóżmy, że X jest przestrzenią zupełną i $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ jest GIFS $_{\infty}$ -em na X takim, że $\text{Lip}_q(\mathcal{F}) < 1$ dla pewnego $q \in (0, 1)$. Wówczas istnieje dokładnie jeden zbiór $A_{\mathcal{F}} \in \mathbb{K}(X)$ spełniający*

$$A_{\mathcal{F}} = \bigcup_{i \in I} f_i(A_{\mathcal{F}} \times A_{\mathcal{F}} \times \dots).$$

Dodatkowo, dla dowolnego ciągu $(K_k) \in \sum_{\infty}(\mathbb{K}(X))$, ciąg (K^k) zdefiniowany przez

$$K^1 := \mathcal{F}(K_1, K_2, \dots), \text{ oraz dla } k \geq 1, \quad K^{k+1} := \mathcal{F}(K^k, \dots, K^1, K_1, K_2, \dots) \quad (12)$$

jest zbieżny do $A_{\mathcal{F}}$.

Ciąg (K^k) zdefiniowany przez (12) wydaje się bardziej naturalnym odpowiednikiem ciągu iteracji z warunku (4) niż ten zaproponowany przez N. Secleana, bazujący na warunku (7). Ma również tę przewagę, że może być podstawą algorytmu generowania obrazów atraktorów GIFS $_{\infty}$ -ów. Startując bowiem od zbioru jednopunktowego (tzn. od ciągu $(K_k) = (\{x_1\}, \{x_2\}, \dots)$), kolejne zbiory K^k są skończone w przeciwieństwie do tych z procedury N. Secleana. Zastosowaliśmy ten pomysł do otrzymania obrazu atraktora w Przykładzie 4.10 z [S8]. Kolejną przewagą naszego, bardziej restrykcyjnego podejścia, jest to, że otrzymany atraktor $A_{\mathcal{F}}$ jest granicą atraktorów GIFS-ów coraz wyższych rzędów (Twierdzenie 4.11 z [S8]), naturalnie generowanych przez wyjściowy GIFS $_{\infty}$ $\mathcal{F}$. W połączeniu z możliwością uzyskania oszacowania tempa tej zbieżności (Uwaga 4.12 z [S8]), pozwala to zastosować algorytmy z omawianej wcześniej pracy [S6] również w tym przypadku. Podaliśmy też odpowiednie przykłady, że tego typu zależności nie zachodzą przy założeniach z twierdzenia N. Secleana (Przykłady 4.8 i 4.13 w [S8]). Podsumowując, przytoczone rezultaty dają pozytywne rozwiązanie Problemu 2.9.

W dalszej części [S8] rozważyliśmy Problem 2.10. Zdefiniowaliśmy przestrzenie kodów³⁷⁾ dla GIFS $_{\infty}$ -ów oraz zbadaliśmy ich związki z odpowiadającymi im GIFS $_{\infty}$ -ami, zarówno w podejściu N. Secleana (w [92] nie zdefiniował on przestrzeni kodów) jak i naszym, bardziej restrykcyjnym. Konstrukcja bazuje na podobnej idei, jak w przypadku GIFS-ów skończonego rzędu, jednak z konieczności musi być bardziej złożona (np. odpowiedniki zbiorów Ω_k to w tym przypadku nieskończone produkty przestrzeni Ω_{k-1}). Podobnie wzrósł stopień komplikacji przy definicji odpowiedników rodzin $\mathcal{F}^k$, gdyż kolejne dziedziny X_k muszą być przestrzeniami typu $\sum_{\infty}(X_{k-1})$ wyposażonymi w odpowiednie metryki. Nad tym wszystkim udało się jednak zapanować i otrzymaliśmy pełny odpowiednik Twierdzenia 2.11 (patrz Twierdzenia 6.7, 6.11, 6.18 i Stwierdzenie 6.16 w [S8]). Przy tym, znów, w kilku aspektach nasze bardziej restrykcyjne podejście niż N. Secleana dało lepsze rezultaty. Np. odwzorowanie kodujące π jest ciągle przy bardziej naturalnej topologii na przestrzeni kodów (Twierdzenie 6.11(iv) w [S8]), co nie musi zachodzić przy założeniach N. Secleana (Przykład 6.14 w [S8]).

Skonstruowaliśmy też zbiór $C \subset \mathbb{R}^2$ typu Cantora, który jest atraktorem GIFS $_{\infty}$ -u na płaszczyźnie³⁸⁾ spełniającego założenia Twierdzenia 2.14, a który nie jest atraktorem żadnego słabego GIFS-u

³⁷⁾ Jak zauważyłem już po opublikowaniu artykułu, w definicji metryki $d_{(p,q)}$ na str. 1812 w [S8] można zastąpić współczynniki $(\frac{1-q}{2})^k$ przez q^k , taka wersja wydaje się bardziej naturalna.

³⁸⁾ Odwzorowania z GIFS-u definiowaliśmy tylko na produkcie atraktora $\sum_{\infty}(C)$, ale można je rozszerzyć na całą przestrzeń $\sum_{\infty}(\mathbb{R}^2)$.

skończonego rzędu. Konstrukcja rozwija pomysły z mojej pracy [S5] o której więcej napiszę w dalszej części autoreferatu (str. 21).

Na koniec chciałbym dodać, że w [S8] pracowaliśmy z warunkiem silnego zwięzania (zakładaliśmy, że $\text{Lip}(f_i) < 1$ względem metryki $d_{s,q}$ dla pewnego $q < 1$), jednak jestem przekonany, że można by te rozważania prowadzić dla odwzorowań spełniających słabszy warunek zwięzania. Z drugiej strony komplikacja techniczna jeszcze bardziej by wzrosła, dlatego zdecydowaliśmy się na takie ograniczenie.

2.3.6 Przestrzenie zerowymiarowe jako topologiczne fraktale i atraktory GIFS-ów

W pracy [S3], napisanej wspólnie z T. Banakhem i M. Nowak, skupiliśmy się na Problemie 2.3, rozważając jednak całościowo przestrzenie ZZM. Udowodniliśmy następujące (patrz dowody Lematu 3 oraz Twierdzenia 1 w [S3]):

Twierdzenie 2.15. *Niech X będzie nieprzeliczalną lub przeliczalną o następnikowej wysokości, przestrzenią ZZM. Wówczas X jest topologicznym fraktalem. Co więcej, istnieje taki IFS $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ na X , że $X = \bigcup_{i \in I} f_i(A)$, i przy tym:*

- (i) $\mathcal{F}$ jest złożony z dwóch (w przypadku nieprzeliczalnym) lub $2|X^{(\text{ht}(X))}|$ (w przypadku przeliczalnym) odwzorowań;
- (ii) $f_i(X) \cap f_j(X) = \emptyset$ dla $i, j \in I$, $i \neq j$;
- (iii) dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$ istnieje zgodna ultrametryka³⁹⁾ d względem której $\text{Lip}(\mathcal{F}) < \varepsilon$.

W [S3] topologiczne fraktale dla których istnieje IFS spełniający warunki (ii) oraz (iii) nazwaliśmy *ultrafraktalami Banacha* (ang. *Banach ultrafractals*). Ponieważ każdy ultrafraktal Banacha jest przestrzenią ZZM, więc teza powyższego twierdzenia charakteryzuje przestrzenie ZZM, które są nieprzeliczalne lub są przeliczalne i mają następnikową wysokość.

Dowód Twierdzenia 2.15 jest zupełnie inny niż punktu 1) Twierdzenia 2.3, nawet dla przeliczalnych ZZM. Zdefiniowaliśmy specjalną rodzinę $\mathcal{T}^{(40)}$ tzw. *drzew z wysokością* (ang. *height trees*, por. Definicję 1 w [S3]) wraz z kanonicznymi topologiami na ich brzegach (Definicja 2 w [S3]). Następnie udowodniliśmy (Stwierdzenie 1 w [S3]), że każda nieprzeliczalna lub przeliczalna i unitalna przestrzeń ZZM jest homeomorficzna z brzegiem ∂T pewnego drzewa $T \in \mathcal{T}$. Pozostało więc udowodnić Twierdzenie 2.15 dla brzegów odpowiednich drzew z rodziny $\mathcal{T}$. Okazało się, że wystarczy przeprowadzić konstrukcje na samych drzewach – odpowiednio zdefiniowana *norma* $\|\cdot\|$ na drzewie T generuje ultrametrykę $d_{\|\cdot\|}$ na jego brzegu ∂T (Definicja 3 w [S3]), natomiast właściwie zdefiniowane odwzorowanie między drzewami $f : T \mapsto S$ indukuje odpowiednie odwzorowanie między ich brzegami $\tilde{f} : \partial T \mapsto \partial S$ (Definicje 4 i 5 oraz Lemat 1 w [S3]). W ten sposób, dla drzew T odpowiadających przestrzeniom nieprzeliczalnym lub unitalnym o następnikowej wysokości, udało się zdefiniować dwa odwzorowania $f_1, f_2 : T \mapsto T$, które w naturalny sposób wygenerowały odpowiednie normy na drzewie T takie, że IFS $\mathcal{F} = \{\tilde{f}_1, \tilde{f}_2\}$ spełnia tezę Twierdzenia 2.15 dla ultrametryk generowanych przez te normy (dowód Lematu 3 w [S3]). W przypadku przeliczalnej nieunitalnej przestrzeni X skorzystaliśmy z tego, że X jest sumą kilku kopii tej samej przestrzeni unitalnej.

Twierdzenie 2.15 jest rozwiązaniem Problemu 2.3, nie mówi jednak o możliwości zanurzenia w prostą $\mathbb{R}$, zatem nie mamy tu pełnego odpowiednika punktu 1) Twierdzenia 2.3 na przypadek nieprzeliczalnej przestrzeni X . Co więcej, E. D’Aniello i T. H. Steele pokazali w artykule [34] (który powstał niezależnie od naszego), że każdy niepusty, domknięty, nieprzeliczalny i brzegowy podzbiór $[0, 1]$ jest homeomorficzny z atraktorem ścisłego IFS-u na $\mathbb{R}$. W szczególności oznacza to, że nieprzeliczalna przestrzeń ZZM jest homeomorficzna z atraktorem ścisłego IFS-u na $\mathbb{R}$. Z drugiej jednak strony, konstrukcje z [34] nie

³⁹⁾Tj. metryka spełniająca warunek $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$.

⁴⁰⁾To oznaczenie pojawia się tylko na potrzeby tego autoreferatu.

dają aż takiej kontroli nad licznościami IFS-ów, a przy tym nasz wynik mówi o istnieniu ultrametryk dla zadanego wcześniej IFS-u i dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$.

Okazuje się jednak, że zaproponowana przez nas konstrukcja może być odpowiednio zanurzona w prostą $\mathbb{R}$. We wspomnianym już artykule [12], napisanym wspólnie z T. Banachem i M. Nowak, zauważyliśmy (dowód Twierdzenia 7.2 w [12]), że skonstruowane w [S3] IFS-y $\mathcal{F}$ na nieprzeliczalnych oraz przeliczalnych i unitalnych ZZM, złożone z dwóch odwzorowań, spełniają warunek

$$\forall_{f,g \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}^k} f(X) = g(X) \vee g(X) \cap f(X) = \emptyset \vee |f(X)| = 1 \vee |g(X)| = 1. \quad (13)$$

Pokazaliśmy też (Lemat 7.3 w [12]), że jeżeli X jest przeliczalna o następnikowej wysokości, to istnieje IFS generujący X złożony z **trzech** odwzorowań i też spełniający (13). Jak wynika ze Stwierdzenia 7.1 oraz Twierdzeń 4.2 i 6.1 z [12], warunek (13) implikuje z kolei, że X można zanurzyć w $\mathbb{R}$ jako atraktor IFS-u $\mathcal{F}'$ o dowolnie małej stałej $\text{Lip}(\mathcal{F}')$ i tak samo liczny jak $\mathcal{F}$. Otrzymujemy więc pełny odpowiednik punktu 1) Twierdzenia 2.3 dla przestrzeni nieprzeliczalnych, jego wzmocnienie dla przestrzeni przeliczalnych (wystarczą trzy odwzorowania zamiast $2|X^{(\text{ht}(X))}|$), jak również wzmocnienie wspomnianego wyniku E. D’Aniello i T. H. Steele’ego z [34]. Dodajmy, że warunek (13) implikuje jeszcze inne własności, m. in. związane z zachowaniem się pseudometryk Kameyamy – szczegółowa dyskusja znajduje się w przytoczonym artykule [12].

