

KRZYSZTOF KUŹMIŃSKI, MACIEJ KRAWIECKI

**Politechnika Łódzka
Instytut Automatyki**

DYSKUSJA WARUNKÓW PRZESUWALNOŚCI BIEGUNÓW UKŁADÓW LINIOWYCH ZA POMOCĄ STATYCZNYCH SPRĘŻEŃ ZWROTNYCH OD WYJŚCIA

Recenzent: **dr hab. Jacek Kabziński, prof. PŁ**

Maszynopis dostarczony: 21.03.2011

W artykule przeprowadzono dyskusję typowych warunków przesuwalności biegunów układów liniowych za pomocą statycznych sprzężeń zwrotnych od wyjścia. Jako typowe warunki wystarczające przesuwalności biegunów rozważono warunki Kimury [12] i Wanga [20]. Dla ilustracji problemu rozważono dyskretne zbiory punktów, którym odpowiada określona liczba wejść i wyjść układu. Dla różnych wartości n (4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16) zaznaczono granice obszarów spełniających warunki Kimury oraz Wanga. Przeanalizowano właściwości poszczególnych obszarów oraz obliczono liczbę Schuberta [3] dla wybranych punktów szczególnych, badając tym samym, czy układy o tych wymiarach mają generycznie właściwość pełnej przesuwalności biegunów.

1. WPROWADZENIE

Istotnymi problemami z zakresu teorii sterowania w dalszym ciągu są zagadnienia związane z przesuwaniami biegunów macierzy transmitancji w określone położenia na płaszczyźnie zmiennej zespolonej [17], [18]. W ten sposób można uzyskać pożądane właściwości dynamiczne układu, które odpowiadają wybranym położeniom biegunów.

W niniejszej pracy skoncentrowano się na zastosowaniu statycznych sprzężeń zwrotnych od wyjścia układu w celu przesunięcia biegunów macierzy transmitancji. W szczególności dotyczy to dyskusji warunków kompletnej przesuwalności, to jest możliwości przemieszczenia wszystkich biegunów układu w dowolnie wybrane

położenie za pomocą sprzężeń, określonych przez rzeczywistą macierz \mathbf{K} . W literaturze [17], [18] rozpatrywane są także sprzężenia dynamiczne oraz przesuwalność nie wszystkich biegunów (częściowa). Ze względów ekonomicznych sprzężenia statyczne wydają się lepsze. Natomiast przesuwalność częściowa jest nie do przyjęcia ze względu na to, że bieguny nieprzesuwane podlegają niekontrolowanemu przemieszczeniu, na przykład mogą przesunąć się do prawej półpłaszczyzny zespolonej. Czasem w literaturze są również prowadzone rozważania czysto teoretyczne, dopuszczające zespoloną macierz sprzężeń zwrotnych.

W pracy wzięto pod uwagę wyłącznie metody bezpośrednie, tzn. nieiteracyjne przesuwanie biegunów za pomocą sprzężeń zwrotnych od wyjścia. W ostatnich trzydziestu pięciu latach opracowano wiele takich metod, których przegląd można znaleźć między innymi w pracach [17], [18], [2], [4] i innych pozycjach podanych w bibliografii. Często problem przesuwania biegunów wiąże się bezpośrednio z bardziej ogólnym zagadnieniem projektowania struktury własnej obiektu. Stosowane są przy tym różne podejścia do rozpatrywanego problemu, między innymi podejście parametryczne [15], geometryczne [5], wykorzystujące dwa równania Sylvester'a sprzężone przez warunek ortogonalności [18] i inne. Warunek ortogonalności jest wykorzystywany w większości algorytmów obliczeń macierzy sprzężeń zwrotnych, co prowadzi do dwuetapowej procedury obliczeń.

Autorzy tej publikacji opracowali metodę podaną w [14], która nie wymaga konstrukcji struktury własnej układu i wykorzystania warunku ortogonalności. Prowadzi to do algorytmu jednoetapowego (w dwóch wersjach), w wyniku zastosowania macierzy pseudoodwrotnej Moore'a-Penrose'a i operacji iloczynu Kroneckera.

