Politechnika Łódzka

ZESZYTY NAUKOWE Nr 1075

DOROTA PAWLUS

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA TRÓJWARSTWOWYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH Z RDZENIEM LEPKOSPRĘŻYSTYM

ŁÓDŹ 2010

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

ZESZYTY NAUKOWE Nr 1075

ROZPRAWY NAUKOWE, Z. 399

DOROTA PAWLUS

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA TRÓJWARSTWOWYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH Z RDZENIEM LEPKOSPRĘŻYSTYM

ŁÓDŹ 2010

ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

SCIENTIFIC BULLETIN OF THE TECHNICAL UNIVERSITY
OF LODZ

BULLETIN SCIENTIFIQUE
DE L'UNIVERSITÉ POLYTECHNIQUE DE LODZ

НАУЧНЫЕ ЗАПИСКИ
ЛОДЗИНСКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

WISSENSCHAFTLICHE HEFTE
DER TECHNISCHEN UNIVERSITÄT IN LODZ

Redaktor Działu: **prof. dr hab. inż. Piotr Wodziński**

Recenzenci: **dr hab. inż. Maria Kotełko, prof. PŁ**
prof. dr hab. inż. Jerzy Zielnica

Adres Redakcji – Адрес Редакции – Editor's Office
Adresse de Redaction – Schriftleitungsadresse:

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel./fax 42-684-07-93
e-mail: a-row-1@adm.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISSN 0137-4834

Nakład 140 egz. Ark. druk. 13,0. Papier offset. 80 g, 70 x 100
Druk ukończono w październiku 2010 r.
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11

Spis treści

Streszczenie

Rozwiązanie zagadnienia ugięć warstwowych, w tym trójwarstwowych, przekładkowych płyt pierścieniowych prowadzące do oceny ich obciążeń krytycznych jest bardzo często ograniczone do rozwiązania szczególnego przypadku płyt, których postać wyboczenia jest obrotowosymetryczna. Możliwość utraty stateczności płyty poddanej obciążeniom działającym zwłaszcza na jej zewnętrzny brzeg, w postaci kilku lub nawet kilkunastu fal obwodowych odpowiadających minimalnym wartościom obciążenia krytycznego, wymaga przeprowadzenia złożonego, ogólnego rozwiązania problemu i wykorzystania metod numerycznych.

W pracy przedstawiono rozwiązanie wykorzystujące przybliżone metody ortogonalizacji i różnic skończonych dla trójwarstwowej struktury płyty złożonej z cienkich okładzin i grubszego, miękkiego rdzenia. W rozwiązaniu uwzględniono geometrycznie nieliniowe związki w opisie odkształceń warstw zewnętrznych i liniowo lepkosprężyste zależności równań konstytutywnych materiału rdzenia płyty. Wynikami obliczeń są wyznaczone wartości krytycznych obciążeń statycznych płyt i charakterystyki ugięć maksymalnych w czasie narastającego obciążenia działającego w płaszczyźnie płyty na wybrany brzeg. Wartości krytyczne czasu, obciążenia czy ugięcia określające dynamiczną odpowiedź badanej płyty wyznaczono dla przyjętego kryterium utraty stateczności dynamicznej płyty. Szczegółową analizę stanu krytycznego płyt przeprowadzono dla różnych parametrów geometrycznych, materiałowych i związanych z obciążeniem, płyt zarówno z rdzeniem sprężystym, jak i lepkosprężystym, uwzględniając wpływ intensywności zmian obciążenia i nieregularności kształtu – imperfekcji. Zwrócono uwagę, m.in. na występujące przypadki obniżania się wartości krytycznych obciążeń dynamicznych płyt poniżej minimalnej wartości krytycznych obciążeń statycznych.

Dopełnieniem prowadzonych analiz są wyniki obliczeń modeli trójwarstwowych płyt pierścieniowych z użyciem metody elementów skończonych w programie ABAQUS. Przedstawiono sposób budowy modeli MES badanych płyt charakteryzujących się dużą materiałową niejednorodnością struktury poprzecznej i różnym udziałem jej warstw składowych w przenoszeniu powstających obciążeń normalnych i stycznych. Przykładowymi obliczeniami MES potwierdzono wyniki obliczeń płyt otrzymane metodą różnic skończonych, zwrócono uwagę na zaobserwowane zmiany postaci deformacji krytycznych płyt obciążanych dynamicznie i podkreślono znaczenie analizy wytężeniowej w kompleksowej ocenie badanych płyt.

Porównując wyniki obliczeń dwóch metod: różnic i elementów skończonych na podstawie zgodności i różnic wyznaczonych wartości statycznych i dynamicznych obciążeń krytycznych modeli płyt o różnych grubościach warstwy rdzenia, sformułowano uwagi do obliczeń płyt z rdzeniem grubym kończące część badawczą pracy. Zasygnalizowano możliwość wystąpienia innych niż quasi-eulerowskich form wyboczenia dla znacznie niższych wartości obciążeń krytycznych płyt z rdzeniem grubym.

Spostrzeżenia i wnioski końcowe zawarte w podsumowaniu pracy tworzą praktyczny obraz krytycznych zachowań analizowanych płyt, a całość podjętych w pracy badań jest istotnym uzupełnieniem ciągle podejmowanej problematyki ugięć płyt o podobnych strukturach.

Wykaz oznaczeń podstawowych

r, θ – współrzędna promieniowa i kątowa biegunowego układu płyty,

r_w, r_z – wewnętrzny i zewnętrzny promień płyty,

ρ – bezwymiarowa współrzędna promienia,

ρ_w – bezwymiarowy wewnętrzny promień płyty,

h – całkowita grubość płyty,

h_1, h_3 ($h_1 = h_3 = h'$) – grubość okładziny płyty,

h_2 – grubość rdzenia,

w_o, w_d, w – ugięcie wstępne, dodatkowe i całkowite płyty,

w_{dmax} – maksymalne ugięcie dodatkowe płyty,

w_{dkr} – krytyczne ugięcie dodatkowe płyty,

ζ_o, ζ_1, ζ – bezwymiarowe ugięcie wstępne, dodatkowe i całkowite płyty,

ζ_{1max} – bezwymiarowe, maksymalne ugięcie dodatkowe płyty,

μ_1, μ_3 ($\mu_1 = \mu_3 = \mu$) – gęstość materiału okładzin,

μ_2 – gęstość materiału rdzenia,

E_1, E_3 ($E_1 = E_3 = E$) – moduł Younga materiału okładzin,

E_2 – moduł sprężystości podłużnej materiału rdzenia,

G_1, G_3 ($G_1 = G_3 = G$) – moduł Kirchhoffa materiału okładzin,

G_2 – moduł Kirchhoffa materiału rdzenia,

ν_1, ν_3 ($\nu_1 = \nu_3 = \nu$) – liczba Poissona materiału okładzin,

ν_2 – liczba Poissona materiału rdzenia,

G_2', η' – stała sprężystości i stała lepkości lepkosprężystego materiału rdzenia,

C_L, D_L, E_L, F_L – stałe materiałowe lepkosprężystego rdzenia płyty,

d_1, d_2 – liczby równe 0 lub1 określające rodzaj obciążonego brzegu płyty,

t – czas,

t^* – bezwymiarowy czas,

t_{kr} – czas krytyczny,

s – prędkość narastania obciążenia liniowego,

p – obciążenie płyty,

p^* – bezwymiarowa wielkość obciążenia płyty,

p_{kr} – krytyczne obciążenie statyczne,

p_{kr}^* – bezwymiarowa wielkość krytycznego obciążenia statycznego płyty,

p_{krdyn} – krytyczne obciążenie dynamiczne,

ϕ – funkcja naprężeń,

F – bezwymiarowa funkcja naprężeń,

$K7$, $K10$ – wybrane parametry płyty: $K7 = \frac{s}{p_{kr}}$, $K10 = \frac{r_z^2}{h^2}$,

m – liczba poprzecznych fal obwodowych wyboczenia płyty,

ξ_1, ξ_2 – liczby skalujące wielkość ugięcia wstępnego ζ_o płyty,

b – długość przedziału w metodzie różnic skończonych,

N – liczba wewnętrznych punktów dyskretyzacji,

K_d – współczynnik dynamiczny,

σ_{red} – naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera (H-M-H) w obszarze silnej deformacji okładziny płyty,

σ_{red}^{max} – maksymalne naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera (H-M-H) w okładzinie,

τ_{13} – naprężenie styczne w warstwie rdzenia płyty,

f – częstość drgań własnych płyty,

T – okres drgań własnych płyty,

k – parametr postaci drgań własnych

Oznaczenia

$y_{z,x}$ – pochodna cząstkowa określona jako: $y_{z,x} = \frac{\partial y_z}{\partial x}$

$\frac{\partial}{\partial \theta}$ – operator różniczkowy,

Skróty

MRS – metoda różnic skończonych,

MES – metoda elementów skończonych,

UU, PP, UP, PU, US, SU, PS, SP – oznaczenie sposobu podparcia brzegów płyty:
U – utwierdzenie, P – brzeg swobodnie podparty, S – brzeg swobodny.

Wstęp

„Cena, sztywność i różnorodne zastosowanie” tak bardzo zwięźle autor pracy [6] charakteryzuje zalety warstwowych struktur typu metal-pianka. Ta popularna struktura tworzy lekką, wytrzymałą konstrukcję przekładkową, zwaną również sandwiczową, w której zespolone warstwy o różnych właściwościach ich materiałów dobrze współpracującą jako całość w przenoszeniu obciążeń. Metalowo-piankowa struktura konstrukcji przekładkowej jest strukturą reologiczną wymagającą uwzględnienia w opisie jej mechaniki zmiennych w czasie właściwości przynajmniej jednego materiału warstwy – tworzywa sztucznego warstwy rdzenia. Taką konstrukcję, zwraca uwagę autor pracy [44], należy „analizować globalnie w zakresie reologii”.

Każda rzeczywista konstrukcja, w tym także konstrukcja warstwowa, przekładkowa niezależnie od jej rodzaju: belka, płyta, powłoka, poddana obciążeniom staje się układem wrażliwym na własną geometrię, rodzaj materiału, niedoskonałość kształtu, charakter i intensywność obciążenia czy wpływ dodatkowych czynników otoczenia. Jej ogólnie pojęte możliwości kształtują zadane warunki pracy. W szczególny sposób tę konstrukcyjną i strukturalną wrażliwość układu ujawnia taki rodzaj obciążenia, przy którym doznaje on przemieszczeń gwałtownych, często skokowych, przy których narażony jest na zmiany postaci kształtu – utratę stateczności.

Zachowanie się konstrukcji po zaburzeniu jej stanu równowagi, z którym ściśle związane jest pojęcie stateczności [119] i ocena wartości parametru obciążenia krytycznego przy utracie stateczności układu przez dywergencję, a także warunków dynamicznej utraty stateczności są wciąż ważnymi tematami, dla których poszukiwanie efektywnych rozwiązań inżynierskich jest zasadne.
Takiemu poszukiwaniu dla płyty pierścieniowej o przekładkowej, trójwarstwowej strukturze o cechach reologicznych została poświęcona ta praca.

1. Zagadnienia stateczności warstwowych płyt pierścieniowych w literaturze

Zagadnienia stateczności elementów konstrukcyjnych obejmują analizę statyczną i dynamiczną badanego ustroju. W obu przypadkach dąży się do wyznaczenia wartości krytycznych parametrów obciążenia dla konstrukcji rzeczywistej i obciążenia bifurkacyjnego dla konstrukcji idealnej jako jej statycznego obciążenia krytycznego [26]. Zakres problemów [3], [39] dotyczący zagadnień stateczności dynamicznej obejmuje różne zjawiska, wśród których wyodrębnione są [3]:

- niestateczności związane z wymuszeniem okresowym i rezonansem parametrycznym,
- niestateczności związane z występowaniem zewnętrznych sił niezachowawczych,
- niestateczności wynikające z wymuszeń aperiodycznych.

Ocena statecznych zachowań elementu dotyczy również analiz drgań, drgań własnych układu, drgań wzbudzonych obciążeniem dynamicznym, ograniczonych często do analizy wyłącznie drgań giętnych elementu.

Wymieniony zakres problemów stateczności i drgań układu dla konkretnego elementu płyty warstwowej: wielowarstwowej, laminatowej, a także dwuwarstwowej i trójwarstwowej, w tym szczególnie przekładkowej płyty pierścieniowej, a w niektórych przypadkach także płyty kołowej jest tematem przedstawionego przeglądu prac naukowych.

Duża część przedstawionych rozwiązań dotyczy przypadków płyt o obrotowej symetrii – płyt określanych w pracy mianem obrotowosymetrycznych i obrotowosymetrycznych rozwiązań badanego problemu. Trójwymiarowa postać płyty jest wynikiem obrotu jej przekroju poprzecznego wokół osi symetrii, a rozwiązanie problemu jest niezależne od obwodowej zmiennej kątowej [29].

Rozwiązanie zagadnienia drgań i wyboczenia dla symetrycznych i niesymetrycznych postaci laminatowej, pierścieniowej płyty równomiernie ściskanej promieniowo opisano w pracy [40]. W pracy podkreślono znaczenie asymetrycznej analizy wyboczenia tak obciążonej płyty, której minimalna wartość statycznego obciążenia krytycznego dla określonych warunków podparcia może odpowiadać postaci pofalowanej obwodowo. Rozwiązanie przeprowadzono dla nieliniowych związków geometrycznych, sprężystych oraz izotropowych warstw płyty. Przeanalizowano przypadki płyty pierścieniowej i kołowej złożonej z dwu i trzech warstw. W przypadku płyty trójwarstwowej jednakowy materiał zewnętrznych warstw płyty różni się od materiału warstwy środkowej, której grubość stanowi $\frac{1}{10}$ grubości całej płyty. Rozwiązanie sprowadzono do zagadnienia wartości własnych, wyznaczając bezwymiarowe parametry częstości drgań i obciążenia krytycznego. Dokonano licznych analiz wpływu ilorazów wymiarów płyty: grubości okładzin do całkowitej grubości płyty, wymiaru promienia wewnętrznego lub grubości całkowitej do promienia zewnętrznego płyty na wartości parametrów częstości drgań i obciążenia krytycznego. Wskazano obszary małej i dużej wrażliwości tych parametrów na zmiany wartości wielkości wymienionych i zmiany wartości bezwymiarowego współczynnika sztywności postaciowej płyty. Udowodniono znaczenie poprzecznie symetrycznego układu trzech warstw płyty, dla którego wartość obciążenia krytycznego dla zarówno obrotowosymetrycznej płyty kołowej, jak i pierścieniowej o pofalowanej postaci wyboczenia ma wartość najmniejszą. Przedstawiona praca [40] jest jedną z niewielu prac podejmujących problem asymetrycznej niestateczności statycznej płyt.

W zakresie drgań trójwarstwowych płyt pierścieniowych z lepkosprężystą warstwą środkową rozwiązania i analizy uwzględniające pofalowane obwodowo kształty postaci modalnych płyt przedstawiono w pracach [85], [10]. W rozwiązaniach wykorzystano metodę różnic skończonych. W pracy [85] badano płytę pierścieniową o ilorazie promienia wewnętrznego do zewnętrznego równym 0,2 dla trzech różnych układów podparcia brzegów: dwustronnego utwierdzenia, dwustronnego swobodnego podparcia, utwierdzenia brzegu wewnętrznego i swobodnego brzegu zewnętrznego. Cienkie okładziny są stalowe, a grubość lepkosprężystego, miękkiego rdzenia płyty waha się w zakresie od 1 do 10 grubości okładziny. W rozwiązaniu sprowadzonym do zagadnienia wartości własnych wykorzystano liniowe związki fizyczne. Wynikiem analiz jest m.in. wskazanie obrotowosymetrycznej postaci drgań płyty, dla której częstość drgań własnych płyt podpartych na obu brzegach jest najmniejsza.

W pracy [10] badaniom poddano wirujące płyty z cienkim rdzeniem o grubości mniejszej od grubości wybranej warstwy zewnętrznej płyty. Warstwy zewnętrzne są ortotropowe. Brzeg wewnętrzny płyty jest utwierdzony, a zewnętrzny jest swobodny. W ocenie wyników zwrócono uwagę m.in. na krytyczne prędkości obrotowe badanej płyty.

Częstości drgań własnych i współczynnik tłumienia trójwarstwowej płyty z rdzeniem lepkosprężystym dla różnych wartości bezwymiarowego modułu sprężystości rdzenia i dla różnych grubości warstw płyty oraz postaci drgań, metodą elementów skończonych wyznaczono w pracy [111]. Badaniom poddano przypadek płyty utwierdzonej na brzegu wewnętrznym i swobodnej na brzegu zewnętrznym. Podsumowując, zwrócono m.in. uwagę na brak poprawy właściwości tłumiących płyty kompozytowej przy zwiększaniu grubości jej lepkosprężystego rdzenia.

Podobną dyskusję wartości częstości drgań i współczynnika tłumienia dla wirującej płyty trójwarstwowej przedstawiono w pracy [114].

Problem rezonansu parametrycznego wirującej i stacjonarnej płyty trójwarstwowej o ortotropii materiałowej okładzin z lepkosprężystym rdzeniem poddanej równomiernym, periodycznie zmiennym, promieniowym obciążeniom działającym na jej brzeg zewnętrzny podjęto w pracach [9], [11]. Grubość lepkosprężystej warstwy środkowej stanowi 0,1÷0,7 warstwy zewnętrznej. Brzeg wewnętrzny jest utwierdzony, a zewnętrzny jest brzegiem swobodnym. W rozwiązaniu problemu obrotowosymetrycznego wykorzystano metodę elementów skończonych. Wynikiem analiz są obszary dynamicznej niestateczności płyty poddanej periodycznie zmiennemu obciążeniu typu: $P = P_o + P_t \cos \theta t$, wyznaczone dla różnych wartości parametrów materiałowych i geometrycznych płyty. Zauważono m.in. znaczny wpływ grubości rdzenia płyty na szerokość obszarów niestatecznych.

Podobny problem oceny obszarów obrotowosymetrycznej, dynamicznej niestateczności wirującej trójwarstwowej płyty z rdzeniem lepkosprężystym poddanej działaniu periodycznego obciążenia został podjęty w pracy [113]. Tutaj okładziny badanej płyty są sprężyste, izotropowe.

Działanie periodycznego obciążenia na brzeg ortotropowej płyty pierścieniowej w ocenie jej obrotowosymetrycznej, parametrycznej stateczności przedstawiono także w pracy [94]. Analizie szczegółowej poddano płytę dwuwarstwową o swobodnym brzegu wewnętrznym i utwierdzonym lub swobodnie podpartym brzegu zewnętrznym, obciążoną na brzegu zewnętrznym. Stwierdzono brak istotnych zmian obszarów niestateczności dla płyt o różnym ilorazie grubości jednej z warstw do całkowitej grubości płyty oraz zauważono przeciwny charakter zachowań płyt o utwierdzonym lub swobodnie podpartym brzegu zewnętrznym na zmiany wartości ilorazu wymiarów jej promieni.

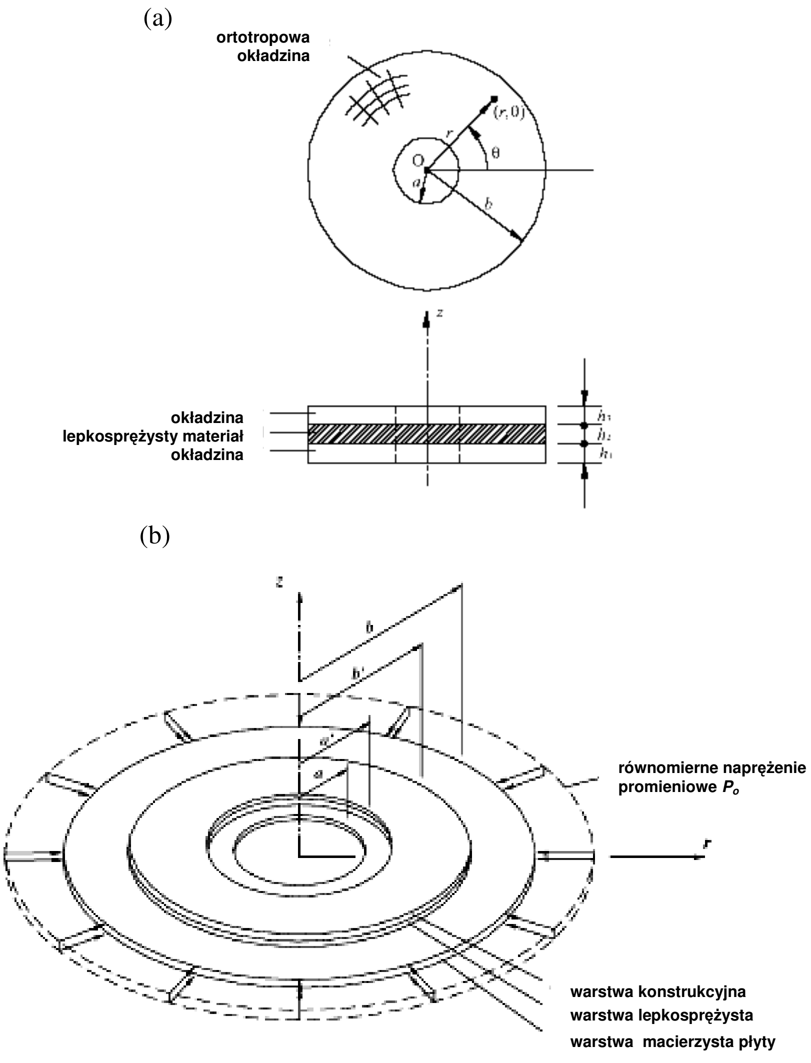
W pracy [112] pokazano zakresy dynamicznej niestateczności płyty pierścieniowej o promieniach a i b wzmocnionej dwoma dodatkowymi cienkimi warstwami pierścieniowymi o promieniach a' i b', z których środkowa jest warstwą lepkosprężystą, a zewnętrzna stanowi izotropową warstwę konstrukcyjną (rysunek 1.1b). Zewnętrzny brzeg izotropowej, głównej płyty pierścieniowej jest obciążony promieniowymi siłami periodycznie zmiennymi i jest swobodnie podparty. Analizie poddano przypadek płyty, dla której iloraz promieni $\frac{a}{b}$ wynosi 0,001, traktując ją jako płytę kołową. Efektem analizy jest stwierdzenie stabilizującego wpływu dodatkowego układu warstw: lepkosprężystej i konstrukcyjnej na strukturę płyty kołowej.

Przedstawione prace [9], [10], [11], [111], [112], [113] autorów: YR Chen, LW Chen, HJ Wang, CC Wang dotyczą określonego przypadku płyty trójwarstwowej, w której trzy warstwy to: cienka zewnętrzna warstwa konstrukcyjna, cienka, środkowa, lepkosprężysta warstwa tłumiąca i dolna, zewnętrzna, macierzysta warstwa płyty. Przykładowe schematy badanych płyt przedstawia rysunek 1.1.

Trójwarstwowa płyta kołowa o tej samej strukturze w pracy [121] jest przedmiotem analizy częstości drgań i oceny jej właściwości tłumiących. Przedstawione rozwiązanie umożliwia wyznaczenie postaci drgań poprzecznych badanej płyty. W podsumowaniu podkreślono wpływ lepkosprężystej warstwy płyty na wzrost zdolności tłumienia drgań struktury. Wyniki obliczeń wykazały jednak brak wpływu zarówno grubszej lepkosprężystej warstwy płyty, jak i wyższych postaci modalnych drgań płyty na poprawę efektu tłumienia drgań układu.

Zagadnienia drgań warstwowych płyt pierścieniowych są tematem prac [24], [46], [49], [86], [95]. W pracy [46] badaniom poddano krytyczne prędkości obrotowe laminatowej płyty pierścieniowej pod działaniem obciążenia od stacjonarnego elementu ciernego. Wyznaczono metodą elementów skończonych różne postacie modalne, stwierdzając istotny wpływ symetrycznego czy niesymetrycznego układu warstw płyty na wartość krytycznych prędkości obrotowych. Działanie elementu ciernego może powodować niestateczność płyty w zakresie jej prędkości obrotowej, a wzrost prędkości krytycznej następuje dla odpowiedniego układu materiału warstw płyty.

Badaniom drgań swobodnych ortotropowej, laminatowej płyty kołowej i pierścieniowej metodą elementów skończonych poświęcono pracę [49]. Rozważając jedynie problem obrotowosymetryczny, zwrócono uwagę na wpływ właściwości materiału, grubości płyty, układu warstw, wymiaru promieni i sposobu podparcia na wyznaczone częstości drgań. Stwierdzono m.in. wzrost podstawowej częstości drgań ze wzrostem średnicy otworu swobodnego płyty.



Rys. 1.1. Schematy płyt warstwowych przedstawione w pracach: (a) [111], (b) [112]

Metodę różnic skończonych wykorzystano w obliczeniach drgań własnych dwuwarstwowej płyty pierścieniowej utwierdzonej na obu brzegach [95]. Zbadano wpływ grubości warstw z materiałów typu: grafit-epoksyd i stal oraz aluminium-bor i stal na wartość częstości drgań własnych płyty. W obu przypadkach ze

wzrostem ilorazu grubości warstwy niestalowej do grubości całej płyty rośnie wartość częstości podstawowej drgań. Dla wyższych częstości drgań własnych płyty z materiału warstw: grafit-epoksyd i stal, i grubszej warstwy niestalowej występują znaczne spadki wartości częstości drgań płyty.
W pracy [24] analizie poddano ciekawy przypadek struktury pierścieniowej złożonej z dwóch współosiowych płyt o różnej kombinacji liczby warstw składowych. Zagadnienie rozwiązano metodą elementów skończonych. Wykazano dużą wrażliwość wartości współczynnika częstości drgań własnych na geometrię układu i ortotropię materiałową.
Obrotowosymetryczne i niesymetryczne rozwiązanie wyboczenia i drgań własnych dla wycinka laminatowej płyty pierścieniowej o ortotropowych warstwach przedstawiono w pracy [86]. Rozwiązaniem zagadnienia wartości własnych są wartości obciążeń krytycznych i częstości drgań własnych wycinka płyty podpartego na brzegach. Oceniono wpływ różnych kombinacji układów podpór, liczby warstw, wartości modułów materiałów, grubości płyty i kąta badanego wycinka na wyznaczone wartości własne. Przedstawiono liczne wyniki analiz.

Obrotowosymetryczne rozwiązania dla trójwarstwowych płyt pierścieniowych obciążonych statycznie w ich płaszczyźnie równomiernym, promieniowym ciśnieniem przedstawiono w pracach [27], [1]. Dla płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym, podpartej przesuwnie na brzegu wewnętrznym i utwierdzonej na brzegu zewnętrznym [1] oraz o różnych kombinacjach podpór na brzegach płyty [27] przedstawiono bezwymiarowe wielkości obciążenia krytycznego w zależności od ilorazu wymiarów promieni płyty i mieszanych wyrażeń geometrycznych i materiałowych. Badane płyty są izotropowe, o symetrycznym układzie trzech warstw, z miękkim rdzeniem.

Obrotowosymetryczne rozwiązanie liniowego problemu wartości własnych ortotropowej, laminatowej, średnio grubej płyty kołowej i pierścieniowej przedstawiono w pracy [15]. Płyta obciążona jest także na zewnętrznym, utwierdzonym lub swobodnie podpartym brzegu. Brzeg wewnętrzny nie jest podparty lub jest usztywniony. Zbadano wpływ symetrycznego i niesymetrycznego układu warstw płyty na wartości obciążeń krytycznych.

Problem stateczności statycznej jest także przedmiotem analizy przedstawionej w pracy [25]. Izotropowa płyta pierścieniowa o utwierdzonych lub swobodnie podpartych brzegach jest poddana działaniu równomiernego, ale promieniowo rozciągającego obciążenia na jej brzeg wewnętrzny. Dla różnych możliwych liczb średnic węzłowych opisujących postać deformacji płyty wyznaczono wartości obciążeń krytycznych, wskazując ich wartości minimalne dla płyt o różnej liczbie ilorazu promienia wewnętrznego do zewnętrznego. Przedstawiono także wyniki dla płyty jednorodnej. W każdym przypadku występuje istotny spadek wartości obciążeń krytycznych płyt ze wzrostem wartości ilorazu ich promieni.

Badaniom warstwowych, obrotowosymetrycznych płyt kołowych poświęcone są m.in. prace [45], [51], [106]. W pracy [51] analizie poddany jest przypadek płyty trójwarstwowej, a w pracach [45], [106] płyty dwuwarstwowej. Drgania wymuszone i swobodne są badane w pracy [45] dla płyty z warstw stal-aluminium, utwierdzonej na brzegu. Zachowanie płyty warstwowej odniesiono do zachowań płyt jednorodnych: stalowej i aluminiowej. Stwierdzono wzrost częstości drgań dla liczby bliskiej 0,325 określającej iloraz grubości warstwy aluminium do całkowitej grubości pyty.

Drgania swobodne również utwierdzonej na brzegu płyty są analizowane w pracy [51]. W pracy przedstawiono ogólne równania równowagi dynamicznej każdej z trzech warstw płyty: izotropowych okładzin i miękkiego rdzenia. W opisie deformacji poprzecznej wykorzystano hipotezę linii łamanej. Uwzględniono wpływ sił bezwładności w płaszczyźnie płyty.

Płyta badana w pracy [106] jest poddana działaniu równomiernego obciążenia prostopadłego do płaszczyzny stalowej lub aluminiowej warstwy płyty. Druga warstwa płyty to epoksydowo-szklany kompozyt. Przedstawione rozwiązanie i liczne wyniki dotyczą zagadnienia dużych ugięć poprzecznych płyty.

Wartą wymienienia, interesującą pracą, w której również nie jest analizowana stateczność płyty, jest praca [105]. Przedmiotem badań jest także płyta kołowa, dwuwarstwowa, o dużych ugięciach, analizowana w zakresie obciążeń plastycznych.

Rozwiązanie geometrycznie nieliniowej, obrotowosymetrycznej, laminatowej płyty pierścieniowej obciążonej prostopadle do płaszczyzny zewnętrznej laminy i na brzegu wewnętrznym lub w centrum rdzenia usztywniającego brzeg wewnętrzny płyty przedstawiono w pracy [16]. Wpływ wielkości promienia do grubości płyty dla symetrycznych i niesymetrycznych układów warstw płyty na wartość jej ugięć poprzecznych i powstałych naprężeń jest analizowany szczegółowo.

Zmienna, zmniejszająca się, grubość płyty w kierunku zewnętrznego promienia typowej, trójwarstwowej struktury płyty pierścieniowej w zagadnieniu obrotowosymetrycznego wyboczenia jest ciekawym, nowym elementem problematyki opisywanych płyt podjętym w pracy [73]. Przedstawione rozwiązanie wykorzystuje metodę różnic skończonych. Krytyczne obciążenia izotropowej płyty ściskanej na zewnętrznym, swobodnym brzegu i utwierdzonym wewnętrznym maleją wraz ze wzrostem wartości ilorazu grubości brzegu wewnętrznego do zewnętrznego płyty i wzrostem wartości bezwymiarowego parametru określającego poprzeczną, postaciową giętkość płyty. Autor pracy zwraca uwagę na ograniczenie zakresu podjętych badań do analizy jedynie przypadku obrotowosymetrycznego i poddaje w wątpliwość ewentualne założenie, że dla niesymetrycznych postaci modalnych płyt wartości obciążeń krytycznych są wyższe od otrzymanych dla postaci obrotowosymetrycznej. Sugeruje przez to konieczność ich wyznaczenia i dokładnego zbadania.

Przedstawiony, szczegółowy opis badanych w literaturze przypadków płyt pierścieniowych pokazuje rozpiętość podejmowanych dla tych płyt zagadnień dotyczących problematyki ugięć, drgań i stateczności. W tym opisie przeważa analiza płyt trójwarstwowych, w których rdzeń jest cienką, lepkosprężystą, środkową warstwą tłumiącą. Wynikiem rozwiązania problemu obrotowosymetrycznego przy wykorzystaniu metody elementów skończonych są oceniane obszary stateczne i niestateczne dynamicznych odpowiedzi płyt na wymuszenie periodyczne wyznaczane poprzez rozwiązanie odpowiedniego równania Mathieu.

Zwraca uwagę ograniczona liczba prac poświęconych badaniom asymetrycznych zachowań płyt przy statycznej utracie stateczności i praktycznie brak takich analiz dla stateczności dynamicznej. Brak jest wyczerpujących informacji o wartościach obciążeń krytycznych zarówno statycznych, jak i dynamicznych zwykłych płyt przekładkowych, w których warstwą środkową jest miękki, piankowy, znacznie grubszy od metalowych okładzin, rdzeń.

2. Wprowadzenie w temat pracy

Tematem pracy jest ocena statecznych zachowań trójwarstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem o właściwościach sprężystych lub lepkosprężystych. Rozpatrywany problem dotyczy zagadnienia stateczności statycznej i stateczności dynamicznej płyt poddanych zmiennym w czasie obciążeniom. Analiza wyznaczonych wartości obciążeń krytycznych statycznych i dynamicznych nie jest ograniczona do jedynie obrotowosymetrycznych postaci wyboczenia płyt. Zaproponowane analityczno-numeryczne rozwiązanie pozwala uzyskać wyniki dla asymetrycznych postaci utraty stateczności płyt, które w tej pracy są przedmiotem szczególnej uwagi.

Wybranym obiektem badań, szczegółowych analiz i obserwacji jest płyta o kształcie pierścienia, której przekładkową strukturę poprzeczną tworzą trzy charakterystyczne warstwy: okładziny i rdzeń.

Dobrze znana struktura typu *sandwich*, pierścieniowy kształt badanej płyty, który zmniejsza obszar jej zastosowań do przypadków szczególnych oraz stateczność, która wraz z towarzyszącymi jej rozwiązaniami stanu giętnego konstrukcji płytowych i powłokowych posiada liczne opracowania naukowe, są elementami, które traktowane osobno nie stanowią zagadnień nowych, lecz powiązane tworzą oryginalny temat podjętej pracy. Utrata stateczności płyty pierścieniowej o trójwarstwowej strukturze jest ciekawym w teoretycznym poznaniu z zakresu, np. dziedzin mechaniki i wytrzymałości materiałów, tematem, który nie jest pozbawiony ważnych cech praktycznych.

Obszar możliwych inżynierskich zastosowań pierścieniowej płyty warstwowej jest rozległy i jak wskazują autorzy prac [11], [17], [18], [19], [73], [105], [113], dotyczy wielu dziedzin: przemysłu maszynowego, energetyki jądrowej, lotnictwa czy kosmonautyki – jako przykładowe wymieniane są części turbin i reaktorów jądrowych. Możliwe są także zastosowania w elektrotechnice i inżynierii wodno-lądowej.

2.1. Cel pracy

Rozpatrywana w pracach przedstawionych w przeglądzie literatury (rozdział 1 pracy) obrotowosymetryczna niestateczność pierścieniowych płyt o warstwowej strukturze stanowi jedynie szczególny przypadek możliwej utraty ich stateczności. Występowanie praktycznie ważnych, pofalowanych w kierunku obwodu i promienia płyty postaci utraty stateczności można spodziewać się zwłaszcza dla płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu. Konieczne, w poszukiwaniu minimalnych wartości obciążeń krytycznych płyt, ujawnienie każdej możliwej postaci utraty stateczności płyty wymaga uzyskania efektywnego rozwiązania ogólnego.

Uogólnione rozwiązania zagadnień ugięć i stateczności wiotkich, ortotropowych płyt pierścieniowych w ujęciu nieliniowym zaproponowane w pracy [103] i rozwinięte w analizach stateczności dynamicznej sprężystych płyt izotropowych i ortotropowych [117], [104], [53] oraz płyt lepkosprężystych [54], [55], [56] umożliwiają dokonanie kompleksowej oceny ich obciążeń krytycznych. Numeryczne rozwiązanie nieliniowego zagadnienia zginania cienkiej płyty pierścieniowej wykorzystuje metodę ortogonalizacji do wyeliminowania zmiennej kątowej w kierunku obwodu płyty i metodę różnic skończonych do dyskretyzacji modelu płyty w kilkunastu punktach w kierunku jej promienia.

Możliwość wykorzystania, sprawdzonych w rozwiązaniach płyt jednorodnych, algorytmów i metod obliczeniowych w budowie autorskiego programu obliczeniowego do szybkiej (zwłaszcza przy obecnych mocach obliczeniowych komputerów), efektywnej oceny zarówno statycznych obciążeń krytycznych płyt warstwowych, jak i dynamicznych dla płyt z rdzeniem o właściwościach sprężystych lub lepkosprężystych pozwala na realizację szczegółowych analiz stanu krytycznego trójwarstwowych płyt pierścieniowych o obrotowosymetrycznych i pofalowanych postaciach utraty stateczności.

Realizacja ta oparta na wykorzystaniu metod rozwiązania zagadnienia zginania pierścieniowych płyt jednorodnych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznych w ogólnym rozwiązaniu ugięć płyty trójwarstwowej z rdzeniem lepkosprężystym, umiarkowanie grubym, wymaga m.in. sformułowania nowych równań podstawowych, warunków brzegowych, dodatkowych równań wiążących warstwy płyty czy zależności opisujących ich przemieszczenia dla przyjętej liczby fal obwodowych wyboczenia. Istotnie zwiększa to stopień złożoności prowadzonego dalej rozwiązania, liczbę równań różniczkowych należących do układu podstawowego, który stanowi wynik rozwiązania problemu oraz komplikuje część numeryczną zadania. Rośnie liczba zmiennych parametrów opisujących pracę płyty.

Dodatkowo, ograniczenie analiz wyboczeniowych płyt do wyników otrzymanych w drodze zaproponowanego rozwiązania nie jest wystarczające w podjętej próbie kompleksowej oceny stanu krytycznego płyty. Dopełnieniem informacji o krytycznych i wytężeniowych zachowaniach płyt są wyniki obliczeń modeli badanych płyt trójwarstwowych zbudowanych za pomocą metody elementów skończonych. Zgodności i podobieństwa, a także obserwowane różnice wyników obliczeń modeli płyt otrzymane dwoma sposobami dopiero tworzą pewną całość obrazu o stateczności trójwarstwowych płyt pierścieniowych.

Ujmując szczegółowo, celem podjętej pracy jest:

- przedstawienie ogólnego rozwiązania zagadnienia zginania płyty pierścieniowej o trójwarstwowej strukturze poprzecznej z rdzeniem lepkosprężystym,
- szczegółowa analiza stanów krytycznych i pokrytycznych płyt o pofalowanych obwodowo postaciach wyboczenia z uwzględnieniem wpływu m.in. lepkich właściwości materiału jej rdzenia, dynamiki działających obciążeń, niedoskonałości kształtu początkowego płyty,
- pokazanie obrazów deformacji, szczegółowych wartości obciążeń krytycznych i przeprowadzenie dodatkowych analiz: wytężenia i drgań, modeli płyt liczonych metodą elementów skończonych.

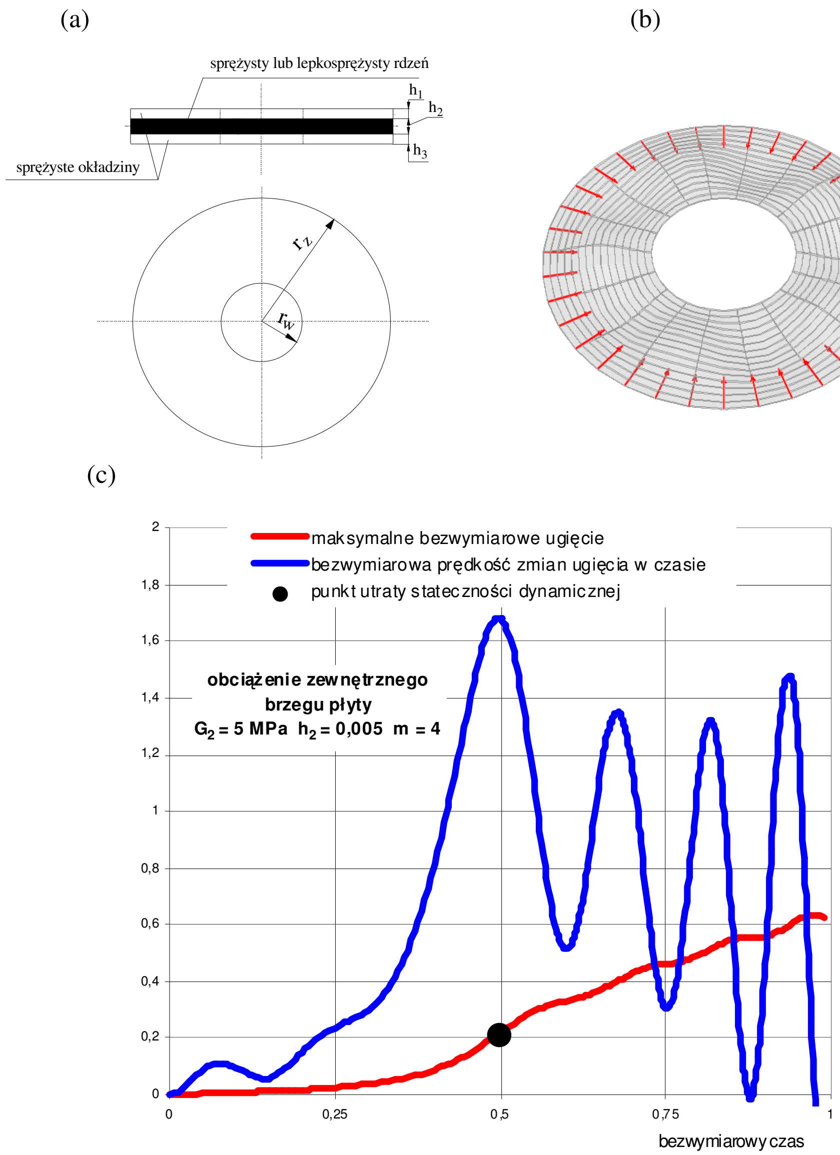
Dążenie do kompleksowego poznania problemu stateczności badanych płyt, w tym zwłaszcza problemu stateczności dynamicznej, komplikuje wieloparametrowy opis modelu obliczeniowego badanej płyty. Wzajemny wpływ poszczególnych parametrów płyty na wyniki końcowe może utrudniać formułowanie zależności ogólnych. Opisowi wyników badań płyt w poszczególnych rozdziałach pracy towarzyszy następujące sformułowanie, którego słuszność potwierdzać będą przedstawiane analizy płyt:

Wieloparametrowość modelu pierścieniowej płyty trójwarstwowej, w zagadnieniu utraty jej stateczności, ogranicza możliwość jednoznacznej oceny zachowań krytycznych struktury, a określenie wpływu poszczególnych jej parametrów na wyniki końcowe jest jedynie możliwe poprzez właściwą analizę numeryczną badanego modelu płyty.

2.2. Ujęcie tematu

Schemat modelu badanej płyty, przykładowa postać utraty jej stateczności, dynamiczne charakterystyki ugięcia i prędkości zmian ugięcia płyty, pokazane jako części (a), (b), (c) rysunku 2.1, krótko, obrazowo charakteryzują treść tematu podjętej pracy.

Rozwiązanie zagadnienia ugięć poprzecznych warstw płyty, której schemat pokazuje rysunek 2.1a, obciążonej w płaszczyźnie okładzin siłami równomiernie rozłożonymi na wybranym brzegu płyty jest opisane w rozdziałach 4 i 5 pracy.



Rys. 2.1. Schemat modelu trójwarstwowej płyty pierścieniowej (a), postać utraty stateczności (b), dynamiczne charakterystyki maksymalnego ugięcia i prędkości zmian ugięcia (c)

Przyjęte w rozwiązaniu założenia oparte o klasyczną teorię płyt warstwowych z hipotezą linii łamanej, która opisuje stan przemieszczeń poprzecznej struktury płyty oraz następujące równania podstawowe:

- równowagi dynamicznej,
- związków geometrycznych okładzin dla nieliniowej teorii płyt Kármána i związków opisujących kąty deformacji promieniowej i obwodowej rdzenia płyty,
- liniowych związków fizycznych uwzględniających w opisie lepkosprężystych właściwości materiału rdzenia zależności dla reologicznego, liniowego modelu standardowego,
- warunków brzegowych i początkowych,

są przedstawione w rozdziale 4.

Wynikiem przyjętego opisu modelu płyty jest ogólna postać równania różniczkowego (4.38) ugiętej powierzchni trójwarstwowej płyty pierścieniowej z miękkim rdzeniem lepkosprężystym. Sposób rozwiązania tej postaci równania poprzez: wykorzystanie przybliżonych metod ortogonalizacji i dyskretyzacji, przeprowadzenie wielu złożonych działań obliczeniowych, wprowadzenie dodatkowych równań równowagi warstw okładzin płyty i przyjęcie szeregu wielkości bezwymiarowych oraz koniecznych w rozwiązaniu wyrażeń funkcyjnych, jest szczegółowo opisany w rozdziale 5 pracy.

W podpunktach tego rozdziału przedstawione są postacie układów równań sprowadzone przez zastosowanie metody różnic skończonych do form umożliwiających ich rozwiązanie numeryczne w zbudowanym programie autorskim dla ogólnych, dynamicznych przypadków obciążenia płyty z rdzeniem lepkosprężystym lub sprężystym oraz dla statycznego przypadku obciążenia płyty z rdzeniem sprężystym w zagadnieniu wartości własnych.

Ocena dynamicznych odpowiedzi modelu płyty na działanie liniowo, szybko narastających w czasie obciążeń wymaga przyjęcia odpowiedniego kryterium utraty stateczności płyty. Możliwe do przyjęcia w dynamicznych zagadnieniach płyt kryteria są przedstawione w podrozdziale 3.1. W podjętej analizie płyt doznających gwałtownych przyrostów ugięć wykorzystane jest kryterium podane w pracy A. S. Wolmira [110].

Wyniki obliczeń numerycznych i szczegółowe analizy stanów krytycznych płyt przedstawia rozdział 6 pracy. W rozdziale tym scharakteryzowano badany model płyty jako reprezentatywny dla określonej grupy pierścieniowych płyt trójwarstwowych, podając szczegółowe wartości danych liczbowych. Po analizie zbieżności połączonej z doborem liczby punktów dyskretyzacji w metodzie różnic skończonych przedstawiono zasadnicze analizy stateczności statycznej i dynamicznej płyt z rozbiciem na obserwacje stanów krytycznych: płyt z rdzeniem sprężystym, płyt z rdzeniem lepkosprężystym, płyt wrażliwych na niedokładności kształtu oraz o różnym układzie podporowym i zmiennych wymiarach promieni gabarytowych, a także płyt obciążonych siłami rozciągającymi na brzegu wewnętrznym.

Dynamiczne charakterystyki płyt, których przykładem jest wykres na rysunku 2.1c i obciążenia statyczne będące wynikiem rozwiązania zagadnienia wartości własnych, wyznaczone i badane w tej pracy w szerokim zakresie możliwych postaci utraty stateczności płyt dla różnych liczb fal obwodowych obejmują wyniki obliczeń płyt przedstawionych w pracach [58], [59], [62], [64], [66], [67], [72], których rozwiązanie dotyczyło jedynie obrotowosymetrycznych postaci wyboczenia.
Obrotowosymetryczne rozwiązanie zagadnienia ugięć pierścieniowej płyty trójwarstwowej przedstawione w pracach [58], [59], [62] dla płyty z rdzeniem sprężystym i także z rdzeniem lepkosprężystym, szczegółowo analizowane w pracy [64] również dla zmodyfikowanej formy opisującej strukturę płyty jednorodnej i dwuwarstwowej oraz przedstawione w pracach [66], [67], [72] w porównawczej analizie z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych i uwzględniające [66] wpływ imperfekcji i intensywności obciążenia na wartości krytyczne, również płyt z rdzeniem lepkosprężystym [72] dotyczyło płyt dwustronnie utwierdzonych przesuwnie i obciążonych na brzegu wewnętrznym. Wybrane obserwacje i spostrzeżenia dotyczące tych przypadków płyt wsparły analizy przedstawione w rozdziale 6 pracy. Obliczenia statycznych obciążeń krytycznych płyt o postaciach obrotowosymetrycznych przedstawione w pracy [60] i obliczenia te dla uogólnionego rozwiązania płyt o pofalowanych postaciach wyboczenia opisane w pracy [68], ocenione przez porównanie wyników z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych dopełniają również tę część analizy płyt z rozdziału 6.

Obrazy postaci utraty stateczności płyt, których przykładem jest postać przedstawiona na rysunku 2.1b, wyniki obliczeń obciążeń krytycznych, wykresy warstwicowe ugięć i naprężeń krytycznych w warstwach modeli płyt zbudowanych

z elementów skończonych są przedstawione w rozdziale 7 pracy. Wykorzystując program ABAQUS, przeprowadzono liczne obliczenia modeli płyt pierścieniowych zarówno z rdzeniem sprężystym, jak i lepkosprężystym, które potwierdzają i uzupełniają wyniki obliczeń płyt przedstawione w rozdziale 6, a w niektórych przypadkach płyt sygnalizują możliwy inny charakter ich zachowań krytycznych niż wyznaczony w obliczeniach metodą różnic skończonych.
Pokazany sposób budowy modelu MES trójwarstwowej płyty, w którym nie są wykorzystane gotowe opcje programu do obliczeń warstwowej struktury, pozwala na prowadzenie obliczeń płyt warstwowych z rdzeniem kilkanaście razy grubszym od okładzin, którego materiał jest o znacznie mniejszej sztywności niż sztywność materiału okładzin. Wyniki obliczeń modeli płyt warstwowych z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym o grubości i sztywności materiału porównywalnej z parametrami materiału okładzin, w budowie których wystarczy zastosować opcję programu do podziału poprzecznego struktury na wyróżnione warstwy, przedstawiono w pracach [57], [61]. Wsparciem wyboczeniowych analiz modeli MES płyt opisanych w rozdziale 7 pracy są niektóre obserwacje i wyniki szczegółowe zawarte w wymienionych wcześniej pracach [58], [66], [67], [68].

Obserwacje zawarte w kilku pracach własnych [62], [63], [65], [69], [70], [71], w których porównane są wyniki obliczeń prowadzone dwoma metodami: różnic i elementów skończonych, modeli płyt o średniej grubości rdzenia i z rdzeniem grubym, po uzupełnieniu dodatkowymi przykładami są treścią ostatniego, badawczego rozdziału pracy – rozdziału 8. Występowanie innych niż quasi-eulerowskich form wyboczenia płyt i możliwe zbyt wysokie wartości obciążeń krytycznych płyt, których utrata stateczności ma właśnie formę globalną, obserwowane szczególnie dla płyt z rdzeniem grubym i cieńszymi okładzinami są spostrzeżeniami, które formułują praktycznie ważne, podkreślone analizą wielu przykładów obliczeniowych, uwagi zawarte w rozdziale 8 pracy.

3. Podstawy teoretyczne głównych zagadnień pracy

W przedstawieniu podstaw teoretycznych głównych zagadnień tematu pracy zwrócono uwagę na te informacje, których znaczenie w realizacji podjętych badań numerycznych jest najważniejsze.

W opisie ogólnych wiadomości z zakresu podstawowego problemu analizy, tj. zagadnienia stateczności dynamicznej płyt, wyróżniono przyjęte w ocenie stanu krytycznego płyt kryterium, zgodnie z którym możliwe jest wyznaczenie momentu utraty dynamicznej stateczności płyt i wartości obciążeń krytycznych.

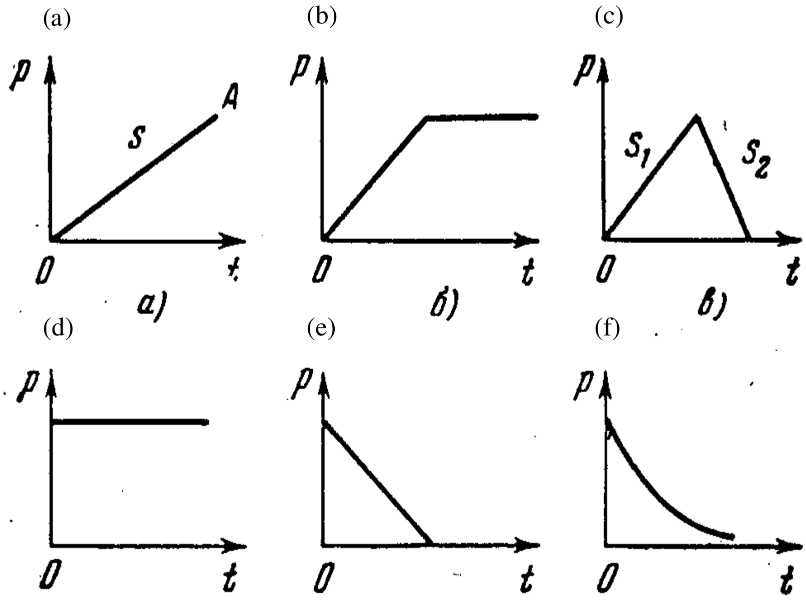
Uwzględnienie w ogólnym rozwiązaniu zagadnienia ugięć badanych płyt reologicznych właściwości materiału ich rdzenia wymaga w przyjęciu odpowiedniego równania konstytutywnego kompromisu pomiędzy dążeniem, poprzez złożony zapis matematyczny, do opisu cech materiału rzeczywistego a możliwościami analityczno-numerycznego rozwiązania problemu i uzasadnioną akceptacją stopnia przybliżenia opisu do zachowań ciała rzeczywistego.
Przyjęto związek fizyczny modelu należącego do ośrodka liniowo lepkosprężystego.

Koniecznym w realizacji tematu pracy narzędziem są zastosowane metody numeryczne. Znaczenie przedstawionego krótkiego szkicu teoretycznego wybranych metod, mimo że ograniczonego do ogólnie znanych w literaturze wiadomości elementarnych, uzasadnia rola numeryki w rozwiązaniu sformułowanego w pracy problemu i w analizach badanych modeli płyt.

3.1. Wprowadzenie do zagadnienia stateczności dynamicznej płyt

Dynamiczna odpowiedź układu na działanie zmiennego w czasie obciążenia charakteryzuje stan, w tym również stan krytyczny, badanego układu. Obrazem identyfikującym stan krytyczny układu może być odróżniająca go postać utraty stateczności. Jej poznanie w przypadku narastających w czasie przemieszczeń wstępnie ugiętego elementu (płyty) jest możliwe przez przyjęcie określonego kryterium utraty stateczności dynamicznej. Przebieg przemieszczeń punktu materialnego w funkcji czasu działania zmiennego obciążenia, określający charakterystykę dynamiczną badanego elementu konstrukcyjnego zależy od przyjętego modelu obciążenia [26]. Różnorodność modeli obciążeń dynamicznych ze względu na ich kształt, czas trwania i uzasadnienie praktyczne przedstawiono w pracach [26], [39], [110].

Spośród modeli obciążeń przedstawionych na rysunku 3.1, zamieszczonych w pracy [110], w podjętych badaniach stateczności dynamicznej trójwarstwowej płyty pierścieniowej wybrano model liniowy szybko narastających obciążeń w czasie (rysunek 3.1a), stanowiący pewien szczególny przypadek obciążenia quasi-impulsowego [26] oraz model z odcinkiem stałego w czasie przebiegu obciążenia (rysunek 3.1b) przyjęty w ocenie dynamicznych zachowań płyt z rdzeniem o właściwościach lepkosprężystych.



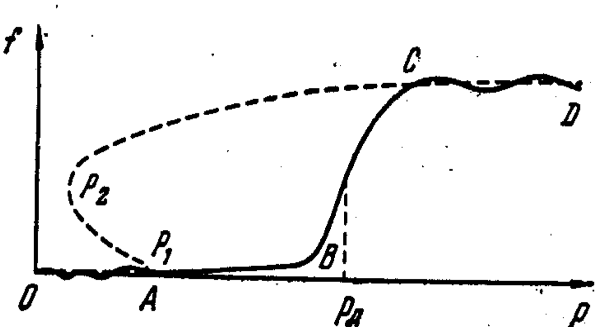
Rys. 3.1. Modele obciążeń przedstawione w pracy [110]

Liniowy wzrost obciążeń $p(t)$ w czasie t opisuje zależność:

$$p(t) = st \tag{3.1}$$

gdzie s – prędkość narastającego obciążenia.

Cechą charakterystyczną przebiegu krzywej ugięcia płyty w czasie narastającego obciążenia dynamicznego jest wystąpienie obszaru gwałtownych przyrostów ugięcia płyty – fragment BC krzywej na rysunku 3.2 [110]. Obszar ten w charakterystyce ugięcie-obciążenie lub ugięcie-czas ujawnia stan krytyczny badanej płyty.



Rys. 3.2. Charakterystyka ugięcie-obciążenie przedstawiona w pracy [110] (linia przerywana – charakterystyka dla obciążeń statycznych)

Dokładne wartości krytycznych parametrów płyty: czasu, ugięcia i obciążenia pozwala wyznaczyć kryterium dynamicznej utraty stateczności płyty przedstawione w pracy [110]. Na podstawie tego kryterium wyznacza się punkt przegięcia krzywej ugięcie-obciążenie, określający krytyczne obciążenie, czas i ugięcie płyty.

Przyjmując to kryterium w ocenie stateczności dynamicznej trójwarstwowych płyt pierścieniowych, wyznaczono czas utraty ich stateczności, wykorzystując charakterystyki ugięcie-czas. Utrata stateczności dynamicznej następuje, gdy punkt maksymalnego ugięcia dodatkowego w_d płyty osiągnie pierwsze maksimum prędkości lub gdy spełniony jest warunek:

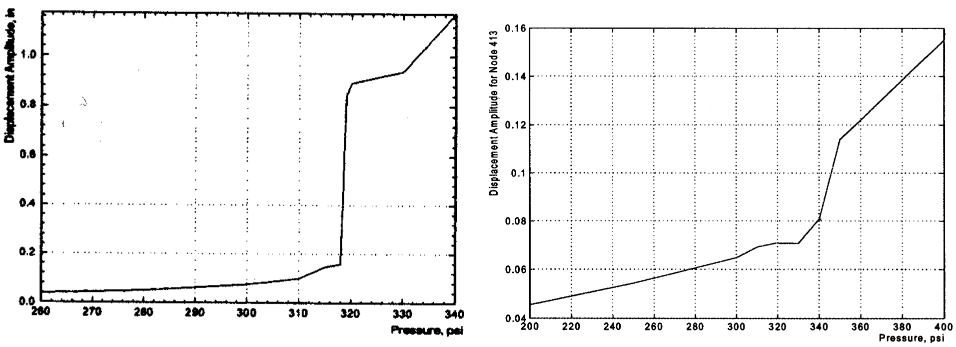
$$w_{d\,max,tt} = 0. \tag{3.2}$$

Zastosowany w pracy sposób wyznaczania wartości krytycznego czasu i maksymalnego ugięcia płyty wyjaśnia rysunek 2.1c przedstawiony w podrozdziale 2.2 pracy.

Istota kryterium opisanego w pracy [110] odpowiada kryterium Budiansky'ego i Rotha [8] zastosowanego w ocenie stateczności dynamicznej powłok cylindrycznych z imperfekcją w pracach [87], [101], [102]. Zgodnie z kryterium Budiansky'ego i Rotha dynamiczne, krytyczne obciążenie jest zdefiniowane jako obciążenie, przy którym następuje gwałtowny wzrost amplitudy ugięć – rysunek 3.3a przedstawiony w pracy [102] i rysunek 3.3b zamieszczony w pracy [101].

W tym miejscu należy podkreślić znaczenie prac B. Budiansky'ego, a także J. W. Hutchinsona, z których niektóre, jak [4], [5], [6], [7], [32], [33], [35] są wymienione, w dziedzinie badań stateczności i pokrytycznych zachowań konstrukcji rzeczywistych wrażliwych na geometryczne imperfekcje.

(a) (b)



Rys. 3.3. Charakterystyki przemieszczeniowo-obciążeniowe uzasadniające kryterium Budiansky'ego-Rotha zamieszczone w pracach: (a) [102], (b) [101]

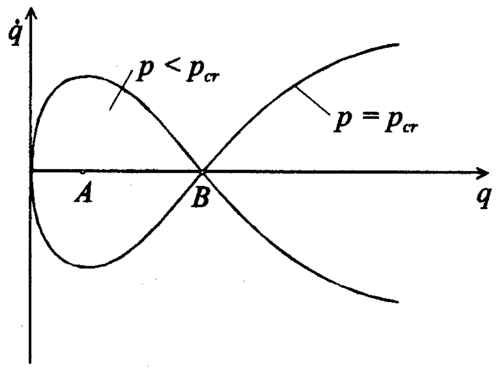
Podstawy teorii wyboczenia statycznego konstrukcji rzeczywistej, w której określony został związek między obciążeniem krytycznym konstrukcji a obciążeniem bifurkacyjnym o wartości wyższej od obciążenia rzeczywistego, przedstawił W. T. Koiter, a teorię tę na przypadki obciążenia skokowego i impulsowego uogólnili Budiansky i Hutchinson [34] (opis teorii przedstawiono, m.in. w pracach [26], [39]).

Autor pracy [102] zwraca także uwagę na kryterium wykorzystujące płaszczyznę fazową parametru, którym jest zwykle przemieszczenie q punktu do śledzenia odpowiedzi układu na działające obciążenie. Kryterium wyjaśnia rysunek 3.4 zamieszczony w pracy [102]. Autor pracy [91] kryterium to wiąże z nazwiskami Hoff-Hsu.

Innym obok kryterium Budiansky'ego-Rotha kryterium porównawczo zastosowanym w analizie wrażliwości powłoki cylindrycznej na imperfekcje [87] jest kryterium proponowane przez Simitsesa [89], [90], [91], określone w pracy [91], jako podejście związane z wykorzystaniem całkowitej energii potencjalnej (total potential energy approach). Wyróżnione są nazwiska Hoff-Simitses i praca[1)]. Istotą kryterium, obowiązującego dla układów zachowawczych, jest odniesienie krytycznych warunków do charakterystyk całkowitej energii potencjalnej układu. Ustalone są oszacowania: górne i dolne obciążeń krytycznych. Obciążenia

[1)] Simitses G.J.: Dynamic snap-through buckling of low arches and shallow spherical caps. Ph.D. Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, June 1965.

krytyczne powłok z imperfekcją wyznaczone według kryterium Simitsesa są niższe od wyznaczonych według kryterium Budiansky'ego-Rotha [87].



Rys. 3.4. Trajektoria fazowa ($\dot{q} = \frac{dq}{dt} - q$) wyjaśniająca kryterium przedstawione w pracy [102]

Oba przedstawione kryteria łączy nazwisko profesora N.J. Hoffa, który w przykładowej pracy [30] wyjaśnia istotę stateczności i niestateczności układu na przykładzie wstępnie ugiętego sprężystego słupa poddanego zaburzeniu przy działaniu słabego i mocnego obciążenia, które prowadzi do drgań w sąsiedztwie położenia równowagi lub do silnie narastających ugięć i ewentualnej degradacji elementu.

Wyznaczenie krytycznego obciążenia dynamicznego możliwe jest także dla wskazanego pewnego „średniego" punktu fragmentu BC krzywej ugięcie-obciążenie pokazanej na rysunku 3.2 lub gdy strzałka ugięcia jest równa grubości płyty lub powłoki zaznacza autor pracy [110].

Oprócz wymienionych, szczegółowy opis innych ważnych kryteriów stosowanych dla konstrukcji płytowych przedstawiono w pracy [39]. Zwrócono uwagę na:

- cztery kryteria J. Ari-Gura i S. R. Simonetty [2]: pierwsze odpowiadające kryterium Budiansky'ego-Rotha, dwa kolejne wiążące odpowiednio maksymalną wartość impulsu obciążenia ze spadkiem ugięcia lub nagłym wzrostem wartości skrócenia obciążonego brzegu płyty oraz czwarte wiążące impuls przemieszczenia obciążonego brzegu ze zmianą znaku wektora reakcji na brzegu płyty,
- kryterium D. Petry'ego i G. Fahlbuscha [74] sugerujące konieczność oceny stanu naprężeń konstrukcji i porównanie naprężeń zredukowanych do naprężenia granicznego, którym w przypadku materiałów odkształcalnych może być granica plastyczności,

– kryterium M. Kleibera, W. Kotuli i M. Sarana [37] będące quasi-bifurkacyjnym kryterium stateczności dynamicznej dla konstrukcji obciążonych skokowo, wymagające w czasie zdefiniowanym jako krytyczny czas trwania impulsu oceny wyznacznika stycznej macierzy sztywności i porównania wartości bezwzględnej najmniejszej wartości własnej sformułowanego równania zagadnienia wartości własnych z wartością bezwzględną najbliższego maksimum, jakie osiąga najmniejsza wartość własna.
– własne, T. Kubiaka – autora rozdziału 3 pracy [39] i przedstawione w pracach [42], [43] kryterium umożliwiające ocenę wielomodalnej formy utraty stateczności dynamicznej konstrukcji cienkościennych obciążonych impulsowo, oparte o analizę wartości własnych macierzy Jacobiego, tj. stycznej macierzy sztywności układu [39].

Relację wartości dynamicznego obciążenia krytycznego wyznaczonego na podstawie przyjętego kryterium utraty stateczności płyty do krytycznego obciążenia statycznego określa iloraz tych wielkości wyrażony przez współczynnik dynamiczny K_d [110] lub przyjęty w literaturze anglojęzycznej *DLF* (Dynamic Load Amplification Factor) [115].

3.2. Ogólna charakterystyka ośrodka liniowo lepkosprężystego

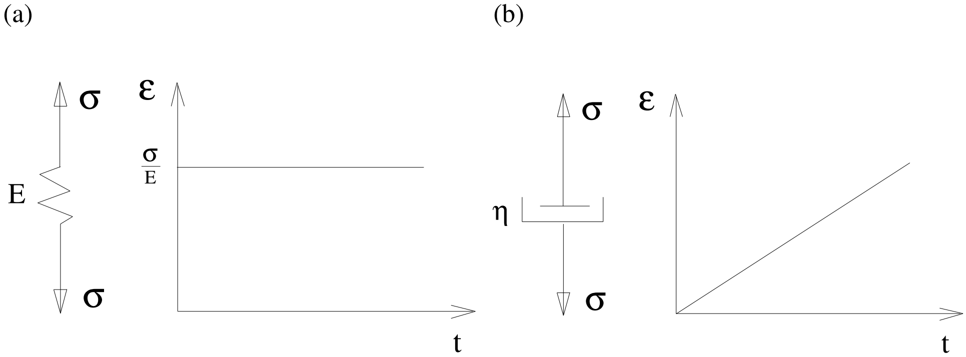
Zdolność niektórych materiałów do nagłej, sprężystej odpowiedzi na działające obciążenie i wolno narastającej w czasie deformacji jest połączeniem dwóch ich właściwości: sprężystości i lepkości. Możliwość reagowania materiału lub raczej jego modelu matematycznego w sposób opisany liniowymi zależnościami praw: ciała stałego Hooke'a i cieczy Newtona, decyduje o jego przynależności do charakterystycznego w reologii ośrodka – ośrodka liniowo lepkosprężystego – opisanego na podstawie prac [12], [13], [14], [20], [21], [22], [76], [77], [92], [93], [54].

Mechaniczną interpretacją sprężystych i lepkich zachowań materiału liniowo lepkosprężystego o zdolności do magazynowania i dyssypacji energii w procesach deformacji ciała stałego są dwa proste, jednoparametrowe modele: sprężyny i tłumika hydraulicznego, których charakterystyki odkształceniowe, powstałe w wyniku działania stałego w czasie obciążenia przedstawia rysunek 3.5, a równania stanu opisują odpowiednie zależności:

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad \sigma = \eta\dot{\varepsilon} \tag{3.3}$$

gdzie: E – stała sprężystości,

η – stała lepkości.



Rys. 3.5. Modele mechaniczne: (a) ciała Hooke'a, (b) cieczy Newtona

Łączenie przedstawionych modeli prostych w ciąg elementów związanych szeregowo i/lub równolegle tworzy określony układ – model mechaniczny – opisujący określone zachowania ciała rzeczywistego, takie jak:

a – natychmiastowe odkształcenie sprężyste,
b – pełzanie,
c – relaksację,
d – nawrót sprężysty,
e – nawrót opóźniony,
f – odkształcenie trwałe.

Wymienione zjawiska towarzyszące odkształceniu ε lub obciążeniu σ ciała reologicznego w czasie t działania stałego obciążenia σ_o lub odkształcenia ε_o jako odpowiednie fragmenty *(a, b, c, d, e, f)* krzywych $\varepsilon = f(t)$, $\sigma = g(t)$ przedstawia rysunek 3.6.