Na koniec omawiania wyników z [S3] chciałbym wyjaśnić dlaczego powołałem się na artykuł [12] będący w recenzji. Dla przytoczonych z niego rezultatów kluczowe są bowiem konstrukcje IFS-ów z [S3] i dopiero po pewnym czasie, podczas pracy nad [12], dostrzegliśmy ich pełny potencjał (dla porządku dodajmy, że konstrukcja IFS-ów z [79] również spełnia (13)).

W pracy [S5] rozwiązałem częściowo Problemy 2.7 i 2.8 – pokazałem, że istnieją zbiory na płaszczyźnie, które są atraktorami ścisłych GIFS-ów, ale nie są atraktorami słabych IFS-ów. W istocie, udowodniłem, że takie rozróżnienie zachodzi dla każdego rzędu m oraz że nie każdy zwarty podzbiór płaszczyzny jest atraktorem pewnego słabego GIFS-u⁴¹⁾ (podaję tu tezę Twierdzeń 6 i 9 z [S5]):

Twierdzenie 2.16.

1. Dla dowolnego $m \geq 2$ istnieje taki zbiór typu Cantora $C(m) \subset \mathbb{R}^2$, że
 - 1a) $C(m)$ jest atraktorem ścisłego GIFS-u $\mathcal{F}$ rzędu m na $\mathbb{R}^2$;
 - 1b) $C(m)$ nie jest atraktorem słabego GIFS-u rzędu $m - 1$.
2. Istnieje zbiór typu Cantora $C \subset \mathbb{R}^2$ niebędący atraktorem żadnego słabego GIFS-u.

Konstrukcja zbiorów $C(m)$ i C przebiega standardowo – zaczynamy od pełnego kwadratu jednostkowego i w kolejnych krokach z otrzymanych kwadratów usuwamy ich części, pozostawiając pewną liczbę mniejszych kwadratów. Istota leży w tym, by za każdym razem zostawiać coraz więcej tych mniejszych kwadratów. Dobierając odpowiednio parametry (liczności kwadratów, długości ich boków etc.), otrzymujemy zbiory o podanych własnościach. Dodam, że pomysł był zainspirowany analogiczną konstrukcją S. Crovisiera i M. Ramsa z [31], którzy zdefiniowali w podobny sposób zbiór typu Cantora na prostej niebędący atraktorem słabego IFS-u (konstrukcje zbiorów $C(m)$ i C można w prosty sposób przenieść na prostą i wtedy GIFS-y z punktu 1a) będą złożone z dwóch odwzorowań).

Chciałbym podkreślić, że praca [S5] powstała przed omówioną wcześniej [S7] – mając do dyspozycji przestrzeń kodów, opis konstrukcji zbiorów $C(m)$ i C byłby prostszy (takie uproszczenie zastosowaliśmy we wspomnianej konstrukcji z [S8]). Co więcej, z moich nieopublikowanych notatek wynika, że sama przestrzeń kodów dla GIFS-u rzędu m nie jest atraktorem słabego GIFS-u rzędu $m - 1$.

Twierdzenie 2.16 pokazuje, że rodziny atraktorów GIFS-ów i IFS-ów nie pokrywają się, jest więc pewnym rozwiązaniem Problemu 2.7. Z drugiej strony, zbiory $C(m)$ są zbiorami typu Cantora, a więc są homeomorficzne z trójkowym zbiorem Cantora, atraktorem ścisłego IFS-u na $\mathbb{R}$.

⁴¹⁾ Co wynika też ze wspomnianej wcześniej konstrukcji z pracy [S8]; artykuł [S5] powstał znacznie wcześniej niż [S8].

W pracy [S9], napisanej wspólnie z Ł. Maślanką, rozszerzyliśmy Twierdzenie 2.16 (rozważając podzbiory prostej a nie płaszczyzny, lecz nie jest to istotna różnica) na wszystkie nieskończone przestrzenie ZZM (Twierdzenie 5.1 w [S9]). Daje to pełną pozytywną odpowiedź na pytanie postawione w Problemie 2.7, gdyż możemy przyjąć $m := 2$, a za X wziąć przestrzeń o granicznej wysokości. Jest też elementem analizy Problemu 2.8 i wzmacnia punkt 3) z Twierdzenia 2.3.

Twierdzenie 2.17. *Niech X będzie nieskończoną przestrzenią ZZM.*

1. *Dla dowolnego $m \geq 2$, istnieje taki zbiór $Y(m) \subset \mathbb{R}$ homeomorficzny z X , że:*
 - 1a) *$Y(m)$ jest atraktorem ścisłego GIFS-u $\mathcal{F}$ rzędu m na $\mathbb{R}$;*
 - 1b) *$Y(m)$ nie jest atraktorem słabego GIFS-u rzędu $m - 1$.*
2. *Istnieje zbiór $Y \subset \mathbb{R}$ homeomorficzny z X , niebędący atraktorem żadnego słabego GIFS-u.*

W punkcie 1a) prawdopodobnie nie uzyskaliśmy minimalnej potrzebnej liczby odwzorowań. Ograniczając analizę do GIFS-ów rzędu 2 i przeliczalnych przestrzeni ZZM, otrzymaliśmy wynik dający taką minimalną liczbę (Twierdzenie 4.1 w [S9]).

Twierdzenie 2.18. *Niech X będzie przeliczalną przestrzenią ZZM. Wówczas dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 1)$, X jest homeomorficzna z atraktorem ścisłego GIFS-u $\mathcal{F}$ rzędu 2 na prostej $\mathbb{R}$ złożonego z dwóch odwzorowań takiego, że $\text{Lip}(\mathcal{F}) < \varepsilon$.*

Zauważmy, że ciekawy jest nie tylko przypadek przestrzeni X z graniczną wysokością – również dla przestrzeni o następnikowej wysokości, skonstruowany GIFS jest złożony z dwóch odwzorowań. Przy tym, jak wspomniałem przy okazji omawiania wyników z [S3], w takim przypadku udało się nam skonstruować odpowiednie trzelementowe IFS-y.

Otrzymaliśmy też szereg kolejnych przykładów atraktorów GIFS-ów niebędących topologicznymi fraktalami (Twierdzenie 6.1 w [S9]). Rozszerza to pozytywną odpowiedź na pytanie z Problemu 2.7:

Twierdzenie 2.19. *Niech Z będzie spójnym atraktorem GIFS-u $\mathcal{F}$ rzędu 2 spełniającym $\text{Lip}(\mathcal{F}) < \frac{1}{3}$. Wówczas istnieje taka przestrzeń metryczna X , że*

- (i) *każda składowa spójności X jest samopodobną kopią Z ;*
- (ii) *X jest atraktorem ścisłego GIFS-u $\mathcal{G}$ rzędu 2;*
- (iii) *X nie jest topologicznym fraktalem.*

Ponadto, gdy Z jest podzbiorem przestrzeni Banacha Y , to również $X \subset Y$.

Wybierając w powyższym twierdzeniu różne, niehomeomorficzne spójne przestrzenie Z (kostki w przestrzeniach euklidesowych, wersje kostki Hilberta etc.) otrzymujemy kolejne przykłady wzajemnie niehomeomorficznych atraktorów GIFS-ów niebędących topologicznymi fraktalami. Co więcej, ustalając $n \in \mathbb{N}$ i $s \in [1, n]$, oraz biorąc jako Z spójny atraktor IFS-u na $\mathbb{R}^n$ którego wymiar Hausdorffa $\dim_H(Z) = s$, otrzymujemy atraktor X ścisłego GIFS-u rzędu 2 na $\mathbb{R}^n$, który spełnia⁴²⁾ $\dim_H(X) = s$ i przy tym nie jest topologicznym fraktalem. Wzmacnia to tezę głównego wyniku z artykułu E. D’Aniello [32] na przypadek $s \geq 1$.

Dowody Twierdzeń 2.17-2.19⁴³⁾ opierają się na szczególnej konstrukcji przestrzeni metrycznych. Wyróżniliśmy pewną ogólną rodzinę drzew (tzw. *właściwych*, ang. *proper trees*) i ciągów liczb dodatnich (nazwaliśmy je *dobrymi*, ang. *good*), oraz dla każdej pary (Λ, b) (gdzie Λ jest właściwym drzewem,

⁴²⁾Wykorzystujemy tu bezpośrednio konstrukcję z dowodu Twierdzenia 2.19 – przestrzeń X ma przeliczalnie wiele składowych spójności.

⁴³⁾Wspomnę tu o drobnych usterkach – w sformułowaniu Twierdzenia 6.2 w [S9] nie dodaliśmy założenia $\text{Lip}(\mathcal{F}) < \frac{1}{3}$, a w przekształceniach w szóstej linii strony 31 powinno być $2b_k p_k \leq 2\lambda_b b_{k-1}$.

a b jest dobrym ciągiem) zdefiniowaliśmy tzw. (Λ, b) -przestrzeń (ang. (Λ, b) -space; Definicja 3.1 w [S9]), której punkty lub pewne podprzestrzenie są indeksowane elementami z brzegu drzewa Λ , a metryczne zależności sterowane ciągiem b . Pokazaliśmy (Twierdzenie 3.4 w [S9]), że gdy wszystkie punkty są indeksowane elementami z brzegu, to takie przestrzenie (które nazwaliśmy (Λ, b, s) -przestrzeniami⁴⁴⁾) można zdefiniować na prostej $\mathbb{R}$, a gdy podprzestrzenie indeksowane elementami z brzegu są samopodobnymi kopiami ustalonej przestrzeni Z (mówimy wtedy o (Λ, b, Z) -przestrzeniach), to takie przestrzenie zawsze istnieją. Co więcej, gdy Z jest podzbiorem przestrzeni Banacha Y , to również (Λ, b, Z) -przestrzeń może być zdefiniowana w Y . Dalej udowodniliśmy (Stwierdzenia 3.10 i 3.12 w [S9]), że każda przeliczalna przestrzeń ZZM jest homeomorficzna z pewną (Λ, b, s) -przestrzenią, a nieprzeliczalna – z pewnym, odpowiednio „dużym” podzbiorem (Λ, b, s) -przestrzeni. W związku z powyższym, aby udowodnić Twierdzenia 2.17-2.19, wystarczyło skupić się na analizie (Λ, b) -przestrzeni.

Mam jeszcze kilka uwag odnośnie zaprezentowanych dowodów. Dla Twierdzenia 2.18 wystarczyłaby konstrukcja M. Nowak z [79], gdyż (Λ, b) -przestrzenie odpowiadające przeliczalnym ZZM (i w szczególności, ich realizacje na prostej) są uogólnieniami jej konstrukcji z [79]. Jednak już dla dowodu Twierdzenia 2.17, podejście z [79] nie wydaje się wystarczające – potrzebne były znacznie elastyczniejsze zależności metryczne. Poza tym, zaprezentowany dowód Twierdzenia 2.17 nie działa w przypadku, gdy X jest przestrzenią Cantora (gdyż musieliśmy rozszerzyć (Λ, b, s) -przestrzenie o pewne ciągi) – powołaliśmy się po prostu na Twierdzenie 2.16. W dowodzie Twierdzenia 2.19 wykorzystaliśmy (Λ, b, Z) -przestrzeń, gdzie Λ odpowiada przeliczalnej przestrzeni unitalnej o wysokości ω , oraz ciekawy sam w sobie fakt, że jeżeli przestrzeń X jest topologicznym fraktalem, to przestrzeń ilorazowa X/R_c również jest topologicznym fraktalem, gdzie R_c jest relacją należenia do tej samej składowej spójności (Twierdzenie 2.7 z [S9]).

Ostatni wynik z pracy [S9] jest powiązany z Problemem 2.7. Wiadomo ([10], [33]), że rodzina atraktorów słabych IFS-ów na (odpowiedniej) przestrzeni metrycznej X jest zbiorem pierwszej kategorii Baire’a w $\mathbb{K}(X)$. Udowodniliśmy analogiczny wynik dla ścisłych GIFS-ów (Twierdzenie 7.1 w [S9]):

Twierdzenie 2.20. *Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Wówczas zbiór*

$$\mathcal{A} := \{K \in \mathbb{K}(H) : K \text{ jest atraktorem ścisłego GIFS-u}\}$$

jest pierwszej kategorii Baire’a w $\mathbb{K}(H)$.