2. ŚCISŁE SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Przedmiotem rozważań jest liniowy układ stacjonarny $\mathbf{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ opisany przez równania:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^p$ oraz $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{p \times n}$. Zakłada się przy tym, że

$$\text{rank } \mathbf{B} = m \leq n \quad \text{ i } \quad \text{rank } \mathbf{C} = p \leq n, \quad (3)$$

co jest równoznaczne z faktem przekazywania przez sensory i aktuatory wyłącznie znaczących informacji.

Jak wiadomo równaniom (1) i (2) odpowiada macierz transmitancji

$$\mathbf{G}_o(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \quad (4)$$

której bieguny $\mathcal{A}_o = \{s_1^o, s_2^o, \dots, s_n^o\}$ spełniają równanie charakterystyczne

$$M_o(s) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 0. \quad (5)$$

W celu narzucenia w rozważanym układzie pożądanego zbioru biegunów macierzy transmitancji $\mathcal{A}_z = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, wprowadza się statyczne sprzężenie zwrotne od wyjścia określające prawo sterowania

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}\mathbf{y}(t), \quad \text{gdzie } \mathbf{K} \in \mathbf{R}^{m \times p}. \quad (6)$$

Zatem układ zamknięty będzie opisany równaniem:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C})\mathbf{x}(t), \quad (7)$$

któremu odpowiada równanie charakterystyczne

$$M(s) = \det(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{C}) = 0, \quad (8)$$

spełnione przez elementy zbioru \mathcal{A}_z .

Dla określenia niektórych warunków przesuwalności biegunów wygodnie jest wprowadzić pewne pojęcia topologii i geometrii algebraicznej. W związku z powyższym podano dalej ujęcie zaczerpnięte z [7], [8].

Niech $\text{Mat}_R(m \times p)$ będzie zbiorem wszystkich rzeczywistych macierzy o wymiarze $m \times p$, a $\text{Poly}_R(n)$ zbiorem wszystkich monicznych wielomianów stopnia n ze współczynnikami z \mathbf{R} , który można utożsamiać z \mathbf{R}^n (użycie współczynników wielomianów – z wyłączeniem wiodącej jedynek – jako współrzędnych ustala bijekcję między nimi). Wtedy dla określonych $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ o elementach rzeczywistych, można zdefiniować odwzorowanie χ_S jako

$$\chi_S : \text{Mat}_R(m \times p) \rightarrow \text{Poly}_R(n) : \chi_S(\mathbf{K}) = M(s), \quad (9)$$

gdzie $M(s)$ jest określone wzorem (8).

Możliwość narzucenia układowi $\mathcal{S} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ dowolnego symetrycznego względem osi rzeczywistej zbioru biegunów \mathcal{A}_z przez rzeczywistą macierz \mathbf{K} jest równoważna ze stwierdzeniem, że odwzorowanie χ_S jest surjekcją. Należy zwrócić uwagę na to, że dla każdych m, n, p istnieją układy \mathcal{S} , dla których χ_S nie jest surjekcją. Przykładem mogą być tutaj układy, dla których $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ lub $\mathbf{C} = \mathbf{0}$. Dlatego wprowadza się pojęcie generycznej cechy (właściwości) układów liniowych, którą mają prawie wszystkie systemy w sensie pewnej topologii. Dla danych m, n, p odwzorowanie χ_S jest generycznie surjektywne, jeżeli istnieje

otwarty, gęsty zbiór V w przestrzeni $\text{Mat}_R(n \times n) \times \text{Mat}_R(n \times m) \times \text{Mat}_R(p \times n)$ taki, że dla $(A, B, C) = S \in V$, odwzorowanie χ_S jest surjekcją. Zbiór otwarty i gęsty rozumieć można w sensie topologii indukowanej metryką euklidesową w przestrzeni $\mathbf{R}^{n^2+mn+mp}$, z którą można utożsamiać przestrzeń systemów liniowych określonego rzędu i wymiarów, ale w literaturze dotyczącej geometrii algebraicznej zwykle używa się dużo słabszej topologii Zariskiego [10].

