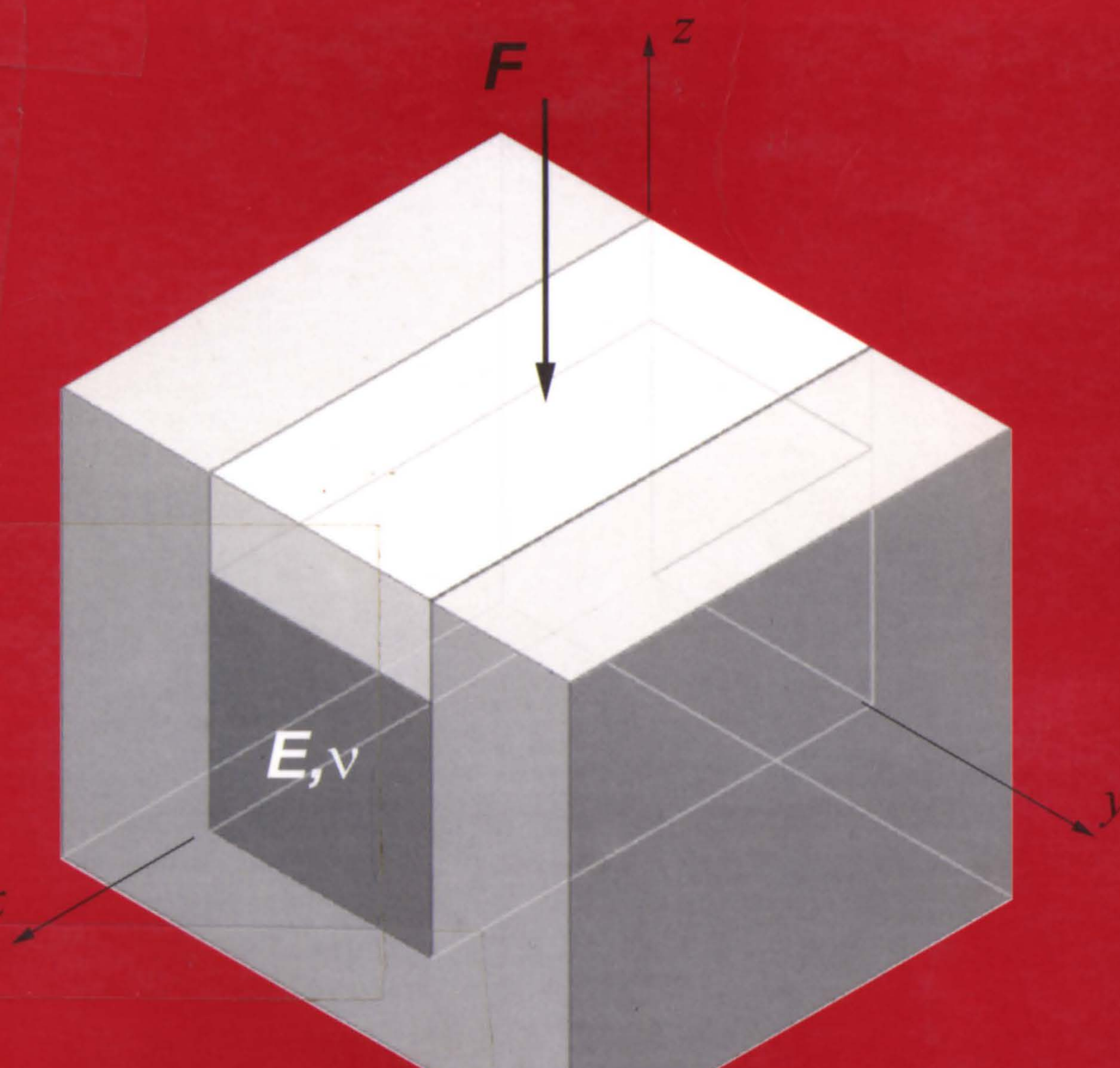
Marian Królak, Tadeusz Gałkiewicz

# ZBIÓR ZADAŃ Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

## Część I




POLITECHNIKA ŁÓDZKA
Łódź 2008

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Marian Królak, Tadeusz Gałkiewicz

# ZBIÓR ZADAŃ Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

## Część I

Łódź 2008

Opiniodawcy: **prof. dr hab. inż. Jerzy Zielnica**

**dr hab. inż. Tadeusz Niezgodziński, prof. PŁ**







Praca dofinansowana przez Dziekana Wydziału Mechanicznego Politechniki Łódzkiej
Prof. dr hab. inż. Piotra Kulę

**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**
**90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223**
**tel./fax 0-42-684-07-93**
**e-mail: a-row-1@adm.p.lodz.pl**
**www.wydawnictwa.p.lodz.pl**

**ISBN 978-83-7283-277-1**

Nakład 350 egz. Ark druk. 13,5. Papier offset. 80 g 70 x 100
Druk ukończono w listopadzie 2008 r.
Wykonano w Drukarni offsetowej WIST, 95-100 Zgierz, ul. Barona 8B
Nr 1810

# SPIS TREŚCI

## Słowo wstępne od autorów

Pierwsza część podręcznika jest przeznaczona dla studentów wszystkich kierunków konstrukcyjnych i technologicznych, wydziałów mechanicznych wyższych szkół technicznych.

Ze względu na pierwszy kontakt studentów z problemami wytrzymałości materiałów i konstrukcji dobierano zadania stosunkowo proste.

Omówiono metodykę i metody rozwiązywania zadań. Duży nacisk położono na precyzyjne sformułowanie treści zadań. Wiele zadań zostało rozwiązanych z bardzo szczegółowym opisem rozwiązań na przykładach liczbowych.

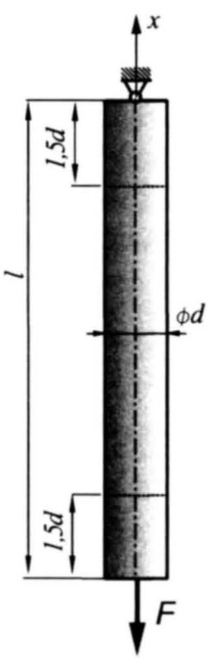
Autorzy uważają, że najprostszą drogą do nauczenia się poprawnego rozwiązywania zadań przez studentów jest samodzielne ich rozwiązywanie, dlatego zamieścili w zbiorze zadań dużą liczbę zadań do samodzielnego rozwiązania, podając końcowe wyniki rozwiązania.

Autorzy planują wydanie drugiej części zbioru zadań z wytrzymałości materiałów przeznaczonego głównie dla studentów kierunków konstrukcyjnych. Przewiduje się zamieszczenie w nim zadań bardziej złożonych, w tym zwłaszcza z wytrzymałości złożonej, belek, ram i łuków statycznie niewyznaczalnych, płyt i powłok oraz stateczności konstrukcji.

# 1. NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W PRĘCIE ROZCIĄGANYM (ŚCISKANYM)

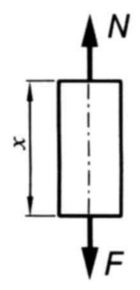
## 1.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia, wzory i definicje

Rozpatrzmy bardzo prosty przypadek pręta o średnicy $d$ (z ang. diameter) o długości $l$ (length) zamocowanego przegubowo na górnym końcu i obciążonego siłą skupioną $F$ (force) na dolnym końcu (rys. 1.1), przyłożoną w środku ciężkości przekroju poprzecznego.




**Rys. 1.1**

Dla uproszczenia ciężar własny pręta pominiemy. Wtedy w dowolnym przekroju poprzecznym pręta działa wewnętrzna siła normalna $N$ (normal force) równa sile obciążającej $F$, co wynika z równowagi sił działających na wydzieloną część pręta, pokazanych na rys. 1.2




**Rys. 1.2**

Zgodnie z zasadą de Saint-Venanta, w przekrojach poprzecznych pręta dostatecznie odległych od punktów przyłożenia sił skupionych (w rozpatrywanym przypadku – w przekrojach odległych o co najmniej 1,5 $d$ od końców pręta) rozkład naprężeń normalnych $\sigma$ (prostopadłych do przekroju poprzecznego) można przyjąć jako równomierny. Naprężenia normalne $\sigma$ oblicza się wtedy ze wzoru

$$\sigma = \frac{N}{A}, \tag{1.1}$$

gdzie $A$ (z ang. area) jest polem powierzchni przekroju poprzecznego pręta. Dla pręta o przekroju kołowym

$$A = \frac{\pi d^2}{4}.$$

W wytrzymałości materiałów najczęściej stosowaną jednostką naprężenia jest megapaskal [$MPa$], czyli meganiuton na metr kwadratowy

$$1\ \mathrm{MPa} = 1\frac{MN}{m^2} = 10^6\frac{N}{m^2} = 1\frac{N}{mm^2}.$$

Na skutek sił rozciągających działających na pręt o długości $l$ następuje przyrost jego długości $\Delta l$. Zgodnie z prawem Hooke'a przyrost długości $\Delta l$ można obliczyć ze wzoru

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E}, \tag{1.2}$$

gdzie $E$ jest modułem Younga (stałą sprężystą materiału pręta). Po wprowadzeniu oznaczenia,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}, \tag{1.3}$$

które jest odkształceniem względnym w kierunku osi pręta, wzór (1.2) można zapisać w postaci

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \tag{1.4}$$

Jest to liniowa zależność między odkształceniem i naprężeniem, zwana prawem Hooke'a.

W trakcie rozciągania rozpatrywanego pręta rośnie jego długość natomiast maleje jego średnica. Zmiana średnicy, w granicach stosowalności prawa Hooke'a, zależy od stałej materiałowej $\nu$, nazywanej najczęściej liczbą lub współczynnikiem Poissona. Wielkość ta jest definiowana jako

$$\nu = -\frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}, \tag{1.5}$$

gdzie $\varepsilon_t = \dfrac{\Delta d}{d}$ jest względnym odkształceniem w kierunku poprzecznym (prostopadłym do osi pręta).

Ze wzoru (1.5) wynika, że

$$\varepsilon_t = -\nu\varepsilon = -\nu\frac{\sigma}{E}, \tag{1.6}$$

a zmiana wymiaru średnicy pręta

$$\Delta d = \varepsilon_t \cdot d = -\nu\frac{\sigma}{E}d.$$

Dla materiałów izotropowych wartość liczby Poissona zawarta jest w przedziale $0 \le \nu \le 0{,}5$. W przypadku stali przyjmuje się $\nu = 0{,}3$.

Warunek bezpiecznego projektowania prętów rozciąganych ze względu na wytrzymałość jest następujący

$$\sigma_{r\max} \le \sigma_{rdop}, \tag{1.7}$$

gdzie $\sigma_{rdop}$ (często oznaczane przez $k_r$) jest naprężeniem dopuszczalnym na rozciąganie dla danego materiału i elementu konstrukcji.

Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie jest definiowane jako

$$\sigma_{rdop} = k_r = \frac{R_e}{n_1} = \frac{R_m}{n_2}, \tag{1.8}$$

gdzie: $R_e$ – granica plastyczności materiału pręta,
$R_m$ – wytrzymałość na rozciąganie,
$n_1, n_2$ – współczynniki bezpieczeństwa (liczby większe od jedności zależne od wielu czynników).

Wielkości $R_e$, $R_m$ są wyznaczane w laboratoriach zgodnie z odpowiednimi Normami. Podane wzory (1.1)÷(1.8) są słuszne dla pryzmatycznych (o stałym przekroju poprzecznym) prętów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego.

W prętach ściskanych wewnętrzna siła normalna N jest ujemna. Przy założeniu, że pręt ściskany nie ulegnie wyboczeniu (nie przejdzie do innej niż prostoliniowa postaci równowagi), można przy analizie jego naprężeń i odkształceń stosować wzory (1.1)÷(1.6), natomiast wzory (1.7) i (1.8) przyjmują postać

$$
\begin{aligned}
&|\sigma_c|_{\max} \le \sigma_{cdop}, \\
&\sigma_{cdop} = k_c = \frac{R_e}{n_1} = \frac{R_c}{n_2},
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

gdzie: $R_e$ – granica plastyczności materiału pręta przy ściskaniu,
$R_c$ – wytrzymałość materiału pręta na ściskanie,
$n_1$, $n_2$ – współczynniki bezpieczeństwa ($n_1 > 1$, $n_2 > 1$),
$\sigma_{cdop} = k_c$ – naprężenia dopuszczalne na ściskanie.

Dla prętów poddanych obciążeniu ciągłemu $q$ równoległemu do osi pręta (w pręcie pionowym np. ciężarowi własnemu) siła normalna $N$, naprężenie $\sigma$, odkształcenie $\varepsilon$ i przemieszczenie $u$ są funkcją współrzędnej $x$, określającej położenie rozpatrywanego przekroju poprzecznego.

W tym przypadku odkształcenia względne $\varepsilon(x)$ i przemieszczenia $u(x)$ przekrojów związane są zależnością

$$
\varepsilon = \frac{du}{dx}. \tag{1.10}
$$

W prętach siła normalna $N$ jest siłą wewnętrzną prostopadłą do przekroju poprzecznego pręta. Aby obliczyć siłę normalną $N$ w dowolnym przekroju pręta, należy dla „odciętej myślowo" części pręta napisać sumę rzutów sił na oś pręta. W sumie rzutów sił uwzględniamy siłę $N$ oraz wszystkie siły zewnętrzne (czynne i bierne) działające po jednej stronie rozpatrywanego przekroju. Siła normalna jest dodatnia, gdy jej zwrot jest na zewnątrz rozpatrywanego przekroju, czyli gdy pręt w rozpatrywanym przekroju jest rozciągany (rys. 1.2).

## 1.2. Przykłady obliczeń pojedynczych prętów rozciąganych i/lub ściskanych

**Zadanie 1.1.** Pręt stalowy o module sprężystości, $E = 2\cdot 10^5\ MPa$, długości $l = 1\ m$ i polu powierzchni przekroju poprzecznego $A = 10^{-4} m^2$ jest rozciągany siłą $F = 10\ kN$. Obliczyć wartość naprężeń $\sigma$ działających w pręcie, odkształcenie względne $\varepsilon$ pręta oraz przyrost długości $\Delta l$. Ciężar własny pręta pominąć.

R o z w i ą z a n i e. Siła normalna $N$ w rozpatrywanym pręcie ma stałą wartość we wszystkich przekrojach i wynosi

$N = F = 10\ kN = 10^{-2}\ MN.$

Naprężenie normalne

$$
\sigma = \frac{N}{A} = \frac{10^{-2}}{10^{-4}} \frac{MN}{m^2} = 100\ MPa.
$$

Odkształcenie względne

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{100 MPa}{2 \cdot 10^5 MPa} = 5 \cdot 10^{-4}.$$

Przyrost długości pręta

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = 5 \cdot 10^{-4} \cdot 1\,m = 0{,}5\,mm.$$

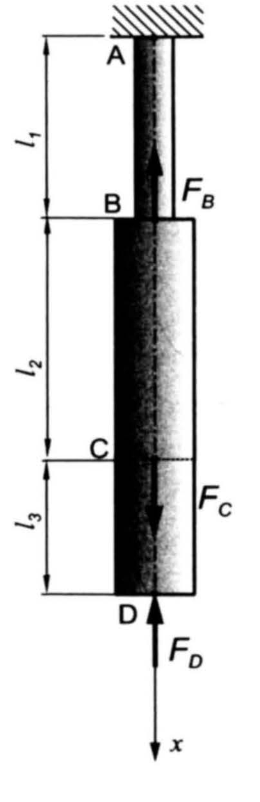
Należy zwrócić uwagę, że przy stosunkowo dużych naprężeniach ($\sigma$ = 100 *MPa*) odkształcenia pręta stalowego są bardzo małe.
Przyrost długości $\Delta l$ stanowi zaledwie 0,05% długości początkowej pręta. Okaże się to bardzo istotne przy określaniu przemieszczeń węzłów kratownic lub układów prętowych.

**Zadanie 1.2.** Pręt o skokowo zmiennym polu powierzchni przekroju poprzecznego jest zamocowany na górnym końcu i obciążony jak pokazano na rys. 1.3. Narysować wykresy sił normalnych $N$ i naprężeń normalnych $\sigma$ oraz obliczyć zmianę długości pręta $\Delta l$. Ciężar własny pręta pominąć. Przyjąć, że części ściskanej pręta wyboczenie nie zagraża.
Dane:

$l_1 = 2a,\ l_2 = 3a,\ l_3 = a = 0{,}2\,m;\ A_1 = 4 \cdot 10^{-4} m^2,\ A_2 = A_3 = 8 \cdot 10^{-4} m^2;$

$F_B = 10\,kN, F_C = 80\,kN, F_D = 20\,kN;$

$E = 2 \cdot 10^5 MPa.$




**Rys. 1.3**

R o z w i ą z a n i e. Pręt trzeba podzielić na trzy przedziały. Granice przedziałów to: początek pręta, zmiana pola powierzchni przekroju poprzecznego, punkt przyłożenia siły oraz koniec pręta. Rozpatrywany pręt jest prętem trójprzedziałowym, a granicami przedziałów są przekroje $A$, $B$, $C$, $D$. Przyjmijmy początek osi $x$ w punkcie $A$ i skierujmy ją do dołu wzdłuż osi pręta. Reakcję $R_A$ oblicza się z sumy rzutów na oś $x$ wszystkich sił działających na cały pręt (rys. 1.4).

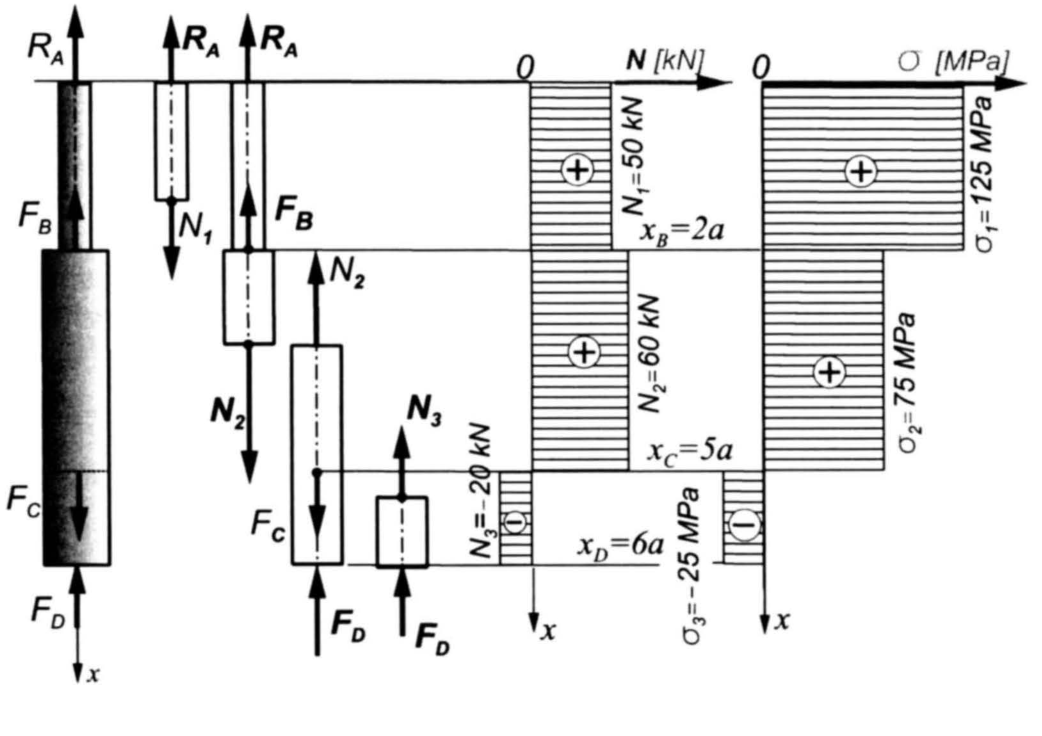
$$\sum F_x \Rightarrow -R_A - F_B + F_C - F_D = 0,$$

$$R_A = -F_B + F_c - F_D.$$

Po podstawieniu danych otrzymano

$$R_A = 50\,kN.$$

Na rysunku 1.4 pokazano części pręta odcięte przekrojami w przedziałach pierwszym $(0 \le x \le 2a)$, drugim $(2a \le x \le 5a)$ i trzecim $(5a \le x \le 6a)$ oraz wykresy sił normalnych $N$ i naprężeń normalnych $\sigma$.




**Rys. 1.4**

Zwroty sił normalnych $N_1, N_2, N_3$ należy rysować zawsze od przekroju, tzn. zakładać dodatnie wartości sił normalnych. Z definicji sił normalnych wynika, że:

$N_1 = R_A = 50\,kN$ dla $0 \le x \le 2a$;

$N_2 = R_A + F_B = 60\,kN$ dla $2a \le x \le 5a$;

$N_3 = -F_D = -20\,kN$ dla $5a \le x \le 6a$.

Ujemna wartość siły $N_3$ oznacza, że pręt w przedziale trzecim jest ściskany. Naprężenia normalne obliczone zgodnie ze wzorem (1.1) wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{50\,kN}{4 \cdot 10^{-4} m^2} = \frac{50 \cdot 10^{-3} MN}{4 \cdot 10^{-4} m^2} = 125\,MPa,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = 75\,MPa$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = -25\,MPa.$$

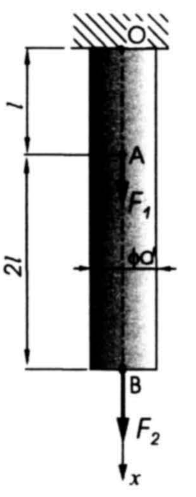
Zmianę długości całego pręta oblicza się jako sumę zmiany długości jego przedziałów (aby można korzystać ze wzoru (1.2) wielkości $N_i$ i $A_i$ muszą być wielkościami stałymi)

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} + \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} + \frac{N_3 \cdot l_3}{EA_3} = \frac{N_1 \cdot 2a}{EA_1} + \frac{N_2 \cdot 3a}{EA_2} + \frac{N_3 \cdot a}{EA_2} =$$

$$= \frac{2\sigma_1 a}{E} + \frac{3\sigma_2 a}{E} + \frac{\sigma_3 a}{E} = 0{,}250\,mm + 0{,}225\,mm - 0{,}025\,mm = 0{,}45\,mm.$$

Wartość $\Delta l > 0$ oznacza, że pręt jako całość wydłużył się (pierwsze dwa przedziały pręta wydłużyły się, a trzeci uległ skróceniu o 0,025 $mm$).

**Zadanie 1.3.** Obliczyć najmniejszą średnicę pręta, obciążonego jak pokazano na rys. 1.5, aby zapewnić bezpieczną jego pracę ze względu na wytrzymałość materiału. Ciężar własny pręta pominąć. Dane liczbowe: $F_1$ = 20 $kN$, $F_2$ = 50 $kN$, $\sigma_{rdop}$ = 150 $MPa$, $E = 2 \cdot 10^5 MPa$, $\nu$ = 0,3. Po obliczeniu i przyjęciu wymiaru średnicy obliczyć jej zmianę spowodowaną obciążeniem pręta.




**Rys. 1.5**

R o z w i ą z a n i e. Przy stałej średnicy pręta maksymalne naprężenie rozciągające występuje w przedziale, w którym działa maksymalna siła normalna. W rozpatrywanym pręcie maksymalna siła normalna $N_{max}$ działa w przedziale $0 \le x \le l$ i wynosi

$$N_{\max} = F_1 + F_2 = 70\,kN\,.$$

Maksymalne naprężenia rozciągające

$$\sigma_{r\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{4N_{\max}}{\pi d^2}\,.$$

Z warunku (1.7) otrzymano

$$\frac{4N_{\max}}{\pi d_2} \le \sigma_{rdop}\,,$$

a zatem

$$d \ge \sqrt{\frac{4N_{\max}}{\pi\sigma_{rdop}}} = \sqrt{\frac{4\cdot 70\cdot 10^{-3}\,MN}{\pi\cdot 150\,MPa}} = 0{,}0244\,m.$$

Przyjęto pręt o średnicy *d = 0,025 m = 25 mm,* gdyż pręty o takiej średnicy produkowane są przez huty. Dla pręta o takiej średnicy naprężenia rozciągające wynoszą:

w przedziale $0 \le x \le l$

$$\sigma_{r\max} = \frac{N_{\max}}{A} = \frac{4N_{\max}}{\pi d^2} = \frac{4(F_1+F_2)}{\pi d^2} = \frac{4\cdot 70\cdot 10^{-3}\,MN}{\pi\cdot(0{,}025\,m)^2} = 142{,}6\,MPa;$$

w przedziale $l \le x \le 3\,l$

$$\sigma_{rz} = \frac{N_2}{A} = \frac{4F_2}{\pi d^2} = \frac{4\cdot 50\cdot 10^{-3}\,MN}{\pi(0{,}025\,m)^2} = 101{,}9\,MPa$$

i są mniejsze od naprężenia dopuszczalnego na rozciąganie $\sigma_{rdop}$ = 150 *MPa.* Zmianę średnicy $\Delta d$ można w rozpatrywanych przedziałach pręta obliczyć ze wzoru (1.6)

$$\Delta d = \varepsilon_t \cdot d = -\nu\frac{\sigma}{E}\cdot d,$$

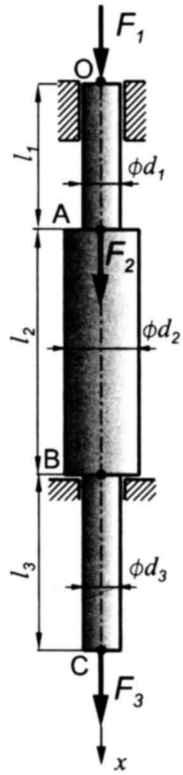
a zatem w rozpatrywanych przedziałach

$$\Delta d_1 = -\,0{,}3\frac{142{,}6\,MPa}{2\cdot 10^5\,MPa}\cdot 0{,}025\,m = -\,0{,}53\cdot 10^{-5}\,m \cong -\,0{,}0053\,mm,$$

$$\Delta d_2 = -\,0{,}3\frac{101{,}9\,MPa}{2\cdot 10^5\,MPa}\cdot 0{,}025\,m = -\,0{,}38\cdot 10^{-5}\,m \cong -\,0{,}0038\,mm.$$

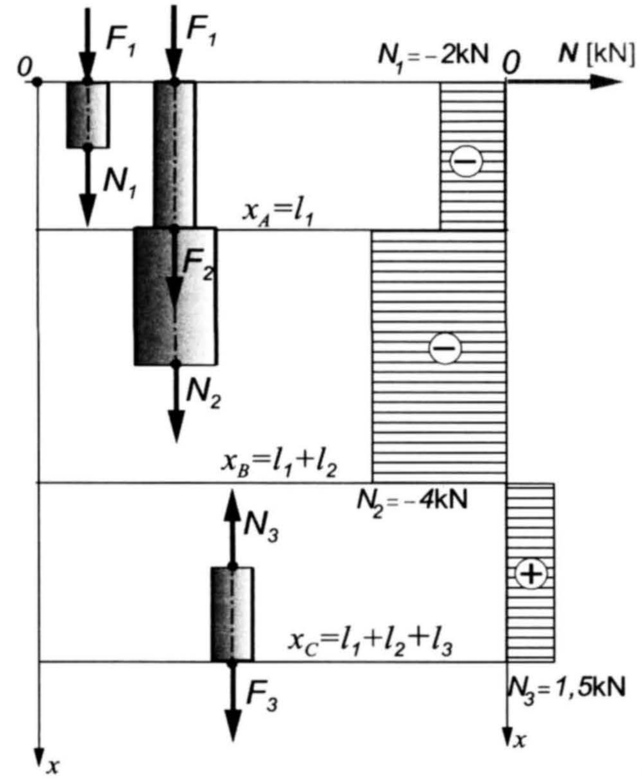
Jak widać, zmiana (zmniejszenie) średnicy pręta jest tak mała, że trzeba użyć bardzo precyzyjnych przyrządów pomiarowych, aby ją zmierzyć.

**Zadanie 1.4.** Dla pręta o skokowo zmiennych średnicach, obciążonego jak pokazano na rys. 1.6, sporządzić wykresy sił normalnych, obliczyć średnice $d_1$, $d_2$, $d_3$ oraz skrócenie odcinka AB. Dane liczbowe: $F_1 = F_2 = 2\,kN$, $F_3 = 1{,}5\,kN$, $\sigma_{rdop} = k_r = 120\,MPa$, $\sigma_{cdop} = k_c = 80\,MPa$, $l_1 = 0{,}2\,m$, $l_2 = 0{,}3\,m$, $l_3 = 0{,}25\,m$, $E = 2\cdot 10^5\,MPa$. Ciężar własny pręta pominąć.




**Rys. 1.6**

R o z w i ą z a n i e. Rozpatrywany pręt jest trójprzedziałowy o długościach przedziałów $l_1, l_2, l_3$. Siły normalne działające w poszczególnych przedziałach obliczono z równań równowagi sił działających na odcięte myślowo elementy pręta pokazane na rys. 1.7. Na rysunku tym pokazano również wykres sił normalnych.




**Rys. 1.7**

Przedział $0 \le x \le l_1$

$$N_1 = -F_1 = -2\,kN,$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{4N_1}{\pi d_1^2}.$$

Z warunku wytrzymałości na ściskanie

$$|\sigma_1| \le \sigma_{cdop},$$

$$|\sigma_1| = \frac{4|N_1|}{\pi d_1^2} \le \sigma_{cdop},$$

otrzymano

$$d_1 \ge \sqrt{\frac{4|N_1|}{\pi \sigma_{cdop}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2 \cdot 10^{-3}\,MN}{\pi \cdot 80\,MPa}} = 5{,}64 \cdot 10^{-3}\,m.$$

Przedział $l_1 \le x \le l_1 + l_2$

$$N_2 = -F_1 - F_2 = -4\,kN,$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{4N_2}{\pi d_2^{\,2}}.$$

Z warunku wytrzymałości na ściskanie otrzymano

$$d_2 \geq \sqrt{\frac{4|N_2|}{\pi \sigma_{cdop}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3} MN}{\pi \cdot 80\, MPa}} = 7{,}98 \cdot 10^{-3} m.$$

Przedział $l_1 + l_2 \leq x \leq l_1 + l_2 + l_3$

$$N_3 = F_3 = 1{,}5\, kN,$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{4N_3}{\pi d_3^2}.$$

W przedziale tym siła normalna jest dodatnia, czyli w tym przedziale pręt jest rozciągany.
Z warunku wytrzymałości na rozciąganie

$$\sigma_3 \leq \sigma_{rdop},$$

otrzymano

$$d_3 \geq \sqrt{\frac{4N_3}{\pi \sigma_{rdop}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-3} MN}{\pi \cdot 120\, MPa}} = 3{,}99 \cdot 10^{-3} m.$$

W praktyce inżynierskiej prawdopodobnie przyjęto by następujące średnice pręta:

$d_1 = 5{,}7\, mm,$

$d_2 = 8{,}0\, mm,$

$d_3 = 4{,}0\, mm.$

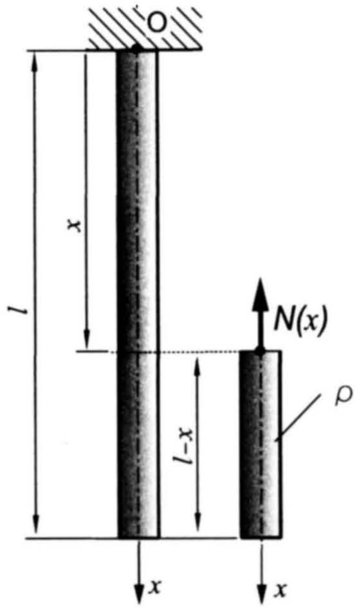
Należy zwrócić uwagę, że przyjęte średnice są większe od obliczonych, aby nierówności $|\sigma_1| \leq \sigma_{cdop}$, $|\sigma_2| \leq \sigma_{cdop}$ i $\sigma_3 \leq \sigma_{rdop}$ były spełnione.
Zmiana długości odcinka AB pręta wynosi

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} = \frac{4(-F_1 - F_2) \cdot l_2}{E\pi d_2^2} = -\frac{4 \cdot 4 \cdot 10^{-3} MN \cdot 0{,}3\, m}{2 \cdot 10^5\, MPa \cdot \pi (8 \cdot 10^{-3} m)^2} \cong -12 \cdot 10^{-5} m = -\,0{,}12\, mm.$$

Równowagę pręta zapewnia reakcja działająca w przekroju przechodzącym przez punkt $B$

$$R_B = F_1 + F_2 + F_3 = 5{,}5\, kN.$$

**Zadanie 1.5.** W wiszącym pionowo pręcie pryzmatycznym obliczyć w przekroju poprzecznym pręta określonym współrzędną $x$ (rys. 1.8): siłę normalną $N(x)$, naprężenie normalne $\sigma(x)$, odkształcenie względne $\varepsilon(x)$, przemieszczenie pionowe $u(x)$ wywołane jego ciężarem własnym. Pręt o polu powierzchni przekroju poprzecznego $A$ = const i długości $l$ (rys. 1.8) jest wykonany z materiału o module sprężystości $E$ i gęstości $\rho$.




**Rys. 1.8**

R o z w i ą z a n i e. Ciężar właściwy materiału pręta $\gamma = \rho \cdot g$. Ciężar odciętej (dolnej) części pręta o objętości $V(x) = A(l - x)$ wynosi

$G(x) = V(x)\,\gamma = A\,\rho\, g\,(l - x)$.

Siła normalna w przekroju pręta określonym współrzędną x jest równa

$N(x) = G(x) = A \cdot \rho \cdot g\,(l - x)$.

Naprężenie normalne w tym przekroju wynosi

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A} = \rho \cdot g(l - x).$$

Odkształcenie względne

$$\varepsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{\rho g}{E}(l - x).$$

Przemieszczenie $u(x)$ oblicza się z równania (1.10)

$$\frac{du}{dx} = \frac{\rho g}{E}(l - x),$$

$$u(x) = \int \frac{\rho g}{E}(l - x)dx = \frac{\rho g}{E}(lx - \frac{x^2}{2}) + C.$$

Z warunku brzegowego $u(0) = 0$ wynika, że stała całkowania $C = 0$, a zatem

$$u(x) = \frac{\rho g}{E}(l - \frac{x}{2})x.$$

Największe naprężenie $\sigma$ i odkształcenie $\varepsilon$ występują w przekroju poprzecznym określonym współrzędną $x = 0$ i wynoszą:

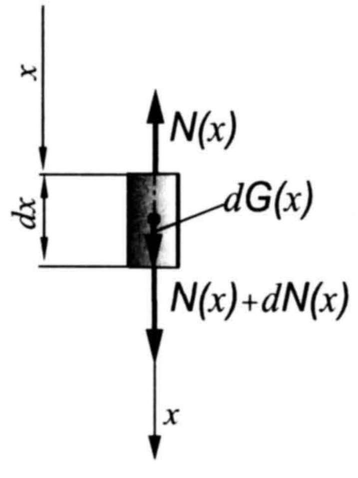
$$\sigma_{r\max} = \rho g l,$$

$$\varepsilon_{\max} = \frac{\rho g}{E} l.$$

Maksymalnego przemieszczenia doznaje dolny koniec pręta ($x = l$) i przemieszczenie to wynosi

$$u(l) = \Delta l = \frac{\rho g l^2}{2E}.$$

Siłę normalną w rozpatrywanym pręcie można obliczyć w inny sposób, wychodząc z równowagi sił elementu pręta o długości d$x$ (rys. 1.9)




**Rys. 1.9**

$$\sum F_x \Rightarrow -N(x) + dG(x) + N(x) + dN(x) = 0,$$
$$dN(x) = -dG(x),$$
$$dG(x) = \gamma \cdot dV(x) = \gamma \cdot A \cdot dx = \rho g A dx,$$
$$dN(x) = -\rho \cdot g \cdot A dx,$$
$$\frac{dN(x)}{dx} = -\rho \cdot g \cdot A,$$

$$N(x) = \int (-\rho g A) dx,$$

$$N(x) = -\rho g A \cdot x + C.$$

Z warunku brzegowego $(N)_{x=l} = N(l) = 0$ otrzymano

$$C = \rho\, g\, A\, l$$

a zatem

$$N(x) = \rho\, g\, A\, (l - x).$$

W prętach obciążonych siłami zewnętrznymi $F_i$ i ciężarem własnym, skutki działania tych obciążeń w postaci naprężeń, odkształceń i przemieszczeń można obliczać, stosując zasadę superpozycji. Zasadę superpozycji, zwaną zasadą niezależności działania obciążeń, wolno stosować dla układów liniowo sprężystych (liniowa zależność między $\sigma$ i $\varepsilon$) oraz dla małych przemieszczeń (liniowa zależność między $\varepsilon$ i $u$). Zasada superpozycji pozwala zamiast łącznego badania kilku obciążeń, badać oddzielnie działanie każdego z tych obciążeń, a otrzymane wyniki rozwiązania tych samych wielkości w tym samym punkcie sumować algebraicznie. Na przykład naprężenie w pręcie wywołane siłą zewnętrzną $F$ i ciężarem własnym G wynosi $\sigma = \sigma_F + \sigma_G$.

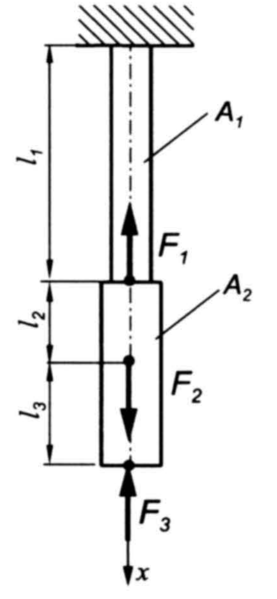
## 1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

**Zadanie 1.6.** Dla pręta o wymiarach:

$l_1 = 3\,m,\;\; l_2 = 1\,m,\;\; l_3 = 1{,}5\,m,$

$A_1 = 2 \cdot 10^{-4}\,m^2,\;\; A_2 = A_3 = 4 \cdot 10^{-4}\,m^2,$

obciążonego siłami: $F_1 = 10\,kN,\; F_2 = 45\,kN,\; F_3 = 5\,kN$, jak pokazano na rys. 1.10, obliczyć: siły i naprężenia normalne w poszczególnych przedziałach, zmianę długości pręta $\Delta l$. Moduł sprężystości pręta $E = 2 \cdot 10^5\,MPa$. Ciężar własny pręta pominąć.




Rys. 1.10

ODPOWIEDŹ:

$N_1 = R = 30\,kN,\ N_2 = 40\,kN,\ N_3 = -5\,kN,$

$\sigma_1 = 150\,MPa,\ \sigma_2 = 100\,MPa,\ \sigma_3 = -12{,}5\,MPa,$

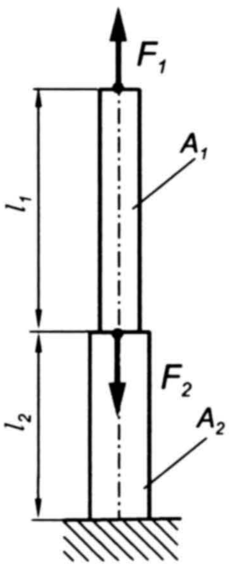
$\Delta l = 2{,}66\,mm.$

**Zadanie 1.7.** Obliczyć pola powierzchni przekroju poprzecznego oraz zmianę długości pręta obciążonego w sposób pokazany na rys. 1.11.
Dane: $F_1 = 15\,kN, F_2 = 30\,kN,$

$\sigma_{rdop} = k_r = 150\,MPa,\ \sigma_{cdop} = k_c = 100\,MPa,$

$l_1 = 1\,m,\ l_2 = 0{,}2\,m,$

$E = 10^5\,MPa.$




**Rys. 1.11**

ODPOWIEDŹ: $A_1 = 10^{-4}\,m^2,\ A_2 = 1{,}5 \cdot 10^{-4}\,m^2,\ \Delta l = 1{,}3\,mm.$

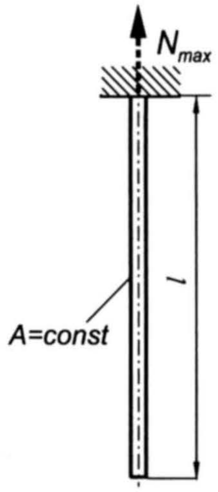
**Zadanie 1.8.** Obliczyć długości wiszącego pionowo drutu stalowego (rys. 1.12), przy których naprężenie wywołane ciężarem własnym drutu:

- osiągnie granicę proporcjonalności,
- spowoduje zerwanie drutu.

Dane materiałowe drutu:

- ciężar właściwy $\gamma = 0{,}0785\,\frac{MN}{m^3}$,
- moduł sprężystości $E = 2 \cdot 10^5\,MPa,$
- granica proporcjonalności $\sigma_{prop} = 200\,MPa,$
- wytrzymałości na rozciąganie $R_m = 470\,MPa.$

Jaki będzie względny $\varepsilon$ i bezwzględny $\Delta l$ przyrost długości drutu przy naprężeniu maksymalnym równym granicy proporcjonalności?