Na koniec przytoczę jeszcze wyniki z omawianej już pracy [S1] związane z Problemem 2.7. Wyrozniliśmy pewną klasę GIFS-ów definiowanych na podprzestrzeni przestrzeni c_0 (tzw. *ładnych*, ang. *nice*) i pokazaliśmy⁴⁵⁾ (Twierdzenie 4.3 w [S1]), że pewne modyfikacje kostki Hilberta są atraktorami słabych GIFS-ów rzędu 2, i jednocześnie nie są atraktorami ani słabych ładnych IFS-ów ani silnych ładnych GIFS-ów. W jakiejś mierze pokazało to istotność otrzymanej w [S1] wersji Twierdzenia 2.4, jednak nie dało pełnego rozwiązania Problemu 2.7. Dodatkowo, stosując wynik z mojej rozprawy doktorskiej (zamieszczony też w pracy [S31], o której napiszę na stronach 34 i 35 autoreferatu) pokazaliśmy (Twierdzenie 5.3 w [S1]), że jeżeli K jest domkniętym, ograniczonym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha X zaś $m, n \in \mathbb{N}$ są ustalone, to zbiór $kR_{n,m}(K)$ słabych GIFS-ów na K rzędu m złożonych z n odwzorowań, jest rezydualny (tzn. jest dopełnieniem do zbioru pierwszej kategorii Baire’a)⁴⁶⁾ w przestrzeni $\Omega_{n,m}(K)$ GIFS-ów złożonych z uogólnionych odwzorowań nieoddalających na K (tj. takich, że $\text{Lip}(\mathcal{F}) \leq 1$). Dodajmy, że GIFS $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ rzędu m utożsamialiśmy z funkcją $F = (f_1, \dots, f_n) : K^m \mapsto K^n$ i że badania nad tego typu problemami dla przestrzeni odwzorowań nieoddalających były wcześniej prowadzone (więcej napiszę na str. 34 i 35). Sformułowaliśmy też wynik mówiący o tym, że zbiór $kB_{n,m}(K)$ ścisłych GIFS-ów jest pierwszej kategorii w $\Omega_{n,m}(K)$ o ile K

⁴⁴⁾W tym przypadku w zasadzie możemy utożsamiać przestrzeń z brzegiem drzewa.

⁴⁵⁾W sformułowaniu Lematu 4.4 z [S1] pojawia się nieścisłość – brakuje założenia że $q \neq 1$, ale taką wersję wykorzystujemy w dalszej części.

⁴⁶⁾Tak naprawdę wyniki sformułowaliśmy w języku tzw. *porowatości*, będącej metrycznym wzmocnieniem kategorii Baire’a; więcej o tym pojęciu napiszę w dalszej części, na str. 25.

jest podzbiorem przestrzeni Hilberta, lecz jego uzasadnienie nie jest poprawne. Twierdzenie to (nawet bez założenia o tym że K jest podzbiorem przestrzeni Hilberta) jest jednak prawdziwe – patrz [20], w szczególności Uwaga 3.10.

3 Omówienie pozostałych wyników naukowych

Lista publikacji niewchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 2:

- [S10] I. Akbarbaglu, S. Głąb, S. Maghsoudi, F. Strobín, *Topological size of some subsets in certain Calderón-Lozanowski spaces*, Adv. Math. 312 (2017), 737–763.
- [S11] M. Balcerzak, E. Behrends, F. Strobín, *On certain uniformly open multilinear mappings*, Banach J. Math. Anal. 10 (2016), 482–494.
- [S12] M. Balcerzak, A. Majchrzycki, F. Strobín, *Typical behaviour of integrable functions at infinity*, Indag. Math. 27 (2016), 893–901.
- [S13] M. Balcerzak, F. Strobín, *Spaceability of the set of continuous injections from B_{ℓ^p} into ℓ_p with nowhere continuous inverses*, Linear Algebra Appl. 450 (2014), no. 1, 76–82.
- [S14] M. Balcerzak, F. Strobín, A. Wachowicz, *Bilinear mappings – selected properties and problems*, Traditional and Present-Day Topics in Real Analysis, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Łódź, Łódź, 2013, 281–305.
- [S15] M. Bienias, F. Strobín, *Spaceability of the set of continuous linear injections from ℓ^p to ℓ^p with nowhere continuous inverses*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. 65 (2015), 19–25.
- [S16] D. Dumitru, L. Ioana, R. C. Sfetcu, F. Strobín, *Topological version of generalized (infinite) iterated function systems*, Chaos Solitons Fractals 71 (2015), 78–90.
- [S17] S. Głąb, F. Strobín, *Descriptive properties of density preserving autohomeomorphisms of the unit interval*, Cent. Eur. J. Math. 8 (2010), 928–936.
- [S18] S. Głąb, F. Strobín, *Dichotomies for L^p spaces*, J. Math. Anal. Appl. 386 (2010), 382–390.
- [S19] S. Głąb, F. Strobín, *Porosity and the L^p -conjecture*, Arch. Math. (Basel) 95 (2010), 583–592.
- [S20] S. Głąb, F. Strobín, *Dichotomies for $C_0(X)$ and $C_b(X)$ spaces*, Czechoslovak Math. J. 63 (2013), no. 1, 91–105.
- [S21] S. Głąb, F. Strobín, *Large free subgroups of automorphism groups of ultrahomogeneous spaces*, Colloq. Math. 140 (2015), 279–295.
- [S22] S. Głąb, F. Strobín, *Spaceability of sets in $L^p \times L^q$ and $C_0 \times C_0$* , J. Math. Anal. Appl. 440 (2016), no. 2, 451–465.
- [S23] S. Głąb, F. Strobín, C. W. Yang, *Dichotomies for Lorentz spaces*, Cent. Eur. J. Math. 11 (2013), no. 7, 1228–1242.
- [S24] S. Głąb, P. Gordinowicz, F. Strobín, *Dense free subgroups of automorphism groups of homogeneous partially ordered sets*, Forum Math. 31 (2019), no. 1, 215–240.
- [S25] J. Jachymski, Ł. Maślanka, F. Strobín, *A fixed point theorem for mappings on the ℓ_∞ -sum of a metric space and its application*, Filomat 31 (2017), no. 11, 3559–3572.
- [S26] K. Neu, F. Strobín, *Non-linear images of μ -shadings, shadings in $\mathbb{R}^2$ and quotient sets of μ -shadings*, Real Anal. Exchange 38 (2012/2013), no. 2, 273–298.

- [S27] E. Oliveira, F. Strobin, *Fuzzy attractors appearing from GIFZS*, Fuzzy Set Syst. 331 (2018), 131–156.
- [S28] F. Strobin, *A comparison of two notions of porosity*, Comment. Math. 48 (2008), no. 2, 209–219.
- [S29] F. Strobin, *Porosity of convex nowhere dense subsets of normed linear spaces*, Abstr. Appl. Anal. 2009, Art. ID 243604, 11pp.
- [S30] F. Strobin, *Some porous and meager sets of continuous mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. 13 (2012), no. 2, 351–361.
- [S31] F. Strobin, *σ -porous sets of generalized nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory 15 (2014), no. 1, 217–232.
- [S32] F. Strobin, *An application of a fixed point theorem for multifunctions in a problem of connectedness of attractors of families of IFSs*, Bull. Soc. Sci. Lettres Łódź Sér. Rech. Déform. 64 (2014) no. 2, 81–93.
- [S33] F. Strobin, *Dichotomies for Orlicz spaces*, Math. Slovaca 66 (2016), no. 1, 245–256.
- [S34] F. Strobin, R. Wiertelak, *On a generalization of density topologies on the real line*, Topology Appl. 199 (2016), 1–16.
- [S35] F. Strobin, R. Wiertelak, *Algebrability of $\mathcal{S}$ -continuous functions*, Topology Appl. 231 (2017), 373–385.

Przejdę teraz do omówienia najważniejszych wyników opublikowanych w wyżej wymienionych pracach. Chociaż część z nich dotyczy teorii Hutchinsona–Barnsleya, to jednak zacznę od przedstawienia moich dwóch najstarszych prac, gdyż dotyczą wspomnianego już pojęcia porowatości, które pojawia się też przy okazji badań nad IFS-ami.

3.1 Pewne pojęcia porowatości

Porowatość (ang. *porosity*) jest metrycznym wzmocnieniem pojęcia nigdziegęstości. Przypomnijmy, że podzbiór M przestrzeni topologicznej (X, τ) jest nigdziegęsty, jeżeli:

$$\forall \emptyset \neq U \in \tau \quad \exists \emptyset \neq V \in \tau \quad V \subset U \setminus M.$$

Najogólniej rzecz ujmując, idea definiowania porowatości w przestrzeniach metrycznych polega na żądaniu, by średnica zbioru V nie była zbyt mała względem średnicy zbioru U . Co oczywiste, ta idea może być formalizowana na różne sposoby i dziś funkcjonuje bardzo wiele różnych definicji porowatości (zapewne większość jest omówiona w przeglądowych pracach L. Zajíčka [97], [98]). Przy tym, w „rozsądnych” przestrzeniach istnieją zbiory nigdziegęste, które nie są porowate, a nawet nie są σ -porowate (tj. nie są przeliczalnymi sumami zbiorów porowatych), więc wiedza o tym, że dany zbiór jest nie tylko nigdziegęsty (czy pierwszej kategorii Baire’a), ale nawet porowaty (lub σ -porowaty) daje istotną informację o jego wielkości. Ciekawy wydaje się też problem szukania najmocniejszego warunku typu porowatości pasującego do danego zbioru. Tego typu badania były prowadzone w ostatnich dziesięcioleciach i wiele zbiorów, o których wiadano, że są nigdziegęste czy pierwszej kategorii, okazało się być w istocie zbiorami porowatymi czy σ -porowatymi.

Artykuły [S28] i [S29] poświęciłem badaniu pewnych pojęć porowatości. Powstały one na początku moich studiów doktoranckich i część materiału z [S29] weszła w skład rozprawy doktorskiej.

W [S28] porównałem ze sobą dwa pojęcia porowatości – tzw. *O-porowatość*, rozważaną przez V. Olevskiego w [81] i tzw. *kulową małość* (ang. *ball smallness*), przedstawioną przez L. Zajíčka w [98]. Oba

pojęcia pojawiły się w kontekście porowatości wypukłych i nigdziegęstych podzbiorów przestrzeni unormowanych i na pierwszy rzut oka są dość podobne. Główne twierdzenie z [S28] mówi, że to przypuszczenie nie jest do końca prawdziwe – o ile każdy zbiór kulowo mały jest σ -O-porowaty, to jednak w każdej przestrzeni Banacha istnieje O-porowaty zbiór, który nie jest kulowo mały.

Z kolei w artykule [S29] moim celem było dobranie najlepszego warunku typu porowatości dla wypukłych i nigdziegęstych podzbiorów przestrzeni unormowanych. Z jednej strony, korzystając z idei tzw. *kątowej porowatości* (ang. *angle porosity*, patrz [98]), udało się scharakteryzować warunek „otoczka wypukła $\text{conv } M$ zbioru M jest zbiorem nigdziegęstym” w terminach porowatości (co zaowocowało definicją *c-porowatości*). Z drugiej strony jednak, podana charakteryzacja bazuje na przestrzeni dualnej, co jest pewnym mankamentem. Dlatego też poszukałem jak najmocniejszego, czysto metrycznego warunku spełnianego przez wypukłe i nigdziegęste zbiory, otrzymując pewne wzmocnienia obserwacji V. Olevskiego z [81] i L. Zająćka z [98].

Dodajmy na koniec, że zbiory wypukłe i nigdziegęste pojawiają się w naturalny sposób – np. takie są otoczki wypukłe zbiorów zwartych w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych (o czym wspomniał L. Zająćek w [98]), jak również zbiory konstruowane w dowodzie twierdzenia Banacha–Steinhaus’a (co zaobserwował V. Olevskii w [81]).

3.2 Spójność atraktorów pewnych rodzin IFS-ów

Założmy, że X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha. Dla funkcji $g : X \mapsto X$ i $w \in X$, niech $g_w(x) := g(x) + w$ dla $x \in X$. W artykule [95], napisanym wspólnie z J. Swaczyną (artykuł jest przyjęty do druku, nie ma jeszcze numeru DOI), udowodniliśmy następujące:

Twierdzenie 3.1. *Założmy, że f, g są kontrakcjami Matkowskiego, przy tym f jest zwarta w tym sensie, że dla dowolnego zbioru ograniczonego $D \subset X$, $f(D)$ jest relatywnie zwarty. Jeżeli zachodzi jeden z warunków:*

- (i) *g jest odwzorowaniem afinicznym (i w szczególności $\|g\| < 1$);*
- (ii) *$\text{Lip}(g) \leq \frac{1}{2}$;*
- (iii) *g jest zwarta,*

to zbiór

$$C_{f,g} := \{w \in X : \text{atraktor IFS-u } \{f, g_w\} \text{ jest spójny}\}$$

jest domknięty oraz jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych. W szczególności, $C_{f,g}$ jest zbiorem nigdziegęstym i σ -c-porowatym.