Elementarnymi modelami ośrodka liniowo lepkosprężystego są dwuparametrowe modele Maxwella i Kelvina-Voigta (pokazane na rysunku 3.7) opisujące jedynie niektóre zachowania materiału reologicznego:

<u>model Maxwella</u>

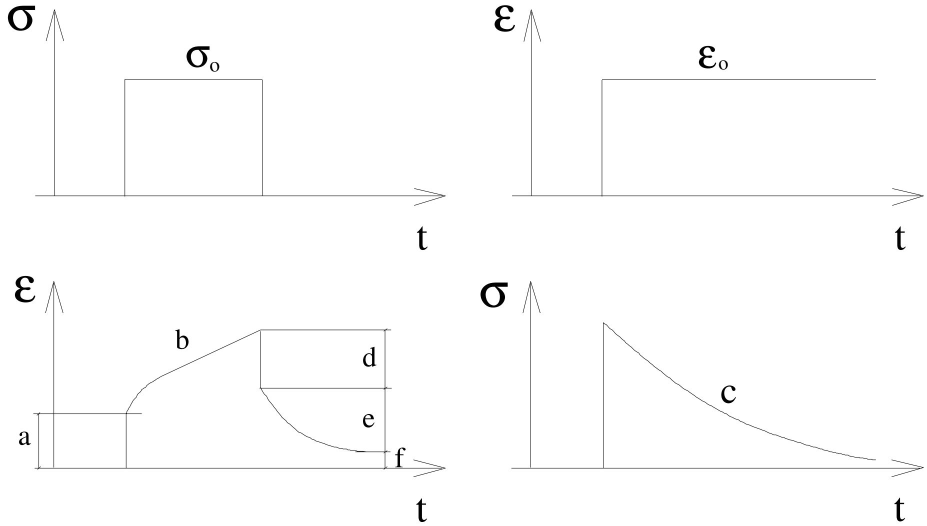
a – natychmiastowe odkształcenie sprężyste,
b – pełzanie ustalone ze stałą prędkością odkształceń,
c – relaksację,
d – nawrót sprężysty,
f – odkształcenie trwałe,

model Kelvina-Voigta

b – pełzanie z malejącą prędkością odkształceń,

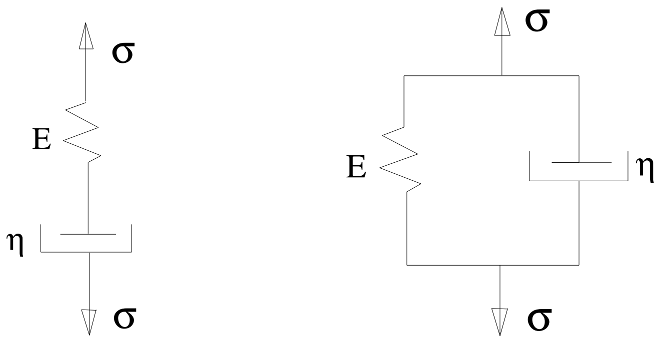
e – nawrót opóźniony.

(a) (b)



Rys. 3.6. Krzywe: (a) pełzania, (b) relaksacji

(a) (b)



Rys. 3.7. Modele dwuparametrowe: (a) Maxwella, (b) Kelvina-Voigta

Ze wzrostem liczby parametrów modeli reologicznych rośnie liczba zjawisk *(a, b, c, d, e, f)* przez nie opisywanych. Właściwości modelu są bliższe rzeczywistym zachowaniom materiału. Model opisuje jednak większa liczba parametrów, którymi są konieczne do wyznaczenia stałe: sprężystości i lepkości materiału.

Problem staje się bardziej złożony i maleje praktyczna możliwość wykorzystania takiego modelu mechanicznego do opisu zachowań materiału. Rośnie również rząd równania stanu opisującego dany model, którego ogólna postać jest następująca:

$$a\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} + a_3\dddot{\sigma} + ... = b\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} + b_3\dddot{\varepsilon} + ... \tag{3.4}$$

Równanie stanu modelu czteroparametrowego jest już rzędu drugiego i ma złożoną postać:

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} + a_2\ddot{\sigma} = b_1\dot{\varepsilon} + b_2\ddot{\varepsilon} \tag{3.5}$$

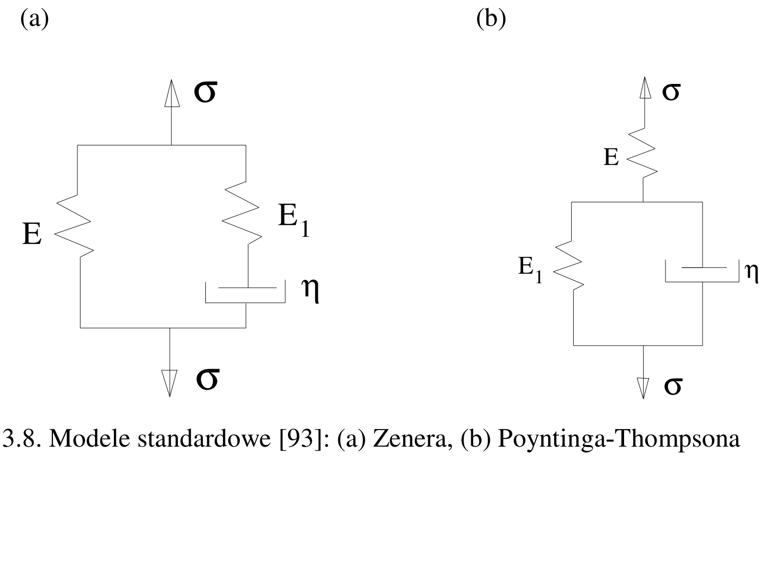
gdzie: $a_{1(2)}$, $b_{1(2)}$ – są wielkościami wyrażonymi przez odpowiednie ilorazy stałych lepkości i sprężystości elementów budujących model.

Równanie (3.5) jest równaniem stanu ogólnego modelu czteroparametrowego, w tym również modelu czteroparametrowego pierwszego rodzaju, modelu Bürgersa, zbudowanego z szeregowo połączonych modeli dwuparametrowych Maxwella i Kelvina-Voigta. Model ten opisuje wszystkie wymienione zjawiska *(a, b, c, d, e, f)*.

Zmniejszając liczbę parametrów modelu do trzech, powstaje model trójparametrowy pierwszego rodzaju, który poza zjawiskiem odkształcenia trwałego *(f)* przybliża wszystkie pozostałe możliwe zachowania rzeczywistego ciała stałego. Równanie stanu ma postać ogólną:

$$\sigma + a_1\dot{\sigma} = b\varepsilon + b_1\dot{\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Schemat budowy modelu przedstawia rysunek 3.8, który pokazuje dwa równoważne modele standardowe.



Rys. 3.8. Modele standardowe [93]: (a) Zenera, (b) Poyntinga-Thompsona

Możliwość opisu zjawisk: natychmiastowego odkształcenia sprężystego *(a)* i pełzania *(b)* występujących w procesie obciążania materiału przy stosunkowo małej liczbie niewiadomych parametrów (dwie stałe sprężystości i jedna stała lepkości) i mniej skomplikowanej budowie równania konstytutywnego (3.6) stała się powodem **do przyjęcia tego modelu** o schemacie przedstawionym w części (b) rysunku 3.8 do opisu przybliżonych zachowań reologicznych materiału pianki poliuretanowej warstwy rdzenia analizowanej w pracy płyty trójwarstwowej.

Należy jednak zaznaczyć, że dążąc do zbliżenia właściwości modelu mechanicznego do opisu zachowań ciała rzeczywistego lepszą zgodność uzyskuje się poprzez łączenie wielu elementów podstawowych i dwuparametrowych modeli, budując odpowiedni model wieloparametrowy lub tzw. model całkowy o wyznaczonej funkcji pełzania i relaksacji. Wówczas dogodną formą zapisu matematycznego czasowo-zależnych związków naprężeniowo-odkształceniowych jest postać całkowa lub różniczkowo-operatorowa.

Wykorzystując liniową zasadę Boltzmanna, której podlega ośrodek liniowo lepkosprężysty, wyrażenie określające odkształcenie ε w dowolnej chwili obserwacji t dla zmiennej niezależnej τ i $H\left(t-\tau\right)=1$ ma postać:

$$\varepsilon(t)=\int_0^t J\left(t-\tau\right)\frac{\partial\sigma\left(\tau\right)}{\partial\tau}d\tau \tag{3.7}$$

gdzie: $J\left(t-\tau\right)$ – funkcja pełzania,
$H\left(t-\tau\right)$ – funkcja Heaviside'a,
τ – czas zadania obciążenia,
t – czas obserwacji.

W ogólnym przypadku anizotropowego ośrodka liniowo lepkosprężystego całkowa postać równania konstytutywnego jest następująca:

$$\varepsilon_{ij}(t)=\int_0^t C_{ijkl}\left(t-\tau\right)\dot{\sigma}_{kl}\left(\tau\right)d\tau \tag{3.8}$$

gdzie C_{ijkl} – tensor funkcji pełzania.

Analogicznie dla dowolnej historii odkształcenia $\varepsilon(t)$ naprężenie σ w chwili obserwacji t określa zależność:

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t-\tau)\frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau}d\tau \tag{3.9}$$

gdzie $E(t-\tau)$ – funkcja relaksacji.

Różniczkowa reprezentacja równań konstytutywnych dla ośrodka liniowo lepko-sprężystego przy jednoosiowym naprężeniu sprowadza się do zależności:

$$\boldsymbol{P}\sigma = \boldsymbol{Q}\varepsilon \tag{3.10}$$

gdzie: $\boldsymbol{P}$ i $\boldsymbol{Q}$ – liniowe operatory różniczkowe:

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=0}^{n} p_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \qquad \boldsymbol{Q} = \sum_{i=0}^{m} q_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}$$

p_i, q_i – stałe charakteryzujące materiał.

Uogólnieniem równania (3.10) na stany przestrzenne jest zależność oddzielająca efekty dewiatorowe od dylatacyjnych:

$$\boldsymbol{P}_1 s_{ij}(t) = \boldsymbol{Q}_1 e_{ij}(t), \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{P}_2 \sigma_{kk}(t) = \boldsymbol{Q}_2 \varepsilon_{kk}(t) \tag{3.12}$$

gdzie: $\boldsymbol{P}_{1(2)}$, $\boldsymbol{Q}_{1(2)}$ – liniowe operatory różniczkowe.

3.3. Metody zastosowane w obliczeniach numerycznych

W obliczeniach analityczno-numerycznych przeprowadzonych w przedstawionych w pracy rozwiązaniach pierścieniowych płyt trójwarstwowych poddanych zarówno obciążeniom statycznym, jak i dynamicznym zastosowano wiele algorytmów analizy numerycznej. Są wśród nich procedury należące do tzw. algebry macierzowej zastosowane w rozwiązaniu zagadnień dynamicznych i przy obliczaniu wartości własnych statycznego problemu płyt (wymienione w podrozdziale 5.3 pracy) oraz metody przybliżone. Należą do nich, m.in. metoda ortogonalizacji Bubnowa-Galerkina zastosowana w części analitycznej ogólnego rozwiązania zagadnienia ugięć poprzecznych badanych płyt i dyskretyzacyjna metoda różnic skończonych wykorzystana do wyznaczenia układu równań różniczkowych stanowiących wynik rozwiązania części analitycznej problemu i do ich rozwiązania

poprzez numeryczne całkowanie metodą Rungego-Kutty-Gilla oraz metoda elementów skończonych przyjęta również w rozwiązaniu zagadnień statycznych i dynamicznych analizowanych płyt.
Wymienione cztery metody przybliżone są zasadniczymi elementami przedstawionych w pracy rozwiązań płyt. Ich krótka charakterystyka wprowadzająca w obszar szczególnie ważnej problematyki numerycznej podjętej w pracy zostanie przedstawiona w formie ogólnego szkicu teoretycznego dostosowanego do zakresu zastosowań w rozwiązaniach poszczególnych metod numerycznych (np. opis metody różnic skończonych ograniczono do określenia różnic skończonych funkcji jednej zmiennej). W opisie wykorzystano następujące prace: [23], [39], [47], [79], [97], [98], [99], [116], [122].

Metoda Bubnowa-Galerkina (metoda B-G) jest metodą wykorzystującą własność ortogonalnych funkcji rzeczywistych *f(x)*, *g(x)* w przedziale *(a,b)*:

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx = 0.. \tag{3.13}$$

Istotą metody B-G jest następująca zależności spełniona dla dowolnej funkcji *g(x)* [47], [39]:

$$\underset{a \le x \le b}{f(x) = 0} \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0. \tag{3.14}$$

Równanie różniczkowe o postaci:

$$L(y) = D(x), \tag{3.15}$$

przybliża się równaniem:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i L(u_i) = D(x) \tag{3.16}$$

gdzie: *L(y)* – jest operatorem różniczkowym, np. rzędu drugiego,

$L(y) = A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y,$

$L(u_i)$ – jest funkcją, którą można określić dla każdej wartości x,

a_i – są nieznanymi współczynnikami.

Liczba wyrazów szeregu n ma wpływ na dokładność rozwiązania.
Przyjmując n niezależnych funkcji $g_1, g_2, \ldots, g_n$ spełniających warunki brzegowe, po przekształceniu równania (3.16) i podstawieniu do (3.14) powstaje dla $j = 1, \ldots n$:

$$\int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} a_i L(u_i) - D(x) \right) g_j(x) dx = 0. \tag{3.17}$$

Przyjmując oznaczenia:

$$\int_a^b L(u_i) g_j(x) dx = s_{ij}, \tag{3.18}$$

$$\int_a^b D(x) g_j(x) dx = w_j \tag{3.19}$$

zależność (3.17) staje się układem n równań liniowych względem a_i, z którego współczynniki a_i są wyznaczane:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i s_{ij} = w_j \quad \text{dla} \quad j = 1,...,n. \tag{3.20}$$

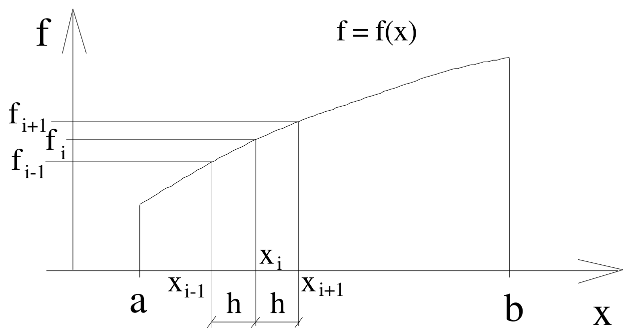
Drugą zastosowaną w pracy metodą wykorzystywaną do przybliżonego rozwiązania równań różniczkowych jest metoda różnic skończonych.

Metoda różnic skończonych polega na zastąpieniu w równaniu różniczkowym pochodnych odpowiednimi ilorazami różnicowymi i rozwiązaniu powstałego równania dyskretnego. Metoda opiera się na następujących zasadach [99]:

1. Wszystkie ciągle funkcje zadania określone są zbiorem ich wartości w punktach dyskretnych.
2. Operatory różniczkowania funkcji ciągłych zastępuje się odpowiadającymi im operatorami różnic wartości funkcji w wybranych punktach.
3. Równania różnic skończonych mają być spełnione we wszystkich punktach pokrywających obszar zmienności funkcji.

Pochodną $y' = f_i'(x_i)$ funkcji $f = f(x)$ dla $a \le x \le b$, której wartość $f_i = f(x_i)$ w i-tym punkcie podziału $x_i = a + ih$ $(i = 0,...,n)$ dla przedziału o długości $h = \frac{b-a}{n}$ (n – liczba równych części podziału przedziału) przybliża się w i-tym punkcie wartością ilorazu różnicowego – pierwszą różnicą centralną (rysunek 3.9):

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}. \tag{3.21}$$



Rys. 3.9. Funkcja f = f(x) w przedziale a ≤ x ≤ b

Drugą pochodną f_i'' funkcji $f = f(x)$ przybliża druga różnica centralna wyznaczona jako iloraz różnicy: pierwszej różnicy prawostronnej funkcji $\left(\frac{\Delta f}{h}\right)_i^P = \frac{f_{i+1} - f_i}{h}$ i pierwszej różnicy lewostronnej funkcji $\left(\frac{\Delta f}{h}\right)_i^L = \frac{f_i - f_{i-1}}{h}$ przez długość części h przedziału:

$$f_i'' \approx \frac{1}{h}\left[\left(\frac{\Delta f}{h}\right)_i^P - \left(\frac{\Delta f}{h}\right)_i^L\right]. \tag{3.22}$$

Ogólnie dla liczby n nieparzystej, n-tą różnicę centralną przybliżającą n-tą pochodną funkcji $f = f(x)$ wyraża zależność [75]:

$$f_i^n \approx \left(\frac{\Delta^n f}{h^n}\right)_i = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\Delta^n f}{h^n}\right)_i^L + \left(\frac{\Delta^n f}{h^n}\right)_i^P\right]. \tag{3.23}$$

Natomiast dla liczby n parzystej odpowiednia zależność ma postać:

$$f_i^n \approx \left(\frac{\Delta^n f}{h^n}\right)_i = \frac{1}{h}\left[\left(\frac{\Delta^{n-1} f}{h^{n-1}}\right)_i^P - \left(\frac{\Delta^{n-1} f}{h^{n-1}}\right)_i^L\right]. \tag{3.24}$$

Ocenę dokładności operatorów różnic skończonych uzyskuje się przez rozwinięcie funkcji według wzoru Taylora w otoczeniu punktu centralnego [99]. Błąd operatora różnicowego nie jest jedynym źródłem błędu rozwiązania metodą różnic skończonych. Błąd wynika z istoty metody, tj. zastąpienia funkcji ciągłej zbiorem wartości dyskretnych, czyli żądaniem spełnienia równań różniczkowych w skończonej liczbie punktów obszaru, a nie w każdym punkcie. Dodatkowe błędy wynikają z zaokrągleń arytmetycznych.

Podstawowe wymagania stawiane metodzie to:

– zbieżność metody przy zagęszczaniu siatki,
– liczba niewiadomych tworząca wektor rozwiązań musi być zgodna z liczbą równań,
– zbieżność metody rozwiązania algebraicznego układu równań powstałego z zamiany pochodnych ilorazami różnicowymi.

Rozwiązanie zagadnienia dynamicznego, w którym występują pochodne względem czasu, przeprowadza się wykorzystując dodatkową metodę iteracyjną – np. zastosowaną w tej pracy metodę Rungego-Kutty-Gilla (metoda R-K-G).

Metoda Rungego-Kutty-Gilla (metoda R-K-G) należy do metod całkowania numerycznego. Algorytm metody R-K-G opracowano na podstawie metody czwartego rzędu, zachowując w szeregu Taylora wyrazy zawierające h, h^2, h^3, h^4. Równanie charakterystyczne ma postać:

$$\mu = 1 + h\lambda + \tfrac{1}{2}h^2\lambda^2 + \tfrac{1}{6}h^3\lambda^3 + \tfrac{1}{24}h^4\lambda^4 \tag{3.25}$$

gdzie: h – krok całkowania,

λ – liczba rzeczywista.

Algorytm metody R-K-G wymaga czterokrotnego obliczania wartości funkcji w każdym kroku całkowania. Podstawą metody przy rozwiązywaniu równań różniczkowych $y' = f(x, y)$ jest wyrażenie różnicy między wartościami funkcji y w punktach x_{n+1} i x_n w postaci [23], [79]:

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{i=1}^{m} w_i k_i \tag{3.26}$$

gdzie: $k_1 = h_n f\left(x_n, y_n\right)$,

$$k_i = h_n f\left(x_n + a_i h_n, y_n + \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} k_j \right) \quad \text{dla} \quad i > 1,$$

a_i, b_{ij}, w_i – stałe,

h_n – krok całkowania, który można wybierać inny w każdym etapie obliczeń.

Z wzoru Gilla, zapobiegającemu kumulacji błędów, kolejne wartości funkcji y wyznacza się z zależności:

$$
\begin{aligned}
&k_1 = h_n f\left(x_n, y_n\right),\\
&k_2 = h_n f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{1}{2}k_1\right),\\
&k_3 = h_n f\left(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{\sqrt{2}-1}{2}k_1 + \left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2\right),\\
&k_4 = h_n f\left(x_n + h, y_n - \tfrac{1}{\sqrt{2}}k_2 + \left(1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3\right),\\
&y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_2 + 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_3 + k_4}{6}.
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Do rozpoczęcia obliczeń wystarcza warunek początkowy. Metoda ma duże znaczenie dla wyznaczania brakujących wartości wstępnych. Funkcja $O\left(h^{m+1}\right)$ jest oszacowaniem błędu metody, której rząd wyznacza liczba m.

Kolejną zastosowaną w pracy metodą do rozwiązywania równań różniczkowych opisujących problem równowagi konstrukcji, zwłaszcza konstrukcji o skomplikowanych kształtach, jest metoda elementów skończonych [39], [75], [99], [122].

Metodą elementów skończonych (MES) każdą konstrukcję można podzielić na części – elementy – połączone w węzłach. Znajomość własności mechanicznych poszczególnych elementów po ich związaniu w jedną strukturę wyznacza własności mechaniczne całej konstrukcji.

Dzieląc konstrukcję na elementy w procesie tzw. idealizacji geometrii układu, następuje naruszenie ciągłości odkształceń wzdłuż linii podziału. Wyjątkiem są punkty węzłowe, w których musi być spełniony warunek nierozdzielności – przemieszczenia wspólnych węzłów różnych elementów muszą być jednakowe i warunek równowagi – suma sił działających na elementy w ich wspólnym węźle jest równa sile zewnętrznej działającej na ten węzeł. Związanie sił oddziaływania w węzłach elementu z przemieszczeniem tych węzłów w procesie analizy elementu określa następujący związek:

$$\boldsymbol{P}^e = \boldsymbol{A}^e \boldsymbol{U} \tag{3.28}$$

gdzie: $\boldsymbol{P}^e$ – wektor, którego składowymi P_i^e są siły w węzłach elementu,

$\boldsymbol{U}$ – wektor, którego składowymi u_i są przemieszczenia w węzłach elementu,

$\boldsymbol{A}^e$ – macierz sztywności elementu.

„Zszywanie” poszczególnych elementów w całość w procesie analizy konstrukcji wyznacza macierz sztywności struktury $\boldsymbol{A}$ jako sumę macierzy sztywności $\boldsymbol{A}^e$ poszczególnych elementów po uprzednim przetransformowaniu macierzy $\boldsymbol{A}^e$ z lokalnego do globalnego układu odniesienia.

Zapis macierzowy tego etapu metody MES jest następujący:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{AU} \tag{3.29}$$

gdzie: $\boldsymbol{P}$ – wektor, którego składowymi P_i są siły zewnętrzne skupione w węzłach,

$\boldsymbol{A}$ – macierz sztywności struktury.

Wymiary przedstawionych macierzy zależą od liczby węzłów w konstrukcji i liczby składowych sił i przemieszczeń przyjętych w węźle. Wyznaczone z równania (3.29) niewiadome przemieszczenia u_i pozwalają wyznaczyć siły węzłowe P_i^e z równania (3.28) i tym samym określić stan naprężeń w elementach.

Opis stanu odkształceń elementu odbywa się dla skończonej liczby parametrów, mimo że fakt „wycięcia” elementu z układu ciągłego wyznacza ich nieskończoną liczbę. Stąd metoda elementów skończonych jest metodą przybliżoną. Ogólnie można stwierdzić, że jej dokładność rośnie gdy:

- postać funkcji opisujących stan odkształceń elementu w zależności od przemieszczeń węzłów – funkcji kształtu – dokładniej opisuje rzeczywisty stan odkształcenia elementu,
- podział na elementy jest bardziej gęsty.

Problem jest jednak złożony. Właściwy dobór funkcji kształtu poprzez warunki, które spełniają funkcje kształtu elementów, tzw. dostosowanych i elementów niedostosowanych [75], jest trudnym etapem metody MES, którego wpływ na dokładność wyników końcowych ma znaczenie zasadnicze.

Związek wyrazów macierzy odkształcenia $\boldsymbol{E}$ elementu ze składowymi wektora przemieszczenia U węzłów określa zależność:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{BU}, \tag{3.30}$$

w której macierz geometryczną ***B*** tworzą związki geometryczne i założona funkcja kształtu elementu. Najczęściej stosowanymi funkcjami kształtu w odwzorowywaniu elementu rzeczywistego są wielomiany Lagrange'a i Hermite'a. W przypadku płyt cienkich odkształcenia są określane przez funkcje ugięć i ich pochodne.
Nie ma również ogólnej zasady dokonywania podziału struktury na elementy [98]. Należy wykorzystywać naturalne granice podziału, jakie wyznacza kształt geometryczny konstrukcji, zbliżając układ siatki do spodziewanych trajektorii naprężeń głównych. Często nawet przy podziale konstrukcji na niewielką liczbę elementów uzyskuje się dość dobre przybliżenie wartości przemieszczeń.

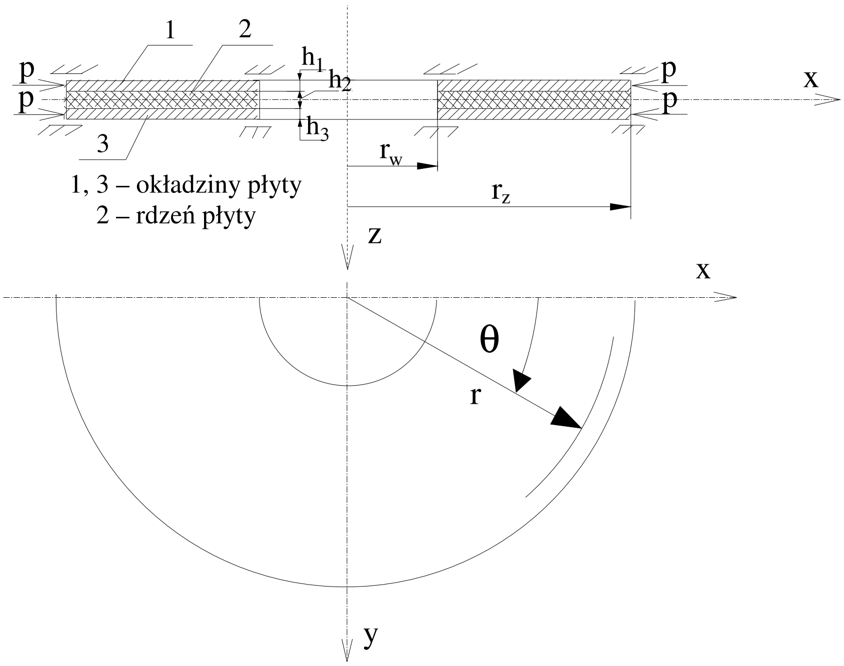
W obliczeniach MES trójwarstwowych płyt pierścieniowych przedstawionych w pracy wykorzystano program ABAQUS. Modele płyt zbudowano z elementów powłokowych i bryłowych – dokładny opis przedstawiono w rozdziale 7, podrozdział 7.1 pracy. W obliczeniach całek w programie ABAQUS wykorzystany jest wzór Simpsona i kwadratura Gaussa [29].

4. Trójwarstwowa płyta pierścieniowa – równania podstawowe

Rozwiązanie zagadnienia ugięć trójwarstwowej płyty pierścieniowej wykorzystuje założenia klasycznej teorii płyt warstwowych dotyczące stanu przemieszczeń poprzecznej struktury płyty w postaci linii łamanej i występowania naprężeń normalnych w przekrojach poprzecznych okładzin i naprężeń stycznych w rdzeniu płyty [109]. Założenia przyjęte w rozwiązaniu [31], [39], [96] są założeniami obowiązującymi dla płyt izotropowych i jednorodnych w odniesieniu do cienkich warstw okładzin płyty i warstwy rdzenia:

- grubość poszczególnych warstw płyty jest stała, a grubość całej płyty jest wielokrotnie mniejsza od jej wymiarów gabarytowych,
- materiał okładzin płyty jest liniowo sprężysty, a rdzenia liniowo sprężysty lub lepkosprężysty,
- w przekrojach poprzecznych okładzin występują naprężenia normalne, stan błonowy sumuje się ze stanem zgięciowym, rdzeń przenosi naprężenia ścinające, a deformacja przekroju płyty ma postać linii łamanej,
- rdzeń zapewnia niezmienny odstęp okładzin,
- warstwy płyty są związane, między nimi nie występuje poślizg,
- przekroje poprzeczne okładzin po odkształceniu pozostają płaskie, obowiązuje hipoteza Kirchhoffa-Love'a – punkty leżące przed obciążeniem na prostej normalnej do powierzchni środkowej po odkształceniu również pozostają na normalnej do ugiętej powierzchni środkowej,
- naprężenia normalne w przekrojach równoległych do powierzchni środkowej okładzin płyty są pomijalnie małe w stosunku do naprężeń promieniowych, obwodowych i stycznych w przekrojach poprzecznych okładzin, pominięte są również składowe stanu odkształcenia γ_{rz}, $\gamma_{\theta z}$, ε_z,
- odkształcenia okładzin ε_r, ε_θ, $\gamma_{r\theta}$ (podrozdział 4.2 pracy) płyty opisują nieliniowe związki geometryczne teorii płyt Kármána,
- ugięcia wstępne i dodatkowe poszczególnych warstw płyty są jednakowe.

Zagadnienie rozwiązano, pomijając zjawisko udarowego obciążenia płyty występujące, gdy obciążenie działa w ciągu $10^{-4} \div 10^{-6}$ sekundy [110]. Nie uwzględniono sił bezwładności działających w płaszczyźnie środkowej płyty. Schemat analizowanej płyty przedstawia rysunek 4.1.



Rys. 4.1. Schemat trójwarstwowej płyty pierścieniowej

4.1. Równania równowagi dynamicznej

Równania równowagi dynamicznej opisują zależności między siłami wewnętrznymi, ustalone dla każdej z warstw elementarnego wycinka płyty pierścieniowej o wymiarach, *dr*, *rdθ,* pokazanego na rysunku 4.2:

warstwa 1

$$\frac{M_{r1} - M_{\theta 1}}{r} + M_{r1,r} + \frac{1}{r} M_{r\theta 1,\theta} - Q_{r1} + \frac{h_1}{2}\tau_{r1} = 0, \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{r} M_{\theta 1,\theta} + \frac{2}{r} M_{r\theta 1} + M_{r\theta 1,r} - Q_{\theta 1} + \frac{h_1}{2}\tau_{\theta 1} = 0, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &\left(T_{r\theta 1} \cdot w_{,r}\right)_{,r} + \left(T_{r\theta 1} \cdot w_{,\theta}\right)_{,r} + \left(r \cdot N_{r1} \cdot w_{,r}\right)_{,r} + \frac{1}{r}\left(N_{\theta 1} \cdot w_{,\theta}\right)_{,\theta} + \\ &+ Q_{\theta 1,\theta} + \left(r \cdot Q_{r1}\right)_{,r} + r \cdot \tau_{r1} \cdot w_{,r} + \tau_{\theta 1} \cdot w_{,\theta} = h_1 \cdot r \cdot \mu_1 \cdot w_{d,tt} \end{aligned}, \tag{4.3}$$

warstwa 2

$$-Q_{r2}+\frac{h_2}{2}\tau_{r1}+\frac{h_2}{2}\tau_{r3}=0, \tag{4.4}$$

$$-Q_{\theta 2}+\frac{h_2}{2}\tau_{\theta 1}+\frac{h_2}{2}\tau_{\theta 3}=0, \tag{4.5}$$

$$\begin{gathered}Q_{\theta 2,\theta}+\left(r\cdot Q_{r2}\right)_{,r}-r\cdot\tau_{r1}\cdot w_{,r}+r\cdot\tau_{r3}\cdot w_{,r}+\\ -\tau_{\theta 1}\cdot w_{,\theta}+\tau_{\theta 3}\cdot w_{,\theta}=h_2\cdot r\cdot\mu_2\cdot w_{d,tt}\end{gathered}, \tag{4.6}$$

warstwa 3

$$\frac{M_{r3}-M_{\theta 3}}{r}+M_{r3,r}+\frac{1}{r}M_{r\theta 3,\theta}-Q_{r3}+\frac{h_3}{2}\tau_{r3}=0\,, \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{r}M_{\theta 3,\theta}+\frac{2}{r}M_{r\theta 3}+M_{r\theta 3,r}-Q_{\theta 3}+\frac{h_3}{2}\tau_{\theta 3}=0, \tag{4.8}$$

$$\begin{gathered}\left(T_{r\theta 3}\cdot w_{,r}\right)_{,\theta}+\left(T_{r\theta 3}\cdot w_{,\theta}\right)_{,r}+\left(r\cdot N_{r3}\cdot w_{,r}\right)_{,r}+\frac{1}{r}\left(N_{\theta 3}\cdot w_{,\theta}\right)_{,\theta}+\\ +Q_{\theta 3,\theta}+\left(r\cdot Q_{r3}\right)_{,r}-r\cdot\tau_{r3}\cdot w_{,r}-\tau_{\theta 3}\cdot w_{,\theta}=h_3\cdot r\cdot\mu_3\cdot w_{d,tt}\end{gathered} \tag{4.9}$$

gdzie: $N_{r1(3)}, N_{\theta 1(3)}, T_{r\theta 1(3)}$ – jednostkowe siły normalne: promieniowe, obwodowe i styczne działające w okładzinach płyty,

$Q_{r1(2,3)}, Q_{\theta 1(2,3)}$ – jednostkowe siły tnące,

$M_{r1(3)}, M_{\theta 1(3)}$ – jednostkowe momenty zginające: promieniowy i obwodowy działające w okładzinach,

$M_{r\theta 1(3)}$ – jednostkowy moment skręcający działający w okładzinach,

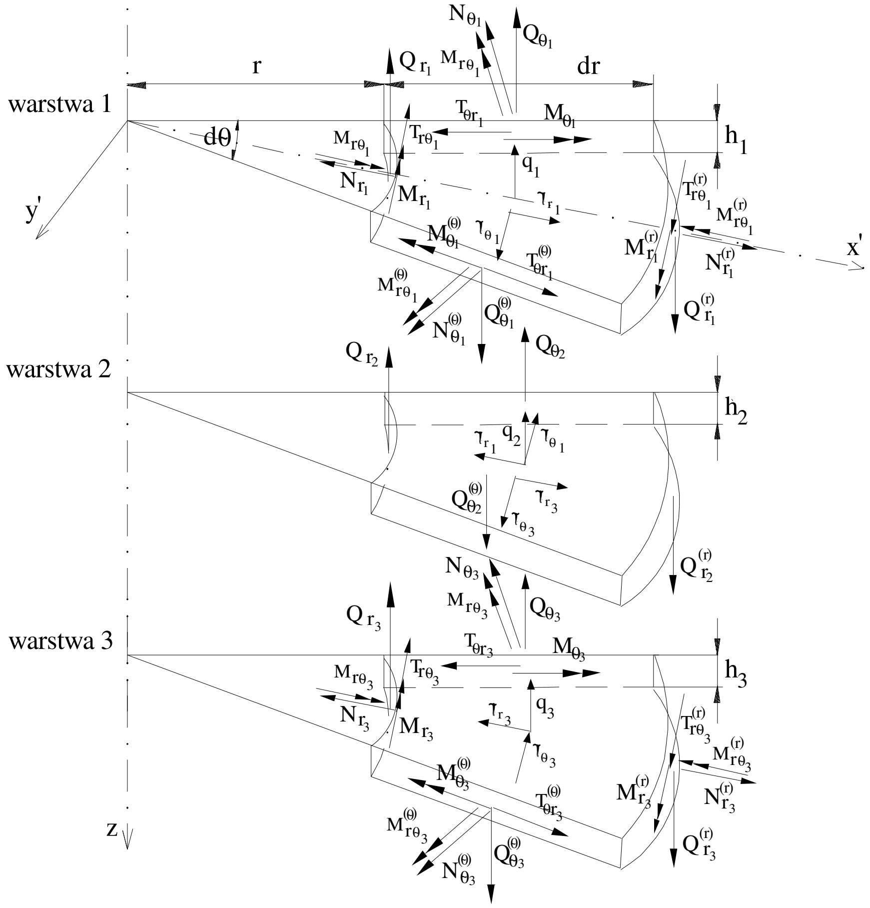
$\tau_{r1(3)}, \tau_{\theta 1(3)}$ – promieniowe i obwodowe naprężenia ścinające w okładzinach,

w, w_d – całkowite i dodatkowe ugięcie płyty,

r – promień płyty,

$h_{1(3)}$, h_2 – grubość okładzin i rdzenia płyty,

$\mu_{1(3)}$, μ_2 – gęstość materiału okładzin i rdzenia.



Rys. 4.2. Układ sił działających na poszczególne warstwy elementarnego wycinka płyty

Wielkości zaznaczone na rysunku 4.2 z indeksem górnym *(θ)* lub *(r)* opisują następujące siły i momenty przekrojowe:

$$Q^{(r)}_{r1(2,3)} = Q_{r1(2,3)} + Q_{r1(2,3),r}\,dr \qquad Q^{(\theta)}_{\theta1(2,3)} = Q_{\theta1(2,3)} + Q_{\theta1(2,3),\theta}\,d\theta$$

$$N^{(r)}_{r1(3)} = N_{r1(3)} + N_{r1(3),r}\,dr \qquad N^{(\theta)}_{\theta1(3)} = N_{\theta1(3)} + N_{\theta1(3),\theta}\,d\theta$$

$$T^{(r)}_{r\theta1(3)} = T_{r\theta1(3)} + T_{r\theta1(3),r}\,dr \qquad T^{(\theta)}_{\theta r1(3)} = T_{\theta r1(3)} + T_{\theta r1(3),\theta}\,d\theta$$

$$M^{(r)}_{r1(3)} = M_{r1(3)} + M_{r1(3),r}\,dr \qquad M^{(\theta)}_{\theta1(3)} = M_{\theta1(3)} + M_{\theta1(3),\theta}\,d\theta$$

$$M^{(r)}_{r\theta1(3)} = M_{r\theta1(3)} + M_{r\theta1(3),r}\,dr \qquad M^{(\theta)}_{r\theta1(3)} = M_{r\theta1(3)} + M_{r\theta1(3),\theta}\,d\theta$$

Jednostkowe siły bezwładności $q_{1(2,3)}$ określają zależności: $q_{1(2,3)} = \mu_{1(2,3)} h_{1(2,3)} w_{d,tt}$.

4.2. Związki geometryczne

Rysunek 4.3 przedstawia stan przemieszczeń płyty w dwóch kierunkach: promieniowym i obwodowym.

Odkształcenia powierzchni środkowej okładzin płyty opisują równania geometryczne nieliniowej teorii płyt Kármána:

$$\varepsilon_r = u_{,r} + \frac{1}{2}\left(w_{d,r}\right)^2, \tag{4.10}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} v_{,\theta} + \frac{1}{2r^2}\left(w_{d,\theta}\right)^2, \tag{4.11}$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} u_{,\theta} + v_{,r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} w_{d,r} w_{d,\theta}, \tag{4.12}$$

gdzie: ε_r, ε_θ – składowe odkształcenia płyty w kierunku promieniowym i obwodowym,

$\gamma_{r\theta}$ – kąt odkształcenia postaciowego w płaszczyźnie płyty.

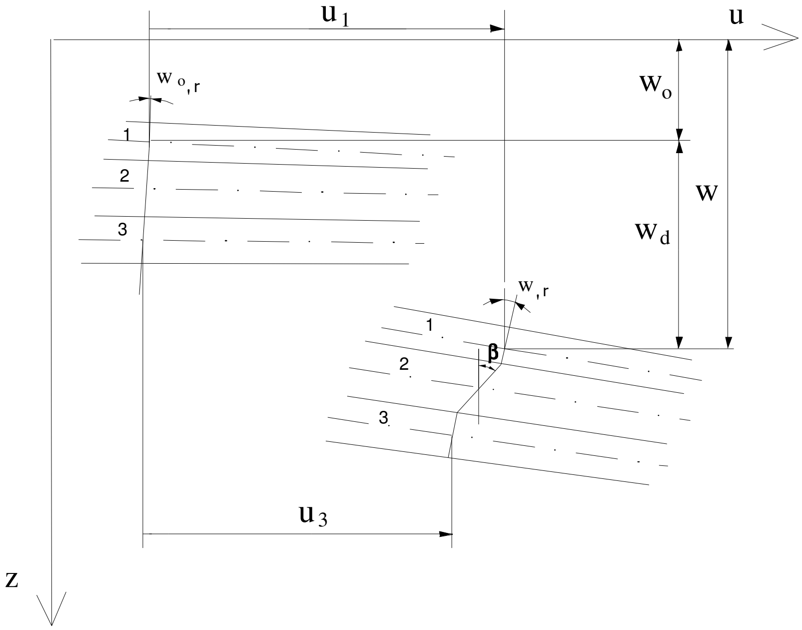
Odkształcenia rdzenia płyty opisują dwa kąty β i α wyrażone następującymi zależnościami uwzględniającymi ugięcie wstępne w_o płyty:

$$\beta = \frac{u_1 - u_3}{h_2} - \frac{1}{2}\frac{h_1 + h_3}{h_2} w_{d,r} + w_{o,r}, \tag{4.13}$$

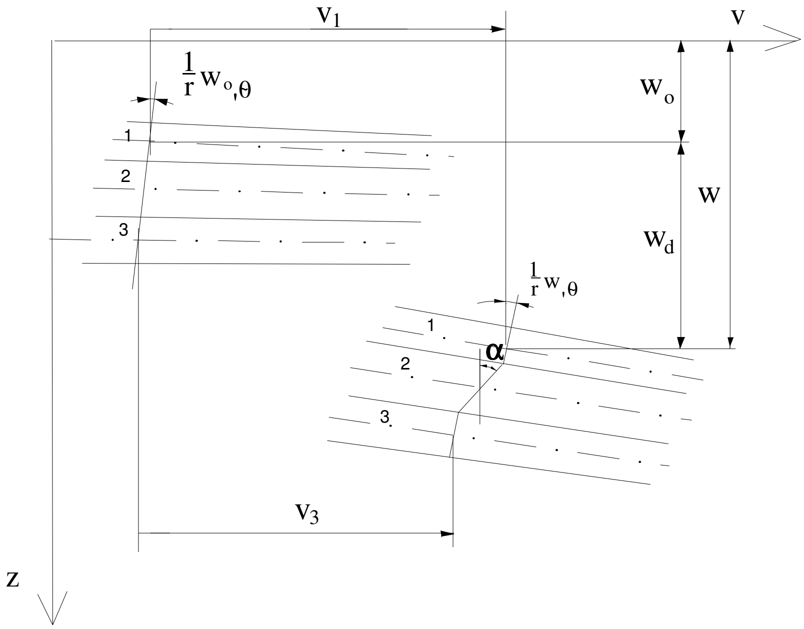
$$\alpha = \frac{v_1 - v_3}{h_2} - \frac{1}{2r}\frac{h_1 + h_3}{h_2} w_{d,\theta} + \frac{1}{r} w_{o,\theta} \tag{4.14}$$

gdzie: $u_{1(3)}$, $v_{1(3)}$ – przemieszczenia punktów płaszczyzny środkowej okładzin płyty w kierunku jej promienia i obwodu.

(a)



(b)



Rys. 4.3. Przemieszczenia warstw płyty w kierunkach: (a) promieniowym, (b) obwodowym

4.3. Związki fizyczne

Liniowe związki fizyczne okładzin płyty określają równania uogólnionego prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężeń:

$$\sigma_{r_i} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left(\varepsilon_{r_i} + \nu_i \varepsilon_{\theta_i}\right), \tag{4.15}$$

$$\sigma_{\theta_i} = \frac{E_i}{1-\nu_i^2}\left(\varepsilon_{\theta_i} + \nu_i \varepsilon_{r_i}\right), \tag{4.16}$$

$$\tau_{r\theta_i} = G_i \gamma_{r\theta_i} \tag{4.17}$$

gdzie i – indeks okładziny: i = 1 górnej, i = 3 dolnej.

Na podstawie związków sił i momentów przekrojowych z naprężeniami wyznacza się następujące zależności na siły i momenty przekrojowe okładzin płyty:

$$N_{r_i} = \sigma_{r_i} h_i, \tag{4.18}$$

$$N_{\theta_i} = \sigma_{\theta_i} h_i, \tag{4.19}$$

$$T_{r\theta_i} = \tau_{r\theta_i} h_i, \tag{4.20}$$

$$M_{r_i} = -D_i \left[w_{d,rr} + \nu_i \left(\frac{1}{r} w_{d,r} + \frac{1}{r^2} w_{d,\theta\theta} \right) \right], \tag{4.21}$$

$$M_{\theta_i} = -D_i \left(\frac{1}{r^2} w_{d,\theta\theta} + \frac{1}{r} w_{d,r} + \nu_i \; w_{d,rr} \right), \tag{4.22}$$

$$M_{r\theta_i} = -2D_{r\theta_i} \left(\frac{w_d}{r} \right)_{,r\theta} \tag{4.23}$$

gdzie: $D_i = \dfrac{E_i h_i^3}{12\left(1-\nu_i^2\right)}$, $D_{r\theta_i} = \dfrac{G_i h_i^3}{12}$ – sztywności płytowe okładzin.

Liniowe związki fizyczne dla rdzenia płyty wyrażają zależności:

$$\tau_{rz_2} = \tilde{G}_2 \gamma_{rz_2}, \tag{4.24}$$

$$\tau_{\theta z_2} = \tilde{G}_2 \gamma_{\theta z_2}, \tag{4.25}$$

w których moduł sprężystości postaciowej $\tilde{G}_2$ materiału rdzenia wyrażony jest przez różniczkową postać równania konstytutywnego przyjętego modelu standardowego ośrodka liniowo lepkosprężystego (opis podrozdział 3.2 pracy) – rysunek 4.4:

$$\tilde{G}_2\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{O_1\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)}{O_2\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)} \tag{4.26}$$

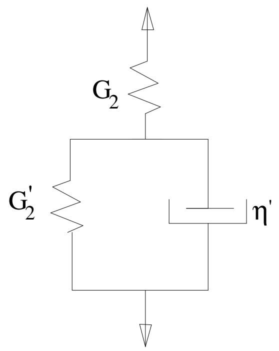
gdzie: O_1, O_2 – operatory zapisane zależnościami:

$$O_1\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)=C_L+D_L\tfrac{\partial}{\partial t}, \qquad O_2\left(\tfrac{\partial}{\partial t}\right)=E_L+F_L\tfrac{\partial}{\partial t},$$

C_L, D_L, E_L, F_L – wielkości wyrażone przez stałe sprężystości G_2 i $G_2{}'$ i stałą lepkości η' lepkosprężystego materiału rdzenia [92]:

$$C_L=\frac{G_2G_2{}'}{G_2+G_2{}'}, \quad D_L=\frac{\eta' G_2}{G_2+G_2{}'}, \quad E_L=1, \quad F_L=\frac{\eta'}{G_2+G_2{}'}, \tag{4.27}$$

$\frac{\partial}{\partial t}$ – operator różniczkowy.



Rys. 4.4. Model standardowy lepkosprężystego rdzenia płyty

Promieniowe i obwodowe odkształcenia postaciowe γ_{rz2}, $\gamma_{\theta z2}$ rdzenia płyty określają zależności:

$$\gamma_{rz2}=u_{2,z}^{(z)}+w_{d,r}, \tag{4.28}$$

$$\gamma_{\theta z2}=v_{2,z}^{(z)}+\frac{1}{r}w_{d,\theta} \tag{4.29}$$

gdzie: $u_2^{(z)}$ i $v_2^{(z)}$ są promieniowym i obwodowym przemieszczeniem punktów odległych o z od powierzchni środkowej rdzenia płyty:

$$u_2^{(z)} = u_2 - z \cdot \beta + z \cdot w_{o,r}, \qquad v_2^{(z)} = v_2 - z \cdot \alpha + z \frac{1}{r} w_{o,\theta}.$$

4.4. Równanie różniczkowe ugiętej powierzchni płyty trójwarstwowej

Promieniową Q_{r2} i obwodową $Q_{\theta 2}$ siłę tnącą wyrażają zależności: $Q_{r2} = \tau_{rz2} h_2$ i $Q_{\theta 2} = \tau_{\theta z2} h_2$, które po uwzględnieniu związków (4.13), (4.14), (4.24), (4.25) i (4.28), (4.29) przyjmują dla poprzecznie symetrycznej geometrii struktury płyty, tj. dla $h_1 = h_3 = h'$ następującą postać:

$$Q_{r2} = \tilde{G}_2 \left(\delta + H' \ w_{d,r} \right), \tag{4.30}$$

$$Q_{\theta 2} = \tilde{G}_2 \left(\gamma + H' \ \frac{1}{r} w_{d,\theta} \right) \tag{4.31}$$

gdzie: $\delta = u_3 - u_1$, $\gamma = v_3 - v_1$, $H' = h' + h_2$.

Wypadkowe siły tnące Q_r, Q_θ są odpowiednimi sumami tnących sił promieniowych $Q_{r1(2,3)}$ i obwodowych $Q_{\theta 1(2,3)}$, wyznaczonych z równań (4.1), (4.4), (4.7) i (4.2), (4.5), (4.8) obciążających poszczególne warstwy płyty:

$$\begin{aligned} Q_r = & -N_1 w_{d,rrr} - \frac{N_1}{r} w_{d,rr} + \frac{N_1}{r^2} w_{d,r} - \frac{N_2}{r^2} w_{d,r\theta\theta} + \frac{N_1 + N_2}{r^3} w_{d,\theta\theta} + \\ & + \tilde{G}_2 \left(\delta + H' w_{d,r} \right) \frac{H'}{h_2}, \end{aligned} \tag{4.32}$$

$$Q_\theta = -\frac{N_1}{r^3} w_{d,\theta\theta\theta} - \frac{N_1}{r^2} w_{d,\theta r} - \frac{N_2}{r} w_{d,\theta rr} + \tilde{G}_2 \left(\gamma + H' \frac{1}{r} w_{d,\theta} \right) \frac{H'}{h_2} \tag{4.33}$$

gdzie: $N_1 = D_1 + D_3$, $N_2 = 2\left(D_{r\theta 1} + D_{r\theta 3} \right) + D_1 \nu_1 + D_3 \nu_3$.

Po dodaniu składników równań (4.3), (4.6), (4.9) otrzymuje się równanie uwzględniające wypadkowe siły tnące Q_r, Q_θ i siły błonowe N_r, N_θ, $T_{r\theta}$:

$$\left(T_{r\theta} w_{,r} \right)_{,\theta} + \left(T_{\theta r} w_{,\theta} \right)_{,r} + \left(r N_r w_{,r} \right)_{,r} + \frac{1}{r} \left(N_\theta w_{,\theta} \right)_{,\theta} + Q_{\theta,\theta} + \left(r Q_r \right)_{,r} = M \cdot r \cdot w_{d,tt} \tag{4.34}$$

gdzie $M = 2h' \mu + h_2 \mu_2$.

Wypadkowe siły błonowe N_r, N_θ, $T_{r\theta}$ stanowiące sumy sił składowych okładzin:

$N_r = N_{r1} + N_{r3}$, $N_\theta = N_{\theta 1} + N_{\theta 3}$, $T_{r\theta} = T_{r\theta 1} + T_{r\theta 3}$ są wyrażone przez funkcję naprężeń Airy'ego $\Phi(r,\theta,t)$:

$$N_r = 2h'\left(\frac{1}{r}\Phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\Phi_{,\theta\theta}\right), \tag{4.35}$$

$$N_\theta = 2h'\,\Phi_{,rr}, \tag{4.36}$$

$$T_{r\theta} = 2h'\left(\frac{1}{r^2}\Phi_{,\theta} - \frac{1}{r}\Phi_{,r\theta}\right). \tag{4.37}$$

Wyrażając wielkości Q_r, Q_θ, N_r, N_θ, $T_{r\theta}$ występujące w równaniu (4.34) za pomocą zależności (4.32), (4.33), (4.35), (4.36), (4.37), otrzymuje się podstawowe równanie różniczkowe opisujące ugięcie analizowanej płyty warstwowej:

$$\begin{aligned}
&N_1 w_{d,rrrr} + \frac{2N_1}{r} w_{d,rrr} - \frac{N_1}{r^2} w_{d,rr} + \frac{N_1}{r^3} w_{d,r} + \frac{N_1}{r^4} w_{d,\theta\theta\theta\theta} + \frac{2(N_1+N_2)}{r^4} w_{d,\theta\theta} + \\
&+ \frac{2N_2}{r^2} w_{d,rr\theta\theta} - \frac{2N_2}{r^3} w_{d,r\theta\theta} + \\
&- \tilde{G}_2 \frac{H'}{h_2}\frac{1}{r}\left(\gamma_{,\theta} + \delta + r\delta_{,r} + H'\frac{1}{r} w_{d,\theta\theta} + H' w_{d,r} + H' r w_{d,rr}\right) = \frac{2h'}{r}\left(\frac{2}{r^2}\Phi_{,\theta} w_{,r\theta} + \right. \\
&\left. - \frac{2}{r}\Phi_{,r\theta} w_{,r\theta} + \frac{2}{r^2} w_{,\theta}\Phi_{,r\theta} - \frac{2}{r^3}\Phi_{,\theta} w_{,\theta} + w_{,r}\Phi_{,rr} + \Phi_{,r} w_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,\theta\theta} w_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,rr} w_{,\theta\theta}\right) + \\
&- M w_{d,tt}.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

4.5. Warunki brzegowe

Warunki brzegu utwierdzonego, swobodnego lub swobodnie podpartego płyty, w której nie występują poślizgi warstw sąsiednich zarówno w obszarze płyty, jak i na jej brzegach opisują następujące zależności:

– brzeg utwierdzony – $w = 0$, $w_{,r} = 0$, $\delta = \gamma = 0$, $\delta_{,r} = 0$, (4.39)

– brzeg swobodnie podparty – $w = 0$, $M_r = 0$, $\delta = \gamma = 0$, $\delta_{,r} = 0$, (4.40)

– brzeg swobodny – $M_r = 0$, $Q_r + \frac{1}{r}\left(M_{r\theta 1} + M_{r\theta 3}\right)_{,\theta} = 0$, $\delta = \gamma = 0$, $\delta_{,r} = 0$, (4.41)

Warunki brzegu obciążonego spełnione przez funkcję naprężeń Φ określają zależności:

dla $r = r_w$ $\sigma_r = \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\Phi_{,\theta\theta} = -p(t)d_1,$

$$\sigma_{r_{,t}} = -(p(t))_{,t}\, d_1,$$

dla $r = r_z$ $\sigma_r = \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \frac{1}{r^2}\Phi_{,\theta\theta} = -p(t)d_2,$ (4.42)

$$\sigma_{r_{,t}} = -(p(t))_{,t}\, d_2,$$

dla $r = r_w$ i $r = r_z$ $\sigma_{r\theta} = \left(\frac{1}{r}\Phi_{,\theta}\right)_{,r} = 0$

gdzie: d_1, d_2 – są liczbami o wartości 0 lub 1 określającymi rodzaj brzegu obciążonego:

gdy $d_1 = 1$, $d_2 = 0$ – obciążony jest brzeg wewnętrzny płyty, $r = r_w$,

gdy $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ – obciążony jest brzeg zewnętrzny płyty, $r = r_z$,

gdy $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ – jednocześnie obciążone są oba brzegi płyty,

$p(t)$ – funkcja obciążenia zmiennego działającego na określony brzeg płyty.

Postać funkcji naprężeń Φ spełnia również warunek okresowości przemieszczeń:

$$\int_0^{2\pi} v_{,\theta} d\theta = 0. \qquad (4.43)$$

4.6. Warunki początkowe

Warunki początkowe płyty określone zależnościami:

$$w|_{t=0} = w_o, \quad w_{,t}|_{t=0} = 0, \quad w_d|_{t=0} = 0, \quad w_{d,t}|_{t=0} = 0 \qquad (4.44)$$

opisują stan spoczynku płyty w chwili $t = 0$, gdy brzeg płyty nie jest obciążony. Ugięcie całkowite w płyty jest wówczas równe ugięciu początkowemu w_o, a prędkość ugięcia jest równa zeru.

5. Rozwiązanie zagadnienia

Rozwiązanie zagadnienia ugięć trójwarstwowej płyty pierścieniowej z rdzeniem lepkosprężystym jest rozwiązaniem przybliżonym, w którym wykorzystana jest metoda Bubnowa-Galerkina do wyeliminowania zmiennej kątowej θ. Wykorzystanie kolejnej metody, metody różnic skończonych, umożliwia wyeliminowanie zmiennej promieniowej r poprzez dokonanie dyskretyzacji w N punktach płyty wzdłuż jej promienia. Końcowym efektem rozwiązania jest układ równań różniczkowych zwyczajnych złożony z przekształconej postaci równania podstawowego (4.38) i równań dodatkowych umożliwiających wyznaczenie nieznanych w równaniu (4.38) wielkości δ i γ oraz przyjętych składowych funkcji naprężeń Φ.

Wartości poszukiwanych ugięć dodatkowych w czasie obciążania badanej płyty są wynikiem zastosowania w rozwiązaniu równań różniczkowych metody Rungego-Kutty-Gilla.

Rozważanym dalej przypadkiem jest płyta o symetrycznej strukturze poprzecznej złożonej z warstw zewnętrznych (okładzin) z tego samego materiału: $E_1 = E_3 = E$, $G_1 = G_3 = G$, $\nu_1 = \nu_3 = \nu$, $\mu_1 = \mu_3 = \mu$ i o jednakowych grubościach: $h_1 = h_3 = h'$.

5.1. Układ równań różniczkowych płyty

W równaniach podstawowych wprowadzono następujące wielkości bezwymiarowe:

$$\zeta = \frac{w}{h}, \quad \zeta_1 = \frac{w_d}{h}, \quad \zeta_o = \frac{w_o}{h}, \quad F = \frac{\Phi}{Eh^2}, \quad \rho = \frac{r}{r_z}, \quad \overline{\delta} = \frac{\delta}{h}, \quad \overline{\gamma} = \frac{\gamma}{h}$$
$$t^* = t \cdot K7, \quad K7 = \frac{s}{p_{kr}} \tag{5.1}$$

gdzie: $h = h_1 + h_2 + h_3$ – całkowita grubość płyty,
p_{kr} – krytyczne obciążenie statyczne.

Rozwiązanie bazuje na założonych postaciach funkcji kształtu przyjętych dla ugięcia wstępnego ζ_o i dodatkowego płyty ζ_1, funkcji naprężeń F [104], [117] oraz dla różnic przemieszczeń $\overline{\delta}$ i $\overline{\gamma}$ w okładzinach płyty:

$$\zeta_1(\rho,\theta,t)=X_1(\rho,t)cos(m\theta), \qquad \zeta=\zeta_1+\zeta_o,$$

$$\begin{gathered}\zeta_o(\rho,\theta)=X_a(\rho)+X_b(\rho)cos(m\theta),\\ \mathrm{X_a}(\rho)=\xi_1\eta(\rho),\ \ X_b(\rho)=\xi_2\eta(\rho),\end{gathered} \tag{5.2a}$$

$$F(\rho,\theta,t)=F_a(\rho,t)+F_b(\rho,t)cos(m\theta)+F_c(\rho,t)cos(2m\theta), \tag{5.2}$$

$$\overline{\delta}(\rho,\theta,t)=\overline{\delta}(\rho,t)cos(m\theta),$$

$$\overline{\gamma}(\rho,\theta,t)=\overline{\gamma}(\rho,t)sin(m\theta)$$

gdzie: m – liczba fal obwodowych odpowiadających postaci utraty stateczności płyty,

ξ_1, ξ_2 – liczby skalujące,

$\eta(\rho)$ – funkcja opisana zależnością [104], [107]:

$$\eta(\rho)=\rho^4+A_1\rho^2+A_2\rho^2 ln\rho+A_3 ln\rho+A_4,$$

A_i – stałe spełniające warunki brzegowe narzucone przez sposób podparcia płyty, i = 1, 2, 3, 4.

Funkcje operatorowe O_1, O_2 (4.26) dla bezwymiarowego czasu t^* wyrażają zależności:

$$\overline{O}_1\left(\frac{\partial}{\partial t^*}\right)=C_L+D_L\frac{\partial}{\partial t^*}K7, \qquad \overline{O}_2\left(\frac{\partial}{\partial t^*}\right)=E_L+F_L\frac{\partial}{\partial t^*}K7. \tag{5.3}$$

Nieznane wielkości δ i γ w równaniu (4.38), określające promieniowe i obwodowe różnice przemieszczeń u_1, u_3 i v_1, v_3 punktów płaszczyzny środkowej okładzin płyty można wyznaczyć z dodatkowych równań równowagi sił ustalonych dla obu kierunków: promieniowego i obwodowego w okładzinach płyty bez uwzględnienia ich odkształceń:

warstwa 1

$$N_{r1}+rN_{r1,r}-N_{\theta 1}+T_{r\theta 1,\theta}+r\tau_{r1}=0\,, \tag{5.4}$$

$$N_{\theta 1,\theta}+2T_{r\theta 1}+rT_{r\theta 1,r}+r\tau_{\theta 1}=0, \tag{5.5}$$

warstwa 3

$$N_{r3}+rN_{r3,r}-N_{\theta 3}+T_{r\theta 3,\theta}-r\tau_{r3}=0, \tag{5.6}$$

$$N_{\theta 3,\theta} + 2T_{r\theta 3} + rT_{r\theta 3,r} - r\tau_{\theta 3} = 0. \tag{5.7}$$

Odejmując stronami równania (5.4) i (5.6) oraz (5.5) i (5.7) po wykorzystaniu zależności (4.18), (4.19), (4.20) oraz (4.4), (4.5) i wykonaniu przekształceń otrzymuje się następujące dwa równania:

$$\begin{aligned} \frac{2r}{h_2}\tilde{G}_2 H' w_{d,r} &= \frac{Eh'}{1-\nu^2}\left(r\delta_{,rr} + \delta_{,r} - \frac{1}{r}\delta + \nu\gamma_{,r\theta} - \frac{1}{r}\gamma_{,\theta} \right) + \\ &+ Gh'\frac{1}{r}\left(\delta_{,\theta\theta} + r\gamma_{,r\theta} - \gamma_{,\theta} \right) - \frac{2r}{h_2}\tilde{G}_2\delta \end{aligned}, \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{h_2}\tilde{G}_2 H' w_{d,\theta} &= \frac{Eh'}{1-\nu^2}\frac{1}{r}\left(\delta_{,\theta} + r\nu\delta_{,r\theta} + \gamma_{,\theta\theta} \right) - \frac{2r}{h_2}\tilde{G}_2\gamma + \\ &+ Gh'\frac{1}{r}\left(\delta_{,\theta} + r\delta_{,r\theta} + r^2\gamma_{,rr} + r\gamma_{,r} - \gamma \right) \end{aligned}. \tag{5.9}$$

Równania (5.8) i (5.9) po uwzględnieniu wielkości bezwymiarowych i wyrażeń (5.2) przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} \bar{O}_1 X_{,\rho} &= \bar{O}_2 \frac{1}{\rho^2}\left[\bar{\delta}\left(A1 + m^2 C1 \right) - A1\rho\bar{\delta}_{,\rho} - A1\rho^2\bar{\delta}_{,\rho\rho} - mK2\rho\bar{\gamma}_{,\rho} + mK1\bar{\gamma} \right] + \\ &+ \bar{O}_1\bar{\delta}B1 \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$\begin{aligned} \bar{O}_1 Xm &= \bar{O}_2 \frac{1}{\rho}\left[-\bar{\gamma}\left(m^2 A1 + C1 \right) - mK1\bar{\delta} - mK2\rho\bar{\delta}_{,\rho} + \rho^2 C1\bar{\gamma}_{,\rho\rho} + C1\rho\bar{\gamma}_{,\rho} \right] + \\ &- \bar{O}_1\rho B1\bar{\gamma} \end{aligned} \tag{5.11}$$

gdzie: $A1 = -\dfrac{Eh'}{1-\nu^2}\dfrac{h_2}{2H' r_z}$, $B1 = -\dfrac{r_z}{H'}$, $C1 = -Gh'\dfrac{h_2}{2H' r_z}$, $D1 = A1 \cdot \nu$,

$K1 = A1 + C1$, $K2 = D1 + C1$.

Wykorzystanie metody ortogonalizacyjnej do wyeliminowania zmiennej kątowej θ pozwala na zastąpienie równania (4.38) równaniem przybliżonym (5.13) otrzymanym z następującego warunku:

$$\int_0^{2\pi} \psi \cos\left(m\theta \right) d\theta = 0 \tag{5.12}$$

gdzie $\psi -$ jest różnicą lewej i prawej strony równania (4.38), w przekształceniach którego wykorzystuje się zależności bezwymiarowe (5.1) i wyrażenia (5.2).

Postać równania (5.13) jest następująca:

$$
\begin{aligned}
&\bar{O}_2 \Bigg\{ - WK1 \cdot X_{1,\rho\rho\rho\rho} - \frac{2WK1}{\rho} X_{1,\rho\rho\rho} + \frac{WK3}{\rho^2} X_{1,\rho\rho} - \frac{WK3}{\rho^3} X_{1,\rho} - \frac{WK4}{\rho^4} X_1 + \\
&+ \frac{2WK1}{\rho^4} m^2 X_1 + \frac{2WK5^2 WK2}{\rho} \left(X_{,\rho} Y_{o,\rho} + Y_o X_{,\rho\rho} - \frac{m^2}{\rho} X Y_{o,\rho} \right) + \\
&+ \left(1 - \delta_m^0\right) \Bigg[\frac{4WK5^2 WK2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho} m^2 F_c X_{,\rho} - F_{c,\rho} m^2 X_{,\rho} + \frac{1}{\rho} F_{c,\rho} m^2 X - \frac{1}{\rho^2} F_c m^2 X \right) + \\
&+ \frac{WK5^2 WK2}{\rho} \Big(2X_{a,\rho} F_{b,\rho\rho} + X_{,\rho} F_{c,\rho\rho} + 2X_{a,\rho\rho} F_{b,\rho} + \qquad\qquad (5.13)\\
&+ X_{,\rho\rho} F_{c,\rho} - \frac{2}{\rho} m^2 F_b X_{a,\rho\rho} - \frac{4}{\rho} m^2 F_c X_{,\rho\rho} - \frac{1}{\rho} m^2 F_{c,\rho\rho} X \Big) \Bigg] \Bigg\} + \\
&+ \bar{O}_1 \frac{WK5}{\rho} H' \left(m\bar{\gamma} + \rho \bar{\delta}_{,\rho} + \bar{\delta} - \frac{m^2}{\rho} \frac{H'}{r_o} X_1 + \frac{H'}{r_o} X_{1,\rho} + \frac{H'}{r_o} \rho X_{1,\rho\rho} \right) = \\
&= \bar{O}_2 WK5 K7^2 WK8 X_{1,t^* t^*}
\end{aligned}
$$

gdzie: δ_m^0 – delta Kroneckera, $X(\rho,t) = X_1(\rho,t) + X_b(\rho)$, $Y_o = F_{a,\rho}$,

$$WK1 = k_1 \frac{h'}{h} \frac{h_2}{r_z^3}, \quad WK2 = E h_2 \frac{h^3}{r_z^3}, \quad WK12 = k_2 \frac{h'}{h} \frac{h_2}{r_z^3},$$

$$WK3 = WK1 + 2m^2 WK12, \quad WK4 = m^4 WK1 - 2m^2 WK12,$$

$$WK5 = \frac{h'}{h}, \quad WK8 = r_z h_2 M, \quad k_1 = 2D, \quad k_2 = 4D_{r\theta} + \nu k_1.$$

Do wyznaczenia składowych F_a, F_b, F_c funkcji naprężeń Φ wykorzystuje się równanie (5.14), które powstaje z zależności (4.15)÷(4.20) i (4.35)÷(4.37) po wyeliminowaniu wyrażeń (u_1+u_3), (v_1+v_3) będących sumami odpowiednio promieniowych i obwodowych przemieszczeń punktów płaszczyzn środkowych okładzin płyty:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{,rrrr} + \frac{2}{r}\Phi_{,rrr} - \frac{1}{r^2}\Phi_{,rr} + \frac{1}{r^3}\Phi_{,r} + \frac{1}{r^4}\Phi_{,\theta\theta\theta\theta} + \frac{4}{r^4}\Phi_{,\theta\theta} - \frac{2}{r^3}\Phi_{,r\theta\theta} + \frac{2}{r^2}\Phi_{,rr\theta\theta} = \\
&= E\Bigg[\frac{1}{r} w_{o,rr} \left(w_{o,r} + \frac{1}{r} w_{o,\theta\theta} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} w_{o,\theta} - w_{o,r\theta} \right)^2 - \frac{1}{r} w_{,rr} \left(w_{,r} + \frac{1}{r} w_{,\theta\theta} \right) + \qquad (5.14)\\
&+ \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{r} w_{,\theta} - w_{,r\theta} \right)^2 \Bigg].
\end{aligned}
$$

Po podstawieniu do równania (5.14) wielkości (5.1) oraz wyrażeniu funkcji ζ, ζ_1, ζ_o, F, $\bar{\delta}, \bar{\gamma}$ przez zależności (5.2) powstaje następujące równanie:

$$
\begin{aligned}
&F_{a,\rho\rho\rho\rho} + \frac{2}{\rho} F_{a,\rho\rho\rho} - \frac{1}{\rho} F_{a,\rho\rho} + \frac{1}{\rho^3} F_{a,\rho} + \\
&+ cos(m\theta)\left(F_{b,\rho\rho\rho\rho} + \frac{2}{\rho} F_{b,\rho\rho\rho} - \frac{L1}{\rho^2} F_{b,\rho\rho} + \frac{L1}{\rho^3} F_{b,\rho} + m^2 \frac{L2}{\rho^4} F_b \right) + \\
&+ cos(2m\theta)\left(F_{c,\rho\rho\rho\rho} + \frac{2}{\rho} F_{c,\rho\rho\rho} - \frac{L3}{\rho^2} F_{c,\rho\rho} + \frac{L3}{\rho^3} F_{c,\rho} + m^2 \frac{L4}{\rho^4} F_c \right) = \\
&= cos(m\theta)\left(\frac{m^2}{\rho^2} X_{a,\rho\rho} X_1 - \frac{1}{\rho} X_{a,\rho\rho} X_{1,\rho} - \frac{1}{\rho} X_{a,\rho} X_{1,\rho\rho} \right) + \\
&+ cos^2(m\theta)\left(\frac{m^2}{\rho^2} X_1 \left(X_{b,\rho\rho} + X_{1,\rho\rho} \right) + \frac{m^2}{\rho^2} X_b X_{1,\rho\rho} - \frac{1}{\rho} X_{1,\rho\rho} X_{b,\rho} + \right. \\
&\left. - \frac{1}{\rho} X_{1,\rho} \left(X_{1,\rho\rho} + X_{b,\rho\rho} \right) \right) + \\
&+ sin^2(m\theta) \frac{m^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{\rho^2} X_1^2 + \frac{2}{\rho^2} X_b X_1 + \left(X_{1,\rho} \right)^2 + 2 X_{b,\rho} X_{1,\rho} - \frac{2}{\rho} X_{b,\rho} X_1 + \right. \\
&\left. - \frac{2}{\rho} X_{1,\rho} \left(X_b + X_1 \right) \right).
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

gdzie: $L1 = 1 + 2m^2$, $L2 = m^2 - 4$, $L3 = 1 + 8m^2$, $L4 = 16m^2 - 16$.