3. DYSKUSJA CAŁKOWITEJ PRZESUWALNOŚCI BIEGUNÓW

Wspomniana wyżej równoważność całkowitej przesuwalności biegunów i surjektywności odwzorowania χ_S , pozwala stwierdzić, że warunkiem koniecznym całkowitej przesuwalności biegunów za pomocą rzeczywistej macierzy \mathbf{K} jest sterowalność i obserwowalność S . Wynika to z udowodnionego na przykład w [16] warunku koniecznego surjektywności χ_S , który wymaga, aby układ S był sterowalny i obserwowalny. Jednocześnie jest to równoważne ze stwierdzeniem, że stopień MacMillana macierzy transmitancji tego układu jest równy n , to znaczy wymiarowi przestrzeni stanów (a zatem realizacja S musi być minimalna). Sterowalność i obserwowalność są generycznymi właściwościami układów liniowych, więc nie wnoszą nic do kwestii generycznej surjektywności odwzorowania χ_S . Co więcej, sterowalność i obserwowalność nie są wystarczające dla surjektywności χ_S , co pokazuje przykład podany w [13].

Znacznie bardziej skomplikowany jest problem warunków wystarczających całkowitej przesuwalności biegunów, które w różny sposób były formułowane przez wielu autorów.

Najbardziej ogólnymi i najczęściej wykorzystywanymi są:

1. Warunek Kimury [12]

$$m + p > n \quad (10)$$

(lub w wersji nieostrej $m + p \geq n$) (10')

2. Warunek Wanga [20]

$$mp > n \quad (11)$$

Nierówność (10) określa warunek przesuwalności spektrum generycznego zbioru rzeczywistych realizacji S . Warunek ten jest ostrzejszy od (11) dla $n > 5$, ale jednocześnie metody obliczeniowe opracowane przy założeniu jego prawdziwości są łatwiejsze w zastosowaniu praktycznym. Natomiast warunek (11) gwarantuje generyczną przesuwalność spektrum S (biegunów układu) przez macierz rzeczywistą \mathbf{K} [6].

Jednocześnie należy stwierdzić, że jak wykazano w [13], warunek (11) nie jest wystarczający dla osiągnięcia pełnej (nie generycznej) arbitralnej przesuwalności przez statyczne sprzężenie od wyjścia \mathbf{K} . Szczególnie skomplikowany jest przypadek krytyczny, gdy

$$mp = n. \quad (12)$$

W pracy [3] uzasadniono, że zagadnienie przesuwalności biegunów z wykorzystaniem macierzy \mathbf{K} jest równoważne z klasycznym problemem Schuberta. Jednocześnie wykazano tam, że jeżeli $mp = n$ oraz liczba Schuberta

$$d(m, p) = \frac{1!2!\dots(p-1)!(mp)!}{m!(m+1)!\dots(m+p-1)!} \quad (13)$$

jest nieparzysta, to odwzorowanie χ_S jest generycznie surjektywne.

Wykazano ponadto [4], że liczba $d(m, p)$ jest nieparzysta wtedy i tylko wtedy, jeżeli spełniony jest jeden z następujących warunków

$$\min\{m, p\} = 1 \quad (14)$$

lub

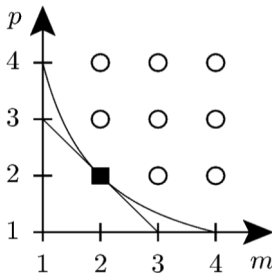
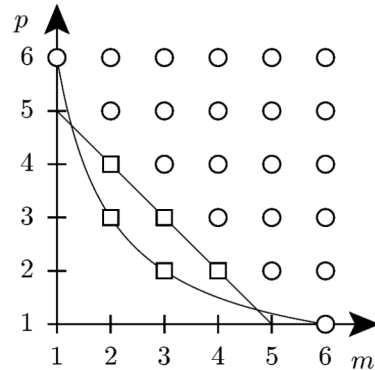
$$\min\{m, p\} = 2 \quad \text{i} \quad \max\{m, p\} = 2^k - 1 \quad \text{dla} \quad k = 2, 3, \dots, \quad (15)$$