Twierdzenie to wzmacnia wynik otrzymany przez R. Miculescu i A. Mihaila w [69] (oraz w [68]), gdzie pokazali tezę w przypadku, gdy zachodzi (i) oraz dodatkowo f jest operatorem liniowym. Dodajmy, że dowód przy założeniu (i) jest w zasadzie powtórzeniem tego z [69], ale w pozostałych przypadkach uzasadnienia są nieco inne. Jako wniosek pokazaliśmy, że przy założeniach z Twierdzenia 3.1, zbiór

$$W_{f,g} := \{(s, w) \in X \times X : \text{atraktor IFS-u } \{f_s, g_w\} \text{ jest spójny}\}$$

jest domknięty i brzegowy.

W [S32] badałem nieco szerszy problem (artykuł [S32] został napisany później niż [95], dlatego omawiam go w drugiej kolejności). Dla IFS-u $\mathcal{G}$ i $w \in X$, niech $\mathcal{G}_w := \{g_w : g \in \mathcal{G}\}$. Udowodniłem:

Twierdzenie 3.2. *Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ będą takimi IFS-ami, że każda $f \in \mathcal{F}$ jest zwarta, oraz zachodzi jeden z warunków:*

- (i) $\text{Lip}(\mathcal{F}) + \text{Lip}(\mathcal{G}) + \text{Lip}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) < 1$;
- (ii) $\text{Lip}(\mathcal{G}) < \frac{1}{2}$;
- (iii) każda $g \in \mathcal{G}$ jest zwarta.

Wówczas zbiór

$$C_{\mathcal{F},\mathcal{G}} := \{w \in X : \text{atraktor IFS-u } \mathcal{F} \cup \mathcal{G}_w \text{ jest spójny}\},$$

jest domknięty oraz jest przeliczalną sumą zbiorów zwartych.

Widać, że powyższe twierdzenie jest częściowym uogólnieniem Twierdzenia 3.1 (warunek (i) ma zupełnie inną naturę niż poprzednio, przy tym w (ii) mamy ostrą nierówność⁴⁷⁾). Jego dowód jest z jednej strony podobny, ale udało mi się spojrzeć na odpowiednie przekształcenia z nieco innej perspektywy – okazało się, że zbiory zwarte, które pojawiają się w dowodach to zbiory punktów stałych pewnych zwężających multifunkcji, więc ich zwartość może być wyprowadzona ze znanego twierdzenia o punktach stałych dla kontrakcyjnych multifunkcji. Zbadałem też zbiór $W_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ zdefiniowany analogicznie jak $W_{f,g}$ (w dowodzie wykorzystałem twierdzenie Kuratowskiego–Ulama, co jednak, jak się zorientowałem już po obublikowaniu artykułu, nie było konieczne).

Dodam na koniec, że aby otrzymać tak silne tezy o zbiorach $C_{f,g}$ i $C_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$, pewne założenia muszą być poczynione – jak pokazali R. Miculescu i A. Mihail w [69], w pewnym zakresie teza o $C_{f,g}$ charakteryzuje zwartość f .

3.3 Dalsze aspekty teorii GIFS-ów

Najciekawsze, moim zdaniem, artykuły dotyczące GIFS-ów omówiłem w poprzedniej części autoreferatu. Tu przedstawię pokrótce pozostałe dwie publikacje o tej tematyce.

W [S16] wspólnie z D. Dumitru, L. Ioană i R. Sfetcu⁴⁸⁾ rozważaliśmy odpowiednik topologicznego zwężania w kontekście GIFS-ów. Wykorzystując przestrzeń kodów, wprowadziliśmy następującą definicję (wykorzystuję tu wszelkie notacje związane z przestrzenią kodów):

Definicja 1. Załóżmy, że X jest przestrzenią Hausdorffa. GIFS $\mathcal{F}$ nazywamy *topologicznie zwężającym*, jeżeli spełnia następujące dwa warunki:

- (t1) dla każdego $K \in \mathbb{K}(X)$ istnieje taki $D \in \mathbb{K}(X)$, że $K \subset D$ oraz $\mathcal{F}(D, \dots, D) \subset D$;
- (t2) dla każdego $D \in \mathbb{K}(X)$ takiego, że $\mathcal{F}(D, \dots, D) \subset D$ oraz dowolnego $\alpha \in \Omega_{\mathcal{F}}$, zbiór $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} f_{\alpha|_k}(D_k)$ jest jednopunktowy.

W artykule roważaliśmy też przypadek, gdy GIFS $\mathcal{F}$ składa się z nieskończenie wielu odwzorowań, dlatego podana tam definicja topologicznego zwężania zawiera dodatkowy warunek (t3), automatycznie spełniony, gdy $\mathcal{F}$ jest skończony. Pokazaliśmy, że każdy topologicznie zwężający GIFS spełnia tezę Twierdzeń 2.4 i 2.11, przy tym każdy słaby GIFS na przestrzeni euklidesowej lub zwartej jest topologicznie zwężający.

Podaliśmy też dość ogólną konstrukcję rodziny atraktorów topologicznie zwężających GIFS-ów. Jako szczególne przypadki otrzymaliśmy przestrzenie $I \times P$ oraz $C \times K$, gdzie I jest odcinkiem (właściwie jego homeomorficzną kopią), C jest przestrzenią Cantora, P jest kontinuum Peano, zaś K jest dowolną przestrzenią zwartą i metryzowalną. Udowodniliśmy też, że atraktor topologicznie zwężającego GIFS-u

⁴⁷⁾Warunek (iii) uogólnia ten z Twierdzenia 3.1, jednak przy założeniu (iii) w Twierdzeniu 3.1 uzyskaliśmy w [95] nieco mocniejszą tezę.

⁴⁸⁾Moi współautorzy to młodzi rumuńscy matematycy z Uniwersytetu w Bukareszcie, pracujący razem z R. Miculescu i A. Mihailem. Współpracę nawiązaliśmy podczas mojej wizyty w Bukareszcie w 2014 r.

jest metryzowalny, przy czym, w przeciwieństwie do przypadku topologicznie zwężających IFS-ów, może nie istnieć metryka przy której odwzorowania z danego GIFS-u stają się uogólnionymi kontrakcjami Edelsteina.

W artykule [S27], napisanym wspólnie z E. Oliveirą, rozważyliśmy rozszerzenie teorii GIFS-ów na przypadek zbiorów rozmytych. Taki odpowiednik dla klasycznych IFS-ów został zdefiniowany w [26]. Sformułuję tu odpowiednik Twierdzenia 2.1 z artykułu [26] i tylko skomentuję otrzymaną wersję dla GIFS-ów.

Zbiorem rozmytym na przestrzeni X nazwiemy każdą funkcję $u : X \mapsto [0, 1]$. Definiujemy:

$$[u]^\alpha := \begin{cases} \overline{u^{-1}((0, 1])}, & \text{jeżeli } \alpha = 0 \\ u^{-1}([\alpha, 1]), & \text{jeżeli } \alpha \in (0, 1] \end{cases}$$

Dla przestrzeni metrycznej X , niech $\mathbb{K}^*(X)$ oznacza rodzinę zbiorów rozmytych $u : X \mapsto [0, 1]$, które są półciągle z góry i takie, że wszystkie $[u]^\alpha$ są zwarte i niepuste. Zbiór $\mathbb{K}^*(X)$ jest odpowiednikiem przestrzeni zbiorów zwartych $\mathbb{K}(X)$ i w szczególności daje się go odpowiednio zmetryzować w sposób zupełny, o ile X jest zupełna. Każda ciągła funkcja $f : X \mapsto X$ generuje odwzorowanie $f^* : \mathbb{K}^*(X) \mapsto \mathbb{K}^*(X)$ zdefiniowane przez $f^*(u)(y) := \sup\{u(x) : x \in f^{-1}(y)\}$, gdzie przyjmujemy $\sup \emptyset = 0$. Odpowiednik Twierdzenia 2.1 z [26] jest następujący:

Twierdzenie 3.3. *Załóżmy, że X jest zwartą przestrzenią metryczną, $\mathcal{F} = \{f_i : i \in I\}$ jest ścisłym IFS-em na X i $\{\rho_i : i \in I\}$ jest rodziną niemalejących, prawostronnie ciągłych, nieujemnych funkcji takich, że $\rho_i(0) = 0$ dla $i \in I$ oraz $\max\{\rho_i(1) : i \in I\} = 1$. Wówczas operator $\mathcal{F}^* : \mathbb{K}^*(X) \mapsto \mathbb{K}^*(X)$ zdefiniowany przez*

$$\mathcal{F}^*(u) := \max\{\rho_i(f_i^*(u)) : i \in I\}$$

jest kontrakcją Banacha na $\mathbb{K}^(X)$. W szczególności istnieje dokładnie jeden $u_* \in \mathbb{K}^*(X)$ spełniający $\mathcal{F}^*(u_*) = u_*$, co oznacza, że dla dowolnego $\alpha \in [0, 1]$,*

$$[u_*]^\alpha = \bigcup_{i \in I} f_i([\rho_i(u_*)]^\alpha).$$

Ponadto dla dowolnego $u \in \mathbb{K}^(X)$, ciąg iteracji u operatora $\mathcal{F}^*$ zbiega do u_* .*

Dodajmy tu, że rodzina funkcji $\{\rho_i : i \in I\}$ jest niezbędna na to, by teoria rozmytych IFS-ów istotnie rozszerzała teorię IFS-ów – gdy te funkcje są identycznościami, to u_* jest funkcją charakterystyczną atraktora IFS-u $\mathcal{F}$.

W [S27] pokazaliśmy, że Twierdzenie 3.3 można w naturalny sposób przenieść na przypadek GIFS-ów, przy czym rozważyliśmy od razu ogólny przypadek słabych GIFS-ów na zupełnej przestrzeni X . Dodatkowo, przeanalizowaliśmy związki atraktora danego GIFS-u z rozmytym atraktorem, otrzymując pewne naturalne kryteria (związane z własnościami funkcji $\{\rho_i : i \in I\}$), przy których rozmyty atraktor nie jest funkcją charakterystyczną atraktora wyjściowego GIFS-u. Wykorzystując te kryteria otrzymaliśmy też odpowiednik Twierdzenia 2.16 pokazujący, że takie rozmyte GIFS-y różnych rzędów generują różne rodziny rozmytych atraktorów.

3.4 Twierdzenia o punktach stałych dla odwzorowań określonych na przestrzeniach ciągów

Materiał z artykułu [S25], napisanego wspólnie z J. Jachymskim i Ł. Maślanką, stanowił punkt wyjścia do badań nad bardziej restrykcyjną (względem podejścia N. Secleana z [92]) wersją GIFS-ów rzędu nieskończonego, którą omówiłem w ramach artykułu [S8]. W szczególności, przytoczone już Twierdzenie 2.13 jest jednym z głównych wyników z [S25].

Rezultat ten wyprowadziliśmy z ogólniejszej obserwacji. Jeżeli X jest przestrzenią metryczną i $f : \sum_{\infty}(X) \mapsto X$, to zdefiniujemy⁴⁹⁾ $\tilde{f} : \sum_{\infty}(X) \mapsto \sum_{\infty}(X)$ przez

$$\tilde{f}((x_k)) := (f((x_k)), x_1, x_2, \dots).$$

Okazuje się, że istnieje ścisły związek między ciągami zdefiniowanymi jak w (11) a ciągami iteracji $\tilde{f}$ – jeżeli $x = (x_k) \in \sum_{\infty}(X)$, to $\tilde{f}^{(k)}(x) = (x^k, \dots, x^1, x_1, x_2, \dots)$, gdzie ciąg (x^k) jest zdefiniowany przez (11). Relacja f z $\tilde{f}$ jest jeszcze silniejsza i problem szukania kontrakcyjnego uogólnionego punktu stałego funkcji f sprowadza się do szukania kontrakcyjnego punktu stałego funkcji $\tilde{f}$:

Twierdzenie 3.4. *Niech $f : \sum_{\infty}(X) \mapsto X$. Następujące warunki są równoważne:*

- (i) *f posiada kontrakcyjny uogólniony punkt stały $x_* \in X$;*
- (ii) *$\tilde{f}$ posiada kontrakcyjny punkt stały, przy rozważaniu topologii Tichonowa na $\sum_{\infty}(X)$.*

Ponadto, $\mathbf{x}_*$ jest punktem stałym funkcji $\tilde{f}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{x}_* = (x_*, x_*, \dots)$, gdzie x_* jest uogólnionym punktem stałym funkcji f .