**Rys. 1.12**

ODPOWIEDŹ: $N_{\max} = A \cdot l \cdot \gamma, \quad \sigma_{prop} = l_{prop}\gamma,$

$$l_{prop} = \frac{\sigma_{prop}}{\gamma} = 2548\,m,$$

$$l_{zryw} = \frac{R_m}{\gamma} = 5987\,m,$$

$$\varepsilon_{prop} = \frac{\sigma_{prop}}{E} = 0{,}001,$$

$$\Delta l_{prop} = u(l_{prop}) = \frac{1}{2}\varepsilon_{prop} l_{prop} \cong 1{,}274\,m.$$

**Zadanie 1.9.** Zawieszony pionowo dwuprzedziałowy pręt, zamocowany na górnym końcu, jest obciążony siłą $F$ oraz ciężarem własnym (rys. 1.13). Obliczyć naprężenia w przekrojach A, B i C oraz przyrost długości pręta, mając dane:

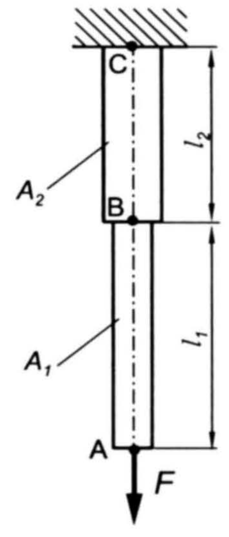
$l_1 = 3\,m, \quad l_2 = 1\,m,$

$A_1 = 10^{-4}\,m^2,$

$A_2 = 2A_1 = 2 \cdot 10^{-4}\,m^2,$

$F = 10\,kN, \quad \gamma = 0{,}0785\,\frac{MN}{m^3},$

$E = 2 \cdot 10^5\,MPa.$




**Rys. 1.13**

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_A = \frac{F}{A} = 100\,MPa,$$

$$\sigma'_B = \frac{F}{A_1} + l_1\gamma = 100{,}24\,MPa,$$

$$\sigma''_B = \frac{F}{A_2} + \frac{A_1}{A_2} l_1\gamma = 50{,}12\,MPa,$$

$$\sigma_C = \frac{F}{A_2} + (\frac{A_1}{A_2} l_1 + l_2)\gamma = 50{,}2\,MPa,$$

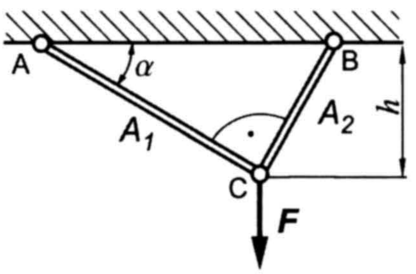
$$\Delta l = \frac{7}{2}\frac{F \cdot l_2}{EA_1} + \frac{13}{2}\frac{l_2^2\gamma}{E} = 1{,}75 \cdot 10^{-3} m + 2{,}55 \cdot 10^{-6} m \cong 1{,}752\,mm.$$

# 2. PŁASKIE UKŁADY PRĘTOWE STATYCZNIE WYZNACZALNE

## 2.1. Przykłady obliczeń układów prętowych statycznie wyznaczalnych

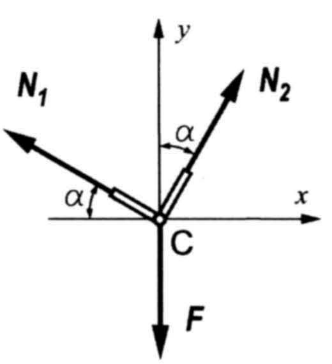
**Zadanie 2.1.** Dwa dwuprzegubowe pręty o osiach do siebie prostopadłych są obciążone w węźle C pionową siłą $F$ (rys. 2.1). Pręt AC tworzy z poziomem kąt $\alpha$. Obliczyć pola powierzchni przekroju poprzecznego prętów wykonanych z tego samego materiału, przy naprężeniach dopuszczalnych na rozciąganie $\sigma_{r\,dop} = k_r$.

Dane liczbowe: $F = 60\,kN$, $\alpha = 30°$, $\sigma_{rdop} = 150\,MPa$.




Rys. 2.1

Rozwiązanie




Rys. 2.2

Z równowagi sił działających w węźle C (rys. 2.2) otrzymano następujące równania:

$$\sum F_x \Rightarrow -N_1 \cos\alpha + N_2 \sin\alpha = 0,$$

$$\sum F_y = N_1 \sin\alpha + N_2 \cos\alpha - F = 0.$$

Po ich rozwiązaniu wyznaczono siły normalne w prętach

$$N_1 = F\sin\alpha,$$
$$N_2 = F\cos\alpha.$$

Naprężenia normalne, stałe na całej długości odpowiedniego pręta, wynoszą

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F\sin\alpha}{A_1},$$
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F\cos\alpha}{A_2}.$$

Naprężenia te muszą być nie większe niż $\sigma_{rdop}$, a zatem

$$\frac{F\sin\alpha}{A_1} \le \sigma_{rdop} \Rightarrow A_1 \ge \frac{F\sin\alpha}{\sigma_{rdop}},$$
$$\frac{F\cos\alpha}{A_2} \le \sigma_{rdop} \Rightarrow A_2 \ge \frac{F\cos\alpha}{\sigma_{rdop}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano

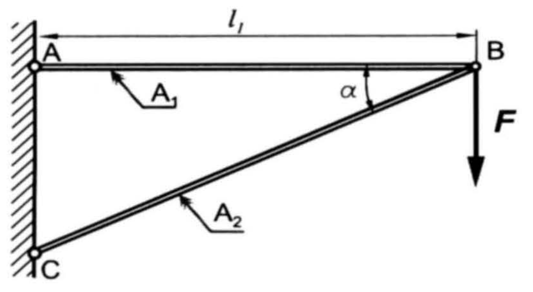
$$A_1 \ge \frac{60\cdot 10^{-3} MN \cdot 0{,}5}{150\, MPa} = 2\cdot 10^{-4} m^2,$$
$$A_2 \ge \frac{60\cdot 10^{-3} MN \cdot \sqrt{3}}{150\, MPa \cdot 2} = 3{,}46\cdot 10^{-4} m^2.$$

Ostatecznie przyjęto

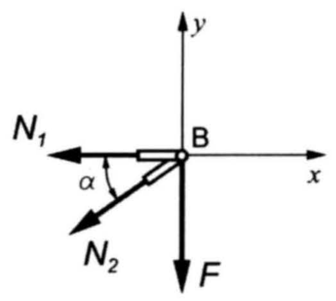
$$A_1 = 2{,}0\, cm^2,$$
$$A_2 = 3{,}5\, cm^2.$$

**Zadanie 2.2.** Wspornik wykonany z dwóch dwuprzegubowych lekkich prętów obciążony jest w węźle B pionową siłą $F$ (rys. 2.3). Dane są następujące wielkości: pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta poziomego $A_1$ i pręta ukośnego $A_2$, długość pręta poziomego $l_1$, kąt $\alpha$ odchylenia od poziomu pręta ukośnego oraz moduły sprężystości $E_1 = E_2 = E$ materiału prętów. Znaleźć przemieszczenie całkowite węzła B.

R o z w i ą z a n i e. Aby obliczyć zmianę długości prętów wywołaną obciążeniem (siłą $F$), trzeba najpierw obliczyć siły działające w prętach. Na rys. 2.4 pokazano siły działające na węzeł, przy założeniu, że siły normalne działające w prętach są rozciągające (zwroty sił $N_1$ i $N_2$ są skierowane od węzła B).




**Rys. 2.3**




**Rys. 2.4**

Z równań równowagi sił (zbieżny płaski układ sił)

$$\sum F_x \Rightarrow -N_1 - N_2 \cos\alpha = 0,$$

$$\sum F_y \Rightarrow -N_2 \sin\alpha - F = 0;$$

otrzymano

$$N_1 = F ctg\alpha,$$

$$N_2 = -\frac{F}{\sin\alpha}.$$

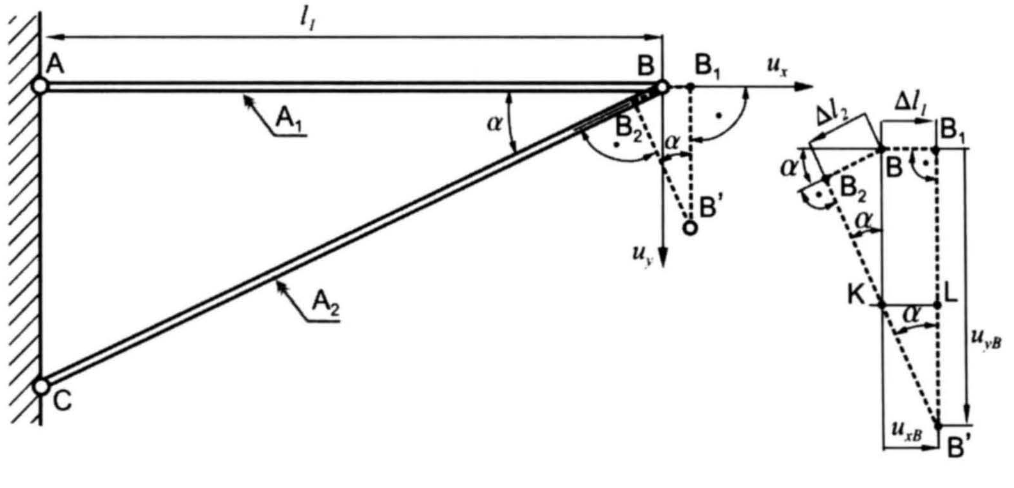
Znak minus we wzorze na siłę $N_2$, oznacza, że pręt ukośny jest ściskany. Pręt poziomy ulega wydłużeniu o

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{F l_1 ctg\alpha}{EA_1}.$$

Pręt ukośny ulega skróceniu o

$$\Delta l_2 = \frac{|N_2| l_2}{EA_2} = \frac{F l_2}{EA_2 \sin\alpha} = \frac{F \cdot l_1}{EA_2 \sin\alpha \cos\alpha}.$$

Na rysunku 2.5 pokazano, jak w przybliżeniu przemieści się punkt *B* do *B'*. Uproszczenie polega na zastąpieniu łuków, po których przemieszczają się punkty $B_1$ i $B_2$, stycznymi do tych łuków.




**Rys. 2.5**

Z rysunku 2.5 widać, że:

$$u_{xB} = \Delta l_1 = \frac{F_1 l_1}{EA_1} ctg\alpha,$$

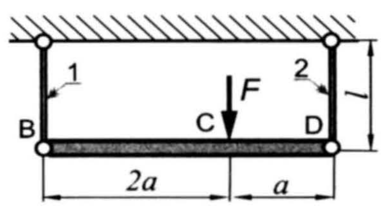
$$u_{yB} = (\overline{BK} + |LB'|) = (\frac{\Delta l_2}{\sin\alpha} + \Delta l_1 ctg\alpha) =$$

$$= (\frac{Fl_1}{EA_2 \sin^2\alpha\cos\alpha} + \frac{Fl_1 ctg^2\alpha}{EA_1}) = \frac{Fl_1}{EA_2 \sin^2\alpha\cos\alpha}(1 + \frac{A_2\cos^3\alpha}{A_1}).$$

Całkowite przemieszczenie punktu B (odcinek $\overline{BB'}$) wynosi

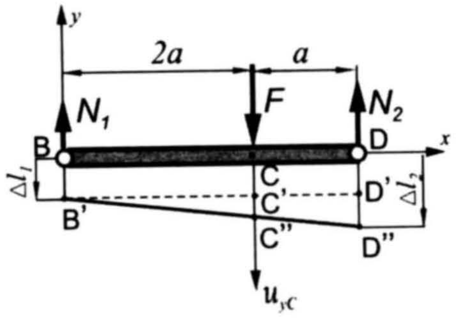
$$\overline{BB'} = \sqrt{(u_{xB})^2 + (u_{yB})^2}.$$

**Zadanie 2.3.** Sztywna lekka (nieważka) belka o długości 3a obciążona pionową siłą $F$ (rys. 2.6) jest zawieszona w punktach $B$ i $D$ na dwóch jednakowych pionowych prętach. Obliczyć pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów oraz przemieszczenie pionowe punktu $C$ belki, mając dane: F = 30 $kN$, $\sigma_{rdop} = 160\,MPa$, $l$ = 1 $m$, E = $2\cdot10^5\,MPa$




**Rys. 2.6**

R o z w i ą z a n i e. Siły działające na belkę po uwolnieniu od więzów oraz przewidywane położenie belki po odkształceniu prętów pokazano na rys. 2.7.




**Rys. 2.7**

Z równań równowagi

$$\sum M_D \rightarrow N_1 \cdot 3a - F \cdot a = 0,$$

$$\sum F_y \rightarrow N_1 + N_2 - F = 0;$$

otrzymano

$$N_1 = \frac{1}{3} F = 10\,kN,$$

$$N_2 = F - N_1 = 20\,kN.$$

Maksymalna siła normalna

$$N_{\max} = N_2 = 20\,kN.$$

Z warunku wytrzymałości na rozciąganie

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{A} \leq \sigma_{rdop},$$

otrzymano

$$A \geq \frac{N_{\max}}{\sigma_{rdop}} = \frac{20 \cdot 10^{-3}\,MN}{160\,MPa} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}\,m^2 = 1{,}25\,cm^2.$$

Z racji bardzo małych odkształceń prętów punkty B, C i D doznają w przybliżeniu przemieszczeń pionowych. Z rys. 2.7 wynikają następujące zależności

$$\frac{\overline{C'C''}}{2a} = \frac{\overline{D'D''}}{3a} \Rightarrow \overline{C'C''} = \frac{2}{3}\overline{D'D''} = \frac{2}{3}(\Delta l_2 - \Delta l_1),$$

$$u_{yc} = \overline{CC'} + \overline{C'C''} = \Delta l_1 + \frac{2}{3}(\Delta l_2 - \Delta l_1) = \frac{1}{3}(\Delta l_1 + 2\Delta l_2).$$

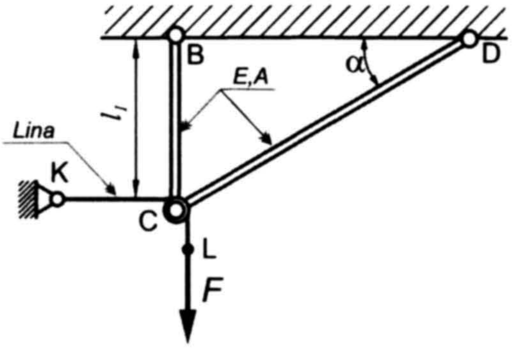
A zatem

$$u_{y_c} = \frac{1}{3}\left(\frac{N_1 l}{EA} + 2\frac{N_2 l}{EA}\right) = \frac{(N_1 + 2N_2)l}{3EA}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano

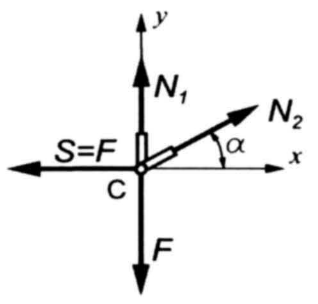
$$u_{yc} = \frac{(10+2\cdot 20)\cdot 10^{-3}\cdot 1}{3\cdot 2\cdot 10^{5}\cdot 1{,}25\cdot 10^{-4}}m = 6{,}67\cdot 10^{-4}m = 0{,}667\,mm.$$

**Zadanie 2.4.** W węźle C dwóch dwuprzegubowych prętów (rys. 2.8) zamontowano gładki krążek o bardzo małej średnicy, przez który przerzucono linę KCL. Do końca L liny przyłożono siłę $F$. Obliczyć przemieszczenia węzła C, mając dane: $F,\ l_1,\ \alpha,\ E,\ A$.




**Rys. 2.8**

R o z w i ą z a n i e. Siły działające w węźle $C$ pokazano na rys. 2.9. Przy gładkim krążku siła $S$ jest równa sile $F$.




**Rys. 2.9**

Z równań równowagi sił działających w węźle $C$

$$\sum F_x \Rightarrow N_2\cos\alpha - F = 0,$$

$$\sum F_y \Rightarrow N_1 + N_2\sin\alpha - F = 0,$$

otrzymano

$$N_2 = \frac{F}{\cos\alpha},$$

$$N_1 = F - N_2\sin\alpha = F(1 - tg\alpha).$$

Długość pręta CD

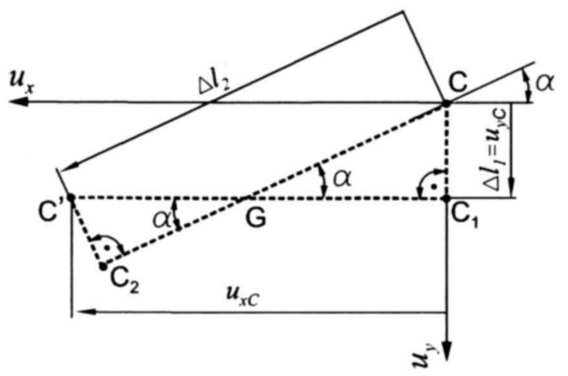
$$l_2 = \frac{l_1}{\sin\alpha}.$$

Przy sztywności prętów na rozciąganie $EA$ ich wydłużenia wynoszą

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{F l_1 (1 - tg\alpha)}{EA},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{F \cdot l_1}{EA \sin\alpha \cos\alpha} = \frac{2 F l_1}{EA \sin 2\alpha}.$$

Przemieszczenie węzła $C$ pokazano na rys. 2.10.




**Rys. 2.10**

Z rysunku wynika, że długość odcinka $\overline{CG} = \frac{\Delta l_1}{\sin\alpha}$, natomiast długość odcinka $\overline{GC_2} = \Delta l_2 - \overline{CG} = \Delta l_2 - \frac{\Delta l_1}{\sin\alpha}$.

Ostatecznie przemieszczenie pionowe punktu $C$ wynosi

$$u_{yc} = \overline{CC_1} = \Delta l_1,$$

a przemieszczenie poziome

$$u_{xc} = \overline{C_1C'} = \overline{C_1G} + \overline{GC'} = \overline{CG}\cos\alpha + \frac{\overline{GC_2}}{\cos\alpha} = \frac{2(\Delta l_2 - \Delta l_1 \sin\alpha)\sin\alpha}{\sin 2\alpha}.$$

**Zadanie 2.5.** Dla układu prętowego z zadania 2.1 wyznaczyć składowe przemieszczenia węzła $C$ (rys. 2.1), mając dodatkowe dane: $h = 0{,}5\ m$, $E = 2 \cdot 10^5\ MPa$.

R o z w i ą z a n i e. Siły normalne w prętach oraz pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów, przy których naprężenia w prętach są równe $k_r$, wyznaczono w zadaniu 2.1.

$$N_1 = F \sin 30° = 60\,kN \cdot \frac{1}{2} = 30\,kN,$$

$$N_2 = F \cos 30° = 30\sqrt{3}\,kN,$$

$A_1 = 2 \cdot 10^{-4} m^2,$

$A_2 = 3{,}46 \cdot 10^{-4} m^2.$

Długości prętów wynoszą:

$$l_1 = \frac{h}{\sin 30°} = \frac{0{,}5\ m}{0{,}5} = 1\ m,$$

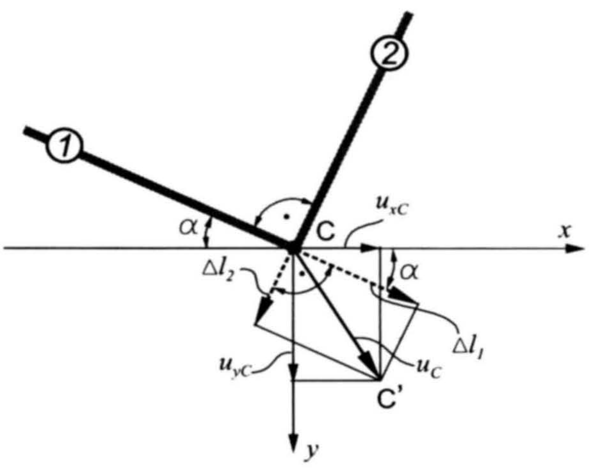
$$l_2 = \frac{h}{\cos 30°} = \frac{0{,}5\ m \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} m = \frac{\sqrt{3}}{3} m.$$

Przyrosty długości prętów obliczono z prawa Hooke'a

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{EA_1} = \frac{k_r \cdot l_2}{E} = \frac{30\ kN \cdot 1\ m}{2 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2} \cdot 2 \cdot 10^{-4} m^2} = 0{,}75 \cdot 10^{-3} m = 0{,}75\ mm,$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{EA_2} = \frac{k_r \cdot l_2}{E} = \frac{30\sqrt{3}\ kN \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} m}{2 \cdot 10^8 \frac{kN}{m^2} \cdot 3{,}46 \cdot 10^{-4} m^2} = 0{,}43 \cdot 10^{-3} m = 0{,}43\ mm.$$

Składowe: poziomą $u_{xc}$ i pionową $u_{yc}$ przemieszczenia węzła $C$ (przy zwrotach osi $u_x$ i $u_y$ przyjętych jak na rys. 2.11) wyznaczono przy upraszczającym założeniu, że końce wydłużonych prętów przemieszczają się po stycznych do łuków (po prostopadłych do promieni obrotów).

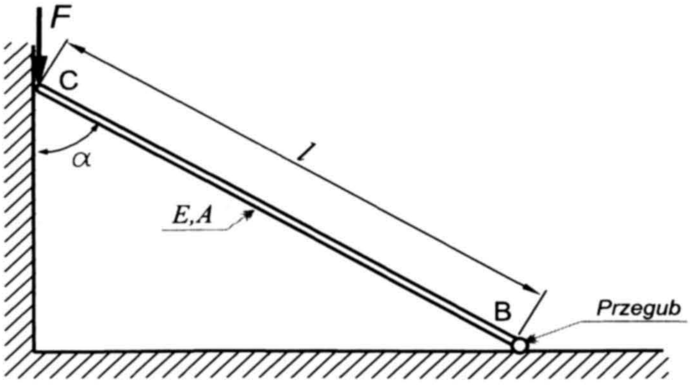



**Rys. 2.11**

$$u_{xc} = \Delta l_1 \cos 30° - \Delta l_2 \sin 30° = 0{,}75\ mm \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0{,}43\ mm \cdot \frac{1}{2} = 0{,}43\ mm,$$

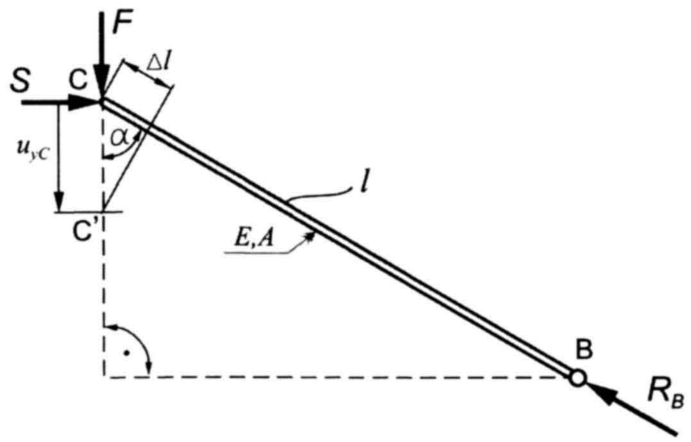
$$u_{yc} = \Delta l_1 \sin 30° + \Delta l_2 \cos 30° = 0{,}75\ mm \cdot \frac{1}{2} + 0{,}43\ mm \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}75\ mm.$$

**Zadanie 2.6.** Lekki pręt $BC$ o długości $l$ i sztywności na ściskanie $EA$ jest zamocowany przegubowo w punkcie $B$ i opiera się końcem $C$ o gładką ścianę, tworząc z nią kąt $\alpha$. W punkcie $C$ działa na pręt pionowa siła $F$ (rys. 2.12). Znaleźć przemieszczenie pionowe $u_{yc}$ końca $C$ pręta.




**Rys. 2.12**

R o z w i ą z a n i e. Po uwolnieniu od więzów na pręt działają siły pokazane na rys. 2.13.




**Rys. 2.13**

Z sumy rzutów sił na oś pionową

$$-F + R_B \cos\alpha = 0,$$

otrzymano

$$R_B = \frac{F}{\cos\alpha}.$$

Siła normalna w pręcie

$$N = -R_B = -\frac{F}{\cos\alpha}.$$

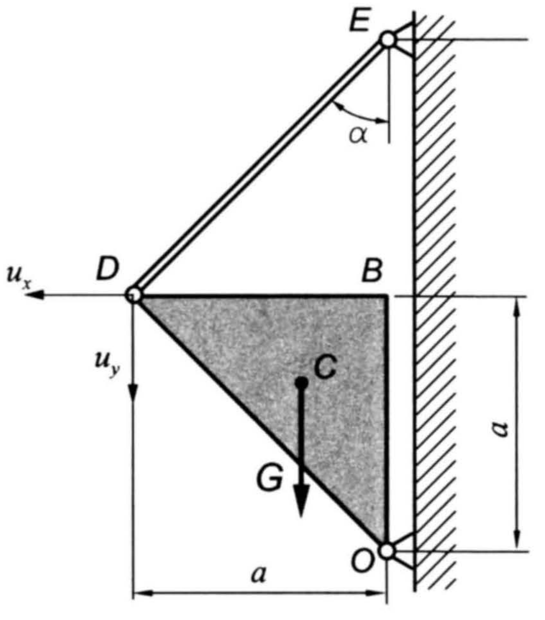
Skrócenie pręta

$$\Delta l = \frac{|N| \cdot l}{EA} = -\frac{Fl}{EA\cos\alpha}.$$

Obniżenie się końca $C$ pręta

$$u_{yc} = \frac{\Delta l}{\cos\alpha} = -\frac{Fl}{EA\cos^2\alpha}.$$

**Zadanie 2.7.** Jednorodną sztywną tarczę o ciężarze $G$, mającą kształt równoramiennego trójkąta prostokątnego, zamocowano w punkcie $O$ do nieprzesuwnej podpory przegubowej, a w punkcie $D$ podwieszono na pręcie o kołowym przekroju poprzecznym (rys. 2.14). Wyznaczyć: kąt $\alpha$, przy którym siła w pręcie będzie najmniejsza, najmniejszą dopuszczalną średnicę pręta, składowe $u_x$ i $u_y$ przemieszczenia punktów $B$ i $D$ tarczy. Dodatnie zwroty przemieszczeń $u_x$ i $u_y$ przyjęto jak na rys. 2.14.
Dane: $G$, $a$, $k_r$, $E$.




**Rys. 2.14**

R o z w i ą z a n i e. Z równania sumy momentów sił działających na tarczę (rys. 2.15), względem punktu $O$, otrzymano

$$G \cdot \frac{a}{3} - S\cos\alpha \cdot a - S\sin\alpha \cdot a = 0$$

gdzie S – siła oddziaływania pręta na tarczę.
Z rozwiązania tego równania wynika, że

$$S = \frac{G}{3(\sin\alpha + \cos\alpha)}.$$

Minimalną wartość siły $S$ można wyznaczyć z warunku maksimum funkcji $y = \sin\alpha + \cos\alpha$. Z przyrównania do zera pochodnej funkcji $y$ względem kąta $\alpha$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = \cos\alpha$$

wynika, ze maksymalna wartość funkcji w przedziale $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ występuje dla kąta $\alpha = 45°$ i wynosi $\sqrt{2}$.

Wtedy siła normalna w pręcie $DE$ wynosi

$$N = S = \frac{G}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} G.$$

Naprężenie normalne

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{4N}{\pi d^2} = \frac{4}{\pi d^2} \cdot \frac{\sqrt{2}G}{6} = \frac{2\sqrt{2}G}{3\pi d^2}.$$

Najmniejsza średnica pręta wynikająca z warunku

$$\frac{2\sqrt{2}}{3\pi d^2} G = k_r$$

wynosi

$$d = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}G}{3\pi k_r}}.$$

Składowe przemieszczenia punktów $B$ i $D$ wynikają z rys. 2.15 i dla

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{\sigma l}{E} = \frac{k_r l}{E} = \frac{k_r a\sqrt{2}}{E}$$

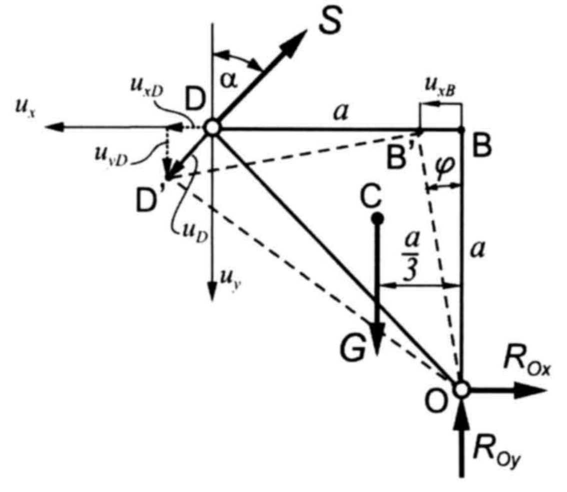
wynoszą:

$$u_{xB} = u_{xD} = u_{yD} = \Delta l \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k_r \cdot a}{E},$$

$$u_{yB} = 0.$$

Kąt obrotu tarczy względem punktu $O$

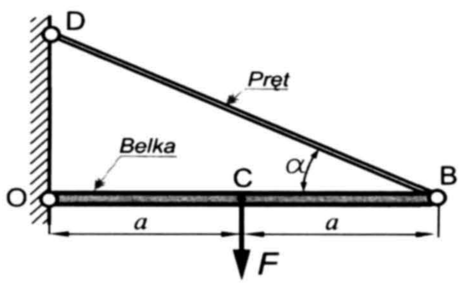
$$\varphi = \frac{\overline{DD'}}{\overline{OD}} = \frac{\Delta l}{a\sqrt{2}} = \frac{k_r}{E}.$$




**Rys. 2.15**

## 2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania

**Zadanie 2.8.** Sztywna pozioma belka $OB$ o długości $2a$ jest podparta w punkcie $O$ na nieprzesuwnej podporze przegubowej, a w punkcie $B$ podwieszona jest na pręcie o przekroju kołowym. Oś pręta tworzy z osią belki kąt $\alpha$. W środku rozpiętości belki (punkt $C$) działa skierowana do dołu pionowa siła $F$ (rys. 2.16). Pręt wykonany jest z materiału o module $E$ i naprężeniach dopuszczalnych na rozciąganie $\sigma_{dop}$. Obliczyć średnicę pręta i przemieszczenie pionowe punktu $B$.




**Rys. 2.16**

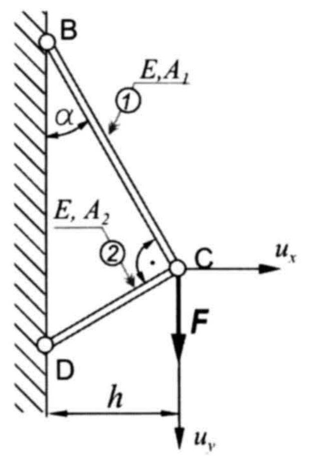
ODPOWIEDŹ:

$$d \geq \sqrt{\frac{2F}{\pi\sigma_{dop}\sin\alpha}},$$

$$u_{yB} = \frac{4a \cdot \sigma_{dop}}{E\sin 2\alpha}.$$

**Zadanie 2.9.** Dwa lekkie dwuprzegubowe pręty, o osiach wzajemnie prostopadłych, są połączone ze sobą w węźle $C$. W węźle tym przyłożona jest pionowa, skierowana do dołu siła $F$. Przekroje poprzeczne prętów zostały tak dobrane, że naprężenia w tych prętach są równe naprężeniom dopuszczalnym $k_r = k_c = k$. Odległość węzła $C$ od

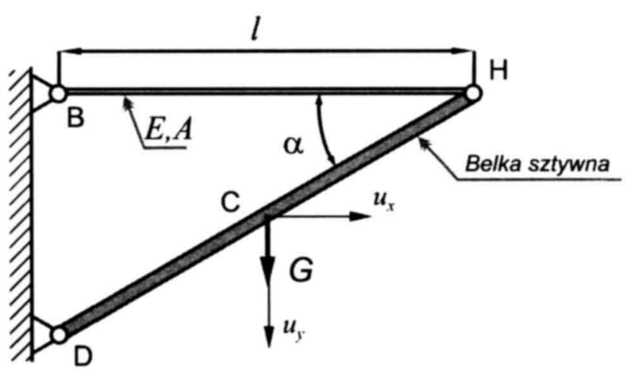
pionowej ściany wynosi $h$. Kąt odchylenia pręta $BC$ od pionu wynosi $\alpha$ (rys. 2.17). Obliczyć poziomą $u_{xc}$ i pionową $u_{yc}$ składową przemieszczenia węzła $C$.
Dane; $F$, $k$, $h$, $\alpha$.




**Rys. 2.17**

ODPOWIEDŹ: $u_{xc} = 0$, $u_{yc} = \dfrac{2k \cdot h}{E \sin 2\alpha}$.

**Zadanie 2.10.** Sztywna jednorodna belka o ciężarze $G$ jest podparta na podporze przegubowej w punkcie $D$ oraz podwieszona na poziomym pręcie o sztywności na rozciąganie $EA$ i długości $l$. Belka tworzy z prętem kąt $\alpha$ (rys. 2.18). Obliczyć składową poziomą $u_x$ i pionową $u_y$ przemieszczenia punktu $C$.



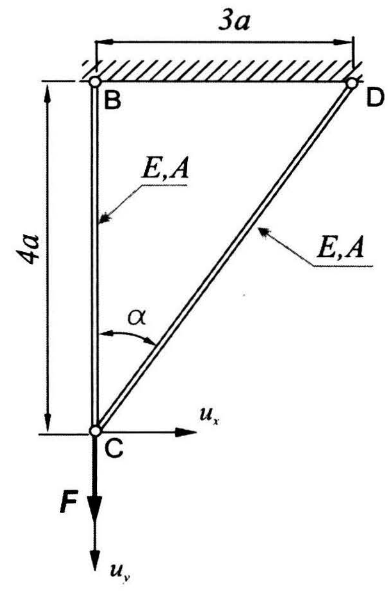

**Rys. 2.18**

ODPOWIEDŹ:

$$u_{xc} = \frac{1}{2}\Delta l = \frac{Gl}{4EA} ctg\alpha,$$

$$u_{yc} = \frac{Gl}{4EA} ctg^2\alpha.$$

**Zadanie 2.11.** Dwa pręty dwuprzegubowe o sztywności na rozciąganie $EA$ tworzą w węźle $C$ kąt $\alpha$ (rys. 2.19). Obliczyć składowe przemieszczenia węzła $C$, w którym działa pionowa siła $F$. Wymiary układu podano na rys. 2.19.



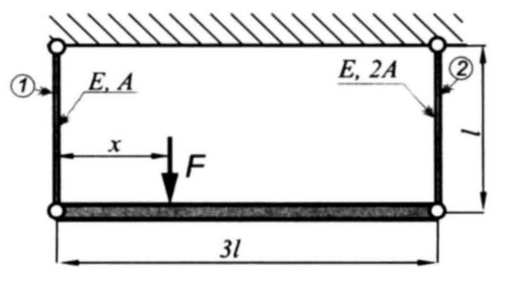

**Rys. 2.19**

ODPOWIEDŹ:

$$u_{xc} = \frac{16}{3}\frac{Fa}{EA},$$

$$u_{yc} = 4\frac{Fa}{EA}.$$

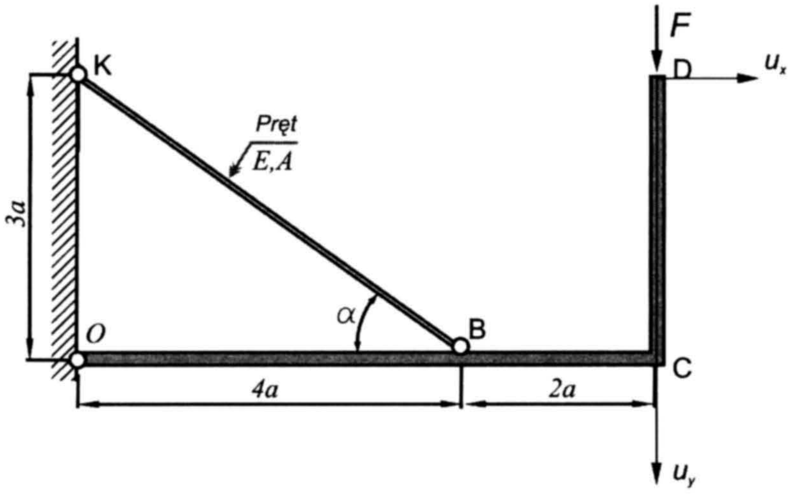
**Zadanie 2.12.** Sztywna lekka belka o długości *3l* jest podwieszona na końcach na dwóch prętach o długości *l* wykonanych z materiału o module sprężystości *E*. Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta 1 wynosi *A*, a pręta 2 – 2*A*. Belka jest obciążona pionową siłą *F* w odległości *x* od pręta 1 (rys. 2.20). Wyznaczyć, w jakiej odległości *x* musi być przyłożona siła *F*, aby belka po obciążeniu pozostała pozioma.




**Rys. 2.20**

ODPOWIEDŹ: $x = 2l$.

**Zadanie 2.13.** Sztywna lekka rama *OBCD* jest przegubowo zamocowana w punkcie *O* i podwieszona na dwuprzegubowym lekkim pręcie *BK* o sztywności na rozciąganie *EA* (rys. 2.21). Obliczyć dopuszczalną wartość siły *F* przyłożonej w punkcie *D* oraz składowe przemieszczenia punktu *D* wywołane tą siłą.
Dane: *a, E, A,* $k_r$.



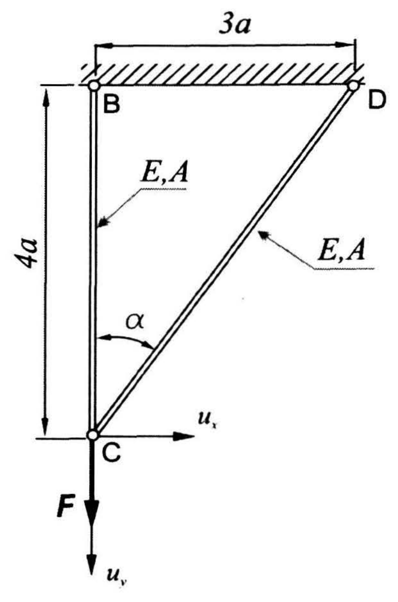

**Rys. 2.21**

ODPOWIEDŹ:

$F_{dop} = 0{,}4Ak_r$,

$u_{xD} = 6{,}25\dfrac{ak_r}{E}$,

$u_{yD} = 12{,}5\dfrac{ak_r}{E}$.



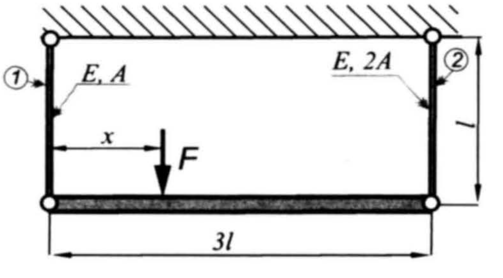

Rys. 2.19

ODPOWIEDŹ:

$$u_{xc} = \frac{16}{3}\frac{Fa}{EA},$$

$$u_{yc} = 4\frac{Fa}{EA}.$$

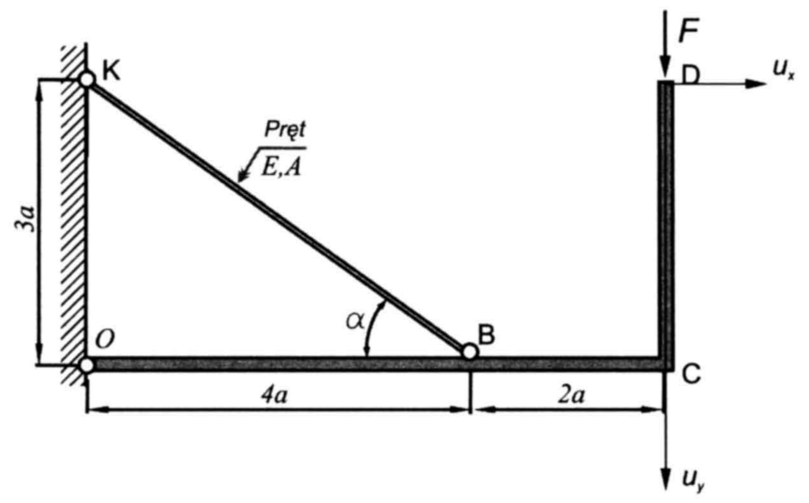
**Zadanie 2.12.** Sztywna lekka belka o długości $3l$ jest podwieszona na końcach na dwóch prętach o długości $l$ wykonanych z materiału o module sprężystości $E$. Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta 1 wynosi $A$, a pręta 2 – $2A$. Belka jest obciążona pionową siłą $F$ w odległości $x$ od pręta 1 (rys. 2.20). Wyznaczyć, w jakiej odległości $x$ musi być przyłożona siła $F$, aby belka po obciążeniu pozostała pozioma.