Co więcej, udowodniono [7], że jeżeli spełniony jest warunek (12) oraz m i p są liczbami parzystymi, to odwzorowanie χ_S nie jest generycznie surjektywne. Pozwoliło to sformułować wniosek, że układy liniowe \mathcal{S} są generycznie stabilizowalne, jeżeli spełniony jest warunek (11) lub też zachodzi (12) i $m + p$ jest liczbą nieparzystą.

W niniejszej pracy dla ilustracji problemu warunków wystarczających przesuwalności biegunów, zilustrowano dyskretne zbiory punktów, którym odpowiada określona liczba wejść i wyjść układu, dla różnych wartości n z zaznaczeniem granic obszarów spełniających warunki (10') i (12). Pokazano to na rysunkach 1÷8, gdzie dla wybranych punktów krytycznych leżących na hiperboli Wanga (12) obliczono wartości $d(m, p)$. Ponadto na podstawie literatury [2] zaznaczono przez zaciemnienie punkty przetestowane z wynikiem pozytywnym (w sensie znalezienia rzeczywistej macierzy \mathbf{K}). Na wymienionych wyżej rysunkach można wyodrębnić trzy obszary, a mianowicie:

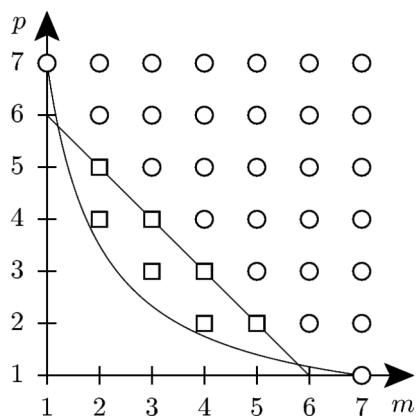
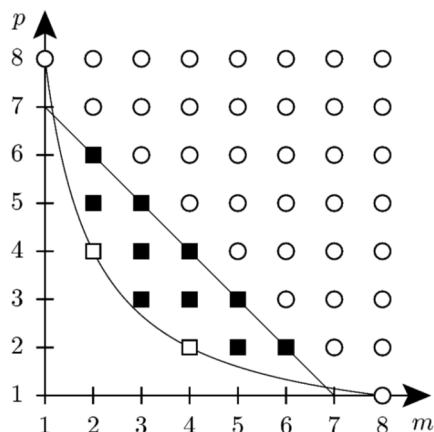
- I. Obszar spełniający warunek Kimury, tj. $m + p > n$. Jest to zbiór punktów, w których dla każdego z nich mamy całkowitą przesuwalność biegunów. W skład tego zbioru wchodzi dwa szczególne punkty, które nie spełniają ostrego warunku Wanga (11). Są to punkty, którym odpowiadają $m = 1 \wedge p = n$ oraz $m = n \wedge p = 1$. Dla tych punktów jednak $d(m, p) = 1$, co zgodnie z wcześniejszymi stwierdzeniami (14) jest wystarczające do tego, by odwzorowanie χ_S było generycznie surjektywne.