Dodajmy, że rozważane metryki na $\sum_{\infty}(X)$ nie są, w ogólności, zupełne, więc Twierdzenie 2.13 nie wynika bezpośrednio z powyższej obserwacji i twierdzenia Banacha o punkcie stałym.

W [S25] przeanalizowaliśmy też związki Twierdzeń 2.5 i 2.13. Z jednej strony, Twierdzenie 2.5 (dla uogólnionych kontrakcji Banacha) wynika bezpośrednio z Twierdzenia 2.13. Z drugiej strony, jeżeli $f : \sum_{\infty}(X) \mapsto X$ spełnia założenia Twierdzenia 2.13, to dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$, funkcja $f_m : X^m \mapsto X$ zdefiniowana przez $f_m(x_1, \dots, x_m) := f(x_1, \dots, x_m, x_0, x_0, \dots)$ (gdzie x_0 jest ustalonym punktem X), spełnia założenia Twierdzenia 2.5 i ciąg (x_*^m) uogólnionych punktów stałych odwzorowań f_m , zbiega do x_* , uogólnionego punktu stałego f . Pokazaliśmy też przykład na to, że teza Twierdzenia 2.13, jak również ta poprzednia obserwacja, mogą nie zachodzić przy założeniach N. Seceleana z Twierdzenia 2.6.

Pokazaliśmy też zastosowanie Twierdzenia 2.13 dla prostego zagadnienia rekurencji, w której każdy kolejny wyraz ciągu zależy od wszystkich dotąd zdefiniowanych wyrazów.

Przeprowadziliśmy również analogiczne rozważania dla alternatywnej rodziny metryk na $\sum_{\infty}(X)$, $d_{p,q}$, $p \in [1, \infty)$, $q \in (0, 1)$, zbliżonych w definicji do klasycznych metryk indukowanych przez ℓ_p -normy, oraz zbadaliśmy zależności między zdefiniowanymi metrykami.

3.5 Dychotomie w przestrzeniach funkcyjnych związane z własnościami mnożenia i splotu

Ta część mojego dorobku (z której większość – wyniki z [S18], [S20], [S23] oraz [S33] – znalazła się w mojej rozprawie doktorskiej) dotyczy badania następującego problemu: Załóżmy, że X_1, X_2, Y są przestrzeniami funkcyjnymi i niech „ $\circ$ ” będzie działaniem mnożenia lub splotu na $X_1 \times X_2$.

$$\text{Jak duży jest zbiór } \{(f, g) \in X_1 \times X_2 : f \circ g \in Y\}?$$

Dodajmy, że w większości artykułów, gdzie rozważamy mnożenie, pojawia się produkt n wielu przestrzeni. Poniżej zawsze będę przedstawiał wersję dla $n = 2$.

Punktem wyjścia były następujące dychotomie otrzymane przez J. Jachymskiego w [45] (szczególne wersje były wcześniej udowodnione w [8] przez M. Balcerzaka i A. Wachowicza):

⁴⁹⁾Stosuję tu wszelkie oznaczenia wprowadzone wcześniej; ciągi numeruję liczbami naturalnymi, chociaż w [S25] numerowałam je od 0.

Twierdzenie 3.5. Niech (X, μ) będzie przestrzenią mierzalną, $p \in [1, \infty)$ i niech

$$E_p := \{(f, g) \in L^p(X) \times L^p(X) : f \cdot g \in L^p(X)\}.$$

Następujące warunki są równoważne:

- (i) E_p jest pierwszej kategorii w $L^p(X) \times L^p(X)$;
- (ii) $E_p \neq L^p(X) \times L^p(X)$;
- (iii) $\inf\{\mu(A) : \mu(A) > 0\} = 0$.

Twierdzenie 3.6. Dla ciągu liczbowego $\alpha = (\alpha_k)$, niech

$$E_\alpha := \left\{ ((x_k), (y_k)) \in c_0 \times c_0 : \text{ciąg } \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i \right)_{n=1}^\infty \text{ jest ograniczony} \right\}.$$

Następujące warunki są równoważne

- (i) E_α jest pierwszej kategorii w $c_0 \times c_0$;
- (ii) $E_\alpha \neq c_0 \times c_0$;
- (iii) $\alpha \notin \ell^1$.

J. Jachymski wyprowadził te twierdzenia z pewnej nieliniowej wersji twierdzenia Banacha–Steinhaus. Początkowo, wspólnie z S. Głąbem planowaliśmy wzmocnić taką nieliniową wersję w kierunku porowatości, lecz okazało się to niemożliwe (znaleźliśmy odpowiedni kontrprzykład w artykule [97]). Skupiliśmy się więc na Twierdzeniach 3.5 i 3.6.

Główny wynik z pracy [S18], napisanej wspólnie z S. Głąbem, istotnie wzmacnia Twierdzenie 3.5. Dla $p_1, p_2, r \in (0, \infty]$, niech

$$E_{p_1, p_2}^r := \{(f, g) \in L^{p_1}(X) \times L^{p_2}(X) : fg \in L^r(X)\}.$$

Otrzymaliśmy następującą serię warunków równoważnych:

- (i) E_{p_1, p_2}^r jest σ -porowaty w $L^{p_1}(X) \times L^{p_2}(X)$;
- (ii) $E_{p_1, p_2}^r \neq L^{p_1}(X) \times L^{p_2}(X)$;
- (iii) zachodzi jeden z warunków:

$$\begin{aligned} & (\inf\{\mu(A) : \mu(A) > 0\} = 0) \wedge \left(\frac{1}{r} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \\ & (\sup\{\mu(A) : \mu(A) < \infty\} = \infty) \wedge \left(\frac{1}{r} > \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

W artykule [S33] rozważyłem analogiczny problem zastępując przestrzenie $L^p(X)$, odpowiednimi przestrzeniami Orlicza $L^\varphi(X)$. Dokładniej, rozważyłem zbiory:

$$E_{\varphi_1, \varphi_2}^\psi := \{(f, g) \in L^{\varphi_1}(X) \times L^{\varphi_2}(X) : fg \in L^\psi(X),$$

gdzie $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ są odpowiednimi funkcjami. Uzyskałem analogiczne rezultaty jak w [S18] (choć część z nich przy pewnych dodatkowych założeniach – problemy zostały zilustrowane przykładem). W szczególności, warunki narzucone na p_1, p_2, r w (14) zostały zastąpione odpowiednim zachowaniem funkcji $\frac{\psi^{-1}}{\varphi_1^{-1} \cdot \varphi_2^{-1}}$ w zerze lub nieskończoności. Dodajmy, że I. Akbarbaglu i S. Maghsoudi w [4] niezależnie uzyskali podobne wyniki.

Z kolei w artykule [S23], napisanym wspólnie z S. Głębem i C. W. Yangiem, przeanalizowaliśmy tego typu problemy dla mnożenia w przestrzeniach Lorentza $L^{p,q}(X)$.

W artykule [S20], wspólnie z S. Głębem uogólniliśmy Twierdzenie 3.6. Idea była taka, że na wartość $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i y_i$ możemy patrzeć jak na całkę z funkcji αxy po zbiorze $\{1, \dots, n\}$, rozważając miarę liczącą na $\mathbb{N}$. Uzyskaliśmy dzięki temu daleko idące wzmocnienie Twierdzenia 3.6, zastępując $\mathbb{N}$ – pewną przestrzenią topologiczną X z miarą, sumę – całką, przestrzeń c_0 – odpowiednią przestrzenią $C_0(X)$ funkcji ciągłych znikających w nieskończoności, zbiory $\{1, \dots, n\}$ – odpowiednimi podzbiórmi $D_n \subset X$, oraz pierwszą kategorię – σ -porowatością. Otrzymaliśmy też analogiczny wynik rozważając przestrzeń $C^b(X)$ ograniczonych funkcji ciągłych w miejsce $C_0(X)$.

Dodajmy jeszcze, że większość głównych twierdzeń z przytoczonych wyżej prac nie było formułowanych w formie listy warunków równoważnych, gdyż główna trudność spoczywała na jednej implikacji. Serie warunków równoważnych pojawiały się natomiast we wnioskach.

Niech G będzie lokalnie zwartą grupą topologiczną i μ będzie miarą Haara na G . Słynna *Hipoteza* L^p , sformułowana przez W. Żelazkę i M. Rajagopalana w latach 60-tych XX w. mówi o tym, że jeżeli dla wszystkich $f, g \in L^p(G)$, spłot $f \star g \in L^p(G)$, to G jest zwarta. Hipoteza została w pełni potwierdzona w 1990 r. przez S. Saekiego w [89]. F. Abtahi, R. Nasr-Isafahani i A. Rejali w [1] wzmocnili ją w przypadku gdy $p > 2$, pokazując że jeżeli G nie jest zwarta, to istnieją funkcje $f, g \in L^p(G)$ takie, że $f \star g(x) = \infty$ dla każdego x z pewnego niepustego otwartego zbioru. W [S19], napisanej wspólnie z S. Głębem, połączyliśmy konstrukcję z [1] z pomysłami pracy [S18] i udowodniliśmy następujące wzmocnienie hipotezy L^p dla $p > 2$:

Twierdzenie 3.7. *Załóżmy, że G nie jest zwarta, $p, q < \infty$ spełniając $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ oraz $K \subset G$ jest zbiorem zwartym. Wówczas zbiór*

$$E := \{(f, g) \in L^p(G) \times L^q(G) : \text{spłot } f \star g(x) \text{ jest poprawnie określony dla pewnego } x \in K\}$$

jest σ -porowaty⁵⁰.

I. Akbarbaglu i S. Maghsoudi w [2] i [5] udowodnili analogiczne rezultaty dla innych zakresów p i q lub przy dodatkowych założeniach o grupie G (nieunimodularność, niedyskretność), po części wzmacniając pewne znane wcześniej wyniki (mówiące o istnieniu pewnych funkcji). Z kolei w pracy [3] rozszerzyli oni analizę o przestrzenie Orlicza.

Artykuł [S10], napisany wspólnie z S. Głębem, I. Akbarbaglu i S. Maghsoudim, dotyczy badania analogicznych problemów (związanych z hipotezą L^p oraz dychotomiami związanymi z mnożeniem) dla znacznie ogólniejszej klasy przestrzeni niż Orlicza – tzw. przestrzeni *Calderóna-Lozanovskii’ego*. Okazało się, że przy pewnych dodatkowych, lecz naturalnych, założeniach można zastosować podobne techniki dowodowe jak we wcześniejszych pracach. Dzięki temu nie tylko udało się udowodnić ogólniejsze wersje uzyskanych przez nas wcześniej twierdzeń (w przypadku spłotów ograniczyliśmy się do badania kategorii Baire’a, jednak w przypadku mnożenia uzyskaliśmy wyniki w języku porowatości), to jeszcze otrzymaliśmy częściowe wzmocnienia pewnych innych rezultatów. Praca [S10] stanowi, w pewnym sensie, podsumowanie omówionego w tym podrozdziale cyklu prac (naszych z S. Głębem jak i I. Akbarbaglu i S. Maghsoudiego) – jednocześnie uogólnione zostały praktycznie wszystkie otrzymane wcześniej twierdzenia, jak i rozszerzone techniki dowodowe.

Dodajmy jeszcze, że duża część otrzymanych rezultatów w [S10] i [S19] może być sformułowana w formie listy warunków równoważnych, przy czym odpowiednie kryteria są związane z konkretnymi własnościami grup. W przeglądowym artykule [S14], napisanym wspólnie z M. Balcerzakiem i A. Wachowiczem, tak właśnie przedstawiliśmy te twierdzenia (praca [S14] powstała przed [S10], więc go nie uwzględnia).

⁵⁰Jak się okazało, niepustość dopełnienia E była znana wcześniej – patrz [88].

3.6 Wolne podgrupy grup automorfizmów przeliczalnych struktur

Niech A będzie przeliczalną ultrahomogeniczną strukturą (tj. każdy izomorfizm skończenie generowanych podstruktur A rozszerza się do automorfizmu A), a $\text{Aut}(A)$ – grupą automorfizmów A . Jednym z kierunków badań nad $\text{Aut}(A)$ jest problem istnienia jej podgrup wolnych o pewnych własnościach.