Rys. 2.20

ODPOWIEDŹ: $x = 2l$.

**Zadanie 2.13.** Sztywna lekka rama $OBCD$ jest przegubowo zamocowana w punkcie $O$ i podwieszona na dwuprzegubowym lekkim pręcie $BK$ o sztywności na rozciąganie $EA$ (rys. 2.21). Obliczyć dopuszczalną wartość siły $F$ przyłożonej w punkcie $D$ oraz składowe przemieszczenia punktu $D$ wywołane tą siłą.
Dane: $a$, $E$, $A$, $k_r$.




**Rys. 2.21**

ODPOWIEDŹ:

$F_{dop} = 0{,}4 A k_r$,

$u_{xD} = 6{,}25 \dfrac{a k_r}{E}$,

$u_{yD} = 12{,}5 \dfrac{a k_r}{E}$.

# 3. PŁASKIE UKŁADY PRĘTOWE STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE

## 3.1. Wprowadzenie. Metodyka rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych

Rozpatrywane w tym rozdziale statycznie niewyznaczalne konstrukcje składają się z dwuprzegubowych sprężyście odkształcalnych (rozciąganych lub ściskanych) prętów podtrzymujących nieodkształcalne (sztywne) elementy konstrukcji, takie jak belki lub tarcze. Sztywne elementy są obciążone czynnymi siłami zewnętrznymi. W przypadku braku elementów nieodkształcalnych pręty dwuprzegubowe tworzą płaskie statycznie niewyznaczalne kratownice obciążone siłami skupionymi przyłożonymi w węzłach. Metodyka rozwiązywania tego typu zadań polega na:

- naniesieniu na rysunek konstrukcji nieobciążonej (nieodkształconej) kształtu konstrukcji odkształconej wskutek jej obciążenia. Odkształcenia elementów muszą być zgodne z więzami (podporami).
- uwolnieniu ciała nieodkształcalnego lub/i wybranych węzłów kratownicy od więzów. Zwrot sił wewnętrznych w odkształconych prętach musi być zgodny z rysunkiem odkształconego układu. W prętach, które doznały wydłużenia, zwroty sił działających na przeguby pręta trzeba skierować na zewnątrz pręta – wzdłuż jego osi. Gdy z rysunku odkształconego układu wynika, że pręt uległ skróceniu, zwroty sił działających na jego przeguby trzeba skierować do wnętrza pręta. W prętach dwuprzegubowych (lub w prętach kratownic) siły działające w przegubach mają kierunek osi pręta.
- wyznaczeniu statycznej niewyznaczalności układu. Statyczna niewyznaczalność układu jest różnicą między liczbą składowych reakcji w podporach oraz sił normalnych w prętach (*RN*) a liczbą równań statyki dla rozpatrywanego układu sił (*RS*). Zatem stopień niewyznaczalności układu

$$n = RN - RS.$$

- Dla płaskiego dowolnego układu sił liczba równań statyki $RS = 3$. Jeżeli po uwolnieniu od więzów płaskiego układu prętowego otrzymano 5 niewiadomych ($RN = 5$), to statyczna niewyznaczalność układu

$$n = RN - RS = 5 - 3 = 2$$

  czyli układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny.
- zapisaniu równań statyki,
- zapisaniu *n* dodatkowych równań geometrycznych wynikających z geometrycznych zależności między odkształceniami prętów. W rozpatrywanych zadaniach przyjęto, że odkształcenia prętów są sprężyste i podlegają prawu

Hooke'a. Odkształcenia te w konstrukcjach stalowych (i nie tylko) są na ogół bardzo małe, co pozwala wprowadzić pewne uproszczenia przy zapisywaniu równań geometrycznych. Na rysunku odkształconego układu przyjmuje się, że końce prętów, które na skutek odkształceń doznają obrotów, przemieszczają się nie po łukach lecz po stycznych do tych łuków, czyli po prostopadłych do promieni ich obrotów, podobnie jak przyjmowano w obliczaniu przemieszczeń układów prętowych statycznie wyznaczalnych (rozdział 2).

- rozwiązaniu otrzymanego pełnego układu równań i wyznaczeniu sił w prętach i sił reakcji w podporach. Jeżeli z treści zadania wynika, że obliczenie reakcji podpór nie jest wymagane, można niektórych równań statyki nie pisać lub ich nie wykorzystywać w rozwiązaniu zadania.

Po wyznaczeniu sił normalnych w prętach przeprowadza się obliczenia wytrzymałościowe, w tym zwłaszcza oblicza się naprężenia. Należy również upewnić się, że pręty ściskane nie ulegną wyboczeniu. Obliczenia wytrzymałościowe przy:

- zadanym obciążeniu układu,
- własnościach wytrzymałościowych materiału,
- przyjętych zależnościach między polami przekrojów poprzecznych prętów,
- wymaganych współczynnikach bezpieczeństwa

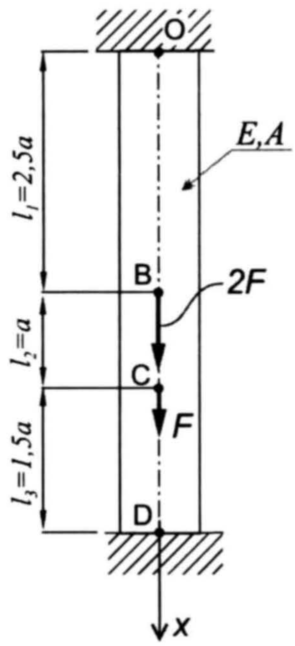
pozwalają wyznaczyć pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów układu.

Jeżeli znane są pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów, własności wytrzymałościowe materiału oraz wymagane współczynniki bezpieczeństwa, można obliczyć dopuszczalne wartości sił działających na układ. W zadaniach statycznie niewyznaczalnych naprężenia w prętach mogą być wywołane siłami skupionymi, obciążeniem ciągłym, przyrostem temperatury lub niedokładnościami montażowymi.

## 3.2. Przykłady obliczeń układów prętowych statycznie niewyznaczalnych

**Zadanie 3.1.** Pryzmatyczny słup o stałej sztywności na rozciąganie (ściskanie) $EA$ jest utwierdzony w dwóch nieodkształcalnych i nieprzesuwnych ścianach (rys. 3.1). W punktach $B$ i $C$ słup jest obciążony osiowymi siłami skierowanymi do dołu $F_B = 2F$ i $F_c = F$. Długości przedziałów (odcinków między punktami przyłożenia reakcji i sił zewnętrznych) wynoszą: $l_1 = l_{0B} = 2{,}5a,\ \ l_2 = l_{BC} = a,\ \ l_3 = l_{CD} = 1{,}5a.$

Obliczyć reakcję $R_D$ działającą na słup w punkcie $D$ metodami: myślowych przekrojów w poszczególnych przedziałach oraz superpozycji. Następnie narysować wykres sił normalnych. Ciężar własny słupa pominąć.




**Rys. 3.1**

R o z w i ą z a n i e. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Ponieważ siły zewnętrzne $2F$ i $F$ działają do dołu, więc jest oczywiste, że reakcje $R_O$ i $R_D$ będą skierowane ku górze (rys. 3.2). Przyjmijmy oś $x$ wzdłuż osi słupa o początku w punkcie 0 i dodatnim zwrocie do dołu. Z sumy rzutów sił na oś $x$ otrzymujemy równanie z dwiema niewiadomymi $R_O$ i $R_D$.

$$\sum F_{ix} \Rightarrow -R_O + 2F + F - R_D = 0.$$

Reakcję $R_D$ można wyznaczyć, korzystając z warunku wynikającego z odkształcenia słupa, a mianowicie że długość całego słupa nie może ulec zmianie

$$\Delta l = 0.$$

Warunek ten przy zastosowaniu metody myślowych przekrojów w trzech rozpatrywanych przedziałach słupa przyjmuje postać:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \frac{N_1 l_1}{EA} + \frac{N_2 l_2}{EA} + \frac{N_3 l_3}{EA} = 0$$

gdzie

$$N_1 = -R_D + 3F, \quad N_2 = -R_D + F, \quad N_3 = -R_D$$

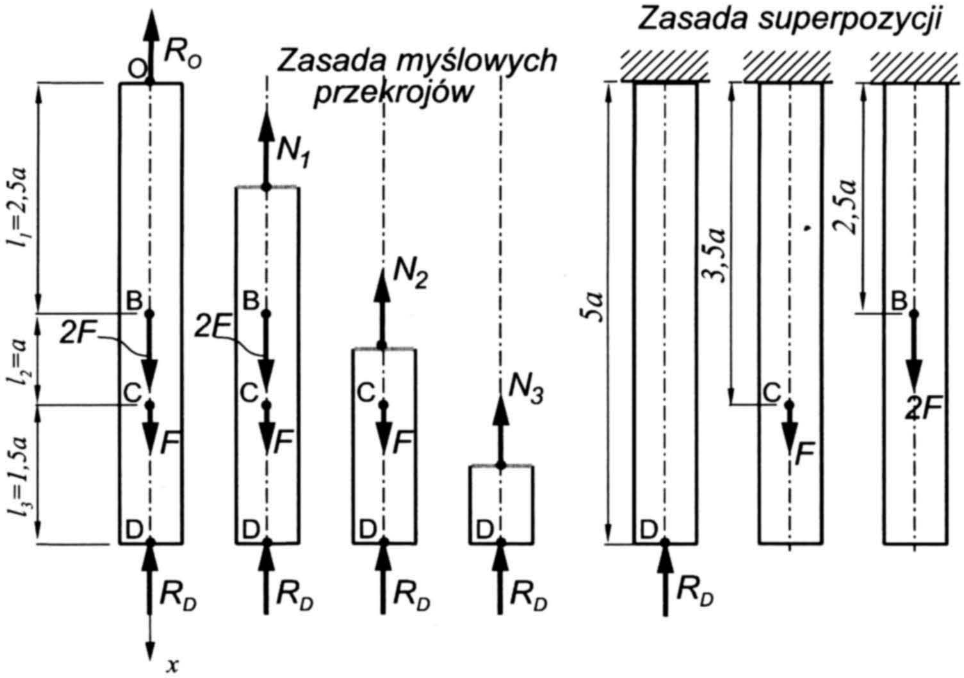
są siłami normalnymi w przedziałach odpowiednio o długościach: $l_1 = 2{,}5a$, $l_2 = a$, $l_3 = 1{,}5a$. Po podstawieniu $N_i$ i $l_i$ do warunku $\Delta l = 0$ otrzymano równanie

$$\frac{(-R_D + 3F)2{,}5a}{EA} + \frac{(-R_D + F)a}{EA} + \frac{(-R_D)\cdot 1{,}5a}{EA} = 0$$

z którego wynika, że

$$R_D = 1{,}7F.$$

Metoda superpozycji polega na obliczeniu skutków wywołanych przez każdą siłę rozpatrywanego układu sił oddzielnie, a następnie na ich zsumowaniu. W rozpatrywanym zadaniu przyjmiemy, że słup pozostaje utwierdzony na górze i będziemy obliczać jego skrócenia lub wydłużenie wywołane kolejno przez siły $R_D$, $F$ i $2F$ (rys. 3.2). Suma tych odkształceń zgodnie z warunkiem $\Delta l = 0$ musi być równa zeru.




**Rys. 3.2**

Z metody superpozycji wynika zatem, że (rys. 3.2)

$$\frac{-R_D \cdot 5a}{EA} + \frac{F \cdot 3{,}5a}{EA} + \frac{2F \cdot 2{,}5a}{EA} = 0$$

skąd otrzymuje się $R_D = 1{,}7F$.

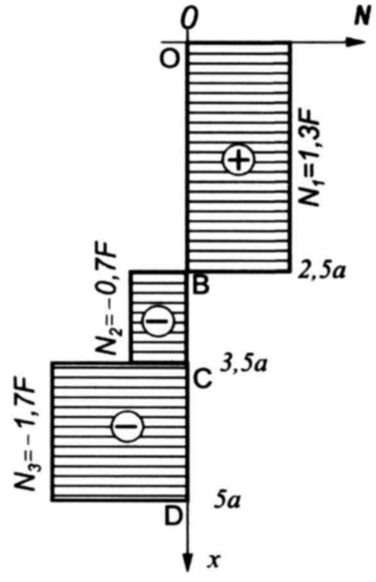
Siły normalne w poszczególnych przedziałach wynoszą:

$N_1 = -R_D + 3F = 1{,}3F$ dla $0 \le x \le 2{,}5a$,

$N_2 = -R_D + F = -0{,}7F$ dla $2{,}5a \le x \le 3{,}5a$,

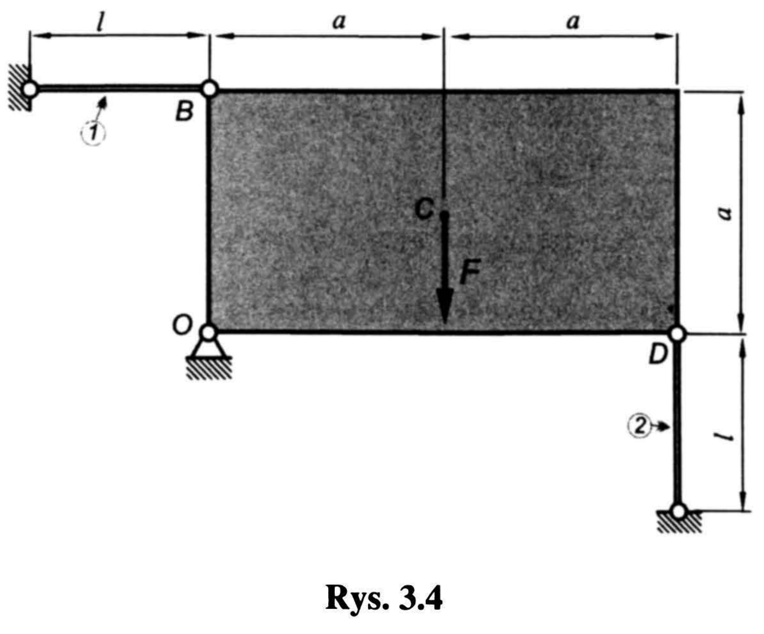
$N_3 = -R_D = -1{,}7F$ dla $3{,}5 \le x \le 5a$.

Wykres tych sił pokazano na rys. 3.3



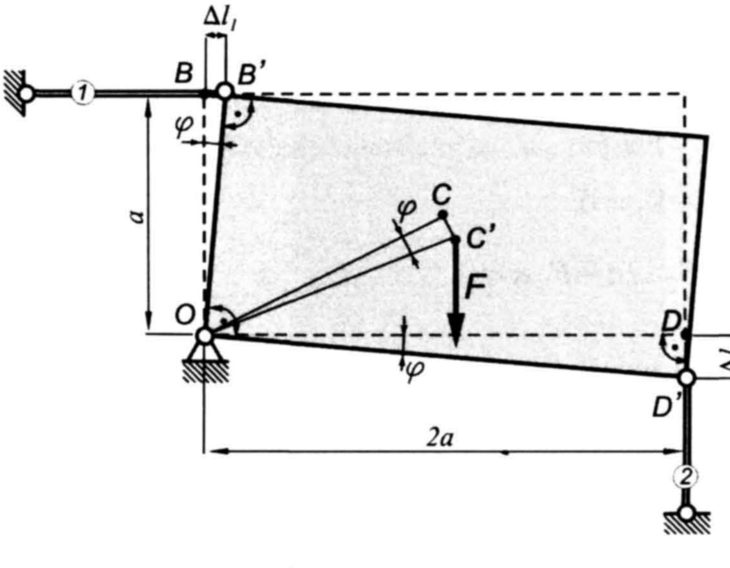

**Rys. 3.3**

**Zadanie 3.2.** Prostokątna sztywna jednorodna tarcza o wymiarach a×2a jest obciążona w środku ciężkości siłą $F$. Tarcza w punkcie O jest podparta na podporze przegubowej nieprzesuwnej i utrzymywana jest w równowadze przez dwa jednakowe pręty dwuprzegubowe zamocowane do tarczy w punktach B i D (rys. 3.4).
Mając dane: $F$, $a$, $l$, $E$, $A$, obliczyć reakcje w podporze O, siły i naprężenia normalne w prętach oraz przemieszczenia punktów C i D.



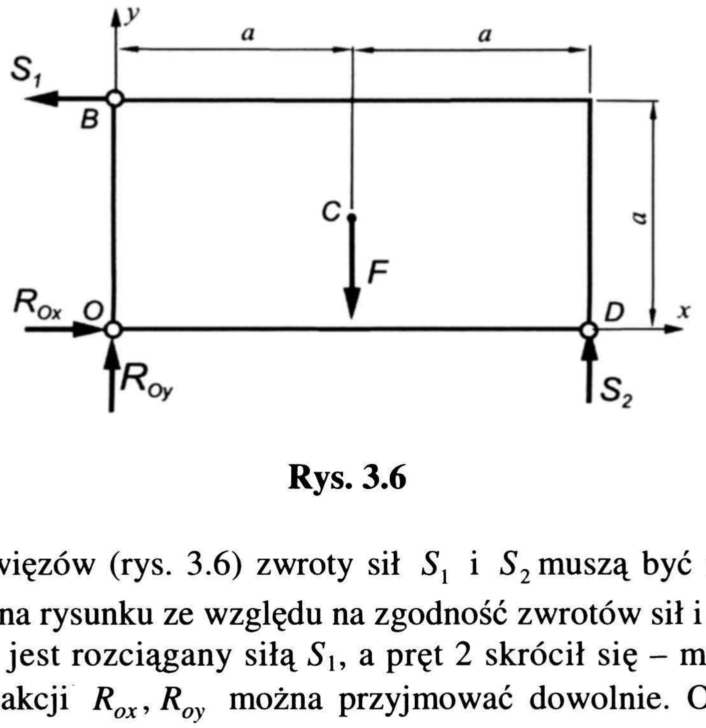

**Rys. 3.4**

R o z w i ą z a n i e. Odkształcony układ pokazano na rys. 3.5.




**Rys. 3.5**

Z rysunku 3.5 wynika, że pręt 1 (poziomy) wydłużył się o $\Delta l_1$, a pręt 2 (pionowy) skrócił się o $\Delta l_2$. A zatem pręt 1 jest rozciągany, a pręt 2 jest ściskany. Przemieszczenia punktów B i D przyjęto nie po łukach odpowiednio o promieniach OB i OD, lecz po stycznych do tych łuków.




**Rys. 3.6**

Po uwolnieniu od więzów (rys. 3.6) zwroty sił $S_1$ i $S_2$ muszą być zgodne z odkształceniami przyjętymi na rysunku ze względu na zgodność zwrotów sił i odkształceń. Pręt 1 wydłużył się, czyli jest rozciągany siłą $S_1$, a pręt 2 skrócił się – musiał być ściskany siłą $S_2$. Zwroty reakcji $R_{ox}$, $R_{oy}$ można przyjmować dowolnie. Obliczenia (znaki + lub –) wykażą ich rzeczywiste zwroty.

Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu. Liczba nieznanych sił działających na układ wynosi RN = 4 $(R_{ox}, R_{oy}, S_1, S_2)$. Liczba równań równowagi dla płaskiego dowolnego układu sił RS = 3 $(\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0,\ \sum M_o = 0)$.

Układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny, ponieważ n = RN – RS = 4 – 3 = 1

Równania statyki mają postać

1) $\sum F_x \Rightarrow R_{ox} - S_1 = 0,$

2) $\sum F_y \Rightarrow R_{oy} - F + S_2 = 0,$

3) $\sum M_o \Rightarrow S_1 \cdot a + S_2 \cdot 2a - F \cdot a = 0.$

Równanie geometryczne wynikające z rys. 3.5 (patrz trójkąty OBB' i ODD')

$$tg\varphi = \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{2a}.$$

Po podstawieniu zależności wynikających z prawa Hooke'a

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EA}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l}{EA},$$

równanie geometryczne przyjmuje postać

$$\frac{S_1 l}{aEA} = \frac{S_2 l}{2aEA}$$

skąd otrzymano czwarte równanie

4) $\qquad S_1 = \frac{1}{2} S_2.$

Z równań 3) i 4) obliczono $S_1$ i $S_2$

$$S_1 = \frac{1}{5} F,$$

$$S_2 = \frac{2}{5} F.$$

Następnie z równań 1) i 2) wyznaczono $R_{ox}$ i $R_{oy}$

$$R_{ox} = S_1 = \frac{1}{5} F,$$

$$R_{oy} = \frac{3}{5} F.$$

Naprężenia normalne w prętach

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{S_1}{A_1} = \frac{1}{5}\frac{F}{A}$$ – naprężenie rozciągające,

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = -\frac{S_2}{A_2} = -\frac{2}{5}\frac{F}{A}$$ – naprężenie ściskające.

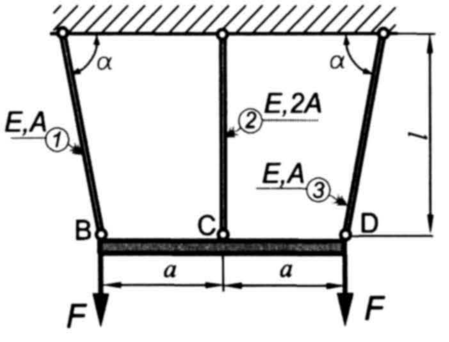
Ponieważ pręt 2 jest ściskany, siła normalna i naprężenie normalne są ujemne. Wymiary pręta 2 muszą być tak dobrane, aby nie uległ on wyboczeniu.
Z rys 3.5 widać, że przemieszczenie punktu D jest w przybliżeniu przemieszczeniem pionowym skierowanym do dołu równym skróceniu $\Delta l_2$ pręta 2

$$u_D = |\Delta l_2| = \frac{|N_2| \cdot l}{EA} = -\frac{2Fl}{5EA}.$$

Przemieszczenie punku C

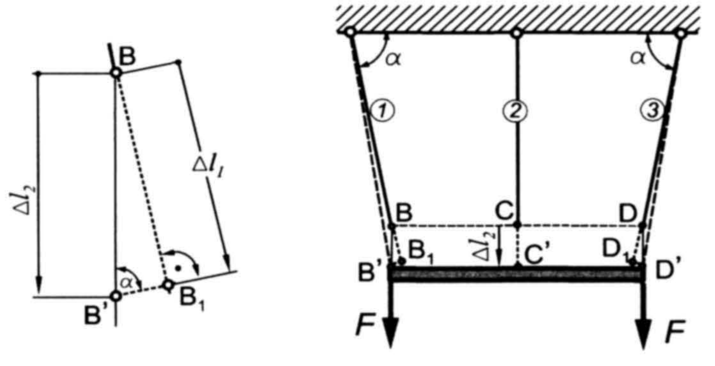
$$u_C = \overline{CC'} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \cdot tg\varphi = \frac{\sqrt{5}a}{2} \cdot \frac{|u_D|}{2a} = \frac{\sqrt{5}}{4}\frac{2Fl}{5EA} = \frac{\sqrt{5}Fl}{10EA}.$$

**Zadanie 3.3.** Lekka nieodkształcalna pozioma belka o długości 2a jest podwieszona na trzech prętach wykonanych z tego samego materiału, o module sprężystości $E$ (rys. 3.7). Pręt nr 2 leżący na osi symetrii układu ma długość $l$ i pole powierzchni przekroju poprzecznego $2A$. Pozostałe dwa pręty (nr 1 i nr 3) tworzą z poziomem kąt $\alpha$, a ich pola powierzchni przekroju poprzecznego wynoszą $A$. Układ obciążony jest dwiema pionowymi siłami $F$ przyłożonymi do końców belki. Obliczyć naprężenia w prętach. Dane: $F$, $E$, $A$, $l$, $a$, $\alpha$.




**Rys. 3.7**

R o z w i ą z a n i e. Układ po odkształceniu prętów pokazano na rys. 3.8. Należy zwrócić uwagę na to, że układ ma symetryczną budowę i jest symetrycznie obciążony.




**Rys. 3.8**

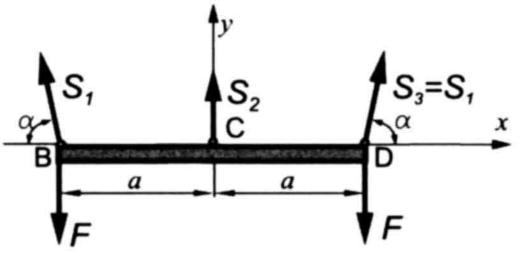
Z rysunku (3.8) wynika, że

$$\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'} = \Delta l_2,$$
$$\overline{BB_1} = \overline{DD_1} = \Delta l_1 = \Delta l_3,$$

a zatem

$$\frac{\Delta l_1}{\sin\alpha} = \Delta l_2.$$

Ponieważ wszystkie pręty uległy wydłużeniu, tzn. że wszystkie pręty są rozciągane. Zatem po uwolnieniu belki od więzów zwroty sił działających na belkę należy przyjąć, jak pokazano na rys. 3.9.




**Rys. 3.9**

Po wykorzystaniu symetrii, pozostaje tylko jedno równanie statyki z dwiema niewiadomymi

$$\sum F_y \Rightarrow 2S_1 \sin\alpha + S_2 - 2F = 0.$$

Drugie równanie to równanie geometryczne

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \sin\alpha,$$

w którym

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \dfrac{l}{\sin\alpha}}{EA},$$
$$\Delta l_2 = \frac{S_2 l}{E2A}.$$

Z równania geometrycznego otrzymano

$$S_1 = \frac{S_2}{2}\sin^2\alpha$$

Po podstawieniu $S_1$ do równania równowagi wyznaczono

$$S_2 = \frac{2F}{1+\sin^3\alpha},$$

a z równania geometrycznego

$$S_1 = \frac{F \sin^2 \alpha}{1 + \sin^3 \alpha}.$$

Naprężenia w prętach wynoszą:

$$\sigma_1 = \sigma_3 = \frac{N_1}{A} = \frac{S_1}{A} = \frac{F \sin^2 \alpha}{A(1 + \sin^3 \alpha)},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{S_2}{2A} = \frac{F}{A(1 + \sin^3 \alpha)}.$$

Są to naprężenia rozciągające, przy czym $\sigma_2 \geq \sigma_1$

$$\sigma_2 = \sigma_{max} = \frac{F}{A(1 + \sin^3 \alpha)}.$$

Dla $\alpha = 90°$ naprężenia $\sigma_2$ osiągają swą najmniejszą wartość, a naprężenia $\sigma_1$ i $\sigma_3$ swą największą wartość i wówczas

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{F}{2A}.$$

W przypadku gdy $\alpha = 90°$, naprężenia we wszystkich prętach osiągną jednocześnie wartości dopuszczalne. Jest to przypadek optymalnego zaprojektowania prętów, gdyż konstrukcja jest wtedy najlżejsza. Z warunku

$$\frac{F}{2A} \leq \sigma_{rdop},$$

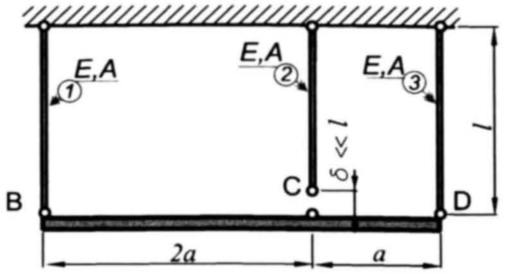
otrzymano

$$A = \frac{F}{2\sigma_{rdop}}.$$

**Zadanie 3.4.** Sztywną bardzo lekką belkę postanowiono zawiesić na trzech pionowych prętach o długościach $l$, polu powierzchni przekroju poprzecznego $A$ i module sprężystości $E$. Po wykonaniu prętów okazało się, że jeden z nich jest minimalnie krótszy i ma długość $l - \delta$. Po zawieszeniu belki na dwóch prętach jednakowej długości, zamontowano wewnętrzny (krótszy o $\delta$) pręt nr 2, naprężając konstrukcję (rys. 3.11). Obliczyć wartości sił w prętach po zmontowaniu konstrukcji oraz znaleźć kąt $\varphi$ odchylenia belki od poziomu, jeżeli odległości między prętami wynoszą

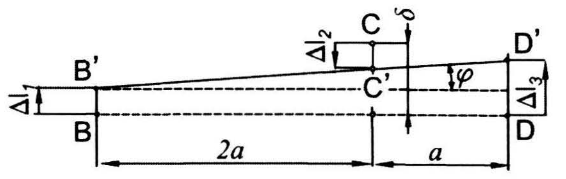
$$\overline{B'C'} = 2a,$$

$$\overline{C'D} = a.$$



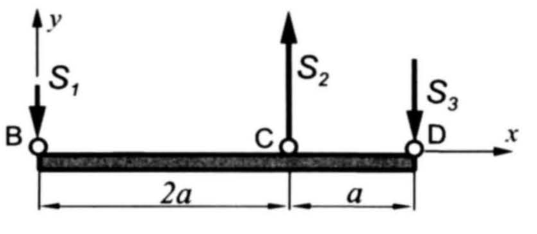

**Rys. 3.10**

R o z w i ą z a n i e. Przyjęto wstępnie, że położenie belki po zmontowaniu (B'D') jest takie, jak pokazano na rys. 3.11.




**Rys. 3.11**

Z rysunku 3.11 wynika, że pręty nr 1 i 3 po zmontowaniu będą ściskane, natomiast pręt nr 2 będzie rozciągany. Dlatego zwroty sił przyjęto tak, jak pokazano na rys. 3.12.




**Rys. 3.12**

Do dyspozycji mamy dwa równania równowagi sił

$$\sum F_y \Rightarrow -S_1 + S_2 - S_3 = 0,$$

$$\sum M_D \Rightarrow S_1 \cdot 3a - S_2 \cdot a = 0, \qquad \Rightarrow S_2 = 3S_1,$$

więc

$$S_3 = -S_1 + S_2 = 2S_1.$$

W równaniach tych występują trzy niewiadome, czyli zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Równanie geometryczne wynikające z rys. 3.11 można zapisać w postaci

$$tg\varphi = \frac{\delta - \Delta l_2 - \Delta l_1}{2a} = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{3a},$$

gdzie

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 \cdot l}{EA},$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_2(l-\delta)}{EA} \cong \frac{S_2 \cdot l}{EA},$$

(powyżej przyjęto, że $l-\delta \cong l$, gdyż $\delta$ jest dużo mniejsze od $l$)

$$\Delta l_3 = \frac{S_3 l}{EA}.$$

A zatem

$$3(\delta - \frac{S_2 l}{EA} - \frac{S_1 l}{EA}) = 2(\frac{S_3 l}{EA} - \frac{S_1 l}{EA}).$$

Po wykorzystaniu równań równowagi otrzymano

$$3\left(\delta - \frac{3S_1 l}{EA} - \frac{S_1 l}{EA}\right) = 2\left(\frac{2S_1 l}{EA} - \frac{S_1 l}{EA}\right),$$

stąd:

$$S_1 = \frac{3}{14}\frac{\delta}{l}EA,$$

$$S_2 = \frac{9}{14}\frac{\delta}{l}EA,$$

$$S_3 = \frac{6}{14}\frac{\delta}{l}EA.$$

Dodatnie wartości sił $S_i$ świadczą o tym, że przyjęte wstępnie zwroty sił przewidziano właściwie. Siły normalne w prętach wynoszą:

$$N_1 = -S_1 = -\frac{3}{14}\frac{\delta}{l}EA,$$

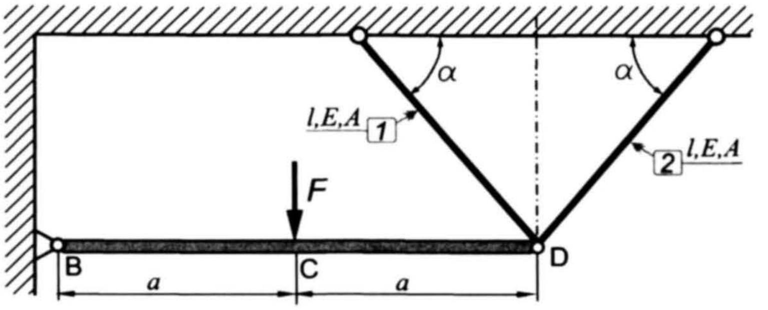
$$N_2 = S_2 = \frac{9}{14}\frac{\delta}{l}EA,$$

$$N_3 = -S_3 = -\frac{6}{14}\frac{\delta}{l}EA.$$

Kąt odchylenia belki od poziomu po zmontowaniu układu

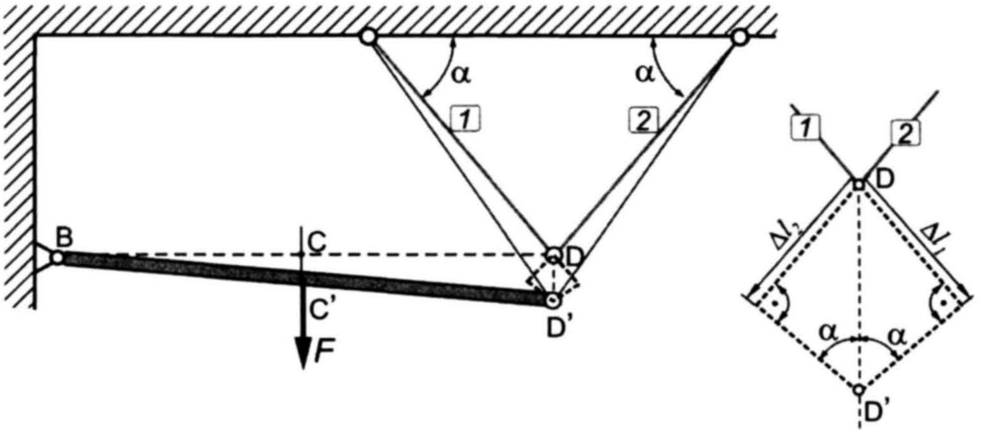
$$\varphi \cong tg\varphi = \frac{\Delta l_3 - \Delta l_1}{3a} = \frac{(S_3 - S_1)\cdot l}{3EAa} = \frac{1}{14}\frac{\delta}{a}.$$

**Zadanie 3.5.** Obliczyć naprężenia w prętach oraz przemieszczenie punktu $D$ nieodkształcalnej belki obciążonej w punkcie $C$ pionową siłą $F$. Pręty o długości $l$, polu powierzchni przekroju poprzecznego $A$ i module sprężystości materiału $E$ tworzą z poziomem kąt $\alpha$ (rys. 3.13)




**Rys. 3.13**

R o z w i ą z a n i e. Na skutek obciążenia siłą $F$ belka $BD$ dozna minimalnego obrotu wokół punktu $B$. Punkt $D$ belki przemieści się w dół (po prostopadłej do promienia obrotu $BD = 2a$), jak pokazano na rys. 3.14. Pręty wydłużą się o $\Delta l_1$, i $\Delta l_2$.

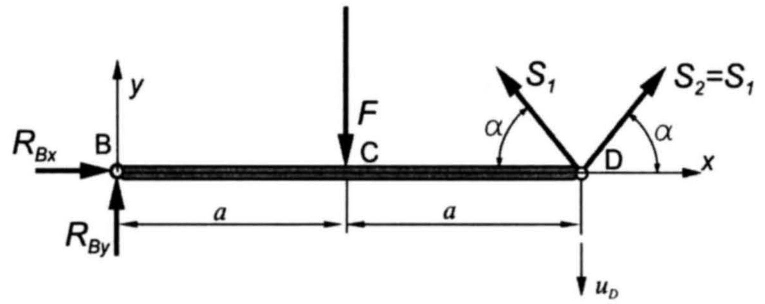



**Rys. 3.14**

Z rysunku 3.14 wynika, że oba pręty wydłużą się o taką samą wielkość. Równanie geometryczne ma zatem postać $\Delta l_1 = \Delta l_2$, skąd wynika, że

$$\frac{S_1 l}{EA} = \frac{S_2 l}{EA} \quad \text{czyli} \quad S_1 = S_2 .$$

Po uwolnieniu od więzów siły działające na belkę pokazano na rys. 3.15.




**Rys. 3.15**

Z sumy momentów sił względem punktu *B*, otrzymano

$$2S_1 \sin\alpha \cdot 2a - F \cdot a = 0,$$

skąd

$$S_1 = \frac{F}{4\sin\alpha}.$$

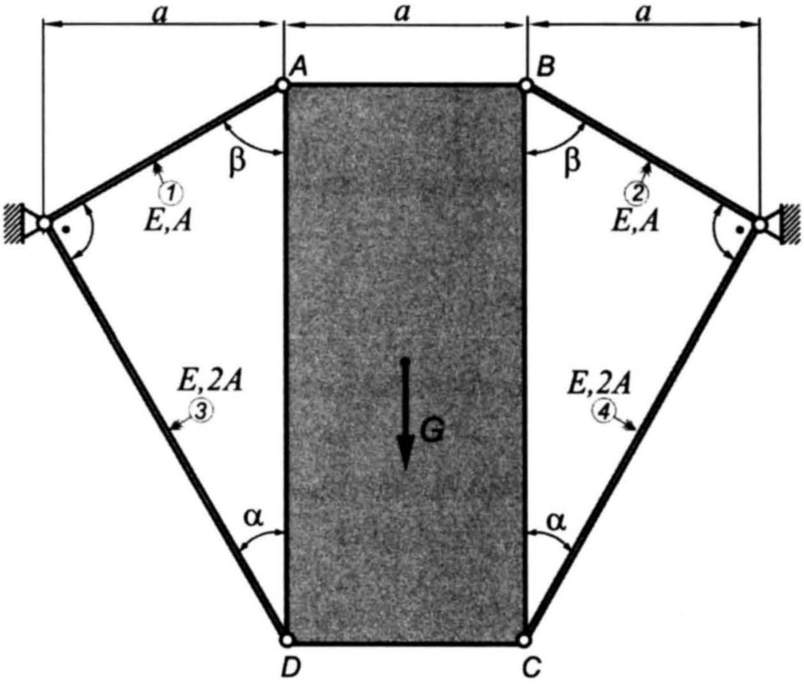
Naprężenia w prętach wynoszą

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{S_1}{A} = \frac{F}{4A\sin\alpha}.$$

Przemieszczenie pionowe punktu *D*

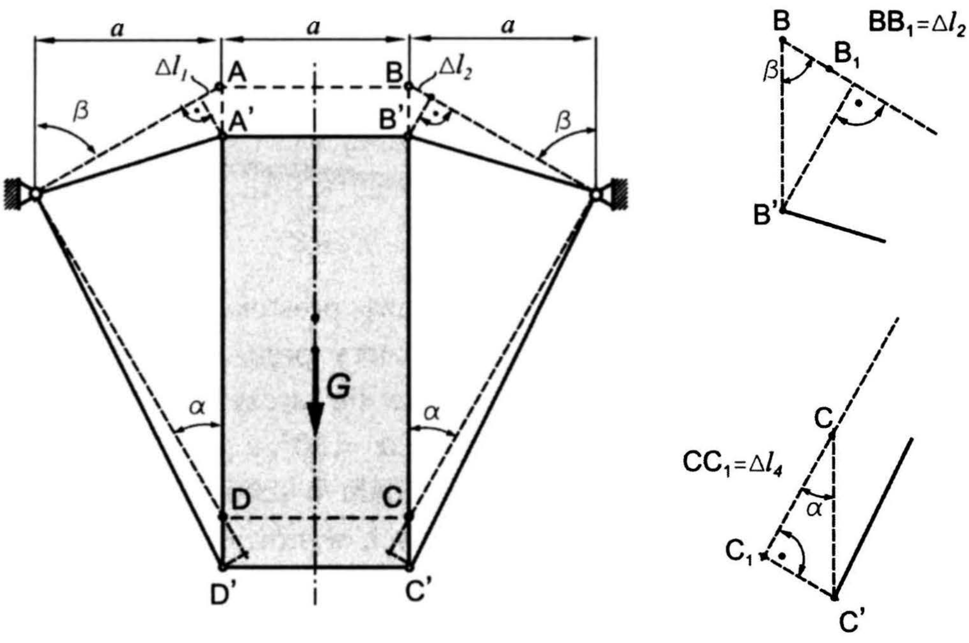
$$u_D = \overline{DD'} = \frac{\Delta l_1}{\sin\alpha} = \frac{S_1 l}{EA\sin\alpha} = \frac{Fl}{4EA\sin^2\alpha}.$$

**Zadanie 3.6.** Jednorodna nieodkształcalna tarcza prostokątna o ciężarze *G* jest utrzymywana w płaszczyźnie pionowej przez cztery pręty w sposób pokazany na rys. 3.16. Obliczyć siły w prętach oraz obniżenie się tarczy wywołane jej ciężarem, w przypadku gdy pręty dolne tworzą z pionem kąt $\alpha = 30°$, a pręty górne – kąt $\beta = 60°$. Wszystkie pręty wykonano z tego samego materiału o module sprężystości *E*. Pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów górnych wynosi *A*, a dolnych *2A*. Przyjąć, że prętom ściskanym wyboczenie nie zagraża. Wymiary konstrukcji pokazano na rysunku 3.16.