- II. Obszar spełniający warunek $m + p \leq n \leq mp$. Jest to obszar, który sprawia największe trudności obliczeniowe i którego punkty nie gwarantują pełnej przesuwalności (w dowolne położenia biegunów). Należy jednak stwierdzić, że w literaturze podano już wiele przykładów odpowiadających poszczególnym punktom tego zbioru, dla których znaleziono pozytywne rozwiązanie, między innymi w [1], [2], [6], [20]. W tej ostatniej pozycji podano to dla $n = 8$, $m = 3$ i $p = 3$ przy $d(3,3) = 42$.
- III. Zbiór spełniający warunek $mp < n$. Jest to obszar dla którego punktów nie można uzyskać całkowitej przesuwalności biegunów.

Rys. 1. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 4$ Rys. 2. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 6$

Rys. 1 przedstawia zbiór punktów dla $n = 4$. Ten przypadek obejmuje jeden szczególny punkt $(2,2)$, w którym hiperbola Wangę jest styczna do prostej Kimury. Zgodnie z podanym wcześniej stwierdzeniem, w tym punkcie odwzorowanie χ_S nie jest generycznie surjektywne (m i p parzyste), co potwierdza obliczona liczba Schuberta $d(2,2) = 2$ (parzysta). W pracy [21] wykazano, że w tym przypadku problem przesuwania biegunów przez statyczne sprzężenie zwrotne od wyjścia nie jest generycznie rozwiązalny nad ciałem \mathbf{R} . Wielu autorów znalazło jednak przykłady, w których wyznaczono macierze \mathbf{K} . Oczywiście to nie przeczy wyżej podanym stwierdzeniom. Tym niemniej przez dłuższy czas ten przypadek uważany był za wyjątkowy. Szczególnie ciekawe są tutaj wyniki losowych badań symulacyjnych wykonywanych metodą Monte Carlo, podanych w pracy [6]. W tych badaniach losowo wybierano elementy macierzy definiujących układ \mathcal{S} oraz elementy spektrum \mathcal{A}_z , przy określonych obszarach zmienności tych elementów. Na podstawie kilkuset tysięcy eksperymentów oszacowano prawdopodobieństwo wystąpienia takich zestawów elementów, które zapewniają pełną przesuwalność biegunów. Uzyskano wynik pozytywny w 85% przypadków.

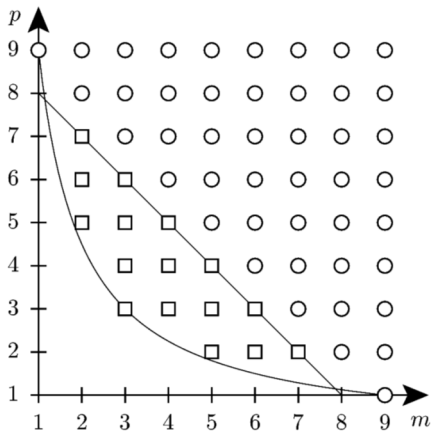
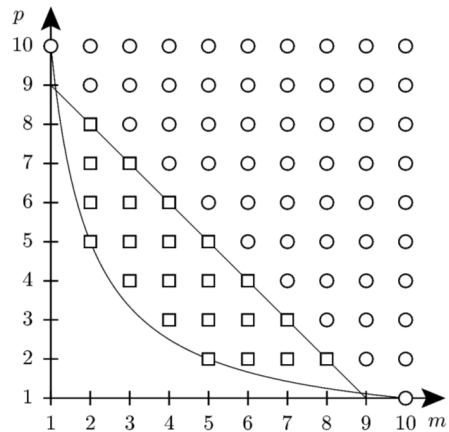
Rys. 2 dotyczy przypadku $n = 6$. W tym przypadku występują dwa punkty szczególne $(2,3)$ i $(3,2)$, które leżą na hiperboli Wanga, przecinającej dwukrotnie prostą Kimury (co jest typowe dla $n \geq 5$). Dla obu punktów szczególnych $d(2,3) = d(3,2) = 5$. Potwierdza to spełnienie warunku (15) dla $k = 2$, co oznacza, że w tych punktach odwzorowanie χ_S jest generycznie surjektywne.