Wykorzystując podstawowe zależności trygonometryczne i przyrównując odpowiednie człony równania (5.15) przy tych samych wyrażeniach trygonometrycznych, równanie (5.15) można przedstawić w postaci następujących trzech równań:

$$
\begin{aligned}
&F_{a,\rho\rho\rho\rho} + \frac{2}{\rho} F_{a,\rho\rho\rho} - \frac{1}{\rho^2} F_{a,\rho\rho} + \frac{1}{\rho^3} F_{a,\rho} = \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} X_{1,\rho\rho} X_{,\rho} + \frac{1}{\rho} X_{b,\rho\rho} X_{1,\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} X_1 X_{,\rho\rho} - \frac{m^2}{\rho^2} X_b X_{1,\rho\rho} + \frac{1}{\rho} X_{b,\rho\rho} X_{1,\rho} \right) + \\
&+ \frac{m^2}{2\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2} X_1^2 + \frac{2}{\rho^2} X_b X_1 + \left(X_{1,\rho} \right)^2 + 2 X_{b,\rho} X_{1,\rho} - \frac{2}{\rho} X_{b,\rho} X_1 - \frac{2}{\rho} X_{1,\rho} X \right),
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

$$F_{b,\rho\rho\rho\rho}+\frac{2}{\rho}F_{b,\rho\rho\rho}-\frac{1+2m^2}{\rho^2}F_{b,\rho\rho}+\frac{1+2m^2}{\rho^3}F_{b,\rho}+\frac{m^4-4m^2}{\rho^4}F_b=$$
$$=\left(1-\delta_m^0\right)\left[X_{a,\rho\rho}\left(\frac{m^2}{\rho^2}X_1-\frac{1}{\rho}X_{1,\rho}\right)-\frac{1}{\rho}X_{a,\rho}X_{1,\rho\rho}\right], \tag{5.17}$$

$$F_{c,\rho\rho\rho\rho}+\frac{2}{\rho}F_{c,\rho\rho\rho}-\frac{1+8m^2}{\rho^2}F_{c,\rho\rho}+\frac{1+8m^2}{\rho^3}F_{c,\rho}+\frac{16m^4-16m^2}{\rho^4}F_c=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(1-\delta_m^0\right)\left[\frac{1}{\rho}X_{1,\rho\rho}X_{,\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}X_1X_{,\rho\rho}-\frac{m^2}{\rho^2}X_bX_{1,\rho\rho}+\frac{1}{\rho}X_{b,\rho\rho}X_1+\right. \tag{5.18}$$
$$\left.+\frac{m^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{\rho^2}X_1{}^2+\frac{2}{\rho^2}X_bX_1+\left(X_{1,\rho}\right)^2+2X_{b,\rho}X_{1,\rho}-\frac{2}{\rho}X_{b,\rho}X_1-\frac{2}{\rho}X_{1,\rho}X\right)\right].$$

Spełnione są również warunki brzegu obciążonego (4.42) dla funkcji F_a i następujące warunki dla funkcji F_b i F_c:

$$F_b\Big|_{\rho=\rho_W(\rho=1)}=F_c\Big|_{\rho=\rho_W(\rho=1)}=0,,\qquad F_{b,\rho}\Big|_{\rho=\rho_W(\rho=1)}=F_{c,\rho}\Big|_{\rho=\rho_W(\rho=1)}=0.$$

Mnożąc stronami równanie (5.16) przez ρ i całkując obustronnie, otrzymuje się równanie (5.19):

$$\rho Y_{o,\rho\rho}+Y_{o,\rho}-\frac{1}{\rho}Y_o=-\left(1+\delta_m^0\right)\frac{1}{4}\left(\left(2X_{b,\rho}+X_{1,\rho}\right)X_{1,\rho}+\frac{m^2}{\rho^2}\left(2X_b+X_1\right)X_1+\right. \tag{5.19}$$
$$\left.-\frac{2m^2}{\rho}\left(X_bX_{1,\rho}+X_{b,\rho}X_1+X_1X_{1,\rho}\right)\right)+C$$

gdzie $Y_o=F_{a,\rho}$.

Postać równania (5.19) jest zgodna z postacią równania wyznaczonego z warunku okresowości przemieszczeń (4.43) i zależności (4.10), (4.11), (4.15), (4.16), (4.18), (4.19), (5.1), (5.2), gdy stała całkowania C jest równa zero. Ostatecznie, dogodną do wyznaczenia składowej F_a funkcji naprężeń postacią równania (5.16) jest zależność (5.20):

$$
\rho Y_{o,\rho\rho} + Y_{o,\rho} - \frac{1}{\rho} Y_o = -\left(1+\delta_m^0\right)\frac{1}{4}\left(\left(2X_{b,\rho} + X_{1,\rho}\right)X_{1,\rho} + \frac{m^2}{\rho^2}\left(2X_b + X_1\right)X_1 + \right.
$$

$$
\left. - \frac{2m^2}{\rho}\left(X_b X_{1,\rho} + X_{b,\rho} X_1 + X_1 X_{1,\rho}\right)\right) \tag{5.20}
$$

Podsumowanie

Rozwiązaniem zagadnienia ugięć trójwarstwowej płyty pierścieniowej z rdzeniem lepkosprężystym dla przyjętych warunków początkowych płyty (4.44) jest równanie (5.13), w którym nieznane składowe F_a, F_b, F_c funkcji naprężeń i ich pochodne są wynikiem rozwiązania równań (5.20), (5.17), (5.18) i ich postaci zróżniczkowanej względem czasu, a nieznane wielkości $\bar{\delta}$ i $\bar{\gamma}$ są wynikiem rozwiązania równań (5.10) i (5.11).

5.2. Wykorzystanie metody różnic skończonych

Dogodną do obliczeń numerycznych postać równań różniczkowych zwyczajnych uzyskano przybliżając różnicami centralnymi pochodne funkcji względem promienia ρ. Różnice centralne dla ogólnej postaci funkcji $r(\rho,t)$ mają postać:

$$
\begin{aligned}
r_{,\rho\rho\rho\rho}|_{\rho=\rho_i} &= \frac{r_{i+2} - 4r_{i+1} + 6r_i - 4r_{i-1} + r_{i-2}}{b^4} = r_{i,\rho\rho\rho\rho}, \\
r_{,\rho\rho\rho}|_{\rho=\rho_i} &= \frac{r_{i+2} - 2r_{i+1} + 2r_{i-1} - r_{i-2}}{2b^3} = r_{i,\rho\rho\rho}, \\
r_{,\rho\rho}|_{\rho=\rho_i} &= \frac{r_{i+1} - 2r_i + r_{i-1}}{b^2} = r_{i,\rho\rho}, \\
r_{,\rho}|_{\rho=\rho_i} &= \frac{r_{i+1} - r_{i-1}}{2b} = r_{i,\rho}
\end{aligned} \tag{5.21}
$$

gdzie: $r_i(t) = r(\rho_i,t)$,

$b = \dfrac{1-\rho_w}{N+1}$ – długość podprzedziału,

N – liczba wewnętrznych punktów dyskretyzacji,

$\rho_i = \rho_w + ib$ – punkty dyskretyzacji dla i = -1, 0, 1, …. N, N + 1, N + 2,

(ρ_w – bezwymiarowa wielkość promienia wewnętrznego płyty, określona na podstawie (5.1) jako: $\rho_w = \dfrac{r_w}{r_z}$).

5.2.1. Układ równań w zagadnieniu dynamicznym pierścieniowej płyty trójwarstwowej z rdzeniem lepkosprężystym

W wyniku rozwiązania zagadnienia otrzymano układ równań różniczkowych zwyczajnych względem zmiennej czasowej t:

$$\boldsymbol{PU} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{P}_L\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{Q}_L - \boldsymbol{W1}\ddot{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{W2}\dddot{\boldsymbol{U}}, \tag{5.22}$$

$$\boldsymbol{M}_Y\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}_Y, \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{M}_Y\dot{\boldsymbol{Y}} = \dot{\boldsymbol{Q}}_Y, \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{M}_V\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}_V, \tag{5.25}$$

$$\boldsymbol{M}_V\dot{\boldsymbol{V}} = \dot{\boldsymbol{Q}}_V, \tag{5.26}$$

$$\boldsymbol{M}_Z\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Q}_Z, \tag{5.27}$$

$$\boldsymbol{M}_Z\dot{\boldsymbol{Z}} = \dot{\boldsymbol{Q}}_Z, \tag{5.28}$$

$$\boldsymbol{M}_{DL}\dot{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{M}_D\boldsymbol{D} + \boldsymbol{M}_U\boldsymbol{U} + \boldsymbol{M}_{UL}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{M}_G\boldsymbol{G} + \boldsymbol{M}_{GL}\dot{\boldsymbol{G}}, \tag{5.29}$$

$$\boldsymbol{M}_{GGL}\dot{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{M}_{GG}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{M}_{GU}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{M}_{GUL}\dot{\boldsymbol{U}} + \boldsymbol{M}_{GD}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{M}_{GDL}\dot{\boldsymbol{D}} \tag{5.30}$$

gdzie: $W1 = K7^2\, WK5\, WK8\, E_L$, $\quad W2 = K7^3\, WK5\, WK8\, F_L$.

Elementami wektorów $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{G}$ i ich pochodnych $\dot{\boldsymbol{U}}, \ddot{\boldsymbol{U}}, \dddot{\boldsymbol{U}}, \dot{\boldsymbol{Y}}, \dot{\boldsymbol{V}}, \dot{\boldsymbol{Z}}, \dot{\boldsymbol{D}}, \dot{\boldsymbol{G}}$ są funkcje:

$$\begin{aligned} u_i(t) &= X_1(\rho_i, t), \\ y_i(t) &= F_{a,\rho}(\rho_i, t), \\ v_i(t) &= F_b(\rho_i, t), \\ z_i(t) &= F_c(\rho_i, t), \\ d_i(t) &= \overline{\delta}(\rho_i, t), \\ g_i(t) &= \overline{\gamma}(\rho_i, t) \end{aligned} \tag{5.31}$$

i ich pochodne względem czasu t.

Postać elementów wektorów $\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{Q}_L, \boldsymbol{Q}_y, \dot{\boldsymbol{Q}}_y, \boldsymbol{Q}_V, \dot{\boldsymbol{Q}}_V, \boldsymbol{Q}_Z, \dot{\boldsymbol{Q}}_Z$ jest następująca:

$$
\begin{aligned}
q_i = {} & W3\,\frac{1}{\rho_i}\left(mg_i + d_i + \rho_i d_{i,\rho}\right) + \\
& + W4\,\frac{1}{\rho_i}\left[\,y_{i,\rho}\left(\overline{XB_i} + u_{i,\rho}\right) + y_i\left(\overline{\overline{XB_i}} + u_{i,\rho\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho_i}\,y_{i,\rho}\left(XB_i + u_i\right)\right] + \\
& + \left(1 - \delta_m^0\right)\left\{W5\,\frac{1}{\rho_i^2}\left[\frac{m^2}{\rho_i}\left(\overline{XB_i} + u_{i,\rho}\right)\left(z_i - \rho_i z_{i,\rho}\right) + \frac{m^2}{\rho_i^2}\left(XB_i + u_i\right)\left(\rho_i z_{i,\rho} - z_i\right)\right] + \right. \\
& + W6\,\frac{1}{\rho_i}\left[2v_{i,\rho\rho}\,\overline{XA_i} + z_{i,\rho\rho}\left(\overline{XB_i} + u_{i,\rho}\right) + 2v_{i,\rho}\,\overline{\overline{XA_i}} - 2\,\frac{m^2}{\rho_i}\,v_i\,\overline{\overline{XA_i}} + \right. \\
& \left.\left. + \frac{1}{\rho_i}\left(\overline{\overline{XB_i}} + u_{i,\rho\rho}\right)\left(\rho_i z_{i,\rho} - 4m^2 z_i\right) - \frac{m^2}{\rho_i}\left(XB_i + u_i\right) z_{i,\rho\rho}\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

gdzie: $W3 = WK5\, H'C_L,\ W4 = 2WK5^2\, WK2\, E_L,\ W5 = 4WK5^2\, WK2\, E_L,$
$W6 = WK5^2\, WK2\, E_L,$

$$
XB_i = X_b\left(\rho_i\right),\quad \overline{XB_i} = XB_{i,\rho},\quad \overline{\overline{XB_i}} = XB_{i,\rho\rho},\quad XA_i = X_a\left(\rho_i\right),
$$

$$
\overline{XA_i} = XA_{i,\rho},\quad \overline{\overline{XA_i}} = XA_{i,\rho\rho},
$$

$$
q_{L_i} = \frac{\partial}{\partial t^*}\left(q_i\right), \tag{5.33}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{Y_i} = {} & -\left(1 + \delta_m^0\right)\frac{1}{4}\left[u_{i,\rho}\left(2\overline{XB_i} + u_{i,\rho}\right) + \frac{m^2}{\rho_i^2}u_i\left(2XB_i + u_i\right) + \right. \\
& \left. -2\frac{m^2}{\rho_i}\left(XB_i u_{i,\rho} + \overline{XB_i}u_i + u_i u_{i,\rho}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

$$
\dot{q}_{Y_i} = \left(q_{Y\,i}\right)_{,t^*} \tag{5.35}
$$

dla $i = 1$ i $i = N$ postać elementów q_{Y_i} i $\dot{q}_{Y_i}$ jest następująca:

$$
q_{Y_1} = q_{Y_i}\big|_{i=1} - y_0 y_{11},\quad q_{Y_N} = q_{Y_i}\big|_{i=\mathrm{N}} - y_{N+1} y_{N3},
$$

$$
\dot{q}_{Y_1} = \dot{q}_{Y_i}\big|_{i=1} - \dot{y}_0 y_{11},\quad \dot{q}_{Y_N} = \dot{q}_{Y_i}\big|_{i=N} - \dot{y}_{N+1} y_{N3}
$$

gdzie: $y_0, y_{N+1}, \dot{y}_o, \dot{y}_{N+1}$ – są wielkościami opisanymi zależnościami wynikającymi z warunków brzegu obciążonego (4.42) i wielkości (5.1):

$$y_0 = -\rho_w K10\, p^*\left(t^*\right) d_1, \qquad y_{N+1} = -K10\, p^*\left(t^*\right) d_2,$$

$$\dot{y}_0 = -\rho_w K10\, p^*\left(t^*\right)_{,t^*} d_1, \quad \dot{y}_{N+1} = -K10\, p^*\left(t^*\right)_{,t^*} d_2$$

gdzie: $p^* = \dfrac{p}{E}, \quad K10 = \dfrac{r_z^2}{h^2},$

y_{11}, y_{N3} – są wyrazami macierzy $\boldsymbol{M}_Y$ określonymi następująco:

$$y_{11} = \frac{1}{ba_1}\left(1 - \frac{a_1}{2}\right), \quad y_{N3} = \frac{1}{ba_n}\left(1 + \frac{a_n}{2}\right) \quad \text{dla} \quad a_1(\,a_n\,) = \frac{b}{\rho_i}\Big|_{i=1(i=N)},$$

$$q_{V_i} = (\,1 - \delta_m^0\,)\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{m^2}{\rho_i}\overline{\overline{\overline{XA_i}}}u_i - \overline{\overline{XA_i}}u_{i,\rho} - \overline{XA_i}u_{i,\rho\rho}\right], \tag{5.36}$$

$$\dot{q}_{V_i} = \left(q_{V\,i}\right)_{,t^*}, \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned} q_{Z\,i} = &-\frac{1}{2\rho_i}(\,1 - \delta_m^0\,)\Big[u_{i,\rho\rho}\left(\overline{XB_i} + u_{i,\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho_i}u_i\left(\overline{\overline{XB_i}} + u_{i,\rho\rho}\right) - \frac{m^2}{\rho_i}XB_i u_{i,\rho\rho} + \overline{\overline{XB_i}}u_{i,\rho} \\ &+ \frac{m^2}{\rho_i}\left(\frac{1}{\rho_i^2}\left(u_i^2 + 2XB_i u_i\right) + \left(u_{i,\rho}\right)^2 + \frac{2}{\rho_i}\overline{XB_i}\left(\rho_i u_{i,\rho} - u_i\right) - \frac{2}{\rho_i}u_{i,\rho}\left(XB_i + u_i\right)\right)\Big], \end{aligned} \tag{5.38}$$

$$\dot{q}_{Z_i} = \left(q_{Z\,i}\right)_{,t^*}. \tag{5.39}$$

Macierze $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_L$, $\boldsymbol{M}_Y$, $\boldsymbol{M}_V$, $\boldsymbol{M}_Z$, $\boldsymbol{M}_{DL}$, $\boldsymbol{M}_D$, $\boldsymbol{M}_U$, $\boldsymbol{M}_{UL}$, $\boldsymbol{M}_G$, $\boldsymbol{M}_{GL}$, $\boldsymbol{M}_{GGL}$, $\boldsymbol{M}_{GG}$, $\boldsymbol{M}_{GU}$, $\boldsymbol{M}_{GUL}$, $\boldsymbol{M}_{GD}$, $\boldsymbol{M}_{GDL}$ są macierzami kwadratowymi stopnia N. Postać macierzy $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_L$, $\boldsymbol{M}_V$, $\boldsymbol{M}_Z$, których wyrazy dla $|i - j| > 2$ mają wartość zero, przedstawia tablica 5.1a, a postać macierzy pozostałych, których wyrazy o wartości zero są dla $|i - j| > 1,$, pokazuje tablica 5.1b.

Tablica 5.1. Postać macierzy $\boldsymbol{M} = [m_{i,j}]_{i \le N, j \le N}$ dla przypadków:
(a) $m_{i,j} = 0$, gdy $|i-j| > 2$, (b) $m_{i,j} = 0$, gdy $|i-j| > 1$

(a)

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & m_{2,4} & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & m_{3,5} & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{4,2} & m_{4,3} & m_{4,4} & m_{4,5} & m_{4,6} & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & m_{N-3,N-5} & m_{N-3,N-4} & m_{N-3,N-3} & m_{N-3,N-2} & m_{N-3,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & m_{N-2,N-4} & m_{N-2,N-3} & m_{N-2,N-2} & m_{N-2,N-1} & m_{N-2,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & m_{N-1,N-3} & m_{N-1,N-2} & m_{N-1,N-1} & m_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{N,N-2} & m_{N,N-1} & m_{N,N} \end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{3,2} & m_{3,3} & m_{3,4} & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & m_{N-2,N-3} & m_{N-2,N-2} & m_{N-2,N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & m_{N-1,N-2} & m_{N-1,N-1} & m_{N-1,N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & m_{N,N-1} & m_{N,N} \end{bmatrix}$$

Wyrazy macierzy $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{P}_L$, $\boldsymbol{M}_Y$, $\boldsymbol{M}_V$, $\boldsymbol{M}_Z$, $\boldsymbol{M}_{DL}$, $\boldsymbol{M}_D$, $\boldsymbol{M}_U$, $\boldsymbol{M}_{UL}$, $\boldsymbol{M}_G$, $\boldsymbol{M}_{GL}$, $\boldsymbol{M}_{GGL}$, $\boldsymbol{M}_{GG}$, $\boldsymbol{M}_{GU}$, $\boldsymbol{M}_{GUL}$, $\boldsymbol{M}_{GD}$, $\boldsymbol{M}_{GDL}$ są opisane następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} & p_{i,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 2, \\ & p_{i,i-2} = -WK1 \frac{S1}{b^4} E_L, \\ & p_{i,i-1} = WK1 \frac{S2}{b^4} E_L + WK12 \frac{S3}{b^4} E_L + WK5 \frac{S4}{b^2} C_L \frac{H'^2}{r_z}, \\ & p_{i,i} = -WK1 \frac{S5}{b^4} E_L - WK12 \frac{S6}{b^4} E_L - WK5 \frac{S7}{b^2} C_L \frac{H'^2}{r_z}, \\ & p_{i,i+1} = WK1 \frac{S8}{b^4} E_L + WK12 \frac{S9}{b^4} E_L + WK5 \frac{S10}{b^2} C_L \frac{H'^2}{r_z}, \\ & p_{i,i+2} = -WK1 \frac{S11}{b^4} E_L, \end{aligned} \tag{5.40}$$

$$p_{Li,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 2,$$

$$p_{Li,i-2} = -WK1\frac{S1}{b^4}F_L K7,$$

$$p_{Li,i-1} = WK1\frac{S2}{b^4}F_L K7 + WK12\frac{S3}{b^4}F_L K7 + WK5\frac{S4}{b^2}D_L K7\frac{H'^2}{r_z},$$

$$p_{Li,i} = -WK1\frac{S5}{b^4}F_L K7 - WK12\frac{S6}{b^4}F_L K7 - WK5\frac{S7}{b^2}D_L K7\frac{H'^2}{r_z}, \tag{5.41}$$

$$p_{Li,i+1} = WK1\frac{S8}{b^4}F_L K7 + WK12\frac{S9}{b^4}F_L K7 + WK5\frac{S10}{b^2}D_L K7\frac{H'^2}{r_z},$$

$$p_{Li,i+2} = -WK1\frac{S11}{b^4}F_L K7,$$

$$m_{Y\,i,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,$$

$$m_{Y\,i,i-1} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{2}\right), \tag{5.42}$$

$$m_{Y\,i,i} = -\frac{1}{b}\left(\frac{2}{a_i} + a_i\right),$$

$$m_{Y\,i,i+1} = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{a_i} + \frac{1}{2}\right),$$

$$m_{V\,i,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 2,$$

$$m_{V\,i,i-2} = \frac{S1}{b^4},$$

$$m_{V\,i,i-1} = -\frac{(S2+S3)}{b^4}, \tag{5.43}$$

$$m_{V\,i,i} = \frac{(S5+S6)}{b^4},$$

$$m_{V\,i,i+1} = -\frac{(S8+S9)}{b^4},$$

$$m_{V\,i,i+2} = \frac{S11}{b^4},$$

$$m_{V1,1} = \left.\frac{(S1+S5+S6)}{b^4}\right|_{i=1}, \qquad m_{V\,N,N} = \left.\frac{(S5+S6+S11)}{b^4}\right|_{i=N},$$

$$
\begin{aligned}
&m_{Zi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 2,\\
&m_{Zi,i-2} = \frac{S1}{b^4},\\
&m_{Zi,i-1} = -\frac{(S2+4S3)}{b^4},\\
&m_{Zi,i} = \frac{(4S6+S12)}{b^4},\\
&m_{Zi,i+1} = -\frac{(S8+4S9)}{b^4},\\
&m_{Zi,i+2} = \frac{S11}{b^4},\\
&m_{Z1,1} = \left.\frac{(S1+4S6+S12)}{b^4}\right|_{i=1}, \qquad m_{ZN,N} = \left.\frac{(4S6+S11+S12)}{b^4}\right|_{i=N},
\end{aligned}
\tag{5.44}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{DLi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
&m_{DLi,i-1} = -A1\frac{S4}{b^2}F_L K7,\\
&m_{DLi,i} = A1\frac{S13}{b^2}F_L K7 + C1\frac{m^2}{b^2}a_i^2 F_L K7 + B1 D_L K7,\\
&m_{DLi,i+1} = -A1\frac{S10}{b^2}F_L K7,
\end{aligned}
\tag{5.45}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{Di,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
&m_{Di,i-1} = A1\frac{S4}{b^2}E_L,\\
&m_{Di,i} = -A1\frac{S13}{b^2}E_L - C1\frac{m^2}{b^2}a_i^2 E_L + B1 C_L,\\
&m_{Di,i+1} = A1\frac{S10}{b^2}E_L,
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{Ui,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
&m_{Ui,i-1} = -\frac{1}{2b}C_L,\\
&m_{Ui,i} = 0,\\
&m_{Ui,i+1} = \frac{1}{2b}C_L,
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

$$m_{ULi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,$$

$$m_{ULi,i-1} = -\frac{1}{2b} D_L K7,$$

$$m_{ULi,i} = 0, \tag{5.48}$$

$$m_{ULi,i+1} = \frac{1}{2b} D_L K7,$$

$$m_{Gi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,$$

$$m_{Gi,i-1} = -\frac{m}{2b^2} E_L a_i K2,$$

$$m_{Gi,i} = -\frac{m}{b^2} E_L a_i^2 K1, \tag{5.49}$$

$$m_{Gi,i+1} = \frac{m}{2b^2} E_L a_i K2,$$

$$m_{GLi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,$$

$$m_{GLi,i-1} = -\frac{m}{2b^2} F_L K7 a_i K2,$$

$$m_{GLi,i} = -\frac{m}{b^2} F_L K7 a_i^2 K1, \tag{5.50}$$

$$m_{GLi,i+1} = \frac{m}{2b^2} F_L K7 a_i K2,$$

$$m_{GGLi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,$$

$$m_{GGLi,i-1} = C1 \frac{1}{2b} F_L K7,$$

$$m_{GGLi,i} = A1 \frac{m^2}{b} a_i F_L K7 + C1 F_L K7 + B1 \frac{b}{a_i} D_L K7, \tag{5.51}$$

$$m_{GGLi,i+1} = -C1 \frac{1}{2b} F_L K7,$$

$$m_{GGi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,$$

$$m_{GGi,i-1} = -C1 \frac{1}{b} E_L \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a_i} \right),$$

$$m_{GGi,i} = -A1 m^2 \frac{a_i}{b} E_L - C1 \frac{1}{b} E_L \left(a_i + \frac{2}{a_i} \right) - B1 \frac{b}{a_i} C_L, \tag{5.52}$$

$$m_{GGi,i+1} = C1 \frac{1}{b} E_L \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_i} \right),$$

$$
\begin{aligned}
&m_{GU\,i,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
&m_{GU\,i,i-1} = 0,\\
&m_{GU\,i,i} = -C_L m,\\
&m_{GU\,i,i+1} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.53}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{GULi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
&m_{GULi,i-1} = 0,\\
&m_{GULi,i} = D_L K7 m,\\
&m_{GULi,i+1} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{GDi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
&m_{GDi,i-1} = \frac{m}{2b} E_L K2,\\
&m_{GDi,i} = -\frac{m}{b} a_i E_L K1,\\
&m_{GDi,i+1} = -\frac{m}{2b} E_L K2,
\end{aligned}
\tag{5.55}
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{GDLi,j} = 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
&m_{GDLi,i-1} = K2 \frac{m}{2b} F_L K7,\\
&m_{GDLi,i} = -K1 \frac{m}{b} a_i F_L K7,\\
&m_{GDLi,i+1} = -K2 \frac{m}{2b} F_L K7
\end{aligned}
\tag{5.56}
$$

gdzie: $S1 = 1 - a_i$, $S2 = 4 - 2a_i + a_i^2 + \frac{a_i^3}{2}$, $S3 = 2a_i^2 m^2 + m^2 a_i^3$, $S4 = 1 - \frac{a_i}{2}$,

$S5 = 6 + 2a_i^2 + m^4 a_i^4 - 2m^2 a_i^4$, $S6 = 4a_i^2 m^2 - 2m^2 a_i^4$, $S7 = 2 + a_i^2 m^2$,

$S8 = 4 + 2a_i + a_i^2 - \frac{a_i^3}{2}$, $S9 = 2a_i^2 m^2 - m^2 a_i^3$, $S10 = 1 + \frac{a_i}{2}$, $S11 = 1 + a_i$,

$S12 = 6 + 2a_i^2 - 8m^2 a_i^4 + 16m^4 a_i^4$, $S13 = 2 + a_i^2$.

5.2.2. Układ równań w zagadnieniu dynamicznym pierścieniowej płyty trójwarstwowej z rdzeniem sprężystym

Przyjmując dla rozważanych stałych materiałowych (4.27) lepkosprężystego, standardowego modelu opisującego materiał rdzenia, że $\eta' \to 0$, a $G_2' \to \infty$, zależność (4.26) ma wówczas postać $\tilde{G}_2 = C_L = G_2$, a rozważane zagadnienie sprowadza się do problemu trójwarstwowej płyty z rdzeniem sprężystym o module Kirchhoffa G_2.

Usuwając z układu równań (5.22)÷(5.30) równania (5.24), (5.26), (5.28) oraz składniki związane z różniczkowym operatorem $\frac{\partial}{\partial t}$ wykorzystanym w opisie związków fizycznych lepkosprężystego materiału rdzenia, otrzymuje się układ równań wyjściowych płyty z rdzeniem sprężystym:

$$\boldsymbol{PU} + \boldsymbol{Q} = \boldsymbol{W1\ddot{U}}, \tag{5.57}$$

$$\boldsymbol{M}_Y \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Q}_Y, \tag{5.58}$$

$$\boldsymbol{M}_V \boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}_V, \tag{5.59}$$

$$\boldsymbol{M}_Z \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{Q}_Z, \tag{5.60}$$

$$\boldsymbol{M}_D \boldsymbol{D} + \boldsymbol{M}_U \boldsymbol{U} + \boldsymbol{M}_G \boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}, \tag{5.61}$$

$$\boldsymbol{M}_{GG} \boldsymbol{G} + \boldsymbol{M}_{GU} \boldsymbol{U} + \boldsymbol{M}_{GD} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{0}. \tag{5.62}$$

Postać warunków brzegowych na brzegu obciążonym wyrażonych przez elementy wektora $\boldsymbol{Y}$ jest następująca:

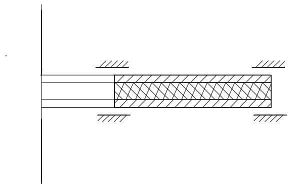
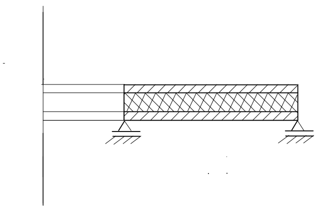
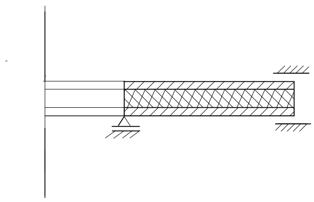
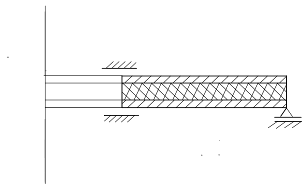
$$\begin{aligned} y_0 &= -\rho_w K10\, p^*\left(t^*\right) d_1, \\ y_{N+1} &= -K10\, p^*\left(t^*\right) d_2. \end{aligned} \tag{5.63}$$

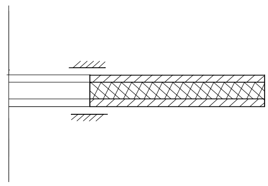
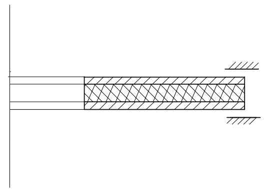
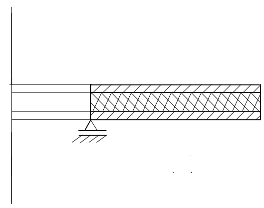
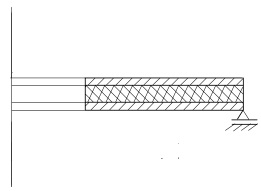
Ugięcia płyty w punktach dyskretyzacji −1, 0, N + 1, N + 2 dla przedstawionych w podrozdziale 4.5 pracy warunków brzegowych opisujących sposoby podparcia płyty (4.39), (4.40), (4.41) wyrażają zależności:

$$\begin{aligned} u_{-1} &= s_{11} u_1 + s_{12} u_2, \\ u_0 &= s_{13} u_1 + s_{14} u_2, \\ u_{N+1} &= s_{15} u_N + s_{16} u_{N-1}, \\ u_{N+2} &= s_{17} u_N + s_{18} u_{N-1}. \end{aligned} \tag{5.64}$$

Współczynniki s dla różnych sposobów podparcia płyty określają związki przedstawione w tablicy 5.2. W warunkach brzegowych pochodne pierwszego i drugiego rzędu przybliżają różnice centralne. W przypadku brzegu podpartego swobodnie występują pochodne trzeciego rzędu, które są przybliżone różnicami skończonymi w przód dla $\rho = \rho_w$ oraz różnicami skończonymi w tył dla $\rho = 1$.

Tablica 5.2. Wyrażenia opisujące współczynniki s dla różnych sposobów podparcia płyty

Sposób podparcia	**Współczynniki *s***
UU 	$s_{12} = s_{13} = s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{18} = 0$ $s_{11} = s_{17} = 1$
PP 	$s_{12} = s_{13} = s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{18} = 0$ $s_{11} = \dfrac{\nu b + 2\rho_w}{\nu b - 2\rho_w} \quad s_{17} = \dfrac{\nu b - 2}{\nu b + 2}$
PU 	$s_{12} = s_{13} = s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{18} = 0$ $s_{11} = \dfrac{\nu b + 2\rho_w}{\nu b - 2\rho_w} \quad s_{17} = 1$
UP 	$s_{12} = s_{13} = s_{14} = s_{15} = s_{16} = s_{18} = 0$ $s_{11} = 1 \quad s_{17} = \dfrac{\nu b - 2}{\nu b + 2}$

US 	$s_{12}=s_{13}=s_{14}=0$ $\quad s_{11}=1$ $s_{15}=\dfrac{r_{21}r_{23}-r_{19}r_{25}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$ $\quad s_{16}=\dfrac{r_{22}r_{23}-r_{19}r_{26}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$ $s_{17}=\dfrac{r_{20}r_{25}-r_{21}r_{24}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$ $\quad s_{18}=\dfrac{r_{20}r_{26}-r_{22}r_{24}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$
SU 	$s_{15}=s_{16}=s_{18}=0$ $\quad s_{17}=1$ $s_{11}=\dfrac{r_{12}r_{17}-r_{13}r_{16}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$ $\quad s_{12}=\dfrac{r_{11}r_{17}-r_{13}r_{15}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$ $s_{13}=\dfrac{r_{16}r_{14}-r_{12}r_{18}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$ $\quad s_{14}=\dfrac{r_{15}r_{14}-r_{11}r_{18}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$
PS 	$s_{11}=\dfrac{\nu b+2\rho_w}{\nu b-2\rho_w}$ $s_{12}=s_{13}=s_{14}=0$ $s_{15}=\dfrac{r_{21}r_{23}-r_{19}r_{25}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$ $\quad s_{16}=\dfrac{r_{22}r_{23}-r_{19}r_{26}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$ $s_{17}=\dfrac{r_{20}r_{25}-r_{21}r_{24}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$ $\quad s_{18}=\dfrac{r_{20}r_{26}-r_{22}r_{24}}{r_{19}r_{24}-r_{20}r_{23}}$
SP 	$s_{17}=\dfrac{\nu b-2}{\nu b+2}$ $s_{15}=s_{16}=s_{18}=0$ $s_{11}=\dfrac{r_{12}r_{17}-r_{13}r_{16}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$ $\quad s_{12}=\dfrac{r_{11}r_{17}-r_{13}r_{15}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$ $s_{13}=\dfrac{r_{16}r_{14}-r_{12}r_{18}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$ $\quad s_{14}=\dfrac{r_{15}r_{14}-r_{11}r_{18}}{r_{13}r_{18}-r_{14}r_{17}}$

gdzie:

$$r_{11}=-\frac{WK13}{b^3},\quad r_{12}=WK13\left(\frac{3}{b^3}-\frac{1}{\rho_w b^2}+\frac{1}{\rho_w{}^2 2b}+\frac{\nu m^2}{\rho_w{}^2 2b}\right)+WK14\frac{m^2}{\rho_w{}^2 2b}+\frac{1}{2b},$$

$$r_{13}=WK13\left(-\frac{3}{b^3}+\frac{2}{\rho_w b^2}-\frac{m^2}{\rho_w{}^3}-\frac{\nu m^2}{\rho_w{}^3}\right)-WK14\frac{m^2}{\rho_w{}^3},$$

$$r_{14}=WK13\left(\frac{1}{b^3}-\frac{1}{\rho_w b^2}-\frac{1}{\rho_w{}^2 2b}-\frac{\nu m^2}{\rho_w{}^2 2b}\right)-WK14\frac{m^2}{\rho_w{}^2 2b}-\frac{1}{2b},\qquad r_{15}=0,$$

$$r_{16}=\frac{1}{b^2}+\frac{\nu}{\rho_w 2b},\qquad r_{17}=-\frac{2}{b^2}-\frac{\nu m^2}{\rho_w{}^2},\qquad r_{18}=\frac{1}{b^2}-\frac{\nu}{\rho_w 2b},$$

$$r_{19}=-\frac{WK13}{b^3}-\frac{WK13}{b^2}+\frac{WK13}{2b}+WK14\frac{m^2}{2b}+WK13\frac{\nu m^2}{2b}+\frac{1}{2b},$$

$$r_{20}=WK13\left(\frac{3}{b^3}+\frac{2}{b^2}-\nu m^2-m^2\right)-WK14m^2,$$

$$r_{21}=WK13\left(-\frac{3}{b^3}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{2b}-\frac{\nu m^2}{2b}\right)-WK14\frac{m^2}{2b}-\frac{1}{2b},\qquad r_{22}=\frac{WK13}{b^3},$$

$$r_{23}=\frac{1}{b^2}+\frac{\nu}{2b},\qquad r_{24}=-\frac{2}{b^2}-m^2\nu,\quad r_{25}=\frac{1}{b^2}-\frac{\nu}{2b},\quad r_{26}=0,$$

$$WK13=\frac{k_1h_2}{G_2r_z^3H'^2},\qquad WK14=\frac{2k_{12}h_2}{G_2r_z^3H'^2},\quad \mathrm{k}_{12}=4\mathrm{D}_{\mathrm{r}\theta}.$$

5.2.3. Równania w zagadnieniu statycznym pierścieniowej płyty trójwarstwowej z rdzeniem sprężystym

Przyjmując, że funkcja F_a, jest rozwiązaniem stanu tarczowego opisanego równaniem (5.65) powstałym po pominięciu ugięcia wstępnego i wyrażeń nieliniowych w równaniu (5.20):

$$Y_{o,\rho\rho}+\frac{1}{\rho}Y_{o,\rho}-\frac{1}{\rho^2}Y_o=0, \tag{5.65}$$

po uwzględnieniu wyrażeń (5.63):

$$\begin{aligned} F_{a,\rho}\Big|_{\rho=\rho_W}&=-\rho_w K10\,p^*d_1,\\ F_{a,\rho}\Big|_{\rho=1}&=-K10\,p^*d_2, \end{aligned} \tag{5.66}$$

powstaje zależność opisująca funkcję $F_{a,\rho}$:

$$F_{a,\rho} = Y_o = K10\,p^*\left(e_1\rho + e_2\frac{1}{\rho}\right) \tag{5.67}$$

gdzie:

$$e_1 = \frac{d_2\dfrac{1}{\rho_w} - d_1\rho_w}{\rho_w - \dfrac{1}{\rho_w}}, \qquad e_2 = \frac{d_1\rho_w - d_2\rho_w}{\rho_w - \dfrac{1}{\rho_w}}.$$

Podstawiając (5.67) do zmodyfikowanej postaci równania (5.13) pozbawionego członu bezwładnościowego i ugięcia wstępnego, po przyjęciu parametrów materiałowych rdzenia sprężystego ($\bar{O}_1 = C_L = G_2$, $\bar{O}_2 = 1$) oraz zastąpieniu pochodnych różnicami centralnymi i wykonaniu przekształceń powstaje równanie:

$$\boldsymbol{PU} + \boldsymbol{M}_{AD}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{M}_{AG}\boldsymbol{G} = p^*\boldsymbol{M}_{AC}\boldsymbol{U}, \tag{5.68}$$

w którym:

– elementy macierzy $\boldsymbol{P}$ opisują zależności (5.40) z uogólnioną postacią elementów $p_{1,1}$, $p_{1,2}$, $p_{2,1}$, $p_{2,2}$, $p_{N\text{-}1,N\text{-}1}$, $p_{N\text{-}1,N}$, $p_{N,N\text{-}1}$, $p_{N,N}$ dla dowolnego przypadku podparcia płyty przedstawionego w tablicy 5.2:

$$\begin{aligned}
p_{1,1} &= p_{i,i}\big|_{i=1} + p_{i,i-2}\big|_{i=1} s_{11} + p_{i,i-1}\big|_{i=1} s_{13},\\
p_{1,2} &= p_{i,i+1}\big|_{i=1} + p_{i,i-2}\big|_{i=1} s_{12} + p_{i,i-1}\big|_{i=1} s_{14},\\
p_{2,1} &= p_{i,i-1}\big|_{i=2} + p_{i,i-2}\big|_{i=2} s_{13},\\
p_{2,2} &= p_{i,i}\big|_{i=2} + p_{i,i-2}\big|_{i=2} s_{14},\\
p_{N-1,N-1} &= p_{i,i}\big|_{i=N-1} + p_{i,i+2}\big|_{i=N-1} s_{16},\\
p_{N-1,N} &= p_{i,i+1}\big|_{i=N-1} + p_{i,i+2}\big|_{i=N-1} s_{15},\\
p_{N,N-1} &= p_{i,i-1}\big|_{i=N} + p_{i,i+1}\big|_{i=N} s_{16} + p_{i,i+2}\big|_{i=N} s_{18},\\
p_{N,N} &= p_{i,i}\big|_{i=N} + p_{i,i+1}\big|_{i=N} s_{15} + p_{i,i+2}\big|_{i=N} s_{17},
\end{aligned} \tag{5.69}$$

– elementy macierzy $\boldsymbol{M}_{AD}$ i $\boldsymbol{M}_{AG}$ opisują odpowiednio zależności:

$$\begin{aligned}
m_{ADi,j} &= 0 \quad \text{dla} \quad |i-j| > 1,\\
m_{ADi,i-1} &= -\frac{W3}{2b},\\
m_{ADi,i} &= \frac{W3}{\rho_i},\\
m_{ADi,i+1} &= \frac{W3}{2b},
\end{aligned} \tag{5.70}$$

$$m_{AGi,j}=0 \quad \text{dla} \quad |i-j|>1,$$
$$m_{AGi,i-1}=0,$$
$$m_{AGi,i}=\frac{W3m}{\rho_i}, \tag{5.71}$$
$$m_{AGi,i+1}=0,$$

– elementy macierzy $\boldsymbol{M}_{AC}$ z uogólnioną postacią elementów $m_{AC1,1}$, $m_{AC1,2}$, $m_{AC\,N,N-1}$, $m_{AC\,N,N}$ dla przypadków podparcia płyty (tablica 5.1) przedstawiają zależności:

$$m_{ACi,j}=0 \quad \text{dla} \quad |i-j|>1,$$
$$m_{ACi,i-1}=-WK5^2\,K10\frac{1}{b^2}\left(R_i-\frac{P_i b}{2}\right),$$
$$m_{ACi,i}=WK5^2\,K10\frac{1}{b^2}\left(2R_i+m^2P_i a_i b\right), \tag{5.72}$$
$$m_{ACi,i+1}=-WK5^2\,K10\frac{1}{b^2}\left(R_i+\frac{P_i b}{2}\right),$$
$$R_i=2WK2\frac{1}{\rho_i}\left(e_1\rho_i+e_2\frac{1}{\rho_i}\right), \qquad P_i=2WK2\frac{1}{\rho_i}\left(e_1-e_2\frac{1}{\rho_i^2}\right),$$

$$m_{AC\,1,1}=m_{ACi,i}\big|_{i=1}+m_{AC\,i,i-1}\big|_{i=1}\,s_{13}, \qquad m_{AC\,1,2}=m_{ACi,i+1}\big|_{i=1}+m_{AC\,i,i-1}\big|_{i=1}\,s_{14},$$
$$m_{AC\,N,N-1}=m_{ACi,i-1}\big|_{i=N}+m_{AC\,i,i+1}\big|_{i=N}\,s_{16}, \quad m_{AC\,N,N}=m_{ACi,i}\big|_{i=N}+m_{AC\,i,i+1}\big|_{i=N}\,s_{15}.$$

Niewiadome elementy wektorów $\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{G}$ w równaniu (5.68) można wyznaczyć z obowiązującego również w tym przypadku układu dwóch równań (5.61), (5.62), w którym uogólniona postać elementów macierzy $\boldsymbol{M}_U$ dla przedstawionych w tablicy 5.2 sposobów podparcia płyty jest następująca:

$$m_{U1,1}=-\frac{1}{2b}s_{13}, \qquad m_{U1,2}=\frac{1}{2b}\left(1-s_{14}\right),$$
$$m_{U\,N,N-1}=\frac{1}{2b}\left(s_{16}-1\right), \quad m_{U\,N,N}=\frac{1}{2b}s_{15}. \tag{5.73}$$

Wartość krytycznego obciążenia statycznego p_{kr}^* przyjęto jako równą najmniejszej z wartości własnych, drogą minimalizacji względem liczby fal n w kierunku promieniowym płyty (obszerniejsze wyjaśnienie zawiera podrozdział

7.2 pracy), wyznaczonych w wyniku rozwiązania odpowiedniego zagadnienia wartości własnych:

$$det\left[\left(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{M}_{AD}\boldsymbol{M}_{ATD}+\boldsymbol{M}_{AG}\boldsymbol{M}_{ATG}\right)-p^{*}\boldsymbol{M}_{AC}\right]=\boldsymbol{0}, \tag{5.74}$$

w którym macierze $\boldsymbol{M}_{ATD}$, $\boldsymbol{M}_{ATG}$ określone są przez zależności:

$$\boldsymbol{M}_{ATG}=\left(\boldsymbol{M}_{GG}-\boldsymbol{M}_{GD}\boldsymbol{M}_{D}^{-1}\boldsymbol{M}_{G}\right)^{-1}\left(\boldsymbol{M}_{GD}\boldsymbol{M}_{D}^{-1}\boldsymbol{M}_{U}-\boldsymbol{M}_{GU}\right),$$

$$\boldsymbol{M}_{ATD}=-\boldsymbol{M}_{D}^{-1}\boldsymbol{M}_{U}-\boldsymbol{M}_{D}^{-1}\boldsymbol{M}_{G}\boldsymbol{M}_{ATG}.$$

5.3. Opis obliczeń numerycznych

Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności płyt wykorzystuje autorski program obliczeniowy napisany w języku Fortran. W programie zastosowane są następujące algorytmy obliczeniowe [23], [79], [97], [116]:

- mnożenia macierzy przez wektor,
- mnożenia macierzy,
- odwracania macierzy metodą Gaussa-Jordana,
- redukcji macierzy do górnej macierzy Hessenberga,
- przekształcenia QR do wyznaczenia wartości własnej górnej macierzy Hessenberga,
- metody Rungego-Kutty-Gilla rozwiązywania układu równań różniczkowych zwyczajnych.

Ogólny schemat prowadzonych obliczeń jest następujący:

1) wprowadzenie danych – liczb opisujących parametry płyty:
   - materiałowe: E, G, ν, μ, G_2, μ_2 – sprężyste stałe materiałowe okładzin i rdzenia, G_2', η' – stała sprężystości i stała lepkości materiału rdzenia,
   - geometryczne: h', h_2 – grubość warstwy okładziny i rdzenia, r_z i ρ_w – promień zewnętrzny i bezwymiarowy promień wewnętrzny płyty,
   - związane z postacią deformacji płyty: ξ_1, ξ_2 (5.2) – wielkości opisujące postać ugięcia wstępnego płyty,

     m – liczba poprzecznych fal obwodowych wyboczenia płyty,

– związane z obciążeniem i sposobem podparcia płyty: *K7* – parametr sterujący prędkością wzrostu obciążenia liniowego *p(t)* (na podstawie (3.1) i (5.1)),

d_1, d_2 – liczby wskazujące rodzaj obciążonego brzegu płyty (4.42),

UU, PP, UP, PU, US, SU, PS, SP – oznaczenia procedury w programie do obliczeń wielkości (tablica 5.2) opisujących sposób podparcia brzegów płyty,

2) przyjęcie liczby punktów dyskretyzacji *N* dla analizowanego w metodzie różnic skończonych modelu obliczeniowego płyty;

3) wyznaczenie wartości bezwymiarowego statycznego obciążenia krytycznego p_{kr}^* (5.74) płyty z rdzeniem sprężystym poprzez:
   - wyznaczenie metodą Gaussa następujących macierzy odwrotnych: $\boldsymbol{M}_{AC}^{-1}$, $\boldsymbol{M}_{D}^{-1}$,
   - wyznaczenie macierzy $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}_{GG} - \boldsymbol{M}_{GD}\boldsymbol{M}_{D}^{-1}\boldsymbol{M}_{G}$ i macierzy odwrotnej $\boldsymbol{M}'^{-1}$,
   - wyznaczenie macierzy $\boldsymbol{MM}' = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{M}_{AD}\boldsymbol{M}_{ATD} + \boldsymbol{M}_{AG}\boldsymbol{M}_{ATG}$ i macierzy $\boldsymbol{M}_{AC}^{-1}\boldsymbol{MM}'$,
   - sprowadzenie otrzymanej macierzy do górnej macierzy Hessenberga,
   - obliczenia wartości własnych górnej macierzy Hessenberga według algorytmu QR i wybór wielkości najmniejszej;

4) wyznaczenie wartości ugięć płyty poddanej obciążeniom dynamicznym w przyjętych punktach dyskretyzacji:
   - wyznaczenie i odwrócenie metodą Gaussa macierzy $\boldsymbol{M}_Y$, $\boldsymbol{M}_V$, $\boldsymbol{M}_Z$ (5.23)÷(5.28) i $\boldsymbol{M}_{DL}$, $\boldsymbol{M}_{GGL}$ (5.29)÷(5.30),
   - rozwiązanie metodą Rungego-Kutty-Gilla równań różniczkowych (5.23)÷(5.30), wyznaczając wielkości: y_i, v_i, z_i, d_i, g_i oraz ich pochodne,
   - rozwiązanie równania różniczkowego (5.22) rzędu trzeciego lub drugiego (5.57) dla płyty z rdzeniem sprężystym z wyznaczeniem ugięć w punktach dyskretyzacji 1,…, N;

5) na podstawie przyjętego kryterium utraty stateczności płyty (podrozdział 3.1 pracy) i wynikającego z niego warunku (3.2) wyznaczenie wartości czasu t_{kr}^*, w której następuje utrata dynamicznej stateczności płyty.

6. Wyniki obliczeń płyt warstwowych

Duża liczba parametrów opisujących model badanej płyty sprawia, że zagadnienie oceny krytycznych i pokrytycznych jej zachowań jest problemem złożonym. Podstawową analizą w zagadnieniach stateczności elementów konstrukcyjnych jest ocena krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} i odpowiadających im postaci deformacji. Wpływ parametrów materiałowych, geometrycznych, związanych z obciążeniem i sposobem podparcia płyty warstwowej, na wartości krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} jest ważnym elementem tej analizy podstawowej, której ocena poprzedza właściwą analizę dynamiczną stateczności płyt. Działanie zmiennego w czasie obciążenia na wybrany brzeg płyty umożliwia ocenę charakterystyk czasowych ugięcia płyty wraz ze wskazaniem krytycznych wartości czasu t_{kr}, ugięcia w_{dkr} i obciążenia p_{krdyn}, tj. wielkości opisujących dynamiczną stateczność badanej płyty. Zakres podjętej analizy obejmuje ocenę wyników dla zasadniczego przypadku badanej płyty, tj. płyty z rdzeniem sprężystym obciążanej do krawędzi wewnętrznego lub zewnętrznego brzegu okładziny (w opisie, zwłaszcza gdy obciążony jest brzeg wewnętrzny płyty, zostanie przyjęte określenie: ściskana promieniowo) z obserwacją wpływu na otrzymane wyniki takich parametrów modelu, jak:

- parametrów materiałowych: sprężystych i charakteryzujących lepkosprężyste właściwości rdzenia,
- parametrów geometrycznych związanych z grubościami okładzin i rdzenia płyty, wymiarami jej promieni gabarytowych oraz opisujących postać i stopień niedoskonałości jej początkowego kształtu,
- parametrów obciążeniowych wpływających na zmianę prędkości wzrostu obciążeń działających na brzeg płyty.

Obliczenia wykorzystujące metodę różnic skończonych poprzedza, konieczna w metodach przybliżonych, analiza zbieżności uzyskiwanych wyników, na podstawie której dobiera się liczbę punktów dyskretyzacji N badanego modelu.

6.1. Wartości liczbowe przyjęte w obliczeniach płyt

Z szerokiego zakresu możliwych w wyborze danych liczbowych opisujących model obliczeniowy płyty przyjętymi wartościami parametrów są liczby, które określają badaną płytę jako reprezentanta grupy płyt pierścieniowych o strukturze warstwowej.

W opisie geometrii płyty jej podstawowe, gabarytowe wymiary, tj. promień zewnętrzny r_z i całkowita grubość h, spełniają stosowany dla jednorodnych płyt cienkich warunek, zgodnie z którym grubość płyty jest wielokrotnie mniejsza od jej pozostałych wymiarów [41]. Badaniom poddano więc płyty o grubościach okładzin: $h' = 0{,}0005$ m i 0,001 m i grubościach rdzenia: $h_2 = 0{,}005$, 0,01, 0,02 m traktowanych jako grubość średnia oraz grubościach: $h_2 = 0{,}04$, 0,06 m płyt z rdzeniem grubym analizowanych w rozdziale 8 pracy, dla stałej, ustalonej wartości zewnętrznego promienia płyty r_z, równej $r_z = 0{,}5$ m. Zasadnicze obliczenia prowadzono dla płyt o promieniu wewnętrznym r_w równym, $r_w = 0{,}2$ m, dla którego wartość bezwymiarowa promienia ρ_w (5.1) wynosi $\rho_w = 0{,}4$.

Materiałami okładzin i rdzenia są odpowiednio stal i dwa rodzaje miękkiej pianki poliuretanowej. Stałe materiałowe są następujące:

– stal: $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ MPa, $G = 8 \cdot 10^4$ MPa, $\nu = 0{,}3$, $\mu = 7{,}85 \cdot 10^3$ kg/m^3,
– pianka poliuretanowa [84]: $G_2 = 15{,}82$ MPa, $G_2' = 69{,}59$ MPa, $\eta' = 7{,}93 \cdot 10^4$ MPa·s, $\mu_2 = 93{,}6$ kg/m^3,
– pianka poliuretanowa [50]: $G_2 = 5$ MPa, $\mu_2 = 64$ kg/m^3, $\varphi = 0{,}845\left(2 - e^{-0{,}36t} - e^{-0{,}036t}\right)$ – funkcja opisująca pełzanie materiału pianki.

W analizie materiał pianki poliuretanowej jest traktowany jako izotropowy. Stąd, wartości modułów Younga materiałów pianek, dla przyjętej zgodnie z normą [52] wartości liczby Poissona ν_2, równej: $\nu_2 = 0{,}3$, wynoszą odpowiednio: $E_2 = 41{,}13$ MPa i 13 MPa.

Wstępną deformację płyty opisuje zależność (5.2a), w której istotną rolę odgrywają liczby ξ_1 i ξ_2. Zasadnicze obliczenia płyt prowadzono dla wartości liczby $\xi_1 = 0$, tj. przy braku składowej obrotowosymetrycznej opisującej postać wstępnego ugięcia płyty, gdy wartość liczby ξ_2, równa jest $\xi_2 = 1$ i występuje zgodność liczb fal obwodowych m określających postać wstępnie ugiętej oraz krytycznie zdeformowanej płyty.

Przyjmowana w danych obliczeniowych płyt liczba fal obwodowych m określa postać krytycznej deformacji płyty badanej w szerokim zakresie: od postaci obrotowosymetrycznej, gdy $m = 0$ do przypadku płyty o dużej liczbie fal obwodowych, gdy $m > 10$,

Stopień zmian prędkości narastającego obciążenia działającego na brzeg płyty opisuje parametr s wyrażony liczbą $K7$ (5.1) jako: $s = K7 \cdot p_{kr}$. Podstawowe obliczenia płyt poddanych obciążeniom zmiennym prowadzono dla wartości liczby

K7 = 20 1/s, przyjmując, także w analizie szczegółowej (podrozdział 6.6 pracy) wartości liczb *K7* równe: K7 = 10 1/s i 40 1/s.

Dobór liczby wewnętrznych punktów dyskretyzacji N modelu płyty rozwiązanej metodą różnic skończonych przedstawia analiza opisana w podrozdziale 6.3 pracy.

6.2. Podejście do opisu obciążeń krytycznych płyt przyjęte w pracy

W pracy przyjęto następujące podejście do opisu obciążeń wywołujących utratę stateczności badanych płyt.
Ciąg liczb reprezentujących wartości obciążeń statycznych i dynamicznych płyt, dla których istnieje możliwość wystąpienia różnych postaci wyboczenia badanych numerycznie modeli płyt, tworzy zbiór obciążeń krytycznych: statycznych obciążeń krytycznych p_{kr} i dynamicznych obciążeń krytycznych p_{krdyn}. Znaczenie praktyczne mają wartości minimalne tych obciążeń. Ich ujawnienie odbywa się na tle pozostałych, możliwych dla obiektu rzeczywistego płyty, obciążeń krytycznych, których wartości są bliskie obciążeniom minimalnym, w formie graficznego lub tablicowego rozkładu liczb p_{kr} lub p_{krdyn} zależnych od liczby m fal wyboczenia.

Potwierdzone licznymi wynikami obliczeń numerycznych obserwacje stanu krytycznego badanych płyt pokazują, że liczbie m fal wyboczenia płyty przy minimalnej wartości statycznego obciążenia krytycznego nie zawsze odpowiada ta sama postać wyboczenia globalnego przy minimalnej wartości dynamicznego obciążenia krytycznego. Traktując geometrię postaci wyboczenia statycznego jako kształtującą postać ugięcia wstępnego płyty w zagadnieniu dynamicznym, analiza innych niż tylko odpowiadających minimalnym obciążeniom krytycznym postaci wyboczenia ma znaczenie praktyczne. Przyjęcie jako formy ugięcia wstępnego płyty geometrii odpowiadającej postaci wyboczenia dla minimalnego statycznego obciążenia krytycznego istotnie ograniczyłoby obszar analizy, prowadząc niejednokrotnie do niewłaściwych wniosków.
Przykładem mogą być spotykane w literaturze [1], [27], [73] rozwiązania płyt jedynie obrotowosymetrycznych dla liczby m fal wyboczenia m = 0, których obciążenie niekoniecznie minimalne jest określane mianem krytycznego.
Liczne, przedstawione w pracy, wyniki obliczeń modeli płyt analizowanych dwoma metodami: metodą różnic skończonych i metodą elementów skończonych potwierdzają zasadność takiego podejścia do opisu obciążeń płyt przy statycznej i dynamicznej utracie stateczności – podczas oceny ich stanu krytycznego.

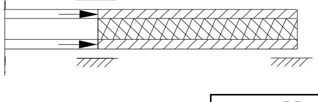
Potwierdzeniem takiego podejścia w literaturze jest przedstawione w pracy [26] stwierdzenie tłumaczące przyczynę traktowania każdej wartości krzywej opisującej dynamiczne obciążenia krytyczne jako funkcji liczby fal w kierunku osiowym w zagadnieniu wyboczenia powłoki ściskanej quasi-statycznie, jako właśnie obciążenia krytycznego, dynamicznego. Autor pracy [26] zwraca uwagę, iż wykres zależności parametru dynamicznego obciążenia krytycznego jako funkcji liczby fal ma znaczenie, gdy analiza jest prowadzona w dużym przedziale liczb fal, a nie tylko w pobliżu wartości minimalnej obciążenia.

6.3. Liczba punktów dyskretyzacji

Przykładowe wyniki obliczeń statycznych i dynamicznych obciążeń krytycznych płyt z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym dla różnej liczby punktów dyskretyzacji *N* modelu obliczeniowego płyty przedstawiają tablice 6.1, 6.2, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6.

Dla wszystkich przedstawionych przypadków obliczeń płyt wartości obciążeń krytycznych są liczbami zbieżnymi do liczby wyznaczonej dla największej liczby punktów dyskretyzacji *N* (N = 21 lub N = 26). W obliczeniach płyt przyjęta została liczba N = 14 punktów dyskretyzacji, która spełnia warunek maksymalnej wartości błędu do 5%. Wartość błędu jest znacznie niższa od 5% dla wartości obciążeń statycznych p_{kr}, poza przypadkami płyt, których jeden z brzegów jest swobodny. Wówczas wartość błędu jest rzędu 2,5%. Powstała większa różnica wartości obciążeń krytycznych tych płyt wyznaczona dla liczb N = 14 i N = 26 jest związana ze wspomnianym w punkcie 5.2 pracy przyjętym przybliżeniem występujących w rozwiązaniu pochodnych trzeciego rzędu. Zastosowano wówczas różnice skończone w przód i w tył.

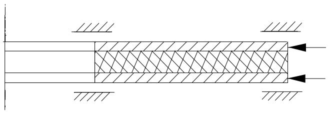
Tablica 6.1. Wartości krytycznych obciążeń p_{kr}, p_{krdyn} obrotowosymetrycznej m = 0 płyty z rdzeniem sprężystym obciążonej na brzegu wewnętrznym



$d_1 = 1$ $d_2 = 0$
$G_2 = 5$ MPa $h_2 = 0{,}02$ m $h' = 0{,}001$ m
$\mu_2 = 64$ kg/m^3 K7 = 20 1 /s m = 0 $\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$

N	11	14	17	21
p_{kr} [MPa]	147,13	150,29	151,53	152,35
p_{krdyn} [MPa]	152,87	154,35	154,71	155,24

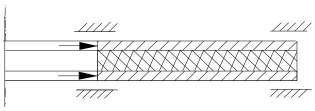
Tablica 6.2. Wartości krytycznych obciążeń p_{kr}, p_{krdyn} płyty z rdzeniem sprężystym obciążonej na brzegu zewnętrznym

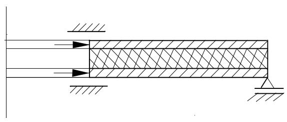


$d_1 = 0 \ \ d_2 = 1$
$G_2 = 15,82$ MPa $\ \ h_2 = 0,01$ m $\ \ h' = 0,001$ m
$\mu_2 = 93,6$ kg/m^3 $\ \ K7 = 20$ 1 /s $\ \ \xi_1 = 0 \ \ \xi_2 = 1$

	N							
	11		14		17		21	
m	p_{kr} [MPa]	p_{krdyn} [MPa]	p_{kr} [MPa]	p_{krdyn} [MPa]	p_{kr} [MPa]	p_{krdyn} [MPa]	p_{kr} [MPa]	p_{krdyn} [MPa]
0	121,07	127,49	121,23	127,41	121,32	127,51	121,39	127,34
1	116,53	129,70	116,70	128,49	116,79	128,12	116,86	127,96
2	103,75	112,36	104,02	112,24	104,18	112,41	104,31	112,13
3	90,43	93,60	90,78	93,78	90,99	93,99	91,17	94,54
4	81,62	85,13	81,95	86,29	82,16	85,86	82,34	85,72
5	76,63	83,91	76,91	83,94	77,10	83,35	77,26	83,36
6	74,05	81,97	74,30	81,51	74,46	81,38	74,59	81,38
7	73,01	80,53	73,22	80,47	73,36	80,18	73,48	80,02
8	73,00	80,08	73,18	79,69	73,29	79,37	73,40	79,20

Tablica 6.3. Wartości krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} płyty z rdzeniem sprężystym obciążonej na brzegu wewnętrznym dla różnych sposobów podparcia



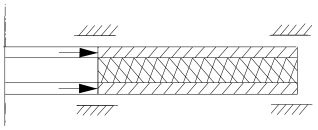


$d_1 = 1 \ \ d_2 = 0$ $\qquad G_2 = 5$ MPa $\qquad h_2 = 0,005$ m $\qquad h' = 0,001$ m

	p_{kr} [MPa]											
	SPOSÓB PODPARCIA											
	UU				**UP**				**PU**			
	m				**m**				**m**			
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**
11	74,70	86,72	121,55	159,35	73,24	86,12	121,34	159,34	43,30	49,57	71,13	102,47
14	75,61	87,65	123,31	165,28	74,05	86,99	123,11	165,22	42,33	49,92	71,08	102,57
17	76,05	88,10	124,12	167,00	74,44	87,40	123,92	166,93	43,26	49,91	71,08	102,69
21	76,36	88,42	124,71	168,23	74,71	87,70	124,51	168,15	43,26	49,90	71,09	102,81
26	76,57	88,63	125,12	169,07	74,89	87,89	124,91	168,98	43,26	49,89	71,10	102,89
	PP				**US**				**PS**			
	m				**m**				**m**			
N	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**
11	42,38	49,44	71,12	102,43	50,26	79,00	120,36	159,34	29,74	43,82	71,12	102,35
14	42,33	49,37	71,08	102,52	50,54	79,47	122,15	165,22	29,64	43,73	71,08	102,45
17	42,31	49,35	71,08	102,65	50,67	79,72	122,96	166,91	29,59	43,69	71,08	102,57
21	42,30	49,33	71,09	102,76	50,75	79,92	123,55	168,13	29,54	43,67	71,09	102,68
26	42,29	49,32	71,09	102,84	50,80	80,05	123,95	168,95	29,51	43,65	71,09	102,76

U – utwierdzenie, P – brzeg swobodnie podparty, S – brzeg swobodny

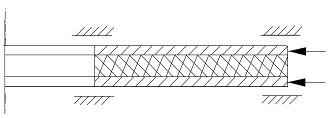
Tablica 6.4. Wartości krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} i dynamicznych p_{krdyn} obrotowosymetrycznej m = 0 płyty z rdzeniem lepkosprężystym obciążonej na brzegu wewnętrznym



$d_1 = 1$ $d_2 = 0$
$G_2 = 15{,}82$ MPa $G_2' = 69{,}59$ MPa $\eta' = 7{,}93\cdot10^4$ MPa·s
$h_2 = 0{,}005$ m $h' = 0{,}001$ m $\mu_2 = 93{,}6$ kg/m^3 K7 = 20 1 /s
$m = 0$ $\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 2$

N	**11**	**14**	**17**	**21**	**26**
p_{kr} [MPa]	146,37	149,34	150,50	151,26	151,74
p_{krdyn} [MPa]	158,23	159,94	160,58	161,09	161,60

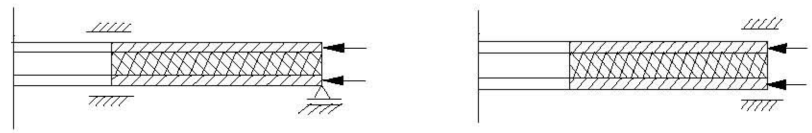
Tablica 6.5. Wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} płyty z rdzeniem lepkosprężystym obciążonej na brzegu zewnętrznym



$d_1 = 0$ $d_2 = 1$
$G_2 = 5$ MPa $G_2' = 3{,}13$ MPa $\eta' = 212{,}92\cdot10^4$ MPa·s
(G_2' i η' są określone w podrozdziale 6.5 pracy)
$h_2 = 0{,}005$ m $h' = 0{,}001$ m $\mu_2 = 64$ kg/m^3 K7 = 20 1 /s
$\xi_1 = 0$ $\xi_2 = 1$

	N									
	11		**14**		**17**		**21**		**26**	
m	**p_{kr} [MPa]**	**p_{krdyn} [MPa]**	**p_{kr} [MPa]**	**p_{krdyn} [MPa]**	**p_{kr} [MPa]**	**p_{krdyn} [MPa]**	**p_{kr} [MPa]**	**p_{krdyn} [MPa]**	**p_{kr} [MPa]**	**p_{krdyn} [MPa]**
0	32,78	36,48	32,89	36,61	32,94	36,60	32,98	36,64	33,01	36,61
1	30,93	35,11	31,04	35,17	31,10	35,24	31,14	35,28	31,17	35,32
2	26,82	29,26	26,94	29,34	27,01	29,41	27,07	29,48	27,11	29,52
3	23,20	24,01	23,33	24,05	23,41	24,14	23,47	24,24	23,51	24,29
4	21,09	21,36	21,22	21,41	21,29	21,44	21,35	21,50	21,39	21,53
5	**20,24**	21,07	20,35	20,90	20,41	20,88	20,46	20,93	20,50	20,97
6	20,25	**20,96**	**20,34**	**20,89**	**20,40**	**20,87**	**20,44**	**20,87**	**20,47**	20,94
7	20,86	21,09	20,94	21,00	20,98	20,92	21,02	20,87	21,05	**20,90**
8	21,90	21,48	21,97	21,32	22,01	21,24	22,05	21,19	22,07	21,17

Tablica 6.6. Wartości krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} płyty z rdzeniem sprężystym obciążonej na brzegu zewnętrznym dla różnych przypadków podparcia



$d_1 = 0$ $d_2 = 1$ $G_2 = 5$ MPa $h_2 = 0{,}005$ m $h' = 0{,}001$ m

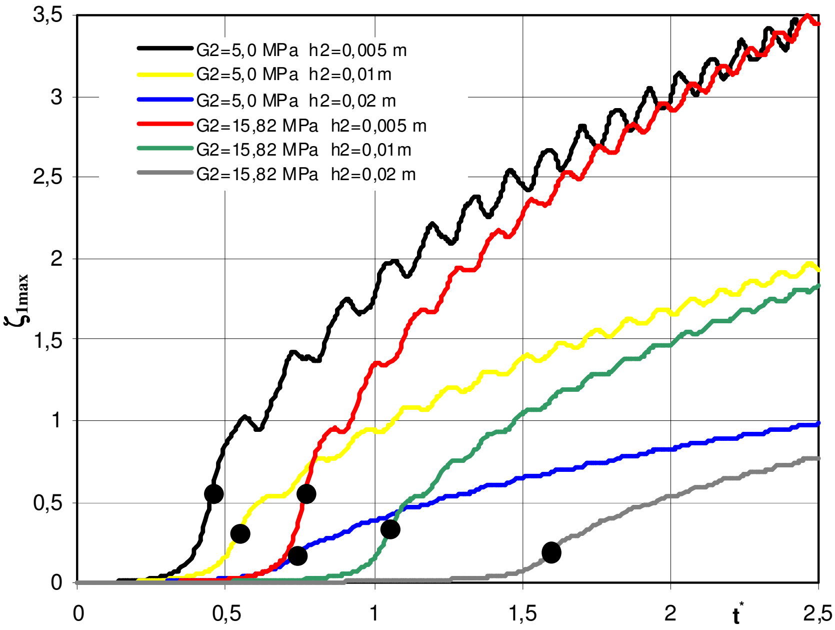
	p_{kr} [MPa]														
	PODPARCIE TYPU **UP**					PODPARCIE TYPU **PP**					PODPARCIE TYPU **SU**				
m	**N = 11**	**N = 14**	**N = 17**	**N = 21**	**N = 26**	**N = 11**	**N = 14**	**N = 17**	**N = 21**	**N = 26**	**N = 11**	**N = 14**	**N = 17**	**N = 21**	**N = 26**
0	24,83	24,86	24,88	24,89	24,89	24,32	24,33	24,34	24,35	24,35	23,70	23,62	23,56	23,49	23,44
1	23,94	23,97	23,90	24,00	24,01	23,21	23,22	23,23	23,24	23,24	19,20	18,97	18,81	18,65	18,51
2	21,86	21,91	21,93	21,95	21,97	20,74	20,75	20,76	20,77	20,78	15,52	15,26	15,08	14,91	14,77
3	19,92	19,98	20,01	20,04	20,05	18,75	18,77	18,78	18,78	18,79	**14,60**	**14,37**	**14,21**	**14,06**	**13,93**
4	18,83	18,89	18,92	18,95	18,97	17,86	17,88	17,89	17,89	17,90	14,89	14,70	14,55	14,42	14,30
5	**18,56**	**18,61**	**18,64**	**18,66**	**18,68**	**17,83**	**17,84**	**17,85**	**17,85**	**17,85**	15,79	15,62	15,50	15,38	15,28
6	18,90	18,94	18,97	18,99	19,00	18,37	18,38	18,39	18,39	18,39	17,07	16,94	16,84	16,74	16,64
7	19,69	19,73	19,74	19,76	19,78	19,32	19,33	19,34	19,34	19,34	18,62	18,52	18,45	18,37	18,29
8	20,83	20,85	20,87	20,89	20,90	20,58	20,59	20,59	20,60	20,60	20,37	20,31	20,26	20,20	20,15
9	22,23	22,26	22,27	22,28	22,29	22,08	22,09	22,09	22,10	22,10	22,28	22,25	22,22	22,19	22,15
10	23,87	23,89	23,90	23,91	23,92	23,77	23,78	23,79	23,79	23,79	24,29	24,29	24,29	24,27	24,26

6.4. Postacie deformacji krytycznej i wartości krytycznych obciążeń płyt z rdzeniem sprężystym

W zagadnieniach stateczności wyznaczenie minimalnej wartości obciążenia krytycznego i odpowiadającej jej postaci krytycznej deformacji jest szczególnie ważnym elementem badań analizowanej płyty. Wpływ wielu czynników na warunki pracy płyty, w połączeniu ze złożoną jej strukturą zależną od wielu parametrów, utrudnia, a w wielu przypadkach uniemożliwia formułowanie praktycznych uogólnień. Można przyjąć, że każda badana płyta stanowi oddzielne zadanie wymagające wnikliwej analizy. Pewne spostrzeżenia ogólne są oczywiście możliwe w odniesieniu do określonych przypadków badanych płyt, stanowiących grupę wykazującą się podobieństwem. Do takiej grupy zaliczono płyty z rdzeniem sprężystym, przesuwnie utwierdzone na obu brzegach, obciążone ciśnieniem działającym na wewnętrzny lub zewnętrzny brzeg okładzin, różniące się zmiennymi parametrami materiałowymi rdzenia i grubościami poszczególnych warstw.
Ustalonymi parametrami w analizie dynamicznej są liczby opisujące ugięcie wstępne płyt, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ (5.2a) oraz liczba K7 = 20 1/s (5.1) sterująca prędkością s wzrostu obciążenia liniowego $p = st$.