**Rys. 3.16**

R o z w i ą z a n i e. Położenie układu po odkształceniu prętów pokazano na rys. 3.17.




**Rys. 3.17**

Długości prętów

$$l_1 = l_2 = \frac{a}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a,$$

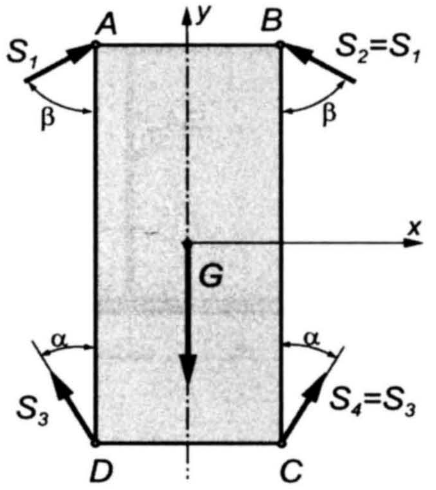
$$l_3 = l_4 = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a.$$

Z symetrii układu (budowy i obciążenia)

$\Delta l_1 = \Delta l_2 \Rightarrow S_1 = S_2$,

$\Delta l_3 = \Delta l_4 \Rightarrow S_3 = S_4$.

Tarcza uwolniona od więzów jest pokazana na rys. 3.18. Zwroty sił w prętach przyjęto zgodnie z ich odkształceniami (rys. 3.17).




**Rys. 3.18**

Równanie równowagi sił

$$\sum F_y \Rightarrow 2S_2\cos\beta + 2S_4\cos\alpha - G = 0.$$

Równanie geometryczne (dla nieodkształcalnej tarczy)

$$\overline{BB'} = \overline{CC'},$$

gdzie

$$\overline{BB'} = \frac{\Delta l_2}{\cos\beta} = 2\frac{S_2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}a}{EA} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{S_2 a}{EA} = \frac{4\sqrt{3}S_1 a}{3EA},$$

$$\overline{CC'} = \frac{\Delta l_3}{\cos\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{S_4 a}{EA} = \frac{2\sqrt{3}S_3 a}{3EA}.$$

Z równania geometrycznego obliczono $S_3 = 2S_1$. Ostatecznie z równania równowagi i równania geometrycznego otrzymano

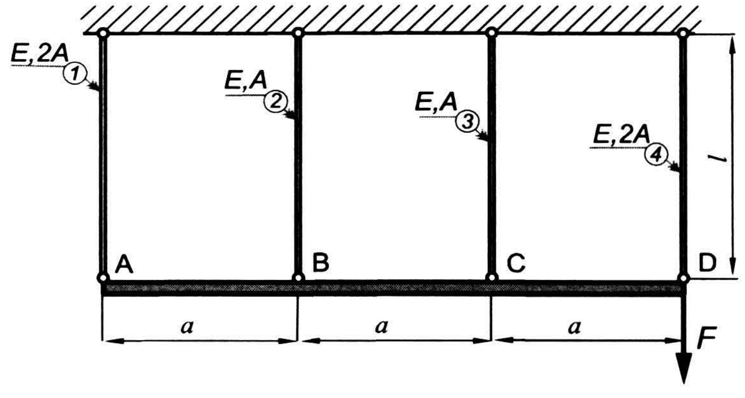
$$S_2 = S_1 = \frac{G}{1+2\sqrt{3}},$$

$$S_4 = S_3 = \frac{2G}{1+2\sqrt{3}}.$$

Obniżenie tarczy równe przemieszczeniu np. narożnika $B$ wynosi

$$u_B = u_A = u_C = u_D = \overline{AA'} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{S_1 a}{EA} = \frac{4\sqrt{3}}{3(1+2\sqrt{3})}\frac{Ga}{EA}.$$

**Zadanie 3.7.** Obliczyć naprężenia w czterech pionowych prętach, na których zawieszona jest nieodkształcalna belka obciążona siłą $F$. Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów wykonanych z tego samego materiału podano na rys. 3.19.

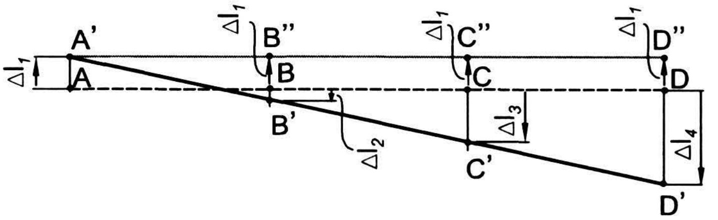



**Rys. 3.19**

R o z w i ą z a n i e. Liczba niewiadomych $LN$ = 4 (siły w prętach). Liczba równań równowagi $LR$ = 2 (równanie sumy rzutów sił na oś poziomą jest spełnione tożsamościowo). Statyczna niewyznaczalność układu

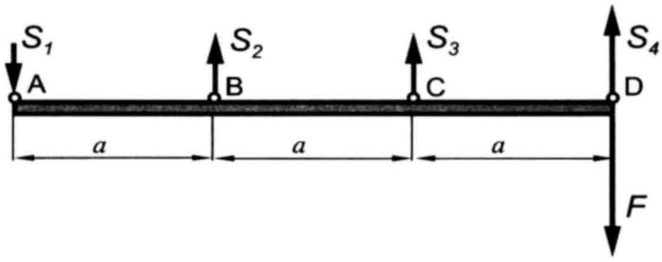
$$n = LN - LR = 4 - 2 = 2.$$

Jedną z możliwych wersji położenia belki po odkształceniu prętów pokazano na rys. 3.20. Przyjęto, że pręt 1 doznał skrócenia, a pozostałe pręty wydłużyły się.




**Rys. 3.20**

Linią przerywaną zaznaczono położenie belki przed odkształceniem prętów, linią $A'D'$ – położenie belki po ich odkształceniu. Punkty $A'D''D'$ wyznaczają trójkąt prostokątny. Siły działające na belkę po uwolnieniu od więzów pokazano na rys. 3.21.




**Rys. 3.21**

Równania równowagi

$$\sum F_y \Rightarrow -S_1 + S_2 + S_3 + S_4 - F = 0,$$
$$\sum M_D \Rightarrow S_1 \cdot 3a - S_2 \cdot 2a - S_3 \cdot a = 0.$$

Dwa równania geometryczne (wynikające z podobieństwa trójkątów) są następujące

$$\frac{\Delta l_1 + \Delta l_4}{3a} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{a},$$
$$\frac{\Delta l_1 + \Delta l_3}{2a} = \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{a}.$$

w równaniach tych

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{E2A},$$
$$\Delta l_2 = \frac{S_2 l}{EA},$$
$$\Delta l_3 = \frac{S_3 l}{EA},$$
$$\Delta l_4 = \frac{S_4 l}{E2A}.$$

Po podstawieniach i przekształceniach otrzymano układ czterech równań z czterema niewiadomymi

$$-S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = F,$$
$$3S_1 - 2S_2 - S_3 = 0,$$
$$2S_1 + 6S_2 - S_4 = 0,$$
$$S_1 + 4S_2 - 2S_3 = 0,$$

z którego wyznaczono wartości sił działających w prętach

$$S_1 = \frac{8}{57} F,$$

$$S_2 = \frac{5}{57} F,$$

$$S_3 = \frac{14}{57} F,$$

$$S_4 = \frac{46}{57} F.$$

Dodatnie wartości sił $S_i$ świadczą o tym, że przyjęty punkt obrotu belki rzeczywiście leży w przedziale $AB$. Siły normalne działające w prętach

$$N_1 = -S_1 = -\frac{8}{57} F,\ N_2 = \frac{5}{57} F,\ N_3 = \frac{14}{57} F,\ N_4 = \frac{46}{57} F.$$

Naprężenia normalne w prętach

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = -\frac{4}{57}\frac{F}{A},$$

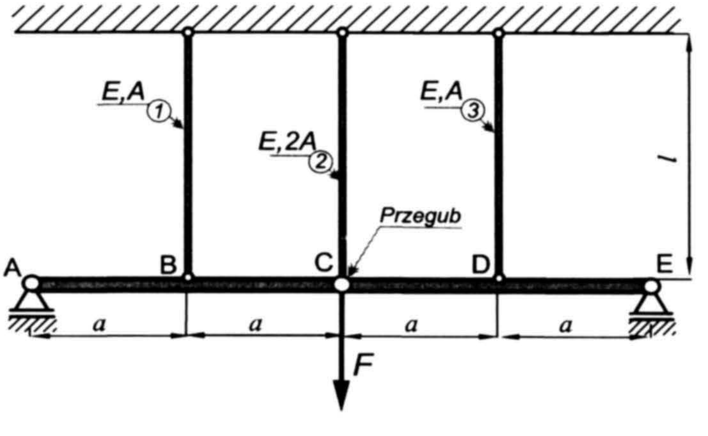
$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{5}{57}\frac{F}{A},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{14}{57}\frac{F}{A},$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{2A} = \frac{23}{57}\frac{F}{A}.$$

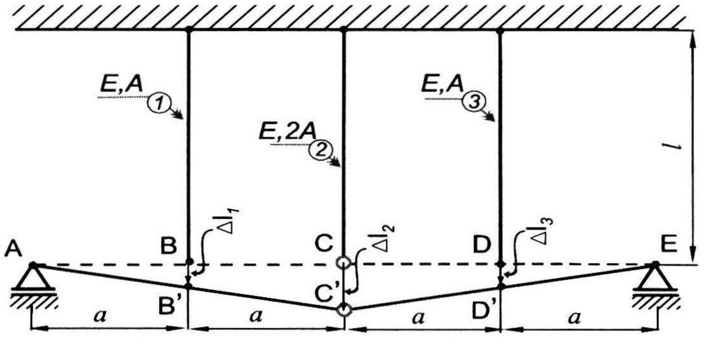
Największe naprężenia występują w pręcie nr 4. Pręt nr 1 jest ściskany (ujemna siła normalna i ujemne naprężenie).

**Zadanie 3.8.** Dwie nieodkształcalne belki $\overline{AC}$ i $\overline{CE}$ połączone przegubowo w punkcie $C$ i podparte na przesuwnych podporach przegubowych w punktach $A$ *i* $E$ podwieszono dodatkowo na trzech prętach, jak pokazano na rys. 3.22. Układ obciążono pionową siłą $F$ przyłożoną w przegubie $C$. Obliczyć pola powierzchni przekroju poprzecznego prętów ($A$ i $2A$), mając dane: $F = 60\ kN$, $k_r = 150\ MPa$. Pręty wykonano z tego samego materiału o module sprężystości $E$.

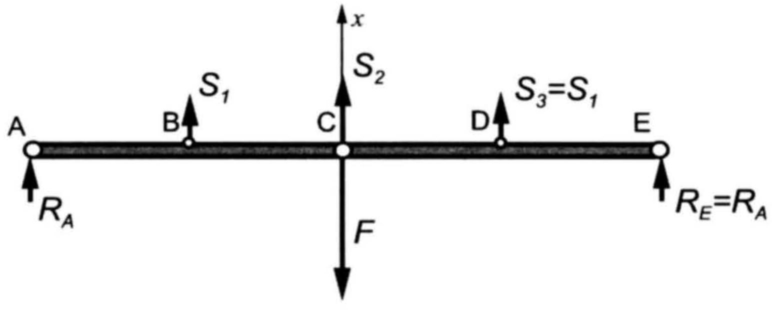



Rys. 3.22

R o z w i ą z a n i e. Po uwzględnieniu symetrycznej budowy i symetrycznego obciążenia, układ po odkształceniu przyjmie położenie pokazane na rys. 3.23. Uwolnienie układu od więzów zgodne z rys. 3.23 przedstawia rys. 3.24.




Rys. 3.23




Rys. 3.24

Ze względu na: układ sił równoległych, symetrię układu *($S_3 = S_1$, $R_E = R_A$)* oraz przegub w punkcie $C$ do dyspozycji mamy dwa równania równowagi:

- sumę rzutów sił na oś pionową

$$\sum F_y \Rightarrow 2R_A + 2S_1 + S_2 - F = 0,$$

- sumę momentów względem punktu $C$ dla belki $AC$ lub belki $CE$

$$\sum M_c \Rightarrow R_A \cdot 2a + S_1 \cdot a = 0 \Rightarrow R_A = -\frac{1}{2} S_1.$$

Brakujące równanie to równanie geometryczne o postaci

$$\frac{\Delta l_2}{2a} = \frac{\Delta l_1}{a},$$

z którego otrzymano

$$S_2 = 4S_1.$$

Po podstawieniu $R_A$ i $S_2$ do równania otrzymanego z $\sum F_y$ obliczono $S_1$

$$-S_1 + 2S_1 + 4S_1 = F,$$

$$S_1 = \frac{1}{5}F.$$

Z pozostałych równań wyznaczono siły

$$S_2 = \frac{4}{5}F,$$

$$R_A = -\frac{1}{10}F.$$

Siły normalne w prętach

$$N_1 = S_1 = \frac{1}{5}F,$$

$$N_2 = S_2 = \frac{4}{5}F.$$

Naprężenia normalne w prętach 1 i 2

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{1}{5}\frac{F}{A},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{2F}{5A}.$$

Z warunku bezpiecznego projektowania

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{2}{5}\frac{F}{A} \le k_r$$

otrzymano minimalne pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów 1 i 3

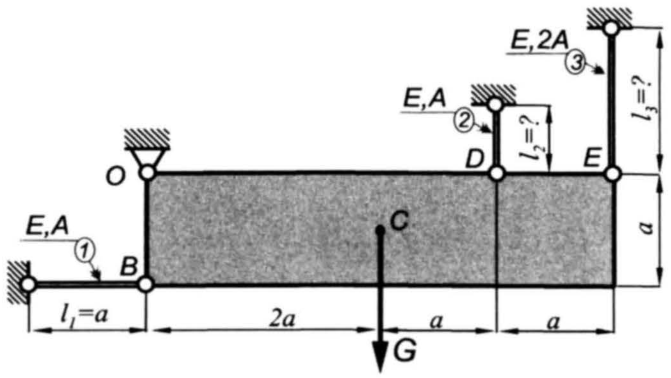
$$A = \frac{2}{5}\frac{F}{k_r}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano

$$A \ge \frac{2 \cdot 60 \cdot 10^{-3}\,MN}{5 \cdot 150\,MPa} = 1{,}6 \cdot 10^{-4}\,m^2 = 1{,}6\,cm^2,$$

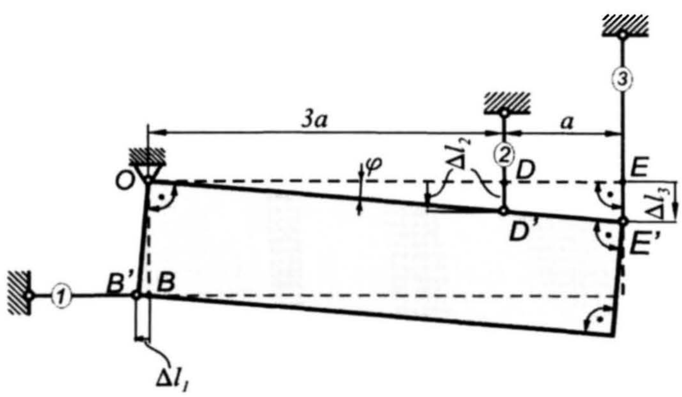
$$A_2 = 2A = 3{,}2\,cm^2.$$

**Zadanie 3.9.** Nieodkształcalna jednorodna tarcza prostokątna o ciężarze $G$ i wymiarach $a$×$4a$ jest zamocowana jak pokazano na rys. 3.25. Wszystkie pręty wykonano z tego samego materiału o module sprężystości $E$. Pola powierzchni przekrojów poprzecznych prętów nr 1 i 2 są jednakowe ($A_1 = A_2 = A$), a pręta nr 3 – $A_3 = 2A$. Długość pręta nr 1 $l_1 = a$. Jakie muszą być długości pozostałych prętów, aby siły we wszystkich prętach miały taką samą wartość bezwzględną? Wyznaczyć te siły i kąt obrotu tarczy po odkształceniu prętów.



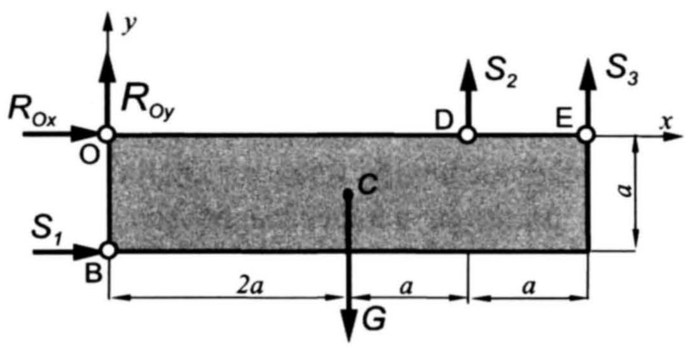

**Rys. 3.25**

R o z w i ą z a n i e. Układ po odkształceniu pokazano na rys. 3.26 (dla czytelności rysunku odkształcenia prętów są przesadnie duże).




**Rys. 3.26**

Na rysunku 3.27 pokazano siły działające na tarczę po uwolnieniu od więzów zgodnie z rys. 3.26.




**Rys. 3.27**

Ponieważ składowe reakcji w punkcie $O$ zgodnie z treścią zadania nas nie interesują, ograniczymy się tylko do jednego równania równowagi, a mianowicie

$$\sum M_0 = S_1 \cdot a + S_2 \cdot 3a + S_3 \cdot 4a - G \cdot 2a = 0.$$

Zadanie jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalne, dwa równania geometryczne wynikające z rys. 3.26, mają postać

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_2}{3a},$$

$$\frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\Delta l_3}{4a},$$

gdzie:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{EA},$$

$$\Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{EA},$$

$$\Delta l_3 = \frac{S_3 l_3}{E2A}.$$

Przyjmijmy zgodnie z treścią zadania, że $S_1 = S_2 = S_3 = S$, $l_1 = a$. Wtedy z równań geometrycznych wynikają długości prętów nr 2 i 3 $l_2 = 3a$, $l_3 = 8a$. Z równania równowagi wyznaczono siłę

$$S = \frac{1}{4} G.$$

Tangens kąta obrotu tarczy

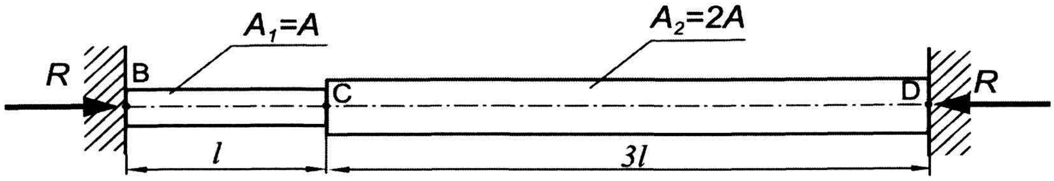
$$tg\varphi = \frac{\Delta l_2}{3a} = \frac{S \cdot 3a}{3aEA} = \frac{S}{EA} = \frac{G}{4EA}$$

skąd

$$\varphi = arctg \frac{G}{4EA}.$$

Kąt $\varphi$ jest bardzo mały, więc można przyjąć, że $\varphi \cong tg\varphi = \dfrac{G}{4EA}$.

**Zadanie 3.10.** Między nieodkształcalnymi ścianami umieszczono pręt o skokowo zmiennym polu powierzchni przekroju poprzecznego $A_1 = A$ i $A_2 = 2A$ (rys. 3.28). Obliczyć dopuszczalny przyrost temperatury $\Delta T > 0$ na całej długości pręta dla następujących danych: $l_1 = l$, $l_2 = 3l$ moduł sprężystości $E = 2 \cdot 10^5 MPa$, współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} \dfrac{1}{\mathrm{K}}$, naprężenie dopuszczalne na ściskanie (przy założeniu, że prętowi nie grozi wyboczenie) $k_c = 80\, MPa$.




**Rys. 3.28**

R o z w i ą z a n i e. Reakcje $R$ ścian muszą zlikwidować wydłużenie pręta spowodowane przyrostem temperatury, czyli

$$-\frac{Rl}{EA}-\frac{R3l}{E2A}+\alpha 4l\Delta T=0,$$

skąd

$$R=\frac{8}{5}EA\alpha\Delta T.$$

Siła normalna

$$N=-R=-\frac{8}{5}EA\alpha\Delta T.$$

Maksymalne co do wartości bezwzględnej naprężenie ściskające występuje w części pręta o mniejszym polu powierzchni przekroju poprzecznego $A_1=A$

$$\left|\sigma_c\right|_{\max}=\frac{|N|}{A}=\frac{8}{5}E\alpha\Delta T.$$

Naprężenie to musi być co najwyżej równe naprężeniu dopuszczalnemu na ściskanie

$$\frac{8}{5}E\alpha\Delta T\le k_c.$$

Z warunku tego wynika, że

$$\Delta T_{\max}=\frac{5}{8}\frac{k_c}{E\alpha}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych

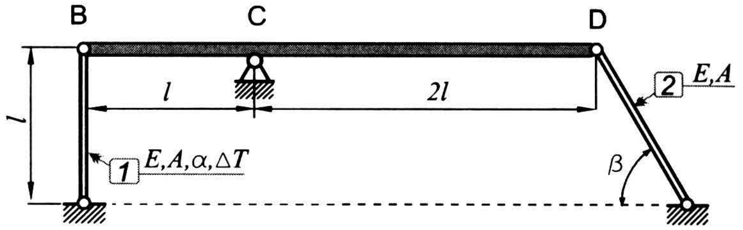
$$\Delta T_{\max}=\frac{5}{8}\cdot\frac{80}{2\cdot 10^5\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}}=20{,}83\,\mathrm{K}.$$

**Zadanie 3.11.** Obliczyć naprężenia, jakie powstaną w prętach podpierających lekką nieodkształcalną belkę po podgrzaniu pręta 1 o $\Delta T$ = 40 K.

Pozostałe dane:

- moduł sprężystości $E=2\cdot 10^{-5}\,MPa$,
- współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha=1{,}2\cdot 10^{-5}$ 1/K,
- długość pręta 1 $l_1=l=0{,}5\ m$,

- pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów A = 3,14 $cm^2$,
- kąt pochylenia pręta 2 $\beta = 60°$ (rys. 3.29).

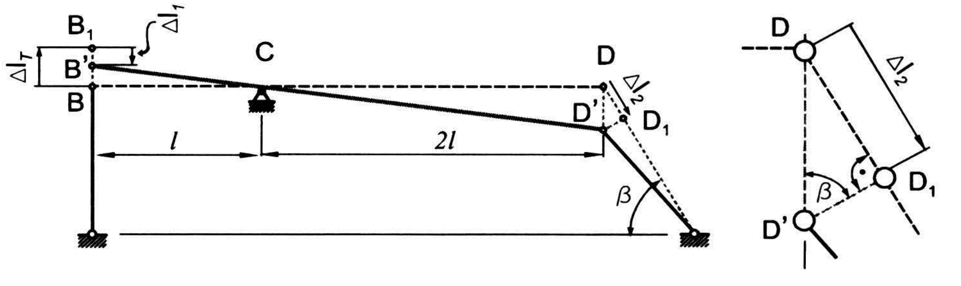



**Rys. 3.29**

R o z w i ą z a n i e. Gdyby pręt 1 nie był połączony z belką, jego wydłużenie spowodowane przyrostem temperatury o $\Delta T$ wyniosło by

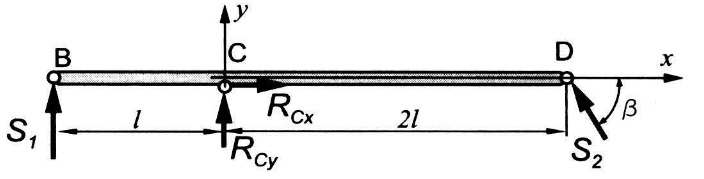
$\Delta l_T = \alpha\, l\, \Delta T.$

Oddziaływanie połączonej z prętem sztywnej belki spowoduje powstanie w pręcie 1 siły ściskającej $S_1$ i skrócenie pręta o długości swobodnej $l + \Delta l_T \approx l$ o $\Delta l_1 = \dfrac{S_1 l}{EA}$.
Ostatecznie, układ po podgrzaniu pręta 1 przyjmie położenie pokazane na rys. 3.30.




**Rys. 3.30**

Siły działające na belkę po uwolnieniu od więzów (zwroty sił w prętach zgodne z odkształceniami prętów wywołanymi tymi siłami) pokazano na rys. 3.31.




**Rys. 3.31**

Zgodnie z treścią zadania do obliczenia sił w prętach wystarczy napisać tylko jedno równanie statyki

$\sum M_C \Rightarrow S_1 \cdot l - S_2 \sin\beta \cdot 2l = 0.$

Równanie geometryczne (układ jednokrotnie statycznie niewyznaczalny) wynikające z rys. 3.30, czyli z podobieństwa trójkątów $CBB'$ i $CDD'$, ma postać

$$\frac{\Delta l_T - \Delta l_1}{a} = \frac{\overline{DD'}}{2a}$$

gdzie

$$\overline{DD'} = \frac{\Delta l_2}{\sin\beta}.$$

Równanie geometryczne po przekształceniach przyjmuje postać

$$2(\alpha l \Delta T - \frac{S_1 l}{EA}) = \frac{S_2 \dfrac{l}{\sin\beta}}{EA\sin\beta},$$

czyli

$$2S_1 \sin^2\beta + S_2 = 2\alpha\, E\, A\, \Delta T \sin^2\beta.$$

Po rozwiązaniu układu równań

$$S_1 - 2S_2 \sin\beta = 0,$$

$$2S_1 \sin^2\beta + S_2 = 2\alpha E \cdot A \cdot \Delta T \sin^2\beta$$

otrzymano

$$S_1 = \frac{4EA\alpha\Delta T \sin^3\beta}{1 + 4\sin^3\beta},$$

$$S_2 = \frac{2EA\alpha\Delta T \sin^2\beta}{1 + 4\sin^3\beta}.$$

Siły normalne i naprężenia normalne w prętach wynoszą

$N_1 = - S_1$, $N_2 = - S_2$,

$$\sigma_1 = -\frac{N_1}{A} = -\frac{4E\alpha\Delta T \sin^3\beta}{1 + 4\sin^3\beta},$$

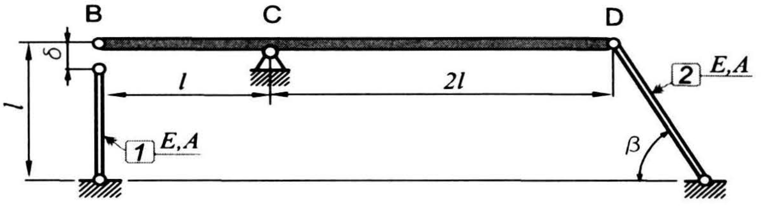
$$\sigma_2 = -\frac{N_2}{A} = -\frac{2E\alpha\Delta T \sin^2\beta}{1 + 4\sin^3\beta}.$$

W przypadku gdy $A_1 = A_2 = A$ naprężenia nie zależą od pola powierzchni przekroju poprzecznego prętów. Dla danych liczbowych podanych w treści zadania

$$\sigma_1 = -69{,}3\, MPa,$$

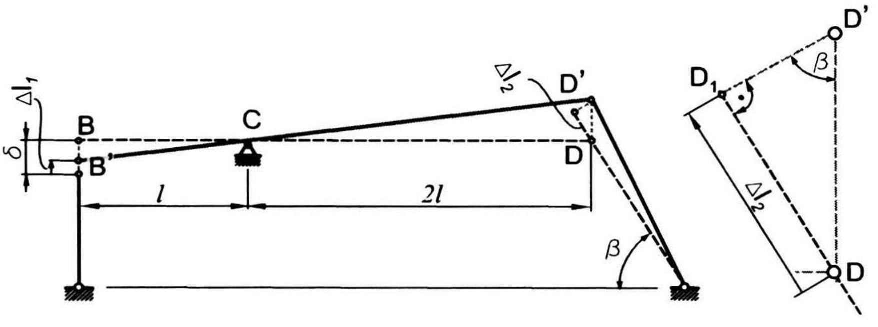
$$\sigma_2 = -40{,}0\, MPa.$$

**Zadanie 3.12.** Obliczyć naprężenia w prętach po zmontowaniu układu, jeżeli pręt 1 został wykonany za krótki o $\delta = 0{,}2$ *mm*. Pozostałe dane liczbowe *E, A, l, β* jak w zadaniu 3.11.




**Rys. 3.32**

R o z w i ą z a n i e. Układ po zmontowaniu pokazano na rys. 3.33.

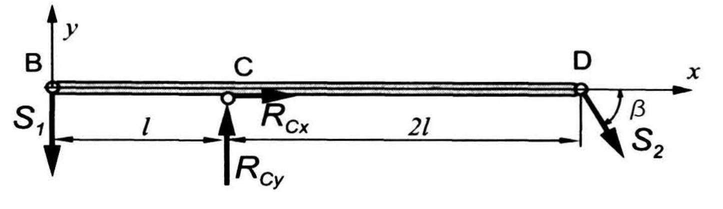



**Rys. 3.33**

Siły działające na belkę po uwolnieniu od więzów pokazano na rys. 3.34.
Równanie równowagi

$$\sum M_C \Rightarrow -S_1 l + S_2 \sin\beta \cdot 2l = 0,$$

$$S_1 = 2S_2 \sin\beta$$




**Rys. 3.34**

Równanie geometryczne wynikające z rys. 3.33

$$\frac{\delta - \Delta l_1}{l} = \frac{\overline{DD'}}{2l},$$

gdzie:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l}{EA},$$

$$\overline{DD'} = \frac{\Delta l_2}{\sin\beta} = \frac{S_2 l}{EA\sin^2\beta},$$

po przekształceniach przyjmuje postać

$$2(\delta - \frac{S_1 l}{EA}) = \frac{S_2 l}{EA\sin^2\beta}.$$

Rozwiązanie układu dwóch równań (równowagi i geometrycznego) daje

$$S_1 = N_1 = 4EA\frac{\delta}{l}\cdot\frac{\sin^3\beta}{1+4\sin^3\beta},$$

$$S_2 = N_2 = 2EA\frac{\delta}{l}\cdot\frac{\sin^2\beta}{1+4\sin^3\beta}.$$

Naprężenia w prętach po zmontowaniu układu

$$\sigma_1 = 4E\frac{\delta}{l}\cdot\frac{\sin^3\beta}{1+4\sin^3\beta} = 57{,}8\,MPa,$$

$$\sigma_2 = 2E\frac{\delta}{l}\cdot\frac{\sin^2\beta}{1+4\sin^3\beta} = 33{,}4\,MPa.$$

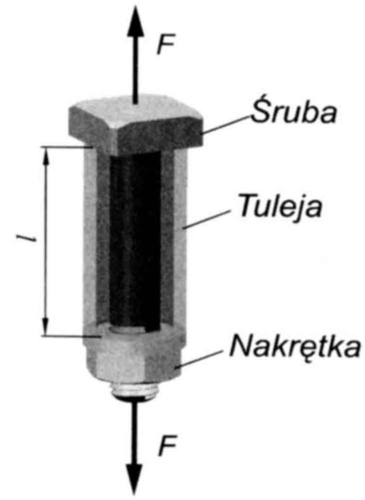
Gdyby za krótki o $\delta$ pręt nr 1 podgrzano o $\Delta T$ = 40 K, wtedy zgodnie z zasadą superpozycji i wynikami otrzymanymi w zadaniach 3.11 i 3.12 naprężenia w prętach zmaleją do

$$\sigma_1 = -69{,}3\,MPa + 57{,}8\,MPa = -11{,}5\,MPa,$$

$$\sigma_2 = -40{,}0\,MPa + 33{,}4\,MPa = -6{,}6\,MPa.$$

**Zadanie 3.13.** W tuleję o długości $l$ włożono śrubę nagwintowaną na całej długości gwintem o skoku $h$ i całość skręcono nakrętką (rys. 3.35). Po skasowaniu wzdłużnego luzu nakrętkę obrócono jeszcze o kąt $\alpha$ [deg], co spowodowało wystąpienie napięcia w złączu (ściskanie tulei i rozciąganie śruby). Tak uformowane złącze obciążono osiową siłą rozciągającą $F$. Określić stan naprężenia w śrubie i w tulei przed obciążeniem złącza siłą $F$ i po obciążeniu, przy następujących danych:

- sztywność śruby na rozciąganie – $E_s A_s$,
- sztywność tulei na ściskanie – $E_t A_t$.

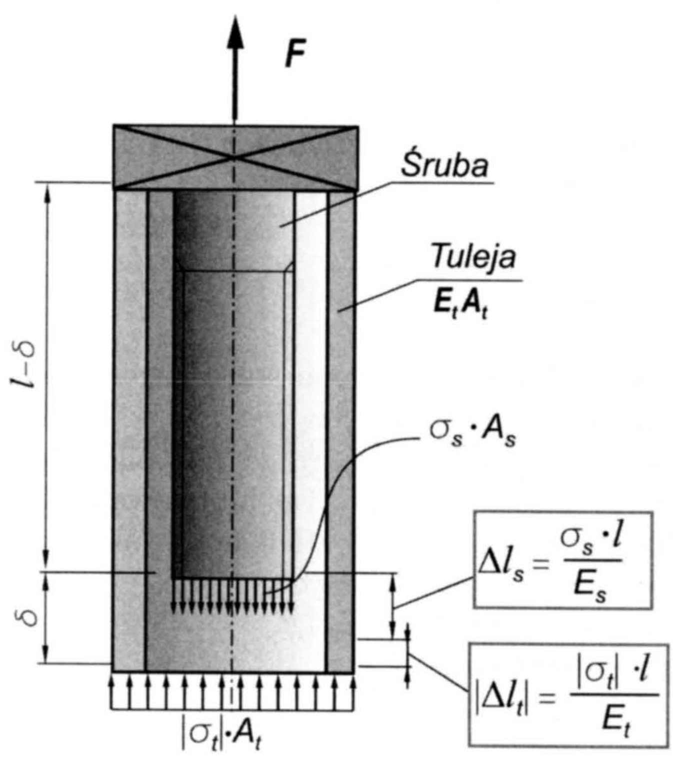



**Rys. 3.35**

R o z w i ą z a n i e. Gdyby nie było tulei, to nakrętka obrócona o kąt $\alpha$ przybliżyłaby się do łba śruby o

$$\delta = \frac{\alpha}{360} \cdot h.$$

Istnienie tulei spowoduje skrócenie jej o $|\Delta l_t|$ i wydłużenie rdzenia śruby o $\Delta l_s$.




**Rys. 3.36**

Związek między podanymi wyżej odkształceniami jest następujący

$$|\Delta l_t| + \Delta l_s = \delta$$

lub po wykorzystaniu prawa Hooke'a

$$\frac{|\sigma_t|}{E_t} + \frac{\sigma_s}{E_s} = \frac{\delta}{l}.$$

Z równania równowagi sił działających na myślowo odciętą część złącza (rys. 3.36) otrzymano

$$F + \sigma_t A_t - \sigma_s A_s = 0,$$

gdzie

$$\sigma_t = -|\sigma_t|.$$

Po rozwiązaniu układu równań

$$-\sigma_t E_s + \sigma_s E_t = E_s E_t \frac{\delta}{l}$$

$$\sigma_t A_t + \sigma_s A_s = F$$

otrzymano

$$\sigma_s = \frac{E_s}{E_s A_s + E_t A_t}\left(\frac{\delta}{l} E_t A_t + F\right)$$

$$\sigma_t = -\frac{E_t}{E_s A_s + E_t A_t}\left(\frac{\delta}{l} E_s A_s - F\right)$$

Otrzymane wyniki dotyczące naprężeń są ważne dla $\sigma_t \le 0$, czyli dla $F = F_{gr} \le E_s A_s \frac{\delta}{l}$.

Gdy siła $F$ jest większa od $F_{gr}$, wówczas między łbem śruby i tuleją pojawia się luz i całą siłę $F$ przenosi śruba (rdzeń śruby).

Naprężenia w napiętym złączu przed przyłożeniem siły $F$ to naprężenia przy $F = 0$, czyli

$$\sigma_s = \frac{E_s E_t A_t}{E_s A_s + E_t A_t} \cdot \frac{\delta}{l} = \frac{E_s E_t A_t}{E_s A_s + E_t A_t}\left(\frac{\alpha}{360} \cdot \frac{h}{l}\right),$$

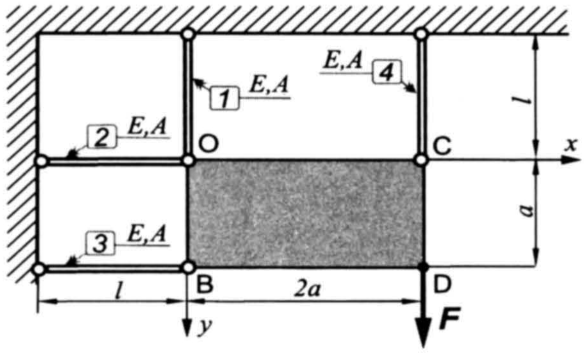
$$\sigma_t = -\frac{E_s E_t A_s}{E_s A_s + E_t A_t}\left(\frac{\alpha}{360} \cdot \frac{h}{l}\right).$$

Ostatnie dwa wzory dla szczególnego przypadku $E_s = E_t = E$ i $A_s = A_t = A$ przyjmują postać

$$\sigma_s = \frac{\alpha}{720} E \frac{h}{l},$$

$$\sigma_t = -\frac{\alpha}{720} E \frac{h}{l}.$$

**Zadanie 3.14.** Nieodkształcalną tarczę prostokątną o wymiarach $a \times 2a$ zawieszono na czterech jednakowych prętach o długości $l$, module sprężystości $E$ i polu powierzchni przekroju poprzecznego $A$. Tarczę obciążono pionową siłą $F$ w narożu $D$ (rys. 3.37). Obliczyć: przemieszczenia naroży tarczy, jej kąt obrotu oraz siły w prętach.




**Rys. 3.37**

R o z w i ą z a n i e. Liczba niewiadomych (siły w prętach) – $RN = 4$. Liczba równań statyki (płaski dowolny układ sił) – $RS = 3$.
Statyczna niewyznaczalność układu

n = RN – RS = 4 – 3 = 1.