W pracy [S21], napisanej wspólnie z S. Głąbem, zdefiniowaliśmy ogólny warunek wystarczający na to, by grupa $\text{Aut}(A)$ zawierała wolną podgrupę $\mathfrak{c}$ wielu generatorów. Pokazaliśmy, że wiele naturalnych struktur A spełnia ten warunek (np. grupa permutacji S_∞ , grupa liczb wymiernych $\mathbb{Q}$, wymierna przestrzeń Urysohna U_0 , graf losowy $\mathbb{G}$, uniwersalny przeliczalny zbiór częściowo uporządkowany $\mathbb{D}$, przeliczalna bezatomowa algebra Boole’a $\mathbb{B}$). W przypadku grupy S_∞ pokazaliśmy dodatkowo, że każdy przeliczalny wolny zbiór generatorów można rozszerzyć do zbioru $\mathfrak{c}$ wielu wolnych generatorów, a przy dodatkowym założeniu Aksjomatu Martina – że można to zrobić dla dowolnego zbioru wolnych generatorów mocy $< \mathfrak{c}$. Udowodniliśmy też, że przeliczalny produkt grup przeliczalnych albo zawiera wolną grupę $\mathfrak{c}$ wielu generatorów, albo nie zawiera wolnej grupy nieprzeliczalnie wielu generatorów. W [35], M. Dólezał i W. Kubiś rozszerzyli ten wynik, odpowiadając twierdząco na jedno z naszych pytań.

W kolejnej pracy [S24], napisanej wspólnie z S. Głąbem i P. Gordinowiczem, pokazaliśmy, że jeżeli A jest przeliczalnym ultrahomogenicznym częściowym porządkiem, to grupa automorfizmów $\text{Aut}(A)$ jest *topologicznie 2-generowana w sposób wolny* (ang. *topologically freely 2-generated*), tj. posiada gęstą podgrupę wolną dwóch generatorów (analogiczny wynik dla przeliczalnych grafów ultrahomogenicznych został pokazany w [48]). W dowodzie wykorzystaliśmy wynik J. H. Shmerla z [91], który pozwala ograniczyć się do pewnych konkretnych typów częściowych porządków. Dodajmy, że w każdym z nich udało się otrzymać pewne wzmocnienie wyjściowej tezy poprzez wskazanie takiej polskiej podprzestrzeni $\mathcal{X} \subset \text{Aut}(A) \times \text{Aut}(A)$, że zbiór par $(f, g) \in \mathcal{X}$ wolnych generatorów gęstej podgrupy, jest rezydualny w $\mathcal{X}$.

3.7 Pewne uogólnienia topologii gęstości

Dla zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue’a $A \subset \mathbb{R}$, przez $\Phi_d(A)$ oznaczmy zbiór punktów gęstości zbioru A . Wówczas zbiór $\mathcal{T}_d := \{A \subset \mathbb{R} : A \subset \Phi_d(A)\}$ jest topologią, zwaną *topologią gęstości*. Co więcej, tzw. *aproksymatywna ciągłość* funkcji $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ oznacza dokładnie ciągłość przy rozważaniu topologii $\mathcal{T}_d$ w dziedzinie i topologii naturalnej $\mathcal{T}_n$ w przeciwdziedzinie. W ostatnich 30 latach w ośrodku łódzkim badane są intensywnie różne wersje pojęcia punktu gęstości i topologii gęstości. Punktem wyjścia do jednego z kierunków tych rozważań jest prosta obserwacja, że w definicji punktu gęstości, zamiast rodziny przedziałów $[-h, h]$, $h > 0$, wystarczy rozważać ciąg $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$. Naturalna okazuje się więc analiza innych ciągów zbiorów w miejsce $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. M. Filipczak i J. Hejduk rozważali w [41] przedziały $[-s_n, s_n]$, gdzie (s_n) jest pewnym ciągiem, a J. Hejduk i R. Wiertelak w [43] – dowolny ciąg przedziałów (J_n) zbieżny do 0.

W artykule [S34], wspólnym z R. Wiertelak, zaproponowaliśmy podejście w pewnym sensie najogólniejsze – rozważyliśmy po prostu ciąg zbiorów mierzalnych $\mathcal{S} = (S_n)$ o dodatniej mierze zbieżny do 0 (rodzinę takich ciągów oznaczmy przez $\mathbb{S}$). Główny wynik z pracy mówi o tym, że jeżeli $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$ spełnia pewne naturalne warunki, to operator $\mathcal{S}$ -gęstości $\Phi_{\mathcal{S}}$ (definiowany analogicznie jak Φ_d) jest tzw. *operatorem prawie dolnej gęstości* (ang. *almost lower density operator*) i w konsekwencji rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} := \{A : A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)\}$ jest topologią (zwaną *topologią $\mathcal{S}$ -gęstości*, ang. *$\mathcal{S}$ -density topology*). Pokazaliśmy też przykład tak uzyskanej topologii, której nie da się wygenerować za pomocą żadnego ciągu przedziałów (J_n) . Nasze uogólnienie daje więc faktycznie coś nowego względem wcześniejszych prac.

Wspólnie z T. Banachem i R. Wiertelak pracujemy aktualnie nad rozszerzeniem takich badań na lokalnie zwarte grupy topologiczne. Przy tym udało nam się pokazać, że operator $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości dla **każdego** ciągu $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$.

3.8 Algebraizowalność i domknięta liniowalność pewnych podzbiorów przestrzeni funkcyjnych

W ostatnich 20 latach wyodrębnił się nowy sposób mierzenia wielkości podzbiorów struktur algebraicznych lub topologiczno-algebraicznych. Jeżeli V jest taką strukturą (przestrzenią liniową, algebrą, przestrzenią Banacha etc.) i $E \subset V$, to możemy uważać, że E jest „duży”, jeżeli zawiera odpowiednio „dużą” podstrukturę (podalgebrę odpowiedniej liczby generatorów, podprzestrzeń odpowiedniego wymiaru, etc.). Okazało się, że wiele naturalnych zbiorów (szczególnie w przestrzeniach funkcyjnych) jest dużych w tym sensie (patrz np. przeglądowy artykuł [21]). Takie problemy były w ostatnich latach rozważane w ośrodku łódzkim i prace [S13], [S15], [S22], [S35] wpisują się w ten nurt badań.

Podzbiór E przestrzeni liniowo topologicznej X nazwiemy *domknięto liniowalnym* (ang. *spaceable*), jeżeli $E \cup \{0\}$ zawiera⁵¹⁾ nieskończenie wymiarową domkniętą podprzestrzeń przestrzeni X .

W [S22], napisanym wspólnie z S. Głąbem, pokazaliśmy, że przy naturalnych warunkach, dopełnienia zbiorów rozważanych w artykułach [S18], [S19] i [S20] (lub pewne ich modyfikacje) są domknięto liniowalne. Dokładniej:

- serie warunków równoważnych z głównych twierdzeń z [S18]⁵²⁾ i z [S20] (a więc, w szczególności, z Twierdzeń 3.5 i 3.6) można rozszerzyć o czwarty punkt: dopełnienie odpowiedniego zbioru jest domknięto liniowalne;
- tezę Twierdzenia 3.7 można w pewnym zakresie zmocnić pisząc, że dopełnienie pewnej modyfikacji zbioru E jest zbiorem domknięto liniowalnym.

Niech $p \in (1, \infty)$. S. H. Creswell w [29] pokazał, że funkcja $T : \ell^p \mapsto \ell^p$ dana przez $T((x_n)) := (x_i | x_i|^{p-1})$ jest ciągła, różnowartościowa, lecz jej odwrotność (zdefiniowana na $T[\ell^p] = \ell^1$) jest wszędzie nieciągła⁵³⁾. Przez $C(B_p, \ell^p)$ oznaczmy przestrzeń ciągłych ograniczonych funkcji z otwartej kuli jednostkowej $B_p \subset \ell^p$, z normą supremum. W pracy [S13], napisanej wspólnie z M. Balcerzakiem, wykorzystując przykład S. H. Creswella udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.8. *Niech $p \in (1, \infty)$ i niech W będzie zbiorem różnowartościowych funkcji z $C(B_p, \ell^p)$ o wszędzie nieciągłych odwrotnościach. Wówczas $W \cup \{0\}$ zawiera izometryczną kopię przestrzeni ℓ^p . W szczególności, W jest domknięto liniowalny.*

W artykule [S15], wspólnie z M. Bieniasem pokazaliśmy, że w powyższym twierdzeniu możemy zastąpić kulę otwartą B_p przez kulę domkniętą $\bar{B}_p$ (taki przypadek wydał nam się bardziej naturalny). Dodatkowo, wykorzystaliśmy kolejny przykład S. H. Creswella, z artykułu [30], do pokazania nieco innej (i chyba zgrabniejszej) wersji poprzednich twierdzeń (przez $B(\ell^p)$ oznaczmy przestrzeń operatorów liniowych i ciągłych z ℓ^p w ℓ^p , z normą operatorową):

Twierdzenie 3.9. *Niech $p \in [1, \infty)$ i niech $W \subset B(\ell^p)$ będzie zdefiniowany analogicznie jak poprzednio. Wówczas $W \cup \{0\}$ zawiera izometryczną kopię przestrzeni ℓ^p . W szczególności, W jest domknięto liniowalny.*

Warto zauważyć, że Twierdzenie 3.9 nie implikuje w prosty sposób twierdzeń przytoczonych wcześniej.

Artykuł [S35], napisany wspólnie z R. Wiertelak, jest powiązany z artykułem [S34] (będziemy stosować oznaczenia które wprowadziliśmy wcześniej). Przez $C_{S,n}$ oznaczmy rodzinę funkcji $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, ciągłych względem topologii $\mathcal{T}_S$ w dziedzinie i topologii naturalnej $\mathcal{T}_n$ w przeciwdziedzinie. Analogicznie

⁵¹⁾W definicjach w tej tematyce dodaje się do zbioru E element zerowy, gdyż zazwyczaj interesujące zbiory go nie zawierają.

⁵²⁾Tu przy dodatkowym założeniu $p_1, p_2, r < \infty$.

⁵³⁾S. H. Creswell rozważał przypadek $p = 2$, ale argumenty są takie same.

definiujemy rodziny funkcji ciągłych $C_{n,\mathcal{S}}$, $C_{n,n}$ i $C_{\mathcal{S},\mathcal{K}}$, gdzie $\mathcal{S}, \mathcal{K} \in \mathbb{S}$. Badaliśmy następujący problem – jak duże (w sensie algebraicznym) są zbiory różnic tych rodzin? Wykorzystując tzw. *metodę funkcji typu wykładniczego* (ang. *exponential-like function method*), rozwiniętą w ośrodku łódzkim w ostatnich latach (patrz np. prace M. Balcerzaka, A. Bartoszewicza i M. Filipczak [7] oraz A. Bartoszewicza i S. Głęba [15]) pokazaliśmy, że wiele takich zbiorów jest *silnie $\mathfrak{c}$ -algebraizowalnych* (ang. *strongly $\mathfrak{c}$ -algebrable*), tj. zawiera (wraz z zerem) algebrę wolną $\mathfrak{c}$ wielu generatorów (w $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ rozważamy działania mnożenia i dodawania). W szczególności, pokazaliśmy, że jeżeli $\mathcal{T}_{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{T}_{\mathcal{K}} \neq \emptyset$, gdzie $\mathcal{S}, \mathcal{K} \in \mathbb{S}$, to zbiór $C_{\mathcal{S},n} \setminus C_{\mathcal{K},n}$ jest silnie $\mathfrak{c}$ -algebraizowalny⁵⁴). Dodajmy, że chociaż przy analizie zbiorów postaci $C_{n,n} \setminus C_{\mathcal{S},\mathcal{K}}$ metoda funkcji typu wykładniczego wydaje się zawodzić, to jednak udało nam się pokazać silną $\mathfrak{c}$ -algebraizowalność takich zbiorów przy założeniu, że rozważamy rodzinę wszystkich funkcji $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ jako algebrę nad $\mathbb{Q}$.

3.9 Jednostajna otwartość pewnych odwzorowań dwu- i wieloliniowych

Klasyczne twierdzenie Banacha o odwzorowaniu otwartym mówi, że każdy ciągły, surjektywny i liniowy operator między przestrzeniami Banacha jest odwzorowaniem otwartym, a nawet tzw. *jednostajnie otwartym* (średnice dobieranych kul nie zależą od wyboru punktu). Z drugiej strony, jak pokazały przykłady np. P. J. Cohena czy C. Horowitz, własność ta nie przenosi się na odwzorowania dwuliniowe, bardzo łatwo też przekonać się o braku otwartości mnożenia w $C([0, 1])$.