Wartości ugięć maksymalnych $\varsigma_{1max} = f(t^*)$ płyt o podanych wartościach grubości rdzenia h_2 i modułu Kirchhoffa G_2 jego materiału w bezwymiarowym czasie t^* obciążenia działającego na brzeg wewnętrzny płyty przedstawia wykres na rysunku 6.1. Płyty o grubości okładzin $h' = 0{,}001$ m są obciążone ciśnieniem narastającym z jednakową prędkością $s = K7 \cdot p_{kr}$ (5.1) określoną liczbą $K7$ i przyjętą wartością krytycznego obciążenia statycznego, równą $p_{kr} = 217{,}32$ MPa, wyznaczoną dla płyty o parametrach: $G_2 = 15{,}82$ MPa, $h_2 = 0{,}01$ m (tablica 6.7). Wyróżniony punkt krzywych $\varsigma_{1max} = f(t^*)$ wyznacza bezwymiarowy czas krytyczny t_{kr}^* i bezwymiarowe krytyczne ugięcie maksymalne ζ_{1maxkr} płyty w chwili utraty stateczności dynamicznej, według kryterium przyjętego w podrozdziale 3.1 pracy. Zgodnie z przyjętym kryterium płyta traci stateczność w momencie, gdy punkt maksymalnego ugięcia dodatkowego osiągnie pierwsze maksimum prędkości.

Dokładne wartości obciążeń krytycznych p_{kr}, p_{krdyn} i ugięć krytycznych w_{dkr} uzupełnione o wartości współczynnika dynamicznego K_d wyznaczonego jako: $K_d = \frac{p_{krdyn}}{p_{kr}}$ przedstawia tablica 6.7.



Rys. 6.1. Charakterystyki płyt o zmiennych parametrach G_2, h_2 obciążonych na brzegu wewnętrznym

Tablica 6.7. Wartości obciążeń p_{kr}, p_{krdyn}, współczynnika K_d i ugięć w_{dkr} płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym

G_2 [MPa] /h_2 [m]	p_{kr} [MPa]	p_{krdyn} [MPa]	K_d	w_{dkr} [m]
5 / 0,005	75,61	98,88	1,31	$3{,}92\cdot10^{-3}$
5 / 0,01	100,76	118,00	1,17	$3{,}76\cdot10^{-3}$
5 / 0,02	150,29	159,30	1,06	$3{,}77\cdot10^{-3}$
15,82 / 0,005	149,34	166,69	1,12	$3{,}87\cdot10^{-3}$
15,82 / 0,01	217,32	229,27	1,06	$4{,}03\cdot10^{-3}$
15,82 / 0,02	338,94	346,64	1,02	$4{,}25\cdot10^{-3}$

Wartości krytycznych obciążeń dynamicznych płyt z rdzeniem o większej sztywności są bliskie wartościom krytycznych obciążeń statycznych tych płyt. Wartość współczynnika dynamicznego K_d jest wówczas nieznacznie większa od jedności. W zakresie pokrytycznym charakterystyki płyt o mniejszym module G_2 i mniejszej grubości h_2 istotnie różnią się od charakterystyk dla płyt o większych wartościach tych parametrów. W odpowiedzi na działanie narastającego liniowo obciążenia wzbudzają się drgania. Wartości krytycznych maksymalnych ugięć badanych płyt są porównywalne i wynoszą około $4\cdot10^{-3}$ m. Dla płyt z cienkim rdzeniem

(h_2 = 0,005 m) iloraz $\left(\varsigma_1 = \frac{w_d}{h}\right)$ ugięcia dodatkowego do całkowitej grubości płyty jest nieco większy od $\frac{1}{2}$, natomiast dla płyt grubszych (h_2 = 0,02 m) wartość ta zmniejsza się do około $\frac{1}{5}$.

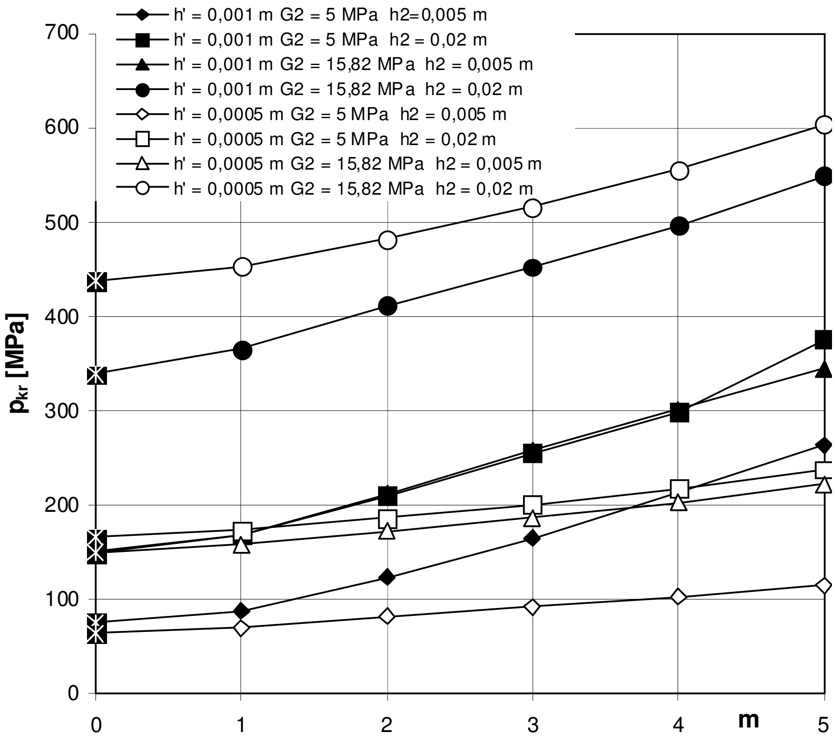
Przedstawione wyniki obliczeń (rysunek 6.1 i tablica 6.7) płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym wyznaczono dla obrotowosymetrycznej postaci utraty stateczności płyty (m = 0). Szczegółowa analiza wartości zarówno statycznych, jak i dynamicznych obciążeń krytycznych płyt ściskanych promieniowo na wewnętrznym brzegu wskazuje, iż minimalna wartość tych obciążeń odpowiada właśnie obrotowosymetrycznej postaci ich wyboczenia. Spostrzeżenie to ma istotne znaczenie w obliczeniach numerycznych, które dla tych płyt mogą być prowadzone z wykorzystaniem znacznie łatwiejszego rozwiązania dla obrotowosymetrycznej postaci deformacji krytycznej tych płyt. Wykres przedstawiony na rysunku 6.2 pokazuje wyniki krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} płyt, również z cienkimi okładzinami h′ = 0,0005 m, odpowiadające różnym postaciom ich wyboczenia. Wszystkie badane przypadki płyt wskazują minimalną wartość p_{kr} dla m = 0, Szczegółowe wartości obciążeń p_{kr} i p_{krdyn} dla dwóch postaci wyboczenia płyt m = 0 i m = 1 przedstawia tablica 6.8.

Charakter pracy płyty przy większej liczbie fal obwodowych m = 2 lub m = 3 przedstawiony na rysunku 6.3, odbiega od zachowań płyt o postaci m = 0 lub m = 1.

Zaobserwowana zmiana charakteru krzywej $\varsigma_{1max} = f(t^*)$ i możliwość ujemnych ugięć badanych płyt występuje dla wartości t^* znacznie wyższych od wartości czasu krytycznego odpowiadającego postaciom m = 0 lub m = 1.

Tablica 6.8. Wartości p_{kr} i p_{krdyn} płyt obciążanych na brzegu wewnętrznym

G_2 [MPa] /h_2 [m]	**m**	**p_{kr} [MPa]**	**p_{krdyn} [MPa]**
5 / 0,005	0	<u>75,61</u>	82,64
	1	87,65	95,50
5 / 0,02	0	<u>150,29</u>	154,35
	1	168,83	175,09
15,82 / 0,005	0	<u>149,34</u>	160,04
	1	167,53	179,95
15,82 / 0,02	0	<u>338,34</u>	352,89
	1	365,33	382,66

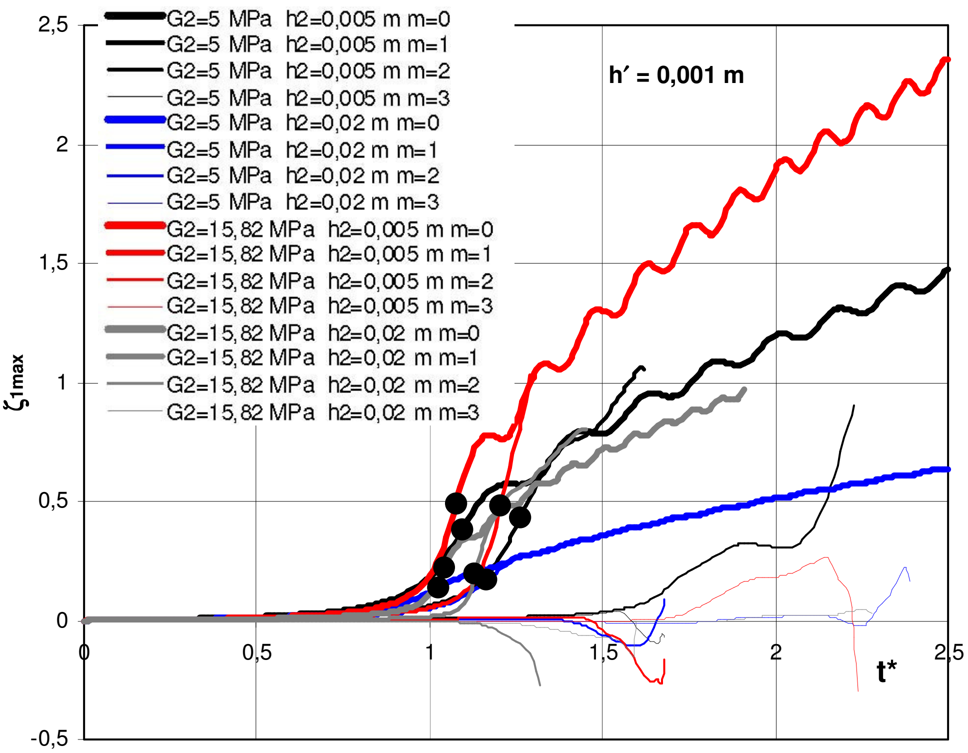


Rys. 6.2. Wartości p_{kr} obciążonych na brzegu wewnętrznym płyt dla różnych liczb fal obwodowych m

Najmniejsze wartość obciążeń p_{krdyn} występują dla przypadków płyt o postaci obrotowosymetrycznej (m = 0). Zamieszczone w tablicy 6.8 wyniki obliczeń i przedstawione na wykresie 6.3 charakterystyki $\varsigma_{1max} = f(t^*)$ są wyznaczone dla płyt obciążonych ciśnieniem o jednakowej prędkości narastania *s*, której wartość wyznacza liczba K7 = 20 1/s i minimalna wartość p_{kr} dla m = 0 (liczba podkreślona w tablicy 6.8) danej płyty o parametrach opisanych w kolumnie tablicy oznaczonej jako G_2/h_2.

Wyniki krytycznych obciążeń statycznych płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu okładzin dla różnej liczby *m* fal obwodowych charakteryzujących postać deformacji krytycznej płyt przedstawiają wykresy na rysunkach 6.4 i 6.5. Wyróżnione punkty odpowiadają minimalnym wartościom statycznych obciążeń krytycznych i odpowiadających im postaciom wyboczenia, określonych liczbą *m* fal obwodowych. Dokładne wartości przedstawia tablica 6.9.

Deformacja krytyczna płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu dla minimalnej wartości obciążeń krytycznych ma postać różną, zależną od materiałowych i geometrycznych parametrów płyty. Ustalenie ścisłego związku nie wydaje się możliwe. Zaobserwowano jedynie prawidłowość wzrostu liczby fal obwodowych wyboczenia płyty wraz ze wzrostem grubości rdzenia, wzrostem wartości modułu Kirchhoffa materiału rdzenia i dla płyt o cieńszych okładzinach (h′ = 0,0005 m). Numerycznie wyznaczona wartość p_{kr} modeli płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu może być uzależniona także od liczby przyjętych punktów dyskretyzacji *N*. Zarówno przedstawiona w podrozdziale 6.3 pracy tablica 6.5, jak i dodatkowa tablica 6.10 pokazują możliwość „przeskoku” postaci deformacji krytycznej płyty do postaci o większej liczbie fal obwodowych, dla modeli płyt o większej liczbie punktów dyskretyzacji *N*.

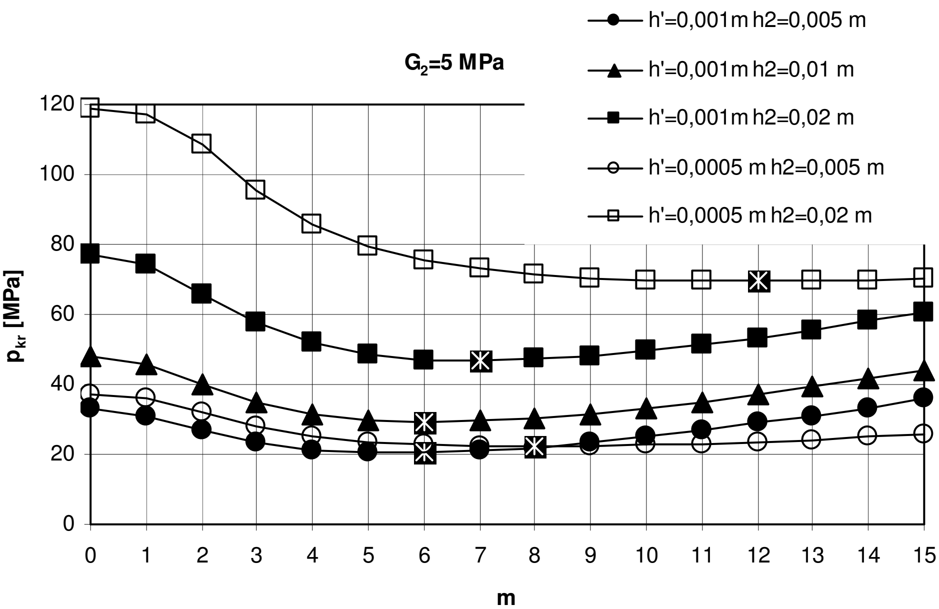


Rys. 6.3. Charakterystyki obciążonych na brzegu wewnętrznym płyt dla różnych liczb fal obwodowych wyboczenia m

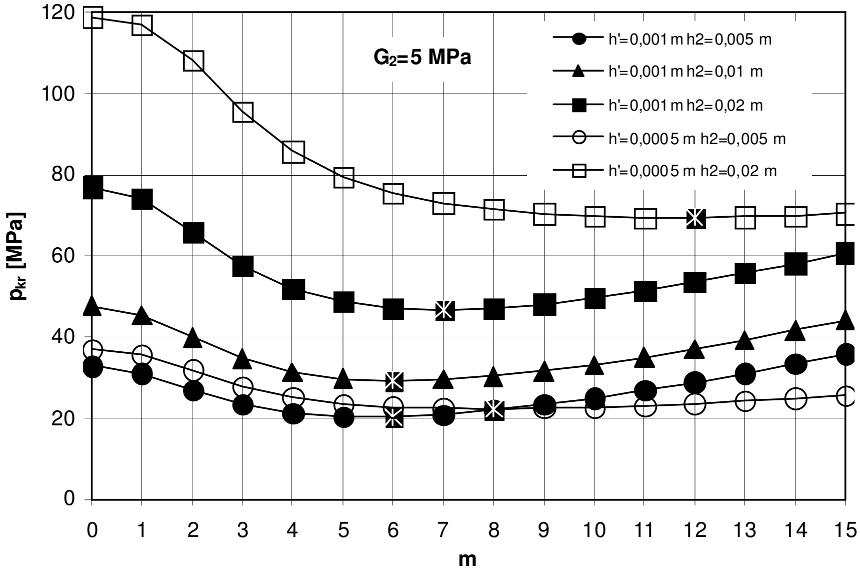
Tablica 6.9. Wartości minimalnych obciążeń p_{kr} i odpowiadające im liczby fal obwodowych wyboczenia *m* płyt obciążonych na brzegu zewnętrznym

G_2 [MPa] /h_2 [m]	**h′ = 0,001 m**		**h′ = 0,0005 m**	
	p_{kr} [MPa]	**m**	**p_{kr} [MPa]**	**m**
5 / 0,005	20,34	6	22,32	8
5 / 0,01	29,24	6	38,50	9
5 / 0,02	46,74	7	69,43	12
15,82 / 0,005	46,34	6	61,45	9
15,82 / 0,01	73,18	8	109,69	13
15,82 / 0,02	124,88	9	200,55	18

Występująca dla tych przypadków płyt zbieżność wartości p_{kr} do wartości maksymalnej wyznaczonej dla N = 26 zapewnia przyjęcie dla N = 14 minimalnej wartości ciśnienia krytycznego p_{kr}. Spostrzeżenie to ma jednak ważne znaczenie w analizie numerycznej problemu i wymaga zwrócenia uwagi przy obliczeniach płyt ściskanych na zewnętrznym obwodzie.



Rys. 6.4. Wartości p_{kr} płyt o różnej liczbie m fal ściskanych na zewnętrznym obwodzie o grubości okładziny h′ = 0,001 m



Rys. 6.5. Wartości obciążeń p_{kr} w zależności od liczby m fal płyt ściskanych na zewnętrznym obwodzie o ustalonej wartości $G_2 = 5$ MPa

Tablica 6.10. Wartości obciążeń krytycznych p_{kr} płyty ściskanej na zewnętrznym brzegu dla różnych liczb N

h′ = 0,001 m		**p_{kr} [MPa]**				
G_2 [MPa] /h_2 [m]	**m**	**N**				
		11	**14**	**17**	**21**	**26**
15,82 / 0,005	5	47,13	47,33	47,45	47,55	47,62
	6	**46,18**	**46,34**	**46,45 (46,447)**	46,54	46,60
	7	46,22	46,36	**46,45**	**46,52**	**46,58**
	8	46,95	47,06	47,14	47,20	47,25
	9	48,17	48,27	48,33	48,38	48,43

Dwa wykresy (a) i (b) przedstawione na rysunkach 6.6, 6.7 i 6.8 pokazują charakterystyki ugięć $\varsigma_{1max} = f(t^*)$ (część (a) rysunków) i prędkości ugięć $\varsigma_{1max,t^*} = g(t^*)$ (część (b) rysunków) dla płyt poddanych zmiennym, narastającym liniowo w czasie obciążeniom działającym na zewnętrzny brzeg. Prędkość narastających obciążeń dla wszystkich badanych przypadków płyt jest stała, określona liczbą *K7* i wartością obciążenia statycznego $p_{kr} = 46,58$ MPa wyznaczonego dla płyty o parametrach $G_2 = 15,82$ MPa, $h_2 = 0,005$ m i $h' = 0,001$ m, której model ma N = 26 punktów dyskretyzacji (tablica 6.10). Grubość okładzin badanych płyt wynosi $h' = 0,001$ m.

Charakterystyki płyt, których postać wyboczenia określa mała liczba fal obwodowych m < 4, istotnie różnią się od charakterystyk płyt o postaci wyboczenia o dużej liczbie fal obwodowych m > 3. Płyty o parametrze wyboczenia m < 4 tracą stateczność dynamiczną przy istotnie wyższych wartościach obciążeń dynamicznych, ulegając znacznym ugięciom krytycznym. W obszarze pokrytycznym, zwłaszcza dla płyt o cieńszym ($h_2 = 0{,}005$ m) i miękkim rdzeniu ($G_2 = 5$ MPa), w odpowiedzi na narastające obciążenia mogą powstać drgania. Wzrost ugięć w czasie obciążania płyt o parametrze wyboczenia m = 8÷10 po przekroczeniu czasu krytycznego t_{kr}^{*}, który często trudno wyznaczyć na podstawie maksimum krzywej $\varsigma_{1max,t^*} = g(t^*)$ (część (b) rysunków), jest praktycznie liniowy z ustaloną prędkością średnią. Dla tych płyt wyznaczenie punktu utraty stateczności dynamicznej, według przyjętego kryterium (podrozdział 3.1 pracy) może nie być jednoznaczne. Wówczas można by wyznaczyć czas krytyczny na podstawie innego, również podanego w pracy [110] (podrozdział 3.1 pracy), kryterium polegającego na ocenie wartości liczby ζ_{1max}, $\zeta_{1\max} = \frac{w_d}{h}$ (5.1), określającej iloraz dodatkowego ugięcia płyty do całkowitej jej grubości. Liczba ta w chwili utraty stateczności płyty powinna mieć wartość równą jeden. Kryterium to zostało wykorzystane, np. w pracy [100] w ocenie dynamicznej stateczności trójwarstwowej powłoki poddanej ścinaniu. Wyznaczone jednak wartości ζ_{1max} dla minimalnych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} badanych płyt o liczbie fal m < 8 są znacznie niższe od jedności. Ich wartości wahają się od 0,1 dla płyt o parametrach $G_2 = 5$ MPa, $h_2 = 0{,}005$ m do 0,15 dla płyt z grubszym rdzeniem lub płyt o większym module Kirchhoffa materiału rdzenia. Zatem przyjęcie tego prostego kryterium opartego na porównaniu ugięcia dodatkowego płyty z jej grubością skutkowałoby wyznaczeniem za dużych wartości krytycznych obciążeń dynamicznych.

W tablicy 6.11 przedstawiono szczegółowe wartości obciążeń krytycznych badanych płyt oraz wartości współczynników dynamicznych K_d. Wartości współczynnika dynamicznego K_d wyznaczono jako iloraz krytycznego obciążenia dynamicznego do minimalnego krytycznego obciążenia statycznego płyty. Niezależnie od wartości parametrów materiałowych i geometrycznych rdzenia płyty minimalne krytyczne obciążenie dynamiczne p_{krdyn} jest porównywalne lub nawet mniejsze od minimalnego statycznego obciążenia krytycznego p_{kr}. Wyznaczona dla badanych przypadków płyt wartość współczynnika dynamicznego K_d w zakresie krytycznym jest mniejsza lub bliska jedności.

Tablica 6.11. Wartości obciążeń krytycznych p_{kr}, p_{krdyn} dla różnych liczb m fal obwodowych płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu

m	G_2 [MPa] / h_2 [m]								
	5 / 0,005			15,82 / 0,005			5 / 0,01		
	p_{krdyn} [MPa]	p_{kr} [MPa]	K_d	p_{krdyn} [MPa]	p_{kr} [MPa]	K_d	p_{krdyn} [MPa]	p_{kr} [MPa]	K_d
0	38,21	32,89	1,88	78,98	76,19	1,70	49,94	47,73	1,71
1	37,37	31,04	1,84	77,21	72,45	1,67	49,29	45,43	1,69
2	32,35	26,94	1,59	68,09	63,33	1,47	42,49	39,93	1,45
3	26,67	23,33	1,31	58,31	54,96	1,26	35,79	34,69	1,22
4	23,13	21,22	1,14	52,08	49,88	1,12	31,60	31,38	1,08
5	21,08	20,35	1,04	48,45	47,33	1,05	**27,88**	29,73	0,95
6	20,80	**20,34**	1,02	**46,12**	**46,34**	≈1,0	28,81	**29,24**	0,99
7	**20,06**	20,94	0,99	47,70	46,36	1,03	29,37	29,52	1,00
8	21,64	21,97	1,06	49,94	47,06	1,08	29,27	30,35	1,00

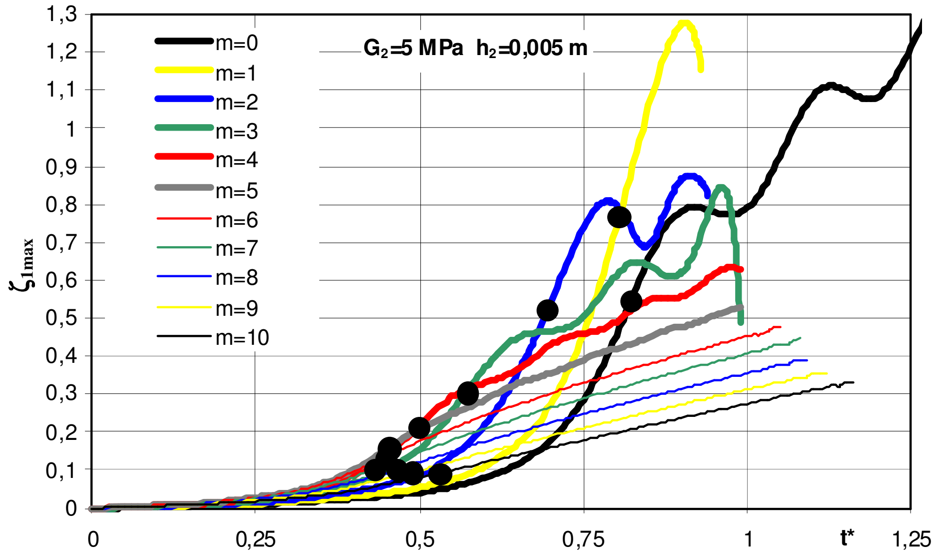
Materiał i grubość rdzenia płyty istotnie wpływają na postać wyboczenia. Trzy analizowane przypadki płyt pokazują trzy możliwe zachowania:

– gdy $m_d > m_s$, liczba fal obwodowych wyboczenia dynamicznego m_d odpowiadająca minimalnej wartości p_{krdyn} jest większa od liczby fal wyboczenia statycznego m_s dla minimalnej wartości p_{kr},

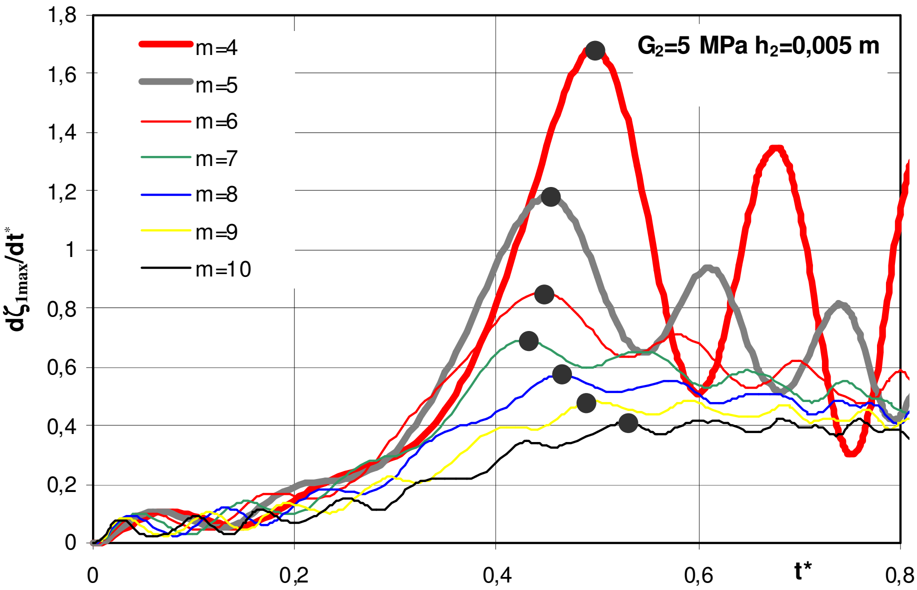
– gdy $m_d = m_s$,

– gdy $m_d < m_s$.

(a)

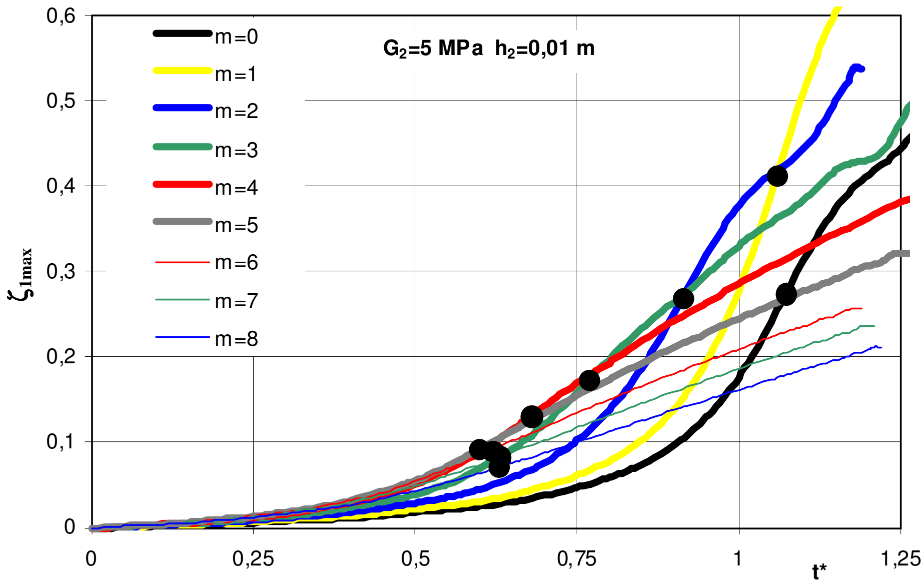


(b)

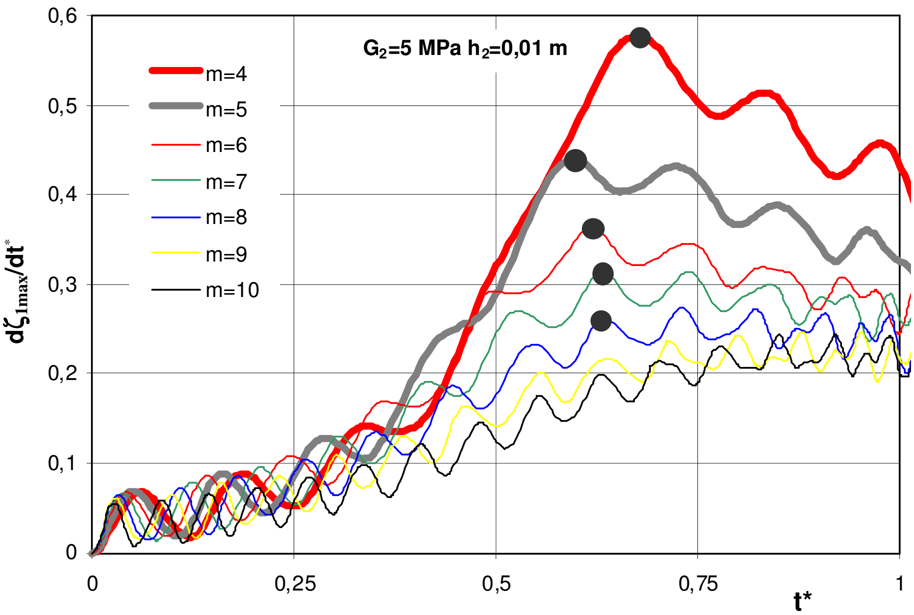


Rys. 6.6. Charakterystyki ugięć (a) i prędkości ugięć (b) płyt o parametrach $G_2 = 5$ MPa, $h_2 = 0{,}005$ m ściskanych na zewnętrznym obwodzie

(a)

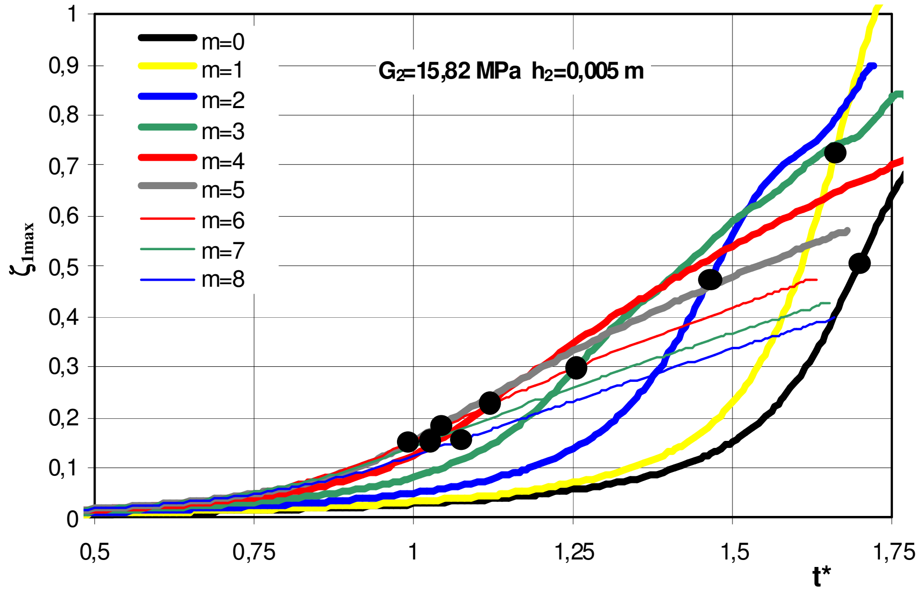


(b)

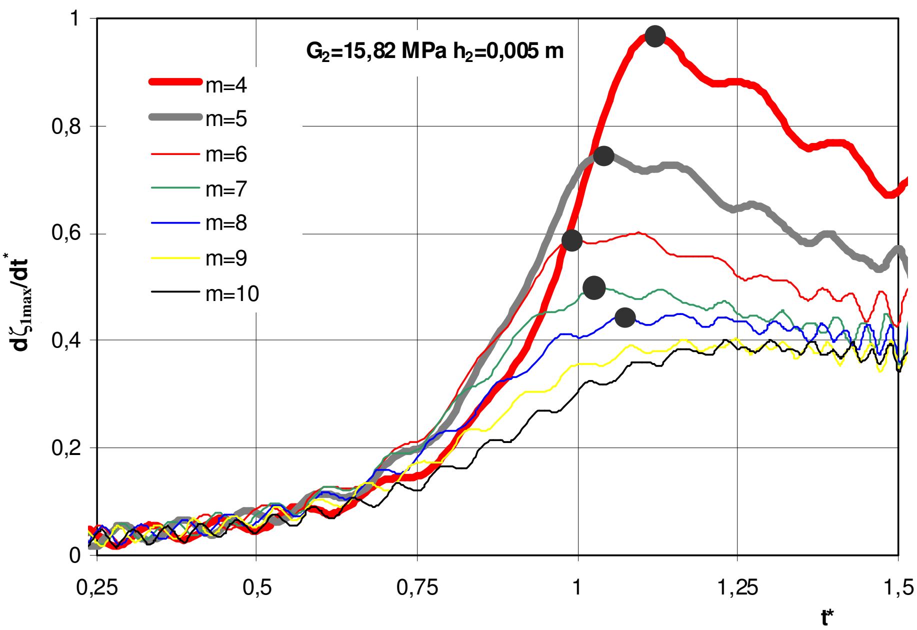


Rys. 6.7. Charakterystyki ugięć (a) i prędkości ugięć (b) płyt o parametrach $G_2 = 5$ MPa, $h_2 = 0{,}01$ m ściskanych na zewnętrznym obwodzie

(a)



(b)

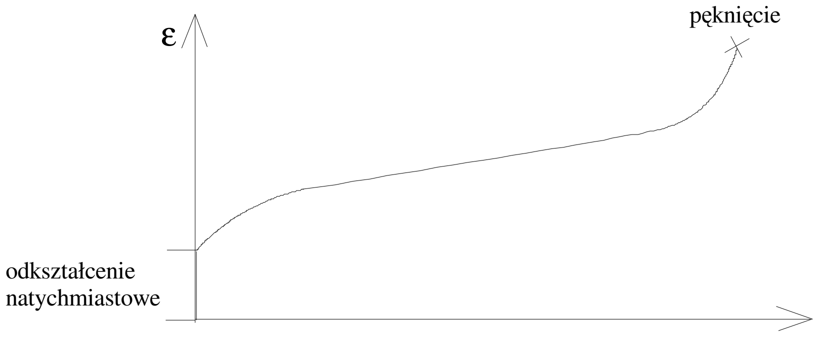


Rys. 6.8. Charakterystyki ugięć (a) i prędkości ugięć (b) płyt o parametrach $G_2 = 15{,}82$ MPa, $h_2 = 0{,}005$ m ściskanych na zewnętrznym obwodzie

Analiza płyt poddanych obciążeniom na ich zewnętrznym brzegu także potwierdza różny charakter zachowań krytycznych płyt w zależności od rodzaju badanej płyty. Prawidłowością wspólną dla tych płyt jest jednak zaobserwowany istotny spadek wartości krytycznych obciążeń dynamicznych płyt o pofalowanych postaciach wyboczenia do wartości bliskiej minimalnej wartości krytycznego obciążenia statycznego. Spostrzeżenie to ma ważne znaczenie praktyczne w obliczeniach płyt o dużej liczbie fal obwodowych wyboczenia.

6.5. Krytyczne i pokrytyczne zachowania płyt z rdzeniem o właściwościach lepkosprężystych

Uwzględnienie w opisie przyjętego materiału rdzenia właściwych dla pianki poliuretanowej związków reologicznych zbliża ocenę podjętych zachowań krytycznych do analizy obiektu rzeczywistego. Można przypuszczać, iż stwierdzona, np. w pracy [84], wrażliwość tworzyw piankowych na długotrwałe obciążenie może mieć znaczenie zwłaszcza w obszarze pokrytycznej pracy płyty, poddanej stałym lub wolno narastającym obciążeniom. Wówczas charakter wzrostu ugięć badanej płyty, jako odpowiedzi na działające w czasie obciążenie, odzwierciedlałby udział reologicznych właściwości materiału jej rdzenia o charakterystycznej krzywej opisującej jego pełzanie (rysunek 6.9) [13], [21], [92].



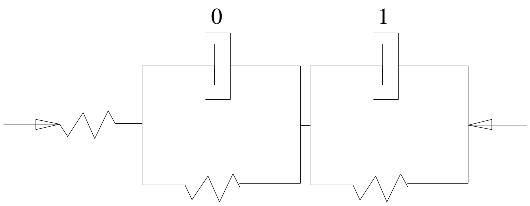
Rys. 6.9. Krzywa pełzania

Przyjęte do analizy materiały pianki poliuretanowej są określone przez wyznaczone na podstawie badań doświadczalnych i przedstawione w pracach [84], [50] następujące funkcje opisujące ich pełzanie:

$$\varphi = 0{,}1373\left(2 - e^{-6{,}93788t} - e^{-0{,}693788t}\right), \tag{6.1a}$$

$$\varphi = 0{,}845\left(2 - e^{-0{,}36t} - e^{-0{,}036t}\right). \tag{6.1}$$

Postacie funkcji φ (6.1) otrzymano, przybliżając rzeczywistą krzywą doświadczalną zależnością $\varphi = C\left(l + 1 - \sum_{i=0}^{l} e^{-0{,}1^i at}\right)$ [50] opisującą pełzanie liniowo lepkosprężystego materiału dla modelu złożonego z szeregowo połączonego elementu sprężystego i dwóch modeli Kelvina-Voigta (dla l = 1, l jest liczbą elementów Kelvina-Voigta).



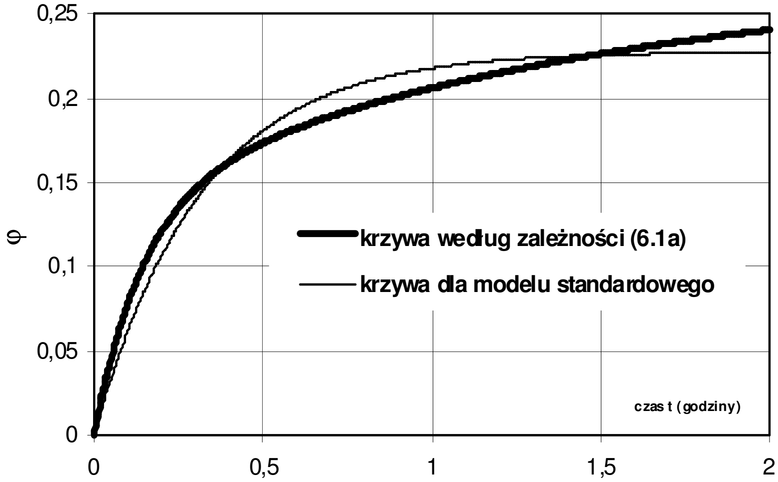
Rys. 6.10. Model reologiczny wykorzystany do opisu funkcji φ (6.1)

Do opisu krzywych doświadczalnych ze zmniejszoną, ale wystarczającą dokładnością [84] można przyjąć model standardowy (przedstawiony w podrozdziale 3.2 pracy), którego funkcja pełzania ma postać następującą [92], [84]:

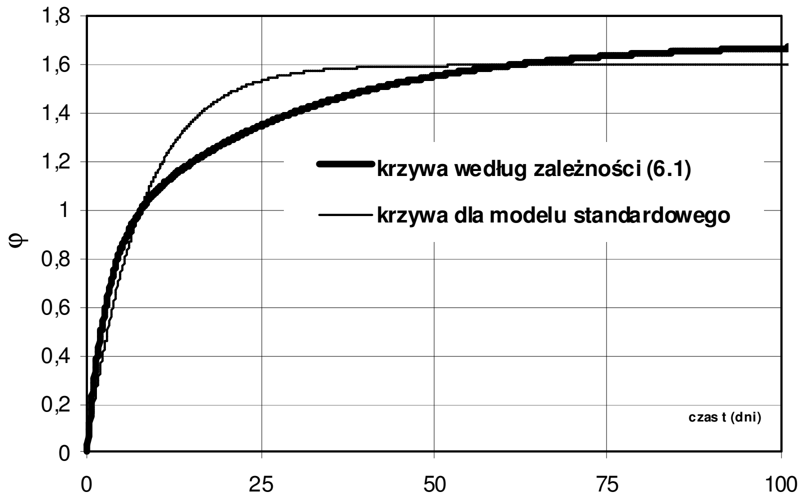
$$\varphi(t) = \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_2'}\left(1 - e^{-\frac{G_2'}{\eta'}t}\right). \tag{6.2}$$

Wartości wyznaczonych w pracy [84] stałych G_2', η' dla pianki poliuretanowej o wartości modułu Kirchhoffa G_2 = 15,82 MPa wynoszą: G_2' = 69,59 MPa, η' = 7,93·10^4 MPa·s. Wartości te przedstawiono w podrozdziale 6.1 pracy, a porównanie krzywych opisujących pełzanie tego materiału przedstawia rysunek 6.11. Na rysunku 6.12 przedstawiono krzywą opisującą pełzanie materiału o module G_2 = 5 MPa [50] wraz z krzywą wyznaczoną dla przyjętego w badaniach modelu standardowego. Obliczone wartości stałych G_2' i η' dla tej pianki wynoszą odpowiednio: G_2' = 3,13 MPa, η' = 212,92·10^4 MPa·s.

Obserwowany w badaniach lepkosprężystych płyt jednorodnych [54], [56] wpływ stałej lepkości η' materiału płyty ujawniał się wydłużeniem czasu do utraty stateczności płyty i wzrostem związanej z nim wartości krytycznego obciążenia dynamicznego. Zbliżenie zachowań badanej w pracach [54], [56] płyty lepko-sprężystej do zachowań płyty sprężystej występuje dla wyższych wartości stałej lepkości η' w przypadku opisu właściwości materiału płyty modelem Maxwella i odpowiednio niższych wartości stałej η', gdy zastosowany jest model Kelvina-Voigta.



Rys. 6.11. Krzywe opisujące pełzanie modelu: pięcio- i trójparametrowego charakteryzującego materiał pianki o wartości modułu $G_2 = 15,81$ MPa



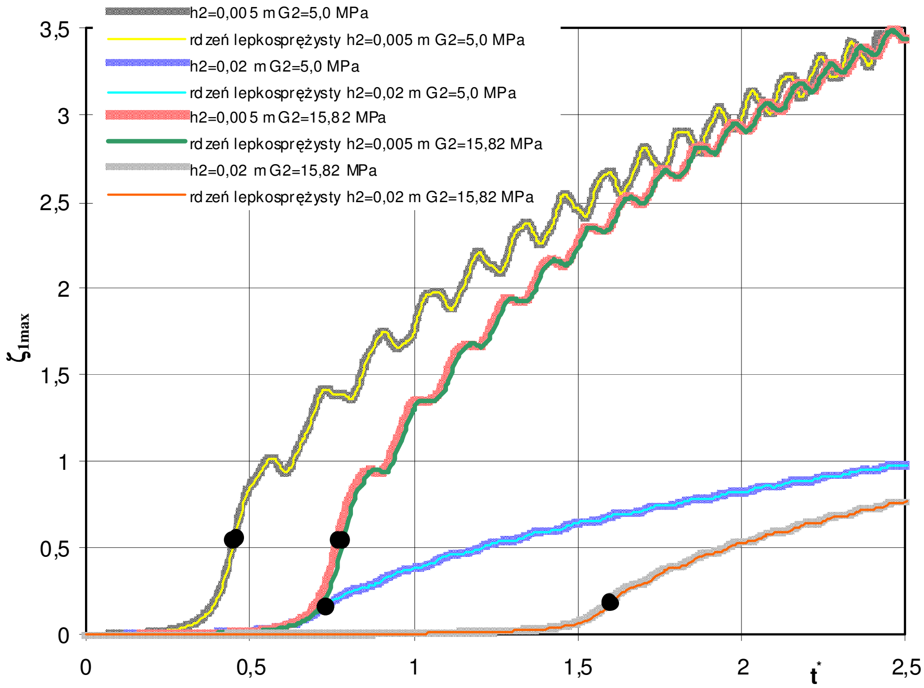
Rys. 6.12. Krzywe opisujące pełzanie modelu: pięcio- i trójparametrowego charakteryzującego materiał pianki o wartości modułu $G_2 = 5$ MPa

Również płyty warstwowe, których materiał rdzenia opisany jest modelem Maxwella lub modelem Kelvina-Voigta, przedstawione w pracach [57], [61], reagują podobnie na zmiany wartości stałej lepkości η' modelu. Zachowania takie są ściśle związane z istotą samej budowy obu dwuparametrowych modeli reologicznych.

Wyniki obliczeń badanych płyt pierścieniowych z rdzeniem standardowym o parametrach przyjętych tworzyw piankowych, które poddano krótkotrwałym obciążeniom (czas trwania rzędu 0,1 sekundy lub krótszy), nie różnią się istotnie od wyników obliczeń płyt z rdzeniem sprężystym. Charakterystyki płyt obciążonych na wewnętrznym brzegu, przedstawione na rysunku 6.13, są podobne do charakterystyk płyt z rdzeniem sprężystym – rysunek 6.1 – podrozdział 6.4 pracy. Nieznaczny wzrost wartości krytycznych obciążeń dynamicznych płyt z rdzeniem lepkosprężystym można zaobserwować dla rdzenia z materiału o module $G_2 = 15{,}82$ MPa. Wartości krytyczne obciążeń i ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym przedstawia tablica 6.12, a z rdzeniem sprężystym tablica 6.7.

Tablica 6.12. Wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} i krytycznych ugięć w_{dkr} płyt z rdzeniem lepkosprężystym, obciążonych na brzegu wewnętrznym

G_2 [MPa] /h_2 [m]	**p_{krdyn} [MPa]**	**w_{dkr} [m]**
5 / 0,005	99,32	$4{,}00 \cdot 10^{-3}$
5 / 0,01	118,43	$3{,}75 \cdot 10^{-3}$
5 / 0,02	159,30	$3{,}72 \cdot 10^{-3}$
15,82 / 0,005	170,60	$3{,}88 \cdot 10^{-3}$
15,82 / 0,01	231,88	$3{,}98 \cdot 10^{-3}$
15,82 / 0,02	348,36	$4{,}20 \cdot 10^{-3}$



Rys. 6.13. Porównanie charakterystyk ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym i sprężystym obciążonych na brzegu wewnętrznym

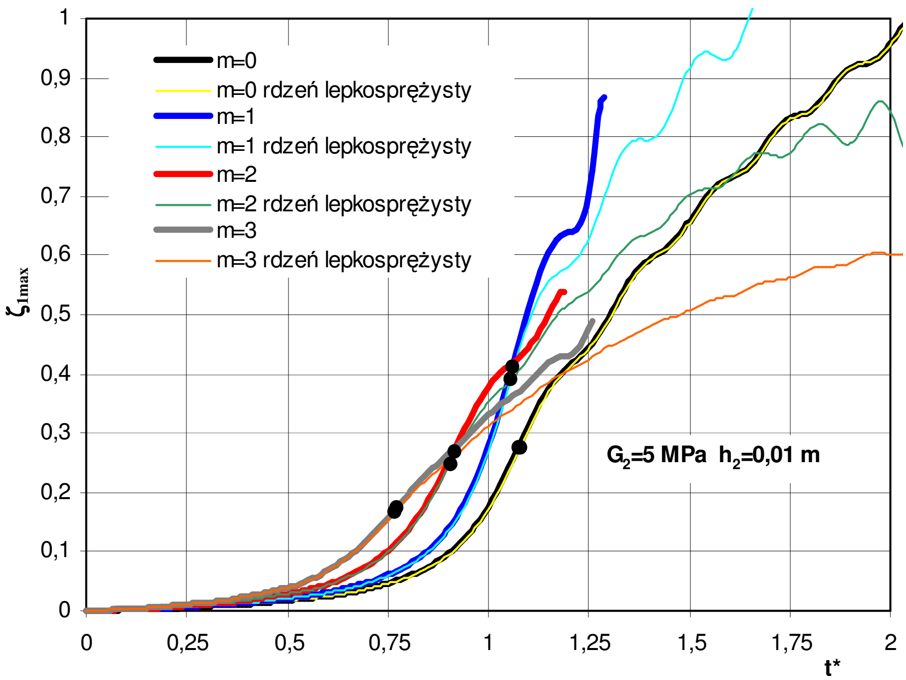
Zgodność wartości krytycznych p_{krdyn}, w_{dkr} i postaci deformacji występuje także dla płyt ściskanych na brzegu zewnętrznym. Przykładowe wykresy przedstawione na rysunku 6.14 pokazują charakterystyki ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym i sprężystym dla płyt, których liczba fal obwodowych wyboczenia jest m < 4 (rys. 6.14a) i m > 3 (rys. 6.14b). Wyniki obliczeń dotyczą płyty o tych samych parametrach podstawowych co płyty z rdzeniem sprężystym przedstawionej na rysunku 6.7 w podrozdziale 6.4 pracy. Niewielka różnica charakterystyk płyty z rdzeniem lepkosprężystym i sprężystym występuje w obszarze pokrytycznej odpowiedzi płyty na narastające liniowo obciążenie.

Rysunek 6.15 przedstawia charakterystyki ugięcia (a) i prędkości ugięcia (b) płyty z rdzeniem lepkosprężystym o module $G_2 = 15{,}82$ MPa i grubości $h_2 = 0{,}005$ m obciążonej na zewnętrznym brzegu. Parametry płyty są takie same, jak płyty z rdzeniem sprężystym, której wyniki obliczeń przedstawia rysunek 6.8 (podrozdział 6.4 pracy). Podobnie jak dla płyty o module $G_2 = 5$ MPa, której charakterystyki przedstawione są na rysunku 6.14, minimalna wartość krytycznych obciążeń dynamicznych odpowiada tej samej postaci krytycznej deformacji co dla płyty z rdzeniem sprężystym. W przypadku płyty o wyższej wartości modułu $G_2 = 15{,}82$ MPa w obszarze krytycznym obserwowany jest nieznaczny spadek wartości krytycznych obciążeń dynamicznych. Odpowiednie wartości krytycznych obciążeń dynamicznych obu badanych płyt z rdzeniem lepkosprężystym przedstawia tablica 6.13, a płyt z rdzeniem sprężystym tablica 6.11 (podrozdział 6.4 pracy). Charakter krzywych przedstawionych na rysunku 6.15 jest podobny do charakterystyk dla płyty z rdzeniem sprężystym (rysunek 6.8). Nieznaczne różnice można również zaobserwować w obszarze pokrytycznej pracy płyty.

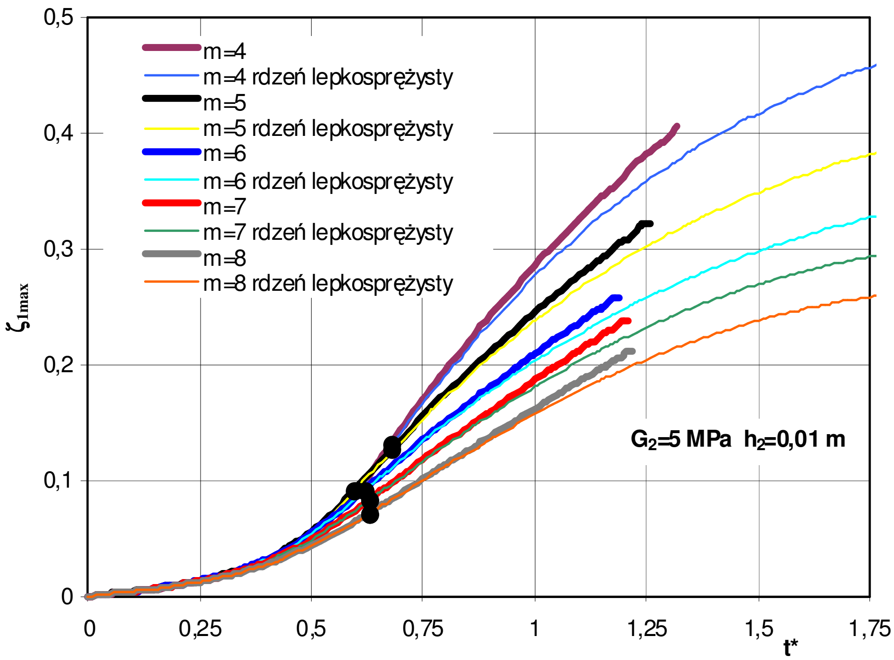
Tablica 6.13. Wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} i parametru wyboczenia *m* płyt z rdzeniem lepkosprężystym, ściskanych na brzegu zewnętrznym

G_2 [MPa] /h_2 [m]			
5 / 0,01		**15,82 / 0,005**	
m	**p_{krdyn} [MPa]**	**m**	**p_{krdyn} [MPa]**
3	35,60	4	52,64
4	31,51	5	48,17
5	**27,78**	**6**	**45,56**
6	28,81	7	47,24
7	29,37	8	49,47

(a)

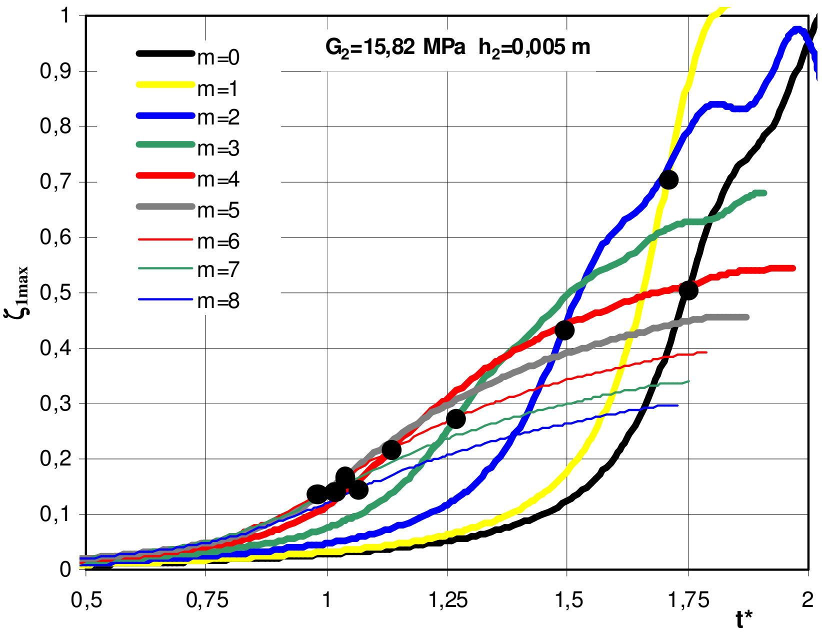


(b)

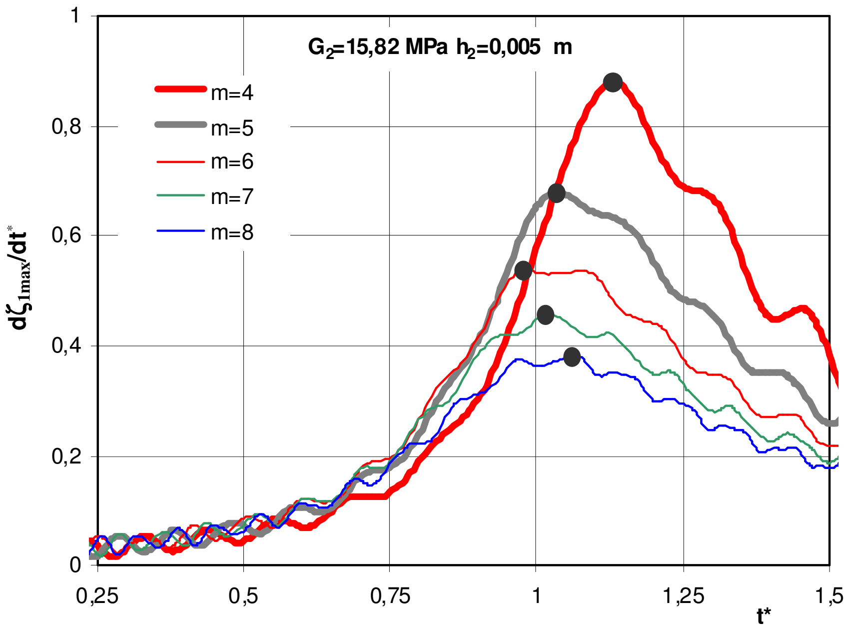


Rys. 6.14. Porównanie charakterystyk ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym i sprężystym ściskanych na brzegu zewnętrznym o deformacji określonej liczbą fal: (a) m < 4, (b) m > 3

(a)

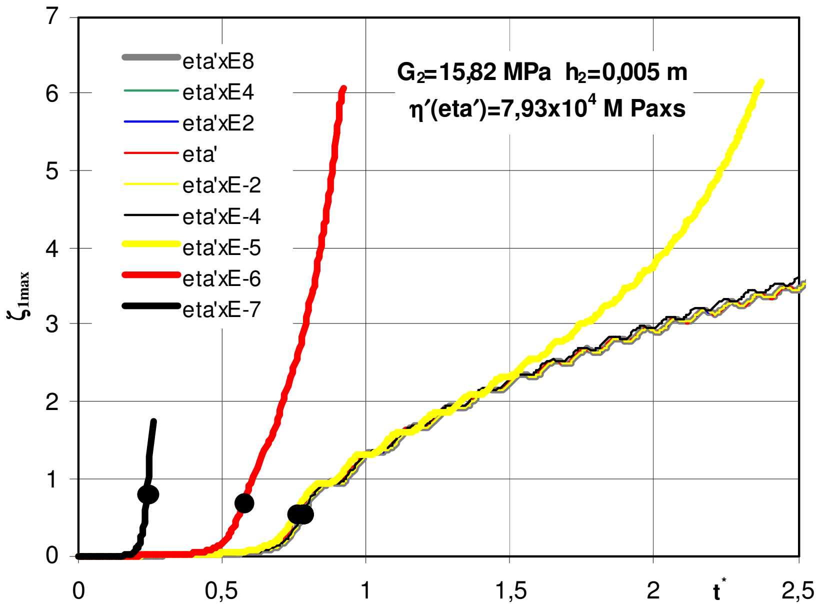


(b)



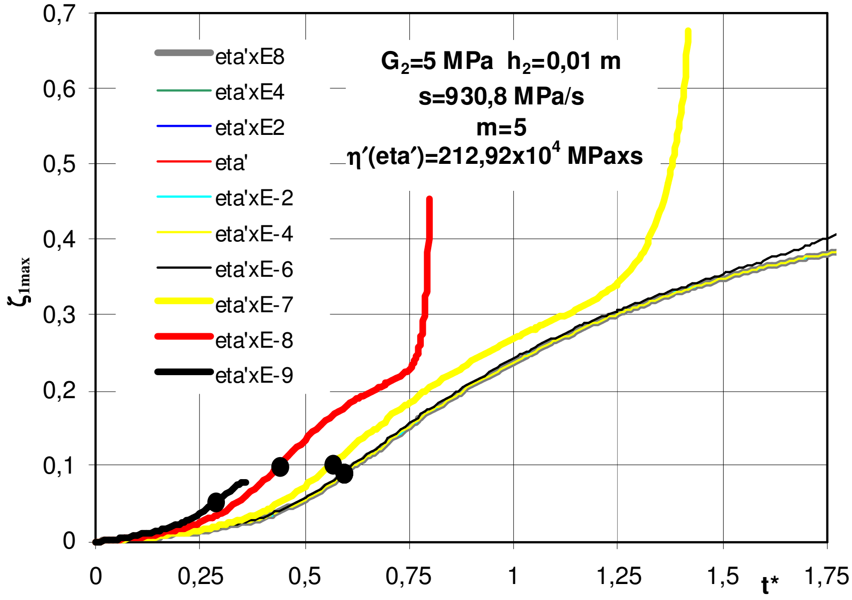
Rys. 6.15. Charakterystyki ugięć (a) i prędkości ugięć (b) płyt z rdzeniem lepkosprężystym o module G_2 = 15,82 MPa ściskanych na zewnętrznym brzegu

Istotny wpływ wartości stałej lepkości η' na wyniki ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym występuje dla znacznie mniejszych wartości stałej η'. Rysunki 6.16 i 6.17 przedstawiają charakterystyki ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym o parametrach $G_2 = 15{,}82$ MPa, $h_2 = 0{,}005$ m i $G_2 = 5$ MPa, $h_2 = 0{,}01$ m, obciążonych odpowiednio na brzegu wewnętrznym obciążeniem liniowo narastającym z prędkością s, którą określają: liczba K7 = 20 1/s i przyjęta wartość obciążenia krytycznego p_{kr} = 217,32 MPa oraz ściskanych na brzegu zewnętrznym ciśnieniem o prędkości s wyrażonej przez: K7 = 20 1/s i p_{kr} = 46,54 MPa. Na rysunku 6.17 przedstawiono wyniki dla płyt o postaci wyboczenia określonej liczbą m = 5 odpowiadającą minimalnym wartościom krytycznych obciążeń dynamicznych.



Rys. 6.16. Wpływ stałej lepkości η' na charakterystyki ugięć płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym

W obu przypadkach badanych płyt zaobserwowano skrócenie czasu krytycznego t_{kr} do utraty stateczności płyty wraz ze znacznym zmniejszeniem wartości liczby η' stałej lepkości rdzenia do wartości rzędu $\eta' = 0{,}79$ MPa·s dla płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym i $\eta' = 0{,}213$ MPa·s dla płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym (eta′xE-5 lub eta′xE-7 według oznaczeń na rysunkach 6.16 i 6.17). Natomiast zwiększenie wartości liczby η' nie zmienia ugięć krytycznych i pokrytycznych płyt, które praktycznie są zgodne z wynikami obliczeń płyt z rdzeniem sprężystym. Fakt ten potwierdza charakter zachowań płyt, których materiał ma właściwości lepkosprężyste i odpowiada wspomnianym wcześniej obserwacjom lepkosprężystych płyt jednorodnych lub z rdzeniem lepkosprężystym, szczególnie jeśli do opisu reologicznych właściwości materiału przyjęto dwuparametrowy model Maxwella.