Położenie tarczy po odkształceniu prętów zostanie określone przez składowe $u_{xo}$ i $u_{yo}$ przemieszczenia naroża 0 (początku układu współrzędnych $xy$) oraz przez kąt obrotu tarczy $\varphi$ (rys. 3.38).
Przy upraszczającym założeniu (słusznym dla małych przemieszczeń), że przemieszczenia wywołane obrotem przyjmujemy po stycznej do łuku (prostopadłe do początkowego promienia obrotu), z rys. 3.38 wynikają następujące zależności:

$$u_{xB} = u_{xo} - a\varphi,$$

$$u_{yB} = u_{yo},$$

$$u_{xc} = u_{xo},$$

$$u_{yC} = u_{yo} + 2a\varphi,$$

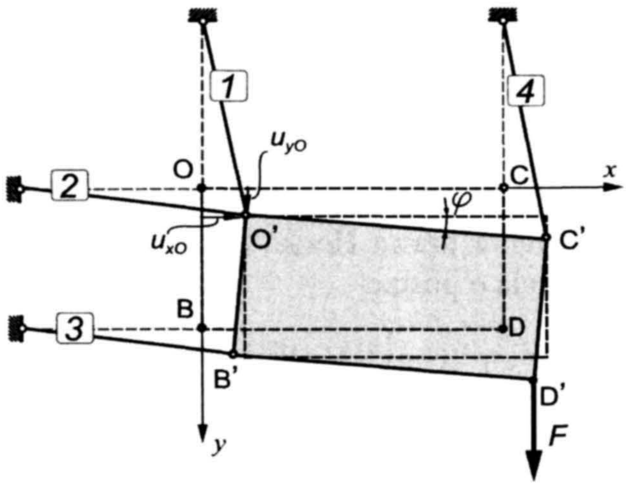
$$u_{xD} = u_{xC} - a\varphi = u_{xo} - a\varphi,$$

$$u_{yD} = u_{yB} + 2a\varphi = u_{yo} + 2a\varphi;$$

$$\Delta l_1 = u_{yo},$$

$$\Delta l_2 = u_{xo},$$

$$\Delta l_3 = u_{xB}, \Delta l_4 = u_{yD}.$$




**Rys. 3.38**

Po wykorzystaniu prawa Hooke'a otrzymano

$$\frac{S_1 l}{EA} = u_{yo},$$

$$\frac{S_2 l}{EA} = u_{xo},$$

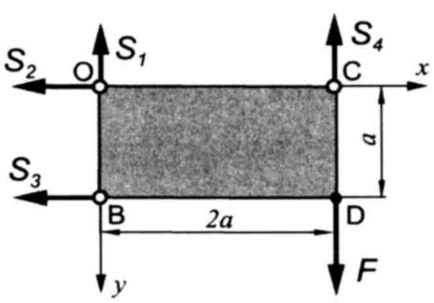
$$\frac{S_3 l}{EA} = u_{xB} = u_{xo} - a\varphi,$$

$$\frac{S_4 l}{EA} = u_{yD} = u_{yo} + 2a\varphi.$$

gdzie dla małego kąta $\varphi$

$$\varphi \cong tg\varphi.$$

Na rysunku 3.39 pokazano siły działające na tarczę po uwolnieniu od więzów




**Rys. 3.39**

Zwroty wszystkich sił $S_i$ działających na tarczę narysowano w kierunku od węzłów, ponieważ zgodnie z rys. 3.39 wszystkie pręty uległy wydłużeniu. Równania równowagi są następujące:

$$\sum F_x \Rightarrow -S_2 - S_3 = 0,$$
$$\sum F_y \Rightarrow -S_1 - S_4 + F = 0,$$
$$\sum M_0 \Rightarrow -S_3 \cdot a + S_4 2a - F \cdot 2a = 0.$$

Po wyznaczeniu, wynikających z prawa Hooke'a, sił $S_i$ i podstawieniu ich do równań równowagi mamy trzy równania o postaci

$$-\frac{EA}{l} u_{xo} - \frac{EA}{l}(u_{xo} - a\varphi) = 0,$$
$$\frac{EA}{l} u_{yo} + \frac{EA}{l}(u_{yo} + 2a\varphi) - F = 0,$$
$$-\frac{EA}{l}(u_{xo} - a\varphi) \cdot a + \frac{Ea}{l}(u_{yo} + 2a\varphi) \cdot 2a - F \cdot 2a - F \cdot 2a = 0.$$

Po uporządkowaniu otrzymano trzy równania z trzema niewiadomymi $u_{xo}, u_{yo}$ i $\varphi$

$$-2u_{xo} + a\varphi = 0,$$
$$2u_{yo} + 2a\varphi = \frac{Fl}{EA},$$
$$-u_{xo} + 2u_{yo} + 5a\varphi = 2\frac{Fl}{EA}.$$

W wyniku rozwiązania tego układu równań otrzymano:

$$u_{xo} = 0{,}2\frac{Fl}{EA},$$
$$u_{yo} = 0{,}1\frac{Fl}{EA},$$
$$\varphi = 0{,}4\frac{Fl}{aEA}.$$

Następnie znaleziono przemieszczenia pozostałych narożników tarczy oraz siły w prętach:

$$u_{xB} = -0{,}2\frac{Fl}{EA},$$
$$u_{yB} = 0{,}1\frac{Fl}{EA},$$
$$u_{xC} = 0{,}2\frac{Fl}{EA},$$
$$u_{yC} = 0{,}9\frac{Fl}{EA},$$
$$u_{xD} = -0{,}2\frac{Fl}{EA},$$

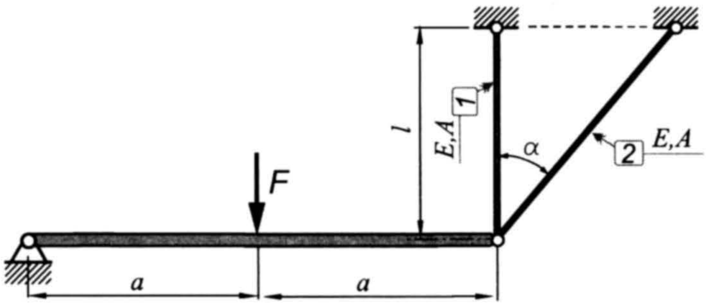
$$u_{yD} = 0{,}9\frac{Fl}{EA};$$

$S_1 = 0{,}1\,F,\ S_2 = 0{,}2\,F,\ S_3 = -\,0{,}2F,\ S_4 = 0{,}9\,F.$

Z obliczeń wynika, że siła w pręcie 3 jest ujemna, co oznacza, że pręt 3 jest ściskany (pręt uległ skróceniu).

## 3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

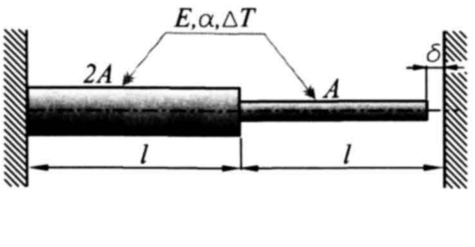
**Zadanie 3.15.** Obliczyć pole powierzchni $A$ przekroju poprzecznego prętów podtrzymujących nieodkształcalną belkę obciążoną jak pokazano na rys. 3.40.
Dane liczbowe: $F = 40\ kN$, $l = 0{,}6\ m$, $E = 2 \cdot 10^5\ MPa$, $\alpha = 30°$, $a = 1\ m$, $\sigma_{rdop} = k_r = 150\ MPa$.




**Rys. 3.40**

ODPOWIEDŹ: $A \geq 0{,}81\ cm^2$.

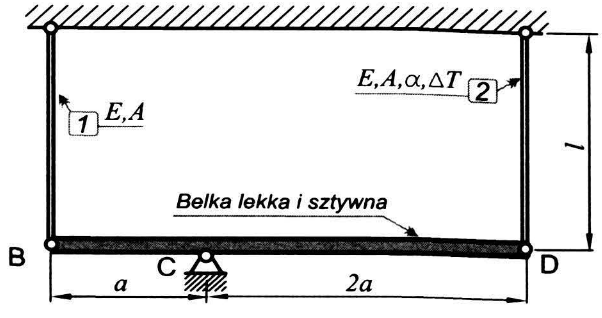
**Zadanie 3.16.** Obliczyć maksymalne (co do wartości bezwzględnej) naprężenie w pręcie przedstawionym na rys. 3.41 po podgrzaniu go o $\Delta T = 50$ K. Pozostałe dane liczbowe: $E = 10^5\ MPa$, $\alpha = 1{,}2\ 10^{-5}$ 1/K, $\delta = 0{,}2\ mm$, $l = 0{,}5\ m$, $A = 4\ cm^2$.




**Rys. 3.41**

ODPOWIEDŹ: $|\sigma|_{\max} = \dfrac{2E}{3l}(2\alpha \cdot l \cdot \Delta T - \delta) = 53{,}3\ MPa.$

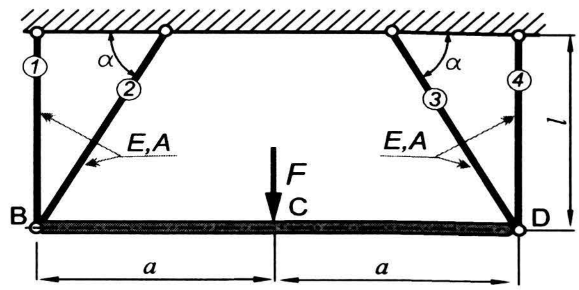
**Zadanie 3.17.** Obliczyć naprężenia w prętach o długości $l$, module sprężystości $E$ i polu powierzchni przekroju $A$, zamocowanych do końców sztywnej lekkiej belki o długości $3a$ (rys. 3.42) po podgrzaniu pręta 2 o $\Delta T$. Współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha$.




**Rys. 3.42**

ODPOWIEDŹ: $\sigma_1 = -\ 0{,}4E\alpha\Delta T$, $\sigma_2 = -\ 0{,}2E\alpha\Delta T$.

**Zadanie 3.18.** Obliczyć siły w prętach podtrzymujących sztywną belkę o długości $2a$, obciążoną jak na rysunku 3.43. Dane: $F$, $E$, $A$, $l$, $\alpha$.



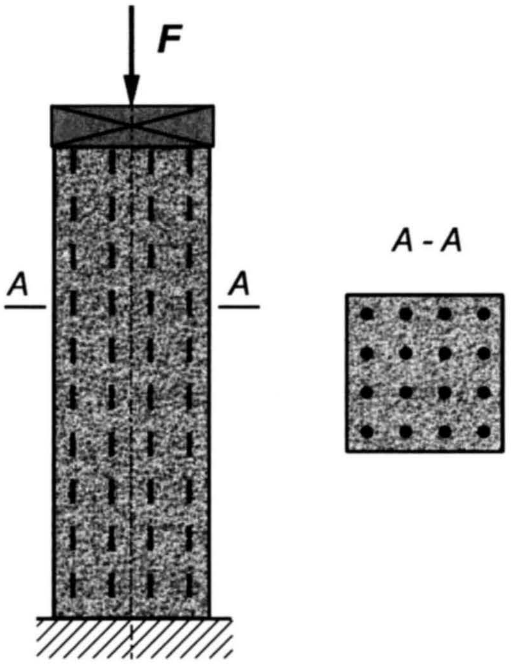

**Rys. 3.43**

ODPOWIEDŹ:

$$S_1 = S_4 = \frac{F}{2(1+\sin^3\alpha)},$$

$$S_2 = S_3 = \frac{F\sin^2\alpha}{2(1+\sin^3\alpha)}.$$

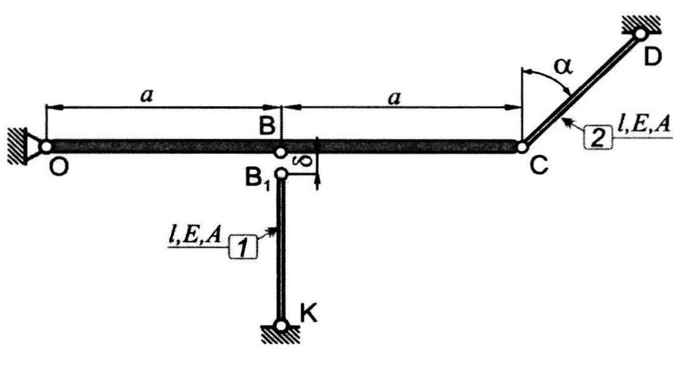
**Zadanie 3.19.** Przekroje końcowe ściskanego osiową siłą $F$ słupa żelbetowego (rys. 3.44) zbliżają się równomiernie. Stosunek modułów sprężystości zbrojenia (stali) $E_s$ i betonu $E_b$ wynosi $\dfrac{E_s}{E_b} = 10$. Obliczyć stosunek pola przekroju $A_b$ betonu do pola przekroju poprzecznego wszystkich prętów zbrojenia $A_s$, przy którym siła ściskająca beton jest równa sile ściskającej zbrojenie.




Rys. 3.44

ODPOWIEDŹ: $\frac{A_B}{A_s} = 10.$

**Zadanie 3.20.** Koniec $O$ sztywnej lekkiej belki o długości $2a$ jest zamocowany do przegubowej podpory. Belka $OC$ ma być połączona z dwoma jednakowymi prętami o długości $l$ i sztywności na rozciąganie $EA$ (rys. 3.45). Po zamontowaniu pręta $CD$, odchylonego od pionu o kąt $\alpha$, okazało się, że pręt $KB_1$ jest za krótki o $\delta$ ($\delta << l$). Pręt ten połączono z belką, napinając konstrukcję. Obliczyć naprężenia w prętach oraz zmiany długości prętów po zmontowaniu konstrukcji.




Rys. 3.45

ODPOWIEDŹ:

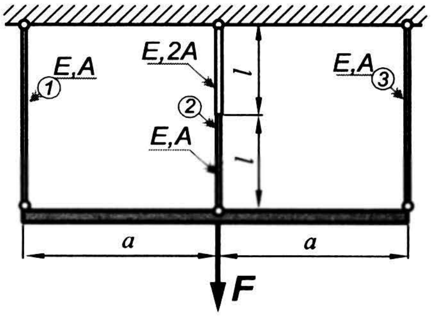
$$\sigma_1 = \frac{E\delta}{l}\left(\frac{4\cos^2\alpha}{1+4\cos^2\alpha}\right),$$

$$\Delta l_1 = \frac{4\cos^2\alpha}{1+4\cos^2\alpha}\delta,$$

$$\sigma_2 = \frac{E\delta}{l}\left(\frac{2\cos\alpha}{1+4\cos^2\alpha}\right),$$

$$\Delta l_2 = \frac{2\cos\alpha}{1+4\cos^2\alpha}\delta.$$

**Zadanie 3.21.** Sztywna pozioma belka zawieszona na trzech pionowych prętach jest obciążona w środku długości siłą $F$, jak pokazano na rys. 3.46. Pręt środkowy ma skokowo zmienny przekrój poprzeczny. Obliczyć siły normalne w prętach.



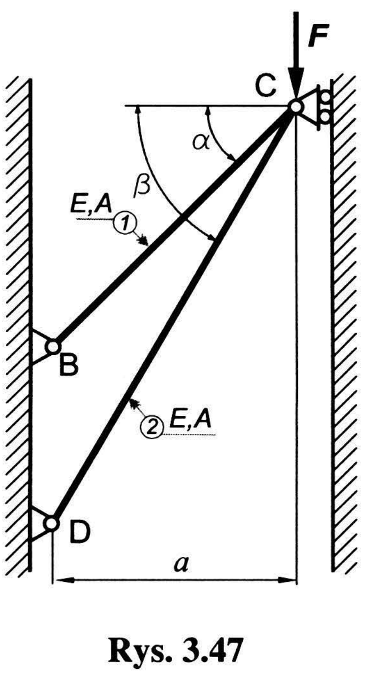

**Rys. 3.46**

ODPOWIEDŹ:

$N_1 = N_3 = 0{,}3F,$

$N_2 = 0{,}4F.$

**Zadanie 3.22.** Obliczyć siły normalne w dwóch nieważkich dwuprzegubowych prętach obciążonych w węźle $C$ pionową siłą $F$, przy założeniu, że wyboczenie prętów nie nastąpi.
Dane: $a$, $\alpha$, $\beta$, $F$, $A$ (rys. 3.47).



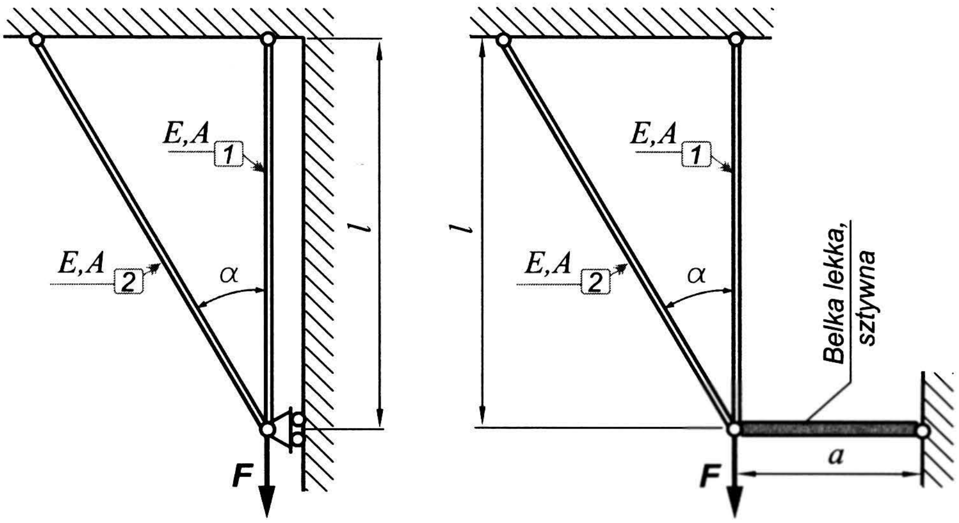

**Rys. 3.47**

ODPOWIEDŹ:

$$N_1 = -F\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin\beta\sin 2\beta},$$

$$N_2 = -F\frac{\sin 2\beta}{\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin\beta\sin 2\beta}.$$

**Zadanie 3.23.** Wyjaśnić, dlaczego w układach pokazanych na rys. 3.48 siły i naprężenia w prętach są takie same. Obliczyć te wielkości.




**Rys. 3.48**

ODPOWIEDŹ:

$$N_1 = \frac{F}{1+\cos^3\alpha},$$

$$N_2 = \frac{F\cos^2\alpha}{1+\cos^3\alpha},$$

$$\sigma_1 = \frac{F}{A(1+\cos^3\alpha)},$$

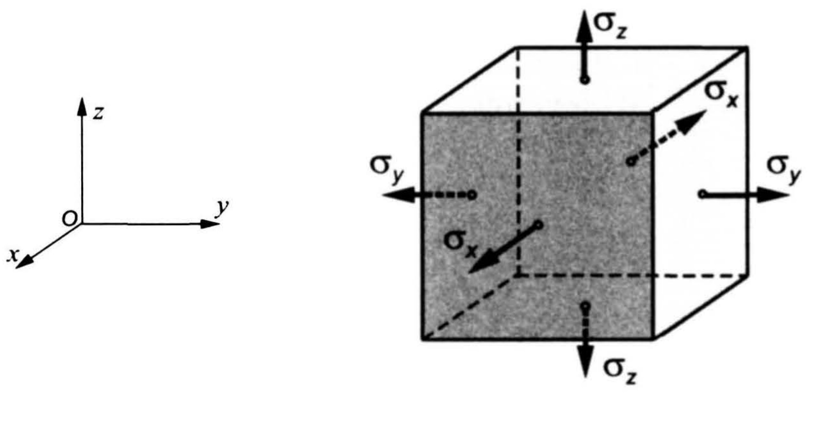
$$\sigma_2 = \frac{F\cos^2\alpha}{A(1+\cos^3\alpha)}.$$

# 4. TRÓJKIERUNKOWY STAN NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA

## 4.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia i wzory

Uogólnione prawo Hooke'a dla trójkierunkowego stanu naprężenia sprężystego ciała izotropowego obciążonego naprężeniami głównymi $\sigma_x$, $\sigma_y$ i $\sigma_z$ ma postać

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x), \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y). \end{aligned} \tag{4.1}$$




**Rys. 4.1**

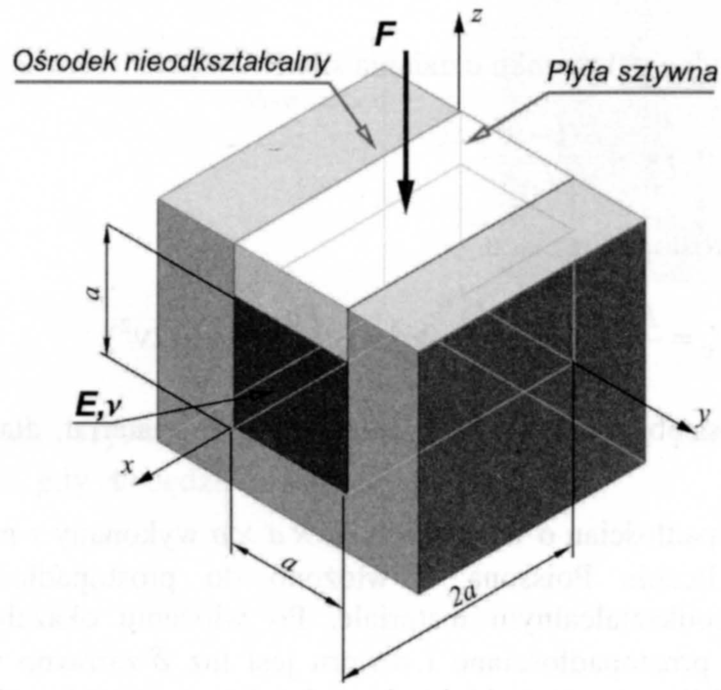
Względna zmiana objętości prostopadłościanu o objętości $V_0$

$$\frac{\Delta V}{V_0} \cong \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{4.2}$$

Ograniczenie odkształceń obciążonego ciała w pewnym kierunku powoduje w nim zmianę stanu naprężenia. Przy rozwiązywaniu zadań z tej tematyki trzeba ustalić, które z naprężeń $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ i odkształceń $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ są znane. Wielkości nieznane należy obliczyć, korzystając z równań równowagi, równań wynikających z narzuconych ograniczeń na odkształcenia oraz warunków brzegowych.

## 4.2. Przykłady obliczeń elementów prostopadłościennych i walcowych

**Zadanie 4.1.** Odkształcalny prostopadłościan o wymiarach $2a \times a \times a$, wykonany z materiału o module sprężystości $E$ i liczbie Poissona $\nu$, umieszczono bez luzu i wcisku między nieodkształcalnymi ścianami (rys. 4.2). Prostopadłościan obciążono równomiernym ściskaniem, przykładając pionową siłę $F$ do sztywnej płyty poziomej położonej na tym prostopadłościanie. Obliczyć naprężenia działające na ściany prostopadłościanu oraz jego odkształcenia względne i zmianę objętości.




**Rys. 4.2**

R o z w i ą z a n i e. Naprężenie $\sigma_x$ na nieobciążonych ścianach prostopadłych do osi $x$ równa się zero

$\sigma_x = 0$.

Naprężenie $\sigma_z$ działające na poziomych ścianach prostopadłych do osi $z$ przyjęto zgodnie z treścią zadania jako równomiernie rozłożone i równe

$$\sigma_z = -\frac{F}{2a^2}.$$

Naprężenie $\sigma_y$ jest nieznane i trzeba je wyznaczyć z warunku, że odkształcenie $\varepsilon_y$ w kierunku osi $y$ jest równe zero

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) = 0.$$

Z równania tego wynika, że przy $\sigma_x = 0$

$$\sigma_y = \nu\sigma_z = -\nu\frac{F}{2a^2}.$$

Odkształcenie względne w kierunku osi $x$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z)$$

po podstawieniu obliczonych naprężeń otrzymano

$$\varepsilon_x = -\frac{\nu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{\nu(1+\nu)F}{2Ea^2}.$$

Odkształcenie względne w kierunku działania siły F

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\frac{F(1-\nu^2)}{2Ea^2}.$$

Przyrost objętości prostopadłościanu

$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)V_0 = \frac{F(1-\nu-2\nu^2)}{2Ea^2}\cdot 2a^3 = -\frac{Fa}{E}(1-\nu-2\nu^2).$$

Dla $\nu = 0{,}5$ przyrost objętości $\Delta V = 0$, co oznacza, że materiał, dla którego $\nu = 0{,}5$, jest nieściśliwy.

**Zadanie 4.2.** Prostopadłościan o wymiarach $2a \times a \times a$ wykonany z materiału o module sprężystości $E$ i liczbie Poissona $\nu$ włożono do prostopadłościennego otworu wykonanego w nieodkształcalnym materiale. Po włożeniu okazało się, że między ścianami bocznymi prostopadłościanu i otworu jest luz $\delta$ zarówno w kierunku osi $x$, jak i $y$ (rys. 4.3). Obliczyć, przy jakiej najmniejszej wartości ciśnienia $p_1$, działającego w kierunku osi $z$, zniknie jedna ze szczelin (uzasadnić która), a przy jakiej wartości $p_2$ znikną obydwie szczeliny. Dane: $E$, $\nu$, $a$, $\delta$.

R o z w i ą z a n i e. W początkowej fazie, gdy istnieją obie szczeliny:

$$\sigma_x = \sigma_y = 0,$$

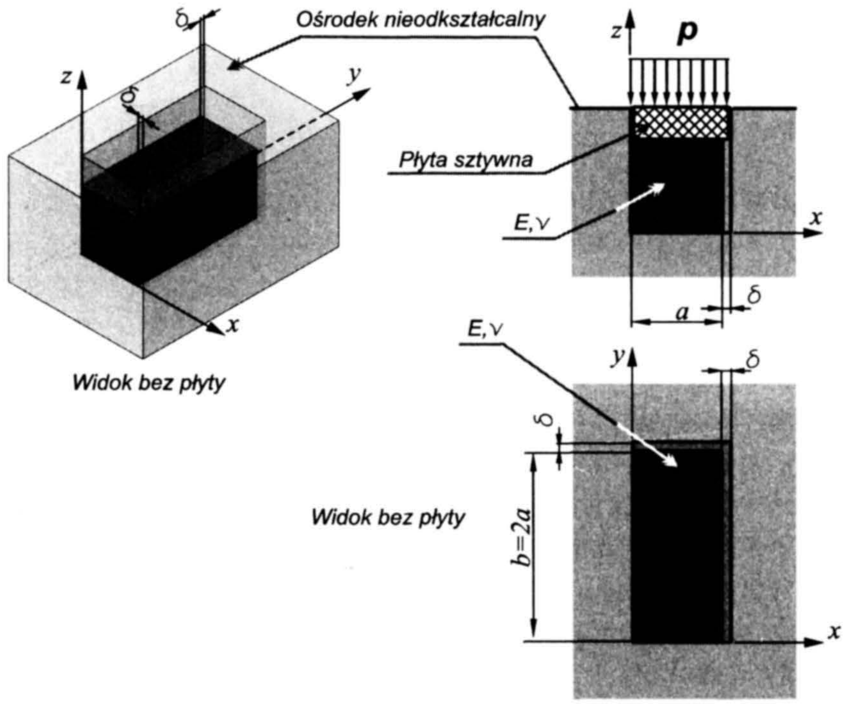
$$\sigma_z = -p,$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \nu\frac{p}{E},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x) = \nu\frac{p}{E},$$

$$\Delta a = \varepsilon_x a = \nu\frac{pa}{E},$$

$$\Delta b = \varepsilon_y \cdot 2a = 2\nu\frac{pa}{E}.$$




**Rys. 4.3**

Ponieważ $\Delta b = 2\Delta a$, szybciej zostanie skasowana szczelina prostopadła do osi $y$. Szczelina ta zniknie, gdy $\Delta b$ będzie równe $\delta$,

$$\Delta b = 2\nu \frac{p_1 a}{E} = \delta,$$

czyli dla

$$p_1 = \frac{E\delta}{2\nu a}.$$

Po przekroczeniu tego ciśnienia prostopadłościan zacznie naciskać na ściany prostopadłe do osi $y$ i wtedy $\sigma_y \neq 0$. Naprężenie $\sigma_x$ będzie równe zeru, dopóki nie zniknie druga szczelina (prostopadła do osi $x$). W momencie likwidacji drugiej szczeliny $\sigma_z = -p_2$. Najmniejszą wartość ciśnienia $p_2$, gdy znikną obie szczeliny, ale $\sigma_x$ będzie jeszcze równe zero, można wyznaczyć z warunków odkształceń

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{\delta}{a},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_x + \sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{\delta}{2a};$$

czyli z układu równań

$$\begin{cases} -\nu\sigma_y + \nu p_2 = \dfrac{E\delta}{a}, \\ \nu\sigma_y + \nu^2 p_2 = \nu\dfrac{E\delta}{2a}. \end{cases}$$

Z rozwiązania układu otrzymano

$$p_2 = \frac{2+\nu}{1+\nu}\frac{E\delta}{2\nu a} = \frac{2+\nu}{1+\nu}p_1.$$

Przy ciśnieniu $p_2$ naprężenie $\sigma_y$ wynosi

$$\sigma_y = \frac{E\delta}{2a} - \nu p_2 = \frac{E\delta}{2a}(1 - \frac{2+\nu}{1+\nu}) = -\frac{E\delta}{2a(1+\nu)}.$$

**Zadanie 4.3.** Walec o średnicy $d$ i wysokości $h$, wykonany z materiału o module sprężystości $E$ i liczbie Poissona $\nu$, włożono do walcowego otworu (rys. 4.4) o średnicy $d + 2\delta$ ($\delta << d$) wykonanego w nieodkształcalnym materiale ($E_m = \infty$).
Obliczyć, przy jakiej wartości ciśnienia $p$ ściskającego walec wzdłuż jego osi walec wypełni otwór, nie powodując nacisku na powierzchnię boczną otworu. Ile wyniesie wtedy skrócenie $\Delta h$ wysokości walca?
Przy jakim ciśnieniu $p$ nacisk $q$ na powierzchnię boczną walca osiągnie wartość $q = \nu \cdot p$ i o ile skróci się wtedy wysokość walca?
Uwaga! Ponieważ stosowane wzory są słuszne w zakresie liniowo sprężystym przy $E$ rzędu $10^5$ $MPa$, wielkość $\frac{\delta}{d}$ musi być rzędu $10^{-4}$, a liczba Poissona $\nu$ z górnego zakresu przedziału $0 \div 0{,}5$.

R o z w i ą z a n i e.
Przypadek a)
Zgodnie z treścią zadania nacisk na powierzchnię boczną otworu $q = 0$, a zatem naprężenia $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Naprężenie normalne w kierunku osi walca (oś $z$) wynosi

$$\sigma_z = -p_1.$$

Odkształcenia walca w kierunku promieniowym

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{2\delta}{d},$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\frac{\nu\sigma_z}{E} = \frac{2\delta}{d},$$

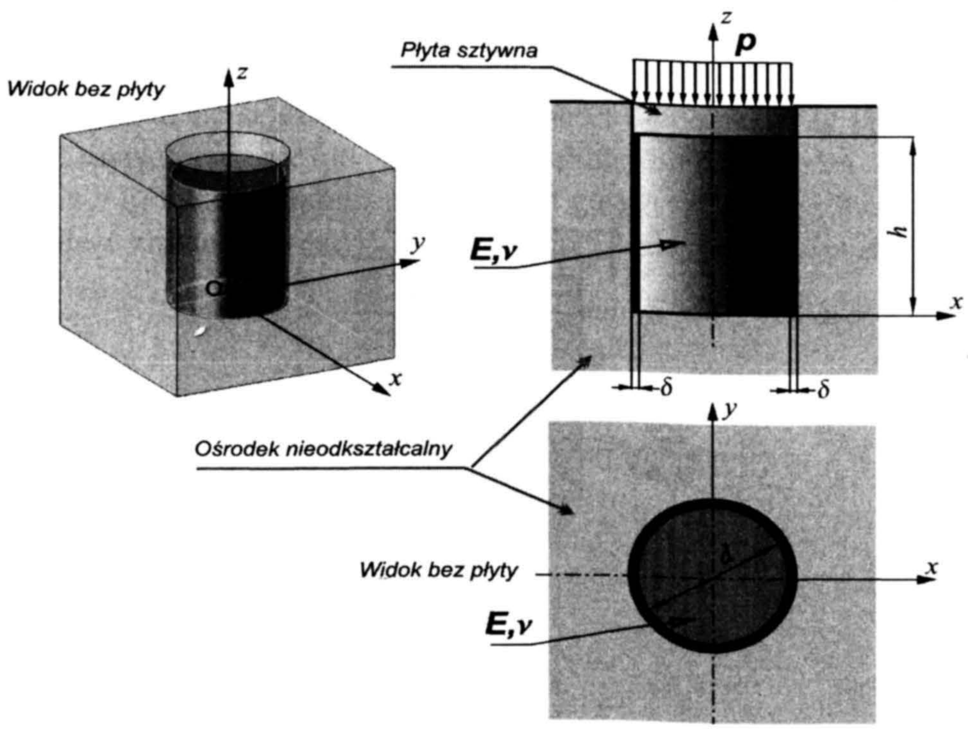
$$\frac{\nu p_1}{E} = \frac{2\delta}{d},$$

skąd

$$p_1 = \frac{2E\delta}{\nu d}.$$

Skrócenie wysokości walca

$$\Delta h = \varepsilon_z \cdot h = \frac{\sigma_z}{E}\cdot h = -\frac{p_1}{E}\cdot h = -\frac{2h}{\nu d}\cdot\delta.$$




**Rys. 4.4**

Przypadek b)
Z treści zadania wynika, że:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\nu p_2,$$

$$\sigma_z = -p_2,$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{2\delta}{d}.$$

Po podstawieniach otrzymano:

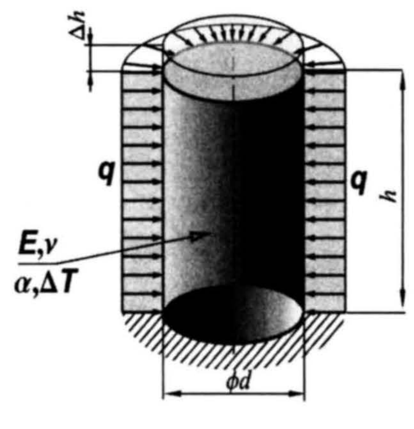
$$\frac{1}{E}(-\nu p_2 + \nu^2 p_2 + \nu p_2) = \frac{2\delta}{d},$$

$$p_2 = \frac{2E\delta}{\nu^2 d},$$

$$\Delta h = \varepsilon_z h = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)h = \frac{1}{E}(-p_2 + \nu^2 p_2 + \nu^2 p_2)h = -\frac{2(1-2\nu^2)h}{\nu^2 d}\delta.$$

**Zadanie 4.4.** Walec o średnicy $d$, wysokości $h$ i stałych materiałowych $E$ i $\nu$ został wpasowany suwliwie (bez luzu i wcisku) w otwór w nieodkształcalnym fundamencie (rys. 4.5). Następnie podgrzano go równomiernie o $\Delta T > 0$. Współczynnik rozszerzalności termicznej materiału walca wynosi $\alpha$. Obliczyć: naciski $q$ działające na powierzchnię boczną walca, przyrost wysokości $\Delta h$ oraz przyrost objętości $\Delta V$ walca.

Dane liczbowe: $E = 10^5\,MPa$, $\nu = \frac{1}{3}$, $d = 50\,mm$, $h = 100\,mm$, $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\frac{1}{\mathrm{K}}$, $\Delta T = 20$ K.




**Rys. 4.5**

R o z w i ą z a n i e. Z osiowej symetrii wynika, że naprężenia $\sigma_x = \sigma_y = -\,q$.
Górna podstawa walca jest nieobciążona, a ciężar walca pomija się, zatem $\sigma_z = 0$.
Przy nieodkształcalnym fundamencie

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha \cdot \Delta T = 0,$$

skąd wynika, że

$$\sigma_x = \sigma_y = -\frac{E\alpha\Delta\mathrm{T}}{1-\nu}$$

czyli

$$q = -\,\sigma_x = \frac{E\alpha\Delta\mathrm{T}}{1-\nu}.$$

Zmiana wysokości walca

$$\Delta h = \varepsilon_z h = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y)h + \alpha\Delta\mathrm{T}h = \frac{2\nu q h}{E} + \alpha\Delta\mathrm{T}h = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\Delta\mathrm{T}h.$$

Zmiana objętości walca

$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)V_0 = \frac{\Delta h}{h}\frac{\pi d^2}{4}h = (\frac{1+\nu}{1-\nu})\frac{\pi d^2 h\alpha\Delta\mathrm{T}}{4}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano

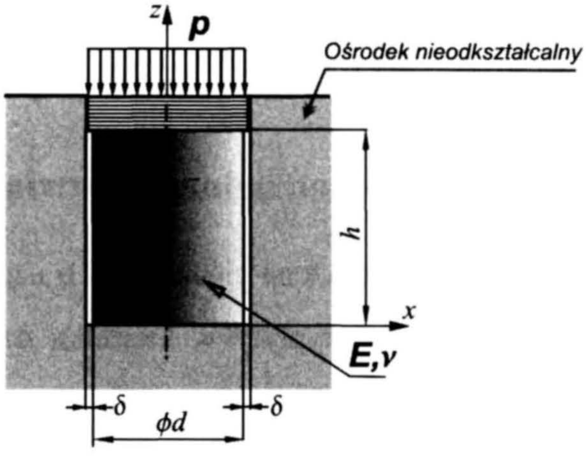
$q = 51\,MPa$,

$\Delta h = 0{,}068\,mm$,

$\Delta V = 133\,mm^3$.

**Zadanie 4.5.** Walec miedziany o średnicy $d$ i wysokości $h$ umieszczono w walcowym wgłębieniu wykonanym w nieodkształcalnym materiale. Między powierzchnią boczną walca i ścianą wgłębienia występuje luz $\delta$ (rys 4.6). Obliczyć, przy jakich wartościach naprężeń ściskających $\sigma_z$ naciski na powierzchnię boczną walca osiągną wartość $q = 0{,}3\,p$, gdzie $p$ jest ciśnieniem na powierzchni górnej walca (rys. 4.6). Dla tego stanu naprężenia znaleźć zmianę wysokości walca $\Delta h$ oraz zmianę objętości $\Delta V$.

Dane liczbowe: $d = 100\ mm$, $h = 50\ mm$, $\delta = 0{,}01\ mm$, $E = 10^5\,MPa$, $\nu = \frac{1}{3}$.




**Rys. 4.6**

R o z w i ą z a n i e. Z treści zadania wynika, że:

$$\sigma_x = \sigma_y = -\,q = -\,0{,}3p,$$

$$\sigma_z = -\,p,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{2\delta}{d}$$

$$\varepsilon_z = ?$$

Warunek ograniczający wielkość względnego odkształcenia w kierunku promieniowym

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{2\delta}{d}$$

pozwala obliczyć ciśnienie $p$

$$\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z = \frac{2\delta E}{d}$$

$$-\,0{,}3p + \frac{1}{3}0{,}3p + \frac{1}{3}p = \frac{2\delta E}{d}$$

$$p = 15\frac{\delta E}{d} = 15\cdot\frac{0{,}01\cdot 10^5}{100} = 150\ MPa.$$

Naprężenia i odkształcenia wynoszą:

$\sigma_x = \sigma_y = -\,45\ MPa,$

$\sigma_z = -\,150\ MPa,$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \frac{2\delta}{d} = 0{,}0002$$

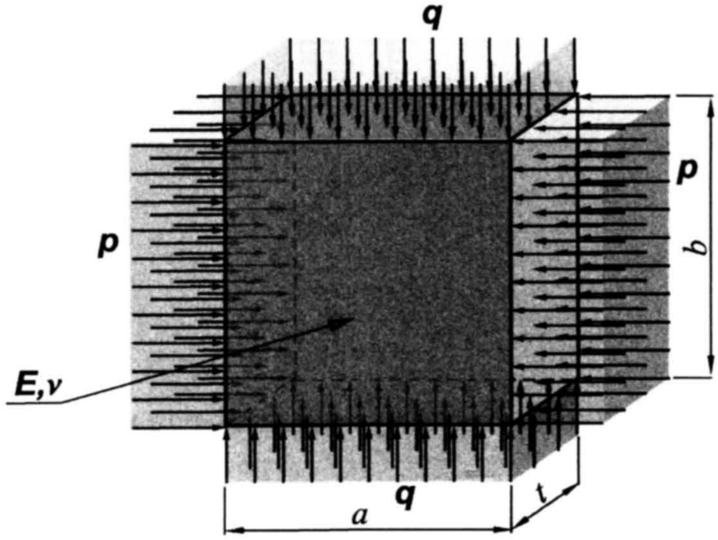
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{10^5}(-150 + \frac{1}{3}\cdot 45 + \frac{1}{3}45) = -\,0{,}0012$$

$$\Delta h = \varepsilon_z \cdot h = -\,0{,}0012 \cdot 50 = -\,0{,}06\ mm$$

$$\Delta V = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)V_0 = (2\cdot 0{,}0002 - 0{,}0012)\frac{\pi\cdot(100)^2}{4}\cdot 50 = -\,314{,}16\ mm^3$$

## 4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

**Zadanie 4.6.** Płyta o grubości $t$ jest obciążona ciśnieniami $p$ i $q$ w sposób pokazany na rys. 4.7. Przy jakim stosunku $\frac{p}{q}$ wymiar płyty w kierunku działania ciśnienia $p$ nie ulegnie zmianie? Obliczyć zmianę wymiaru $b$ płyty.
Dane: $a$, $b$, $E$, $\nu$, $q$.




**Rys. 4.7**

ODPOWIEDŹ:

$$\frac{p}{q} = \nu,$$

$$\Delta b = -\,(1-\nu^2)\frac{qb}{E}.$$

**Zadanie 4.7.** Walec o średnicy $d$ i wysokości $h$, wykonany z materiału o module Younga $E$, liczbie Poissona $\nu$ i współczynniku rozszerzalności termicznej $\alpha$, umieszczono

bez luzu i wcisku w otworze wykonanym w nieodkształcalnym materiale. Przy jakim przyroście temperatury $\Delta T$ wysokość walca zwiększy się o $\Delta h$?
Dane liczbowe: $E = 10^5\, MPa$,

$\nu = \frac{1}{3}$,

$h = 100\, mm$,

$d = 60\, mm$,

$\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5} \frac{1}{{}^\circ C}$,

$\Delta h = 0{,}1\, mm$.