W artykule [S11], napisanym wspólnie z M. Balcerzakiem i E. Behrendsem, pokazaliśmy jednostajną otwartość następujących odwzorowań dwu- i wieloliniowych:

- mnożenia $L^{p_1}(X) \times L^{p_2}(X) \ni (f, g) \mapsto fg \in L^q(X)$, gdzie $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{q}$;
- nietrywialnego n -liniowego funkcjonału $T : X_1 \times \dots \times X_n \mapsto \mathbb{K}$, gdzie $X_1, \dots, X_n$ są przestrzeniami unormowanymi nad ciałem $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Praca [S11] powstała w kontekście rozprawy doktorskiej A. Majchrzyckiego, której byłem promotorem pomocniczym (w szczególności, znalazł się tam pierwszy z wymienionych wyników, lecz z nieco innym dowodem). Wpisuje się ona w badania podejmowane ostatnio w ośrodku łódzkim ([9]), ale też przez E. Behrendsa ([17],[18]) czy S. Dragę i T. Kanię, którzy w [36] rozwiązali jeden z problemów postawionych w [S11]. Dodajmy jeszcze, że w [6], I. Akbarbaglu i S. Maghsoudi udowodnili jednostajną otwartość mnożenia w produktach przestrzeni Orlicza.

3.10 Typowe własności funkcji rzeczywistych związane z zachowaniem w nieskończoności

E. Lesigne w [58] udowodnił, że jeżeli $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ jest całkowalna, to dla prawie wszystkich (względem miary Lebesgue’a) $x \in \mathbb{R}$, zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(nx) = 0$. Przy tym, jeżeli (a_n) jest ciągiem rozbieżnym do nieskończoności, to istnieje taka całkowalna i ciągła funkcja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że dla prawie wszystkich x ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n f(nx) = \infty. \quad (15)$$

A. Komisarski w [53] pokazał więcej – istnieje taka całkowalna i ciągła funkcja f , że (15) jest spełniony dla wszystkich $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ⁵⁵). W pracy [S12], napisanej wspólnie z M. Balcerzakiem i A. Majchrzyckim pokazaliśmy, że zbiór funkcji o takich własnościach jest rezydualny w pewnych przestrzeniach

⁵⁴)Sformułowanie Twierdzenia 3 z [S35] zawiera w pewnym sensie lukę – zapomnieliśmy bowiem o założeniu że $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości. Jednak wspomniane wcześniej wyniki, uzyskane z T. Banachem i R. Wiertelak, pokazują, że nie trzeba było tego dodatkowo zakładać.

⁵⁵)Było to rozwiązanie problemu Lesigne’a; G. W. Batten w [16] też go rozwiązał, ale znacznie bardziej skomplikowanymi technicznymi metodami.

funkcji ciągłych oraz całkowalnych⁵⁶⁾. W praktyce uzyskaliśmy ogólniejsze rezultaty związane również z zachowaniem pewnych rodzin par (b, f) , gdzie b jest pewnym ciągiem liczbowym, a f jest funkcją.

Otrzymane wyniki weszły w skład rozprawy doktorskiej A. Majchrzyckiego.

3.11 Porowatość pewnych podzbiorów przestrzeni uogólnionych odwzorowań nieoddalających

W związku z twierdzeniami o punktach stałych, w ostatnim półwieczu rozważany był następujący problem: Jak duży jest zbiór funkcji posiadających pewną własność punktu stałego w przestrzeni odwzorowań w jakimś sensie nieoddalających? Artykuły [S30] i [S31] (z których wyniki zawarłem w rozprawie doktorskiej) są w pewnej mierze powiązane z tymi badaniami.

F. S. De Blasi i J. Myjak pokazali w [24], że zbiór funkcji posiadających kontrakcyjny punkt stały jest „duży” – jest dopełnieniem zbioru σ -porowatego⁵⁷⁾ w przestrzeni $\Omega(K)$ odwzorowań nieoddalających (tj. takich, że $\text{Lip}(f) \leq 1$) z K w K , gdzie K jest domkniętym, wypukłym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni Banacha. Pokazali też analogiczne wyniki, tylko w przestrzeni odwzorowań nieoddalających względem miary niezwartości (to w tej samej pracy [24]) oraz w przestrzeni odwzorowań wielowartościowych nieoddalających względem metryki Hausdorffa (to wspólnie z S. Reichem i A. Zaslavskim w [25]). S. Reich i A. Zaslavskii w [85] (patrz też [84]) w pewien sposób wyjaśnili pierwszy wspomniany wynik z [24] pokazując, że dopełnienie zbioru $\text{kR}(K)$ kontrakcji Rakotcha jest zbiorem σ -porowatym w $\Omega(K)$ (w [86] rozszerzyli ten wynik na przypadek, gdy K jest odpowiednim podzbiorem przestrzeni hiperbolicznej), a J. Carmona Álvarez, T. Domínguez Benavidez w [27] wyjaśnili drugi wynik z [24], pokazując że dopełnienie zbioru tzw. *odwzorowań kondensujących* (ang. *condensing maps*) jest zbiorem σ -porowatym.

W artykule [S31] zaobserwowałem, że odpowiednie zbiory z [24], [25] są konstruowane w bardzo podobny sposób i można udowodnić jedno ogólne twierdzenie (w którym rozważa się przestrzeń odwzorowań nieoddalających względem pewnej funkcji zbioru o odpowiednich własnościach), z którego wynikają wszystkie przytoczone wyżej wyniki jak i wzmocnienia części z nich. Dodatkowo zauważyłem, że twierdzenia z [27] i [85] są konsekwencjami tych z [24].

Artykuł [S30] był motywowany innym wynikiem z [24] – okazuje się, że jeżeli dodatkowo K jest podzbiorem przestrzeni Hilberta⁵⁸⁾, to zbiór kontrakcji Banacha $\text{kB}(K)$ jest σ -porowaty w $\Omega(K)$. W [S30] uogólniłem ten wynik, zastępując m.in. przestrzeń odwzorowań nieoddalających, przestrzenią odwzorowań o module ciągłości ograniczonym przez pewną zadaną funkcję. Rozważyłem też przypadek, gdy zbiór K nie jest ograniczony – okazało się że w tej sytuacji zachodzi znacznie mocniejszy rezultat i w szczególności zbiór kontrakcji Rakotcha (a nawet Matkowskiego) jest pierwszej kategorii w $\Omega(K)$ (na tej przestrzeni rozważałem topologię zbieżności jednostajnej na zbiorach ograniczonych, bez ustalania konkretnej zupełnej metryki).

S. Reich i A. Zaslavskii w późniejszej pracy [87] zdefiniowali, w przypadku nieograniczonego K , pewną metrykę na $\Omega(K)$ (generującą nieco inną topologię niż rozważana przeze mnie), przy której zbiór nieco słabszych kontrakcji (ale wystarczających do posiadania kontrakcyjnego punktu stałego) jest dopełnieniem zbioru σ -porowatego.

3.12 Dekryptywna złożoność rodziny autohomeomorfizmów zachowujących punkty gęstości

Przez $\mathbb{H}$ oznaczmy przestrzeń polską wszystkich rosnących homeomorfizmów przedziału $[0, 1]$. W pracy [S17], wspólnej z S. Głąbem, pokazaliśmy, że zbiór $DP\mathbb{H}$ homeomorfizmów z $\mathbb{H}$ zachowujących punkty

⁵⁶⁾ Rozważaliśmy funkcje określone na $[0, \infty)$, ale założenie to tylko uprościło pewne zapisy.

⁵⁷⁾ W [23] udowodniono wersję dla kategorii Baire’a.

⁵⁸⁾ W związku z wspomnianymi wcześniej rezultatami z [20], nie trzeba tego zakładać.

gęstości, jest zbiorem koanalitycznym zupełnym. Stosowaliśmy techniki typowe dla tego typu badań (tzn. badań deskryptywnej złożoności zbiorów w przestrzeniach polskich). W szczególności, zastosowaliśmy redukcję do pewnego, znanego, koanalitycznego zupełnego zbioru drzew. Artykuł [S17] powstał na początku moich studiów doktoranckich, a tematyka wpisywała się w badania prowadzone w tamtym czasie przez S. Głaba.

3.13 Zbiory cieniowe i ich modyfikacje

R. Mabry w [59] zdefiniował i badał interesującą klasę zbiorów: $A \subset \mathbb{R}$ (lub $A \subset \mathbb{R}^2$) nazwiemy *cieniowym* (ang. *shading*), jeżeli istnieje taka liczba $t \in [0, 1]$, że dla dowolnej *miary Banacha* (tj. skończenie addytywnego, niezmienniczego na izometrie przedłużenia miary Lebesgue’a) i dowolnego przedziału (lub kwadratu) ograniczonego I :

$$\frac{\mu(A \cap I)}{\lambda(I)} = t,$$

gdzie λ jest miarą Lebesgue’a. Definicję można osłabiać na wiele sposobów – np. jeżeli powyższa wartość jest stała dla ustalonej miary Banacha μ , to A nazwiemy zbiorem μ -*cieniowym*, itp. W artykule [S26] napisanym we współpracy z K. Neu, badaliśmy problem, czy pewne naturalne modyfikacje tego typu zbiorów (iloczyn kartezyjańskie, obrazy przez odpowiednie funkcje, ilorazy etc.) zachowują swoje własności. W szczególności rozwiązaliśmy jeden z problemów R. Mabry’ego pokazując, że iloczyn kartezyjański zbiorów cieniowych jest zbiorem cieniowym.

4 Literatura

- [1] F. Abtahi, R. Nasr-Isfahani, A. Rejali, *On the L^p -conjecture for locally compact groups*, Arch. Math. 89 (2007), 237–242.
- [2] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, *An answer to a question on the convolution of functions*, Arch. Math. (Basel) 98 (2012), no. 6, 545–553.
- [3] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, *On certain porous sets in the Orlicz space of a locally compact group*, Colloq. Math. 129 (2012), no. 1, 99–111.
- [4] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, *Porosity and products of Orlicz spaces*, Positivity 17 (2013), no.4, 1009–1020.
- [5] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, *Porosity of certain subsets of Lebesgue spaces on locally compact groups*, Bull. Aust. Math. Soc. 88 (2013), no. 1, 113–122.
- [6] I. Akbarbaglu, S. Maghsoudi, *Uniform openness of multiplication in Orlicz spaces*, Ann. Funct. Anal. 7 (2016), no. 4, 543–551.
- [7] M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, M. Filipczak, *Nonseparable spaceability and strong algebrability of sets of continuous singular functions*, J. Math. Anal. Appl. 407 (2013), no. 2, 263–269.
- [8] M. Balcerzak, A. Wachowicz, *Some examples of meager sets in Banach spaces*, Real Anal. Exchange 26 (2000/01), no. 2, 877–884.
- [9] M. Balcerzak, W. Wachowicz, W. Wilczyński, *Multiplying balls in the space of continuous functions on $[0, 1]$* , Studia Math. 170 (2005), no. 2, 203–209.
- [10] R. Balka, A. Mathé, *Generalized Hausdorff measure for generic compact sets*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2013), no. 2, 797–804.