Rys. 6.17. Wpływ stałej lepkości η' na charakterystyki ugięć płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym

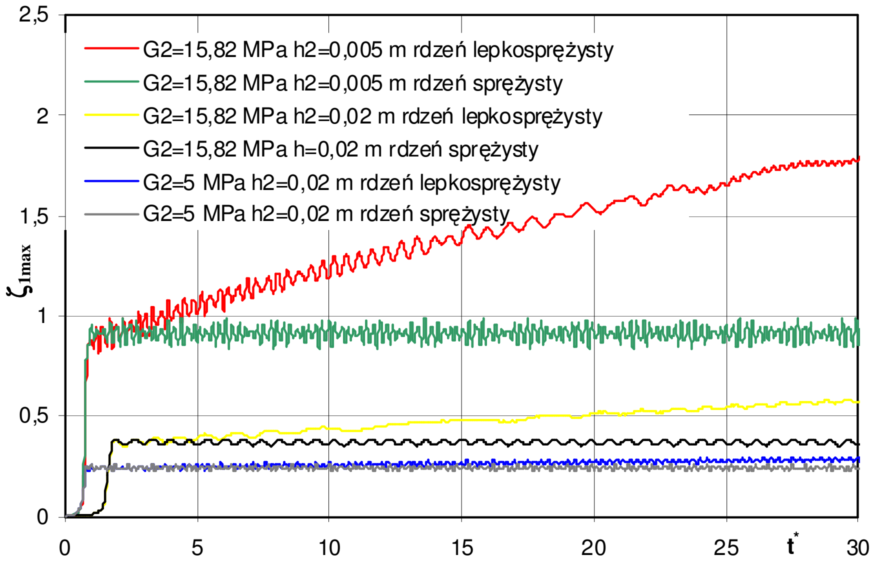
Postać wyboczenia odpowiadająca minimalnemu obciążeniu krytycznemu płyty ściskanej na zewnętrznym brzegu, której materiał rdzenia ma małą wartość stałej lepkości $\eta' = 0{,}213$ MPa·s, nie ulega zmianie. Podobnie jak w przypadku płyt pozostałych, których materiał rdzenia ma wyższą wartość stałej η', liczba fal wyboczenia dynamicznego wynosi m = 5. Dla m = 4 wartość krytycznego obciążenia dynamicznego wynosi $p_{krdyn} = 29{,}55$ MPa, dla m = 6, $p_{krdyn} = 28{,}39$ MPa, a dla m = 5, $p_{krdyn} = 26{,}39$ MPa. Wartości obciążeń p_{krdyn} dla płyt z rdzeniem lepkosprężystym są mniejsze niż dla płyt z rdzeniem sprężystym (tablica 6.11, podrozdział 6.4 pracy), lecz różnica nie jest duża, w zakresie około 2 MPa.

Nie zaobserwowano istotnych zmian wartości p_{krdyn} płyt z rdzeniem lepkosprężystym w szerokim zakresie analizowanych zmian wartości stałej η', od $\eta' = 0{,}79$ MPa·s do $\eta' = 7{,}93 \cdot 10^{12}$ MPa·s lub $\eta' = 0{,}213$ MPa·s do $\eta' = 212{,}92 \cdot 10^{12}$ MPa·s.

Poddanie płyty działaniu stałych obciążeń w czasie pokazuje wpływ reologicznych właściwości materiału rdzenia na wzrost ugięć płyty. Obserwacji pokrytycznej odpowiedzi płyt z rdzeniem lepkosprężystym na działanie stałego w czasie obciążenia poddano płyty ściskane promieniowo na zewnętrznym lub wewnętrznym brzegu, porównując wyniki z otrzymanymi dla płyt z rdzeniem sprężystym. Przebieg obciążenia przyjęto według funkcji:

$$p(t) = \begin{cases} st & \text{dla} \quad t \le n \cdot t_{kr} \\ n \cdot p_{krdyn} & \text{dla} \quad t > n \cdot t_{kr} \end{cases}. \tag{6.3}$$

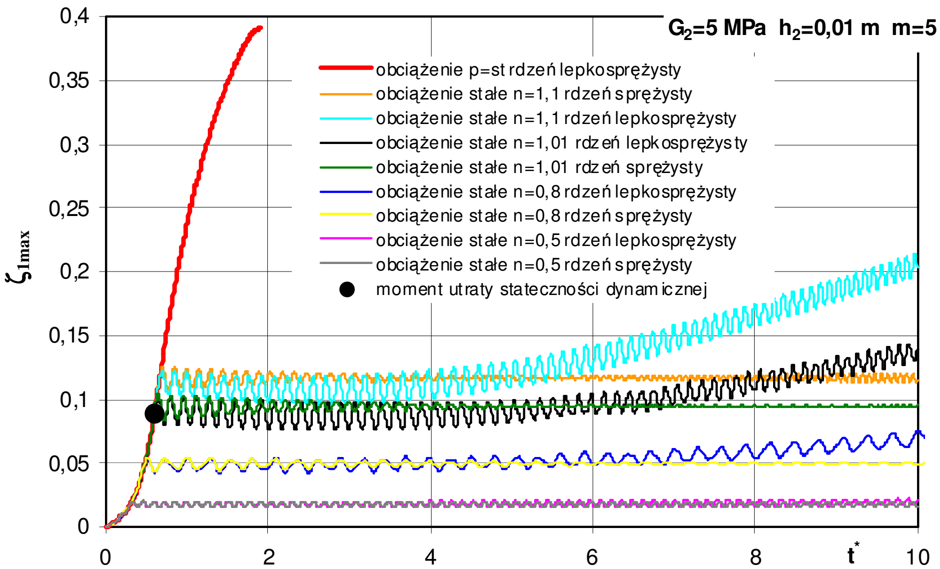
Płyty obrotowosymetryczne (m = 0) o parametrach G_2 = 5 MPa, G_2 = 15,82 MPa i h_2 = 0,005 m, h_2 = 0,02 m poddano działaniu stałego w czasie obciążenia na brzegu wewnętrznym o wartości wynikającej z iloczynu liczby n = 1,1 i wartości obciążenia p_{krdyn} przedstawionego w tablicach 6.12 i 6.7 dla płyt z rdzeniem lepkosprężystym i sprężystym. Wyniki przedstawia rysunek 6.18.



Rys. 6.18. Charakterystyki ugięć płyt z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym poddane działaniu stałego obciążenia na brzegu wewnętrznym

Płyty, których postać wyboczenia jest pofalowana, o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m, m = 5 ściskano na brzegu zewnętrznym obciążeniem o stałej wartości w czasie równej iloczynowi liczby n, n = 0,5, 0,8 (obciążenie przedkrytyczne), 1,01, 1,1 i wartości obciążenia p_{krdyn} przedstawionego w tablicy 6.13 dla płyty z rdzeniem lepkosprężystym i w tablicy 6.11 dla płyty z rdzeniem sprężystym. Wyniki obliczeń przedstawia rysunek 6.19. Dodatkowo na rysunku 6.19 przedstawiono krzywą $\varsigma_{1max} = f(t^*)$ (pokazaną na rysunku 6.14b) dla liniowego wzrostu obciążenia $p = st$, zaznaczając (wyróżniony punkt) moment utraty dynamicznej stateczności płyty z rdzeniem lepkosprężystym.

Charakterystyki ugięć płyt z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym w zakresie narastających liniowo obciążeń są zgodne. Działanie obciążenia stałego w czasie, które wpływa na wyraźny wzrost ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym, różnicuje zachowania obu płyt, ujawniając lepkosprężyste właściwości materiału rdzenia. Ważną, praktyczną obserwacją jest wzrost ugięcia płyty z rdzeniem lepkosprężystym poddanej stałemu w czasie obciążeniu. W krótkim czasie (t = 1,5 s) działania obciążenia stałego w czasie, wzrost ugięcia płyty z rdzeniem lepkosprężystym może być prawie dwukrotny. Przykładowe wyniki obliczeń przedstawione na rysunku 6.19 pokazują, że wzrost ugięć płyty z rdzeniem lepkosprężystym nasila się w obszarze jej pokrytycznej pracy.



Rys. 6.19. Charakterystyki ugięć płyt z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym poddane działaniu stałego obciążenia na brzegu zewnętrznym

Podsumowując uzyskane wyniki i przedstawione spostrzeżenia można by stwierdzić, że obliczenia płyt z rdzeniem lepkosprężystym mogą być zastąpione obliczeniami podobnych płyt, lecz z rdzeniem sprężystym. Rozwiązanie byłoby wówczas znacznie łatwiejsze. Zaobserwowana jednak, może niewielka w krótkich czasach krytycznych obciążeń płyt, a w dłuższych pokrytycznych już bardzo wyraźna, wrażliwość struktury płyty o właściwościach reologicznych potwierdza zasadność ich uwzględnienia w opisie związków fizycznych materiałów warstw (w analizowanym przypadku warstwy rdzenia) w praktycznych obliczeniach i prowadzenia bardziej złożonego rozwiązania z trudniejszym przebiegiem obliczeń. Stosunkowo niewielkie wydłużenie czasu działania stałego obciążenia na badaną płytę z rdzeniem lepkosprężystym znacznie zmienia wyniki końcowe. Uwzględnienie wpływu dodatkowych parametrów płyty wynikających z działania, np. czynników zewnętrznych (podwyższona temperatura), których występowanie w warunkach rzeczywistej pracy płyty jest nieuniknione, wymaga uzyskania możliwie najogólniejszego rozwiązania problemu, w którym każdy przypadek badanej płyty jest oddzielnym, złożonym zadaniem.

6.6. Utrata stateczności dynamicznej pierścieniowej płyty trójwarstwowej wrażliwej na niedokładności kształtu

Ogólna ocena stateczności płyty pozbawiona analizy wrażliwości jej stanu krytycznego na stopień geometrycznej niedoskonałości jest oceną niekompletną, zwraca uwagę autor rozdziału „Theory of Buckling and Post-Buckling Behavior of Elastic Structures” B. Budiansky w pracy [5]. O bardzo dużym wpływie małych niedokładności kształtu badanego elementu (pręta, płyty, powłoki) na wartości obciążeń krytycznych podkreśla, szeroko rozpatrując problem stateczności elementów konstrukcyjnych wrażliwych na niedokładności, R. Gryboś w pracy [26]. Autor pracy [26] zauważa, iż analiza wartości statycznych obciążeń krytycznych konstrukcji idealnych wyznaczonych jako najmniejsza wartość własna rozwiązywanego problemu brzegowego (przedstawiono w punkcie 5.2.3. pracy), które są tzw. obciążeniami bifurkacyjnymi, ma znaczenie teoretyczno-poznawcze. Rzeczywisty element konstrukcyjny traci stateczność przy obciążeniach znacznie mniejszych, a rzeczywista wartość obciążenia krytycznego ma przypadkowy charakter, w ogromnej mierze zależny od stopnia i postaci niedokładności kształtu elementu, których rozkład przestrzenny jest nieregularny i dla większości przypadków trudny do opisania.

Oceniając wpływ niedokładności kształtu badanej pierścieniowej płyty trójwarstwowej na wartości dynamicznych obciążeń i ugięć krytycznych idealną płaską powierzchnię płyty zniekształcono zastępując ją, w przypadku analizy płyt

obciążonych na brzegu wewnętrznym, powierzchnią obrotowosymetryczną o różnym stopniu ugięcia wstępnego. Natomiast w przypadkach badań płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu, wstępny, niedoskonały kształt płyty jest złożeniem powierzchni pofalowanej obwodowo o liczbie fal m i powierzchni w różnym stopniu ugiętej w formie obrotowosymetrycznej.
W przedstawionym w pracy rozwiązaniu (podrozdział 5.1 pracy) opis niedoskonałego kształtu płyty uzyskano poprzez wprowadzenie dwuczłonowego równania $\zeta_o(\rho,\theta)=\xi_1\eta(\rho)+\xi_2\eta(\rho)cos(m\theta)$ (5.2a), w którym liczby ξ_1, ξ_2 określają stopień wstępnego ugięcia płyty.

Wykresy przedstawione na rysunkach 6.20 i 6.21 pokazują charakterystyki ugięć płyt z rdzeniem sprężystym obciążone na brzegu wewnętrznym dla różnych wartości liczby ξ_2 : ξ_2 = 0,125, 1, 2 i stałej wartości liczby ξ_1: ξ_1 = 0 (brak udziału składowej obrotowosymetrycznej $X_a(\rho)$ w równaniu (5.2a)). Badaniom poddane zostały płyty z rdzeniem o modułach: G_2 = 5 MPa (rysunek 6.20) i G_2 = 15,82 MPa (rysunek 6.21), o grubościach rdzenia h_2 = 0,005 i 0,02 m, ściskane promieniowo jednostajnie, liniowo narastającym ciśnieniem z prędkością s (5.1) określoną przez liczby K7 = 20 1/s i p_{kr} = 217,32 MPa.

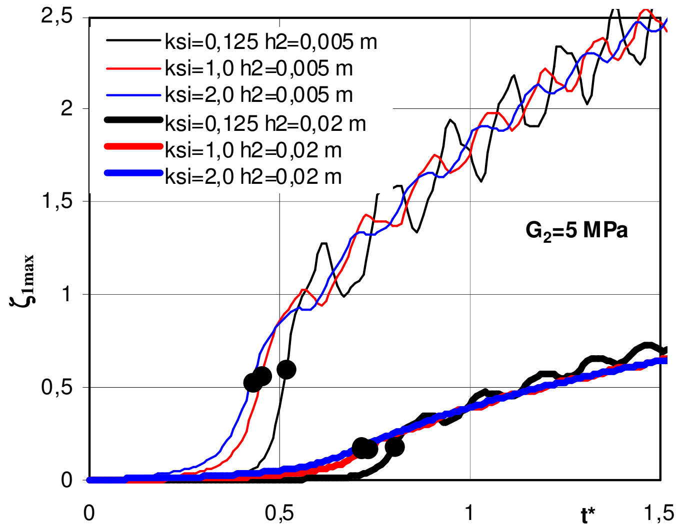
W tablicy 6.14 przedstawione są wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} (również dla wartości ξ_2 = 0,25 i 0,5), wartości krytycznych obciążeń statycznych (obciążeń bifurkacyjnych) płyt idealnych p_{kr} i wartości współczynników dynamicznych K_d (wyznaczonych dla ξ_2 = 2), które szczególnie dobrze obrazują analizowane zjawisko wrażliwości struktury płyt na niedokładności kształtu początkowego.

Tablica 6.14. Wartości obciążeń p_{krdyn}, p_{kr} i współczynników K_d płyt o różnej wartości parametru ξ_2 ugięcia wstępnego, obciążonych na brzegu wewnętrznym

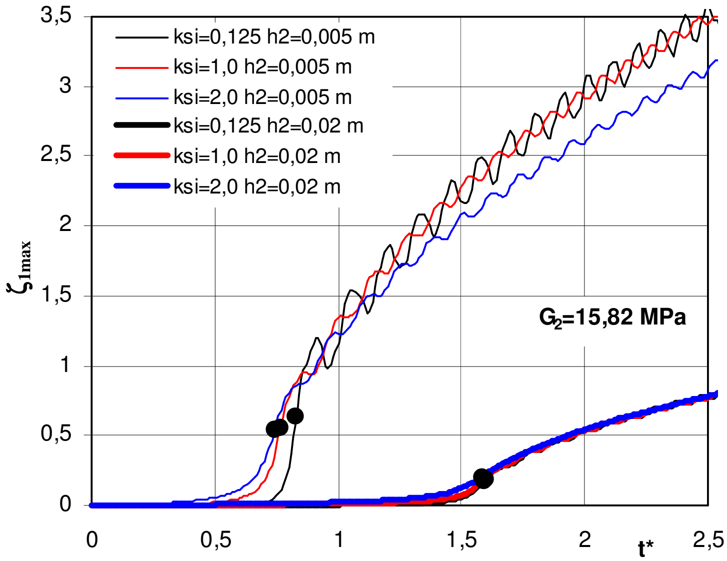
G_2 [MPa] /h_2 [m]	**p_{krdyn} [MPa]**					**p_{kr} [MPa]**	K_d
	ξ_2 = 0,125	**ξ_2 = 0,25**	**ξ_2 = 0,5**	**ξ_2 = 1**	**ξ_2 = 2**		
5 / 0,005	112,36	108,01	103,66	98,88	92,80	75,61	1,23
5 / 0,02	174,51	169,73	164,52	159,30	154,95	150,29	1,03
15,82 / 0,005	180,16	176,25	171,90	166,69	161,47	149,34	1,08
15,82 / 0,02	359,24	355,33	350,98	346,64	343,15	338,94	1,01

Przedstawione wyniki dotyczą płyt, których kształt ugięcia wstępnego i postać wyboczenia są obrotowosymetryczne (m = 0). Można zauważyć, że znaczne ugięcie wstępne ξ_2 = 2 płyt istotnie zmniejsza wartość krytycznego obciążenia dynamicznego p_{krdyn}. W porównaniu do płyt nieznacznie ugiętych wstępnie (ξ_2 = 0,125) wartość obciążenia krytycznego p_{krdyn} płyt znacznie ugiętych (ξ_2 = 2) jest mniejsza o około 20 MPa, a wartość współczynnika dynamicznego K_d płyt z rdzeniem o większej sztywności maleje do wartości bliskiej jeden. Ze wzrostem ξ_2 ugięcie krytyczne nieznacznie maleje i zanika bądź maleje amplituda drgań wzbudzonych pokrytycznym obciążeniem płyt.

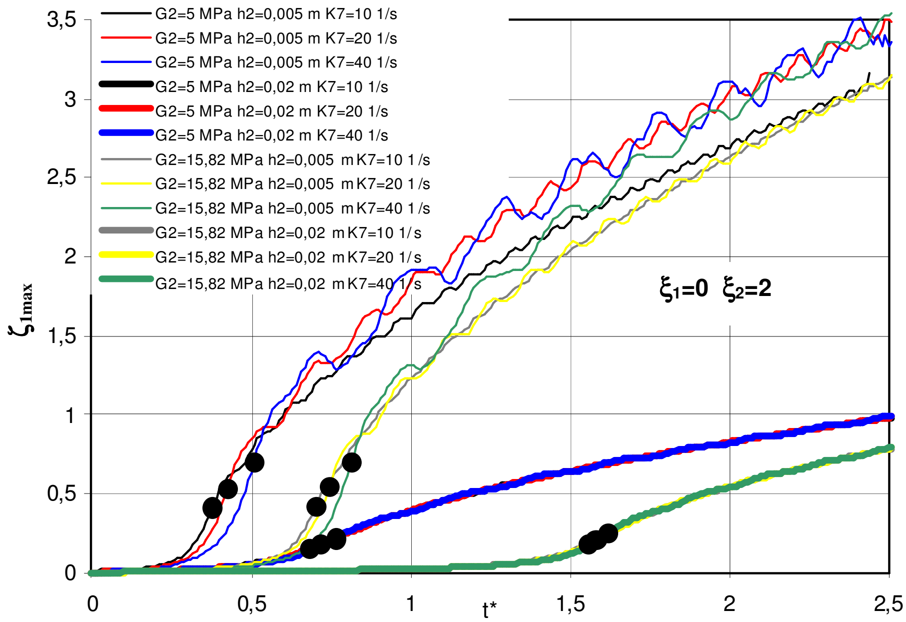
Dodatkowym czynnikiem wpływającym na wartość krytycznego obciążenia dynamicznego płyt jest zmiana prędkości wzrostu obciążeń zewnętrznych. Zmniejszenie prędkości s obniża wartość p_{krdyn}, zmniejsza ugięcie krytyczne w_{dkr} i amplitudę drgań pokrytycznych. Wyniki przedstawia tablica 6.15 i rysunek 6.22. W tablicy 6.15 przedstawiono wyniki dynamicznych obciążeń krytycznych p_{krdyn} płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym z różną intensywnością działającego obciążenia, które wyraża liczba *K7* (K7 = 10, 20, 40 1/s) opisująca prędkość s. Wartości współczynników K_d wyznaczono dla podanych w tablicy 6.15 najmniejszych wartości obciążeń dynamicznych, gdy ξ_2 = 2 i K7 = 10 1/s. Zmniejszenie prędkości s (K7 = 10 1/s) liniowo narastającego obciążenia działającego na płytę o znacznym ugięciu wstępnym (ξ_2 = 2), zmniejsza wartość krytycznego obciążenia dynamicznego, nawet poniżej wartości obciążenia bifurkacyjnego p_{kr}. Współczynnik dynamiczny K_d może wówczas mieć wartość mniejszą od 1,0.



Rys. 6.20. Charakterystyki ugięć płyt o module G_2 = 5 MPa o różnej wartości parametru ξ_2 (ksi) ugięcia wstępnego obciążone na brzegu wewnętrznym



Rys. 6.21. Charakterystyki ugięć płyt o module G_2 = 15,82 MPa o różnej wartości parametru ξ_2 (ksi) ugięcia wstępnego obciążone na brzegu wewnętrznym



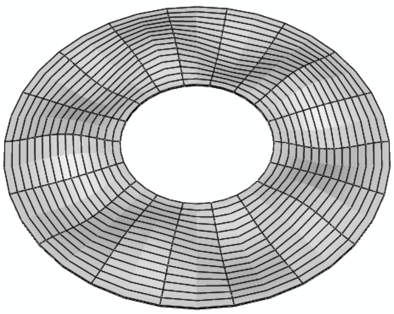
Rys. 6.22. Charakterystyki ugięć płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym z różną prędkością s

Tablica 6.15. Wpływ prędkości *s* narastania obciążenia na wartość krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} i wartość współczynnika dynamicznego K_d

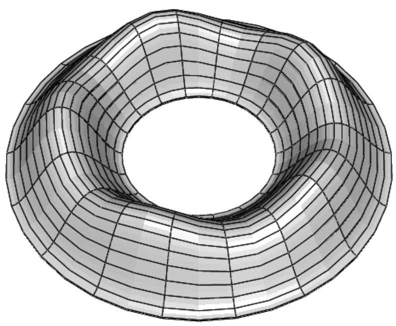
G_2 [MPa] / h_2 [m]	p_{krdyn} [MPa]				K_d
	$\xi_2 = 1$			$\xi_2 = 2$	
	K7 = 40 1/s	K7 = 20 1/s	K7 = 10 1/s	K7 = 10 1/s	
5 / 0,005	118,01	98,88	87,15	82,36	1,09
5 / 0,02	173,21	159,30	151,91	147,99	0,98
15,82 / 0,005	183,64	166,69	157,12	152,78	1,02
15,82 / 0,02	357,93	346,64	340,11	338,37	1,00

Badanie wrażliwości płyt na niedokładność ich wstępnej geometrii, zwłaszcza w przypadku płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu, pozwala na ocenę zmian wartości krytycznych obciążeń dynamicznych i odpowiadających im postaci wyboczenia. Wprowadzenie zaburzenia kształtu w formie dodatkowej składowej obrotowosymetrycznej wyrażonej zależnością (5.2a) dla $\xi_1 \neq 0$ zmniejsza pewną regularność wstępnego ugięcia płyty, którą wyraża liczba fal obwodowych *m*, przybliżając ją do formy bliższej postaciom rzeczywistym. Przykładowe wartości maksymalnego ugięcia wstępnego w_o płyt poddanych analizie dla przyjętych liczb ξ_1 równych 0, 5, 10 i stałej wartości liczby $\xi_2 = 1$, wynoszą odpowiednio: $1{,}52 \cdot 10^{-4}$ m, $9{,}15 \cdot 10^{-4}$ m, $16{,}78 \cdot 10^{-4}$ m. Rysunek 6.23 pokazuje przykładową zmianę kształtu ugięcia wstępnego płyty z postaci regularnej określonej liczbą m = 5 (rysunek 6.23a) w postać zaburzoną dodatkową formą obrotowosymetryczną (rysunek 6.23b) wyznaczoną na podstawie zależności (5.2a) dla $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 1$ i m = 5.

(a)



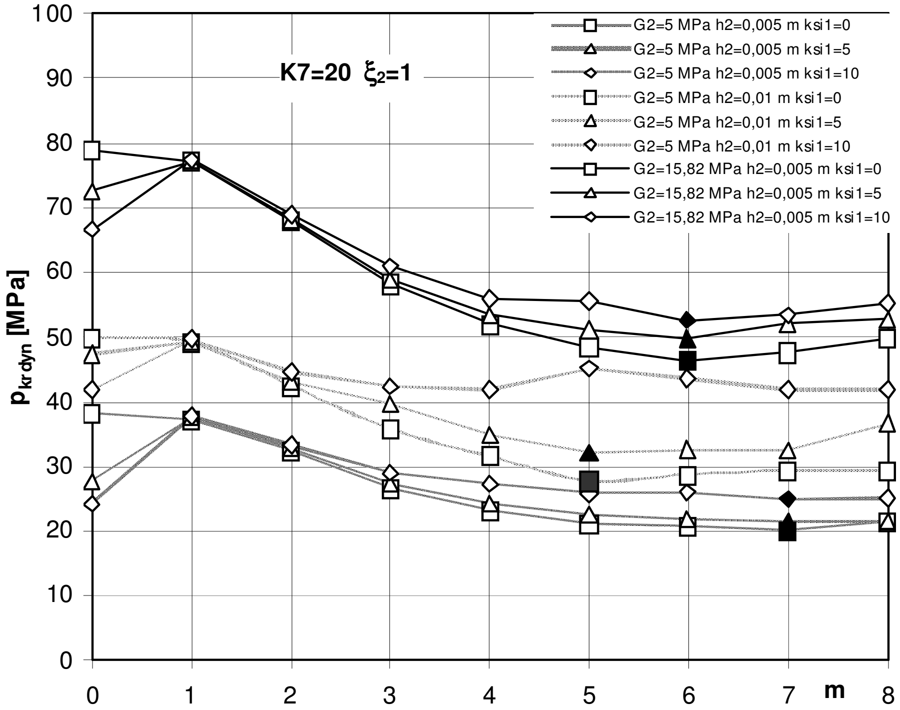
(b)



Rys. 6.23. Postać ugięcia wstępnego płyty: (a) wyrażona liczbą fal m = 5, (b) będąca złożeniem formy obrotowosymetrycznej dla $\xi_1 = 5$ i formy pofalowanej m = 5 dla $\xi_2 = 1$ dla powiększonych 200 razy liczb ξ_1, ξ_2

Wartości krytyczne obciążeń dynamicznych p_{krdyn} płyt o pofalowanych obwodowo postaciach wyboczenia, ściskanych na zewnętrznym obwodzie ze stałą prędkością *s*, którą określają liczby K7 = 20 1/s i p_{kr} = 46,58 MPa, dla różnych liczb ξ_1 = 0, 5, 10 i niezmiennej wartości liczby ξ_2 = 1 przedstawia rysunek 6.24. Przykładowe charakterystyki płyty o parametrach G_2 = 5 MPa i h_2 = 0,005 m i postaci wstępnego ugięcia określonej liczbami ξ_1 = 5, ξ_2 = 1 przedstawia rysunek 6.25.

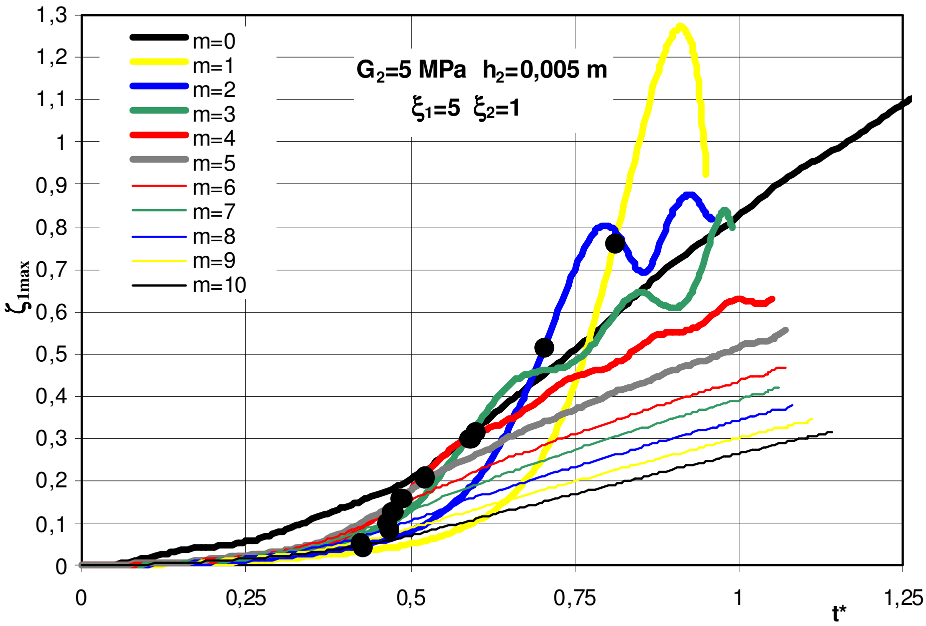
Wzrost obrotowosymetrycznego ugięcia wstępnego płyty wyrażonego wartością liczby ξ_1, ξ_1 = 5 lub 10 znacznie zmniejsza wartość krytycznego obciążenia dynamicznego płyt o obrotowosymetrycznej (m = 0) postaci wyboczenia. Dla tej postaci wyboczenia płyty istotnie zmienia się także przebieg charakterystyki $\zeta_{1max} = t(t^*)$ (rysunek 6.25). Minimalna wartość krytycznego obciążenia dynamicznego nadal odpowiada pofalowanej obwodowo postaci wyboczenia płyty. Zmiany wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} badanych płyt o różnej liczbie fal wyboczenia *m,* przedstawione na rysunku 6.24, pokazują także brak istotnych różnic wartości p_{krdyn} płyt o małej liczbie fal obwodowych wyboczenia m = 1, 2. Większe różnice wartości p_{krdyn} zaobserwowano dla płyt o większej liczbie fal m > 4, z wyraźną tendencją do wzrostu wartości p_{krdyn} dla płyt z ugięciem wstępnym wyrażonym liczbą ξ_1 = 10. W tym przypadku (ξ_1 = 10) utrata stateczności płyty z rdzeniem grubszym (h_2 = 0,01 m) dla minimalnej wartości krytycznego obciążenia dynamicznego może mieć postać o innej liczbie fal *m* niż postać wyboczenia (m = 5) płyt z mniejszym ugięciem wstępnym ξ_1 = 0 lub 5.



Rys. 6.24. Wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} płyt o różnej liczbie fal wyboczenia m i o zmiennej wartości liczby ξ_1 (ksi1)

Przedstawione wyniki wskazują, iż zaburzenie kształtu wstępnej geometrii płyty dodatkowym ugięciem obrotowosymetrycznym nie zmienia ważnego z praktycznego punktu widzenia wyniku końcowego. Nadal najmniejsze obciążenie krytyczne odpowiada płycie pofalowanej o zgodnej liczbie fal m odpowiadającej postaci ugięcia wstępnego i krytycznego, tj. dla $\xi_1 = 0$.

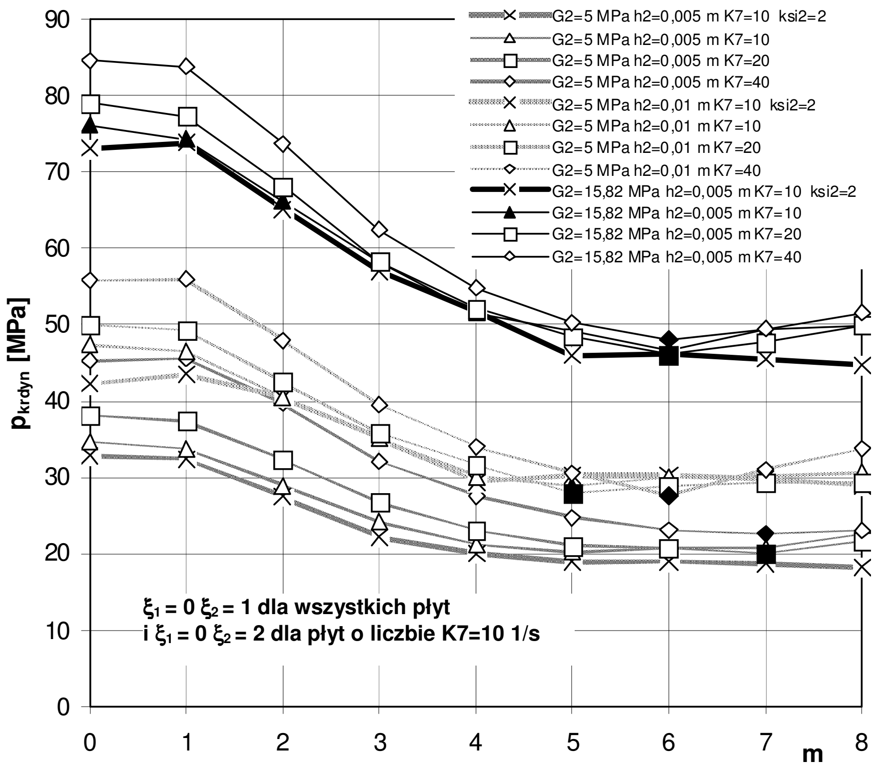
Sformułowanie jednak ogólnych wniosków końcowych sugerujących możliwość ograniczenia i zarazem uproszczenia obszaru badań płyt do przypadków, gdy postać wstępnego ugięcia jest o określonej liczbie fal obwodowych, pozbawionych dodatkowych zaburzeń kształtu nie wydaje się możliwe. Zasadna pozostaje nadal myśl o traktowaniu analizowanej płyty jako oddzielnego obiektu badań opisanego w przestrzeni właściwych parametrów.



Rys. 6.25. Charakterystyki ugięć płyt o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, o postaci ugięcia wstępnego wyrażonego liczbami $\xi_1 = 5$, $\xi_2 = 1$, ściskanych na obwodzie zewnętrznym

Podobnie jak w przypadku analizy płyt obciążanych na obwodzie wewnętrznym zmniejszenie wartości krytycznego obciążenia dynamicznego spowodowane mniejszą prędkością narastania obciążenia i większą wartością liczby ξ_2 ugięcia wstępnego obserwuje się także dla płyt ściskanych na brzegu zewnętrznym.

Zmiany wartości p_{krdyn} płyt o różnej liczbie fal obwodowych wyboczenia *m*, poddanych działaniu narastających z różną prędkością *s* (wyrażoną poprzez liczbę *K7*) obciążeń przedstawia rysunek 6.26. W przypadku płyt z cieńszym rdzeniem h_2 = 0,005 m w całym zakresie badanych przypadków płyt (m = 0÷8 dla G_2 = 5 MPa i G_2 = 15,82 MPa) mniejsze wartości p_{krdyn} występują dla płyt z wolno narastającym obciążeniem (K7 = 10 1/s), których ugięcie wstępne jest duże ($\xi_2 = 2$). Obserwacji tej nie potwierdzają wyniki obliczeń płyt z rdzeniem grubszym h_2 = 0,01 m o większej liczbie fal obwodowych wyboczenia (m > 4). Znaczny wzrost intensywności działającego obciążenia K7 = 40 1/s zmienia w przypadku tych płyt postać wyboczenia dla minimalnej wartości p_{krdyn} z m = 5 dla K7 = 10 1/s na m = 6 fal obwodowych. Mimo że różnica wartości p_{krdyn} jest minimalna (rzędu 0,2 MPa), to w odróżnieniu od pozostałych badanych przypadków, dla których wartości p_{krdyn} płyt o większej liczbie fal obwodowych wyboczenia (m > 4) są porównywalne, w tym przypadku (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m, K7 = 40 1/s) minimalna wartość p_{krdyn} dla m = 6 istotnie wyróżnia się.

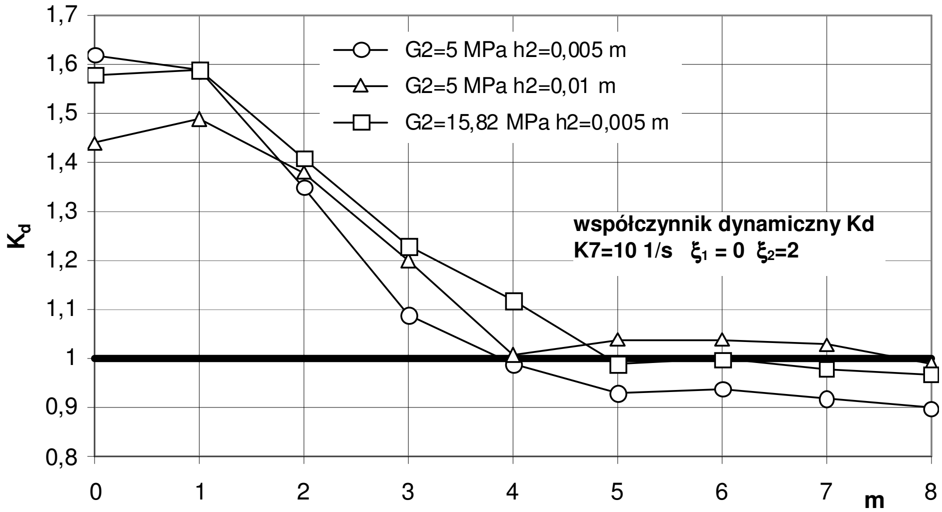


Rys. 6.26. Wpływ intensywności obciążenia dynamicznego na zmiany wartości p_{krdyn} płyt ściskanych na brzegu zewnętrznym dla różnych liczb fal obwodowych wyboczenia *m*

Większe wahania wartości krytycznych obciążeń dynamicznych występują dla płyt, których postać wyboczenia jest o mniejszej liczbie fal obwodowych m < 5 i płyt o postaci m = 0.

Zmiany współczynnika dynamicznego Kd wyznaczone dla płyt o różnej liczbie fal obwodowych wyboczenia *m* z wolno narastającym obciążeniem K7 = 10 1/s, których ugięcie wstępne jest duże (ξ_2 = 2), przedstawia rysunek 6.27. Wartość współczynnika dynamicznego K_d jest ilorazem krytycznego obciążenia dynamicznego p_{krdyn} i minimalnej wartości krytycznego obciążenia statycznego p_{kr} płyty o określonych wartościach parametrów G_2 i h_2 (tablica 6.9, podrozdział 6.4 pracy).

Najmniejsze wartości współczynnika K_d ($K_d < 1$) występują dla płyt, których postać wyboczenia jest o większej liczbie fal obwodowych (m > 4) oraz płyt o cieńszym rdzeniu h_2 = 0,005 m lub o większej sztywności materiału rdzenia, gdy G_2 = 15,82 MPa.



Rys. 6.27. Zmiany wartości współczynnika dynamicznego K_d płyt o różnej licznie fal obwodowych wyboczenia *m*, ściskanych na brzegu zewnętrznym

Możliwość wystąpienia wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} mniejszych od krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} (dla $K_d < 1$) potwierdza konieczność prowadzenia wnikliwych badań obliczeniowych analizowanych przypadków płyt wrażliwych na opisujące je parametry: materiałowe, geometryczne i obciążeniowe. Ocena wpływu intensywności działających obciążeń potwierdza także wcześniejsze spostrzeżenia wskazujące na trudności w formułowaniu ogólnych prawidłowości zachowań płyt, zwłaszcza tych, których stopień deformacji wstępnej i krytycznej jest znaczny (dla m > 4).

6.7. Stateczność statyczna płyt rozciąganych promieniowo na brzegu wewnętrznym, płyt różnie podpartych i płyt o zmiennym ilorazie wewnętrznego do zewnętrznego promienia

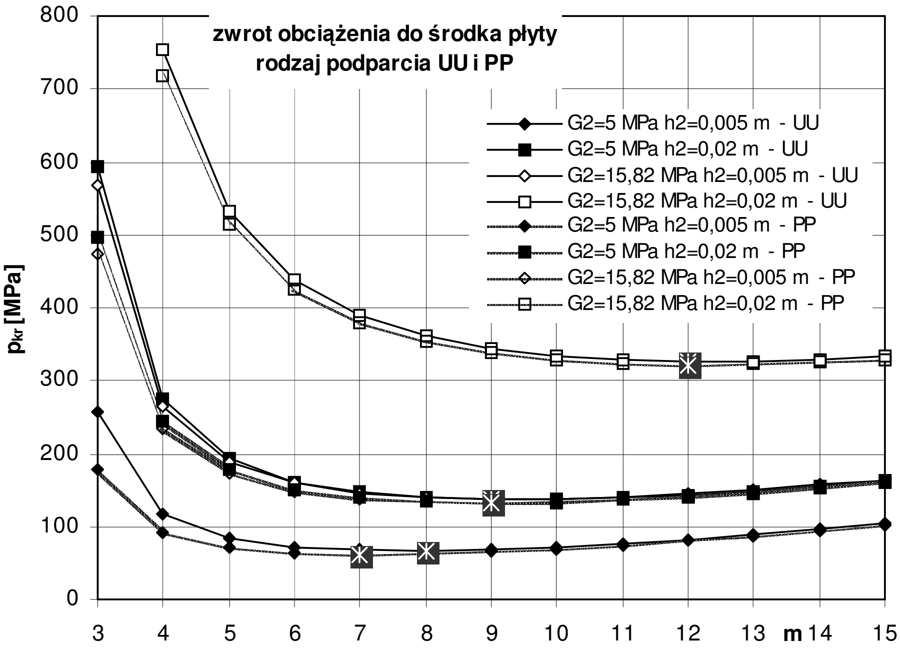
Dotychczasowa analiza warstwowych płyt pierścieniowych wskazuje obciążenia bifurkacyjne jako wielkości dobrze identyfikujące badane zjawisko utraty stateczności płyt. Wartości tych obciążeń w większości badanych przypadków płyt są mniejsze od krytycznych obciążeń dynamicznych wyznaczonych dla liczb K7 = 20 1/s, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$. Można przyjąć, iż w zakresie badań podstawowych numerycznie prosta ocena wartości statycznych obciążeń krytycznych dostatecznie informuje o stanie krytycznym płyt. Tak więc ograniczenie zakresu badań jedynie do oceny wartości obciążeń bifurkacyjnych wyznaczonych w dodatkowych analizach uwzględniających cechy pierścieniowego kształtu badanej płyty ma praktyczne uzasadnienie.

Znaczenie ma tutaj relacja wymiarów: wewnętrznego do zewnętrznego pro mienia płyty wyrażona ilorazem $\rho = \frac{r_w}{r_z}$ oraz obserwacja rzadko występującego w badaniach stateczności elementów zjawiska, nazwanego w pracy [88] „wyboczeniem przy rozciąganiu" (tension buckling). Zjawisko zachodzi wtedy, gdy płyta, również prostokątna [88], jest obciążona na brzegu wewnętrznym siłami skierowanymi do środka otworu. Zmiana zwrotu sił działających na brzeg wewnętrzny płyty pierścieniowej na przeciwny zmienia charakter sił obciążających na siły promieniowo rozciągające, których działanie dla określonych wartości krytycznych również powoduje zmianę postaci ugięcia badanej płyty. Kształt płyty po utracie stateczności przyjmuje wtedy postać obwodowych pofalowań, dla $m \neq 0$, Wystąpienie postaci obrotowosymetrycznej ($m = 0$) nie jest obserwowane i wręcz niemożliwe, jak zauważono w pracy [25].

Rysunek 6.28 przedstawia wartości obciążeń krytycznych p_{kr} dla różnej liczby fal wyboczenia m płyt dwustronnie przesuwnie utwierdzonych (rodzaj podparcia UU) lub podpartych swobodnie (PP) o parametrach: G_2 = 5 i 15,82 MPa, h_2 = 0,005 i 0,02 m. W każdym z analizowanych przypadków wartości obciążeń krytycznych znacznie wzrastają ze spadkiem liczby fal wyboczenia m, przyjmując już dla liczby m = 3, 4 wartości bardzo duże. Minimalne wartości obciążeń krytycznych p_{kr} odpowiadają postaciom, dla których liczba fal wyboczenia m jest duża. Liczba fal wzrasta ze wzrostem sztywności płyty. Rząd wartości tych obciążeń jest porównywalny z wartościami krytycznych obciążeń ściskających promieniowo brzeg wewnętrzny płyt, których utrata stateczności ma jednak postać obrotowosymetryczną (podrozdział 6.4 pracy – tablica 6.8 i rysunek 6.2).

Zasadniczo różny sposób podparcia brzegów płyty (utwierdzenie, podpory przegubowe) praktycznie nie wpływa zarówno na wartości, jak i postać krytycznej deformacji płyty. Jedynie dla przypadku płyty z miękkim rdzeniem o parametrach:

G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, postać ta zmienia się z m = 8 dla podparcia typu UU na m = 7 dla podpór PP (rys. 6.28).



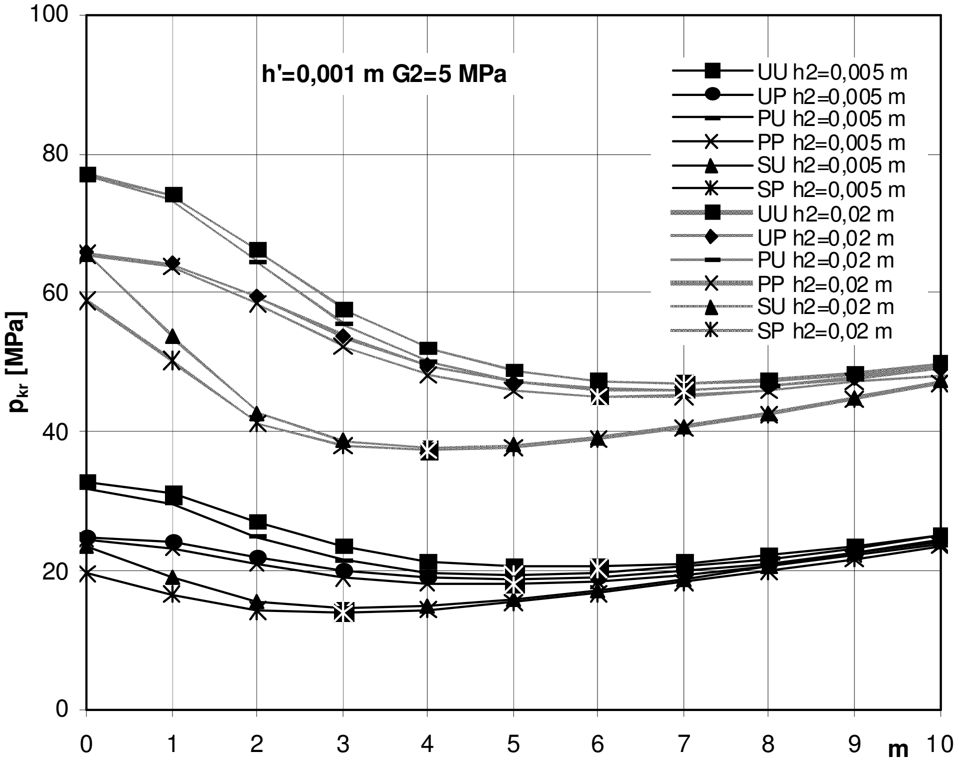
Rys. 6.28. Statyczne obciążenia krytyczne p_{kr} dla różnych postaci wyboczenia *m* płyt rozciąganych promieniowo na wewnętrznym obwodzie okładzin

Rozwiązanie zagadnienia wyboczenia warstwowej, a także jednorodnej płyty pierścieniowej, dwustronnie utwierdzonej i podpartej przegubowo, przy działaniu rozciągających sił na brzegu wewnętrznym przedstawiono w pracy [25]. Porównano otrzymane dla różnych promieni r_w i r_z płyty wartości obciążeń krytycznych, wyznaczone dla różnej liczby fal obwodowych. Wyniki pokazują znacznie mniejsze różnice wartości obciążeń krytycznych pomiędzy płytami warstwowymi a płytami jednorodnymi odpowiednio utwierdzonymi i podpartymi przegubowo na brzegach.

Wartości obciążeń bifurkacyjnych płyt z różnymi podporami o dużej liczbie fal wyboczenia, ściskanych na zewnętrznym brzegu, również w małym stopniu zależą od rodzaju podparcia. Wyniki dla płyt o dwóch różnych grubościach rdzenia h_2 = 0,005 i 0,02 m przedstawia rysunek 6.29.

Wartości obciążeń krytycznych płyt, których wyboczenie ma postać silnie pofalowaną, o liczbie fal *m* nie mniejszej niż ta, która odpowiada minimalnej wartości obciążenia krytycznego (tj. m = 5 lub m = 6 dla płyt o parametrach G_2 = 5 MPa,

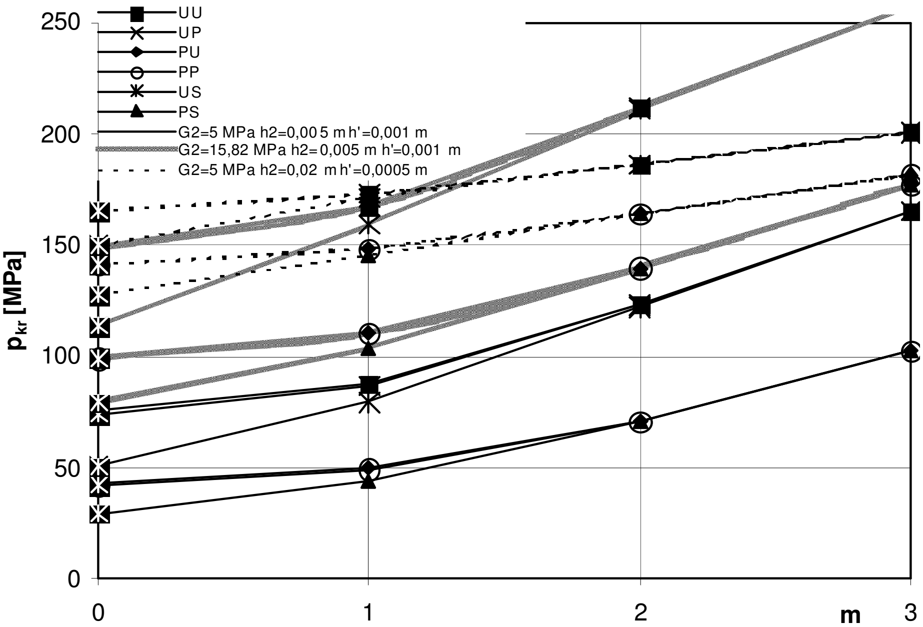
h_2 = 0,005 m i m = 6 lub m = 7 dla płyt o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m) i których układ podporowy to kombinacja podpór przesuwnych typu utwierdzenie U i podpora przegubowa P (UU, UP, PU, PP) są bardzo zbliżone.



Rys. 6.29. Wpływ rodzaju podpór na wartości obciążeń p_{kr} dla różnych postaci wyboczenia płyty ściskanej na zewnętrznym obwodzie

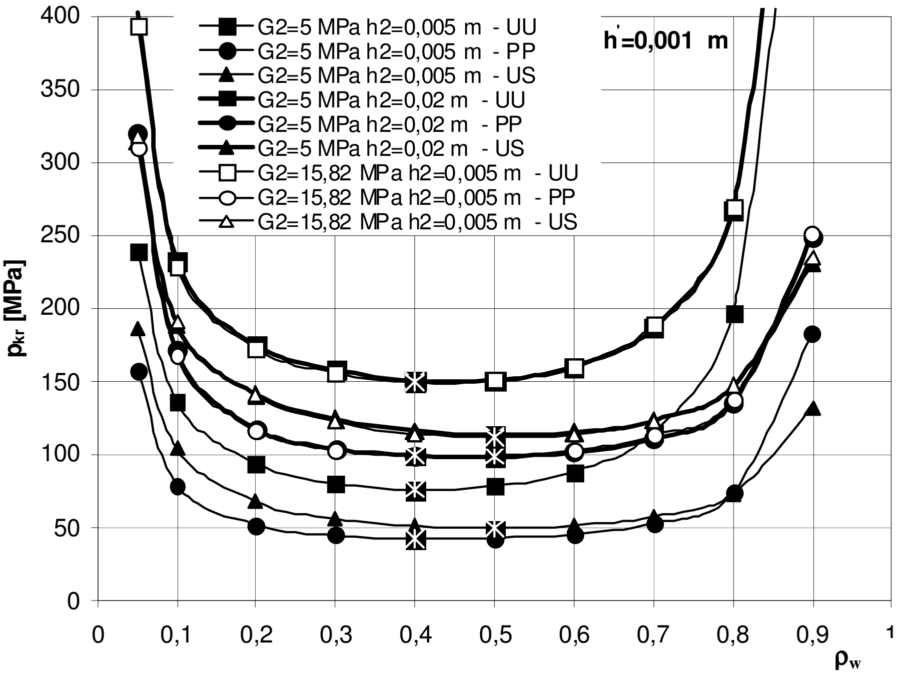
Również podobna zgodność obciążeń krytycznych p_{kr} występuje dla płyt, których brzeg wewnętrzny jest swobodny S (SU, SP). Minimalna wartość obciążeń krytycznych p_{kr}, jak i liczba m fal wyboczenia (m = 3 dla płyty G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m i m = 4 dla płyty G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m) płyt o podporach (SU, SP) jest wprawdzie istotnie mniejsza od wartości p_{kr} płyt bez końca swobodnego, to jednak w obszarze postaci wyboczenia silnie pofalowanych m > 7, 8 wartości obciążeń p_{kr} wszystkich badanych płyt, a szczególnie płyt z cieńszym rdzeniem h_2 = 0,005 m są porównywalne. Część szczegółowych wyników płyt podpartych na podporach typu UP, PP i SU przedstawia tablica 6.6 w podrozdziale 6.3 pracy.

Wyniki obliczeń przedstawione na rysunku 6.30 i w tablicy 6.3 (podrozdział 6.3 pracy) płyt dowolnie podpartych i ściskanych promieniowo na brzegu wewnętrznym potwierdzają spostrzeżenia przedstawione w podrozdziale 6.4 pracy. Minimalna wartość obciążenia krytycznego p_{kr} odpowiada obrotowosymetrycznej postaci utraty stateczności płyty.



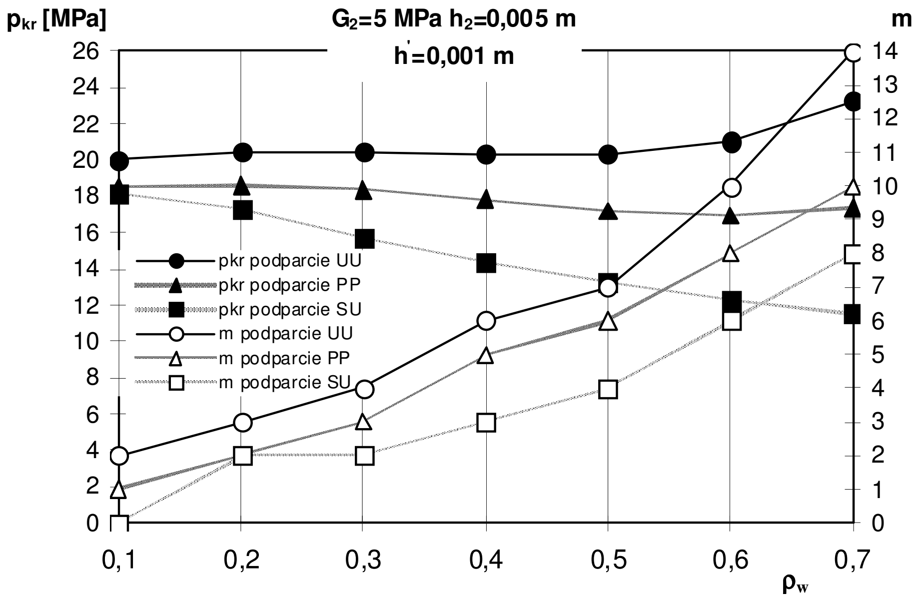
Rys. 6.30. Wpływ układu podporowego i parametrów rdzenia płyty na zmiany statycznych obciążeń krytycznych p_{kr} dla różnych postaci wyboczenia *m* płyt ściskanych promieniowo na wewnętrznym obwodzie

Teoretyczna możliwość wyboczenia płyt podpartych w dowolny sposób w formie obwodowo pofalowanej (m = 1, 2, 3) występuje jednak dla obciążeń znacznie wyższych od tych, które odpowiadają postaci obrotowosymetrycznej m = 0, Wartości obciążeń bifurkacyjnych płyt o układzie podporowym odpowiednio UU i UP oraz PU i PP są praktycznie zgodne. Istotnie mniejsze są wartości minimalnych obciążeń płyt, których zewnętrzny brzeg jest swobodny, a wewnętrzny jest utwierdzony U lub podparty przegubowo P. Dla płyty przegubowo podpartej na brzegu wewnętrznym i o swobodnym brzegu zewnętrznym PS wartość obciążenia bifurkacyjnego jest najmniejsza dla m = 0, Wpływ ilorazu promieni płyty ($\rho_w = \frac{r_w}{r_z}$) na wartość statycznych obciążeń krytycznych p_{kr} przedstawiają rysunki 6.31, 6.32, 6.33, 6.34. Rysunek 6.31 dotyczy przypadku płyty ściskanej promieniowo na wewnętrznym brzegu, której utrata stateczności ma postać obrotowosymetryczną (m = 0). Wartości obciążeń bifurkacyjnych rozpatrywanych płyt dwustronnie utwierdzonych przesuwnie UU, podpartych przegubowo PP lub z zewnętrznym brzegiem swobodnym US o parametrach rdzenia: G_2 = 5 i 15,82 MPa, h_2 = 0,005 i 0,02 m, występują dla wartości ρ_w = 0,4 lub 0,5. Sposób podparcia brzegów płyty ma duży wpływ na wartość obciążeń krytycznych. Najmniejsze wartości występują dla płyt podpartych przegubowo. Zarówno zwiększanie, jak i zmniejszanie promienia wewnętrznego płyty zwiększa wartość statycznych obciążeń krytycznych.



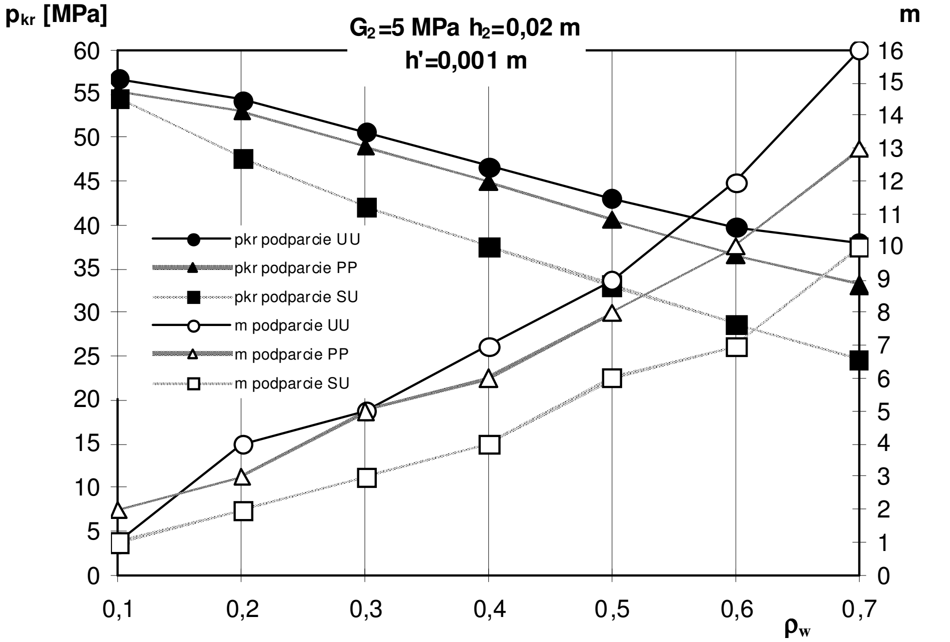
Rys. 6.31. Wpływ ilorazu promieni płyty ściskanej promieniowo na wewnętrznym obwodzie na wartość statycznych obciążeń krytycznych p_{kr}

Rysunki 6.32, 6.33, 6.34 przedstawiają zarówno zmiany wartości minimalnych obciążeń krytycznych p_{kr}, jak i odpowiadających im postaci utraty stateczności, (wyrażonych liczbą fal m) płyt ściskanych na zewnętrznych brzegach.

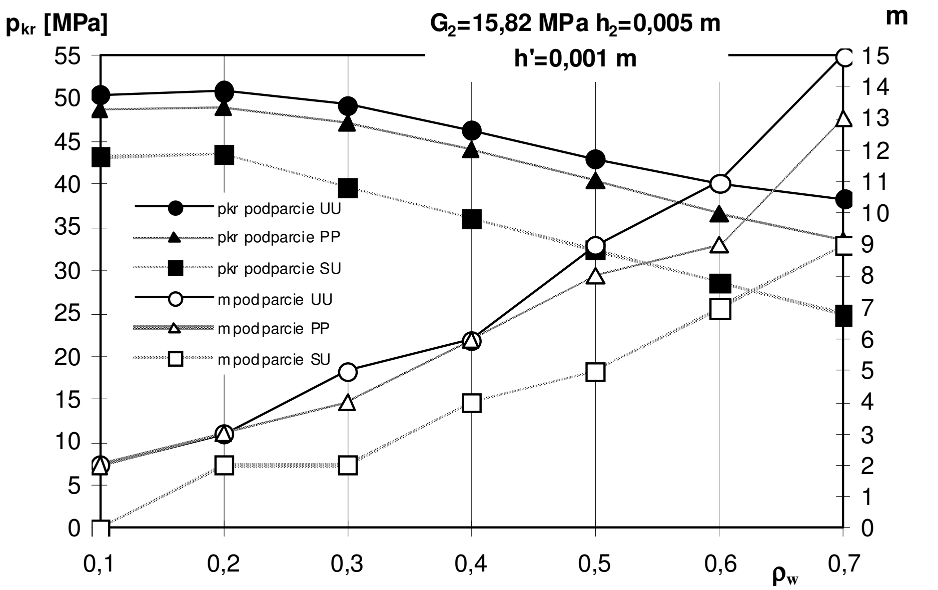


Rys. 6.32. Wpływ ilorazu promieni płyty o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, ściskanej na zewnętrznym obwodzie na wartość statycznych obciążeń krytycznych p_{kr}

Wartość ilorazu promieni płyty ($\rho_w = \frac{r_w}{r_z}$) ma duży wpływ na postać jej wyboczenia. Liczba fal wyboczenia m istotnie zwiększa się wraz ze wzrostem ρ_w. Zwiększanie promienia wewnętrznego płyty powoduje zmniejszanie wartości minimalnych obciążeń krytycznych p_{kr} płyt z rdzeniem grubszym h_2 = 0,02 m i o większej wartości modułu G_2 = 15,82 MPa. W przypadku płyty z rdzeniem miękkim (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m) tendencję tą obserwuje się dla płyty, której brzeg wewnętrzny jest swobodny SU. Dla płyt utwierdzonych dwustronnie lub podpartych przegubowo zmiany wartości obciążeń krytycznych są niewielkie z tendencją do zmniejszania się p_{kr} dla płyt podpartych typu PP i zwiększania się p_{kr} dla płyty utwierdzonej o szerokości pierścienia wyrażonej przez ρ_w = 0,7. Wpływ parametrów materiałowych i geometrycznych rdzenia płyty w przedstawionej analizie ma duże znaczenie.



Rys. 6.33. Wpływ ilorazu promieni płyty o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m, ściskanej na zewnętrznym obwodzie na wartość statycznych obciążeń krytycznych p_{kr}



Rys. 6.34. Wpływ ilorazu promieni płyty o parametrach G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m, ściskanej na zewnętrznym obwodzie na wartość statycznych obciążeń krytycznych p_{kr}

Związanie rodzaju materiału i grubości rdzenia płyty ściskanej na zewnętrznym obwodzie z wymiarami promieni jej pierścienia pokazuje możliwość wystąpienia odmiennych zachowań płyt z rdzeniem miękkim od zachowań płyt pozostałych. Jest to również dobry przykład potwierdzający sygnalizowaną trudność w dokonywaniu uogólnionych ocen krytycznych zachowań badanych płyt nawet wtedy, gdy zostaną one ograniczone jedynie do oceny jakościowej. Rozwiązaniem jej jest szybka analiza numeryczna uwzględniająca wpływ wielu parametrów opisujących strukturę badanej płyty, prowadząca do zarówno oceny jakościowej zjawiska, jak i szczegółowej, ilościowej informującej o możliwych wartościach obciążeń krytycznych.

7. Zastosowanie metody elementów skończonych

Ocena wartości obciążeń bifurkacyjnych, dynamicznych obciążeń krytycznych i ugięć maksymalnych dla określonych postaci krytycznej deformacji płyt ma w analizie stanu krytycznego płyty znaczenie zasadnicze, lecz nie jest oceną wystarczającą. Utracie stateczności płyt, która następuje dla wyznaczonych obciążeń krytycznych, towarzyszy złożony stan naprężeń przenoszonych przez poszczególne warstwy. Rząd wartości naprężeń powstałych już w momencie utraty stateczności płyty może znacznie przekraczać wartość odpowiadającą minimalnemu obciążeniu krytycznemu. Analiza wytrzymałości badanej struktury płyty ma tutaj znaczenie podstawowe, a zastosowanie kryterium wytężeniowego obok kryterium utraty stateczności jest bezwzględnie konieczne w ocenie zdolności użytkowej płyty jako elementu konstrukcyjnego.

Przydatną w rozwiązaniu dość złożonego numerycznie zadania, jakim jest określenie pełnego stanu naprężeń w warstwach płyty, jest metoda elementów skończonych. Jej wykorzystanie w ocenie stanu krytycznego trójwarstwowej płyty pierścieniowej umożliwiło:

- ocenę poprawności wyników obliczeń płyt prowadzonych metodą różnic skończonych,
- porównanie wartości statycznych i dynamicznych obciążeń krytycznych, i otrzymanych obrazów postaci utraty stateczności płyt z wynikami obliczeń metodą różnic skończonych,
- potwierdzenie i uzupełnienie obserwacji zachowań płyt z rdzeniem lepkosprężystym, i płyt wrażliwych na niedokładności kształtu,
- poznanie i ocenę wartości oraz rozkładu naprężeń zredukowanych w okładzinach i naprężeń stycznych w rdzeniu płyty,
- oraz uzupełnienie przedstawionych analiz o dodatkową, ważną praktycznie analizę częstości drgań własnych rozpatrywanej struktury płyty.

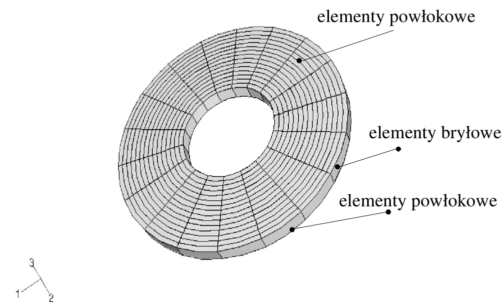
Obliczenia metodą elementów skończonych prowadzono w Akademickim Centrum Komputerowym CYFRONET w Krakowie – numer grantu obliczeniowego (KBN/SGI_ORIGIN_2000/PŁódzka/030/1999). Zastosowano program ABAQUS.

7.1. Model obliczeniowy trójwarstwowej płyty pierścieniowej

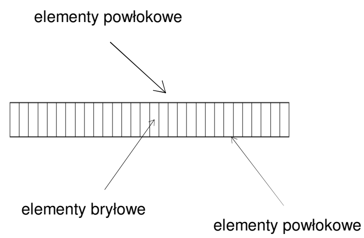
Istotą budowy modelu płyty w metodzie elementów skończonych jest przyjęte założenie klasycznej teorii płyt warstwowych o podziale podstawowych naprężeń przenoszonych przez poszczególne warstwy płyty: normalnych przez jej okładziny i stycznych, wywołujących odkształcenie postaciowe, przez rdzeń. Na tej podstawie autorzy prac [36] i [38] sugerują konieczność zastosowania różnych rodzajów elementów skończonych w budowie modelu takiej struktury warstwowej: elementów powłokowych w siatce okładzin płyty i bryłowych w modelu jej rdzenia.

W podjętych analizach wykorzystano dwa modele:

- podstawowy w postaci pełnego modelu płyty kołowosymetrycznej – rysunek 7.1 (zwany dalej modelem podstawowym),
- uproszczony zbudowany z elementów obrotowosymetrycznych – rysunek 7.2 (zwany dalej modelem uproszczonym).

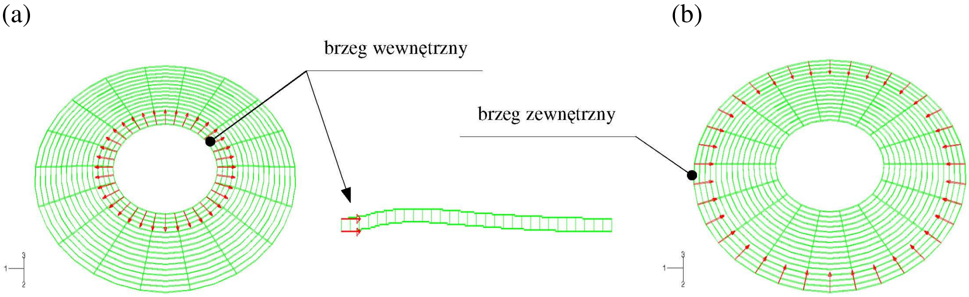


Rys. 7.1. Model pełnego pierścienia płyty– model podstawowy



Rys. 7.2. Model uproszczony płyty zbudowany z elementów obrotowosymetrycznych

W budowie modelu podstawowego płyty wykorzystano 3D elementy powłokowe 9-węzłowe i bryłowe elementy 27-węzłowe. Natomiast siatka MES modelu uproszczonego jest zbudowana z obrotowosymetrycznych elementów powłokowych 3-węzłowych i bryłowych 8-węzłowych. Liczba elementów skończonych modelu podstawowego wynosi 3042, z czego 810 (3x270) to elementy tworzące siatkę modelu, a pozostałe to elementy kontaktowe generowane przez program. Całkowita liczba zmiennych wynosi 30348. Natomiast liczba elementów modelu uproszczonego wynosi 212, z czego 90 (3x30) to elementy tworzące siatkę modelu. Całkowita liczba zmiennych wynosi 916. Wewnętrzne powierzchnie siatki elementów okładzin z zewnętrznymi powierzchniami rdzenia związano powierzchniowymi oddziaływaniami kontaktowymi. Zastosowano opcję TIED programu ABAQUS zapewniającą dokładny kontakt związanych powierzchni. Zewnętrznemu i wewnętrznemu brzegowi płyty zadano warunki podparcia z ograniczeniem możliwości promieniowego przemieszczenia względnego zewnętrznych warstw płyty w jej utwierdzonych przesuwnie brzegach. Schematy obciążeń płyty pierścieniowej na wewnętrznym i zewnętrznym brzegu jej okładzin przedstawia rysunek 7.3. Wymiary promieni pierścienia modelu płyty wynoszą: r_w = 0,2 m i r_z = 0,5 m.