ODPOWIEDŹ:

$$\Delta T = \frac{1-\nu}{1+\nu}\left(\frac{\Delta h}{\alpha h}\right) = 29{,}4 \text{ K}.$$

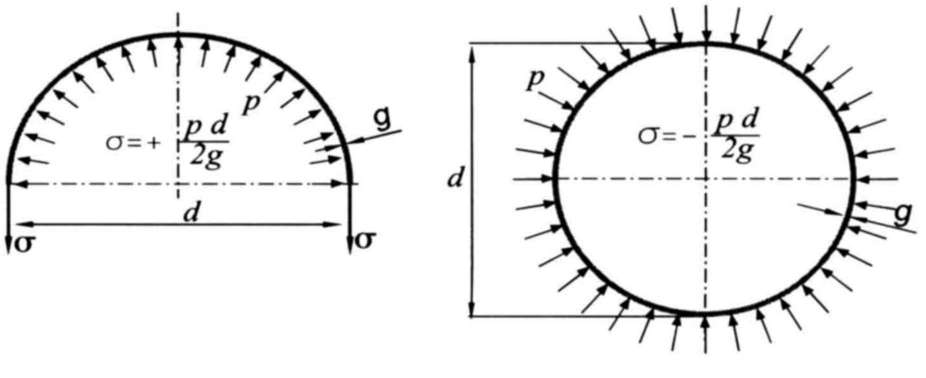
# 5. NAPRĘŻENIA I ODKSZTAŁCENIA W CIENKOŚCIENNYCH PIERŚCIENIACH I KRĄŻKACH

## 5.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia i wzory

W cienkościennych pierścieniach kołowych poddanych osiowo symetrycznemu ciśnieniu $p\left[\frac{N}{m^2}\right]$ powstaje w przybliżeniu jednokierunkowy stan naprężenia. Naprężenia działające w kierunku obwodowym (rys. 5.1), wyznaczone z warunku równowagi sił, są ze względu na symetrię osiową takie same w każdym przekroju poprzecznym, niezależnie od szerokości pierścienia i wynoszą

$$\sigma = \pm \frac{pd}{2g} \tag{5.1}$$

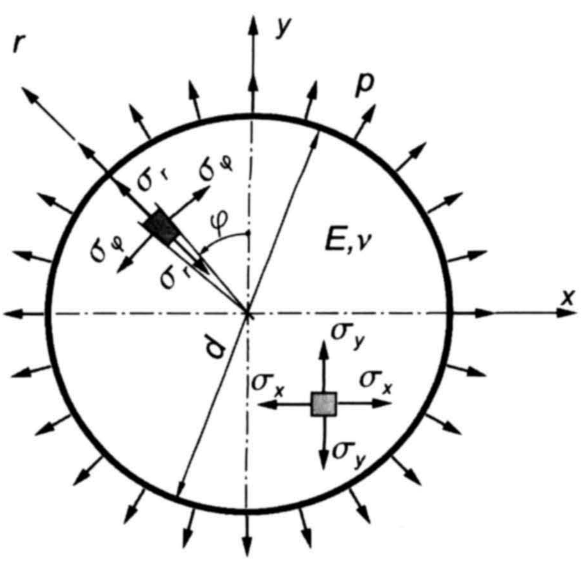
gdzie:
- $d$ – średnica pierścienia,
- $g$ – grubość pierścienia.




**Rys. 5.1**

Znak naprężeń zależy od zwrotu ciśnienia (znak + dla ciśnienia działającego od środka na zewnątrz). Odkształcenie w kierunku promieniowym

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d} = \frac{\sigma}{E} = \frac{pd}{2Eg}. \tag{5.2}$$




**Rys. 5.2**

W krążku izotropowym o stałej grubości $g$, module sprężystości materiału $E$ i liczbie Poissona $\nu$ – obciążonym na brzegu równomiernym obciążeniem promieniowym $p$ $[N/m^2]$, panuje jednorodny dwukierunkowy (płaski) stan naprężenia (rys. 5.2), tzn. że we wszystkich punktach i we wszystkich kierunkach w płaszczyźnie krążka naprężenia są takie same i równe

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_x = \sigma_y = p. \tag{5.3}$$

Z prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężenia wynika, że odkształcenie względne $\varepsilon$ w płaszczyźnie krążka jest jednakowe we wszystkich kierunkach i wynosi

$$\varepsilon = (1-\nu)\frac{p}{E}. \tag{5.4}$$

## 5.2. Przykłady obliczeń naprężeń i odkształceń w pierścieniach

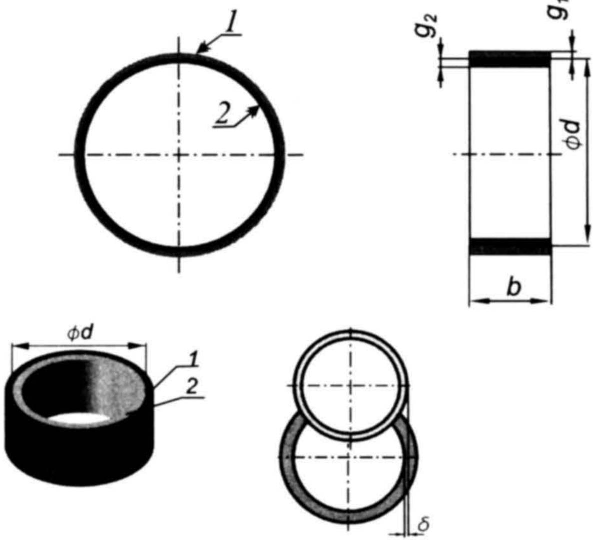
**Zadanie 5.1.** Dwa pierścienie jednakowej szerokości wykonane z tego samego materiału o module sprężystości $E$ połączono na wcisk (rys. 5.3). Obliczyć, jaka była różnica $\delta = d_2 - d_1$ wymiarów średnicy zewnętrznej $d_2$ pierścienia wewnętrznego i średnicy wewnętrznej $d_1$ pierścienia zewnętrznego, jeżeli docisk promieniowy między pierścieniami po wcisku wynosił $p$ $[MPa]$. Wyznaczyć naprężenia obwodowe w pierścieniach po wcisku.

| | | |
|---|---|---|
| Dane liczbowe: | $d = 60\ mm$ | – średnica styku pierścieni po wcisku, |
| | $b = 10\ mm$ | – szerokość pierścieni, |
| | $g_1 = 1\ mm$ | – grubość pierścienia zewnętrznego, |
| | $g_2 = 2\ mm$ | – grubość pierścienia wewnętrznego, |
| | $p = 2\ MPa$ | |
| | $E = 2\cdot 10^5\ MPa$ | |

Szukane: $\delta = d_2 - d_1$ – różnica średnic przed wciskiem,

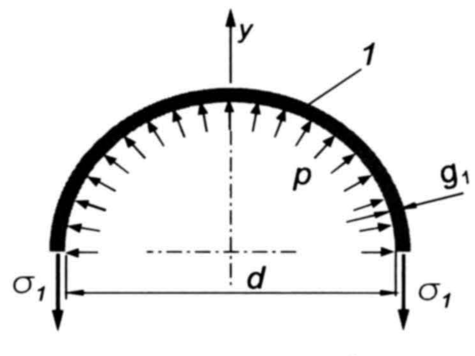
$\sigma_1$ – naprężenie obwodowe w pierścieniu zewnętrznym,

$\sigma_2$ – naprężenie obwodowe w pierścieniu wewnętrznym.




**Rys. 5.3**

R o z w i ą z a n i e. Na rys. 5.4 pokazano naprężenia $\sigma_1$ i nacisk $p$ działające na połowę pierścienia zewnętrznego, po wcisku




**Rys. 5.4**

Z sumy rzutów sił na oś $y$

$$\sum F_y \Rightarrow p \cdot b \cdot d - 2\sigma_1 \cdot g_1 \cdot b = 0$$

otrzymano

$$\sigma_1 = \frac{pd}{2g_1}.$$

Pierścień wewnętrzny jest ściskany, a zatem

$$\sigma_2 = -\frac{pd}{2g_2}.$$

Z zależności między odkształceniami pierścieni wynika, że

$$d = d_2 + \Delta d_2 = d_1 + \Delta d_1.$$

a zatem

$$\delta = d_2 - d_1 = \Delta d_1 - \Delta d_2$$

gdzie $\Delta d_2 < 0$, ponieważ pierścień wewnętrzny jest ściskany. Zmiany długości średnic można zapisać w postaci

$$\Delta d_1 = \varepsilon_1 d = \frac{\sigma_1}{E} d,$$

$$\Delta d_2 = \varepsilon_2 d = \frac{\sigma_2}{E} d.$$

Po wykorzystaniu tych zależności otrzymano

$$\delta = \Delta d_1 - \Delta d_2 = \frac{d}{E}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{d}{E}\frac{pd}{2}\left(\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2}\right)$$

$$\delta = \frac{pd^2(g_1 + g_2)}{2Eg_1 g_2}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano

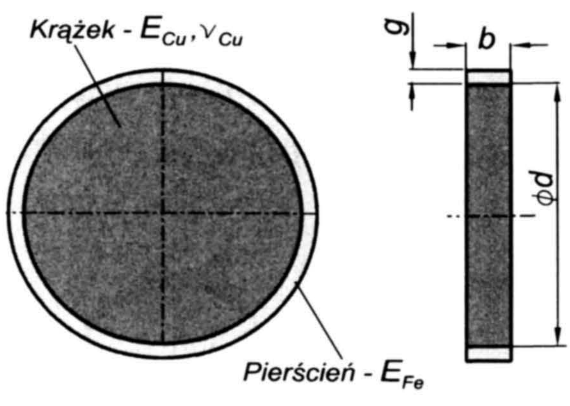
$$\delta = 0{,}027\ mm,$$

$$\sigma_1 = 60\ MPa,$$

$$\sigma_2 = -30\ MPa.$$

**Zadanie 5.2.** Na miedziany krążek o średnicy $d$ i grubości $b$ nałożono stalowy pierścień o średnicy wewnętrznej mniejszej o $\delta$ od średnicy krążka. Grubość pierścienia jest równa $g \ll d$, a jego szerokość równa grubości krążka $b$ (rys. 5.5). Określić stan naprężenia i odkształcenia w pierścieniu i krążku po wcisku.
Dane liczbowe: $d = 100\ mm$, $b = 10\ mm$, $\delta = 0{,}05\ mm$, $E_{Cu} = 10^5\ MPa$, $E_{Fe} = 2 \cdot 10^5\ MPa$,

$$\nu_{Cu} = \frac{1}{3},\ g = 2\ mm.$$




**Rys. 5.5**

R o z w i ą z a n i e. Warunek dla odkształceń w kierunku promieniowym krążka i pierścienia

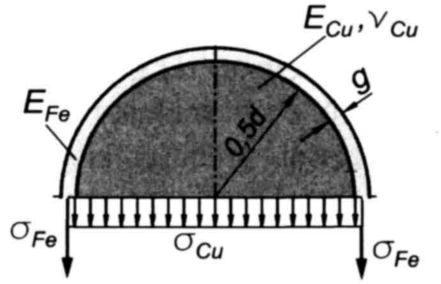
$$\Delta d_{Fe} + |\Delta d_{Cu}| = \delta \tag{1}$$

W krążku obciążonym równomiernym ciśnieniem promieniowym $p$ powstaje jednorodny stan naprężenia, tzn. że wartości naprężeń we wszystkich kierunkach (w płaszczyźnie krążka) są takie same. Przy ciśnieniu skierowanym do środka krążka naprężenia $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_r = \sigma_\varphi = -p$.

A zatem naprężenia obwodowe i promieniowe w miedzianym krążku są równe $\sigma_{Cu} = -p$ . Ponieważ w krążku tym panuje dwukierunkowy stan naprężenia

$$\varepsilon_{Cu} = \frac{(1-\nu_{Cu})}{E_{Cu}}\sigma_{Cu} = -\frac{(1-\nu_{Cu})}{E_{Cu}}p.$$

Z równowagi sił działających na połowę krążka i pierścienia (rys. 5.6) wynika, że




**Rys. 5.6**

$$-\sigma_{Fe} \cdot 2 \cdot g \cdot b - \sigma_{Cu} \cdot d \cdot b = 0$$

skąd

$$\sigma_{Fe} = -\frac{d}{2g}\sigma_{Cu}$$

Zmiany wymiarów średnic, tzn. przyrost średnicy pierścienia i zmniejszenie się średnicy krążka, wynoszą odpowiednio:

$$\Delta d_{Fe} = \varepsilon_{Fe} \cdot d = \frac{\sigma_{Fe}}{E_{Fe}} \cdot d = -\frac{d^2 \cdot \sigma_{Cu}}{2E_{Fe} \cdot g} = \frac{pd^2}{2E_{Fe}g},$$

$$\Delta d_{Cu} = \varepsilon_{Cu} \cdot d = -\frac{(1-\nu_{Cu})pd}{E_{Cu}}.$$

Warunek zgodności odkształceń (1) przyjmuje postać

$$\frac{pd^2}{2E_{Fe}g} + \frac{(1-\nu_{Cu})pd}{E_{Cu}} = \delta,$$

skąd

$$p = \frac{2E_{Cu}E_{Fe}g\delta}{[E_{Cu}d + 2E_{Fe}(1-\nu_{Cu})g]d} \cong 3{,}8\ MPa,$$

$$\sigma_{Cu} = -\,p = -\frac{2E_{Cu}E_{Fe}g\delta}{[E_{Cu}d + 2E_{Fe}(1-\nu_{Cu})g]d} = -\ 3{,}8\ MPa,$$

$$\sigma_{Fe} = \frac{E_{Cu}E_{Fe}\delta}{E_{Cu}d + 2E_{Fe}(1-\nu_{Cu})g} = 94{,}94\ MPa,$$

$$\Delta d_{Fe} = \frac{E_{Cu}\delta d}{E_{Cu}d + 2E_{Fe}(1-\nu_{Cu})g} = 0{,}0475\ mm,$$

$$\Delta d_{cu} = -\frac{2(1-\nu_{Cu})E_{Fe}g\delta}{E_{Cu}d + 2Fe(1-\nu_{Cu})g} = -\ 0{,}0025\ mm.$$

## 5.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

**Zadanie 5.3.** Cienkościenny pierścień o średnicy wewnętrznej o $2\delta$ mniejszej od średnicy $d$ nieodkształcalnego wałka wciśnięto na ten wałek. Obliczyć naprężenia obwodowe w pierścieniu. Dane liczbowe:

$E = 10^5\ MPa$ – moduł sprężystości materiału pierścienia,
g = 1 $mm$ – grubość ścianki pierścienia,
$d$ = 50 $mm$ – średnica wałka,
$2\delta = d - d_{wp} = 0{,}05\ mm$,
$d_{wp}$ – średnica wewnętrzna pierścienia.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma = \frac{2E\delta}{d} = 100\ MPa.$$

**Zadanie 5.4.** Na pierścień miedziany o średnicy $d$ i grubości $g_{cu}$ = 2g nałożono suwliwie (bez luzu i wcisku) pierścień stalowy o grubości $g_{Fe} = g$. Szerokości pierścieni $b$ są jednakowe. Moduł sprężystości miedzi jest $E_{Cu} = E$, natomiast stali $E_{Fe} = 2E$.

Współczynniki rozszerzalności termicznej $\alpha_{Cu} = 1{,}4\alpha$, $\alpha_{Fe} = \alpha$. Obliczyć naprężenia w pierścieniach po podgrzaniu układu o $\Delta T > 0$. Grubość $g << d$.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_{Cu} = -\,0{,}2E\alpha\Delta T,$$

$$\sigma_{Fe} = 0{,}4E\alpha\Delta T.$$

**Zadanie 5.5.** W pierścień miedziany o średnicy wewnętrznej $d_w = 100\ mm$, module sprężystości materiału $E_{cu} = 10^5\ MPa$ i grubości ścianki $g_{Cu} = 3\ mm$, wciśnięto pierścień stalowy o tej samej szerokości $b$ i o średnicy zewnętrznej $d_z = d_w + \delta$, gdzie $\delta = 0{,}05\ mm$, $E_{Fe} = 2\cdot 10^5\ MPa$ i $g_{Fe} = 2\ mm$. Obliczyć naprężenia w pierścieniach i docisk $p$ między pierścieniami po wcisku.

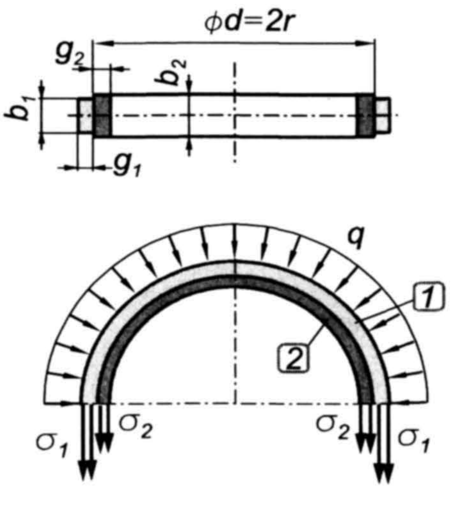
ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_{Cu} = \frac{4}{7}\frac{E_{Cu}\delta}{d_w} = 28{,}6\ MPa,$$

$$\sigma_{Fe} = -\frac{3}{7}\frac{E_{Fe}\delta}{d_w} = -\,42{,}8\ MPa,$$

$$p = \frac{2\sigma_{Cu}g_{Cu}}{d_w} = \frac{2|\sigma_{Fe}|g_{Fe}}{d_w} = 1{,}71\ MPa.$$

**Zadanie 5.6.** Na pierścień miedziany nałożono z wciskiem pierścień stalowy. Tak zmontowany zestaw pierścieni podgrzano o $\Delta T$, a następnie poddano zewnętrznemu promieniowemu ściskaniu obciążeniem $q[kN/m]$ (rys. 5.7). Przed wciskiem promień zewnętrzny pierścienia miedzianego był większy od promienia wewnętrznego pierścienia stalowego o $\delta$.




**Rys. 5.7**

Wymiary i własności pierścieni:

- stalowego $b_1, g_1, E_1, \alpha_1$;
- miedzianego $b_2, g_2, E_2, \alpha_2$;

średnica styku pierścieni po wcisku $d = 2r$.
Założenia:

$\delta \ll r$,

$g_1 \ll d$, $g_2 \ll d$,

$\Delta T > 0$, $\alpha_2 > \alpha_1$.

Obliczyć naprężenia w pierścieniach.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = \frac{E_1\left\{E_2 b_2 g_2 [\frac{\delta}{r} + (\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T] - qr\right\}}{E_1 b_1 g_1 + E_2 b_2 g_2},$$

$$\sigma_2 = -\frac{E_2\left\{E_1 b_1 g_1 [\frac{\delta}{r} + (\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T] + qr\right\}}{E_1 b_1 g_1 + E_2 b_2 g_2}.$$

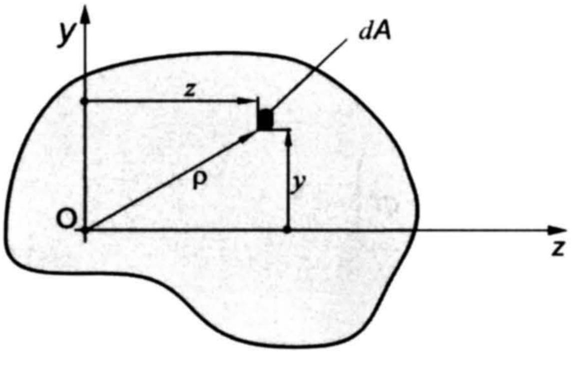
Zadanie można również rozwiązać metodą superpozycji, rozpatrując trzy przypadki:

- $\delta \neq 0, \ \Delta T = 0, \ q = 0$,
- $\Delta T \neq 0, \ \delta = 0, \ q = 0$,
- $q \neq 0, \ \delta = 0, \ \Delta T = 0$.

# 6. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI FIGUR PŁASKICH

## 6.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia, definicje i wzory

Rozpatrzmy figurę płaską o dowolnym kształcie (rys. 6.1). Przyjmijmy początek układu współrzędnych $y\,z$ w dowolnie wybranym punkcie 0 jej płaszczyzny




**Rys. 6.1**

Charakterystyki przekroju poprzecznego figury płaskiej (pole powierzchni $A$, momenty statyczne $S_z$, $S_y$ i momenty bezwładności $I_z$, $I_y$, $I_{zy}$) są zdefiniowane przez sześć wielkości opisanych całkami powierzchniowymi:

$A = \int_A dA$ – pole powierzchni,

$S_z = \int_A y dA$ – moment statyczny względem osi z,

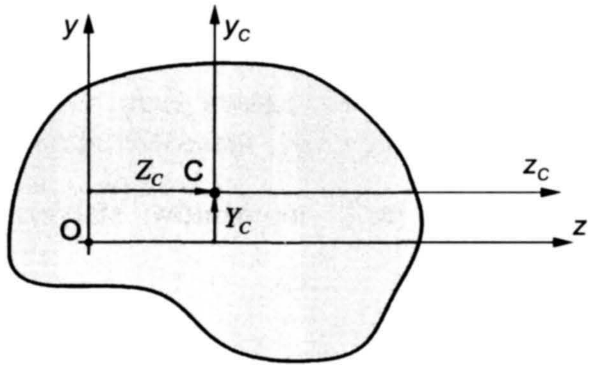
$S_y = \int_A z dA$ – moment statyczny względem osi y,

$I_z = \int_A y^2 dA$ – moment bezwładności względem osi z,

$I_y = \int_A z^2 dA$ – moment bezwładności względem osi y,

$I_{zy} = \int_A yz dA$ – odśrodkowy (dewiacyjny) moment bezwładności względem osi z i y.

Aby obliczyć zdefiniowane wyżej wielkości, musi być określony kształt i wymiary figury. Osiowe momenty bezwładności $I_z$ i $I_y$ są zawsze większe od zera.




**Rys. 6.2**

Położenie środka ciężkości $C$ takiej figury określają współrzędne $Y_c$ i $Z_c$ mierzone od osi $z$ i $y$ (rys. 6.2), które oblicza się ze wzorów

$$Y_c = \frac{S_z}{A}, \qquad Z_c = \frac{S_y}{A}. \tag{6.1}$$

Osie układu współrzędnych przechodzące przez środek ciężkości C nazywa się osiami centralnymi. Na rys. 6.2 pokazano osie centralne $z_c$ , $y_c$ równoległe do osi $z$ i $y$. Osiami głównymi nazywamy dwie wzajemnie prostopadłe osie, względem których odśrodkowy moment bezwładności $I_{zy} = 0$. Jeżeli figura płaska ma oś symetrii, to oś ta jest główną osią centralną. Druga główna oś centralna jest do niej prostopadła i przechodzi przez środek ciężkości figury. W figurze o dwóch osiach symetrii środek ciężkości figury leży na przecięciu się tych osi, a osie te są głównymi osiami centralnymi. Momenty bezwładności $I_{zc}$, $I_{yc}$ względem dwóch prostopadłych głównych osi centralnych osiągają wartości ekstremalne, tzn. jedna z tych wartości jest największa, a druga najmniejsza. Jeżeli figura ma więcej niż dwie osie symetrii, to momenty bezwładności względem wszystkich osi przechodzących przez środek ciężkości mają taką samą wartość i są głównymi centralnymi momentami bezwładności.

### *Wzory Steinera*

Momenty bezwładności między dwoma osiami równoległymi, z których jedna jest osią centralną, związane są zależnościami:

$$I_z = I_{zC} + A(Y_c)^2, \qquad I_y = I_{yC} + A(Z_c)^2, \qquad I_{zy} = I_{zCyC} + AY_cZ_c. \tag{6.2}$$

W zagadnieniach skręcania prętów występuje pojęcie biegunowego momentu bezwładności $I_0$ definiowanego jako

$$I_0 = \int_F \rho^2 dA\,. \tag{6.3}$$

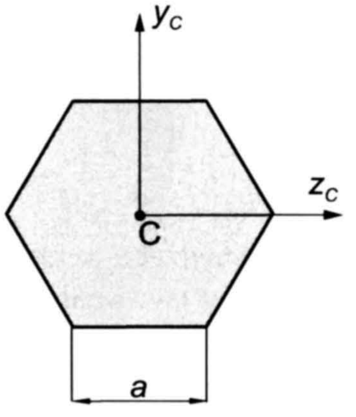
Gdy osie $z$ i $y$ są wzajemnie prostopadłe (rys. 6.1), wtedy

$$I_0 = \int_F (y^2 + z^2) dA = I_z + I_y . \tag{6.4}$$

Jednostki: pola powierzchni [m²], momentów statycznych [m³], momentów bezwładności [m⁴].

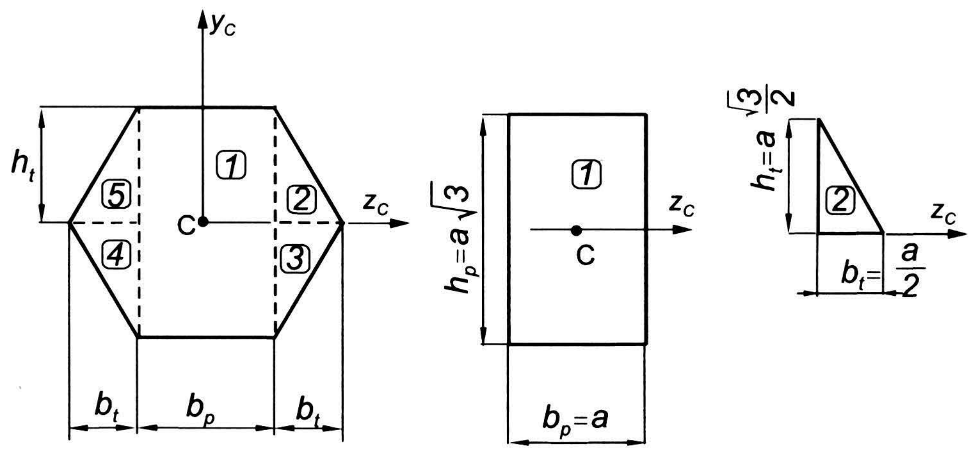
## 6.2. Przykłady obliczeń momentów bezwładności figur płaskich

**Zadanie. 6.1.** Obliczyć moment bezwładności figury płaskiej o kształcie sześciokąta foremnego o boku $a$ względem poziomej osi centralnej $z_c$ (rys. 6.3).




**Rys. 6.3**

R o z w i ą z a n i e.




**Rys. 6.4**

Jest to proste zadanie, gdyż do jego rozwiązania wystarczy skorzystać z dwóch znanych wzorów na momenty bezwładności prostokąta względem jego osi centralnej i momentu

bezwładności trójkąta względem osi przechodzącej przez jego podstawę. W tym celu trzeba podzielić sześciokąt foremny na pięć figur, według rys. 6.4.
Cztery trójkąty prostokątne mają takie same wymiary, a oś $z_c$ przechodzi przez podstawę każdego z nich. Moment bezwładności rozpatrywanego sześciokąta foremnego względem osi $z_c$ wynosi

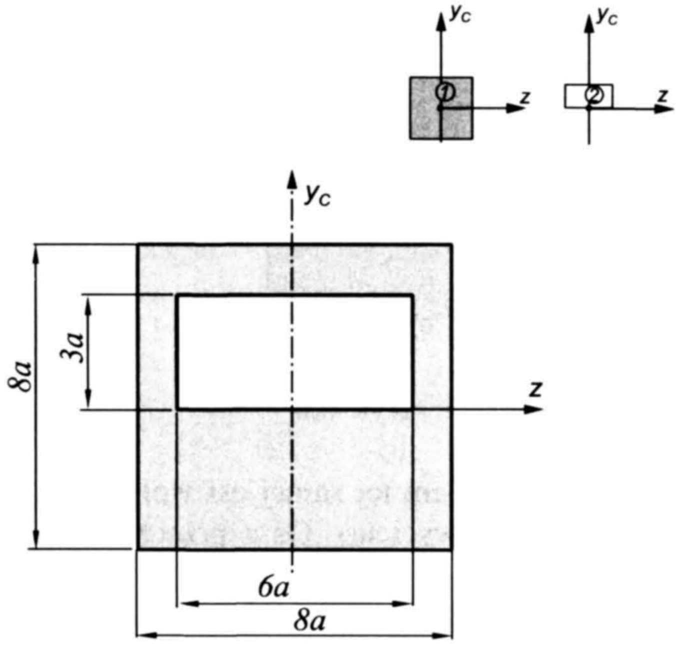
$$I_{zc} = \frac{b_p h_p^{\,3}}{12} + 4\frac{b_t h_t^{\,3}}{12} = \frac{a(\sqrt{3}a)^3}{12} + 4\frac{\frac{a}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^3}{12} = (\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16})a^4 = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4.$$

Ponieważ sześciokąt foremny ma sześć osi symetrii, koło bezwładności tego sześciokąta jest punktem, a to oznacza, że moment bezwładności tej figury względem dowolnej osi przechodzącej przez środek ciężkości jest taki sam, a zatem

$$I_{yc} = I_{zc} = \frac{5\sqrt{3}}{16}a^4.$$

W tym przypadku wszystkie osie centralne są osiami głównymi ( $I_{z_c y_c} = 0$).

**Zadanie 6.2.** Wyznaczyć główne centralne osie bezwładności oraz momenty bezwładności figury płaskiej o kształcie pokazanym na rys. 6.5.




**Rys. 6.5**

R o z w i ą z a n i e. Jedną z głównych centralnych osi bezwładności jest oś $y_c$, ponieważ jest osią symetrii. Druga główna centralna oś bezwładności przechodzi przez środek ciężkości rozpatrywanej figury i musi być prostopadła do osi $y_c$. Współrzędną $Y_c$ środka ciężkości obliczymy od przyjętej, jako bazową, osi $z$. Oś $z$ można przyjmować dowolnie, ale w tym zadaniu korzystne jest przyjąć ją jak na rys. 6.5. Do obliczenia współrzędnej $Y_c$ środka ciężkości i do obliczeń momentów bezwładności podzielimy rozpatrywaną figurę na dwie części: kwadrat o boku $8a \times 8a$ i wycięty z tego kwadratu prostokąt $6a \times 3a$.
Współrzędną $Y_c$ środka ciężkości obliczamy ze wzoru

$$Y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum S_{zi}}{\sum S_i} = \frac{S_{z1} - S_{z2}}{A_1 - A_2}$$

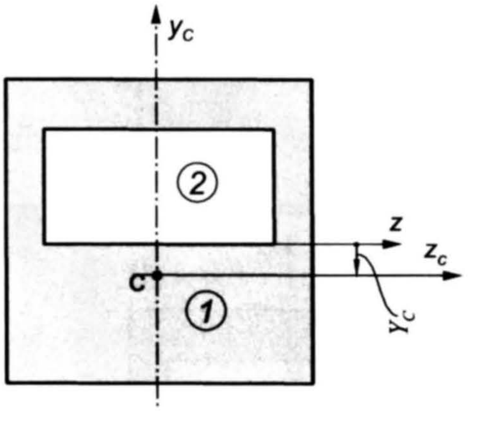
gdzie $S_z$ jest momentem statycznym względem osi $z$, natomiast $A$ jest polem powierzchni przekroju poprzecznego. Znaki minus w ostatnim członie wynikają z wycięcia (ubytku) figury 2 z figury 1. Moment statyczny figury 1 (kwadratu) względem osi $z$ jest równy zero, ponieważ oś $z$ przechodzi przez środek ciężkości kwadratu $8a$ x $8a$. Moment statyczny figury 2 oblicza się jako iloczyn jej pola powierzchni i odległości jej środka ciężkości od osi $z$, czyli

$$S_{z2} = 6a \cdot 3a \cdot \frac{3}{2} a = 27a^3$$

Obliczenie współrzędnej $Y_c$

$$Y_c = \frac{0 - 27a^3}{64a^2 - 18a^2} = -\frac{27}{46} a.$$

Położenie środka ciężkości pokazano na rys. 6.6.




**Rys. 6.6**

Momenty bezwładności figur względem tej samej osi wolno do siebie dodawać lub od siebie odejmować (gdy figura jest wycięta). Oś $z$ przechodzi przez środek ciężkości figury 1 i przez podstawę figury 2.

Zgodnie z podstawowymi wzorami dla momentów bezwładności prostokątów mamy

$$I_z = \frac{8a(8a)^3}{12} - \frac{6a(3a)^3}{3} = \frac{862}{3} a^4.$$

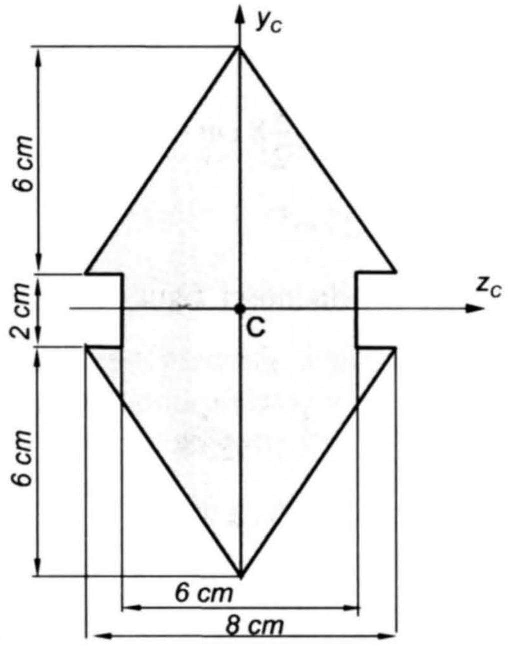
Zgodnie z twierdzeniem Steinera

$$I_{zc} = I_z - A(Y_c)^2 = \frac{862}{3} a^4 - 46a^2 (-\frac{27}{46} a)^2 \cong 271{,}5a^4.$$

Moment bezwładności figury względem osi $y_c$

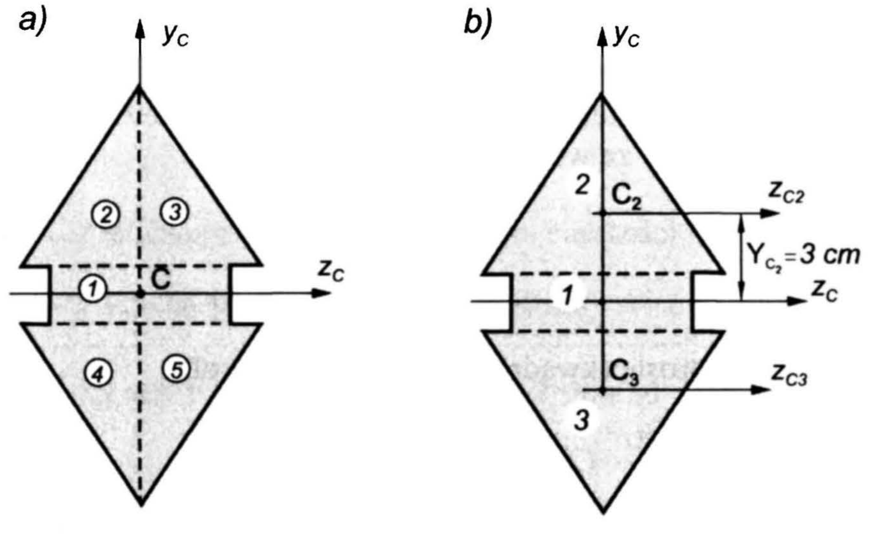
$$I_{yc} = \frac{8a(8a)^3}{12} - \frac{3a(6a)^3}{12} = 287{,}3a^4.$$

**Zadanie 6.3.** Obliczyć momenty bezwładności figury o przekroju pokazanym na rys. 6.7 względem głównych centralnych osi bezwładności




**Rys. 6.7**

R o z w i ą z a n i e. Osie $y_c$ i $z_c$ są głównymi centralnymi osiami bezwładności rozpatrywanej figury, ponieważ są osiami symetrii wzajemnie prostopadłymi. Moment bezwładności względem osi $y_c$ najprościej można obliczyć, dzieląc figurę na 5 figur prostych (rys. 6.8a) (prostokąt i 4 trójkąty o jednakowych wymiarach)




**Rys. 6.8**

Korzystając ze znanych wzorów, otrzymujemy

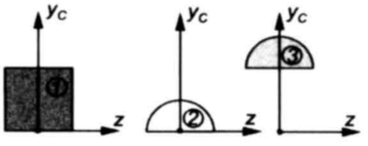
$$I_{yc} = \frac{2\,cm \cdot (6\,cm)^3}{12} + 4\frac{6\,cm \cdot (4\,cm)^3}{12} = 164\,cm^4$$

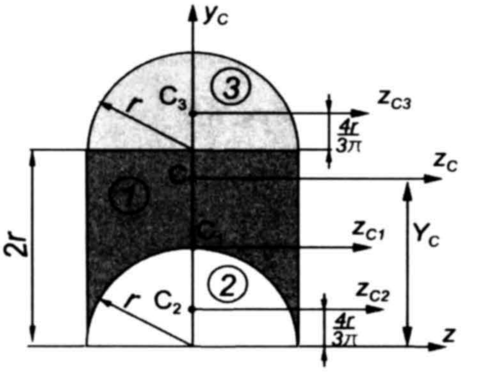
Moment bezwładności względem osi $z_c$ obliczymy przy podziale figury płaskiej na trzy figury proste (prostokąt i dwa trójkąty o takich samych wymiarach) (rys. 6.8b). Korzystając ze znanych wzorów i twierdzenia Steinera, mamy

$$I_{zc} = \frac{6\,cm \cdot (2\,cm)^3}{12} + 2\left[\frac{8\,cm \cdot (6\,cm)^3}{36} + \frac{1}{2}8\,cm \cdot 6\,cm \cdot (3\,cm)^2\right] =$$

$$= 4\,cm^4 + 2(48\,cm^4 + 216\,cm^4) = 532\,cm^4.$$

**Zadanie 6.4.** Obliczyć moment bezwładności figury pokazanej na rys. 6.9 względem centralnej osi poziomej $z_c$




**Rys. 6.9**

R o z w i ą z a n i e. Jedna współrzędna położenia środka ciężkości jest znana, ponieważ wiadomo, że środek ciężkości leży zawsze na osi symetrii. Drugą współrzędną $Y_c$ liczoną od osi $z$ znajdujemy ze wzoru

$$Y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum S_{zi}}{\sum A_i},$$

dzieląc figurę na 3 figury proste (kwadrat $2r$ x $2r$ i dwa półkola)

$$Y_c = \frac{2r \cdot 2r \cdot r - \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 + \frac{\pi r^2}{2}\left(2r + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)}{2r \cdot 2r - \frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r^2}{2}} = \frac{(4+\pi)r^3}{4r^2} = (1 + \frac{\pi}{4})r \cong 1{,}786r.$$

Moment bezwładności półkola względem jego poziomej osi centralnej

$$I_{zc}^{(p)} = I_z^{(p)} - A_p\left(\frac{4}{3}\frac{r}{\pi}\right)^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2}\frac{16}{9}\frac{r^2}{\pi^2} \cong 0{,}11 r^4.$$

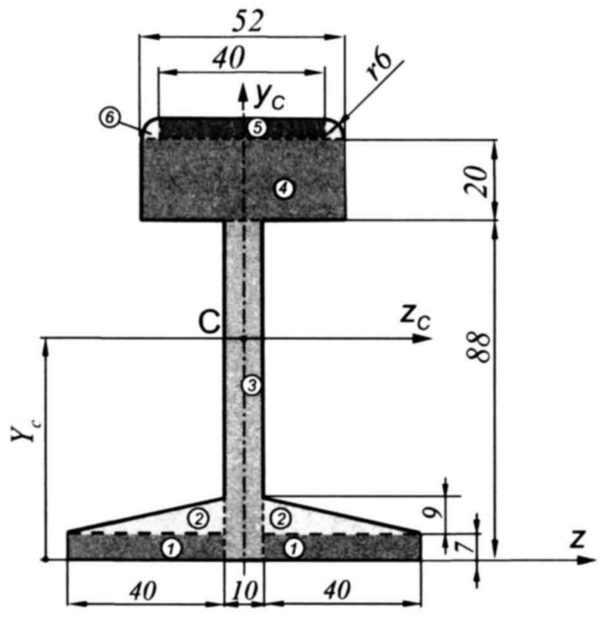
Moment bezwładności całej figury względem jej poziomej osi centralnej $z_c$ wynosi

$$I_{zc} = I_{zc}^{(1)} - I_{zc}^{(2)} + I_{zc}^{(3)} = \frac{2r(2r)^3}{12} + 2r \cdot 2r(Y_c - r)^2 - \left[0{,}11r^4 + \frac{\pi r^2}{2}(Y_c - \frac{4r}{3\pi})^2\right] +$$

$$+\left[0{,}11r^4 + \frac{\pi r^2}{2}(2r - Y_c + \frac{4r}{3\pi})^2\right] = \frac{4}{3}r^4 + 4r^2(1{,}786r - r)^2 - 0{,}11r^4 - \frac{\pi r^2}{2}(1{,}786r - \frac{4r}{3\pi})^2 +$$

$$+ 0{,}11r^4 + \frac{\pi r^2}{2}(2r - 1{,}786r + \frac{4}{3}\frac{r}{\pi})^2 = 1{,}53r^4.$$

**Zadanie 6.5.** Na rys.6.10 pokazano przekrój poprzeczny szyny kolejowej pośredniej wraz z przybliżonymi jej wymiarami podanymi w milimetrach. Obliczyć moment bezwładności przekroju poprzecznego tej szyny względem centralnej osi poziomej $z_c$.