- [11] T. Banach, M. Nowak, *A 1-dimensional Peano continuum which is not an IFS attractor*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), no. 3, 931–935.
- [12] T. Banach, M. Nowak, F. Strobil, *Embedding fractals in Banach, Hilbert or Euclidean spaces*, wysłany, arXiv: <https://arxiv.org/abs/1806.08075>
- [13] M. F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press Professional, Boston, MA, 1993.
- [14] M. Barnsley, K. Igudesman, *Topological contractive systems*, Lobachevskii J. Math. 32 (2011), no. 3, 220–223.
- [15] A. Bartoszewicz, S. Głąb, *Strong algebrability of sets of sequences and functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 827–835.
- [16] G. W. Batten, *Construction of continuous, integrable functions with extreme behavior at infinity*, arXiv:1010.3354 [math.CA].
- [17] E. Behrends, *Walk the dog, or: products of open balls in the space of continuous functions*, Funct. Approx. 44 (2011), no. 1, 153–164.
- [18] E. Behrends, *Where is matrix multiplication locally open?*, Linear Algebra Appl. 517 (2017), 167–176.
- [19] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [20] C. Bargetz, M. Dymond, S. Reich, *Porosity results for sets of strict contractions on geodesic metric spaces*. Topol. Methods Nonlinear Anal. 50 (2017), no. 1, 89–124.
- [21] L. Bernal-Gonzalez, D. Pellegrino, J. B. Seoane-Sepulveda, *Linear subsets of nonlinear sets in topological vector spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 51 (2014), no. 1, 71–130.
- [22] J. Dobrowolski and F.V. Kuhlmann, *Valuation theory, generalized IFS attractors and fractals*, Arch. Math. 111 (2018), 287–297.
- [23] F. S. De Blasi, J. Myjak, *Sur la convergence des approximations successives pour les contractions non lineaires dans un espace de Banach*, C. R. Acad. Acad. Sci. Paris Sér. A-B 283 (1976), no. 4, 185–187.
- [24] F. S. De Blasi, J. Myjak, *Sur la porosité de l'ensemble des contractions sans point fixe*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 2, 51–54.
- [25] F. S. De Blasi, J. Myjak, S. Reich, A. Zaslavski, *Generic existence and approximation of fixed points for nonexpansive set valued maps*, Set Valued Anal. 17 (2009), no. 1, 97–112.
- [26] C. A. Cabrelli, B. Forte, U. M. Molter, E. R. Vrscay, *Iterated fuzzy set systems: a new approach to the inverse problem for fractals and other sets*, J. Math. Anal. Appl. 171 (1992), no. 1, 79–100.
- [27] J. Carmona Álvarez, T. Domínguez Benavidez, *Porosity and K -set contractions*, Boll. Un. Mat. Ital. A 6(7) (1992), no. 2, 227–232.
- [28] M. Chowdhury, E. Tarafdar, *Topological Methods for Set-Valued Nonlinear Analysis*, World Scientific Publishing, Singapore, 2008.
- [29] S. H. Creswell, *A continuous bijection from ℓ^2 onto a subset of ℓ^2 whose inverse is everywhere discontinuous*, Amer. Math. Monthly 117 (2010), 823–828.
- [30] S. H. Creswell, *A continuous linear bijection from ℓ^2 onto a dense subset of ℓ^2 whose inverse is everywhere unboundedly discontinuous*, Missouri J. Math. Sci. 25 (2013), no. 2, 213–214.

- [31] S. Crovisier, M. Rams, *IFS attractors and Cantor sets*, Topology Appl. 153 (2006), 1849–1859.
- [32] E. D’Aniello, *Non-self-similar sets in $[0, 1]^N$ of arbitrary dimension*, J. Math. Anal. Appl. 456 (2017), no. 2, 1123–1128.
- [33] E. D’Aniello, T. H. Steele, *Attractors for iterated function schemes on $[0, 1]^N$ are exceptional*, J. Math. Anal. Appl. 541 (2015), no. 1, 537–541.
- [34] E. D’Aniello, T. H. Steele, *Attractors for iterated function systems*, J. Fractal Geom. 3 (2016), no. 2, 95–117.
- [35] M. Dólezal, W. Kubiś, *Perfect independent sets with respect to infinitely many relations*, Arch. Math. Logic 55 (2016), 847–856.
- [36] S. Draga, T. Kania, *When is multiplication in a Banach algebra open?*, Linear Algebra Appl. 538 (2018), 149–165.
- [37] D. Dumitru, *Attractors of topological iterated function system*, Annals of Spiru Haret University: Mathematics-Informatics series 8 (2012), no. 2, 11–16.
- [38] A. Edalat, *Power domains and iterated function systems*, Inf. Comput. 124 (1996), no. 2, 182–197.
- [39] M. Edelstein, *On fixed and periodic points under contractive mappings*, J. London Math. Soc. 37 (1962), 74–79.
- [40] R. Engelking, *General Topology*, Monografie Matematyczne, Tom 60. [Mathematical Monographs, Vol. 60] PWN–Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1977. 626 pp.
- [41] M. Filipczak, J. Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue measure*, Tatra Mt. Math. Publ. 28 (2004), 187–197.
- [42] M. Hata, *On the structure of self-similar sets*, Japan J. Appl. Math. 2 (1985), 381–414.
- [43] J. Hejduk, R. Wiertelak, *On the generalization of density topologies on the real line*, Math. Slovaca 64 (2014), no. 5, 1267–1276.
- [44] J. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981), no. 5, 713–747.
- [45] J. Jachymski, *A nonlinear Banach–Steinhaus theorem and some meager sets in Banach spaces*, Studia Math. 170 (2005), no. 3, 303–320.
- [46] J. Jachymski, I. Jóźwik, *Nonlinear contractive conditions: a comparison and related problems*, Banach Center Publ. 77 (2007), 123–146.
- [47] L. Janos, *A converse of Banach’s contraction theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 287–289.
- [48] J. Jonusas, J. Mitchell, *Topological 2-generation of automorphism groups of countable ultrahomogeneous graphs*, Forum Math. 29 (2017), no. 4, 905–939.
- [49] A. Kameyama, *Self-similar sets from the topological point of view*, Japan J. Industr. Appl. Math. 10 (1993), 85–95.
- [50] A. Kameyama, *Distances on topological self-similar sets and the kneading determinants*, J. Math. Kyoto Univ. 40 (2000), no. 4, 601–672.
- [51] B. Kieninger, *Iterated function systems on compact Hausdorff spaces*, rozprawa doktorska, Uniwersytet w Augsburgu, 2002.
- [52] J. Kigami, *Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 335 (1993), 721–755.

- [53] A. KomisarSKI, *On the behavior of Lebesgue integrable functions at infinity*, Indag. Math. 28 (2017), 580–588.
- [54] M. Kulczycki, M. Nowak, *A class of continua that are not attractors of any IFS*, Cent. Eur. J. Math. 10 (2012), no. 6, 2073–2076.
- [55] M. Kwieciński, *A locally connected continuum which is not an IFS attractor*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 47 (1999), no. 2, 127–132.
- [56] S. Leader, *A topological characterization of Banach contractions*, Pacific J. Math. 69 (1977), 461–466.
- [57] C. Lee, *A development of contraction mapping principles on Hausdorff uniform spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 226 (1977), 147–159.
- [58] E. Lesigne, *On the behavior at infinity of an integrable function*, Amer. Math. Monthly 117 (2010), no. 2, 175–181.
- [59] R. Mabry, *Sets which are well-distributed and invariant relative to all isometry invariant total extensions of Lebesgue measure*, Real Anal. Exchange 16 (1991-92), no. 2, 425–459.
- [60] T. Martyn, *The chaos game revisited: Yet another, but a trivial proof of the algorithm’s correctness*, Appl. Math. Lett. 25 (2012), no. 2, 206–208.
- [61] J. Matkowski, *Integrable solutions of functional equations*, Diss. Math. 127 (1975) 68 pp.
- [62] P. Meyers, *A converse to Banach’s contraction theorem*, J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B 71B (1967), 73–76.
- [63] R. Miculescu, *Generalized iterated function systems with place dependent probabilities*, Acta Appl. Math. 130 (2014), no. 1, 135–150.
- [64] R. Miculescu, S. A. Urziceanu, *The canonical projection associated with certain possibly infinite generalized iterated function systems as a fixed point*, J. Fixed Point Theory Appl. 20 (2018), no. 4, Art. 141, 15 pp.
- [65] R. Miculescu, A. Mihail, *Applications of fixed point theorems in the theory of generalized IFS*, Fixed Point Theory Appl. Volume 2008, Article ID 312876, 11 pages doi:10.1155/2008/312876.
- [66] R. Miculescu, A. Mihail, *A generalization of the Hutchinson measure*, Mediterr. J. Math. 6 (2009), 203–213.
- [67] R. Miculescu, A. Mihail, *Generalized IFSs on noncompact spaces*, Fixed Point Theory Appl. Volume 2010, Article ID 584215, 11 pages doi:10.1155/2010/584215.
- [68] R. Miculescu, A. Mihail, *On a family of IFSs whose attractors are not connected*, J. Math. Anal. Appl. 376 (2011), 187–192.
- [69] R. Miculescu, A. Mihail, *A characterization of compact operators via the non-connectedness of the attractors of a family of IFSs*, Complex Anal. Oper. Theory 7 (2013), no. 6, 1819–1830.
- [70] R. Miculescu, A. Mihail, *On a question of A. Kameyama concerning self-similar metrics*, J. Math. Anal. Appl. 422 (2015), no. 1, 265–271.
- [71] R. Miculescu, A. Mihail, *A sufficient condition for a finite family of continuous functions to be transformed into φ -contractions*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. 41 (2016), 51–65.
- [72] R. Miculescu, A. Mihail, *Remetrization results for possibly infinite self-similar systems*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 47 (2016), no. 1, 333–345.

- [73] R. Miculescu, A. Mihail, *A generalization for a finite family of functions of the converse of Browder's fixed point theorem*, Bull. Braz. Math. Soc., New Series (2018), <https://doi.org/10.1007/s00574-018-0076-x>.
- [74] A. Mihail, *Recurrent iterated function systems*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 53 (2008), no. 1, 43–53.
- [75] A. Mihail, *The shift space for recurrent iterated function systems*, Rev. Roumaine. Math. Pures Appl. 4 (2008), 339–355.
- [76] A. Mihail, *A topological version of iterated function systems*, An. Științ. Univ. Al. I. Cuza, Iași, (S.N.), Matematica 58 (2012), 105–120.
- [77] A. Mihail, *The canonical projection between the shift space of an IIFS and its attractor as a fixed point*, Fixed Point Theory Appl. 75 (2015), 15 pp.
- [78] A. Mihail, N. Seclean, *On the connectivity of the attractors of recurrent iterated function systems*, Math. Reports 13 (63) (2011), no. 4, 363–376.
- [79] M. Nowak, *Topological classification of scattered IFS-attractors*, Topology Appl. 160 (2013), no. 14, 1889–1901.
- [80] M. Nowak, T. Szarek, *The shark teeth is a topological IFS-attractor*, Siberian Math. J. 55 (2014), no. 2, 296–300.
- [81] V. Olevskii, *A note on the Banach–Steinhaus theorem*, Real Anal. Exchange 17 (1991/1992), 399–401.
- [82] E. Oliveira, *The ergodic theorem for a new kind of attractor of a GIFS*, Chaos Solitons Fractals 98 (2017), 63–71.
- [83] E. Rakotch, *A note on contractive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 459–465.
- [84] S. Reich, A. Zaslavski, *Almost all nonexpansive mappings are contractive*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 22 (2000), 118–124.
- [85] S. Reich, A. Zaslavski, *The set of noncontractive mappings is σ -porous in the space of all nonexpansive mappings*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 333 (2001), no. 6, 539–544.
- [86] S. Reich, A. Zaslavski, *Generic aspects of metric fixed point theory*, Handbook of Metric Fixed Point Theory, 557–575, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.
- [87] S. Reich, A. Zaslavski, *Two porosity theorems for nonexpansive mappings in hyperbolic spaces*, J. Math. Anal. Appl. 433 (2016), no. 2, 1220–1229.
- [88] N. W. Rickert, *Convolution of L^p functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 762–763.
- [89] S. Saeki, *The L^p -conjecture and Young's inequality*, Illinois. J. Math. 34 (1990), 615–627.
- [90] M. Sanders, *An n -cell in $\mathbb{R}^{n+1}$ that is not the attractor of any IFS on $\mathbb{R}^{n+1}$* , Mo. J. Math. Sci. 21 (2009), no. 1, 13–20.
- [91] J. H. Schmerl, *Countable homogeneous partially ordered sets*, Algebra Universalis 9 (1979), no. 3, 317–321.
- [92] N. Seclean, *Generalized iterated function systems on the space $l^\infty(X)$* , J. Math. Anal. Appl. 410 (2014), no. 2, 847–858.
- [93] N. Seclean, *Generalized F -iterated function systems on product of metric spaces*, J. Fixed Point Theory Appl. 17 (2015), 575–595.

- [94] M.A. Serban, *Fixed point theorems for operators on Cartesian product spaces and applications*, International Conference on Nonlinear Operators, Differential Equations and Applications (Cluj-Napoca, 2001), Semin. Fixed Point Theory Cluj-Napoca 3 (2002), 16.
- [95] F. Strobin, J. Swaczyna, *Connectedness of attractors of a certain family of IFSs*, przyjęty w J. Fractal Geom., arXiv: <https://arxiv.org/pdf/1812.06427>.
- [96] E. Tarafdar, *An approach to fixed-point theorems on uniform spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 191 (1974), 209–225.
- [97] L. Zajíček, *Porosity and σ -porosity*, Real Anal. Exchange 13 (1987/1988), 314–350.
- [98] L. Zajíček, *On σ -porous sets in abstract spaces*, Abstr. Appl. Analysis 5 (2005), 509–534.

Filip Strobin