Rys. 3. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 7$ Rys. 4. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 8$

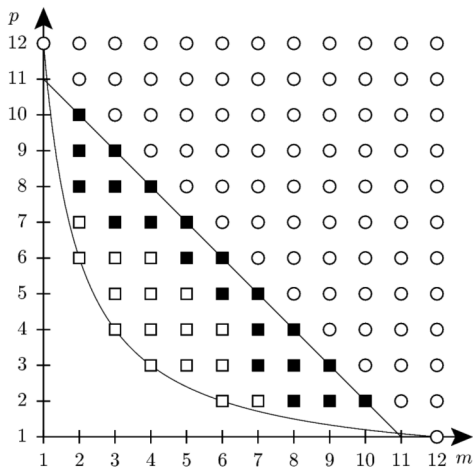
Rys. 3 dotyczy przypadku $n = 7$. W tym przypadku nie występują punkty szczególne. W obszarze II poza punktami na prostej Kimury znajdują się jeszcze 3 punkty, w których odwzorowanie χ_S jest generycznie surjektywne.

Z kolei rys. 4 przedstawia zbiór punktów dla $n = 8$. W tym przypadku ma się do czynienia z dwoma punktami szczególnymi, leżącymi na hiperboli Wanga, tj. $(2,4)$ i $(4,2)$. Dla tych punktów zarówno liczba Schuberta $d(2,4) = d(4,2) = 14$, jak m i p są parzyste, więc odwzorowanie χ_S nie jest dla nich generycznie surjektywne. Wszystkie pozostałe punkty II obszaru zostały przetestowane z wynikiem pozytywnym w literaturze [20], [2].

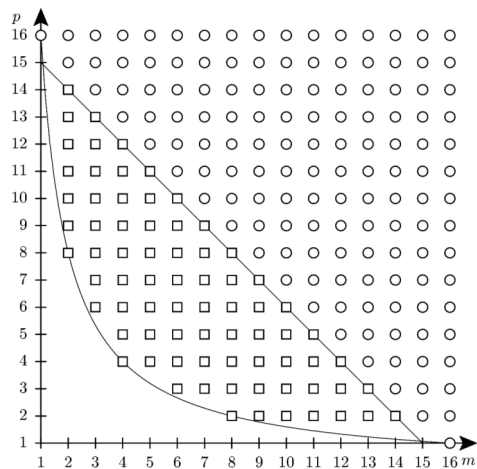
Na rys. 5 i rys. 6, które odpowiadają $n = 9$ i $n = 10$, występują na hiperboli Wanga punkty szczególne odpowiednio jeden punkt $(3,3)$ i dwa punkty $(2,5)$ i $(5,2)$. Wartości liczby Schuberta obliczone dla tych punktów wynoszą $d(3,3) = 42$ oraz $d(2,5) = d(5,2) = 42$. Powoduje to, że nie można na podstawie przytoczonych twierdzeń wywnioskować, czy odwzorowanie χ_S dla tych punktów jest generycznie surjektywne.

Rys. 5. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 9$ Rys. 6. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 10$

Rys. 7 przedstawia zbiór punktów dla $n = 12$. Na hiperboli Wanga występują w tym przypadku 4 punkty szczególne, dla których obliczono $d(2,6) = d(6,2) = 132$ i $d(3,4) = d(4,3) = 432$. Powoduje to, że dla pierwszej pary punktów odwzorowanie χ_S nie jest generycznie surjektywne, a dla drugiej problem pozostaje otwarty. Dla $n = 12$ zostało przetestowanych w literaturze [2] wiele punktów z rozpatrywanych zbiorów. Wynik testów tych punktów (zaczernionych na rysunku) był pozytywny.