**Rys. 6.10**

R o z w i ą z a n i e. Obliczenie współrzędnej środka ciężkości $C$ od osi $z$

$$Y_c = \frac{2\cdot 40\cdot 7\cdot 3{,}5 + 2\cdot 0{,}5\cdot 40\cdot 9\cdot 10 + 10\cdot 88\cdot 44 + 52\cdot 20\cdot 98 + 40\cdot 6\cdot 111 + 2\frac{\pi 6^2}{4}(\frac{4\cdot 6}{3\pi} + 108)}{2\cdot 40\cdot 7 + 2\cdot 0{,}5\cdot 40\cdot 9 + 10\cdot 88 + 52\cdot 20 + 40\cdot 6 + 2\frac{\pi 6^2}{4}} =$$

$$= 57{,}1\,mm.$$

Obliczenie momentu bezwładności $I_{zc}$ przekroju poprzecznego szyny względem głównej osi centralnej $z_c$. Moment ten obliczono jako sumę momentów bezwładności prostych elementów składowych przekroju poprzecznego (prostokątów, trójkątów, półkola) względem ich poziomych osi centralnych, a następnie przeniesieniu tych momentów do osi centralnej $z_c$ całej figury, zgodnie ze wzorem Steinera

$$I_{zc} = \sum_{i=1}^{6}(I_{zci} + F_i a_i^2),$$

gdzie $a_i$ jest odległością między osią centralną $z_{ci}$ $i$-tej figury i osią $z_c$ całego przekroju poprzecznego.

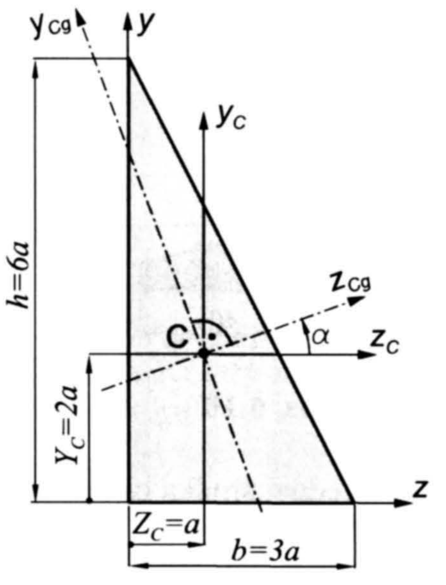
$$I_{zc} = 2\left[\frac{40\cdot 7^3}{12} + 40\cdot 7(53{,}6)^2\right] + 2\left[\frac{40\cdot 9^3}{36} + 0{,}5\cdot 40\cdot 9(46{,}1)^2\right] + \frac{10\cdot 88^3}{12} + 10\cdot 88(13{,}1)^2 +$$

$$+\frac{52\cdot 20^3}{12} + 52\cdot 20(40{,}9)^2 + \frac{40\cdot 6^3}{12} + 40\cdot 6(53{,}9)^2 + 0{,}11\cdot 6^4 + \frac{\pi 6^2}{2}(56{,}9 - 6 + \frac{4\cdot 6}{3\pi})^2 \cong$$

$$\cong 573\cdot 10^4 mm^4 = 573\, cm^4$$

Przedostatni skladnik sumy $0{,}11\cdot 6^4$ to moment bezwładności półkola (dwóch ćwiartek koła) względem jego osi centralnej. Przedstawiona metoda obliczeń jest ogólna i może być zastosowana praktycznie do obliczeń momentów bezwładności figur o dowolnych kształtach.

**Zadanie 6.6.** Wyznaczyć kierunki głównych centralnych osi bezwładności i obliczyć wartości głównych centralnych momentów bezwładności dla figury w kształcie trójkąta prostokątnego o podstawie $b = 3a$ i wysokości $h = 6a$ (rys. 6.11).




**Rys. 6.11**

R o z w i ą z a n i e.

$$I_z = \frac{bh^3}{12} = \frac{3a(6a)^3}{12} = 54a^4,$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{6a(3a)^3}{12} = 13{,}5a^4,$$

$$I_{zy} = \frac{b^2h^2}{24} = \frac{(3a)^2(6a)^2}{24} = 13{,}5a^4,$$

$$I_{zc} = \frac{bh^3}{36} = \frac{3a(6a)^3}{36} = 18a^4,$$

$$I_{yc} = \frac{hb^3}{36} = \frac{6a(3a)^3}{36} = 4{,}5a^4,$$

$$I_{zcyc} = I_{zy} - AY_C Z_C = 13{,}5a^4 - 9a^2 \cdot a \cdot 2a = -\,4{,}5a^4,$$

$$I_{yc(-zc)} = -I_{zcyc} = 4{,}5a^4$$

$$tg2\alpha = \frac{2I_{zcyc}}{I_{yc} - I_{zc}} = \frac{2(-\,4{,}5a^4)}{4{,}5a^4 - 18a^4} = \frac{2}{3}$$

$$2\alpha = 33{,}69°,$$

$$\alpha \cong 16°51'.$$

$$I_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{I_{zc} + I_{yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{zc} - I_{yc}}{2}\right)^2 + (I_{zcyc})^2}$$

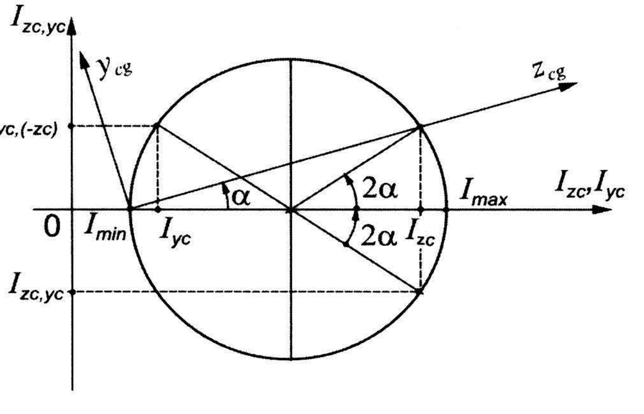
$$I_{zcg} = I_{\max} = \frac{18a^4 + 4{,}5a^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{18a^4 - 4{,}5a^4}{2}\right)^2 + (-\,4{,}5a^4)^2} = 11{,}25a^4 + 8{,}11a^4 = 19{,}36a^4,$$

$$I_{ycg} = I_{\min} = 11{,}25a^4 - 8{,}11a^4 = 3{,}14a^4.$$

Sprawdzenie:

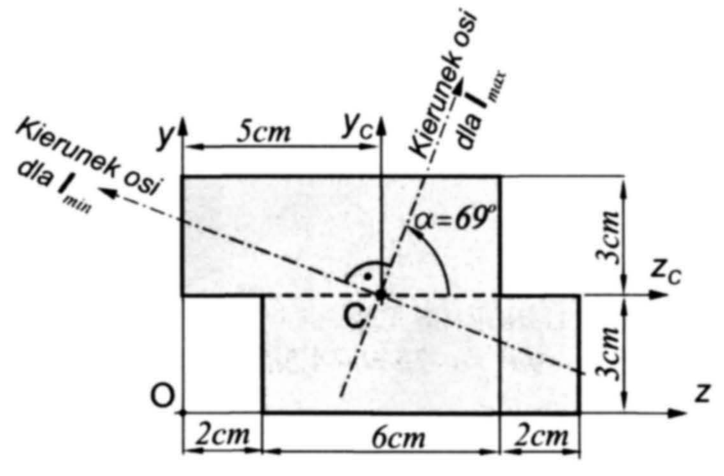
$$I_{\max} + I_{\min} = 19{,}36a^4 + 3{,}14a^4 = 22{,}5a^4 = I_{zc} + I_{yc}.$$

Wyznaczenie głównych centralnych momentów bezwładności metodą wykreślną (rys. 6.12 – Koło Mohra dla momentów bezwładności).




**Rys. 6.12**

**Zadanie 6.7.** Dla figury płaskiej zacienionej na rys. 6.13 wyznaczyć kierunki głównych centralnych osi bezwładności oraz główne centralne momenty bezwładności




**Rys. 6.13**

R o z w i ą z a n i e.

$$Y_c = \frac{6\cdot 6\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 1{,}5 + 2\cdot 3\cdot 4{,}5}{6\cdot 6 + 2\cdot 3 + 2\cdot 3} = \frac{108+9+27}{48} = \frac{144}{48} = 3\ cm$$

$$Z_c = \frac{6\cdot 6\cdot 5 + 2\cdot 3\cdot 1 + 2\cdot 3\cdot 9}{48} = \frac{180+6+54}{48} = \frac{240}{48} = 5\ cm$$

$$I_{yc} = \frac{6(6)^3}{12} + 2\left[\frac{3\cdot 2^3}{12} + 6\cdot 4^2\right] = 108 + 2(2+96) = 108 + 4 + 192 = 304\ cm^4$$

$$I_{zc} = 2\frac{8\cdot 3^3}{3} = 2\cdot 8\cdot 9 = 144\ cm^4$$

$$tg(-2\alpha) = tg(\pi - 2\alpha)$$

$$I_{zcyc} = 0 + 2\cdot 3\cdot 4(-1{,}5) + 2\cdot 3(-4)15 = -\ 72\ cm^4$$

$$tg\,2\alpha = \frac{2I_{zcyc}}{I_{yc} - I_{zc}} = \frac{2(-72)}{304-144} = -\ 0{,}9$$

Wyznaczmy kąt $2\alpha$ w przedziale $0 \le 2\alpha \le \pi$

$$2\alpha \cong 138°$$

$$\alpha = 69°$$

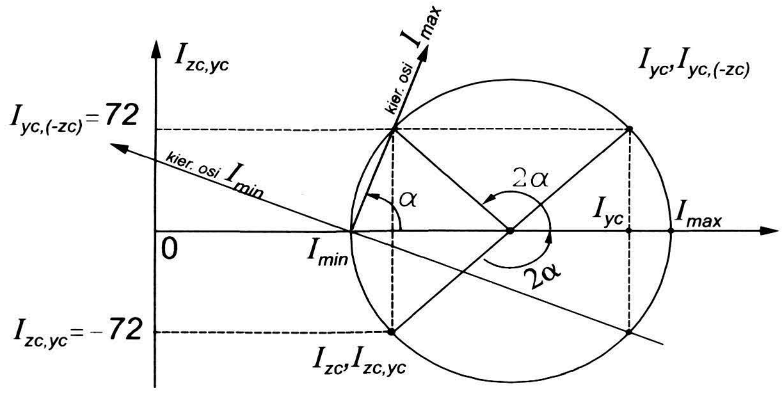
Wtedy kąt $\alpha$ jest odmierzony od osi $z_c$ w kierunku trygonometrycznym (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) do osi, względem której moment bezwładności osiąga wartość maksymalną.

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_{zc}+I_{yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{zc}-I_{yc}}{2}\right)^2 + (I_{zcyc})^2}$$

$$I_{max} = \frac{144+304}{2} + \sqrt{\left(\frac{144-304}{2}\right)^2 + (-72)^2} = 224 + 107{,}6 = 331{,}6\ cm^4$$

$$I_{min} = 224 - 107{,}6 = 116{,}4\ cm^4$$

Rozwiązanie metodą wykreślną




**Rys. 6.14**

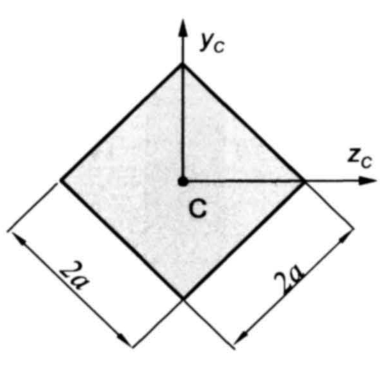
Jeżeli w tym zadaniu kąt $2\alpha$ wyznaczymy z pierwszej ćwiartki ujemnej, wtedy $2\alpha = -42°$,

$\alpha = -21°$, ale kąt ten należy odmierzać od osi $y_c$, ponieważ $I_{yc} > I_{zc}$.

## 6.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

**Zadania 6.8a÷6.8h.** Dla figur płaskich pokazanych na rys. 6.15a÷6.15h obliczyć współrzędne środka ciężkości oraz momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności.

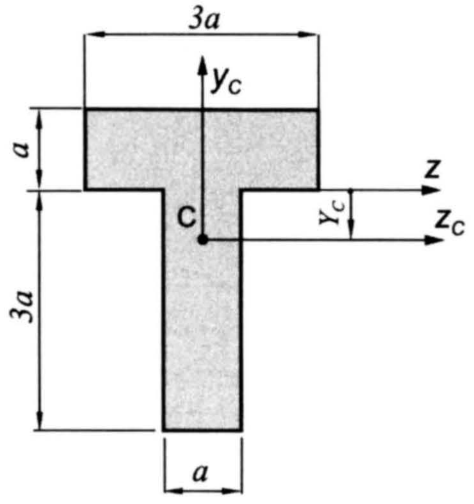
**Zadanie 6.8a**




**Rys. 6.15a**

ODPOWIEDŹ: $I_{zc} = I_{yc} = \frac{4}{3}a^4$.

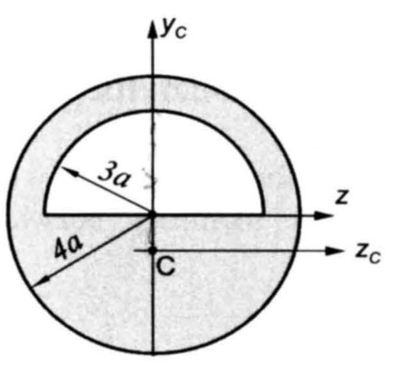
**Zadanie 6.8b**




**Rys. 6.15b**

ODPOWIEDŹ: $Y_c = -\frac{a}{2}$, $I_{zc} = 8{,}5a^4$, $I_{yc} = 2{,}5a^4$.

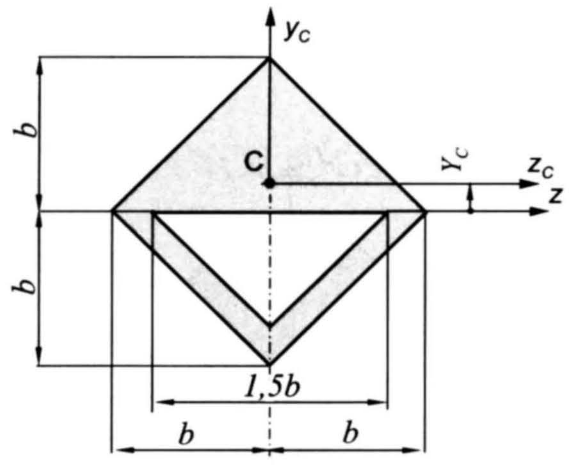
**Zadanie 6.8c**




**Rys. 6.15c**

ODPOWIEDŹ: $Y_c \cong -0{,}5a$, $I_z = 169{,}25a^4$, $I_{zc} = 160{,}22a^4$, $I_{yc} = 169{,}25a^4$.

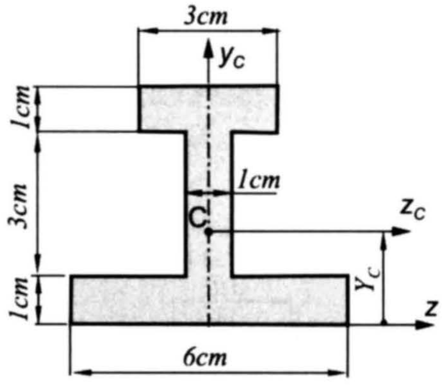
**Zadanie 6.8d**




**Rys. 6.15d**

ODPOWIEDŹ: $Y_c = \dfrac{9}{92} b \cong 0{,}098b,\quad I_z \cong 0{,}281b^4,\quad I_{zc} \cong 0{,}267b^4,\quad I_{yc} = 0{,}281b^4.$

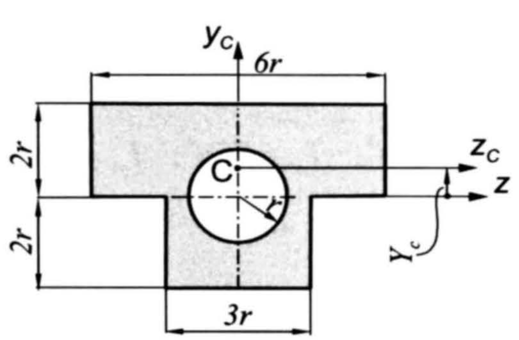
**Zadanie 6.8e**




**Rys. 6.15e**

ODPOWIEDŹ: $Y_c = 2\ cm,\quad I_{zc} = 36\ cm^4,\quad I_{yc} = 20{,}5\ cm^4.$

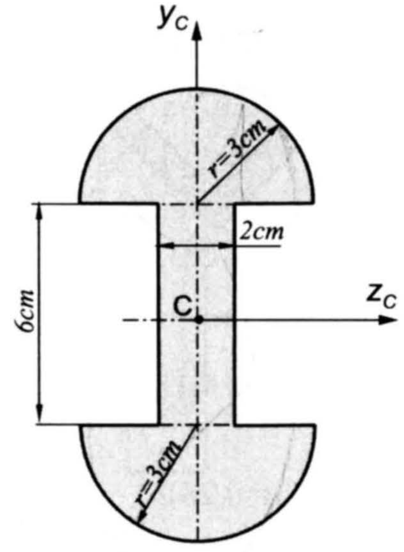
**Zadanie 6.8f**




**Rys. 6.15f**

ODPOWIEDŹ: $Y_c = 0{,}404r$, $I_{zc} \cong 20{,}8r^4$, $I_{yc} \cong 39{,}7r^4$ .

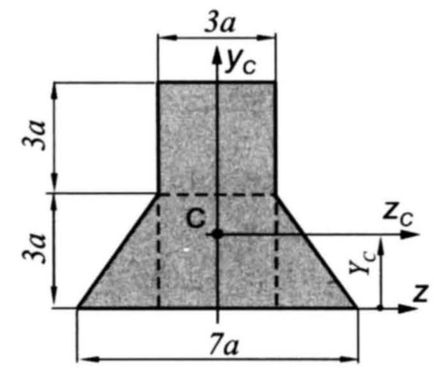
**Zadanie 6.8g**




**Rys. 6.15g**

ODPOWIEDŹ: $I_{zc} \cong 570\ cm^4$, $I_{yc} \cong 67{,}6\ cm^4$.

**Zadanie 6.8h**



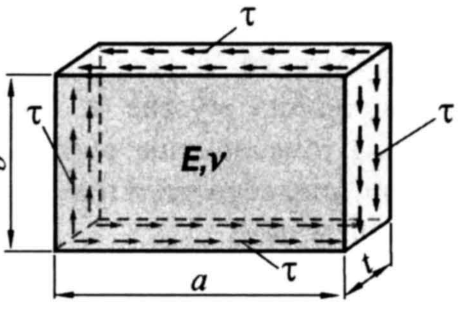

**Rys. 6.15h**

ODPOWIEDŹ: $Y_c = \dfrac{5}{2}a$, $I_z = 225a^4$, $I_{zc} = 75a^4$, $I_{yc} = 43a^4$.

# 7. CZYSTE I TECHNOLOGICZNE ŚCINANIE

## 7.1. Czyste ścinanie

Rozpatrzmy element prostokątny o wymiarach $a \times b$ i grubości $t$ wykonany z materiału izotropowego o module sprężystości (Younga) $E$ i liczbie Poissona $\nu$. Przyjmijmy, że w przekrojach $a \times t$ i $b \times t$ rozpatrywanego elementu (rys. 7.1) działają równomiernie rozłożone naprężenia styczne $\tau$.




**Rys. 7.1**

Równowaga takiego elementu jest możliwa tylko wtedy, gdy naprężenia $\tau$ we wszystkich przekrojach mają takie same wartości i zwroty pokazane na rys. 7.1 lub wszystkie zwroty przeciwne. Jeżeli unieruchomimy lewą krawędź rozpatrywanego elementu (rys. 7.2), to jego odkształcenie charakteryzuje kąt $\gamma$, zwany kątem odkształcenia postaciowego. Kąt ten (liczony w radianach) jest wprost proporcjonalny do wartości naprężenia $\tau$ i można go obliczyć ze wzoru

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \tag{7.1}$$

nazywanego prawem Hooke'a dla ścinania. Literą $G$ oznaczono moduł odkształcenia postaciowego (Kirchhoffa), który zależy od modułu sprężystości $E$ i liczby Poissona $\nu$

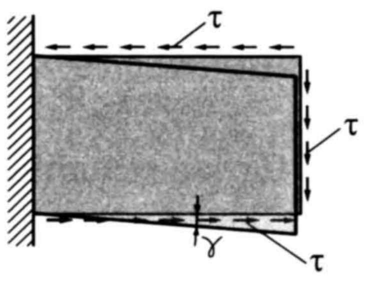
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \tag{7.2}$$

Dla stali przyjmuje się:

$E = 2{,}06 \cdot 10^5\ MPa,$

$\nu = 0{,}3,$

$G \cong 8 \cdot 10^4\ MPa.$




**Rys. 7.2**

## 7.2. Ścinanie technologiczne

Ścinanie charakteryzuje się tym, że w przekrojach równoległych do kierunku działania obciążenia działają naprężenia styczne $\tau$. Przy ścinaniu technologicznym przyjmuje się, że naprężenia $\tau$ są równomiernie rozłożone w całym rozpatrywanym przekroju. Jeżeli pole powierzchni ścinanego przekroju poprzecznego wynosi $A_t$, to siła wewnętrzna $T$ ścinająca ten przekrój wynosi

$$T = A_t \cdot \tau \tag{7.3}$$

W zastosowaniach inżynierskich rozpatrywane są najczęściej dwa przypadki zagadnień:

- obliczenie siły, przy której nastąpi ścięcie materiału w rozpatrywanym przekroju,
- obliczenie obciążenia lub pola powierzchni przekroju ścinanego, przy których element będzie pracował bezpiecznie, przy przyjętym współczynniku bezpieczeństwa.

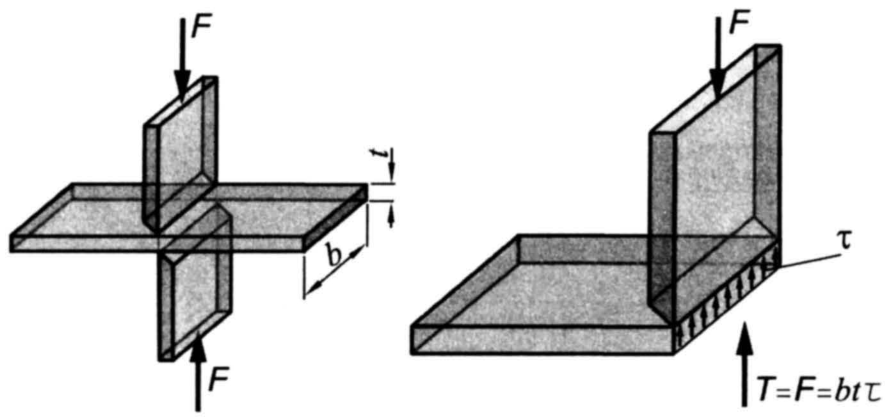
Pierwszy przypadek dotyczy np. obliczenia obciążeń dla wykrojników, drugi – obliczeń wytrzymałościowych elementów nośnych oraz połączeń sworzniowych, śrubowych, nitowanych i spawanych. Wytrzymałość materiału na ścinanie, wyznaczoną w laboratorium wytrzymałości materiałów, oznacza się symbolem $R_t$ [MPa]. Naprężenie dopuszczalne na ścinanie

$$k_t = \frac{R_t}{n}, \tag{7.4}$$

gdzie $n$ jest współczynnikiem bezpieczeństwa ($n > 1$). Z hipotezy Hubera wynika, że

$$k_t = \frac{\sqrt{3}}{3} k_r \cong 0{,}58 k_r, \tag{7.5}$$

gdzie $k_r$ jest naprężeniem dopuszczalnym na rozciąganie. Rozpatrzmy płaskownik o przekroju $b \times t$ ścinany siłą $F$ (rys. 7.3)




**Rys. 7.3**

Aby płaskownik ten został przecięty (zniszczony), siła $F$ musi spełniać warunek

$$F > A_t \cdot R_t = b \cdot t \cdot R_t. \tag{7.6}$$

Jeżeli płaskownik ma pracować bezpiecznie, to

$$\tau = \frac{F}{A_t} = \frac{F}{b \cdot t} \le k_t \tag{7.7}$$

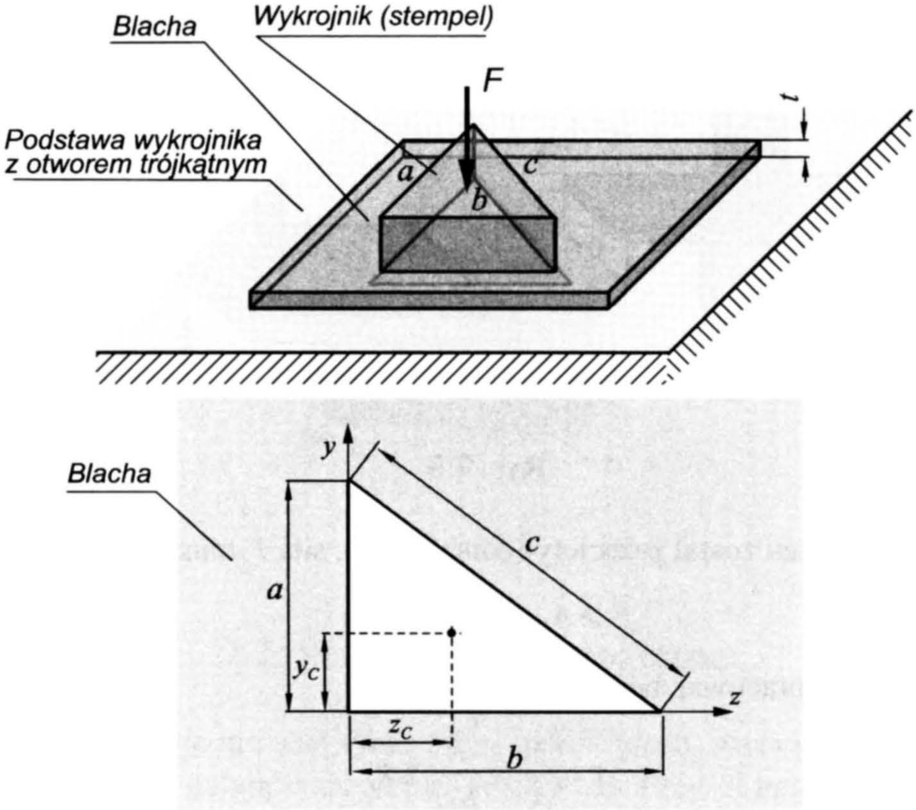
Z ostatniej nierówności, przy znanym naprężeniu dopuszczalnym na ścinanie $k_t = \frac{R_t}{n}$, można wyznaczyć jedną z wielkości $F$, $b$, $t$ lub $A_t$, wcześniej przyjmując pozostałe. W wyniku otrzymujemy:

$$F \le A_t k_t, \quad A_t \ge \frac{F}{k_t}, \quad t = \frac{A_t}{b}, \quad b = \frac{A_t}{t}. \tag{7.8}$$

Przy obliczeniach wytrzymałościowych połączeń nitowych, spawanych i ściśle pasowanych połączeń sworzniowych i wpustowych pomija się występowanie tarcia między częściami łączonymi.

## 7.3. Przykłady obliczeń wytrzymałościowych na ścinanie technologiczne

**Zadanie 7.1.** Wyznaczyć linię działania siły $F$ oraz obliczyć wielkość tej siły potrzebną do wycięcia z blachy o grubości $t = 4\ mm$ trójkąta prostokątnego o długości boków $a = 30\ mm$, $b = 40\ mm$ i $c = 50\ mm$ (rys. 7.4). Wytrzymałość materiału blachy na ścinanie $R_t = 380\ MPa$.




**Rys. 7.4**

R o z w i ą z a n i e. Siła $F$ działająca na wykrojnik, potrzebna do wycięcia z blachy trójkąta prostokątnego o podanych wymiarach musi wynosić

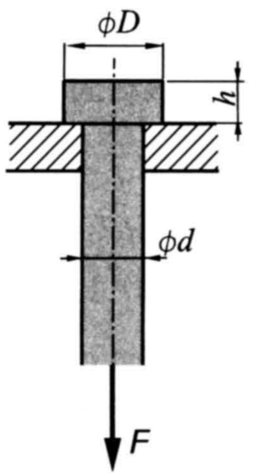
$$F > A_t R_t = (a+b+c)t \cdot R_t = (30+40+50)4 \cdot 10^{-6} m^2 \cdot 380 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2} = 182{,}4\ kN.$$

Aby obciążenie ścinające było równomierne na całym obwodzie wycinanego trójkąta, linia działania siły $F$ musi przechodzić przez środek ciężkości obwodu trójkąta, czyli przez punkt $C$ o współrzędnych $y_c$ i $z_c$ (rys. 7.4)

$$y_c = \frac{30 \cdot 15 + 0 + 50 \cdot 15}{30+40+50} = 10\ mm,$$

$$z_c = \frac{0 + 40 \cdot 20 + 50 \cdot 20}{30+40+50} = 15\ mm.$$

**Zadanie 7.2.** Pręt o średnicy $d$ = 20 $mm$ jest zakończony łbem o średnicy $D$ = 25 $mm$ i wysokości $h$ = 10 $mm$. Naprężenia dopuszczalne dla materiału pręta odpowiednio na rozciąganie, ścinanie i docisk wynoszą: $k_r$ = 110 $MPa$, $k_t$ = 65 $MPa$ i $k_d$ = 180 $MPa$. Pręt rozciągany jest siłą $F$ = 31,4 $kN$ (rys. 7.5). Sprawdzić, czy naprężenia działające w pręcie są mniejsze od dopuszczalnych.

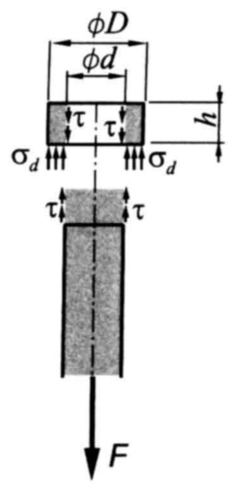



**Rys. 7.5**

R o z w i ą z a n i e. Siła normalna rozciągająca pręt $N = F$ wywołuje naprężenie

$$\sigma_r = \frac{N}{A} = \frac{4N}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 31{,}4 \cdot 10^{-3} MN}{\pi \cdot (0{,}02)^2 m^2} \cong 100\ MPa,$$

które jest mniejsze od dopuszczalnego $k_r$ = 110 $MPa$. Naprężenia od ścinania i docisku działające na łeb sworznia pokazano na rys. 7.6.




**Rys. 7.6**

Pole powierzchni przekroju ścinanego $A_t = \pi dh$, a siła ścinająca $T = F$. Naprężenia ścinające działające w tym przekroju wynoszą

$$\tau = \frac{T}{A_t} = \frac{F}{\pi dh} = \frac{31{,}4 \cdot 10^{-3} MN}{\pi (0{,}02)(0{,}01) m^2} \cong 50\ MPa$$

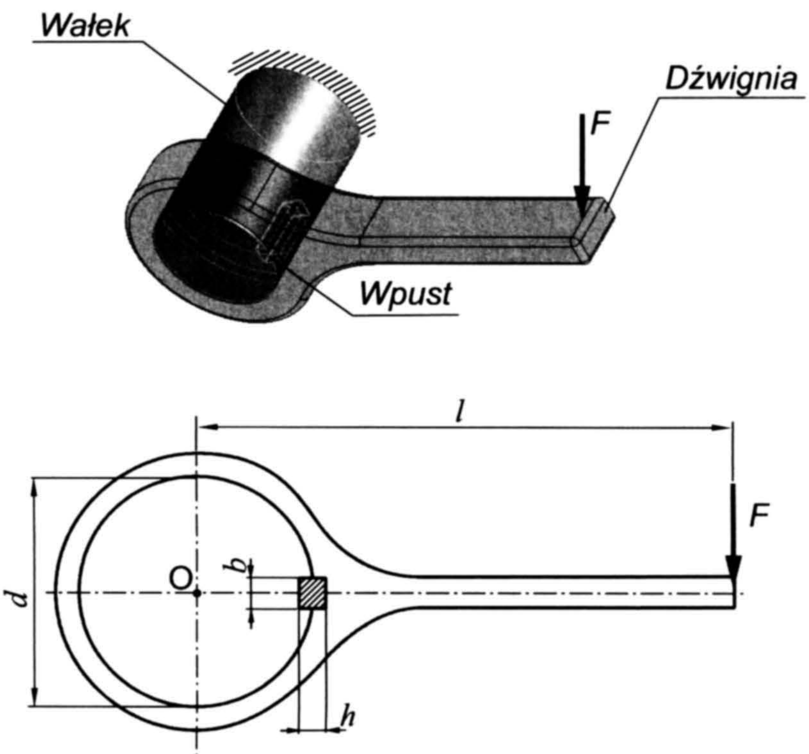
są mniejsze od dopuszczalnych na ścinanie $k_t$ = 65 $MPa$.

Docisk między łbem sworznia i płytą jest na powierzchni pierścienia o średnicy zewnętrznej $D$ i wewnętrznej $d$. Pole powierzchni docisku $A_d = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$. Naprężenia wywołane dociskiem wynoszą

$$\sigma_d = \frac{F}{A_d} = \frac{4F}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{4 \cdot 31{,}4 \cdot 10^{-3} MN}{\pi[(0{,}025)^2 - (0{,}02)^2]\, m^2} \cong 177{,}8\ MPa$$

i są mniejsze od naprężeń dopuszczalnych na docisk $k_d$ = 180 $MPa$. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że średnica pręta i łeb pręta zostały zaprojektowane jako bezpieczne dla podanej wartości siły $F$.

**Zadanie 7.3.** Dźwignia o wymiarach pokazanych na rys. 7.7 została osadzona na wale o średnicy $d$. Obrót dźwigni względem wału został uniemożliwiony przez prostopadłościenny wpust o wymiarach $b$ x $h$ x $a$, gdzie $a$ jest długością wpustu. Obliczyć naprężenia ścinające wpust oraz naprężenia wywołane dociskiem dźwigni do wpustu.




**Rys. 7.7**

R o z w i ą z a n i e. Z sumy momentów sił względem punktu $0$ wynika, że siła ścinająca działająca na wpust wynosi

$$T = \frac{2F \cdot l}{d}.$$

Pole powierzchni przekroju ścinanego wpust

$$A_t = ab.$$

Naprężenie ścinające wpust

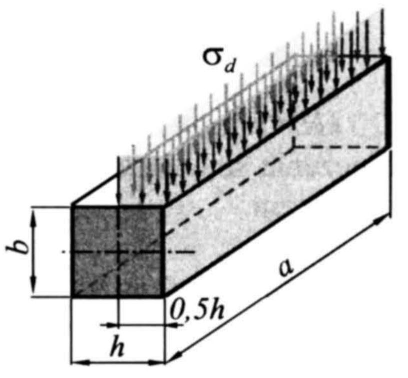
$$\tau = \frac{T}{A_t} = \frac{2Fl}{abd}$$

Pole powierzchni docisku (rys. 7.8)

$$A_d = a\frac{h}{2}.$$

Naprężenie na docisk

$$\sigma_d = \frac{F_d}{A_d} = \frac{T}{A_d} = \frac{4Fl}{dah}.$$




**Rys. 7.8**

Przy danych wielkościach: $F$, $l$, $d$, $a$, $k_t$ i $k_d$ – można z nierówności

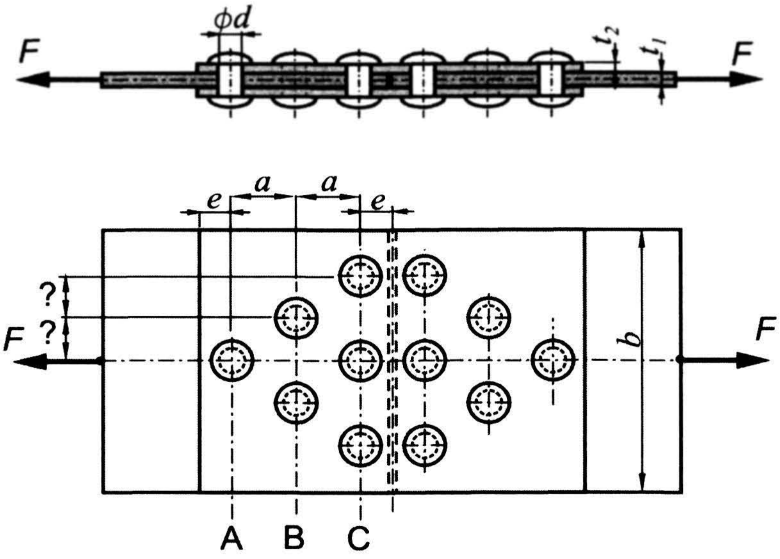
$$\tau = \frac{2Fl}{abd} \le k_t$$

oraz

$$\sigma_d = \frac{4Fl}{dah} \le k_d$$

obliczyć wymiary $b$ i $h$ wpustu.

**Zadanie 7.4.** Dwa płaskowniki o grubości $t_1$ = 9 *mm* i szerokości $b$ = 170 *mm* połączono poprzez nitowanie dwiema nakładkami o tej samej szerokości $b$ i grubości $t_2$ = 6 *mm*. Do połączenia użyto 12 nitów o średnicy 16 *mm*, rozmieszczonych w sposób pokazany na rys. 7.9. Odległość pierwszego rzędu nitów od styku płaskowników i odległości osi nita od brzegu nakładek $e$ = 20 *mm*. Wymiar $a$ można przyjąć, np. $a = 2e$.




**Rys. 7.9**

Złącze rozciągane jest siłą $F = 120\ kN$. Obliczyć: naprężenia rozciągające w przekrojach *A-A, B-B* i *C-C* płaskownika, naprężenia ścinające w nitach oraz naprężenia wywołane dociskiem między nitem a płaskownikiem.