Rys. 7.3. Schemat obciążenia brzegu wewnętrznego (a) i zewnętrznego (b) modelu płyty

Model obliczeniowy płyty zbudowany z elementów obrotowosymetrycznych (model uproszczony) pozwala na szybką analizę głównie zagadnień dynamicznych, w których badana jest obrotowosymetryczna postać deformacji krytycznej płyty. Dotyczy to przypadków płyt obciążonych (ściskanych promieniowo) na wewnętrznym brzegu.

W opisie sprężystych właściwości materiału pianki poliuretanowej rdzenia płyty wykorzystano stałe E_2, G_2, ν_2 opisane w podrozdziale 6.1 pracy. Natomiast lepkosprężyste właściwości materiału rdzenia przybliżono szeregiem Prony określającym moduł relaksacji w opisie prawa zmiany postaci [28], [29]:

$$G_R(t) = G_o\left[1 - \sum_{i=1}^{N} q_i^p \left(1 - e^{-t/\tau_i^G}\right)\right] \tag{7.1}$$

gdzie: q_i^p, τ_i^G – stałe materiałowe,

G_o – moduł sprężystości postaciowej G_2, $G_o = G_2$.

W obliczeniach przyjęto jeden wyraz szeregu:

$$G_R(t) = G_o\left[1 - q_1^p\left(1 - e^{-t/\tau_1^G}\right)\right]. \tag{7.2}$$

Wartości stałych q_1^p, τ_1^G dla modelu standardowego wyznaczono z zależności:

$$q_1^p = \frac{G_2}{G_2 + G_2'}, \qquad \tau_1^G = \frac{\eta'}{G_2 + G_2'}. \tag{7.3}$$

Obliczone dla danych przedstawionych w podrozdziałach 6.1 i 6.5 pracy wartości q_1^p i τ_1^G wynoszą odpowiednio:

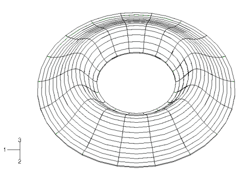
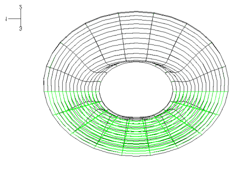
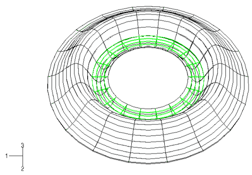
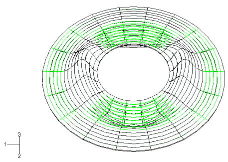
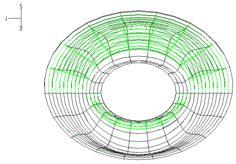
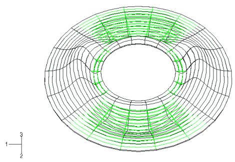
- $q_1^p = 0{,}615$, $\tau_1^G = 26{,}19 \cdot 10^4$ s dla pianki o module $G_2 = 5$ MPa,
- $q_1^p = 0{,}185$, $\tau_1^G = 928{,}46$ s dla pianki o module $G_2 = 15{,}82$ MPa.

Obliczenia metodą elementów skończonych prowadzone w systemie ABAQUS wykorzystują podstawowe procedury programu typu: BUCKLE, DYNAMIC, FREQUENCY w podjętych analizach statycznej, dynamicznej i modalnej. Programy numeryczne budowane pod kątem wyznaczonych badań mają prostą, jednoetapową strukturę. Geometrię określającą wymiary ugięć początkowych analizowanych płyt w zagadnieniu dynamicznym modelowano w osobnych podprogramach wywoływanych w programie głównym.

7.2. Obciążenia krytyczne i postacie utraty stateczności modeli MES płyt

Postacie utraty stateczności modelu podstawowego płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym okładzin, odpowiadające kolejnym wartościom statycznych obciążeń krytycznych, przedstawia tablica 7.1.
Najmniejsza wartość obciążenia krytycznego odpowiada obrotowosymetrycznej postaci wyboczenia płyty (m = 0), co potwierdza wyniki obliczeń płyt otrzymane metodą różnic skończonych (MRS), przedstawione w podrozdziale 6.4 pracy. Właśnie to charakterystyczne zachowanie płyt obciążonych na wewnętrznym brzegu pozwala na zastosowanie znacznie prostszego w budowie i ułatwiającego obliczenia numeryczne oraz analizę wyników, modelu zbudowanego wyłącznie z elementów obrotowosymetrycznych. Porównanie wartości obciążeń krytycznych płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym wyznaczonych dla dwóch modeli MES, tj. modelu podstawowego i modelu uproszczonego, z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu MRS przedstawia tablica 7.2.

Tablica 7.1. Krytyczne obciążenia statyczne p_{kr} i parametr postaci wyboczenia *m* płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym o grubości okładzin h′ = 0,001 m

<table>
<tr><th>GG_2 [MPa] /h_2 [m]</th><th colspan="3">p_{kr} [MPa]
m</th></tr>
<tr><td rowspan="2">5 / 0,005</td><td>64,08

m = 0</td><td>75,75

m = 1</td><td>107,04

m = 0 n = 1</td></tr>
<tr><td>109,89

m = 2</td><td>113,95

m = 1 n = 1</td><td>141,35

m = 2 n = 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5 / 0,02</td><td>143,76
m = 0</td><td>161,05
m = 1</td><td>203,99
m = 2</td></tr>
<tr><td>205,25
m = 0 n = 1</td><td>216,48
m = 1 n = 1</td><td>251,97
m = 2 n = 1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">15,82 / 0,005</td><td>120,30
m = 0</td><td>136,10
m = 1</td><td>178,04
m = 0 n = 1</td></tr>
<tr><td>178,90
m = 2</td><td>188,18
m = 1 n = 1</td><td>222,86
m = 2 n = 1</td></tr>
</table>

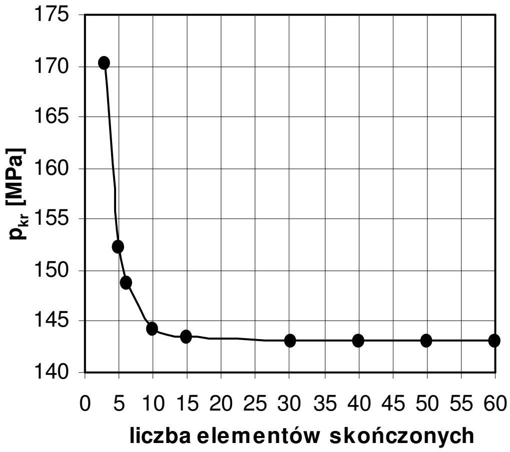
n – liczba fal w kierunku promieniowym płyty

Tablica 7.2. Krytyczne obciążenia statyczne płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym

G_2[MPa]/h_2[m]/h′[m]	p_{kr} [MPa]		
	model podstawowy	**model uproszczony**	**MRS**
5,0/0,005/0,0005	57,84	57,48	64,12
5,0/0,005/0,001	64,08	64,00	75,61
5,0/0,02/0,0005	170,50	168,32	165,51
5,0/0,02/0,001	143,77	143,20	150,29
15,82/0,005/0,0005	137,93	136,49	149,91
15,82/0,005/0,001	120,30	119,92	149,34
15,82/0,02/0,0005	449,24	434,56	437,54
15,82/0,02/0,001	326,41	324,01	338,94

Duża zgodność wartości obciążeń krytycznych p_{kr} obu modeli MES płyt wskazuje na poprawność ich modelowania, która zapewnia porównywalność wyników obliczeń płyt o obrotowosymetrycznej postaci wyboczenia (m = 0).

Przedstawiona na przykładowym wykresie – rysunek 7.4 – pełna zbieżność wartości obciążenia krytycznego p_{kr} modelu uproszczonego płyty o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m i h′ = 0,001 m występuje dla siatki modelu złożonego z 30 elementów obrotowosymetrycznych.



Rys. 7.4. Zależność obciążeń krytycznych modelu płyty o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m od liczby elementów skończonych

Szczególnie dobra zgodność (błąd względny jest mniejszy od 3%) wyników obliczeń MRS z otrzymanymi dla modelu MES występuje dla płyt z grubszym rdzeniem (h_2 = 0,02 m) i cieńszymi okładzinami (h′ = 0,0005 m). W pozostałych przypadkach płyt, lepszą zgodność wyników (błąd nie przekracza 5%) obserwuje się również dla płyt z grubszym rdzeniem (h_2 = 0,02 m).

Porównywalność wartości obciążeń, wyznaczonych metodami: MRS i MES, występuje również dla postaci utraty stateczności płyt, charakteryzujących się występowaniem pofalowania w kierunku promieniowym płyty.

Postacie utraty stateczności płyt, dla których wartość obciążenia krytycznego jest najmniejsza, to formy obrotowosymetryczne (m = 0) lub pofalowane obwodowo (m ≠ 0), ugięte w kierunku promieniowym w postaci zbliżonej do półfali dla płyt, których brzegi są podparte. Wyższym postaciom modalnym towarzyszy pofalowanie promieniowe. Wartości obciążeń krytycznych odpowiadających tym postaciom wyznaczają w obliczeniach prowadzonych metodą różnic skończonych wyższe wartości własne rozwiązywanego, dla danego przypadku płyty, zagadnienia wartości własnych (równanie (5.74) w podrozdziale 5.2.3 pracy).

Nawiązując do wyników przedstawionych w tablicy 7.1, wartości obciążeń wyznaczonych za pomocą metody różnic skończonych (MRS) przedstawionych przypadków płyt z pofalowaniem promieniowym n = 1 są następujące:

- płyta o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m:

  postaci m = 0 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 115,35 MPa,

  postaci m = 1 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 122,31 MPa,

  postaci m = 2 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 146,50 MPa,
- płyta o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m:

  postaci m = 0 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 199,93 MPa,

  postaci m = 1 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 209,00 MPa,

  postaci m = 2 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 234,47 MPa,
- płyta o parametrach: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m:

  postaci m = 0 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 200,52 MPa,

  postaci m = 1 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 209,60 MPa,

  postaci m = 2 n = 1 odpowiada wartość p_{kr} = 236,36 MPa.

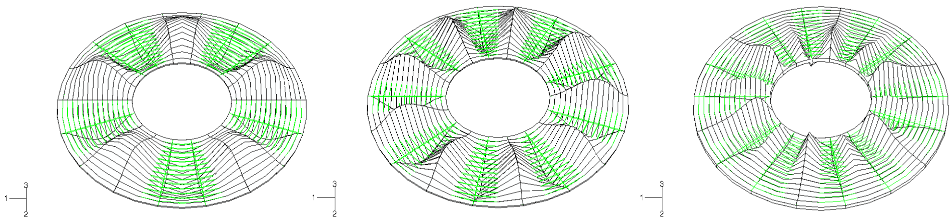
Obserwacja wyników otrzymanych zastosowanymi metodami obliczeń MRS i MES, która wprawdzie nie ma istotnego znaczenia praktycznego, lecz zwraca uwagę na pewną wrażliwość obu modeli MRS i MES płyt, dotyczy analizy kolejności występowania postaci utarty stateczności modeli płyt dla wyższych wartości obciążeń. Analiza modelu MRS płyty, z uwzględnieniem wyników przedstawionych w tablicy 7.2, pokazuje niezmienną dla trzech badanych przypadków płyt kolejność występowania postaci modalnych: m = 0, m = 1, m = 0 n = 1, m = 1 n = 1, m = 2, m = 2 n = 1. W przypadku modelu MES można zaobserwować zmianę kolejności postaci: m = 1 n = 1, m = 2 dla płyt z cieńszym rdzeniem (h_2 = 0,005 m) i „przeskok" postaci m = 2 przed postacie wyboczenia o liczbie n = 1 dla płyty o wyższej sztywności (h_2 = 0,02 m).

Porównanie wartości obciążeń krytycznych i postaci wyboczenia statycznego wyznaczonych metodą elementów skończonych i metodą różnic skończonych dla płyt ściskanych na zewnętrznym obwodzie przedstawia tablica 7.3. Obliczenia MES wymagają zastosowania modelu podstawowego płyty, który ma swobodę deformacji zarówno w kierunku obwodowym, jak i promieniowym.

Tablica 7.3. Krytyczne obciążenia statyczne i odpowiadająca im wartość parametru *m* postaci wyboczenia płyt ściskanych na zewnętrznym obwodzie

G_2[MPa]/h_2[m]/h'[m]	MES		MRS	
	p_{kr} [MPa]	m	p_{kr} [MPa]	m
5,0/0,005/0,0005	19,16	7	22,32	8
5,0/0,005/0,001	16,48	5	20,34	6
5,0/0,01/0,0005	35,53	9	38,50	9
5,0/0,01/0,001	25,85	6	29,24	6
5,0/0,02/0,0005	66,54	9	69,43	12
5,0/0,02/0,001	43,71	7	46,74	7
15,82/0,005/0,0005	52,03	9	61,45	9
15,82/0,005/0,001	35,04	6	46,34	6
15,82/0,01/0,0005	101,72	10	109,69	13
15,82/0,01/0,001	62,91	7	73,18	8
15,82/0,02/0,0005	193,15	12	200,55	18
15,82/0,02/0,001	115,10	9	124,88	9

Przykładowe postacie wyboczenia płyt przedstawia rysunek 7.5

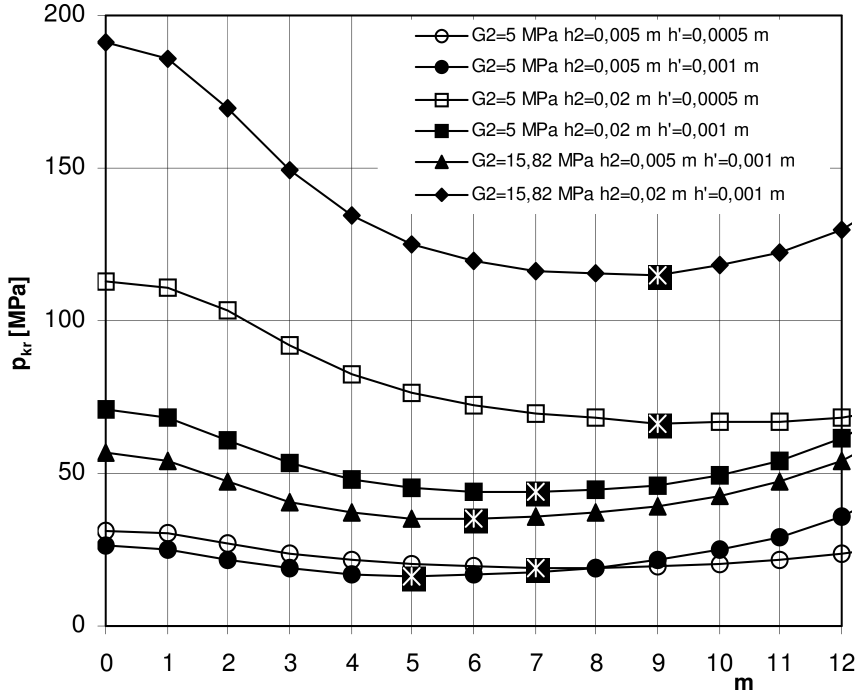


m = 5 m = 9 m = 12

Rys. 7.5. Postacie wyboczenia płyt ściskanych na zewnętrznym obwodzie

Rysunek 7.6 przedstawia wartości statycznych obciążeń krytycznych modeli MES płyt dla różnych postaci utraty stateczności.

Wyniki obliczeń z wykorzystaniem metody elementów skończonych odpowiadają wynikom płyt rozwiązanych metodą różnic skończonych. Postać utraty stateczności płyty dla najmniejszej wartości jej obciążenia krytycznego jest powierzchnią silnie pofalowaną obwodowo, a wartość obciążenia krytycznego jest znacznie mniejsza od wartości odpowiadającej obrotowosymetrycznej postaci wyboczenia płyty. Różnice wartości obciążeń p_{kr} płyt o postaciach wybczenia silnie pofalowanych (m > 4) są istotnie mniejsze w porównaniu z płytami o mniejszej liczbie fal wyboczenia *m*. Można by więc uznać pewien przedział liczb *m* – postaci krytycznych – możliwych do wystąpienia przy wyboczeniu płyt dla najmniejszych wartości obciążeń krytycznych. Odpowiednie liczby przedstawia tablica 7.4. Zbieżne wartości obciążeń krytycznych p_{kr} wyznaczone metodami elementów skończonych i różnic skończonych (tablice 7.3, 7.4) występują zwłaszcza dla płyt z grubszym rdzeniem (h_2 = 0,02 m) i płyt z cieńszymi okładzinami (h' = 0,0005 m). Dla tych płyt wspomniany przedział możliwych do wystąpienia postaci wyboczenia szczególnie się wyróżnia.



Rys. 7.6. Krytyczne obciążenia statyczne modeli MES płyt dla różnych wartości parametru *m* postaci wyboczenia

Tablica 7.4. Zakresy wartości obciążeń krytycznych p_{kr} i postaci wyboczenia płyt ściskanych na zewnętrznym obwodzie

G_2[MPa]/h_2[m]/h'[m]	**MES**		**MRS**	
	p_{kr} [MPa]	**m**	**p_{kr} [MPa]**	**m**
5,0/0,005/0,0005	19,39-19,16-19,55	6-7-9	22,78-22,32-22,72	6-8-10
5,0/0,005/0,001	17,02-16,48-16,75	4-5-6	20,35-20,34-20,94	5-6-7
5,0/0,02/0,0005	66,54-67,02	9-11	70,38-69,43- 70,47	9-12-15
5,0/0,02/0,001	43,80-43,71-44,61	6-7-8	47,11-46,74-47,16	6-7-8
15,82/0,005/0,0005	52,93-52,03	6-9	61,98-61,45-61,78	7-9-11
15,82/0,02/0,0005	196,96-193,15-193,59	10-12-13	201,30-200,55-201,76	15-18-21

Dynamiczną odpowiedź modelu płyty na działanie liniowo narastającego w czasie obciążenia oceniono, analizując wartości krytycznych obciążeń dynamicznych wraz z odpowiadającymi im wartościami parametru m postaci wyboczenia i ugięciami krytycznymi. W tej analizie model płyty ma ugięcie wstępne, którego kształt i wielkość określają liczby ξ_1, ξ_2, przedstawione w podrozdziale 6.6 pracy dla płyt analizowanych metodą różnic skończonych. Modele MES płyty są obciążane taką samą wartością prędkości narastającego obciążenia działającego na brzeg ich okładzin, jaka została przyjęta w obliczeniach metodą różnic skończonych (podrozdział 6.4 pracy). Zmianę intensywności wzrostu obciążenia wyrażono wartością współczynnika *K7*. Wartości obciążeń krytycznych i maksymalnych ugięć dynamicznych płyt z obrotowosymetrycznym ugięciem wstępnym określonym liczbami $\xi_1 = 0$ i $\xi_2 = 0{,}125$, 1, 2, które na brzegu wewnętrznym poddano obciążeniu (ściskaniu promieniowemu) narastającemu z różnymi prędkościami s wyrażonymi przez przyjęcie K7 = 10, 20 1/s i $p_{kr} = 217{,}32$ MPa, przedstawia tablica 7.5.

Tablica 7.5. Krytyczne obciążenia p_{krdyn} i ugięcia dynamiczne w_{dkr} modeli płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym

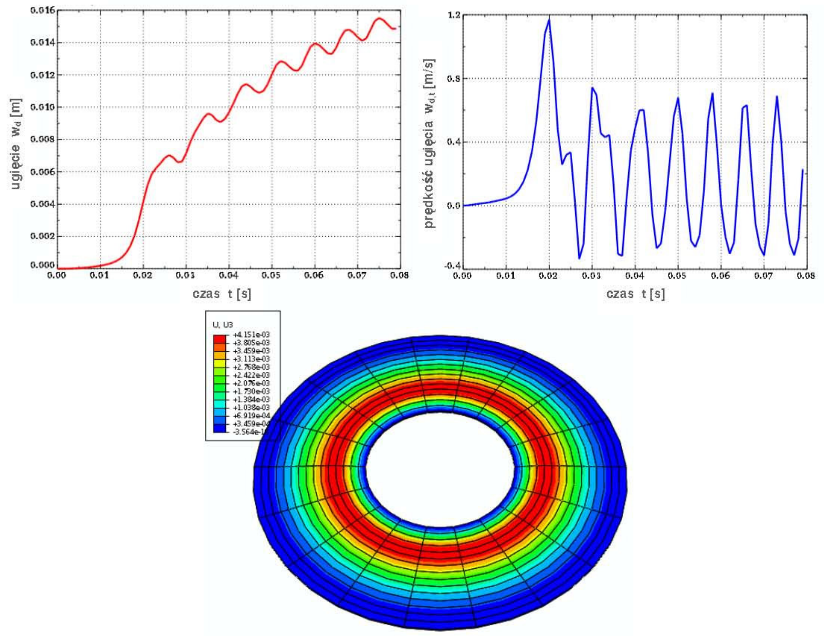
G_2 [MPa]/h_2 [m]	p_{krdyn} [MPa] w_{dkr} [m]										
	K7 = 20 1/s				**K7 = 10 1/s**				**K_d**	**K7 = 10 1/s**	**K_d**
	model podstawowy	**model uproszczony**			**model podstawowy**	**model uproszczony**				**MRS**	
	$\xi_2 = 1$	**ξ_2 = 0,125**	**1**	**2**	**$\xi_2 = 1$**	**ξ_2 = 0,125**	**1**	**2**		**$\xi_2 = 2$**	
5/0,005	86,92 $4{,}15\cdot10^{-3}$	104,32 $4{,}60\cdot10^{-3}$	86,93 $3{,}28\cdot10^{-3}$	82,58 $3{,}46\cdot10^{-3}$	73,88 $3{,}22\cdot10^{-3}$	86,93 $3{,}33\cdot10^{-3}$	76,07 $2{,}88\cdot10^{-3}$	**71,72** $2{,}70\cdot10^{-3}$	**1,12**	**82,36** $2{,}90\cdot10^{-3}$	**1,09**
5 / 0,02	149,94 $3{,}06\cdot10^{-3}$	165,17 $3{,}06\cdot10^{-3}$	147,78 $2{,}94\cdot10^{-3}$	143,43 $3{,}24\cdot10^{-3}$	143,42 $2{,}56\cdot10^{-3}$	156,48 $3{,}12\cdot10^{-3}$	143,44 $2{,}66\cdot10^{-3}$	**141,26** $3{,}08\cdot10^{-3}$	**0,99**	**147,99** $3{,}29\cdot10^{-3}$	**0,98**
15,82 /0,005	136,90 $3{,}54\cdot10^{-3}$	152,13 $3{,}79\cdot10^{-3}$	139,09 $3{,}67\cdot10^{-3}$	130,40 $3{,}04\cdot10^{-3}$	126,03 $2{,}66\cdot10^{-3}$	139,09 $3{,}38\cdot10^{-3}$	128,23 $2{,}78\cdot10^{-3}$	**123,88** $2{,}67\cdot10^{-3}$	**1,03**	**152,78** $2{,}95\cdot10^{-3}$	**1,02**

Tablica 7.5 przedstawia wyniki obliczeń dla uproszczonego modelu płyty dla trzech przypadków różnych ugięć wstępnych oraz wyniki obliczeń dla modelu podstawowego z ugięciem wstępnym o wartości $\xi_2 = 1$, a także wyznaczone dla

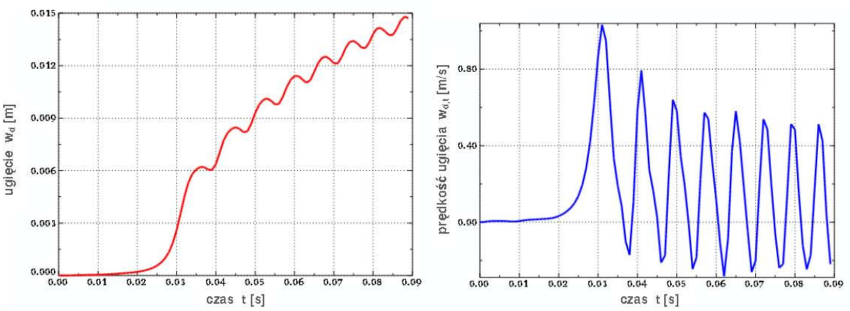
minimalnych obciążeń p_{krdyn} (liczby wyróżnione w tablicy 7.5) wartości współczynnika dynamicznego K_d. Grubość okładzin badanych modeli płyt wynosi h′ = 0,001 m. Zgodnie z przyjętym kryterium dynamicznej utraty stateczności płyty, wartość krytycznego obciążenia dynamicznego wyznaczono odczytując z wykresu przedstawiającego charakterystykę $w_{d,t} = g(t)$, zmian prędkości narastania maksymalnego ugięcia płyty w czasie, wartość czasu krytycznego t_{kr}, który odpowiada pierwszemu maksimum na wykresie $w_{d,t} = g(t)$. Dla tak wyznaczonego czasu krytycznego t_{kr} określono maksymalne ugięcie krytyczne w_{dkr}, korzystając z warstwicowego wykresu ugięć płyty. Przed i pokrytyczną charakterystykę zmian maksymalnego ugięcia płyty w czasie jej obciążania obrazują odpowiednie wykresy $w_d = f(t)$. Przykładowe wykresy $w_d = f(t)$, $w_{d,t} = g(t)$ i wybrane wykresy warstwicowe ugięć krytycznych wyznaczone dla obu modeli płyt przedstawiają odpowiednie rysunki 7.7 i 7.8. Porównanie wartości obciążeń i ugięć krytycznych (tablica 7.5) oraz charakterystyk $w_d = f(t)$, $w_{d,t} = g(t)$ na wykresach 7.7b, 7.8a obu modeli płyty dla wartości $\xi_2 = 1$ pokazują dobrą ich zgodność. Analiza postaci utraty dynamicznej stateczności analizowanej płyty dwustronnie utwierdzonej, obciążonej na brzegu wewnętrznym, potwierdza wyniki otrzymane metodą różnic skończonych (podrozdział 6.4 pracy). Odpowiedzią dynamiczną jest obrotowosymetryczna postać wyboczenia płyty. Postacie pofalowane obwodowo w takim przypadku nie są obserwowane. Postać wyboczenia dla obu modeli płyty przedstawia rysunek 7.9. Płyty o większym ugięciu wstępnym ($\xi_2 = 2$), obciążane z mniejszą prędkością s (K7 = 10 1/s), tracą stateczność szybciej, przy mniejszych wartościach obciążeń i przy mniejszych ugięciach. W obszarze pokrytycznym nie występują lub mają istotnie mniejszą amplitudę drgania wzbudzane narastającym obciążeniem (porównanie wykresów na rysunku 7.8 (b) i (c)). Różnice wartości obciążeń p_{krdyn} płyt ugiętych wstępnie w różnym stopniu ($\xi_2 = 0{,}125$ i 2) są znaczne, rzędu kilkunastu MPa.

Przedstawione obserwacje, porównywalność wartości p_{krdyn} i w_{dkr} (tablice 7.5, 6.15, 6.14 i 6.7) i bardzo dobra zgodność liczb współczynnika dynamicznego K_d wyznaczonego dla płyt rozwiązanych obu metodami: MES i MRS (tablice 7.5 i 6.15), potwierdzają opisane w podrozdziałach 6.4 i 6.6 pracy zachowania płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym, których ugięcie początkowe i zmiana intensywności narastającego obciążenia są różne.

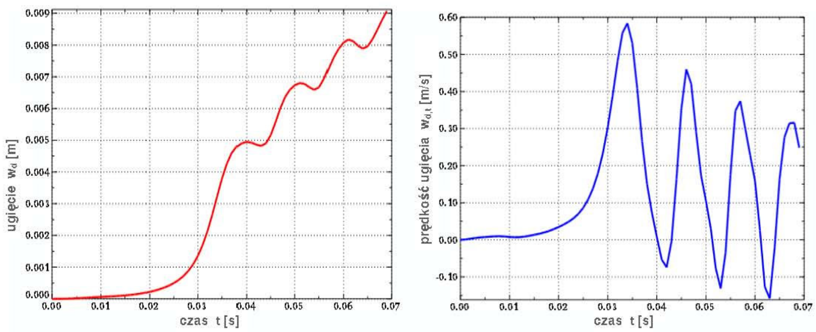
(a)



(b)

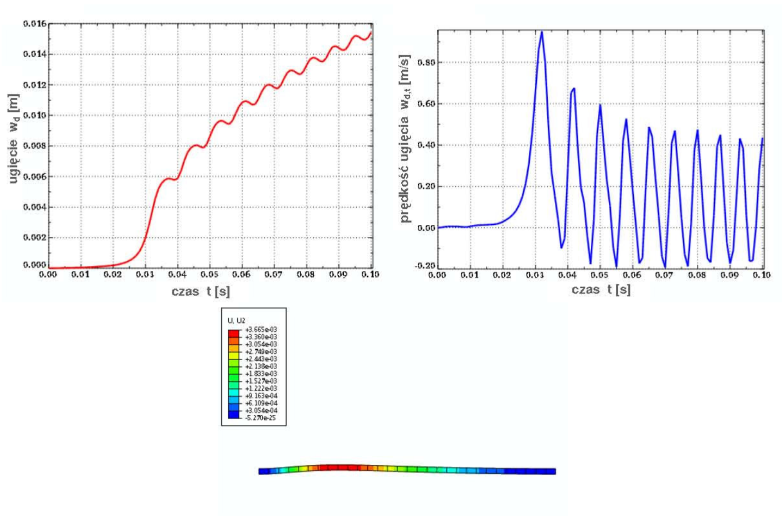


(c)

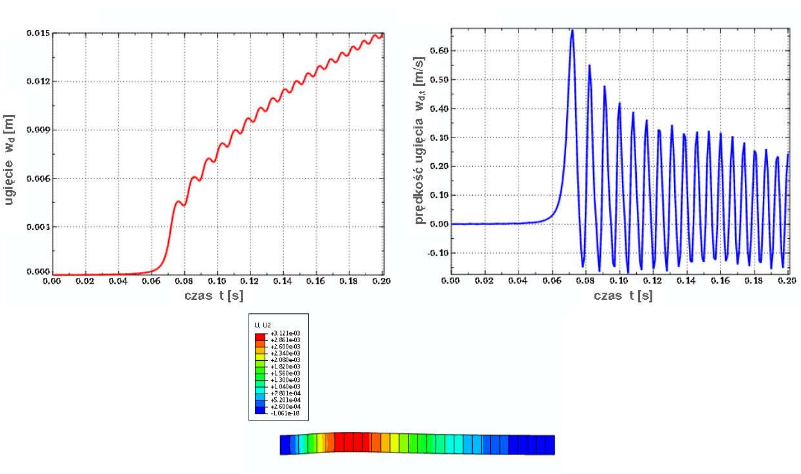


Rys. 7.7. Wyniki obliczeń dla modelu podstawowego: (a) G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, K7 = 20 1/s, ξ_2 = 1, (b) G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m, K7 = 20 1/s, ξ_2 = 1, (c) G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, K7 = 10 1/s, ξ_2 = 1

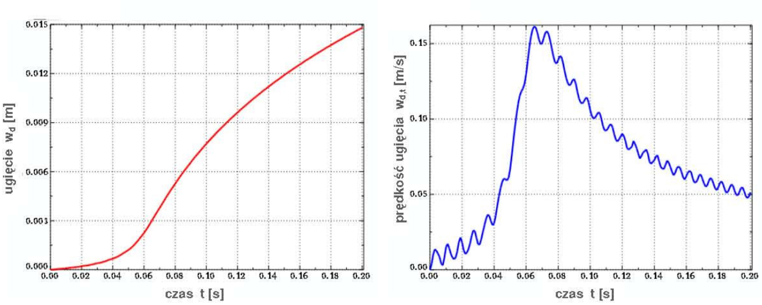
(a)



(b)

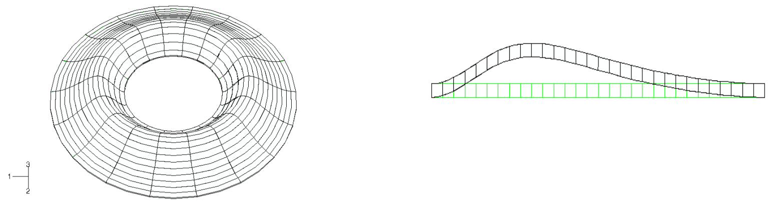


(c)



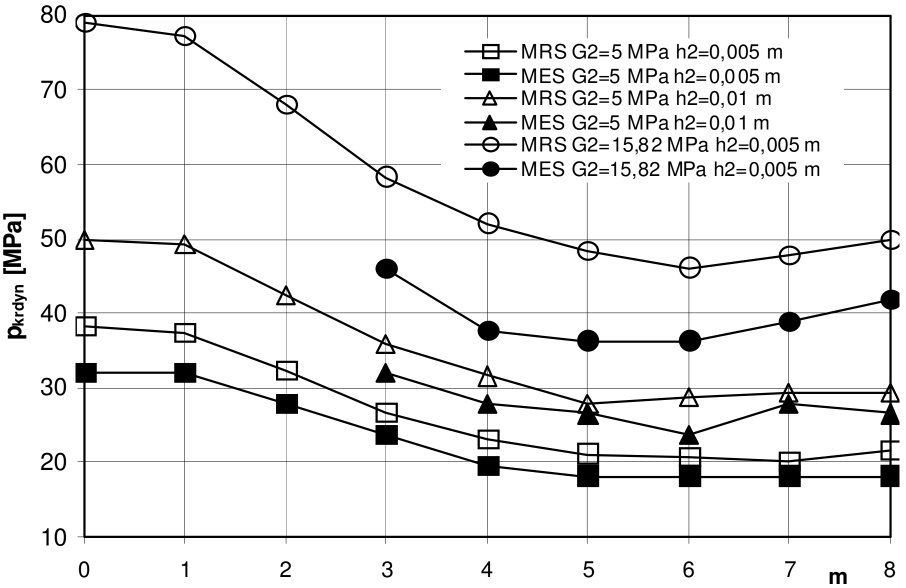
Rys. 7.8. Wyniki obliczeń modelu uproszczonego: (a) G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m, K7 = 20 1/s, ξ_2 = 1, (b) G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m, K7 = 10 1/s, ξ_2 = 0,125, (c) G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,02 m, K7 = 10 1/s, ξ_2 = 2

(a) (b)



Rys. 7.9. Obrotowosymetryczna postać utraty stateczności podstawowego modelu płyty (a) i modelu uproszczonego (b)

Wyniki obliczeń płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu ich okładzin przedstawia wykres zmian krytycznych naprężeń dynamicznych p_{krdyn} dla płyt o różnej wartości parametru wyboczenia m (rysunek 7.10). W tablicy 7.6 zestawiono wartości obliczonego współczynnika dynamicznego K_d.



Rys. 7.10. Wartości obciążeń dynamicznych p_{krdyn} dla różnych liczb m fal obwodowych wyboczenia modeli MES i MRS płyt

Tablica 7.6. Wartości współczynnika dynamicznego K_d płyt ściskanych na zewnętrznym obwodzie dla różnych wartości parametru *m*

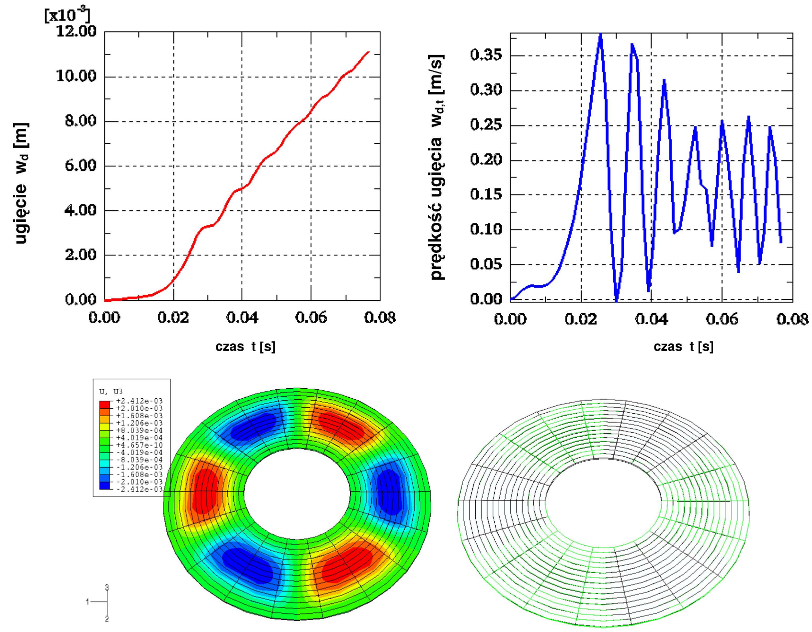
m	**K_d**		
	G_2 [MPa] / h_2 [m]		
	5 / 0,005	**15,82 / 0,005**	**5 / 0,01**
3	1,44	1,31	1,24
4	1,19	1,08	1,08
5	1,10	1,04	1,03
6	1,10	1,01	0,92
7	1,10	1,11	1,08
8	1,10	1,20	1,03

Badaniom poddano płyty o następujących parametrach: G_2 = 5 i 15,82 MPa, h_2 = 0,005 i 0,01 m, h' = 0,001 m. Prędkości narastania obciążenia *s* określają, podobnie jak w analizie przedstawionej w podrozdziale 6.4 pracy, liczby *K7* i $p_{kr.}$ Płyty posiadają wstępne ugięcie, którego kształt odpowiada przewidywanej w odpowiedzi dynamicznej układu postaci wyboczenia, wyrażonej liczbą *m*. Przedstawione na rysunku 7.10 wyniki obliczeń dla płyt o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m i G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m są ograniczone do wyników dla płyt, których utrata stateczności ma postać wielu ($m > 2$) fal obwodowych. Charakterystyka prędkości ugięć $w_{d,t} = g(t)$ tych płyt umożliwia jednoznaczny odczyt wartości czasu krytycznego t_{kr}, określającego krytyczne obciążenie dynamiczne p_{krdyn} płyt, dla postaci wyboczenia, której kształt odpowiada postaci ugięcia wstępnego. Natomiast w przypadku płyt, dla których przewidywaną postacią dynamicznej odpowiedzi może być ugięcie o liczbie fal obwodowych m = 0, 1, 2, natrafiano na trudność w ocenie wielkości krytycznych tych płyt i zaobserwowano zmiany postaci ich wyboczenia w czasie narastania obciążenia. Ponieważ obserwacja ta nie dotyczy płyt o mniejszej sztywności rdzenia (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m), przyczyną braku typowej odpowiedzi dynamicznej modelu płyty może być zbyt mała intensywność wzrostu obciążenia ściskającego dla płyt o małej liczbie fal obwodowych m = 0, 1, 2. Postacie deformacji tych, a także innych przypadków modeli płyt, analizowanych metodą elementów skończonych, przedstawiono w podrozdziale 7.3 pracy.

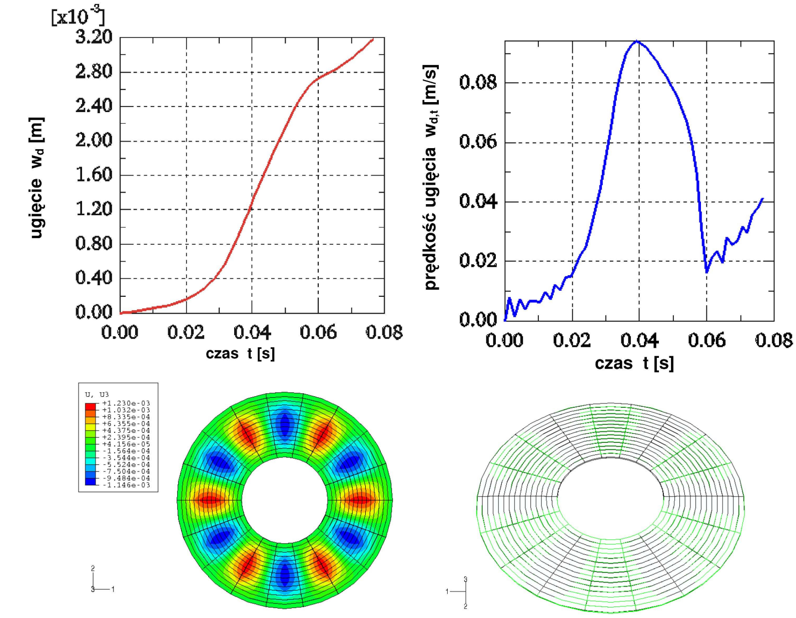
Na rysunku 7.10 przedstawiono także wyniki obliczeń płyt rozwiązanych metodą różnic skończonych, opisanych w podrozdziale 6.4 pracy. Porównanie rozkładu punktów wkresu, wyznaczonych obu metodami (MRS i MES), pokazuje dość dużą różnicę wartości obciążeń p_{krdyn} płyt o parametrach (G_2 = 15,82 MPa,

h_2 = 0,005 m). Lepsza zgodność wyników występuje dla pozostałych przypadków płyt. Otrzymane metodą elementów skończonych wartości obciążeń krytycznych są w każdym przypadku mniejsze od wyznaczonych metodą różnic skończonych. Minimalna wartość krytycznych obciążeń dynamicznych modeli MES płyt odpowiada postaci wyboczenia o dużej liczbie fal (m > 4). Wartość ta może odpowiadać kilku postaciom wyboczenia płyt. Na przykład płyta o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m przy obciążeniu p_{krdyn} = 18,15 MPa traci stateczność dla liczby fal obwodowych m = 5, 6, 7, 8. W ogólnym poznaniu zagadnienia stateczności badanych trójwarstwowych płyt pierścieniowych próba dokładnego wskazania możliwej postaci wyboczenia odpowiadającej minimalnemu obciążeniu dynamicznemu nie jest tak istotna. Ważna jest natomiast znajomość wartości samych krytycznych obciążeń dynamicznych, które jak potwierdzają to również wyniki obliczeń modeli MES płyt (tablica 7.6), mogą mieć wartość mniejszą od obciążeń statycznych. Dobra zgodność wartości K_d płyt analizowanych metodami MRS i MES (tablica 7.6 i tablica 6.11 – podrozdział 6.4 pracy) potwierdza charakter zachowań badanych płyt. Przykładowe charakterystyki maksymalnych ugięć i ich prędkości oraz wykresy warstwicowe ugięć i postacie wyboczenia modeli MES płyt przedstawiają rysunki 7.11, 7.12, 7.13,
Przedstawione dodatkowo charakterystyki prędkości ugięcia $w_{d,t} = g(t)$ i ugięcia $w_d = f(t)$ dla płyty o parametrach G_2 = 5 MPa i h_2 = 0,01 m i liczbie m = 9, potwierdzają uwagę zawartą w podrozdziale 6.4 pracy dotyczącą charakteru tych krzywych dla płyt o dużej liczbie fal wyboczenia *m*. Wzrost ugięcia płyty jest w przybliżeniu liniowy, a prędkość ugięcia dąży do ustalonej wartości średniej. W tym przypadku ścisłe wyznaczenie wartości czasu krytycznego t_{kr}, zgodnie z przyjętym kryterium utraty stateczności, nie jest możliwe.

Potwierdzeniem wyników obliczeń płyt analizowanych metodą różnic skończonych są także podobne zachowania modeli MES płyt uwzględniające reologiczne właściwości materiału pianki poliuretanowej rdzenia. Obliczenia dotyczą modeli płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym z taką samą prędkością *s* co modele płyt z rdzeniem sprężystym. Badaniom poddano uproszczony model płyty. Grubości okładzin i rdzenia wynoszą: h' = 0,001 m, h_2 = 0,005 m, a materiał o właściwościach lepkosprężystych opisują zależności (7.1) przedstawione w punkcie 7.1 pracy dla dwóch pianek o module sprężystym G_2 = 5 MPa i 15,82 MPa.

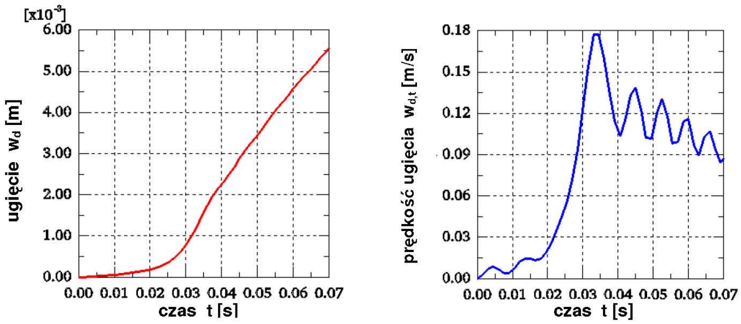


Rys. 7.11. Charakterystyki i postać wyboczenia płyty o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, m = 3 ściskanej na zewnętrznym brzegu

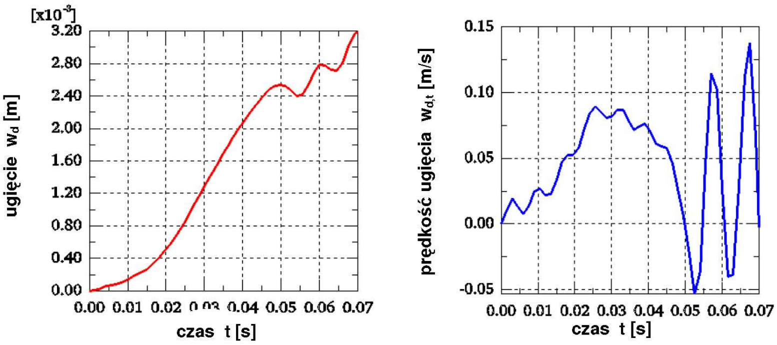


Rys. 7.12. Charakterystyki i postać wyboczenia płyty o parametrach G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m, m = 6 ściskanej na zewnętrznym brzegu

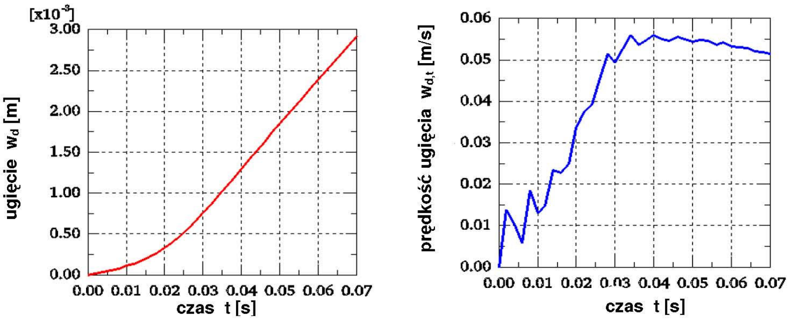
(a) m = 3

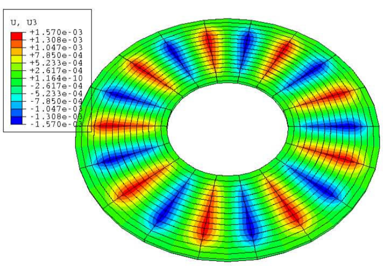


(b) m = 6



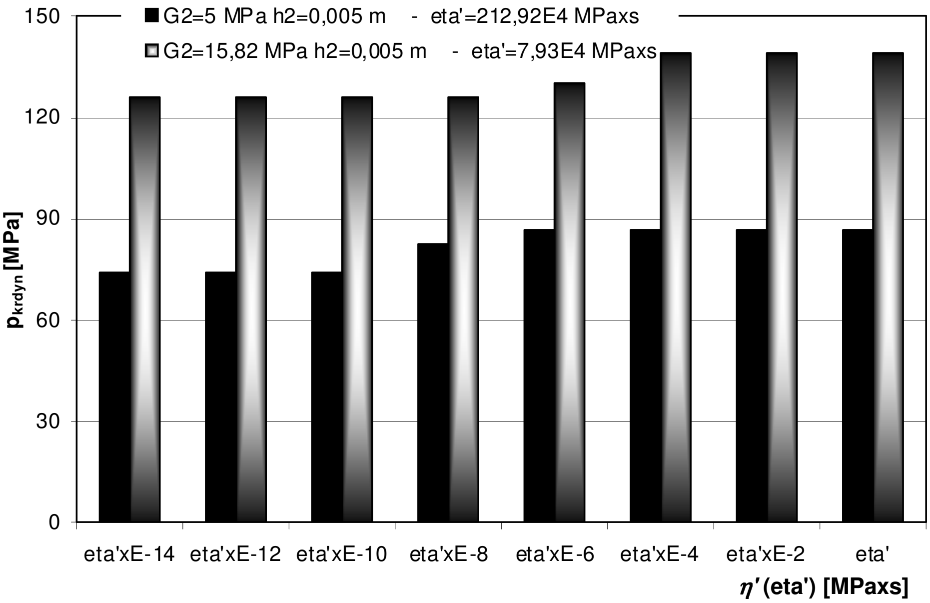
(c)





Rys. 7.13. Charakterystyki i postać wyboczenia płyty o parametrach G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m ściskanej na zewnętrznym brzegu dla liczb fal wyboczenia *m*: (a) m = 3, (b) m = 6, (c) m = 9

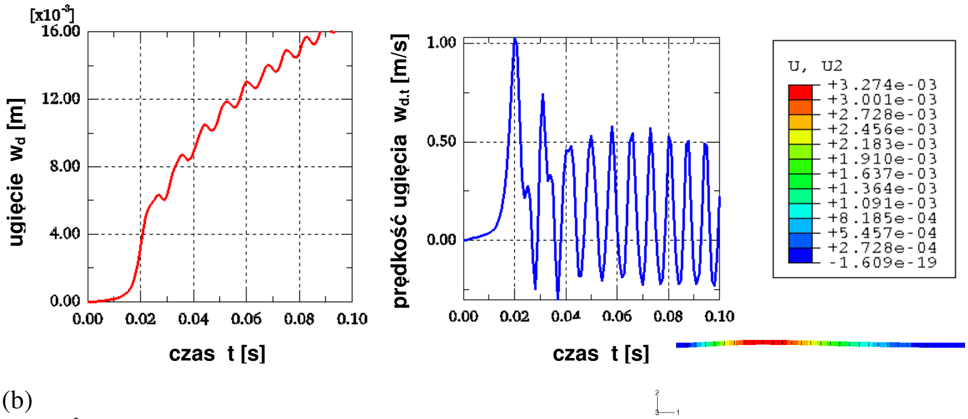
Zmiany wartości dynamicznych obciążeń krytycznych dla różnych wartości stałych lepkości η' materiału rdzenia przedstawia rysunek 7.14. Podobnie do wyników przedstawionych na rysunku 6.16 (podrozdział 6.5 pracy) dopiero znaczne, teoretyczne, zmniejszenie liczby η' do wartości rzędu 10^{-8} razy niższej, wpływa na skrócenie czasu do utraty stateczności płyty i zmniejszenie wartości obciążenia krytycznego. Ugięcia krytyczne są wówczas nieco większe.



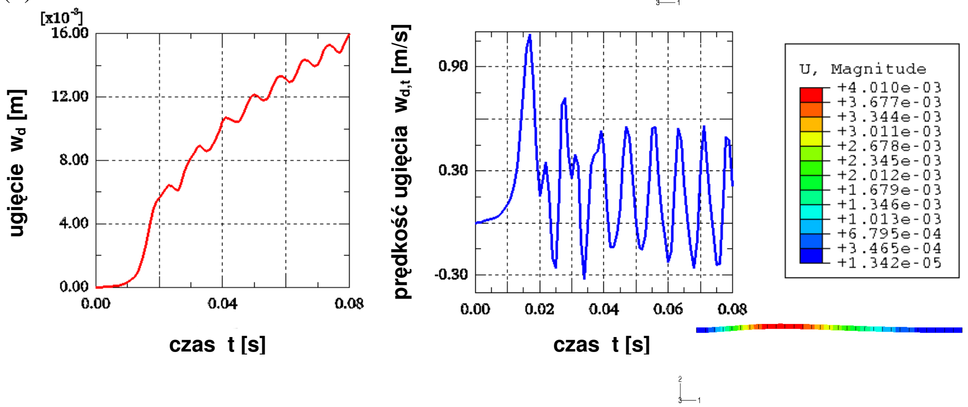
Rys. 7.14. Wpływ stałej lepkości η' (eta′) na zmiany wartości krytycznych obciążeń dynamicznych p_{krdyn} modelu MES płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym

Przykładowe charakterystyki maksymalnego ugięcia, prędkości ugięcia oraz deformacje krytyczne płyty z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym o wielokrotnie obniżonej wartości liczby η' (η' = 212,92·10^{-6} MPa·s) przedstawia rysunek 7.15.

(a)



(b)

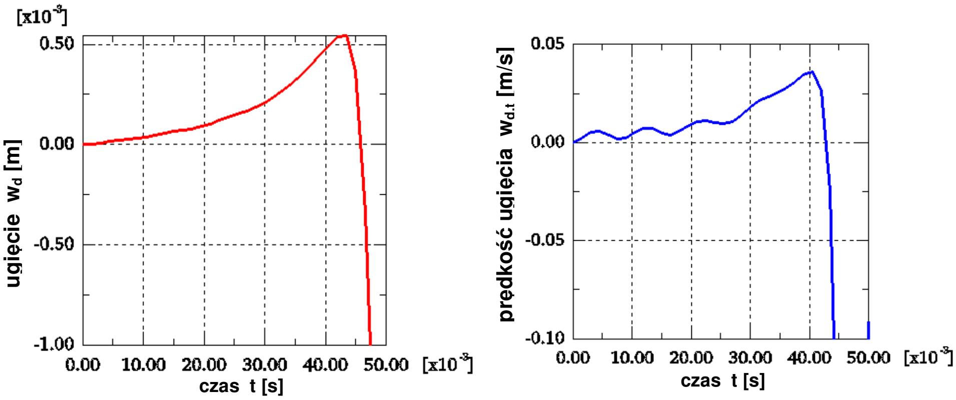


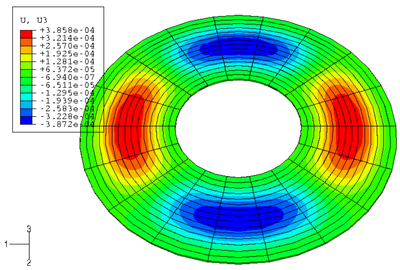
Rys. 7.15. Charakterystyki i ugięcia płyt z rdzeniem: (a) sprężystym, (b) lepkosprężystym o parametrach podstawowych G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m

Zgodność reologicznych zachowań obu modeli płyty analizowanej metodą różnic skończonych i metodą elementów skończonych pokazuje małą wrażliwość badanej trójwarstwowej struktury płyty na lepkosprężyste właściwości jej piankowego rdzenia. Pozwoliłoby to ograniczyć numeryczną analizę zagadnień, w których element poddany jest krótkotrwałym obciążeniom dynamicznym, do analizy w zakresie sprężystym. Porównanie zachowań obu modeli (MES i MRS) badanych płyt zwraca uwagę na mniejszą wrażliwość modelu MES płyty na zmiany lepkich właściwości materiału jej rdzenia.

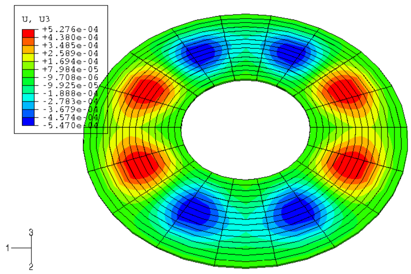
7.3. Krytyczne i pokrytyczne zmiany postaci deformacji modeli MES płyt

Zastosowanie w obliczeniach numerycznych metody elementów skończonych pozwala na obserwacje zachowań elementów konstrukcyjnych, których poznanie przy rozwiązaniach analityczno-numerycznych opartych na ograniczających je uproszczeniach i założeniach nie zawsze byłoby możliwe. Taką obserwacją dla niektórych badanych modeli płyt pierścieniowych może być, wspomniana w podrozdziale 7.2 pracy, ich odpowiedź na obciążenie dynamiczne ściskające zewnętrzne okładziny płyty, gdy postać jej ugięcia wstępnego ma formę obrotowosymetryczną m = 0 lub kilku fal obwodowych m = 1, 2. Obrazem odpowiedzi jest wówczas zmieniająca się w czasie postać jej deformacji, która w obszarze krytycznych i pokrytycznych obciążeń nie odpowiada zadanej postaci jej ugięcia wstępnego. Zjawisko to pokazują na rysunkach 7.16, 7.17, 7.18, 7.19 przedstawione razem z charakterystykami maksymalnego ugięcia i prędkości ugięcia, warstwicowe wykresy ugięć płyt w wybranych chwilach obciążania. Zaobserwowane i wybrane na rysunkach przypadki dotyczą płyt o większej sztywności rdzenia: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m – rysunek 7.16, G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m – rysunek 7.17 i 7.18, dla których intensywność narastania obciążeń jest większa, s ≈ 931 MPa/s i płyty z miękkim rdzeniem G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m – rysunek 7.19, poddanej obciążeniu narastającemu z mniejszą prędkością, s ≈ 410 MPa/s. Zmiana postaci deformacji modeli płyt przedstawionych na rysunkach 7.16 i 7.18 następuje już przy stosunkowo małych ugięciach dynamicznych rzędu $w_d = 0{,}5\cdot10^{-3}$ m i $1{,}5\cdot10^{-3}$ m z postaci o m = 2 obserwowanej w zakresie przedkrytycznym na postać o m = 6 falach obwodowych w obszarze pokrytycznym. Podobnie płyta obrotowosymetrycznie ugięta wstępnie – rysunek 7.17 – w zakresie krytycznym i pokrytycznym ulega obwodowemu pofalowaniu. Zmianę postaci deformacji płyty o jednej (m = 1) fali obwodowej w zakresie przedkrytycznym pokazuje również rysunek 7.19. W analizowanych przypadkach, zgodnie z sugestią i opisem podobnego zachowania dynamicznego elementu słupa przedstawionego w pracy [39], za dynamiczne obciążenie krytyczne badanych płyt można przyjąć tę wartość obciążenia, przy której następuje zmiana postaci deformacji lub tę, przy której rozpoczyna się zaburzenie regularnej postaci ugięcia płyty o m = 0, 1, 2 – co można by uznać w przypadkach wolniejszych zmian działającego obciążenia.

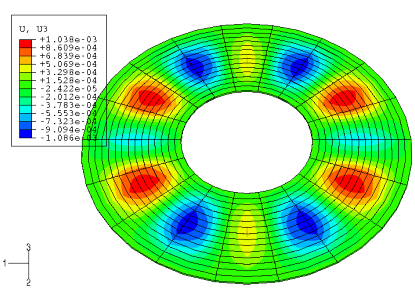




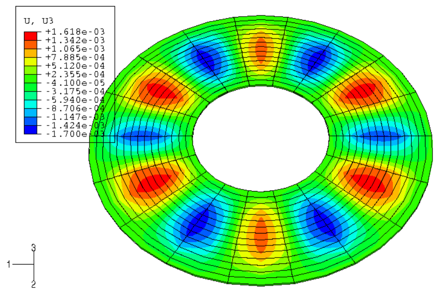
t = 0,0375 s



t = 0,039 s

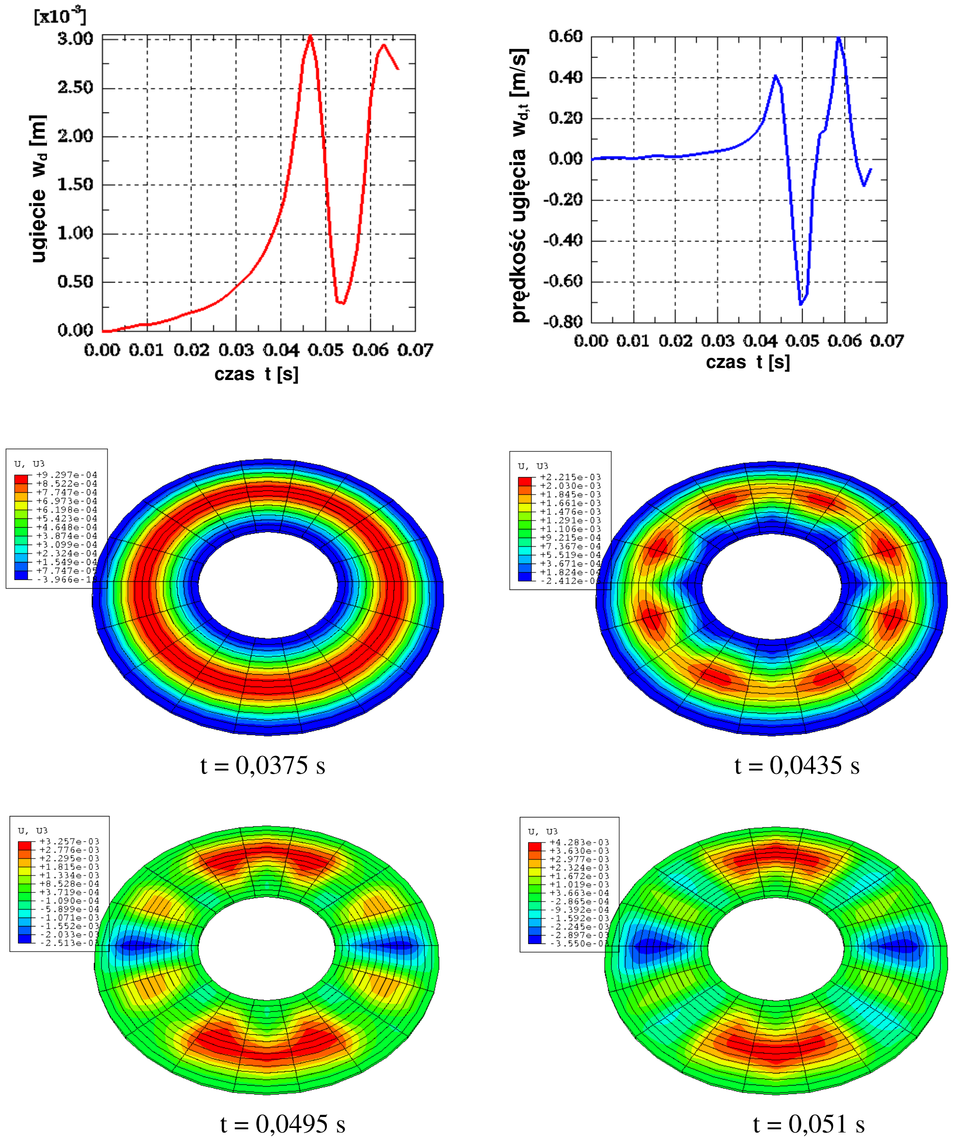


t = 0,0405 s

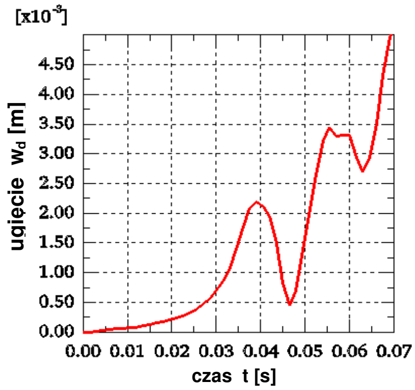


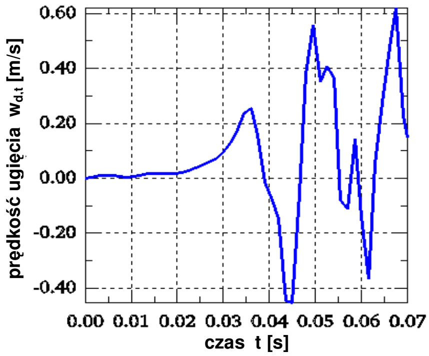
t = 0,045 s

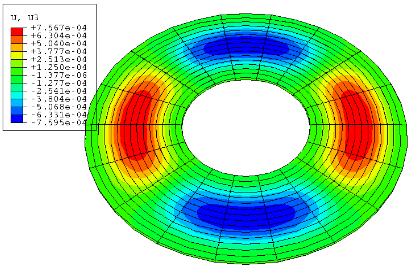
Rys. 7.16. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m) z ugięciem wstępnym o postaci m = 2, ściskanej na zewnętrznym brzegu z prędkością s ≈ 931 MPa/s



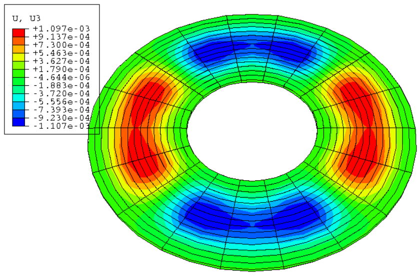
Rys. 7.17. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m) z obrotowosymetrycznym m = 0 ugięciem wstępnym, ściskanej na zewnętrznym brzegu z prędkością s ≈ 931 MPa/s



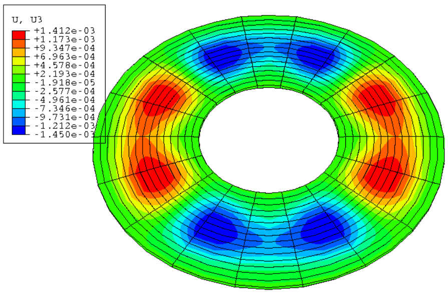




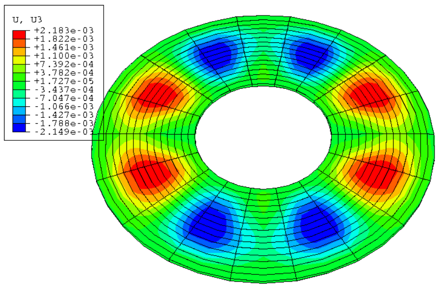
t = 0,03 s



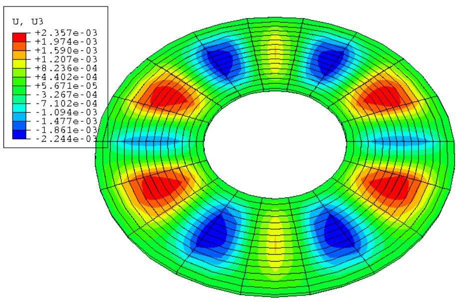
t = 0,033 s



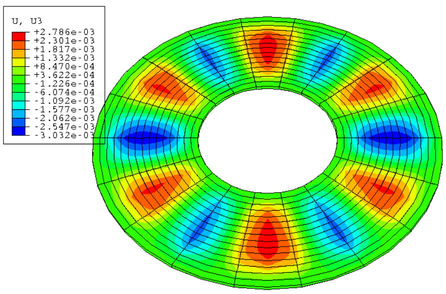
t = 0,0345s



t = 0,039 s

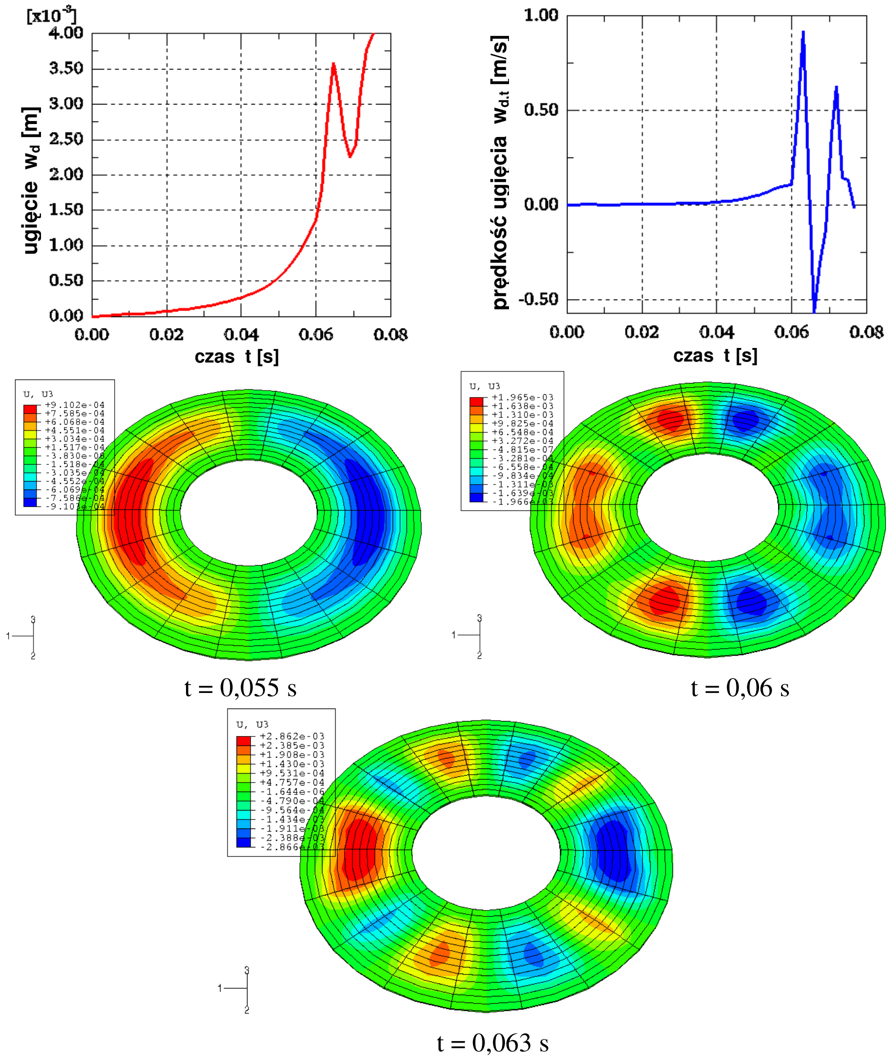


t = 0,042 s



t = 0,045 s

Rys. 7.18. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m) z ugięciem wstępnym o postaci m = 2, ściskanej na zewnętrznym brzegu z prędkością s ≈ 931 MPa/s

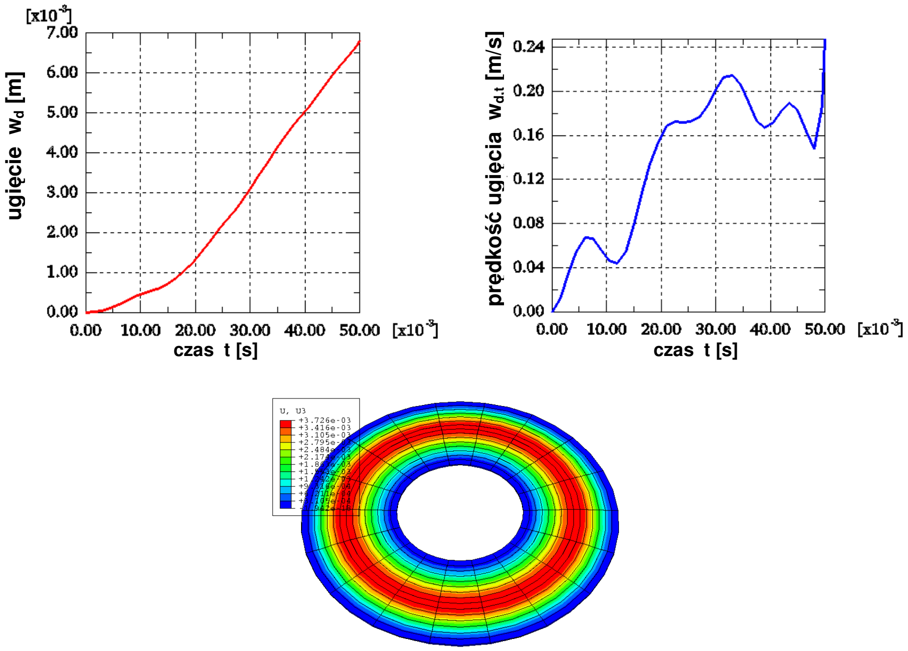


Rys. 7.19. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m) z ugięciem wstępnym o postaci m = 1, ściskanej na zewnętrznym brzegu z prędkością s ≈ 410 MPa/s

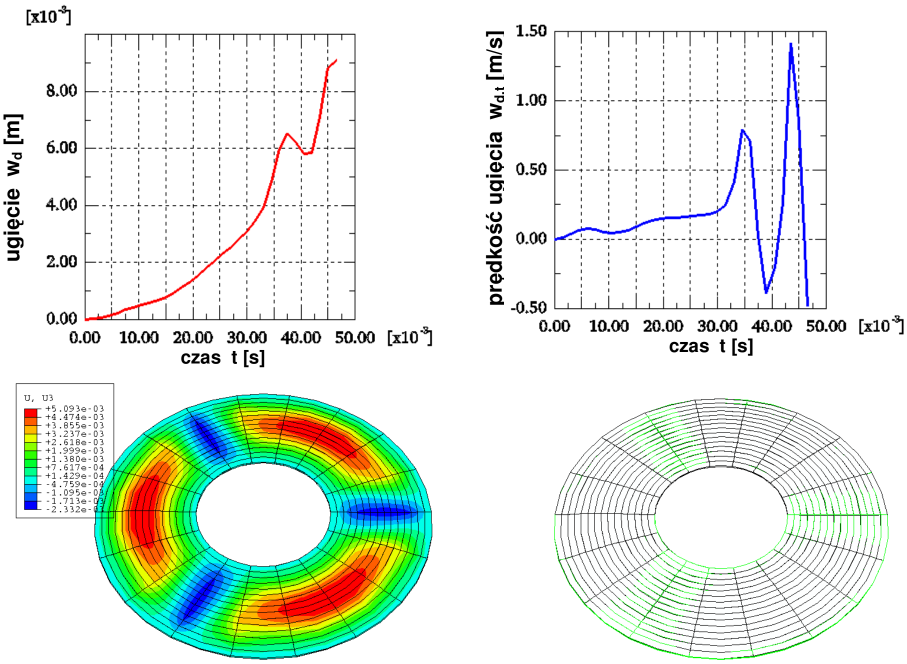
Analizowana w punkcie 6.5 pracy wrażliwość płyty warstwowej na niedokładności początkowego kształtu, w części dotyczącej opisu postaci ugięcia wstępnego płyty dodatkowym, obrotowosymetrycznym ugięciem $\xi_1 \neq 0$ (5.2a), dotyczyła oceny wartości krytycznych obciążeń dynamicznych wyznaczonych dla zarówno obrotowosymetrycznych m = 0, jak i pofalowanych obwodowo m ≠ 0 ugięć dodatkowych. Wyniki przedstawione na rysunkach 6.24 i 6.25 wskazały jednak postać wyboczenia pofalowaną obwodowo, dla której wartość krytycznych obciążeń dynamicznych jest minimalna. Podobnej analizie poddano podstawowy model MES płyty o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, h' = 0,001 m, ugięty wstępnie w kształcie złożonym z postaci obrotowosymetrycznej m = 0 dla wartości $\xi_1 = 5$ i postaci pofalowanej obwodowo $m \neq 0$ o liczbie $\xi_2 = 1$. Wartości ugięć wstępnych i prędkości wzrostu obciążeń modelu MES płyty są zgodne z przyjętymi przy rozwiązaniu płyty metodą różnic skończonych. Otrzymane wyniki końcowe różnią się jednak istotnie.