Rys. 7. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 12$.
Zaczerniono punkty, dla których w [2]
z powodzeniem wyznaczono nieiteracyjnie
macierz sprzężeń zwrotnych

Rys. 8. Zbiór punktów (m,p) dla $n = 16$

Na ostatnim rys. 8 przedstawiono zbiór punktów dla $n = 16$. W tym przypadku występują trzy punkty szczególne na hiperboli Wanga. Odpowiadają im $d(2,8) = d(8,2) = 1430$ i $d(4,4) = 24024$, i liczby m oraz p są parzyste, co powoduje, że odwzorowanie χ_S w tych przypadkach nie jest generycznie surjektywne.

4. ZAKOŃCZENIE

Na podstawie analizy zbiorów, w których odpowiednie punkty określone są przez liczbę wejść i liczbę wyjść, oraz znanych z literatury twierdzeń zilustrowano pewne aspekty warunków Kimury i Wanga kompletnej przesuwalności biegunów układów liniowych za pomocą statycznych sprzężeń zwrotnych. Wiadomo jest, że w literaturze są podawane różne warunki wystarczające przesuwalności biegunów przy przyjętych założeniach generalnych. Najczęściej jednak dotyczą one przypadków szczególnych i z reguły wynikają z warunku Kimury lub warunku Wanga. Przy wykorzystaniu wymienionych warunków zostało opracowanych wiele algorytmów obliczeń macierzy statycznych sprzężeń zwrotnych \mathbf{K} , których twórcami było wielu autorów.

Na marginesie można tutaj wspomnieć o jednoetapowych algorytmach obliczeń opracowanych przez autorów tej pracy [14]. Te algorytmy obejmują cały obszar I zbiorów przedstawionych na rysunkach, to jest punktów spełniających warunek Kimury (z jednym ograniczeniem $A_o \cap A_z = \emptyset$). Umożliwiają one obliczenia zarówno dla biegunów jednokrotnych, jak i dla wielokrotnych oraz rzeczywistych i zespolonych (bez potrzeby prowadzenia obliczeń w dziedzinie liczb zespolonych).

W pewnych sytuacjach można także wykorzystać tzw. lokalną przesuwalność biegunów (local assignability), które to pojęcie wprowadzono w [19]. Polega to na przesunięciu wszystkich biegunów do odpowiednio małego sąsiedztwa każdego z nich w stosunku do położenia pierwotnego. Zazwyczaj sąsiedztwo ograniczone jest okręgiem o środku w położeniu pierwotnym danego bieguna i promieniu, który można obliczyć z określonego warunku tego typu przesuwalności. Zilustrowano to na przykładzie układu z $m = 2$, $p = 2$ i $n = 4$ w pracy [11], gdzie wyprowadzono także warunek przesuwalności i obliczono promień wspomnianego wyżej okręgu ($r_{max} = 1,0013$). Jak stąd wynika obszary, do których można przesunąć bieguny są stosunkowo niewielkie.

Na zakończenie można stwierdzić, że generalnie trudności związane z rozwiązaniem problemu przesuwania biegunów za pomocą statycznych sprzężeń zwrotnych wynikają stąd, że jak wykazał Fu [9], problem należy do klasy „NP-trudnych” (tzn. może nie być rozwiązany w czasie wielomianowym) [18].

LITERATURA

- [1] **Bachelier O., Bosche J., Mechdi D.:** On Pole Placement via Eigenstructure Assignment Approach. *IEEE Trans. On Autom. Contr.*, Vol. 51, No. 9, 2006, pp. 1554-1558.
- [2] **Bachelier O., Mehdi D.:** Non-iterative pole placement technique: A step further. *Journal of the Franklin Institute*, No. 345, 2008, pp. 267-281.
- [3] **Brockett R.W., Byrnes C.J.:** Multivariable Nyquist criteria, root loci and pole placement: a geometric viewpoint. *IEEE Trans. Autom. Contr.* AC-26, 1981, pp. 271-284.
- [4] **Byrnes C.J.:** Pole assignment by output feedback. in *Three Decades of Mathematical System Theory. Lecture Notes in Control and Inform. Sci.* 135, H. Nijmeijer and J.M.Schumacher eds., Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 31-78.
- [5] **Champetier C. and Magni J.F.:** On eigenstructure assignment by gain output feedback. *SIAM J. Contr. Optim.* Vol. 29, No. 4, 1991, pp. 848-865.
- [6] **Carotenuto L., Franze G., Muraca P.:** Some results on the genericity of the pole placement problem. *Systems and Control Letters*, Vol. 42, 2001, pp. 291-298.
- [7] **Eremenko A, Gabrielov A.:** Pole placement by static output feedback for generic linear systems. *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 41, No. 1, 2002, pp. 303-312.
- [8] **Eremenko A, Gabrielov A.:** Counterexamples to pole placement by static output feedback. *Linear Algebra and Its Applications*, 351-352, 2002, pp. 211-218.
- [9] **Fu M.** Pole placement via static output feedback is NP-hard. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 49, No 5, 2004, pp. 855-857.
- [10] **Herman R., Martin C.F.:** Applications of Algebraic Geometry to Systems Theory – Part I. *IEEE Trans. Aut. Contr.*, Vol. AC-22, No. 1, 1977, pp. 19-25.
- [11] **Jeziński E.:** Local assignability of linear time-invariant systems. *SAMS*, Vol. 16, 1994, pp. 9-15.
- [12] **Kimura H.:** Pole Assignment by Gain Output Feedback. *IEEE Trans. Autom. Contr.* Vol. 20, 1975, pp. 509-516.
- [13] **Kiritsis K.H.:** A necessary condition for pole assignment by constant output feedback. *Systems and Control Letters*. Vol. 45, 2002, pp. 317-320.
- [14] **Kuźmiński K., Krawiecki M.:** Single stage algorithms for pole placement using static output feedback. *Control and Cybernetics*, Vol. 36, No. 4, 2007, pp. 939-965.
- [15] **Roppenecker G., O'Reilly:** Parametric output feedback controller design. *Automatica* 25 (2) 1989, pp. 259-265.
- [16] **Rosenthal J., Sottile F.:** Some remarks on real and complex output feedback. *Syst. Contr. Lett.* 33, 1998, pp. 73-80.
- [17] **Rosenthal J., Willems J.C.:** Open problems in area of pole placement. In V.D. Blondel, E.D. Sontag, M. Vidyasagar, J.C. Willems (eds.), *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*. Springer Verlag. Chapter 37, 1998, pp. 181-191,
- [18] **Syrmos V.L., Abdallah C.T., Dorato P., Grigoriadis K.:** Static Output Feedback – A Survey. *Automatica* Vol. 33, No. 2, 1997, pp. 125-137.
- [19] **Tarokh M.:** Approach to pole assignment by centralised and decentralised output feedback. *IEE Proc.* 136-D, 1989, pp. 89-97.

- [20] **Wang X.A.:** Grassmanian, Central Projection and Output Feedback Pole Assignment of Linear Systems. IEEE Trans Autom. Contr., Vol. 41, No. 6, 1996, pp. 786-794.
- [21] **Willems J., Hesselink W.:** Generic properties of the pole placement problem. In Proc 7th IFAC World Congress, Helsinki, 1978, pp. 1725-1729.

DISCUSSION OF POLE ASSIGNABILITY CONDITIONS FOR LINEAR SYSTEMS USING STATIC OUTPUT FEEDBACK

Summary

The paper discusses typical pole assignability conditions for linear time invariant systems, using static output feedback. As typical sufficient assignability conditions the theorems of Kimura [12] and Wang [2] are taken under consideration. For illustration of the problem, discrete sets of points with number of inputs and outputs as coordinates are considered. This is shown for various system degree of 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 16 with marking of domains in which Kimura and Wang conditions are satisfied. Properties of subsequent domains are analyzed and for specific critical cases the Schubert number [3] is calculated for deciding if real pole placement map is generically surjective for those system dimensions.

Krzysztof Kuźmiński, Maciej Krawiecki
Technical University of Łódź, Institute of Automatic Control