Poza oczywistym przypadkiem, kiedy ugięcie wstępne ma kształt obrotowosymetryczny (m = 0) i dwoma przypadkami płyt z ugięciem wstępnym o m = 2, 3 falach obwodowych, we wszystkich pozostałych przypadkach postać utraty stateczności płyty odpowiada postaci obrotowosymetrycznej (m = 0). W krytycznym obszarze pracy płyty obserwowana jest zmiana postaci deformacji płyty z postaci odpowiadającej ugięciu wstępnemu w postać pozbawioną pofalowań obwodowych. Obserwację tą pokazują następujące rysunki 7.20, 7.21, 7.22 i 7.23. Brak zmiany postaci deformacji dla przypadku m = 0 i m = 3 obrazują charakterystyki i wykresy warstwicowe ugięć płyty na rysunkach 7.20 i 7.21. Zmiana kształtu deformacji modelu płyty w obszarze krytycznych obciążeń i charakterystyki jej ugięcia oraz prędkości ugięcia dla ugięcia wstępnego złożonego z ugięcia obrotowosymetrycznego m = 0 dla $\xi_1 = 5$ i obwodowego pofalowania m = 5 i m = 9 dla $\xi_2 = 1$ przedstawiają rysunki 7.22 i 7.23.

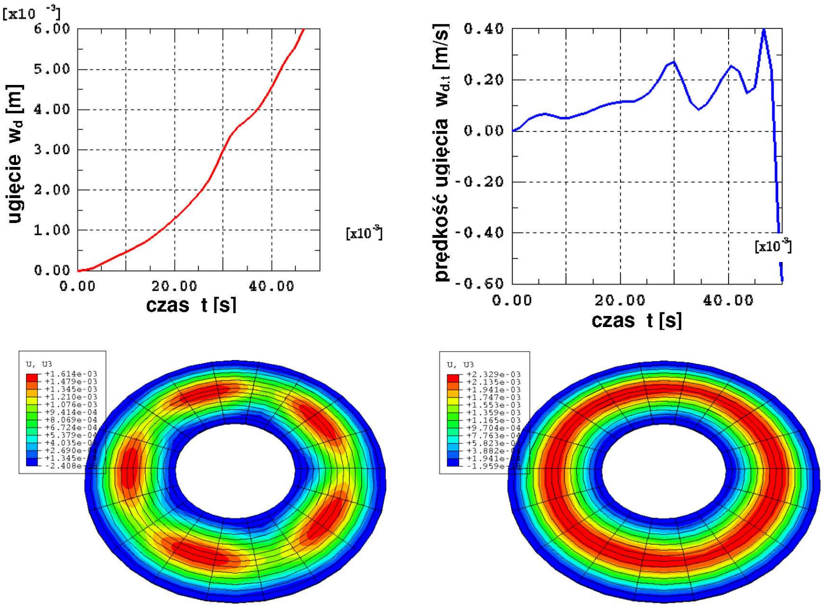
Wyznaczona minimalna wartość dynamicznych obciążeń krytycznych odpowiada płytom, których ugięcie wstępne opisują parametry: m = 0 dla $\xi_1 = 5$ i m = 5 lub m = 6 dla $\xi_2 = 1$. Wartość ta, p_{krdyn} = 25,13 MPa, jest większa od wartości p_{krdyn} = 18,15 MPa wyznaczonej dla płyty pozbawionej udziału dodatkowej, obrotowosymetrycznej składowej ugięcia wstępnego ($\xi_1 = 0$) – rysunek 7.10, podrozdział 7.2 pracy. Wartość p_{krdyn} wyznaczona dla modelu MES płyty o obrotowosymetrycznym ugięciu wstępnym wyrażonym parametrami: m = 0 dla $\xi_1 = 5$ i m = 0 dla $\xi_2 = 1$ i obrotowosymetrycznej (m = 0) postaci wyboczenia, podobnie jak w przypadku płyt rozwiązywanych metodą różnic skończonych (tablica 6.11 – podrozdział 6.4 pracy i rysunek 6.24 – podrozdział 6.6 pracy), zmniejsza się i wynosi p_{krdyn} = 30,72 MPa. Uznając jednak początek zmian deformacji krytycznej płyt za moment wyznaczający dynamiczne obciążenie krytyczne, wartość obciążenia dla płyt ze wstępnym pofalowaniem m = 5 byłaby nieco mniejsza (od p_{krdyn} = 25,13 MPa), lecz i tak większa od wartości p_{krdyn} = 18,15 MPa.



Rys. 7.20. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m) ściskanej na zewnętrznym brzegu z ugięciem wstępnym o parametrach: m = 0 dla ξ_1 = 5 i m = 0 dla ξ_2 = 1



Rys. 7.21. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m) ściskanej na zewnętrznym brzegu z ugięciem wstępnym o parametrach: m = 0 dla ξ_1 = 5 i m = 3 dla ξ_2 = 1

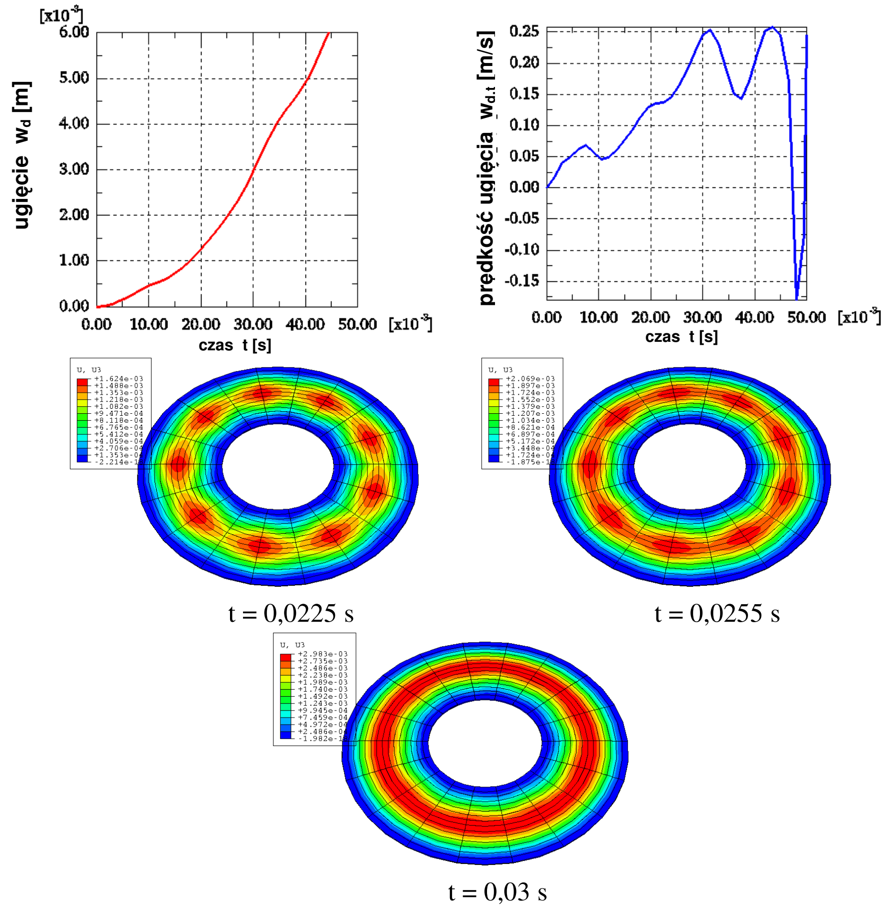


t = 0,0225 s t = 0,027 s

Rys. 7.22. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m) ściskanej na zewnętrznym brzegu z ugięciem wstępnym o parametrach: m = 0 dla $\xi_1 = 5$ i m = 5 dla $\xi_2 = 1$

Przedstawiona ocena krytycznych obciążeń modelu MES płyty ze wstępnym, dodatkowym ugięciem obrotowosymetrycznym, podobnie jak w podsumowaniu analizy płyt o różnej postaci ugięcia wstępnego liczonych za pomocą metody różnic skończonych (podrozdział 6.6 pracy), może sugerować możliwość ograniczenia zakresu badań do geometrycznie prostszych modeli pozbawionych dodatkowych zaburzeń formy ugięcia wstępnego (tj. dla $\xi_1 = 0$), dla których wyznaczone wartości obciążeń p_{krdyn} były najmniejsze.

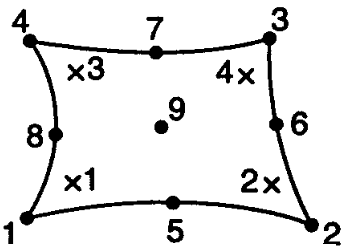
Obliczenia wstępne płyt, których wynikiem byłaby jedynie ocena rzędu wartości krytycznych obciążeń dynamicznych, pozwoliłyby na przyjęcie takiego wniosku z przedstawionych analiz. Jednakże dążenie do oceny zachowań struktury płyty zbliżonej do rzeczywistej wymaga prowadzenia obliczeń i badań szczegółowych bez wprowadzania uproszczeń, których wpływ na wynik końcowy nie jest łatwy do przewidzenia.



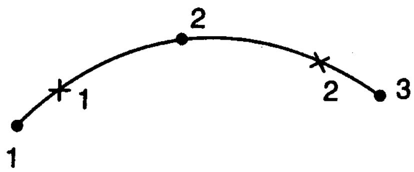
Rys. 7.23. Odpowiedź dynamiczna płyty (G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m) ściskanej na zewnętrznym brzegu z ugięciem wstępnym o parametrach: m = 0 dla ξ_1 = 5 i m = 9 dla ξ_2 = 1

7.4. Naprężenia w stanie krytycznym

Ważnym dopełnieniem wyboczeniowych analiz trójwarstwowych płyt pierścieniowych jest ocena stanu naprężeń w poszczególnych warstwach płyty w momencie utraty stateczności dynamicznej. Ocena stopnia wytężenia materiału płyty w stanie krytycznym ma zasadnicze znaczenie praktyczne. Wartości liczbowe i warstwicowe wykresy naprężeń wyznaczono w zewnętrznej warstwie okładziny płyty i w jej rdzeniu, oceniając odpowiednio naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera (H-M-H) i naprężenia styczne w płaszczyźnie *x_z* (rysunek 4.1, rozdział 4 pracy) lub w płaszczyźnie *1_3* dla modelu podstawowego lub *1_2* dla modelu uproszczonego według standardowych oznaczeń przyjętych w programie ABAQUS. Naprężenia krytyczne wyznaczono, wykorzystując opcję programu, która pozwala na wskazanie punktów całkowania w elementach (integration points), w których obliczane są poszczególne składowe naprężeń. Na przykład dla elementu 9-węzłowego zastosowanego w budowie siatki okładziny modelu podstawowego płyty i dla 3-węzłowego elementu obrotowosymetrycznego wykorzystanego w budowie modelu uproszczonego, położenia tych punktów pokazuje rysunek 7.24 [29].



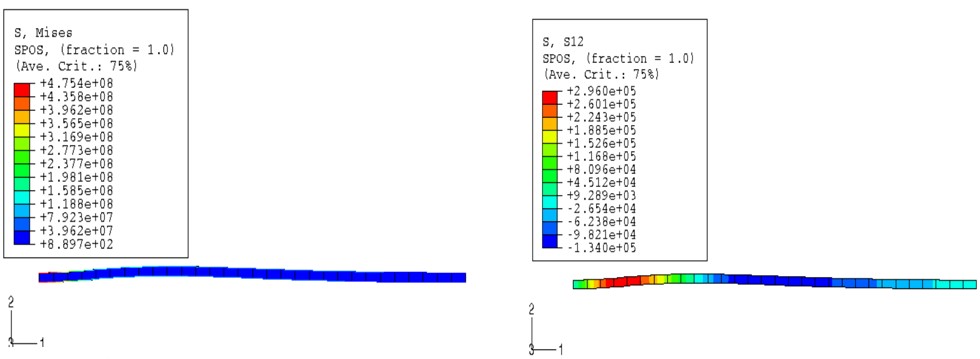
element 9-węzłowy



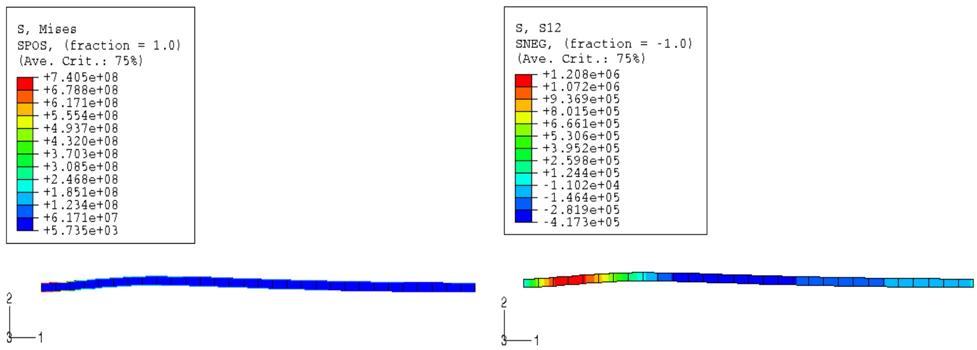
element 3-węzłowy

Rys. 7.24. Położenia punktów całkowania w powłokowych elementach modelu MES płyt

Przedstawione stany naprężeń w warstwach płyt poddanych minimalnym, dynamicznym obciążeniom krytycznym są wyznaczone dla płyt o podstawowych parametrach materiałowych, geometrycznych i obciążeniowych przyjętych w pracy. Wartości dynamicznych wielkości krytycznych p_{krdyn}, w_{dkr}, K_d tych płyt przedstawiają tablice 7.5, 6.7 i 7.6, 6.11 w podrozdziałach 7.2 i 6.4 pracy. Przykładowe wyniki obliczeń płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym otrzymane dla modelu uproszczonego przedstawiają rysunki 7.25 i 7.26.



Rys. 7.25. Rozkład naprężeń zredukowanych wg hipotezy H-M-H i naprężeń stycznych w warstwach płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, h′ = 0,001 m



Rys. 7.26. Rozkład naprężeń zredukowanych wg hipotezy H-M-H i naprężeń stycznych w warstwach płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym o parametrach: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m, h' = 0,001 m

Tablica 7.7 przedstawia odczytane z wykresów wartości maksymalnych naprężeń zredukowanych σ_{red}^{max} i wartości tych naprężeń w obszarze znacznej deformacji płyty σ_{red} oraz wartości maksymalnych naprężeń stycznych τ_{13}. Pokazuje to możliwy stopień wytężenia warstw płyty w chwili utraty stateczności wywołanej dynamicznym obciążeniem brzegu wewnętrznego. Wartości naprężeń krytycznych są wysokie. Zwłaszcza w przypadku przyjętego materiału pianki poliuretanowej wartości krytyczne naprężeń stycznych nie spełniałyby wymaganego warunku wytrzymałościowego. Wartości wytrzymałości na ścinanie pianek poliuretanowych wynoszą: R_t = 0,18 MPa dla pianki o module G_2 = 5 MPa [50] i R_t = 0,71 MPa dla pianki o module G_2 = 15,82 MPa [84]. Wprawdzie zmniejszenie intensywności wzrostu działającego obciążenia *s* o połowę i dwukrotne zwiększenie stopnia ugięcia wstępnego płyty (ξ_2 = 2) znacznie zmniejsza wartość naprężeń w warstwach płyty, to jednak nadal, zwłaszcza dla płyty o większej sztywności rdzenia, wartości naprężeń σ_{red}^{max}, σ_{red} i szczególnie τ_{13} są bardzo wysokie. Wartości tych naprężeń dla przykładowej płyty o parametrach G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m, h' = 0,001 m i liczbie K7 = 10 1/s oraz współczynniku ξ_2 = 2 wynoszą odpowiednio: σ_{red}^{max} = 523,4 MPa, σ_{red} = 348,9 MPa, τ_{13} = 0,81 MPa.

Tablica 7.7. Wartości krytycznych naprężeń zredukowanych i stycznych w warstwach płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym

G_2 [MPa] / h_2 [m]	σ_{red}^{max} [MPa]	σ_{red} [MPa]	τ_{13} [MPa]
5 / 0,005	475,4	316,9	0,30
5 / 0,02	723,9	482,6	0,36
15,82 / 0,005	740,5	493,7	1,21

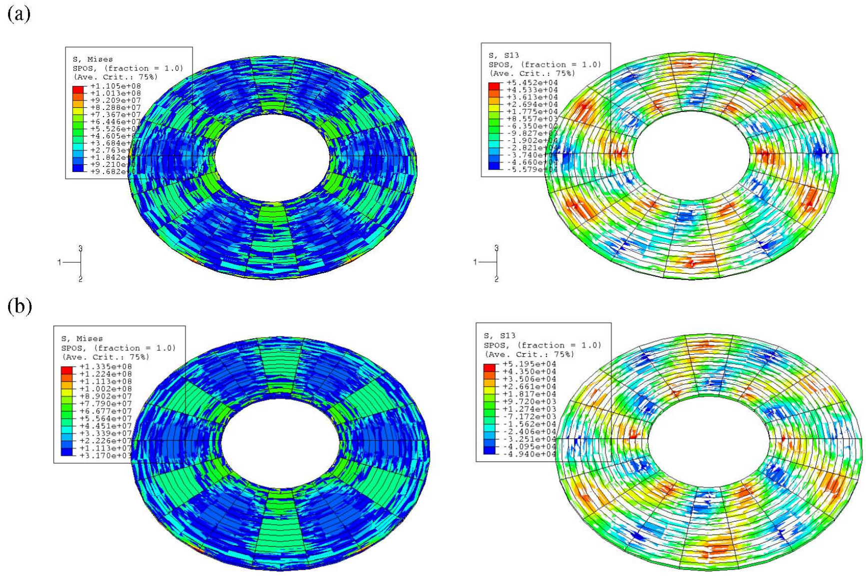
Natomiast znacznie mniejsze wartości naprężeń krytycznych występują dla płyt ściskanych na zewnętrznym brzegu. Wartości liczbowe przedstawia tablica 7.8, a przykładowe wykresy warstwicowe naprężeń pokazują rysunki 7.27 i 7.28.

Tablica 7.8. Wartości krytycznych naprężeń zredukowanych i naprężeń stycznych w warstwach płyt ściskanych dynamicznie na brzegu zewnętrznym

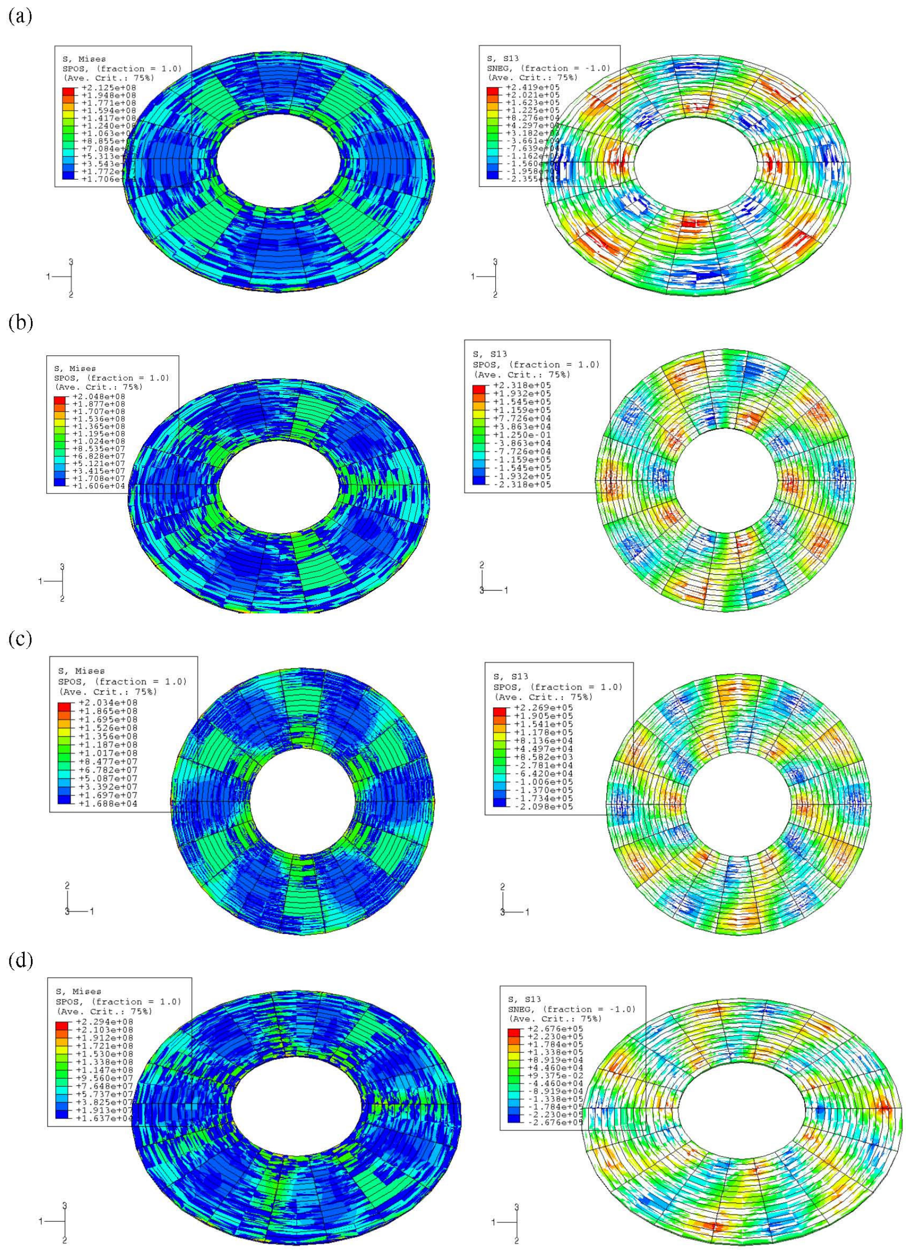
G_2 [MPa] / h_2 [m]	m	σ_{red}^{max} [MPa]	σ_{red} [MPa]	τ_{13} [MPa]
5 / 0,005	3	171,7	114,5	0,127
	4	123,6	82,4	0,076
	5	112,8	75,2	0,061
	6	110,5	73,7	0,055
	7	107,8	71,9	0,051
	8	102,9	68,6	0,045
5 / 0,01	3	212,8	141,9	0,122
	4	164,6	109,7	0,078
	5	157,4	104,9	0,072
	6	133,5	89,0	0,052
	7	168,7	112,5	0,072
	8	152,5	101,5	0,061
15,82 / 0,005	3	291,8	194,6	0,44
	4	212,5	141,7	0,24
	5	204,8	136,5	0,232
	6	203,4	135,6	0,227
	7	229,4	153,0	0,27
	8	253,5	169,0	0,30

W badanym przypadku wartości naprężeń zarówno w okładzinach, jak i w rdzeniu płyty spełniłyby warunki wytrzymałościowe materiałów warstw. Również spełniają je wyższe od wartości naprężeń płyt o pofalowanych obwodowo postaciach wyboczenia, naprężenia dla obrotowosymetrycznej postaci deformacji płyty (m = 0). Dla płyty o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, m = 0 wartości tych naprężeń są następujące: σ_{red}^{max} = 210,9 MPa, σ_{red} = 140,6 MPa, τ_{13} = 0,15 MPa. Wykresy warstwicowe naprężeń przedstawia rysunek 7.29.

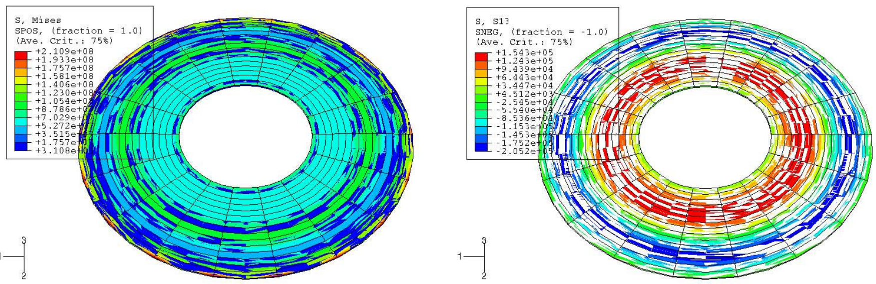
Analiza stanu naprężeń w warstwach badanych płyt wskazuje na ograniczone możliwości ich pracy już przy obciążeniach krytycznych. Szczególnej uwagi wymagają płyty obciążone na wewnętrznym brzegu. Dla tych płyt ocena stanu wytężenia materiału ma znaczenie zasadnicze. Przyjęta początkowo jako uzupełniająca ocenę stanu krytycznego badanych płyt analiza stanu naprężeń staje się analizą podstawową w podjętych obserwacjach. Ocena dopuszczanych ze względu na stateczność i wytężenie materiału warunków pracy płyty o wieloparametrowej strukturze jest problemem złożonym. Rośnie znaczenie szybkiej, numerycznej analizy badanego przypadku płyty.



Rys. 7.27. Rozkład naprężeń zredukowanych wg hipotezy H-M-H i naprężeń stycznych w warstwach płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym o liczbie fal m = 6 i o parametrach: (a) G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m, (b) G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,01 m



Rys. 7.28. Rozkład naprężeń zredukowanych wg hipotezy H-M-H i naprężeń stycznych w warstwach płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym o parametrach: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,005 m dla liczby fal wyboczenia: (a) m = 4, (b) m = 5, (c) m = 6, (d) m = 7



Rys. 7.29. Rozkład naprężeń zredukowanych wg hipotezy H-M-H i naprężeń stycznych w warstwach płyty ściskanej na zewnętrznym brzegu o parametrze postaci wyboczenia m = 0 i parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,005 m

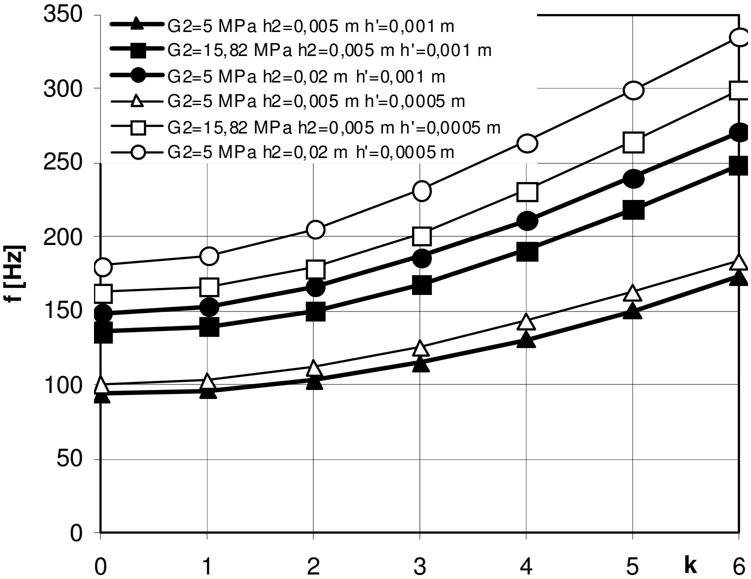
7.5. Częstości drgań własnych trójwarstwowych płyt pierścieniowych

Oceniając stan krytyczny badanych struktur płyt warstwowych, nie można pominąć analizy częstości i postaci drgań własnych. Okres podstawowych drgań własnych wyznacza często czas trwania impulsu będącego obciążeniem w zagadnieniu dynamicznym [39], [44], [115]. Wyznaczone metodą elementów skończonych częstości drgań własnych f pierścieniowej płyty trójwarstwowej dla kolejnych postaci drgań k płyty przedstawia rysunek 7.30. Obliczenia przeprowadzono dla przypadku płyt dwustronnie utwierdzonych przesuwnie, o stałej wartości ilorazu $\frac{r_w}{r_z} = 0,4$ i zmiennych grubościach warstw h' = 0,0005 m i 0,001 m, h_2 = 0,005 m i 0,02 m oraz wartości modułu Kirchhoffa sprężystego rdzenia G_2 = 5 i 15,82 MPa. Wartości liczbowe podstawowej (dla k = 0) częstości drgań f płyt i odpowiadające im wartości okresu T drgań giętnych przedstawia tablica 7.9.

Tablica 7.9. Wartości częstości podstawowej f i okresu drgań T płyt

G_2 [MPa] / h_2 [m] / h' [m]	**f [Hz]**	**T [ms]**
5,0/0,005/0,0005	100,18	9,98
5,0/0,005/0,001	93,79	10,66
5,0/0,02/0,0005	180,56	5,54
5,0/0,02/0,001	148,47	6,74
15,82/0,005/0,0005	162,24	6,16
15,82/0,005/0,001	135,93	7,36

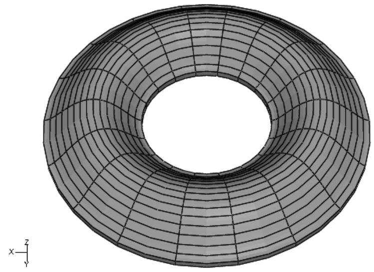
Zmiany wartości częstości drgań własnych płyty są charakterystyczne. Wzrostowi sztywności struktury (grubszy rdzeń h_2, większa wartość modułu G_2, cieńsza okładzina h′) odpowiada wyższa wartość częstości *f*. W każdym z analizowanych przypadków płyt kolejna wyższa wartość częstości *f* drgań odpowiada wyższej, takiej samej dla każdej z płyt (rys. 7.30), postaci *k* drgań.



Rys. 7.30. Częstości drgań własnych płyt trójwarstwowych

Zmiany obserwowane są dla przypadków płyt o cienkich okładzinach h′ = 0,0005 m i o większej sztywności rdzenia wyrażonej przez G_2 = 15,82 MPa lub h_2 = 0,02 m dla wyższych wartości częstości drgań. Zamiast, jak występującej w pozostałych przypadkach płyt kolejnej postaci k = 7, formą drgań jest postać obrotowosymetryczna k = 0 z pojedynczą falą promieniową l = 1 (k = 0, l = 1) lub kolejno dwie postacie (k = 0, l = 1) i (k = 1, l = 1).

Niezależnie od wartości parametrów materiałowych i geometrycznych struktury płyty najniższa wartość częstości odpowiada podstawowej obrotowosymetrycznej (k = 0) postaci drgań – rysunek 7.31.

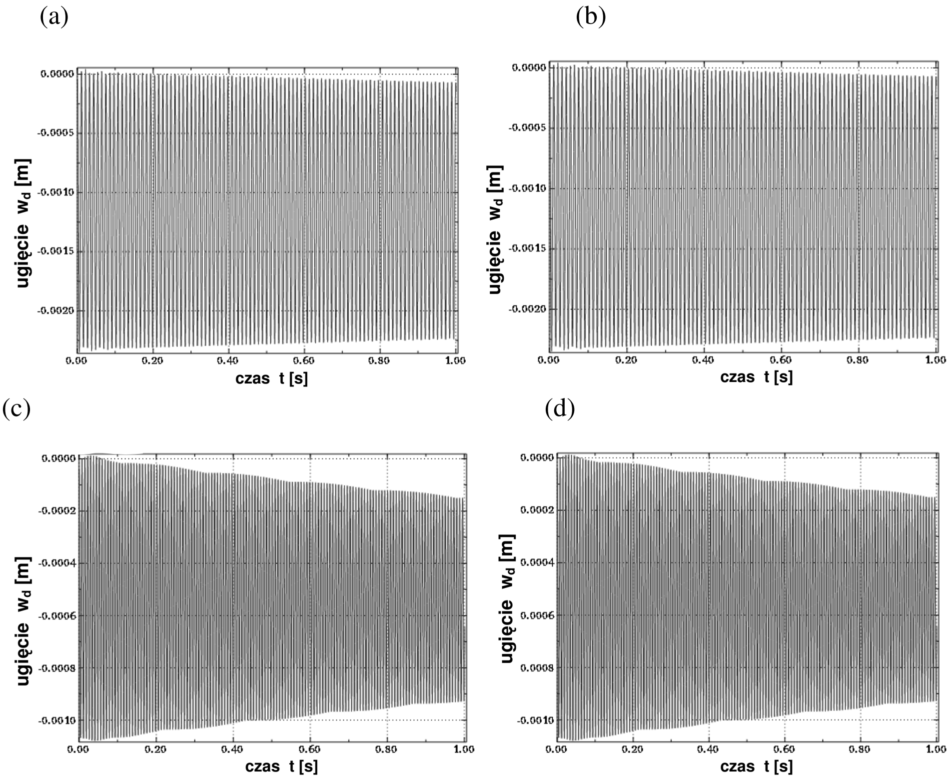


Rys. 7.31. Obrotowosymetryczna, podstawowa postać drgań
k = 0 pierścieniowych płyt trójwarstwowych

Uwzględnienie lepkosprężystych właściwości piankowego rdzenia płyty o wartościach stałej lepkości (podrozdziały 6.1 i 6.5 pracy) przyjętych materiałów pianki poliuretanowej nie powoduje zmiany amplitudy i częstości drgań płyty. Badania przeprowadzono dla płyt z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym poddanych stałemu obciążeniu równomiernie i prostopadle działającemu na powierzchnię okładziny płyt. Wartość obciążenia dobrano tak, aby wartość maksymalnego ugięcia płyty o module G_2 = 5 MPa i grubości rdzenia h_2 = 0,005 m odpowiadała sumie grubości jej okładzin ($2 \cdot h'$ = 0,002 m). Obliczenia dynamiczne przeprowadzono dla uproszczonego modelu płyty o grubości rdzenia h_2 = 0,005 m i okładziny h' = 0,001 m. Przebieg drgań w czasie 1 sekundy przedstawia rysunek 7.32, a w krótkim czasie 0,1 sekundy - rysunek 7.33.

Przebiegi drgań płyt o wartościach modułu rdzenia sprężystego G_2 = 5 i 15.82 MPa są zgodne z przebiegami tych płyt przy uwzględnieniu lepkosprężystych właściwości ich rdzenia – porównanie wykresów (a) i (b) oraz (c) i (d) na rysunku 7.32. Dla płyty ze sztywniejszym rdzeniem o module G_2 = 15,82 MPa następuje zmniejszenie amplitudy i wzrost częstości drgań. Wykresy (a) i (b) na rysunku 7.33 pokazują przebieg drgań w czasie 0,1 sekundy płyt z rdzeniem sprężystym o wartościach modułu odpowiednio G_2 = 5 i 15,82 MPa. Wyraźny jest wzrost częstości drgań płyty z rdzeniem o większej wartości modułu. Liczba oscylacji w ciągu 0,1 sekundy rośnie z 9 pełnych fal dla płyty o G_2 = 5 MPa do 13 fal dla płyty o G_2 = 15,82 MPa. Wpływ wzrostu sztywności lepkosprężystego rdzenia na wzrost częstości drgań płyty potwierdzono w pracach [10], [85] dotyczących analiz pierścieniowych płyt trójwarstwowych, również o postaciach pofalowanych obwodowo. Porównanie wykresów (b) i (c) pokazuje zgodność charakteru i liczb fal dla płyt z rdzeniem sprężystym (b) i lepkosprężystym (c) o wartości modułu

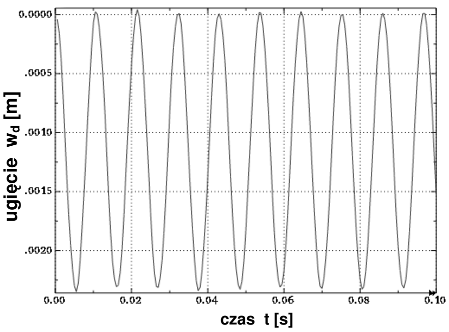
G_2 = 15,82 MPa. Natomiast porównanie wykresów (c) i (d) pozwala zauważyć wpływ wartości stałej lepkości materiału rdzenia na zmniejszenie częstości drgań. Jest ono nieznaczne i występuje dopiero wówczas (zmiana z 13 na 12 pełnych fal w ciągu 0,1 sekundy drgań płyty), gdy wartość stałej lepkości przyjętego materiału pianki rdzenia zostanie znacznie, teoretycznie, obniżona ($\eta' = 7{,}93 \cdot 10^{-6}$ MPa·s).



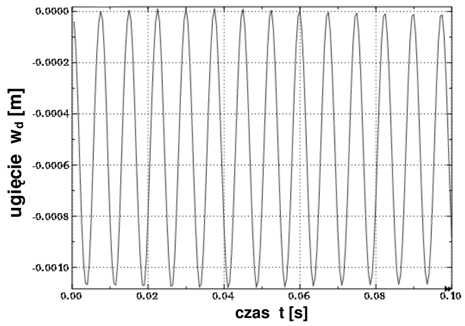
Rys. 7.32. Przebiegi drgań płyt z rdzeniem sprężystym (a) i (c) oraz lepkosprężystym (b) i (d) o modułach odpowiednio: G_2 = 5 i 15,82 MPa

Oczywisty spadek częstości drgań płyty z rdzeniem o właściwościach lepkosprężystych został potwierdzony w badaniach częstości drgań warstwowej płyty kołowej z rdzeniem lepkosprężystym, przedstawionych w pracy [121]. W pracy [121] wskazano także obrotowosymetryczną postać drgań (k = 0), na którą oddziaływanie lepkosprężystego rdzenia jest największe. Zwrócono także uwagę na większą efektywność tłumienia drgań przez relatywnie cieńszy rdzeń płyty. Najniższe wartości częstości drgań trójwarstwowej płyty pierścieniowej o dwustronnie utwierdzonych brzegach dla obrotowosymetrycznej postaci drgań tej płyty potwierdzają także wyniki przedstawione w pracy [85].

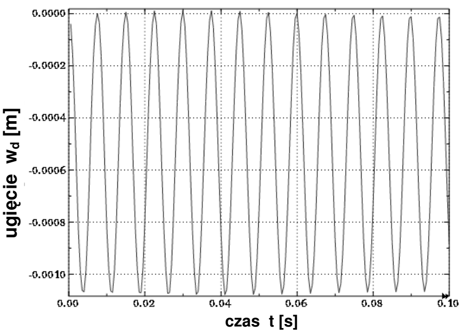
(a)



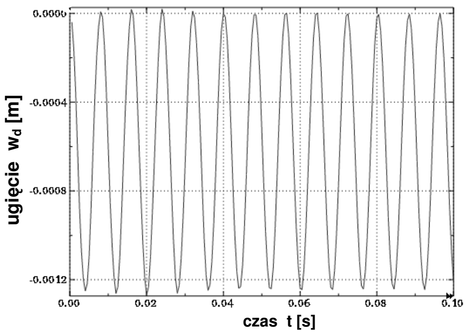
(b)



(c)



(d)



Rys. 7.33. Przebiegi drgań płyt z rdzeniem sprężystym (a) i (b) o modułach G_2 = 5 i 15,82 MPa oraz lepkosprężystym (c) i (d) o module 15,82 MPa i stałej lepkości: $\eta' = 7{,}93 \cdot 10^{4}$ i $7{,}93 \cdot 10^{-6}$ MPa·s

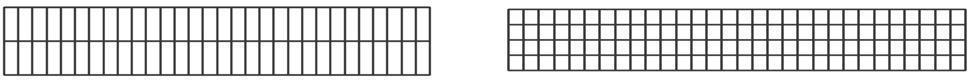
Na podstawie wcześniejszych analiz wyboczeniowych badanych płyt z rdzeniem o właściwościach lepkosprężystych i analizy ich drgań można uznać, że płyta warstwowa, której lepkosprężysty materiał opisuje stała lepkości o dużej wartości, zachowuje się podobnie jak płyta sprężysta.

8. Uwagi do obliczeń płyt z rdzeniem grubym

Przewidywanymi i zarazem obserwowanymi dotychczas postaciami utraty stateczności modeli płyt badanych dwoma metodami: różnic skończonych i elementów skończonych są formy globalne, quasi-eulerowskie. Przyjęte w rozwiązaniu płyty metodą różnic skończonych założenie o jednakowych ugięciach dodatkowych poszczególnych warstw płyty, które określa stan przemieszczeń dla wyboczenia globalnego, narzuca wprost taką jego formę. Została ona potwierdzona wynikami obliczeń modeli MES płyt, w budowie których nie występuje wspomniane założenie, ograniczające w pewnym stopniu swobodę deformacji poprzecznej struktury płyty. Jednakże obliczenia metodą elementów skończonych modeli płyt o większej grubości rdzenia (h_2 większe od największej grubości dotychczas analizowanej, $h_2 > 0{,}02$ m), wskazują na możliwość wystąpienia innych form statycznej utraty stateczności płyt. W analizie tej zasadnicze znaczenie ma wartość parametru grubości materiału rdzenia. Badania metodą elementów skończonych płyt z rdzeniem traktowanym jako gruby, tj. wtedy, gdy h_2 = 0,04 m, 0,06 m, prowadzono dla następujących modeli tych płyt:

- modelu podstawowego płyty i modelu uproszczonego (rysunki 7.1 i 7.2 – podrozdział 7.1 pracy),
- modelu podstawowego i modelu z wprowadzonym ograniczeniem deformacji poprzecznej warstw polegającym na ich związaniu warunkiem jednakowych ugięć,
- modeli uproszczonych, w których siatka rdzenia złożona jest z dwóch lub czterech warstw elementów bryłowych – rysunek 8.1 (a) i (b).

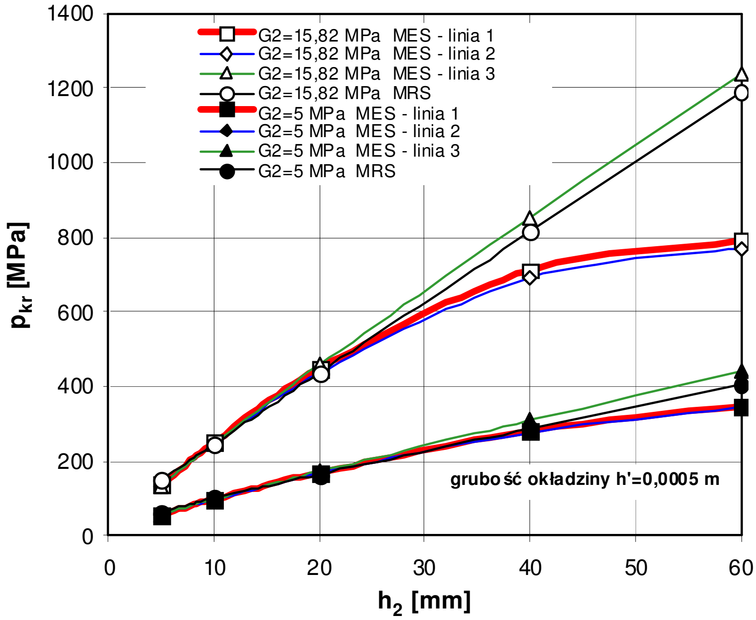
(a) (b)



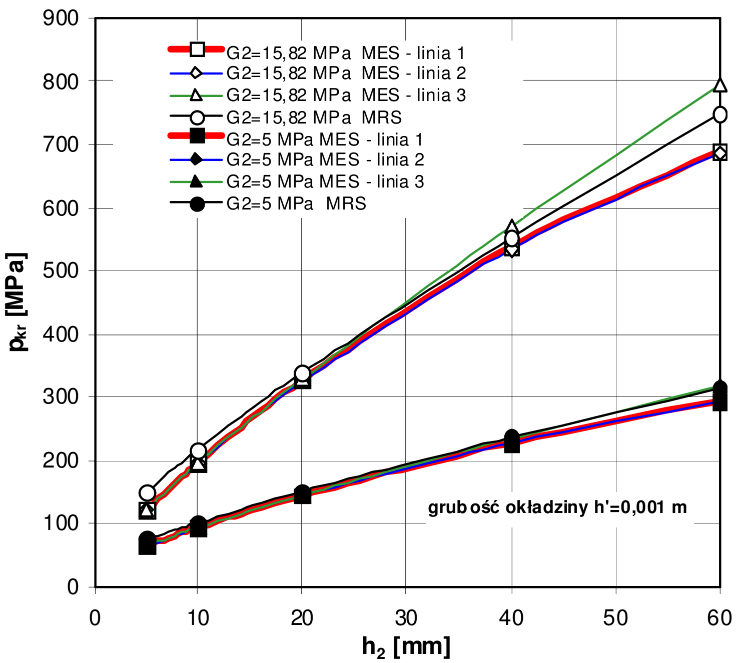
Rys. 8.1. Uproszczony model płyty zbudowany z dwóch (a) lub czterech (b) warstw elementów bryłowych w siatce rdzenia

Rysunki 8.2 i 8.3 przedstawiają wyniki obliczeń płyt o grubości okładzin $h' = 0{,}0005$ m (część (a) rysunków) i $h' = 0{,}001$ m (część (b) rysunków) ściskanych promieniowo na wewnętrznym lub zewnętrznym brzegu.

(a)

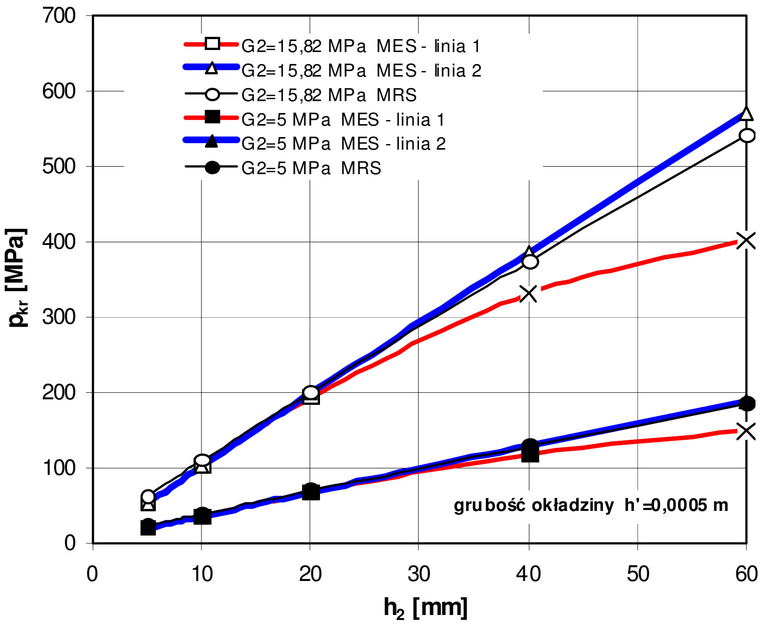


(b)

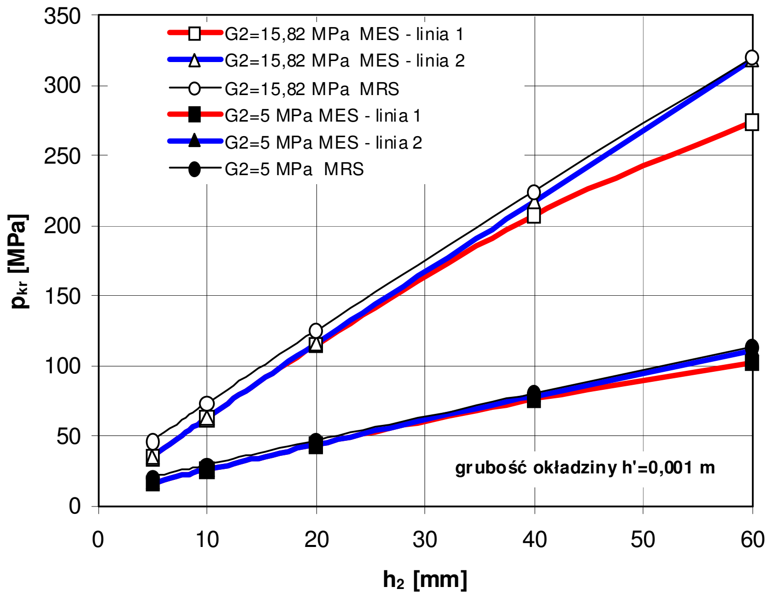


Rys. 8.2. Statyczne obciążenia krytyczne płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym o grubościach okładzin: (a) $h' = 0{,}0005$ m, (b) $h' = 0{,}001$ m

(a)



(b)



Rys. 8.3. Statyczne obciążenia krytyczne płyt obciążonych na brzegu zewnętrznym o grubościach okładzin: (a) h′ = 0,0005 m, (b) h′ = 0,001 m

Wartości krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} płyt wyznaczone dla różnych modeli MES porównano z wynikami otrzymanymi metodą różnic skończonych MRS w całym zakresie analizowanych grubości rdzenia $h_2 = 0{,}005 \div 0{,}06$ m płyt. Przedstawione na rysunku 8.2 zmiany wartości krytycznych obciążeń statycznych p_{kr} płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym wyznaczono dla:

- modelu podstawowego płyty – linia 1,
- modelu uproszczonego – linia 2,
- modelu uproszczonego, w którym warstwy płyty związane są warunkiem jednakowych ugięć – linia 3,
- modelu płyty rozwiązanego metodą różnic skończonych MRS.

Wartości minimalnych statycznych obciążeń krytycznych płyt ściskanych na brzegu zewnętrznym przedstawione na rysunku 8.3 wyznaczono dla:

- modelu podstawowego płyty – linia 1,
- modelu podstawowego płyty, w którym warstwy związane są warunkiem jednakowych ugięć – linia 2,
- modelu płyty rozwiązanego metodą różnic skończonych MRS.

Wyróżnione krzyżykiem punkty wykresów dotyczą tych przypadków płyt, których deformacja krytyczna ma inną niż quasi-eulerowską postać wyboczenia.
Wybrane wyniki szczegółowe dla płyt z rdzeniem o grubości $h_2 = 0{,}06$ m przedstawiają tablice 8.1 i 8.2.

Tablica 8.1. Krytyczne obciążenia statyczne płyt o grubości rdzenia $h_2 = 0{,}06$ m obciążonych na brzegu wewnętrznym

G_2 / h′ [MPa] / [m]	**p_{kr} [MPa]**					
	model podstawowy	**model uproszczony**	**[1] model uproszczony**	**[2] model uproszczony**	**[3] model uproszczony**	**MRS**
5 / 0,0005	347,54	345,48	440,20	315,53	309,47	406,98
5 / 0,001	293,90	292,68	317,34	288,45	287,84	312,53
15,82 / 0,0005	791,37*	774,10*	1238,81	684,19*	649,49*	1191,70
15,82 / 0,001	689,10*	686,66	796,31	659,77	655,17	749,53

[1] – model, w którym warstwy związane są warunkiem jednakowego ugięcia
[2] – model, w którym rdzeń zbudowany jest z podwójnej warstwy elementów bryłowych
[3] – model, w którym rdzeń zbudowany jest z poczwórnej warstwy elementów bryłowych

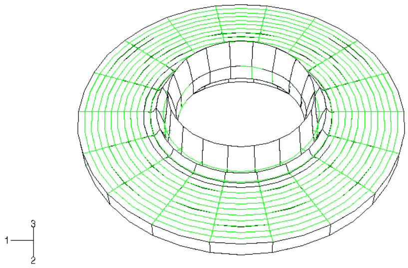
Tablica 8.2. Krytyczne obciążenia statyczne i postać wyboczenia płyt o grubości rdzenia h_2 = 0,06 m ściskanych na brzegu zewnętrznym

G_2 / h′ [MPa] / [m]	**p_{kr} [MPa] m**		
	model podstawowy	**[1] model podstawowy**	**MRS**
5 / 0,0005	149,37*	189,45 m = 12	185,68 m = 17
5 / 0,001	102,86 m = 9	111,60 m = 8	113,39 m = 9
15,82 / 0,0005	402,44*	571,69 m = 14	542,70 m = 27
15,82 / 0,001	274,23 m = 12	318,34 m = 10	320,63 m = 12

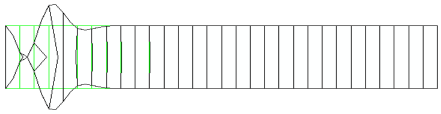
[1] – model, w którym warstwy związane są warunkiem jednakowego ugięcia

Wyróżnione gwiazdką (*) liczby dotyczą modeli płyt, których deformacja krytyczna ma inną niż globalną, quasi-eulerowską formę. Przedstawione na rysunkach 8.2 i 8.3 zmiany wartości krytycznych obciążeń statycznych płyt o różnej grubości rdzenia pokazują dobrą zgodność wyników obliczeń MRS i MES dla płyt z rdzeniem średniej grubości h_2 = 0,005, 0,01, 0,02 m i modeli płyt w całym zakresie grubości rdzenia, w których warstwy związane są warunkiem jednakowego ugięcia. Wartości krytycznych obciążeń statycznych modeli MES płyt z pominięciem założenia o jednakowym ugięciu warstw wyznaczone dla płyt z rdzeniem grubym (h_2 = 0,04 i 0,06 m) są mniejsze od wartości obciążeń modeli płyt z uwzględnieniem tego założenia. Znaczne zmniejszenie wartości obciążeń krytycznych można zaobserwować zwłaszcza dla płyt z cieńszymi okładzinami h′ = 0,0005 m i większą wartością modułu Kirchhoffa G_2 = 15,82 MPa materiału rdzenia. Postać wyboczenia może być silnie zdeformowana, szczególnie w obszarze brzegu obciążonego (rysunek 8.4) lub brzegu wewnętrznego płyty (rysunek 8.5). Rysunek 8.4 pokazuje postacie wyboczenia modeli płyty o parametrach: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,06 m, h′ = 0,0005 m, ściskanej promieniowo na brzegu wewnętrznym (tablica 8.1), łącznie z globalną postacią utraty stateczności (rysunek 8.4e).

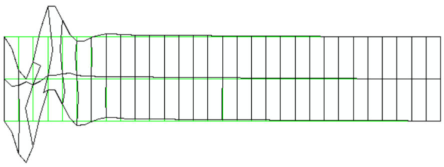
(a) p_{kr} = 791,37 MPa



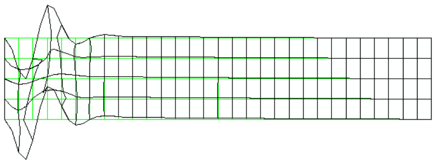
(b) p_{kr} = 774,10 MPa



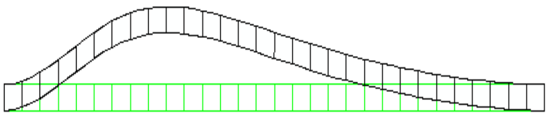
(c) p_{kr} = 684,19 MPa



(d) p_{kr} = 649,49 MPa

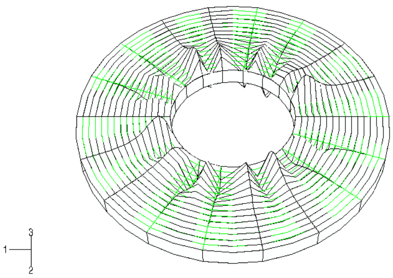


(e) p_{kr} = 1238,81 MPa

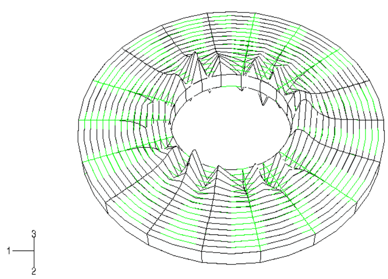


Rys. 8.4. Postacie deformacji krytycznej modeli MES płyty z rdzeniem grubym obciążonej na brzegu wewnętrznym

Deformacje w obszarze brzegu wewnętrznego modelu płyty z rdzeniem grubym i cienkimi okładzinami (przypadki wyróżnione (*) w tablicy 8.2), płyty obciążonej na brzegu zewnętrznym, pokazuje rysunek 8.5.



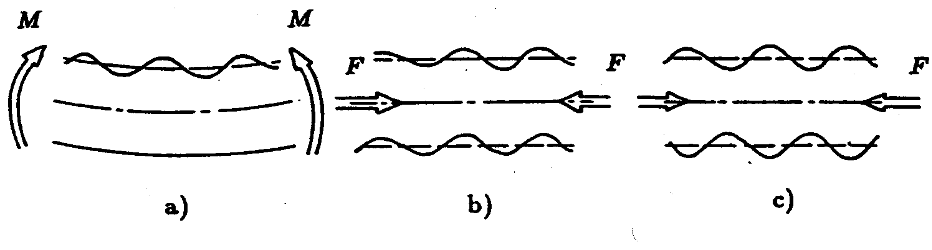
p_{kr} = 149,37 MPa



p_{kr} = 402,44 MPa

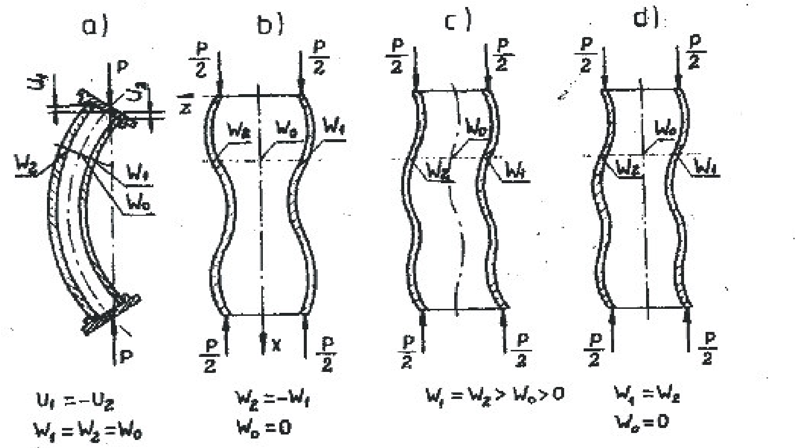
Rys. 8.5. Postacie deformacji krytycznej modeli MES płyty z rdzeniem grubym ściskanej na brzegu zewnętrznym

Obliczenia prowadzone w metodzie elementów skończonych dla modeli płyt z rdzeniem grubym ujawniają występowanie innych niż quasi-eulerowskich form statycznej utraty stateczności płyt z rdzeniem miękkim przy znacznie mniejszych od wyznaczonych w rozwiązaniu wykorzystującym metodę różnic skończonych wartościach obciążeń statycznych. Na takie zachowania płyt z rdzeniem relatywnie grubym zwracają uwagę autorzy prac [80], [83], [84]. Przedstawione w tych pracach formy utraty stateczności płyt uwzględniają deformację symetryczną i niesymetryczną struktury z możliwością wystąpienia jednostronnej deformacji okładzin płyty [80] i najogólniejszej, podstawowej formy wyboczenia dla hiperbolicznego stanu przemieszczeń rdzenia [84]. Pokazane na rysunkach 8.6 i 8.7 formy wyboczenia wraz z wyjaśniającymi opisami są zamieszczone odpowiednio w pracach [80], [84]. Na występujące zjawisko pofałdowania okładzin w strukturze warstwowej o małej gęstości materiału rdzenia, traktowane jako rodzaj jej niestateczności, zwraca uwagę również autor ogólnej pracy [78] o konstrukcjach warstwowych.
Inne możliwe formy lokalnych niestateczności warstwowych płyt z rdzeniem miękkim w odniesieniu do formy ogólnej wyboczenia przedstawiono w pracy [48] – rysunek 8.8. Przedstawione formy B i D, charakteryzujące się dużą degradacją poprzeczną struktury, są przyjęte jako postacie wyboczeniowego zniszczenia płyty.



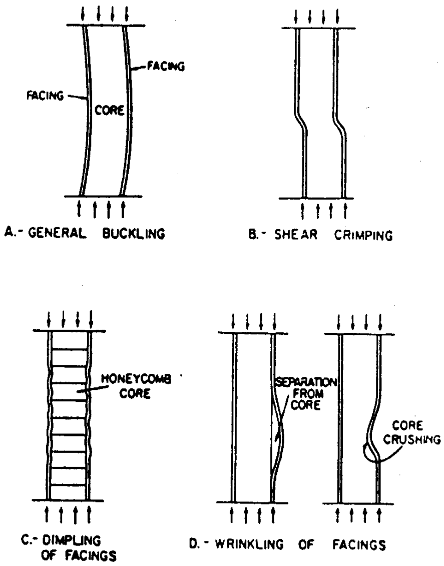
a) One-face layer wrinkling, b) antisymmetrical, c) symmetrical wrinkling

Rys. 8.6. Formy deformacji poprzecznej przedstawione w pracy [80]



Sposoby utraty stateczności konstrukcji warstwowych:
a) globalny (quasi-eulerowski); b i d – miejscowy (b– symetryczny, d– asymetryczny), c– podstawowy

Rys. 8.7. Formy utraty stateczności przedstawione w pracy [84]

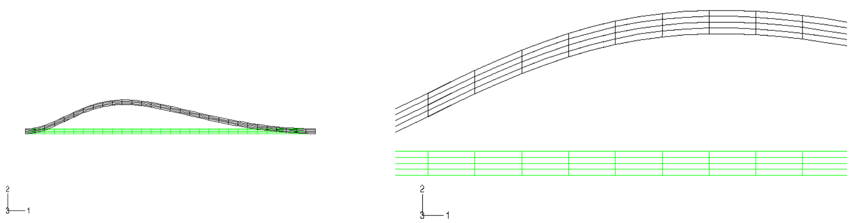


Rys. 8.8. Formy wyboczeniowej deformacji struktury przedstawione w pracy [48]

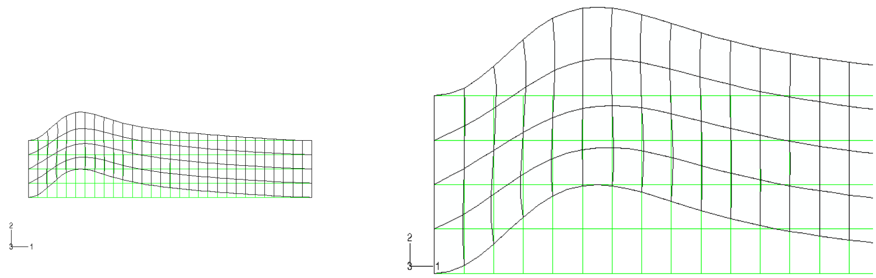
Pokazane na rysunkach 8.4 i 8.5 silne, praktycznie niszczące strukturę płyty deformacje i znaczne w stosunku do płyt o globalnej formie wyboczenia zmniejszenie obciążeń krytycznych płyt z rdzeniem grubym wskazuje, na podstawie uwag zawartych w pracy [84], na występowanie odkształceń poprzecznych rdzenia

i konieczność uwzględnienia w opisie stanu jego przemieszczeń zależności nieliniowych typu hiperbolicznego [84] lub parabolicznego [81], [82].
Porównanie siatek dwóch modeli płyt o grubościach h_2 = 0,005 i 0,06 m zbudowanych z elementów obrotowosymetrycznych o czterech warstwach elementów bryłowych w siatce rdzenia, pokazuje tendencję do nieliniowych przemieszczeń węzłów siatki elementów w ugiętej części wyboczonej płyty z rdzeniem grubym – rysunek 8.9.

(a)

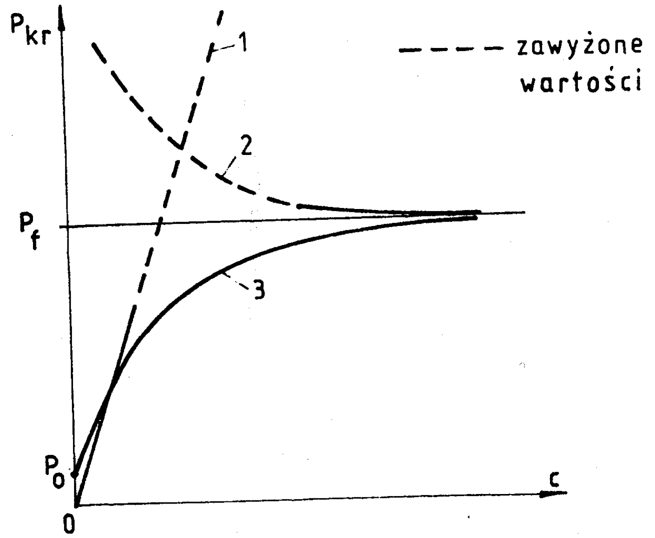


(b)



Rys. 8.9. Przemieszczenia węzłów siatek wyboczonych modeli płyt z rdzeniem cienkim (a) i grubym (b)

Przedstawiony na rysunkach 8.2a i 8.3a przebieg zmian wartości obciążeń p_{kr} płyt z rdzeniem grubym, w tym szczególnie płyt o większej wartości modułu Kirchhoffa G_2, odpowiada linii zmian p_{kr} dla formy podstawowej wyboczenia przedstawionej w pracy [84] i krzywej pokazanej w pracy [80]. Linie zmian obciążeń krytycznych tych płyt charakteryzują się wzrostem wartości obciążeń krytycznych wraz z grubością rdzenia płyt do określonej górnej wartości granicznej obciążenia, zgodnie z przebiegiem linii 3 przedstawionej na rysunku 8.10 zamieszczonym w pracy [84].

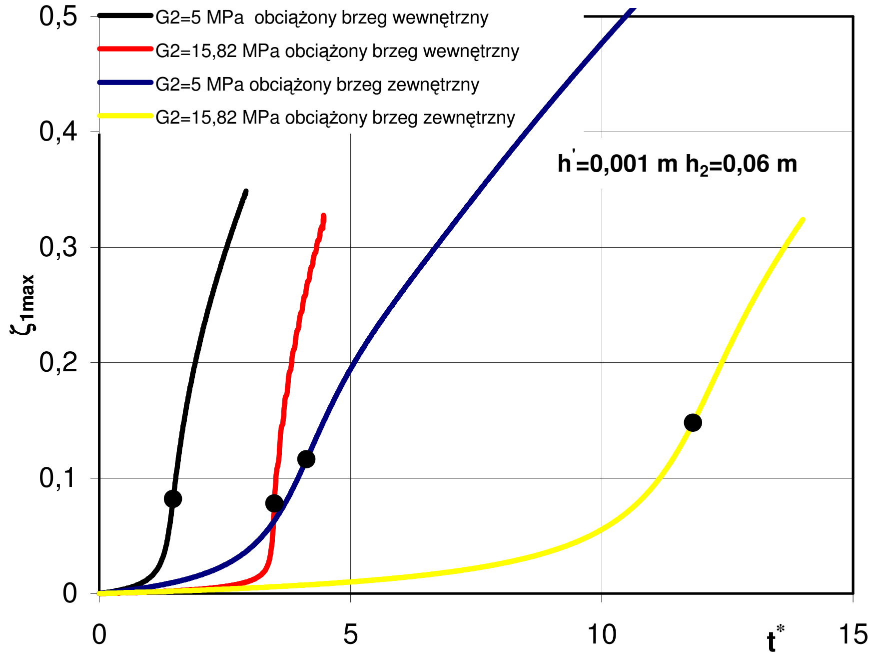


Zależność obciążeń krytycznych od grubości rdzenia dla różnych sposobów utraty stateczności: 1– dla formy globalnej, 2– dla formy miejscowej, 3– dla formy podstawowej

Rys. 8.10. Zmiany obciążeń krytycznych P_{kr} płyt o różnej grubości rdzenia c przedstawione w pracy [84]

Wartości statycznych obciążeń krytycznych płyt z rdzeniem grubym przy założeniu warunku jednakowego ugięcia ich warstw mogą być w zależności od geometrii struktury i materiałów warstw badanej płyty w różnym stopniu zawyżone.

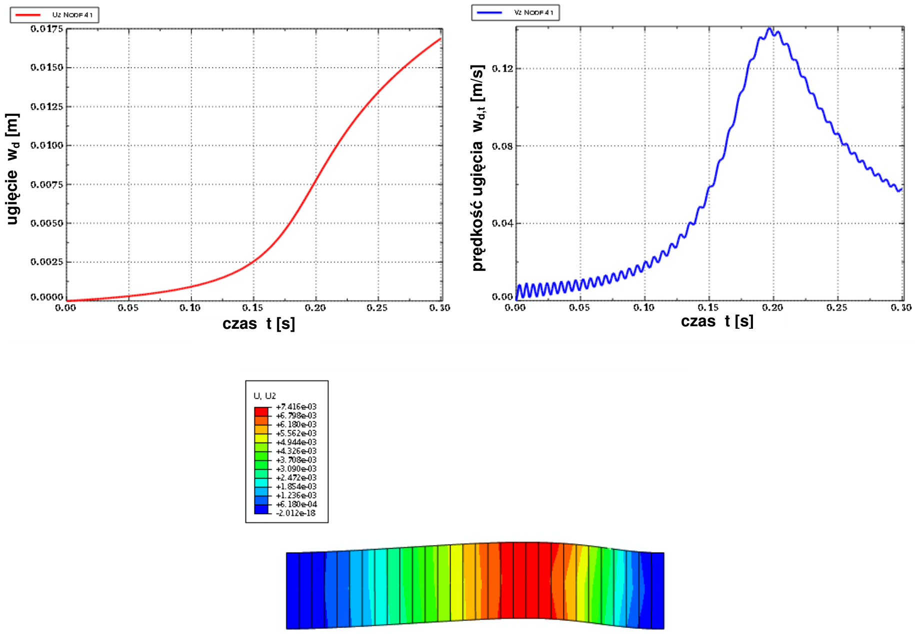
W celu zbadania zachowań płyt z rdzeniem grubym poddanych narastającym w czasie obciążeniom przeprowadzono obliczenia płyt z rdzeniem o grubości h_2 = 0,06 m. Brzeg wewnętrzny płyty obciążano z prędkością s ≈ 4346 MPa/s, natomiast zewnętrzny z prędkością s ≈ 931 MPa/s. Przyjęto obrotowosymetryczną postać ugięcia wstępnego płyt i taką samą postać ich odpowiedzi dynamicznej (m = 0). Obliczeniom metodą elementów skończonych poddano model podstawowy i uproszczony płyt o grubości okładzin h' = 0,001 m i modułach materiałów rdzeni G_2 = 5 i 15,82 MPa. Wyniki obliczeń modeli płyt: uproszczonego (metodą MES) i rozwiązanego metodą różnic skończonych są zgodne. Utrata stateczności dynamicznej ma formę globalną. Wyniki liczbowe przedstawia tablica 8.3, a ugięcia płyt liczonych metodą różnic skończonych pokazuje rysunek 8.11.
Na rysunkach 8.12 i 8.13 pokazano przykładowe ugięcia, prędkości zmian ugięcia i krytyczne deformacje modelu uproszczonego płyt ściskanych promieniowo na brzegu zewnętrznym lub wewnętrznym.



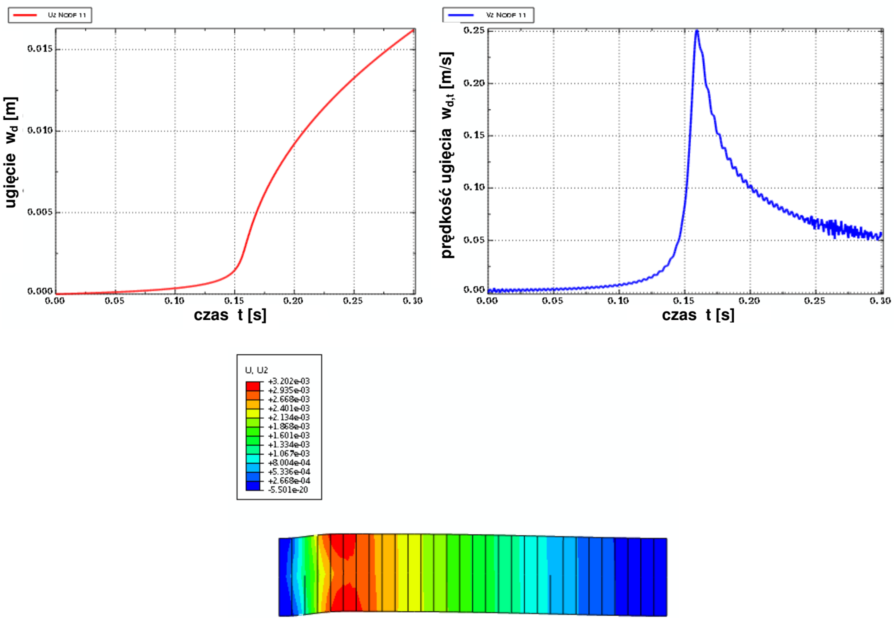
Rys. 8.11. Ugięcia płyt z rdzeniem grubym ściskanych promieniowo na wybranym brzegu płyty

Tablica 8.3. Krytyczne obciążenia p_{krdyn} i ugięcia w_{dkr} płyt z rdzeniem grubym h_2 = 0,06 m o grubości okładzin h′ = 0,001 m obciążonych na wewnętrznym lub zewnętrznym brzegu

brzeg obciążony	**G_2 [MPa]**	**p_{krdyn} [MPa] w_{dkr} [m]**	
		MES	**MRS**
wewnętrzny	5	304,22 $4{,}35 \cdot 10^{-3}$	319,24 $5{,}07 \cdot 10^{-3}$
	15,82	695,36 $3{,}20 \cdot 10^{-3}$	757,73 $4{,}83 \cdot 10^{-3}$
zewnętrzny	5	183.37 $7{,}42 \cdot 10^{-3}$	192,06 $7{,}21 \cdot 10^{-3}$
	15,82	501,70 $9{,}26 \cdot 10^{-3}$	549,92 $9{,}17 \cdot 10^{-3}$



Rys. 8.12. Ugięcia i prędkości zmian ugięcia oraz postać wyboczenia płyty o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,06 m, h′ = 0,001 m ściskanej na brzegu zewnętrznym

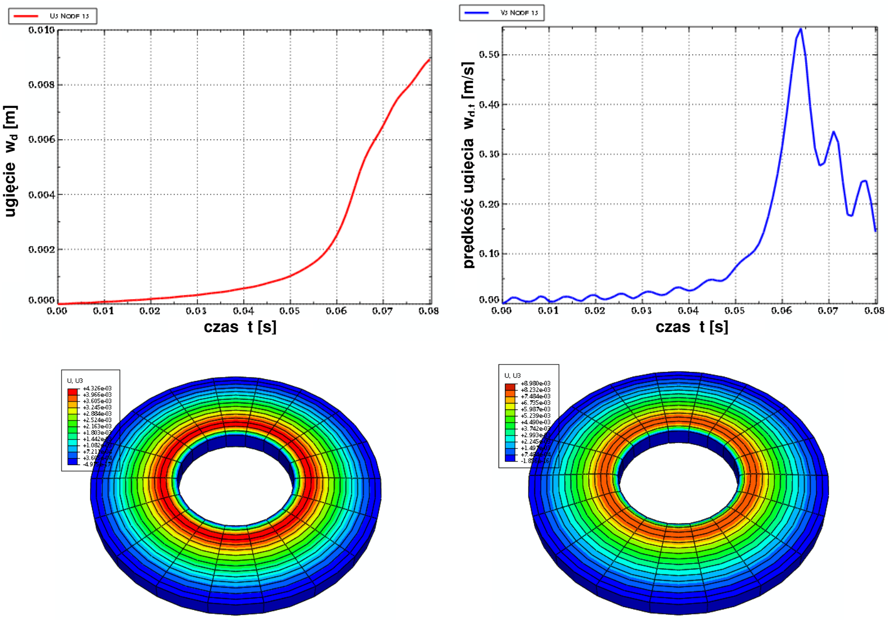


Rys. 8.13. Ugięcia i prędkości zmian ugięcia oraz postać wyboczenia płyty o parametrach: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,06 m, h′ = 0,001 m obciążonej na brzegu wewnętrznym

Obrotowosymetryczną postać wyboczenia płyty o parametrach G_2 = 5 MPa, h' = 0,001 m, h_2 = 0,06 m, obciążonej na brzegu wewnętrznym, potwierdza także wynik obliczeń modelu podstawowego płyty. Ugięcia i prędkości zmian ugięcia oraz postacie wyboczenia i pokrytycznej deformacji dla t = 0,08 s pokazuje rysunek 8.14. Wyznaczona wartość dynamicznego obciążenia krytycznego wynosi p_{krdyn} = 278,14 MPa, a maksymalnego ugięcia $w_{dkr} = 4{,}33 \cdot 10^{-3}$ m. W przypadku płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym wyniki obliczeń MES modelu podstawowego wskazują na możliwość wystąpienia utraty stateczności przy niższej wartości obciążenia dynamicznego p_{krdyn} = 121,93 MPa dla nieobrotowosymetrycznej postaci wyboczenia, gdy $m \neq 0$, Przebiegi oraz zmiany postaci deformacji płyty dla czasu przedkrytycznego i krytycznego przedstawia rysunek 8.15. Również dla modelu podstawowego płyty o parametrach G_2 = 15,82 MPa, h' = 0,001 m dynamiczne obciążenie krytyczne jest znacznie mniejsze i wynosi p_{krdyn} = 282,96 MPa. Postać ugięcia nie jest obrotowosymetryczna, a przebieg ugięcia z jego gwałtownym przyrostem w obszarze krytycznym ma podobny charakter do przypadku przedstawionego na rysunku 8.15.

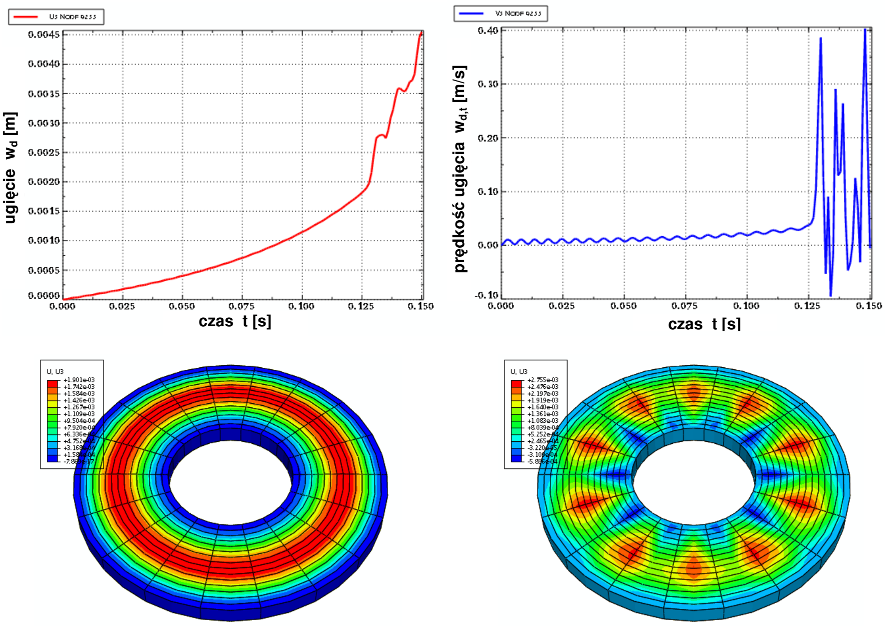
Możliwość wystąpienia krytycznych i pokrytycznych deformacji płyt z rdzeniem grubym h_2 = 0,06 m i cienkimi okładzinami h' = 0,0005 m o innej formie wyboczenia niż quasi-eulerowska potwierdzają także wyniki obliczeń MES modelu uproszczonego płyty. W przypadku płyt obciążonych na brzegu wewnętrznym lub zewnętrznym o module rdzenia G_2 = 5 MPa utrata stateczności ma formę globalną dla wartości obciążeń dynamicznych równych odpowiednio p_{krdyn} = 360,72 MPa lub 245,73 MPa. Zwiększanie obciążenia ponad wartość krytyczną powoduje silne deformacje w obszarze brzegu obciążonego – rysunek 8.16.

Wartości krytyczne obciążeń dynamicznych wyznaczono także dla modelu płyty rozwiązanej metodą różnic skończonych. Są one następujące: p_{krdyn} = 382,70 MPa dla płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym i p_{krdyn} = 347,65 MPa płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym. Wyniki otrzymane dla obu modeli MES i MRS płyt są porównywalne w przypadku płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym (różnica wartości p_{krdyn} jest rzędu 22 MPa).



t = 0,064 s t = 0,08 s

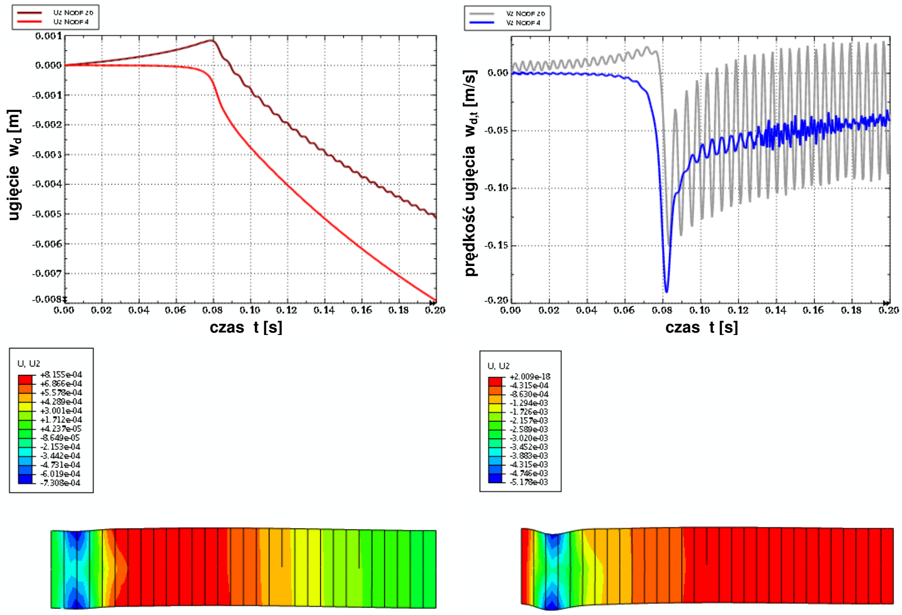
Rys. 8.14. Przebiegi i postacie deformacji modelu podstawowego płyty o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,06 m, h′ = 0,001 m obciążonej na brzegu wewnętrznym



t = 0,127 s t = 0,131 s

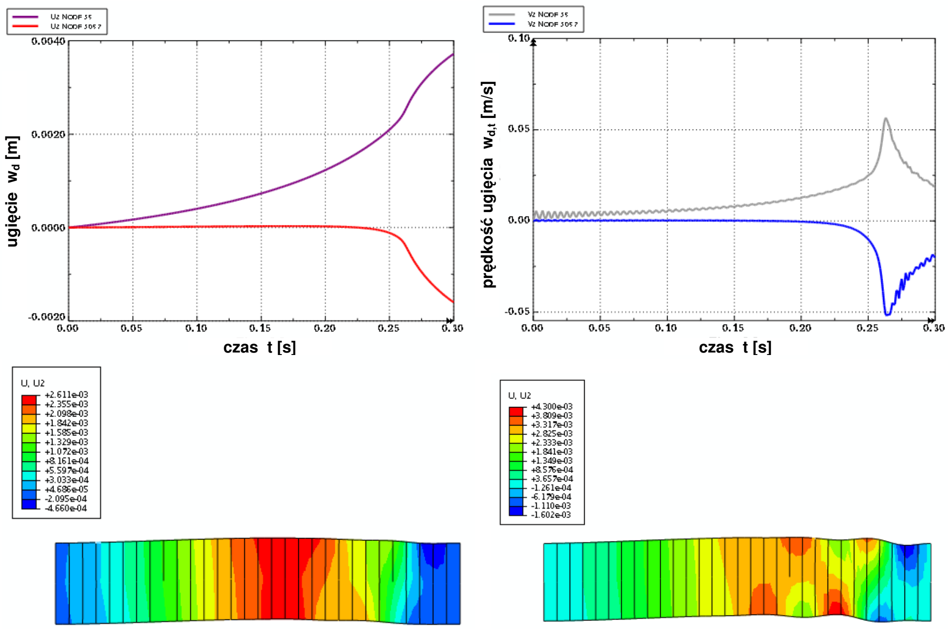
Rys. 8.15. Przebiegi i postacie deformacji modelu podstawowego płyty o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,06 m, h′ = 0,001 m ściskanej na brzegu zewnętrznym

(a)



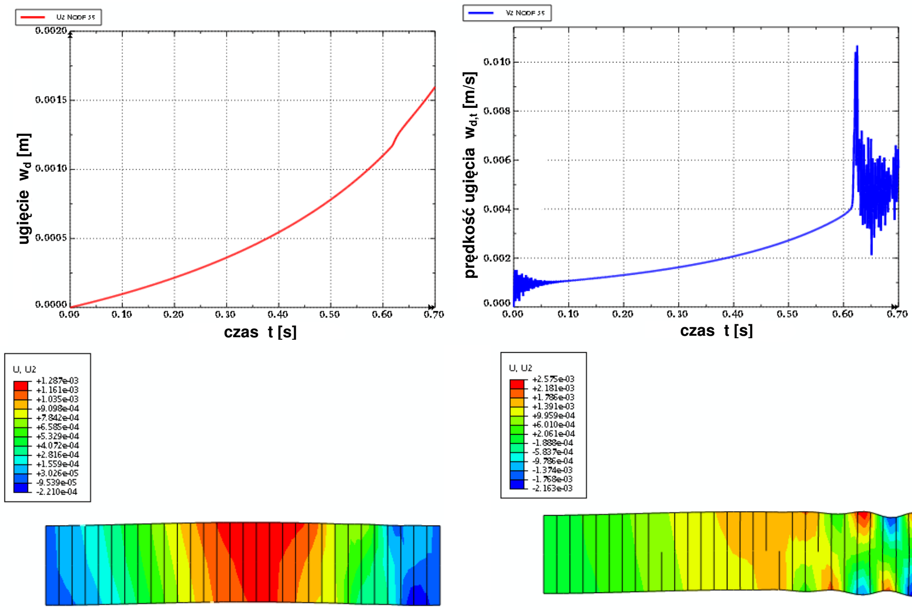
t = 0,08 s t = 0,1 s

(b)



t = 0,264 s t = 0,3 s

Rys. 8.16. Przebiegi oraz postacie krytycznej i pokrytycznej deformacji płyty o parametrach: G_2 = 5 MPa, h_2 = 0,06 m, h' = 0,0005 m obciążonej na brzegu: (a) wewnętrznym, (b) zewnętrznym



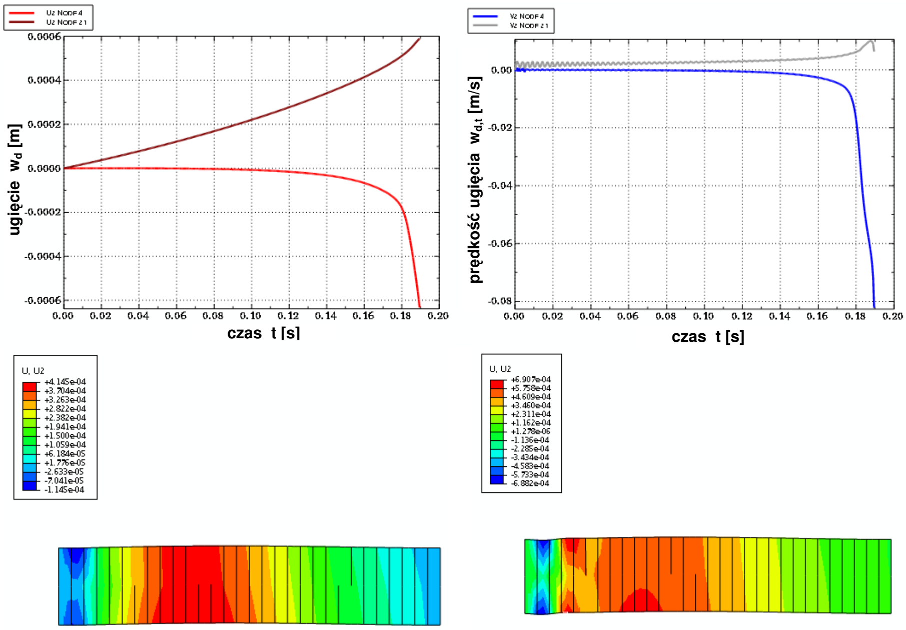
t = 0,619 s t = 0,7 s

Rys. 8.17. Wyniki obliczeń MES płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym o parametrach: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,06 m, h' = 0,0005 m

Natomiast istotnie większa (o około 102 MPa) wartość obciążenia p_{krdyn} płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym wyznaczona metodą różnic skończonych potwierdza wcześniejsze obserwacje wartości obciążeń statycznych płyt z rdzeniem grubym. Potwierdza ją także wynik obliczeń MES pełnego modelu płyty, dla którego obciążenie krytyczne ma wartość najmniejszą z wyznaczonych dla modeli tej płyty i wynosi p_{krdyn} = 158,24 MPa. Charakterystyki ugięcia i prędkości zmian ugięcia oraz postać krytycznej deformacji odpowiadają wynikom płyty pokazanej na rysunku 8.15.

Odpowiedź dynamiczna uproszczonego modelu MES płyty ściskanej na brzegu zewnętrznym o module rdzenia G_2 = 15,82 MPa jest podobna do opisanej dla płyty z rdzeniem G_2 = 5 MPa. Rysunek 8.17 pokazuje globalną formę utraty stateczności dynamicznej płyty dla wartości obciążenia p_{krdyn} = 576,17 MPa i silną, pokrytyczną deformację. Wartość obciążenia p_{krdyn} płyty wyznaczona MRS jest znacznie wyższa i wynosi p_{krdyn} = 968,08 MPa.

Przebiegi ugięcia i prędkości zmian ugięcia modelu MES płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym o module G_2 = 15,82 MPa i grubości okładziny h′ = 0,0005 m pokazują gwałtowny charakter zmian ugięć wybranych punktów płyty położonych w pobliżu środka i brzegu obciążonego, w przedziale czasu krytycznego t_{kr} = 0,18÷0,19 s (rysunek 8.18).



t = 0,16 s　　　　t = 0,19 s

Rys. 8.18. Przebiegi i postacie zmian deformacji w czasie t = 0,16 i 0,19 s płyty o parametrach: G_2 = 15,82 MPa, h_2 = 0,06 m, h′ = 0,0005 m obciążonej na brzegu wewnętrznym

Wyniki obliczeń zarówno statycznych, jak i dynamicznych płyt z rdzeniem grubym pokazują znaczne ilościowe i jakościowe różnice zachowań krytycznych modeli MES i MRS badanych płyt. Wyznaczone wartości obciążeń krytycznych modeli płyt, których budowa i przyjęte założenia niejako wymuszają quasi-eulerowską formę ich wyboczenia, mogą być znacznie większe od możliwych wartości rzeczywistych, które sugerują wyniki obliczeń modeli MES płyt pozbawione założenia o jednakowych ugięciach warstw płyty. Problem dotyczy zwłaszcza płyt z cienkimi okładzinami i rdzeniem z materiału o większej wartości modułu Kirchhoffa, a także złożonej analizy płyt ściskanych na brzegu zewnętrznym, których deformacja przyjmuje postać pofalowaną obwodowo.

Rząd wartości obciążeń krytycznych płyt z rdzeniem grubym jest bardzo wysoki. Wyznaczone wartości obciążeń krytycznych, szczególnie płyt z cienkimi okładzinami ($h' = 0{,}0005$ m) i sztywniejszym rdzeniem ($G_2 = 15{,}82$ MPa) mogą mieć znaczenie jedynie teoretyczno-poznawcze, gdyż odpowiadający im stan naprężeń w warstwach zdeformowanej płyty nie spełniałby kryteriów wytężeniowych przyjętych materiałów warstw.

9. Podsumowanie

Rozległy, ze względu na problematykę i zarazem szczegółowy w ocenie wyników, zakres podjętych analiz badanych pierścieniowych płyt trójwarstwowych pokazuje zalety przyjętego sposobu rozwiązania sformułowanego zagadnienia stateczności płyt. Związanie dwóch metod przybliżonych: ortogonalizacji Bubnowa-Galerkina i dyskretyzacji różnicami skończonymi w numerycznym rozwiązaniu ogólnego, nieliniowego problemu brzegowo-początkowego obrotowosymetrycznych i niesymetrycznych ugięć płyt o niejednorodnej strukturze poprzecznej pozwoliło na szybkie, efektywne uzyskanie wyników końcowych otrzymywanych dla różnych parametrów opisujących badany element płytowy.
O zaletach takiego rozwiązania i możliwościach jego wykorzystania w analizach zagadnień pokrewnych na podstawie przeprowadzonych badań jednorodnej, ortotropowej płyty pierścieniowej wspominał autor prac [117], [118].

Przyjęte założenia upraszczające opis stanu naprężeń i odkształceń reologicznej, struktury warstwowej płyty pierścieniowej, które na pewno ograniczają i również nie pozwalają na pełne poznanie jej zachowań, zwłaszcza dynamicznych, są koniecznym kompromisem pomiędzy trudnym, ciągle w pełni niemożliwym opisem obiektu rzeczywistego, a jego bardzo uproszczonym odpowiednikiem – modelem. Autorzy pracy [3] podkreślają: *Absolutna dokładność to utopia nieosiągalna dla wielu zagadnień nieliniowej dynamiki.* Poczucie pewnego niepowodzenia, zmniejszają jednak słowa profesora niemieckiego G. Kirchhoffa zacytowane również w pracy [3]: *Celem nauki nie jest objaśnianie zjawisk przyrody, lecz opisywanie ich w sposób pełny i najprostszy* wskazujące, w połączeniu ze słowami wcześniejszymi, na dążenie do pełnego, ale opartego o założenia, prostego opisu zjawisk, które towarzyszy poszukiwaniom różnych rozwiązań inżynierskich.

Skuteczność przedstawionego w pracy rozwiązania dla płyt ze średnią grubością rdzenia potwierdza dobra zgodność wyników obliczeń z wynikami otrzymanymi metodą elementów skończonych dla przyjętych modeli płyt. Dla tych płyt można uważać, iż założony w pracy cel został osiągnięty. Liczne wyniki szczegółowe, przebiegi ugięć dynamicznych, obrazy deformacji, analizy wytężeniowe tworzą całościowy obraz możliwych zachowań krytycznych i pokrytycznych trójwarstwowych płyt pierścieniowych, z lepkosprężystym, piankowym rdzeniem i różnymi niedokładnościami początkowego kształtu geometrycznego.

Różny ilościowy udział wielkości wpływających na charakter dynamicznej odpowiedzi płyt jest możliwy do przewidzenia w ogólnej ocenie jakościowej, np.: wzrost sztywności rdzenia płyt zbliża wartość krytycznego obciążenia dynamicznego do wartości obciążenia statycznego, do tych wartości dążą również krytyczne obciążenia dynamiczne płyt o pofalowanych obwodowo postaciach wyboczenia, zmniejszenie wartości krytycznych obciążeń dynamicznych występuje także dla płyt obciążonych z mniejszą intensywnością i płyt o dużej imperfekcji.
Zaobserwowana możliwość wystąpienia niższych wartości krytycznych obciążeń dynamicznych od wartości minimalnego, krytycznego obciążenia statycznego, odpowiedzi dynamiczne płyt z dodatkowymi, różnej skali nieregularnościami kształtu początkowej geometrii i poddanych obciążeniom narastającym z różną intensywnością oraz występujące zmiany postaci deformacji krytycznej modeli MES płyt są wybranymi przykładami odpowiednich analiz, dla których napotkane trudności w ocenie stanu krytycznego są potwierdzeniem przyjętego, w podrozdziale 2.1 pracy, sformułowania towarzyszącego poszczególnym analizom badanych płyt.
Udział wielu parametrów wpływających na różne, często odmienne odpowiedzi elementu zakłóca obraz całości i wówczas w naturalnym dążeniu do poznania choćby tylko ogólnego mechanizmu jego zachowań rośnie rola efektywnego sposobu rozwiązania.

9.1. Stan krytyczny trójwarstwowych płyt pierścieniwych – spostrzeżenia i wnioski końcowe

Ważnym, podjętym w pracy, elementem oceny stanu krytycznego trójwarstwowych płyt pierścieniowych jest analiza płyt, których utrata stateczności, a szczególnie stateczności dynamicznej, ma postać obwodowych pofalowań. Uogólnienie badań numerycznych na przypadki zarówno symetrycznych, jak i niesymetrycznych postaci wyboczenia płyt, w tym również płyt z rdzeniem lepkosprężystym, zrealizowano poprzez: sformułowanie odpowiednich równań podstawowych, wyprowadzenie ogólnej, rozbudowanej postaci równań różniczkowych (5.13), (5.20), (5.17), (5.18), (5.10), (5.11) (opis – podrozdział 5.1 pracy) dla płyty z rdzeniem o reologicznych właściwościach, rozwiązanie analityczno-numeryczne wykorzystujące przybliżoną metodę różnic skończonych, przeprowadzenie wielu szczegółowych analiz. Dopełnieniem są wyniki obliczeń prowadzone z wykorzystaniem metody elementów skończonych dla przedstawionego modelu trójwarstwowej płyty pierścieniowej.

Obserwacje dotyczące stanów krytycznych płyt jako odpowiedź na następujące, praktycznie ważne pytanie:

<u>od czego uzależniona jest wartość minimalnego obciążenia krytycznego i postać utraty stateczności trójwarstwowej płyty pierścieniowej?</u>

będą stanowiły treść przedstawionych poniżej spostrzeżeń i wniosków końcowych:

- minimalne wartości krytycznych obciążeń statycznych odpowiadają obrotowosymetrycznej (m = 0) postaci wyboczenia płyt ściskanych promieniowo na wewnętrznym brzegu, również odpowiedź dynamiczna płyt dwustronnie utwierdzonych przesuwnie i ściskanych promieniowo na brzegu wewnętrznym odpowiada tej postaci wyboczenia,
- minimalne wartości krytycznych obciążeń statycznych i dynamicznych płyt ściskanych na brzegu zewnętrznym występują dla pofalowanych obwodowo postaci utraty stateczności płyt:
  - ~ liczba *m* fal przy obciążeniach statycznych rośnie ze wzrostem sztywności rdzenia płyt,
  - ~ liczby m = 5, 6, 7 charakteryzują postacie wyboczenia odpowiadające minimalnym obciążeniom dynamicznym analizowanych płyt z okładzinami o grubości $h' = 0{,}001$ m,
  - ~ dla większej liczby *m* fal wyboczenia płyt może wystąpić spadek wartości krytycznych obciążeń dynamicznych poniżej wartości minimalnego, krytycznego obciążenia statycznego płyty, wówczas $K_d < 1$,
  - ~ liczba *m* fal wyboczenia dla pewnych przypadków badanych modeli płyt może zależeć od liczby punktów dyskretyzacji *N* modelu obliczeniowego płyty w przybliżonej metodzie rozwiązania różnicami skończonymi,
  - ~ trajektorie dynamicznych ugięć płyt różnią się dla płyt o dużej (m > 3) i małej (m < 4) liczbie obwodowych fal wyboczenia,
- swobodny brzeg płyty obniża wartość jej krytycznych obciążeń statycznych,
- liczba *m* fal wyboczenia płyt ściskanych statycznie na brzegu zewnętrznym rośnie ze wzrostem ilorazu ρ_w jej promieni r_w i r_z, minimalna wartość krytycznego obciążenia statycznego płyt ściskanych promieniowo na brzegu wewnętrznym występuje dla $\rho_w = 0{,}4$ lub 0,5,
- spadek intensywności (prędkości) narastania obciążeń i wzrost ugięcia początkowego płyt znacznie zmniejsza wartość ich krytycznych obciążeń dynamicznych,

– krótkie, liniowe w czasie obciążanie, jako typ obciążenia quasi-impulsowego, nie zmienia wartości obciążeń krytycznych płyt trójwarstwowych z rdzeniem lepkosprężystym o wysokiej wartości stałej lepkości jego materiału, wyznaczonych dla podobnych płyt z rdzeniem sprężystym:
  - dopiero kilkukrotne zmniejszenie rzędu wartości stałej lepkości przyjętego materiału pianki poliuretanowej rdzenia, opisanego modelem standardowym ośrodka liniowo lepkosprężystego, skraca czas do utraty stateczności dynamicznej płyty,
  - działanie stałego w czasie obciążenia wywołuje wzrost ugięć płyt z rdzeniem lepkosprężystym,
– maksymalne wartości naprężeń krytycznych w warstwach płyt dwustronnie utwierdzonych i ściskanych promieniowo na brzegu wewnętrznym są bardzo wysokie,
– najniższa, podstawowa wartość częstości drgań własnych płyt dwustronnie utwierdzonych przesuwnie, niezależnie od wartości ich parametrów materiałowych i geometrycznych, odpowiada obrotowosymetrycznej postaci drgań giętnych,
– płyta rozciągana promieniowo na brzegu wewnętrznym traci stateczność w postaci silnie pofalowanej obwodowo m = 7÷12:
  - liczba *m* fal wyboczenia i wartości odpowiadających im krytycznych obciążeń statycznych rosną ze wzrostem sztywności płyty,
  - minimalne wartości obciążeń krytycznych płyt dwustronnie utwierdzonych lub podpartych przegubowo są porównywalne.

9.2. Kierunki kontynuacji badań numerycznych stateczności trójwarstwowych płyt pierścieniowych

Bezpośredni, możliwy kierunek prowadzenia dalszych badań stateczności trójwarstwowych płyt pierścieniowych wynika z zaobserwowanych różnic wartości obciążeń krytycznych modeli MRS i MES płyt z rdzeniem grubym (rozdział 8 pracy). Wyniki obliczeń prowadzone metodą elementów skończonych modeli badanych płyt, w tym szczególnie płyt z cienkimi okładzinami i rdzeniem o wyższej wartości modułu Kirchhoffa, sygnalizują możliwość występowania innych niż quasi-eulerowskich form wyboczenia. Ich szczegółowe zbadanie dla różnych przypadków płyt z rdzeniem grubym wymagałoby rozwinięcia otrzymanego rozwiązania wykorzystującego metodę różnic skończonych do nowej efektywnej jego postaci wyrażonej zmodyfikowaną formą układu równań różniczkowych opisujących ugięcia płyty z grubym rdzeniem, którego deformację poprzeczną opisywałby ogólniejszy hiperboliczny lub paraboliczny związek nieliniowy. Otrzymanie nowego rozwiązania numerycznego istotnie zwiększyłoby uniwersalność rozwiązania zaproponowanego w pracy i zakres poznania zagadnienia.

Oczywistym, koniecznym uzupełnieniem podjętych badań jest uwzględnienie wpływu również obciążeń termicznych działających na reologiczną strukturę płyty, rozwiązując problem dla liniowych, a także nieliniowych poprzecznych zmian temperatury.

Inne możliwe kierunki kontynuacji badań pierścieniowych płyt o strukturze warstwowej, przekładkowej, wynikają z rosnących zainteresowań określonymi dziedzinami nauki, np. dotyczącymi zagadnień termodynamicznych, elektrodynamicznych, a także rozwijanych obecnie magnetosprężystych [3], [119].

Ciągle rośnie również znaczenie idei aktywnego sterowania „pracą” elementu konstrukcyjnego, traktowanego jak tzw. konstrukcja inteligentna, którą jest np. inteligentna płyta z wbudowanymi czy rozłożonymi na jej powierzchni czujnikami, elementami wykonawczymi (np. piezoelektrykami, materiałami z pamięcią kształtu), elementami układu sterowania, zasilania, zwiększającymi np. efektywność tłumienia drgań [3], [108]. Poprawę efektu tłumienia drgań może spełniać także elektroreologiczny czy magnetoreologiczny materiał rdzenia płyty, którego lepkie właściwości uaktywnia działanie pola elektrycznego czy magnetycznego. Przykładowymi, wybranymi pracami prezentującymi rozwiązania zagadnienia drgań płyt pierścieniowych wzbogaconych o wymienione elementy są publikacje [107], [120]. Stosunkowo mało skomplikowana modyfikacja przedstawionych w pracy związków fizycznych lepkosprężystego materiału rdzenia do opisu związków dla tzw. cieczy elektroreologicznej pozwoliłaby na szybkie uzyskanie rozwiązań dla pokrewnej struktury płyty i tego samego zagadnienia stateczności.

Kierunek kontynuacji badań stanów krytycznych analizowanych płyt może wyznaczać również złożona z wielu pierścieniowych elementów poprzeczna struktura płyty. Płytę taką określa się mianem płyty wielopierścieniowej. Na rosnące, praktyczne, inżynierskie zainteresowanie takim elementem konstrukcyjnym, zwracają uwagę autorzy pracy [24].

10. Literatura

[1] AMATO A.J., EBCIOGLU I.K.: Axisymmetric buckling of annular sandwich panels, Technical Notes, AIAA Journal, 10, 10, 1351-1353, 1972.

[2] ARI-GUR J., SIMONETTA S.R.: Dynamic pulse buckling of rectangular composite plates, Composites Part B, 28B, 301-308, 1997.

[3] AWREJCEWICZ J., ANDRIANOV I.V.: Płyty i powłoki w przyrodzie, mechanice i biomechanice, WNT, Warszawa 2001.

[4] BUDIANSKY B.: Post-buckling behavior of cylinders in torsion, in Theory of Thin Shells, Edited by Niordson F.I., Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 212-233, 1969.

[5] BUDIANSKY B.: Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures, in Advances in Applied Mechanics, Edited by Yih CH, vol. 14, Academic Press, New York, San Francisco, London 1974.

[6] BUDIANSKY B.: On the minimum weights of compression structures, Int. J. Solids Structures, 36, 3677-3708, 1999.

[7] BUDIANSKY B., AMAZIGO J.: Initial post-buckling behavior of cylindrical shells under external pressure, Journal of Mathematics & Physics, 47(3), 223-235, 1968.

[8] BUDIANSKY B., ROTH R.S.: Axisymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells, NASA Technical Notes D-1510, 597-606, 1962.

[9] CHEN YR, CHEN LW: Axisymmetric parametric resonance of polar orthotropic sandwich annular plates, Composite Structures, 65, 269-277, 2004.

[10] CHEN YR, CHEN LW: Vibration and stability of rotating polar orthotropic sandwich annular plates with a viscoelastic core layer, Composite Structures, 78, 45-57, 2007.

[11] CHEN YR, CHEN LW, WANG CC: Axisymmetric dynamic instability of rotating polar orthotropic sandwich annular plates with a constrained damping layer, Composite Structures, 73(2), 290-302, 2006.

[12] CHRISTENSEN R.M.: Theory of Viscoelasticity and Introduction, Academic Press, New York and London, 1971.

[13] CHRZANOWSKI M.: Reologia ciał stałych, Skrypt Politechniki Krakowskiej, Kraków 1995.

[14] DERSKI W., ZIEMBA S.: Analiza modeli reologicznych, IPPT PAN, PWN, Warszawa 1968.

[15] DUMIR P.C., DUBE G.P., MALLICK A.: Axisymmetric postbuckling of moderately thick laminated annular plate using FSDT, Composite Structures, 51, 3, 311-318, 2001.

[16] DUMIR P.C., JOSHI S, DUBE G.P.: Geometrically nonlinear axisymmetric analysis of thick laminated annular plate using FSDT, Composites: Part B, 32, 1-10, 2001.

[17] DUMIR P.C., KHATRI K.N.: Nonlinear axisymmetric static and transient analysis of orthotropic thin tapered annular plates, Int. J. Solids Structures, 22, 5, 467-483, 1986.

[18] DUMIR P.C., SHINGAL L.: Nonlinear axisymmetric static and transient analysis of orthotropic thick annular plates, Ingenieur-Archiv, Springer-Verlag, 55, 413-420, 1985.

[19] DUMIR P.C., SHINGAL L.: Axisymmetric postbuckling of orthotropic thick annular plates, Acta Mechanica, 56, 229-242, 1985.

[20] ERICH F.R.: Rheology. Theory and Applications, Academic Press Inc., New York, 1956.

[21] FINDLAY W.N., LAI J.S., ONARAN K.: Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity, New York, North Holland Publishing Company-Amsterdam, 1976.

[22] FLÜGGE W.: Handbook of Engineering Mechanics, New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1962.

[23] FORTUNA Z., MACUKOW B., WĄSOWSKI J.: Metody numeryczne, WNT, Warszawa 2005.

[24] GREENBERG J.B., STAVSKY Y.: Axisymmetric vibrations of concentric dissimilar orthotropic composite annular plates, Journal of Sound and Vibration, 254(5), 849-865, 2002.

[25] GRIGOLYUK É.I., MAGERRAMOVA L.A.: The stability of annular sandwich plates, International Applied Mechanics, 19, 9, 795-800, 1983.

[26] GRYBOŚ R.: Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym, Warszawa-Poznań, PWN, 1980,

[27] HE LW, CHENG CJ: The buckled states of annular sandwich plates, Applied Mathematics and Mechanics, 13, 7, 623-628, 1992.

[28] HIBBITT, KARLSSON AND SORENSEN, INC.: ABAQUS/Standard. Example Problems Manual, version 5.6, 1996.

[29] HIBBITT, KARLSSON AND SORENSEN, INC.: ABAQUS/Standard. User's Manual, version 6.1, 2000,

[30] HOFF J.: Buckling and stability, Journal of the Royal Aeronautical Society, 58, 3-52, 1954.

[31] HOP T.: Konstrukcje warstwowe, Warszawa, Arkady, 1980,

[32] HUTCHINSON J.W.: Initial post-buckling behavior of toroidal shell segments, Int. J. Solids and Structures, 3, 97-115, 1967.

[33] HUTCHINSON J.W.: Buckling and initial postbuckling behavior of oval cylindrical shells under axial compression, Journal of Applied Mechanics, 35, 66-72, 1968.

[34] HUTCHINSON J.W., BUDIANSKY B.: Dynamic buckling estimates, AIAA Journal, 4, 3, 525-530, 1966.

[35] HUTCHINSON J.W, HE M.Y.: Buckling of cylindrical sandwich shells with metal foam cores, Int.J.Solids and Sructures, 37, 46-47, 6777-6794, 2000,

[36] JOHNSON C.D., KIENHOLZ D.A., ROGERS L.C.: Finite element prediction of damping in beams with constrained viscoelastic layers, Shock and Vibration Bulletin, 41, 1, 71-81, 1981.

[37] KLEIBER M., KOTULA W. SARAN M.: Numerical analysis of dynamic quasi-bifurcation, Eng. Comput., 4, 1987.

[38] KLUESENER M.F., DRAKE M.L.: Mathematical Modelling. Damped Structure Design Using Finite Element Analysis, Shock and Vibration Bulletin, 52, 1-12, 1982.

[39] KOWAL-MICHALSKA K.: praca zbiorowa: Stateczność dynamiczna kompozytowych konstrukcji płytowych, WNT, Warszawa 2007.

[40] KRIZHEVSKY G, STAVSKY Y.: Refined theory for vibrations and buckling of laminated isotropic annular plates, International Journal of Mechanical Sciences, 38(5), 539-555, 1996.

[41] KRÓLAK M.: praca zbiorowa: Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich, PWN, Warszawa 1990.

[42] KUBIAK T.: Kryterium stateczności dla konstrukcji cienkościennych obciążonych impulsowo, XI Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane, 11-15. 09. 2006, 227-234.

[43] KUBIAK T.: Interakcyjne wyboczenie dynamiczne cienkościennych słupów, ZN Politechniki Łódzkiej, nr 998, Praca habilitacyjna, 2007.

[44] KUBIK J.: Mechanika konstrukcji warstwowych, Wydawnictwo TiT, Opole 1993.

[45] KUNUKKASSERIL V.X., VENKATESANS.: Axisymmetric non-linear oscillations of isotropic layered circular plates, Journal of Sound and Vibration, 64(2), 295-302, 1979.

[46] LEE D., WAAS A.M.: Stability analysis of a rotating multi-layer annular plate with a stationary frictional follower load, Int. J. Mech. Sci., 39, 10, 1117-1138, 1997.

[47] LEGRAS J.: Praktyczne metody analizy numerycznej, WNT, Warszawa 1974.

[48] LEISSA A.W.: A review pf laminated composite plate buckling, Appl. Mech. Rev., 40, 5, 575-591, 1987.

[49] LIN CC, TSENG CS: Free-vibration of polar orthotropic laminated circular and annular plates, Journal of Sound and Vibration, 209(5), 797-810, 1998.

[50] MAJEWSKI S., MAĆKOWSKI R.: Pełzanie spienionych tworzyw sztucznych stosowanych jako rdzeń płyt warstwowych, Inżynieria i Budownictwo, 3, 127-131, 1975.

[51] MARKUŠ Š., NÁNÁSI T.: Significance of in-plane forces in the vibration analysis of three-layered circular plates, Journal of Sound and Vibration, 76(3), 421-441, 1981.

[52] NORMA, PN-84/B-03230: Lekkie ściany osłonowe i przekrycia dachowe z płyt warstwowych i żebrowych. Obliczenia statyczne i projektowanie, Wydawnictwo Normalizacyjne „Alfa", Warszawa 1985.

[53] PAWICKI Z.: Zagadnienie stateczności płyt pierścieniowych na sprężystym podłożu w ujęciu nieliniowym przy obciążeniach statycznych i dynamicznych, Praca doktorska, Politechnika Łódzka Filia w Bielsku-Białej, 1991.

[54] PAWLUS D.: Zachowanie pierścieniowych płyt lepkosprężystych przy obciążeniach zmiennych, Praca doktorska, Politechnika Łódzka Filia w Bielsku-Białej, 1996.

[55] PAWLUS D.: The behaviour of ring-shaped viscoelastic plate. Proceedings of the International Colloquium of IASS Polish Chapter on Lightweight Structures in Civil Engineering, Warsaw, Poland, 30 November-4 December 1998, 152-157.

[56] PAWLUS D.: Numerical solutions of deflections of linear viscoelastic annular plates under lateral variable loads, Machine Dynamics Problems, 24(3), 93-112, 2000,

[57] PAWLUS D.: Homogeneous and sandwich elastic and viscoelastic annular plates under lateral variable loads, Proceedings of the Third International Conference on

Thin-Walled Structures, Cracow, Poland, 5-7 June 2001, Elsevier Science, 2001, 515-522.

[58] PAWLUS D.: Three-layered annular plate under lateral variable loads, Proceedings of the International IASS Symposium on Lightweight Structures in Civil Engineering, Warsaw, Poland, 24-28 June, 2002, 308-313.

[59] PAWLUS D.: Obliczenia pierścieniowych płyt warstwowych poddanych obciążeniom w ich płaszczyźnie, II Sympozjum Kompozyty. Konstrukcje warstwowe, Wrocław-Karpacz, 7-9 listopada 2002, 189-198.

[60] PAWLUS D.: Obliczenia statycznych obciążeń krytycznych trójwarstwowych, osiowosymetrycznych płyt pierścieniowych, Czasopismo Techniczne, 6-M/2002, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 71-86, 2002.

[61] PAWLUS D.: Zachowanie trójwarstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem lepkosprężystym poddanych ściskającym obciążeniom dynamicznym, Czasopismo Techniczne, 6-M/2002, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 87-105, 2002.

[62] PAWLUS D.: Krytyczne obciążenia statyczne trójwarstwowych płyt pierścieniowych. X Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane 8-12 September 2003, 353-358.

[63] PAWLUS D.: Obliczenia metodą elementów skończonych krytycznych obciążeń statycznych trójwarstwowych płyt pierścieniowych, Czasopismo Techniczne, 6-M/2003, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, 137-150, 2003.

[64] PAWLUS D.: Calculations of three-layered annular plates under lateral loads, Studia Geotechnica et Mechanica, XXV(3-4), 89-109, 2003.

[65] PAWLUS D.: Obliczenia metodą elementów skończonych trójwarstwowych płyt pierścieniowych poddanych obciążeniom w ich płaszczyźnie, III Sympozjum Kompozyty. Konstrukcje warstwowe, Wrocław-Karpacz, 4-6 listopada 2004, 119-128.

[66] PAWLUS D.: Critical loading of three-layered annular. Proceedings of the International Colloquium of IASS Polish Chapter on Lightweight Structures in Civil Engineering, Warsaw, Poland, 12-14 September 2005, 308-313.

[67] PAWLUS D.: Dynamic stability problem of three-layered annular plate under lateral time-dependent load, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 43, 2, 385-403, 2005.

[68] PAWLUS D.: Solution to the static stability problem of three-layered annular plates with a soft core, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 44, 2, 299-322, 2006.

[69] PAWLUS D.: Critical static loads calculations in finite element method of three-layered annular plates, Archives of Civil and Mechanical Engineering, VII, 1, 21-33, 2007.

[70] PAWLUS D.: Some remarks about modelling of annular three-layered plate structure. In: Proceedings of the 8^{th} Int. Conf. on Computational Science ICCS, Cracow, Poland, June 23-25 2008, LNCS 5101, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008, 689-699.

[71] PAWLUS D.: Approach to evaluation of critical static loads of annular three-layered plates with various core thickness, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 46, 1, 85-107, 2008.

[72] PAWLUS D.: Dynamic stability of three-layered annular plates with viscoelastic core, The Archive of Mechanical Engineering, LV, 1, 27-55, 2008.

[73] PAYDAR N.: Axisymmetric buckling of an annular sandwich plate of varying thickness, Composite Structures, 15, 149-159, 1990,

[74] PETRY D., FAHLBUSCH G.: Dynamic buckling of thin isotropic plates subjected to in-plane impact, Thin-Walled Structures, 38, 267-283, 2000,

[75] PIETRZAK J., RAKOWSKI G., WRZEŚNIOWSKI K.: Macierzowa analiza konstrukcji, PWN, Warszawa 1986.

[76] PINDERA J.T.: Reologiczne własności materiałów modelowych, WNT, Warszawa 1962.

[77] PIPKIN A.C.: Lectures on Viscoelasticity Theory, Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Vol. 7, 1972.

[78] PLANTEMA F.J.: Sandwich construction. The bending and buckling of sandwich beams, plates and shells, New York: J. Wiley&Sons, Inc., 1966.

[79] RALSTON A.: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa 1975.

[80] RAMMERSTORFER F.G., DORNINGER K., STARLINGER A.: Composite and Sandwich Shells in Nonlinear Analysis of Shells by Finite Elements (ed. F.G. Rammerstorfer), Springler-Verlag, Wien, 131-194, 1992.

[81] REDDY J.N., PHAN N.D.: Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory, Journal of Sound and Vibration, 98(2), 157-170, 1985.

[82] REN J.G., HINTON E.: The finite element analysis of homogeneous and laminated composite plates using a simple higher order theory, Communications in Applied Numerical Methods, 2, 217-228, 1986.

[83] ROMANÓW F., STRICKER L., TEISSEYRE J.: Stateczność konstrukcji przekładkowych. Politechnika Wrocławska, Wrocław 1972.

[84] ROMANÓW F.: Wytrzymałość konstrukcji warstwowych, WSI w Zielonej Górze, 1995.

[85] ROY P.K., GANESAN N.: A vibration and damping analysis of circular plates with constrained damping layer treatment, Computers&Structures, 49, 2, 269-274, 1993.

[86] SHARMA A., SHARDA H.B., NATH Y.: Stability and vibration of thick laminated composite sector plates, Journal of Sound and Vibration 287, 1-23, 2005.

[87] SHAW D., SHEN Y.L. AND TAI PU: Dynamic buckling of an imperfect composite circular cylindrical shell, Computers & Structures, 48, 3, 467-472, 1993.

[88] SHIMIZU S., KANEMATSU W.: A parametric study tension buckling of plates having hole, Archives of Civil Engineering, 49, 3, 387-398, 2003.

[89] SIMITSES G.J.: Effect of static preloading on the dynamic stability o structures, AIAA Journal, 21, 8, 1174-1180, 1983.

[90] SIMITSES G.J.: Instability of dynamically-loaded structures, Applied Mechanics Reviews, 40, 10, 1403-1408, 1987.

[91] SIMITSES G.J.: Dynamic stability of suddenly loaded structures, Springer-Verlag, New York Inc., 1990,

[92] SKRZYPEK J.: Plastyczność i pełzanie, Warszawa, PWN, 1986.

[93] SOBOTKA Z.: Reologie hmot a konstrukcí (w języku czeskim), Academia Praha, 1981.

[94] SRINIVASAN R.S., MURALIDHARAN P., RAMACHANDRA L.S.: Axisymmetric parametric stability of composite annular plates, Journal of Sound and Vibration, 140 (2), 175-180, 1990,

[95] SRINIVASAN R.S., RANGANATH D., THIRUVENKATACHARI V.: Vibration analysis of composite annular plates by an integral equation technique, Journal of Sound and Vibration, 95 (2), 143-150, 1984.

[96] STAMM K., WITTE H.: Mnogosłojnyje konstrukcji (w języku rosyjskim), Moskwa, 1983.

[97] STOER J., BULIRSCH R.: Wstęp do analizy numerycznej, PWN, Warszawa 1987.

[98] SZMELTER J., DACKO M., DOBROCIŃSKI S., WIECZOREK M.: Metoda elementów skończonych w statyce konstrukcji, Arkady, Warszawa 1979.

[99] SZMELTER J.: Metody komputerowe w mechanice, PWN, Warszawa 1980.

[100] SZYC W., TWARDOSZ F.: Dynamiczna stateczność trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej poddanej ścinaniu, Archiwum Budowy Maszyn, XXIV, 1, 57-67, 1977.

[101] TANOV R.: A Contribution to the Finite Element Formulation for the Analysis of Composite Sandwich Shells, Ph.D. Thesis, University of Cincinnati, 2000,

[102] TANOV R., TABIEI A.: Static and Dynamic Buckling of Laminated Composite Shells, Proceedings of the 5-th International LS-DYNA Users Conference, South Field, MI, Sept. 1998.

[103] TROMBSKI M.: Zagadnienie płyt pierścieniowych o ortotropii cylindrycznej w ujęciu nieliniowym, ZN Politechniki Łódzkiej, Zeszyt 32, Praca habilitacyjna, 1972.

[104] TROMBSKI M., WOJCIECH S.: Płyta pierścieniowa o ortotropii cylindrycznej obciążona w swej płaszczyźnie ciśnieniem zmiennym w czasie, The Archive of Mechanical Engineering, XXVII (2), 161-181, 1981.

[105] TURVEY G.J.: On the yielding of bimetallic disks, Computers & Structures, 14, 1-2, 1-8, 1981.

[106] TURVEY G.J.: Axisymmetric elastic large deflection analysis of composite circular plates, Fibre Science and Technology, 16, 191-217, 1982.

[107] TYLIKOWSKI A.: Control of circular plate vibrations via piezoelectric actuators shunted with a capacitive circuit, Thin-Walled Structures, 39, 83-94, 2001.

[108] TYLIKOWSKI A.: Aktywne kompozyty, II Sympozjum Kompozyty. Konstrukcje warstwowe, Wrocław-Karpacz, 7-9 listopada 2002, 225-234.

[109] WOLMIR A.S.: Ustojcziwost deformirujemych sistem (w języku rosyjskim), Nauka, Moskwa 1967.

[110] WOLMIR A.S.: Nieliniejnaja dinamika płastinok i obłoczek (w języku rosyjskim), Nauka, Moskwa 1972.

[111] WANG HJ, CHEN LW.: Vibration and damping analysis of a three-layered composite annular plate with a viscoelastic mid-layer, Composite Structures, 58, 563-570, 2002.

[112] WANG HJ, CHEN LW.: Axisymmetric dynamic stability of sandwich circular plates, Composite Structures, 59, 99-107, 2003.

[113] WANG HJ, CHEN LW.: Axisymmetric dynamic stability of rotating sandwich circular plates, Journal of Vibration and Acoustics, 126, 407-415, 2004.

[114] WANG HJ, CHEN YR, CHEN LW.: Finite element dynamic analysis of rotating orthotropic sandwich annular plates, Composite Structure, 62, 2, 205-212, 2003.

[115] WELLER T., ABRAMOVICH H., YAFFE R.: Dynamic buckling of beams and plates subjected to axial impact, Computers & Structures, 32, 3/4, 835-851, 1989.

[116] WILKINSON J.H., REINSCH C.: Linear Algebra, Handbook for Automatic Computation, Berlin, Vol. II, 1971.

[117] WOJCIECH S.: Stateczność dynamiczna ortotropowej płyty pierścieniowej obciążonej w swej płaszczyźnie ciśnieniem zmiennym w czasie, Praca doktorska, Politechnika Lódzka, 1978.

[118] WOJCIECH S.: Numeryczne rozwiązanie zagadnienia stateczności dynamicznej płyt pierścieniowych, Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2(17), 247-262, 1979.

[119] WOŹNIAK CZ. praca zbiorowa: Mechanika techniczna tom VIII, mechanika sprężysta płyt I powłok, Wydawnictwo Naukowe, PWN, Warszawa 2001.

[120] YEH JY: Vibration control of a sandwich annular plate with an electrorheological fluid core layer, Smart Materials and Structures, 16, 837-842, 2007.

[121] YU SC, HUANG SC.: Vibration of a three-layered viscoelastic sandwich circular plate, International Journal of Mechanical Sciences, 43, 2215-2236, 2001.

[122] ZIENKIEWICZ O.C.: Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1972.

Summary

Dynamic stability of three-layered annular plates with viscoelastic core

The solution of the layered, in this work three-layered, annular plates leading to the evaluation of their critical loads is very often limited to the solution of the special case of plates with the axially-symmetrical form of buckling. The possibility of the loss of plate stability, particularly for plates loaded on the outer perimeter, in the form of several or even a dozen or so circumferential waves corresponding to the minimal value of plate critical load requires realization of the complex, general solution of the problem with using the numeric methods. The solution based on the approximate methods: orthogonalization and discretization with finite differences for three-layered plate structure composed of geometrically nonlinear, thin outer layers and soft, thicker core with viscoelastic properties is presented in this work. Obtained values of critical, static loads of plates and the time histories of maximum plate deflections are the results of calculations. The critical values of time, load and deflection, which determine the dynamic response of examined plate have been denoted for the accepted criterion of the loss of plate dynamic stability. The detailed analysis of plates critical behaviours have been conducted for various plate parameters, like: geometrical, material, connected with the load and initial shape imperfections. Among other things, one can take notice of the observed cases of decrease in the values of critical, dynamic loads below the values of critical static loads of plates.

The results of calculations of plate models built by means of finite element method using the ABAQUS system complement the leaded analysis. The mean of FEM model building has been presented. The division of material properties in plate transverse structure and different participation of component layers (facings and core) in carrying the normal and shearing loads have been included in modelling. The exemplary FEM calculations confirm the results obtained using the finite difference method but some changes in the buckling forms of FEM plate models have been observed. The importance of stress analysis in complex evaluation of examined plates has been noticed. Comparing the calculation results of two methods: finite difference and finite element for plates with various core thickness, the

comments on calculations for plates with thick core have been presented. Results show the consistency of values of critical loads for plates with medium core thickness. The differences are observed for plates with thick core. The existence of the other than global forms of buckling with lower values of critical loads for plates with thick core has been indicated.

The final remarks and conclusions in the recapitulation of work create the practical view of stability behaviours of analysed plates. The whole of undertaken investigations, which are presented in this work, could be the important complement to continually studying problems of plate stability.

Charakterystyka zawodowa autora

Dorota Pawlus ukończyła z wyróżnieniem studia na Wydziale Budowy Maszyn Filii Politechniki Łódzkiej w Bielsku-Białej w 1989 roku, uzyskując tytuł magistra inżyniera mechanika o specjalności technologia maszyn. Praca dyplomowa, pt.: „Zastosowanie metody ATD do oceny przebiegu procesu krystalizacji siluminów" uzyskała nagrodę I stopnia w konkursie prac dyplomowych „Krzepnięcie i krystalizacja", przyznaną przez Komisję Odlewnictwa PAN. W tym samym roku rozpoczęła pracę na stanowisku specjalisty konstruktora w Przedsiębiorstwie Doświadczalno-Produkcyjnym Dźwigów Samochodowych „Bumar-Bedes" w Bielsku-Białej. W przedsiębiorstwie brała udział w pracach projektowych dotyczących hydrauliki części nadwozia i podwozia żurawi samochodowych i pracach obliczeniowych z zakresu wytrzymałości i stateczności. Jednocześnie w roku akademickim 1989/90 w ramach pracy zleconej prowadziła ćwiczenia audytoryjne z wytrzymałości materiałów na Wydziale Budowy Maszyn Politechniki Łódzkiej Filii w Bielsku-Białej.

Od października 1990 rozpoczęła pracę na stanowisku asystenta w Instytucie Mechaniczno-Konstrukcyjnym Politechniki Łódzkiej Filii w Bielsku-Białej. Pracę naukową rozpoczęła referując na konferencjach prace o problematyce związanej z tematem magisterskiej pracy dyplomowej i zajmując się zagadnieniem stateczności dynamicznej jednorodnej, lepkosprężystej płyty kołowej, a potem pierścieniowej. Prowadziła badania numeryczne zachowań płyt z materiału o właściwościach reologicznych poddanych obciążeniom zmiennym w czasie. Analizy dotyczyły również zagadnień z dziedziny kontynualnej mechaniki uszkodzeń. Uczestniczyła w projekcie badawczym finansowanym przez KBN „Badania podstawowe nad poprawą bezpieczeństwa i skuteczności pracy konstrukcji maszynowych przy obciążeniach dynamicznych". Podsumowaniem badań była obrona z wyróżnieniem pracy doktorskiej na Politechnice Łódzkiej Filii w Bielsku-Białej na temat: „Zachowanie pierścieniowych płyt lepkosprężystych przy obciążeniach zmiennych" i uzyskanie stopnia doktora nauk technicznych, nadanego uchwałą Rady Wydziału Budowy Maszyn Politechniki Łódzkiej 23 maja 1997 roku.

Od czerwca 1997 roku rozpoczęła pracę na stanowisku adiunkta w Katedrze Podstaw Budowy Maszyn (wcześniej do 1992 roku Instytut Mechaniczno-Konstrukcyjny) Politechniki Łódzkiej Filii w Bielsku-Białej (od 1 października

1991 roku Akademia Techniczno-Humanistyczna), gdzie pracuje do teraz. Do 1993 roku utrzymywała stały kontakt z Przedsiębiorstwem Doświadczalno-Produkcyjnym Dźwigów Samochodowych „Bumar-Bedes”, prowadząc głównie obliczenia wytężeniowe i statecznościowe żurawi samochodowych.

Zainteresowania naukowe Doroty Pawlus dotyczą zagadnienia stateczności, szczególnie stateczności dynamicznej płyt pierścieniowych. Konsekwentnie zajmuje się analizą płyt wcześniej jednorodnych, obecnie o strukturze warstwowej, przekładkowej, poddanych obciążeniom dynamicznym działającym w płaszczyźnie płyty. Głównym celem prowadzonych badań było uzyskanie ogólnego rozwiązania analityczno-numerycznego problemu ugięć poprzecznych płyt poddanych zmiennym w czasie obciążeniom. Wynikiem prowadzonych działań naukowych jest ciągle rozwijany i dostosowywany do badanej problematyki własny program autorski. Innym obszarem zainteresowań są obliczenia wytrzymałościowe zagadnień stateczności płyt prowadzone z wykorzystaniem metody elementów skończonych. W prowadzonych analizach numerycznych ważną dziedziną badań było modelowanie reologicznych właściwości materiałów. Opis zachowań materiału o właściwościach zależnych od czasu trwania procesu był przedmiotem częstej analizy w badaniach zarówno materiałów płyt jednorodnych, jak i materiałów warstw w złożonej strukturze płyty. Złożeniem podejmowanych zagadnień: dynamicznego wyboczenia płyt pierścieniowych, reologii materiału i charakterystycznych zachowań struktur przekładkowych jest niniejsza praca. Trójwarstwowa płyta pierścieniowa z rdzeniem reologicznym stała się przedmiotem eksperymentu numerycznego wykorzystującego w badaniach stateczności dynamicznej autorski program obliczeniowy oparty na przybliżonych metodach ortogonalizacji i dyskretyzacji różnicami skończonymi oraz komercyjny program ABAQUS. Obliczenia modelu płyty zbudowanego z elementów skończonych prowadzono w Akademickim Centrum Komputerowym CYFRONET w Krakowie.

Rezultatem dotychczasowej pracy naukowej Doroty Pawlus, po obronie pracy doktorskiej, jest 13 publikacji autorskich, z czego 7 to publikacje w obcojęzycznych czasopismach polskich, 2 w czasopismach zagranicznych należących do tzw. listy filadelfijskiej. Dorota Pawlus wygłosiła 19 referatów na konferencjach międzynarodowych (5) i krajowych.

W ramach działalności dydaktycznej prowadziła wykłady, ćwiczenia audytoryjne, projektowe i laboratoryjne na studiach stacjonarnych i niestacjonarnych, I i II stopnia na kilku kierunkach studiów z przedmiotów: wytrzymałość materiałów, mechanika i wytrzymałość materiałów, mechanika budowli, teoria sprężystości. Prowadziła 16 prac dyplomowych magisterskich i inżynierskich, których tematyka koncentrowała się wokół analiz naprężeniowo-odkształceniowych elementów konstrukcyjnych poddanych zmiennym obciążeniom mechanicznym i termicznym. Przeprowadzone były również badania doświadczalne. Była opiekunem grup studentów na praktykach zawodowych.
W roku 2007 otrzymała nagrodę Rektora Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej za działalność dydaktyczną.
W ramach działalności organizacyjnej obecnie (od września 2008) Dorota Pawlus jest Pełnomocnikiem Dziekana ds. Akredytacji i Jakości Kształcenia. W latach 2005-2008 pełniła funkcję Prodziekana ds. Studenckich na Wydziale Budowy Maszyn i Informatyki. Przewodniczyła pracom Komisji ds. Promocji Wydziału (2006-2008). Wielokrotnie brała udział w pracach Wydziałowej Komisji Rekrutacyjnej. W latach 2002-2005 uczestniczyła w posiedzeniach Rady Wydziału jako przedstawiciel nauczycieli akademickich niebędących samodzielnymi pracownikami nauki.
Za działalność organizacyjną otrzymała nagrody Rektora Akademii Techniczno-Humanistycznej w Bielsku-Białej w latach 2007 i 2008.

ISSN 0137-4834