R o z w i ą z a n i e. W połączeniach nitowanych przyjmuje się, że każdy nit (o tej samej średnicy) przejmuje taką samą część siły obciążającej. W rozpatrywanym przypadku po jednej stronie złącza znajduje się sześć nitów, a zatem siła ścinająca przypadająca na jeden nit wynosi $T = \frac{1}{6}F$. Przy zniszczeniu złącza (wysunięciu się jednego z płaskowników) każdy z nitów ulega ścięciu w dwóch przekrojach czyli nity są dwucięte. Pole powierzchni przekroju poprzecznego ścinane w jednym nicie

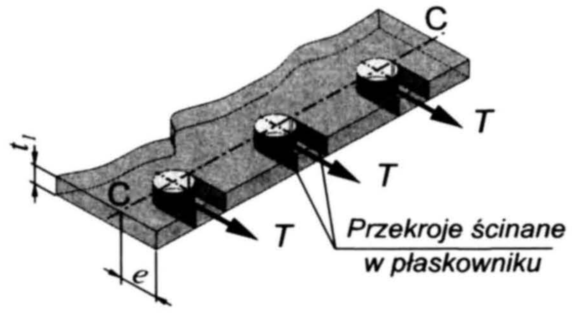
$$A = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi d^2}{2}.$$

Naprężenia ścinające w nitach

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{F}{3\pi d^2} = \frac{120 \cdot 10^{-3} MN}{3\pi (0{,}016)^2 m^2} = 49{,}7\ MPa.$$

Trzeba również sprawdzić naprężenia ścinające w płaskowniku przy rzędzie nitów w przekroju *C-C* (rys. 7.10).
Pole powierzchni przekrojów ścinanych w płaskowniku przez jeden nit
$A_T = 2 \cdot e \cdot t_1$.
Naprężenie ścinające w płaskowniku

$$\tau = \frac{T}{A_T} = \frac{\frac{F}{6}}{2et_1} = \frac{F}{12et_1} = \frac{120 \cdot 10^{-3} MN}{12(0{,}02)(0{,}009)\ m^2} = 55{,}6\ MPa.$$




**Rys. 7.10**

Przy obliczaniu naprężeń na docisk między nitem i płaskownikiem, pole powierzchni docisku przyjmuje się $A_d = d \cdot t_1$, a nie $\frac{1}{2}\pi d t_1$ (ze względu na nierównomierny rozkład tych naprężeń). Naprężenia dociskowe

$$\sigma_d = \frac{T}{A_d} = \frac{F}{6dt_1} = \frac{120 \cdot 10^{-3} MN}{6(0{,}016)(0{,}009)\ m^2} = 138{,}9\ MPa\ .$$

Naprężenia rozciągające w płaskowniku:

- w przekroju $C$-$C$

$$N_C = 3T = \frac{1}{2}F = 60\ kN \text{ – siła normalna,}$$

$$A_C = (b - 3d)t_1 = (170 - 48)9 \cdot 10^{-6} m^2 = 1{,}098 \cdot 10^{-3} m^2,$$

$$\sigma_C = \frac{N_C}{A_C} = \frac{60 \cdot 10^{-3} MN}{1{,}098 \cdot 10^{-3} m^2} = 54{,}6\ MPa;$$

- w przekroju $B$-$B$

$$N_B = 5T = \frac{5}{6}F = 100\ kN,$$

$$A_B = (b - 2d)t_1 = (170 - 32)9 \cdot 10^{-6} = 1{,}242 \cdot 10^{-3} m^2,$$

$$\sigma_B = \frac{N_B}{A_B} = \frac{100 \cdot 10^{-3} MN}{1{,}242 \cdot 10^{-3} m^2} = 80{,}5\ MPa;$$

- w przekroju $A$-$A$

$$N_A = 120\ kN,$$

$$A_A = (b - d)t_1 = 1{,}386 \cdot 10^{-3} m^2,$$

$$\sigma_A = 86{,}6\ MPa.$$

Naprężenia rozciągające w nakładkach

- przekrój $C$-$C$

$$N_C = F = 120\,kN,$$

$$A_C = (b - 3d)2t_2 = 1{,}464 \cdot 10^{-3} m^2,$$

$$\sigma_C = \frac{120 \cdot 10^{-3} MN}{1{,}464 \cdot 10^{-3} m^2} \cong 82{,}0\,MPa,$$

- przekrój $B$-$B$

$$N_B = 3T = \frac{1}{2}F = 60\,kN,$$

$$A_B = (b - 2d)2t_2 = 1{,}656 \cdot 10^{-3} m^2,$$

$$\sigma_B = \frac{60 \cdot 10^{-3} MN}{1{,}656 \cdot 10^{-3} m^2} = 36{,}2\,MPa;$$

- przekrój $A$-$A$

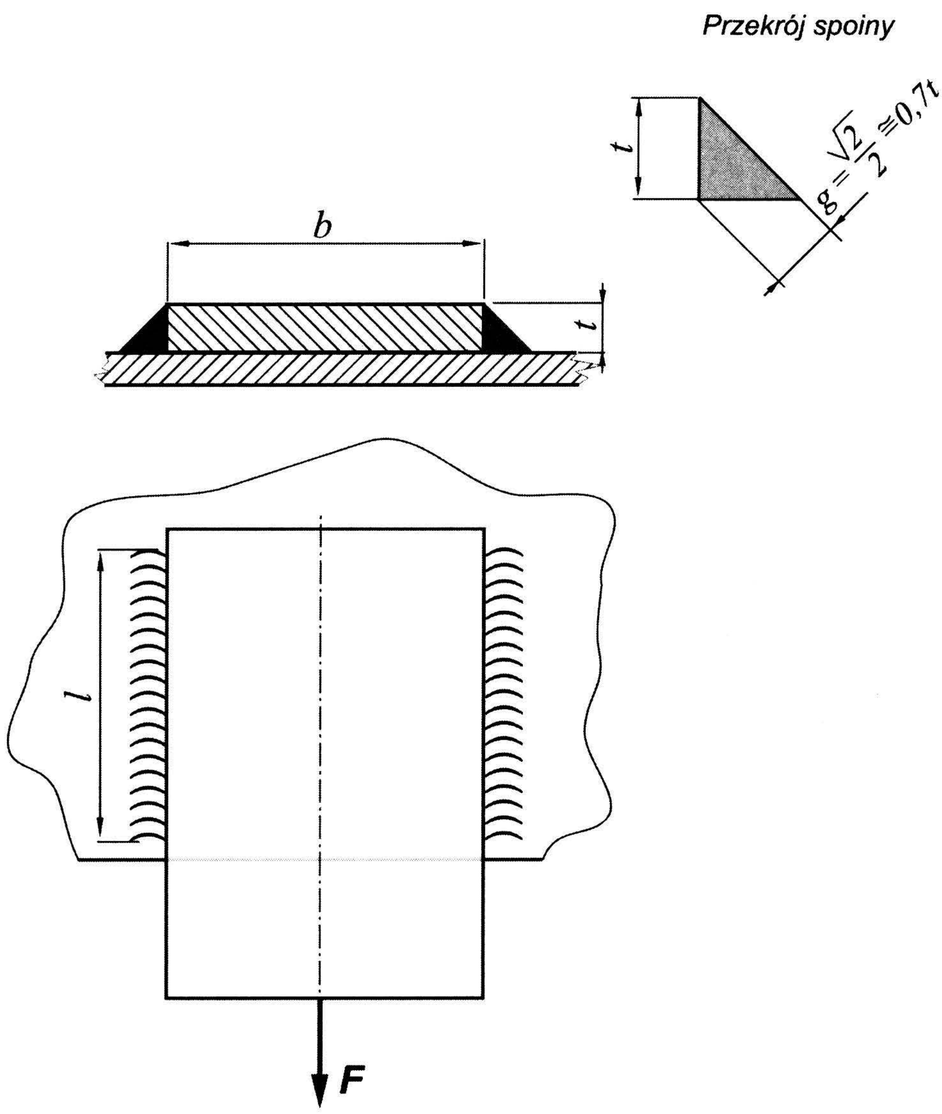
$$N_A = T = \frac{1}{6}F = 20\,kN,$$

$$A_A = (b - d)2t_2 = 1{,}848 \cdot 10^{-3} m^2,$$

$$\sigma_A = \frac{20 \cdot 10^{-3} MN}{1{,}848 \cdot 10^{-3} m^2} = 10{,}8\,MPa.$$

Ostatecznie ustalono, że maksymalne naprężenia rozciągające występują w przekroju $A$-$A$ płaskownika i wynoszą $\sigma_{r\max} = 86{,}6\,MPa$. Maksymalne naprężenia ścinające występują w płaskowniku (ścinanie płaskownika przez nity – patrz rys. 7.10) i wynoszą $\tau_{\max} = 55{,}6\,MPa$. Naprężenia dociskowe między nitami i płaskownikiem wynoszą $\sigma_d = 138{,}9\,MPa$. Sprawdzić stan naprężenia w nakładce.

**Zadanie 7.5.** Obliczyć szerokość $b$ stalowego płaskownika o grubości $t$ oraz długości dwóch spoin pachwinowych, którymi płaskownik ten został przyspawany do blachy węzłowej, jeżeli płaskownik obciążono siłą rozciągającą $F$ (rys. 7.11).
Dane: $F$, $t$, $k_r$, $k_t$ – gdzie $k_r$ jest naprężeniem dopuszczalnym na rozciąganie płaskownika, a $k_t$ jest naprężeniem dopuszczalnym na ścinanie spoin.




**Rys. 7.11**

R o z w i ą z a n i e. Z warunku wytrzymałości płaskownika na rozciąganie

$$\sigma_r = \frac{N}{A} = \frac{F}{bt} \le k_r$$

wynika, że

$$b \ge \frac{F}{tk_r}.$$

Ścięcie spoin następuje wzdłuż ich najmniejszej grubości $g \cong 0{,}7t$. Pole powierzchni przekrojów ścinanych spoiny siłą $T = F$ wynosi

$$A_t = 2 \cdot 0{,}7t \cdot l = 1{,}4t \cdot l.$$

Z warunku wytrzymałości spoin na ścinanie

$$\tau = \frac{T}{A_t} = \frac{F}{1{,}4tl} \le k_t$$

otrzymujemy

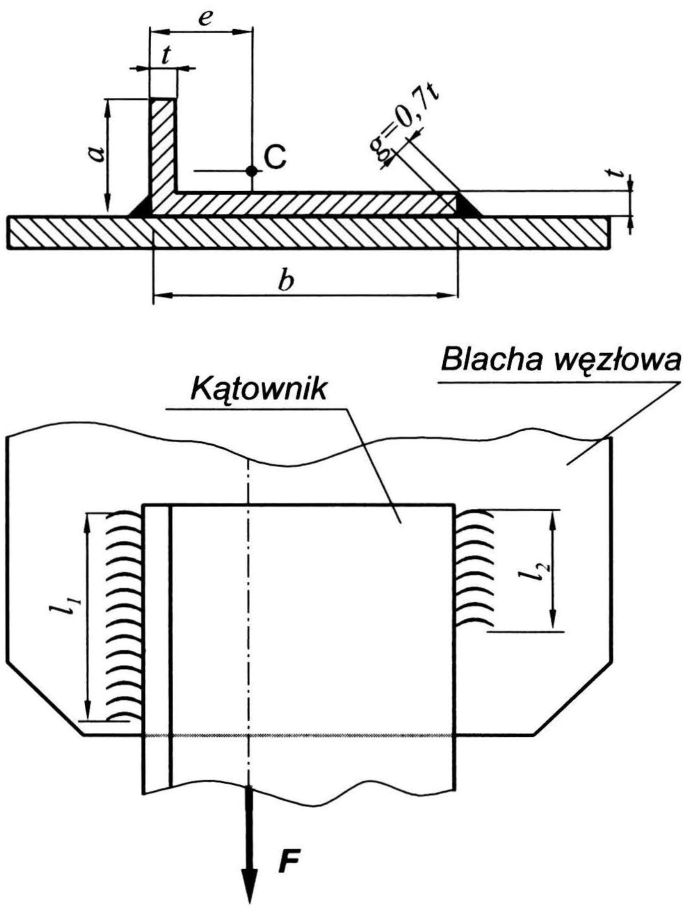
$$l \geq \frac{F}{1{,}4tk_t}.$$

Rzeczywista długość spoiny powinna być powiększona o dwa tzw. kratery (nieprzetopiony początek i koniec spoiny). Długość kraterów przyjmuje się na ogół jako $1{,}5g$, stąd wynika, że rzeczywista długość spoiny

$$l_{rz} = l + 2(1{,}5g) \cong l + 2t.$$

**Zadanie 7.6.** Pręt kratownicy o przekroju kątownika nierównoramiennego (rys. 7.12) został przyspawany do blach węzłowych. Obliczyć długości $l_1$ i $l_2$ spoin pachwinowych, o takiej samej grubości, aby wypadkowa sił w spoinach działała wzdłuż centralnej osi podłużnej pręta.

Dane: $a$, $b$, $t$ – wymiary przekroju poprzecznego pręta,
$F$ – maksymalna siła rozciągająca pręt,
$k_r$ – naprężenie dopuszczalne na rozciąganie pręta,
$k_t$ – naprężenie dopuszczalne na ścinanie spoin.




**Rys. 7.12**

R o z w i ą z a n i e. Położenie środka ciężkości przekroju poprzecznego pręta jest określone wzorem

$$e = \frac{b^2 + at - t^2}{2(a + b - t)}.$$

Oznaczmy siłę ścinającą w spoinie o długości $l_1$ przez $T_1$, a w spoinie o długości $l_2$ – przez $T_2$. Aby wypadkowa sił $T_1$ i $T_2$ spełniała warunki zadania, musi być spełnione równanie wynikające z sumy momentów sił

$$T_2 \cdot b = F \cdot e$$

skąd

$$T_2 = \frac{e}{b} F.$$

Z warunku równowagi sił otrzymano

$$T_1 + T_2 = F,$$

$$T_1 = F - T_2 = \frac{b - e}{b} F.$$

Aby naprężenia ścinające w spoinach nie przekroczyły naprężeń dopuszczalnych, muszą być spełnione nierówności

$$\tau_1 = \frac{T_1}{A_1} = \frac{(b - e)F}{b \cdot l_1 \cdot 0{,}7t} \le k_t,$$

$$\tau_2 = \frac{T_2}{A_2} = \frac{eF}{b \cdot l_2 \cdot 0{,}7t} \le k_r,$$

z których otrzymano długości spoin

$$l_1 \ge \frac{(b - e)F}{0{,}7btk_t},$$

$$l_2 \ge \frac{eF}{0{,}7btk_t}.$$

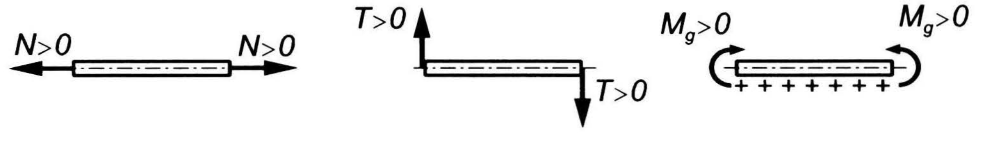
Ponadto musi być spełniony warunek wytrzymałości pręta na rozciąganie

$$\sigma_r = \frac{F}{(a + b - t)t} \le k_r.$$

# 8. ZGINANIE BELEK, RAM I ŁUKÓW

## 8.1. Wprowadzenie. Podstawowe oznaczenia, definicje, wzory i równania

W belkach oraz płaskich ramach i łukach obciążonych w ich płaszczyźnie siłami skupionymi $F$, obciążeniami ciągłymi $q$ i momentami skupionymi $M_0$ występują trzy siły wewnętrzne: siła normalna $N$ – prostopadła do rozpatrywanego przekroju poprzecznego, siła ścinająca (tnąca) $T$ – styczna do rozpatrywanego przekroju oraz moment zginający $M_g$. Dodatnie zwroty tych sił są przyjmowane zazwyczaj takie, jak pokazano na rys. 8.1. Znakami + zaznaczono rozciąganą stronę belki.



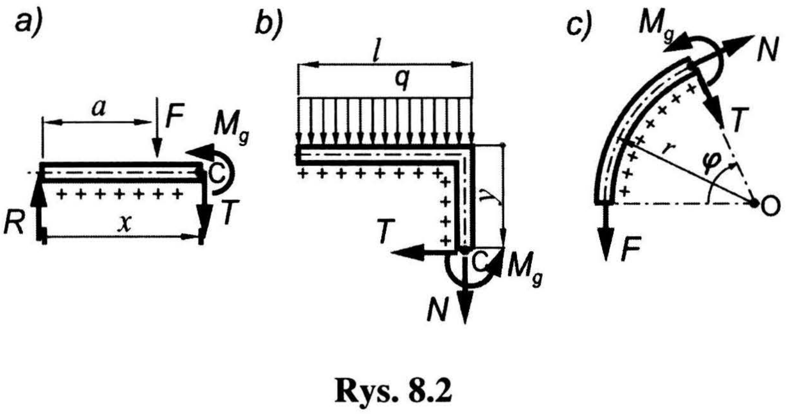

**Rys. 8.1**

W belkach, w których wszystkie obciążenia zewnętrzne (czynne i bierne) są prostopadłe do osi belki, siła normalna $N = 0$. Siła tnąca $T$ w belkach, ramach i łukach jest związana z momentem zginającym $M_g$ następującymi zależnościami:

$$T(x) = \frac{dM_g(x)}{dx} \quad \text{– dla belek i ram,}$$

$$T(\varphi) = \frac{dM_g(\varphi)}{rd\varphi} \quad \text{– dla łuków kołowych o promieniu } r.$$

Siły wewnętrzne $N$, $T$ i $M_g$ wyznacza się z równań równowagi sił dla odciętej „myślowym" przekrojem części belki, ramy lub łuku (rys. 8.2).




**Rys. 8.2**

Wartości sił $N$, $T$ i $M_g$ otrzymuje się takie same, niezależnie od tego czy rozpatruje się lewą, czy prawą odciętą część elementu. W ogólnym przypadku siły wewnętrzne w belkach, ramach i łukach są funkcjami współrzędnych $x$, $y$ lub $\varphi$ określających położenie przekroju (rys. 8.2). Jeżeli na jakimś odcinku rozpatrywanej belki, ramy lub łuku siły wewnętrzne $T$ i $N$ są równe zero, wówczas moment zginający ma stałą wartość ($M_g$ = const) i wtedy na tym odcinku (w tym przedziale) występuje czyste zginanie.

Szczegółowy przebieg zmienności sił wewnętrznych zostanie omówiony w rozwiązywanych zadaniach. Głównym celem sporządzania sił wewnętrznych jest znalezienie najbardziej wytężonego przekroju belki, ramy lub łuku (w belkach na ogół jest to przekrój, w którym występuje moment zginający o największej wartości bezwzględnej). W ramach i łukach trzeba brać pod uwagę naprężenia pochodzące od momentu zginającego i siły normalnej działających w tym samym przekroju poprzecznym. W elementach o przekrojach poprzecznych zwartych (grubościennych) naprężeń stycznych $\tau$ od siły tnącej $T$ na ogół nie oblicza się, jako wielkości pomijalnie małych.

Moment zginający $M_g$ wywołuje w rozpatrywanym przekroju belki, ramy lub łuku naprężenia normalne $\sigma$, czyli naprężenia prostopadłe do przekroju poprzecznego. Zmiana tych naprężeń wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego jest liniowa, co wynika ze wzoru:

$$\sigma_g = -\frac{M_g}{I_{zc}} \cdot y, \tag{8.1}$$

w którym: $M_g$ jest momentem zginającym działającym w przekroju $x$ ($x$ – jest współrzędną mierzoną wzdłuż osi belki); $I_{zc}$ jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki względem głównej osi centralnej $z_c$ (przechodzącej przez środek ciężkości rozpatrywanego przekroju poprzecznego) prostopadłej do płaszczyzny zginania, $y$ jest współrzędną określającą położenie punktów przekroju poprzecznego mierzoną od osi $z_c$.

Przy przyjętym znaku minus we wzorze na $\sigma_g$, oś $y$ skierowana jest do góry. Naprężenia $\sigma_g$ są równe zero dla $y = 0$, czyli na osi $z_c$ zwanej osią obojętną zginania. W belkach o stałym przekroju poprzecznym największe co do wartości bezwzględnej naprężenia od zginania występują w przekroju, w którym działa największy co do wartości bezwzględnej moment zginający w punkcie $|y_{\max}|$ tego przekroju, najbardziej oddalonym od osi obojętnej zginania – od osi $z_c$.

Wielkość

$$W = \frac{I_{zc}}{|y|_{\max}} \tag{8.2}$$

nazywa się wskaźnikiem przekroju poprzecznego na zginanie. Zginany element prętowy konstrukcji (belka, rama, łuk) będzie zaprojektowany bezpiecznie na zginanie, jeżeli będzie spełniony warunek

$$\sigma_{g\,\max} = \frac{|M_g|_{\max}}{W} \le k_g, \tag{8.3}$$

w którym $k_g$ jest naprężeniem dopuszczalnym na zginanie dla materiału pręta. W ramach i łukach oprócz naprężeń pochodzących od momentu zginającego nie wolno zapominać o naprężeniach od siły normalnej, ponieważ w wielu przypadkach naprężenia te mogą być znaczne. Wypadkowe wartości bezwzględne naprężeń od $M_g$ i $N$ oblicza się ze wzoru

$$\sigma_w = \left|\sigma_{Mg} + \sigma_N\right| \tag{8.4}$$

Naprężenia od $M_g$ i $N$ muszą być liczone w tym samym punkcie przekroju poprzecznego. Wolno je dodawać (odejmować) algebraicznie, ponieważ są to naprężenia normalne o takim samym kierunku działania i zgodnych lub przeciwnych zwrotach. Przy projektowaniu elementów konstrukcji trzeba naprężenia $\sigma_w$ obliczyć w tym punkcie elementu, w którym te naprężenia powodują największe wytężenie materiału. Dla elementów wykonanych z materiału o $k_r = k_c$ trzeba znaleźć największą co do wartości bezwzględnej wartość naprężeń wypadkowych, czyli $\sigma_{w\max}$.

Równanie różniczkowe ugięcia podłużnej osi belki ma postać

$$EI_{zc}\frac{d^2w}{dx^2} = -M_g(x), \tag{8.5}$$

w którym $w = w(x)$ jest funkcją ugięcia osi belki. Powyższe równanie zapisano dla osi $w$ skierowanej do dołu. Aby rozwiązać to równanie dla belek jednoprzedziałowych, trzeba:

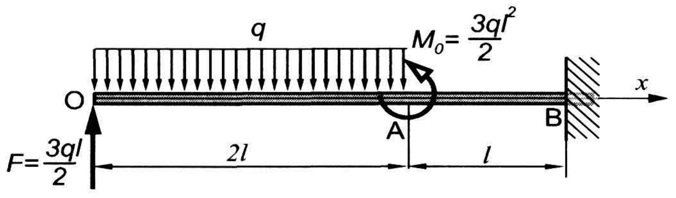
- zapisać wzór na $M_g$ dla przekroju $x$,
- podstawić ten wzór do równania różniczkowego ugięcia belki,
- dwukrotnie scałkować obie strony równania, dopisując po każdym całkowaniu stałą całkowania po prawej stronie znaku równości,
- określić dwa warunki brzegowe wynikające z podparcia belki,
- z warunków brzegowych wyznaczyć stałe całkowania i podstawić do otrzymanej funkcji ugięcia $w(x)$,
- jeżeli interesuje nas kąt ugięcia osi belki, trzeba obliczyć pochodną $\frac{dw}{dx}$.
  Z interpretacji fizycznej pochodnej funkcji wiadomo, że dla bardzo małych ugięć pochodna $\frac{dw}{dx}$ opisuje funkcję kąta ugięcia $\theta(x)$ osi belki.

Ugięcia belek wieloprzedziałowych o $EI_{zc}$ = const w sposób analityczny wyznacza się metodą Clebscha, która spełnia warunki ciągłości funkcji ugięcia na granicy przedziałów. Dzięki temu liczba stałych całkowania, niezależnie od liczby przedziałów, redukuje się do dwóch. Warunki metody Clebscha zostaną omówione przy rozwiązywaniu przykładów liczbowych. Równanie różniczkowe ugięcia belek może być również wykorzystane do rozwiązywania belek statycznie niewyznaczalnych, w których liczba niewiadomych reakcji jest większa od liczby równań statyki.

## 8.2. Wykresy sił wewnętrznych w belkach, ramach i łukach

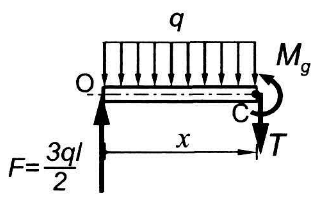
### *8.2.1. Przykłady obliczeń sił wewnętrznych w belkach, ramach i łukach*

**Zadanie 8.1.** Sporządzić wykresy sił tnących i momentów zginających występujących w belce obciążonej w sposób pokazany na rys. 8.3.




**Rys. 8.3**

R o z w i ą z a n i e. Przyjmijmy początek osi współrzędnych $x$ na lewym końcu belki (punkt 0). Analizowaną belkę dzielimy na dwa przedziały.




**Rys. 8.4**

Początkiem pierwszego przedziału jest lewy koniec belki ($x$ = 0), a jego końcem ($x$ = 2$l$) jest zmiana obciążenia. Koniec przedziału pierwszego w punkcie A jest początkiem przedziału drugiego. W rozpatrywanej belce koniec przedziału drugiego pokrywa się z prawym końcem belki. W przedziale drugim ( $2l \le x \le 3l$) nie ma zmiany obciążenia zewnętrznego. Z przedziału pierwszego $0 \le x \le 2l$ odetnijmy myślowym przekrojem część belki o długości $x$ (rys. 8.4). Z sumy rzutów sił na oś pionową wynika, że siła tnąca

$$T = F - qx = \frac{3}{2}ql - qx,$$

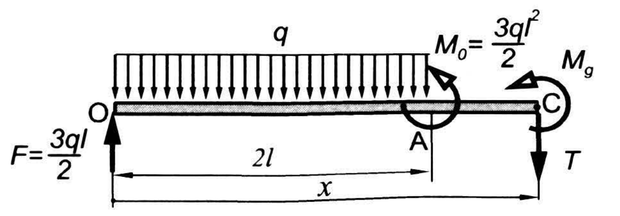
natomiast z sumy momentów względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku (płaszczyzny zginania belki) przechodzącej przez środek ciężkości rozpatrywanego przekroju poprzecznego otrzymano

$$M_g = F \cdot x - qx \cdot \frac{x}{2} = \frac{3}{2}qlx - \frac{qx^2}{2}.$$

Zapisany wyżej wzór na siłę tnącą można otrzymać jako pochodną $M_g$ względem zmiennej $x$

$$T = \frac{dM_g}{dx} = F - qx = \frac{3}{2}ql - qx.$$

Przejdźmy do wyznaczenia sił wewnętrznych w drugim przedziale belki $2l \le x \le 3l$. Lewą część belki odciętą myślowym przekrojem zawartym w tym przedziale pokazano na rys. 8.5.




**Rys. 8.5**

Z równań równowagi otrzymano

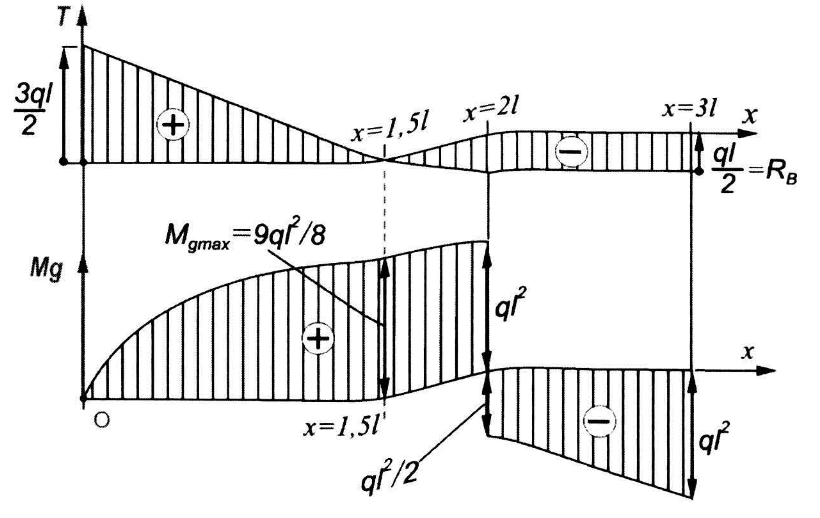
$$T = F - 2ql = \frac{3}{2}ql - 2ql = -\frac{1}{2}ql,$$

$$Mg = F \cdot x = q \cdot 2l(x-l) - M_o = \frac{3}{2}qlx - 2ql(x-l) - \frac{3}{2}ql^2 = \frac{1}{2}ql^2 - \frac{1}{2}qlx.$$

Pochodna

$$\frac{dM_g}{dx} = -\frac{1}{2}ql = T$$

potwierdza poprawność otrzymanych wyżej zależności. W oparciu o wzory na $T$ i $M_g$ sporządzono wykresy sił wewnętrznych (rys. 8.6).




**Rys. 8.6**

Z otrzymanych wzorów i wykresów wynika, że:

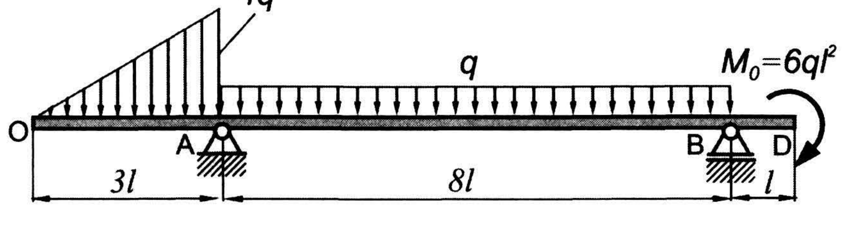
- siła tnąca $T$ dla $x = 0$ jest równa poprzecznej sile $F = \frac{3}{2}ql$,
- zmiana siły $T$ w pierwszym przedziale ($0 \leq x \leq l$) jest liniowa – taka zmiana występuje w przedziałach obciążonych równomiernie rozłożonym obciążeniem ciągłym ($q$ = const);
- w drugim przedziale ($2l \leq x \leq 3l$) siła tnąca jest stała zgodnie z otrzymanym wzorem,
- moment zginający w pierwszym przedziale zmienia się według paraboli drugiego stopnia – taka zmiana ma miejsce, gdy $q$ = const,
- ekstrema momentu zginającego występują w przekrojach, w których siła tnąca $T = \frac{dM_g}{dx} = 0$,
- w rozpatrywanym zadaniu maksymalny moment zginający występuje w przekroju $x = \frac{3}{2}l$ (przedział pierwszy) i wynosi $M_{g\max} = \frac{9}{8}ql^2$,
- uskok na wykresie momentu gnącego jest równy przyłożonemu w tym przekroju momentowi $M_0 = \frac{3}{2}ql^2$,
- moment zginający w przekroju $x = 3l$ jest równy momentowi utwierdzenia w punkcie $B$. Warto zwrócić uwagę, że w tym zadaniu sporządzenie wykresów $T$ i $M_g$ nie wymagało obliczenia reakcji $R_B$ i $M_B$ w punkcie $B$, czyli w miejscu utwierdzenia belki.

Sposób obliczenia $M_{g\max}$ (w przedziale pierwszym)

$$T = \frac{3}{2}ql - qx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2}l,$$

$$M_{g\max} = \left(M_g\right)_{x_0=\frac{3}{2}l} = \frac{3}{2}ql \cdot \frac{3}{2}l - \frac{q}{2}\left(\frac{3}{2}l\right)^2 = \frac{9}{8}ql^2.$$

**Zadanie 8.2.** Belka podparta na dwóch podporach przegubowych jest obciążona w sposób pokazany na rys. 8.7. Wykonać wykresy sił tnących i momentów zginających dla tej belki.

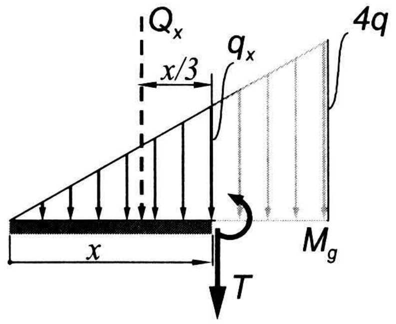



**Rys. 8.7**

R o z w i ą z a n i e.

**Przedział pierwszy** $0 \le x \le 3l$

Część belki odciętą myślowym przekrojem $x$ zawartym w tym przedziale pokazano na rys. 8.8.




**Rys. 8.8**

Z podobieństwa trójkątów (rys. 8.8) wynika, że

$$q_x = \frac{4q}{3l}x.$$

Siła $Q_x$ będąca wypadkową obciążenia trójkątnego na odcinku $x$ wynosi

$$Q_x = \frac{1}{2}q_x \cdot x = \frac{2q}{3l}x^2.$$

Siła tnąca w przekroju określonym współrzędną $x$

$$T = -Q_x = -\frac{2}{3}\frac{q}{l}x^2.$$

Moment zginający w przekroju $x$

$$M_g = -Q_x \cdot \frac{1}{3}x = -\frac{2}{9}qx^3.$$

Sprawdzenie

$$\frac{dM_g}{dx} = -3 \cdot \frac{2}{9}qx^2 = -\frac{2}{3}qx^2 = T.$$

**Przedział drugi** $3l \le x \le 11l$

Wyznaczenie sił wewnętrznych w tym przedziale wymaga obliczenia reakcji $R_{Ay}$. Składowa pozioma $R_{Ax}$ reakcji $R_A$ jest równa zero, ponieważ jest jedyną siłą poziomą. Składową pionową $R_{Ay}$ najlepiej obliczyć z sumy momentów sił względem punktu $B$ dla całej belki (rys. 8.7).

$$R_{Ay}\cdot 8l - Q\cdot(8l+3l\cdot\frac{1}{3}) - q\cdot 8l\cdot 4l + M_o = 0,$$

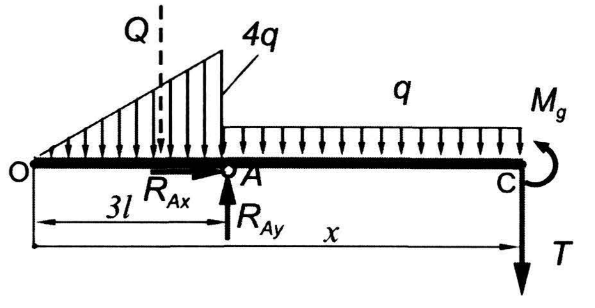
$$Q=\frac{1}{2}3l\cdot 4q = 6ql,$$

$$M_0 = 6ql^2,$$

$$R_{Ay}\cdot 8l - 6ql\cdot 9l - 32ql^2 + 6ql^2 = 0,$$

$$R_{Ay} = 10ql.$$

Lewą część belki odciętą myślowym przekrojem $x$ zawartym w przedziale drugim pokazano na rys. 8.9.




**Rys. 8.9**

Wzory na siłę tnącą i moment zginający w drugim przedziale

$$T = -\,Q + R_{Ay} - q(x-3l) = 7ql - qx,$$

$$M_g = -\,Q(x-2l) + R_{Ay}(x-3l) - \frac{1}{2}q(x-3l)^2 =$$

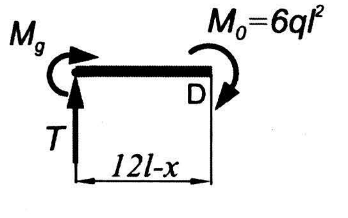
$$= -\,6ql(x-2l) + 10ql(x-3l) - \frac{1}{2}q(x-3l)^2 = 2ql(2x-9l) - \frac{1}{2}q(x-3l)^2.$$

**Przedział trzeci** $11l \le x \le 12l$

W tym przedziale łatwiej jest otrzymać wzory dla $T$ i $M_g$ rozpatrując fragment belki leżący po prawej stronie rozpatrywanego przekroju (rys. 8.10). Z równań równowagi dla tej części belki wynika, że:

$$T = 0$$

$$M_g = -M_o = -\,6ql^2$$




**Rys. 8.10**

Wzory dla $T$ i $M_g$ zestawiono w tabeli 8.1.

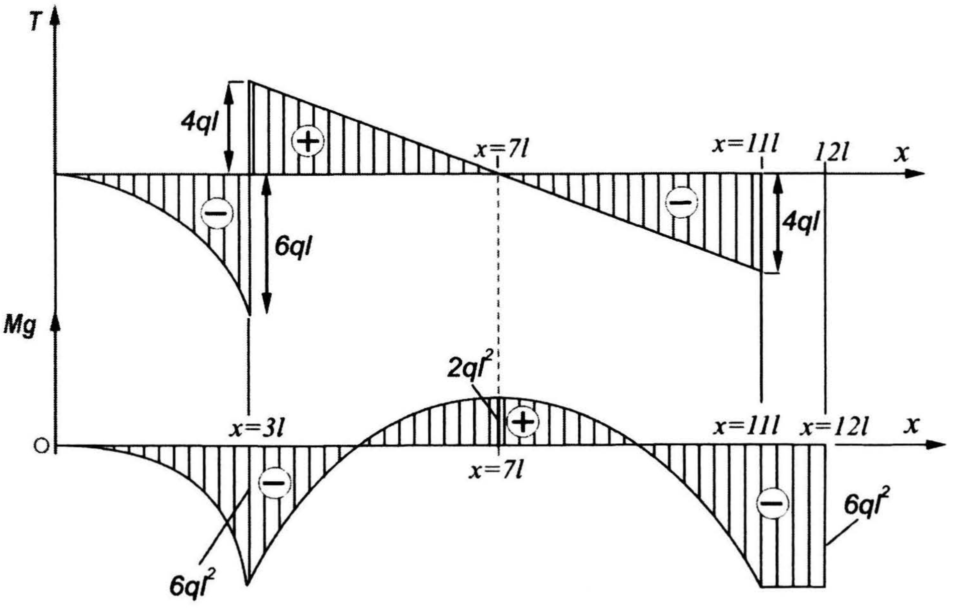
**Tabela 8.1**

| Przedział | T | $M_g$ |
|---|---|---|
| $0 \le x \le 3l$ | $T = -\frac{2}{3}\frac{q}{l}x^2$ | $M_g = -\frac{2}{9}qx^3$ |
| $3l \le x \le 11l$ | $T = 7ql - qx$ | $M_g = 2ql(2x - 9l) - \frac{1}{2}q(x-3l)^2$ |
| $11l \le x \le 12l$ | $T = 0$ | $M_g = -6ql^2$ |

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na rys. 8.11.

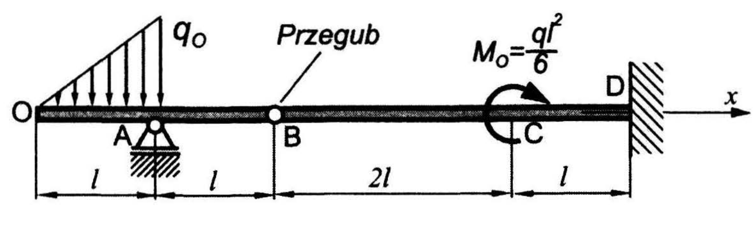
Maksymalne co do wartości bezwzględnej wartości momentów $|M_g| = 6ql^2$ występują w przekroju $x = 3l$ oraz w trzecim przedziale $(11l \le x \le 12l)$.

Lokalne ekstremum momentu występuje w przekroju $x = 7l$, ponieważ w tym przekroju $T = 0$.




**Rys. 8.11**

**Zadanie 8.3.** Belka o całkowitej długości $5l$ jest podparta i obciążona w sposób podany na rys. 8.12.




**Rys. 8.12**

Narysować wykres momentów zginających bez obliczania reakcji podpór i bez zapisywania wzorów na momenty zginające w poszczególnych przedziałach belki.

R o z w i ą z a n i e. Moment zginający w punkcie 0 (początek belki) wynosi $(M_g)_{x=0} = 0$. Moment zginający w punkcie $A$ ($x = l$) obliczono z sumy momentów sił działających po lewej stronie belki

$$(M_g)_{x=l} = -\frac{1}{2}q_0 l \cdot \frac{1}{3}l = -\frac{1}{6}ql^2.$$

W przedziale, w którym działa obciążenie $q$ o rozkładzie trójkątnym, moment $M_g$ zmienia się według krzywej 3. stopnia.
W punkcie $B(x = 2l)$ w belce występuje przegub, który nie przenosi momentu zginającego, a zatem

$$(M_g)_{x=2l} = 0$$

Na odcinku $AC$ belki nie działa żadne obciążenie i wtedy moment zginający zmienia się liniowo (wykres $M_g$ przechodzi przez zero w punkcie $B$). Z lewej strony punktu $C$ ($x^- = 4l$) moment zginający wynosi

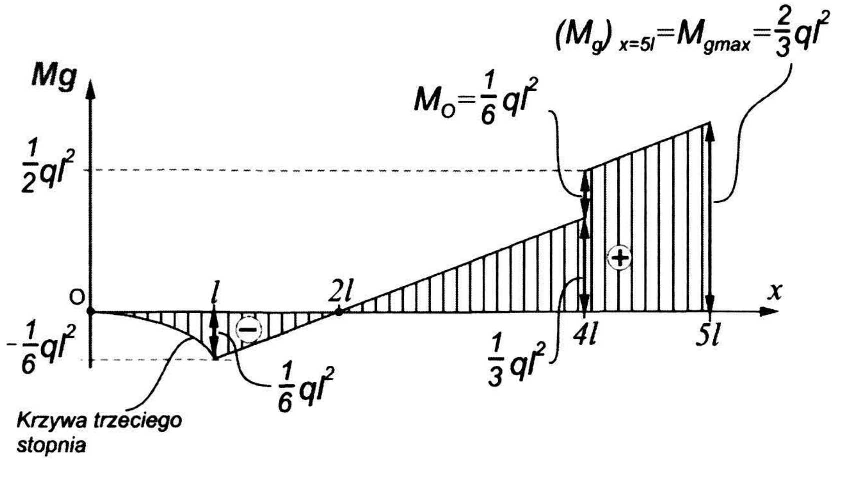
$$(M_g)_{x^-=4l} = -2(M_g)_{x=l} = \frac{1}{3}ql^2.$$

Z prawej strony punktu $C$ moment ten wzrasta skokowo do wartości

$$(M_g)_{x^+=4l} = (M_g)_{x^-=4l} + M_0 = \frac{1}{3}ql^2 + \frac{1}{6}ql^2 = \frac{1}{2}ql^2.$$

Na nieobciążonym odcinku $CD$ moment zginający $M_g$ zmienia się liniowo, przy czym kąt nachylenia prostej musi być taki sam jak na odcinku $AC$. Moment zginający w punkcie $D$ wynosi

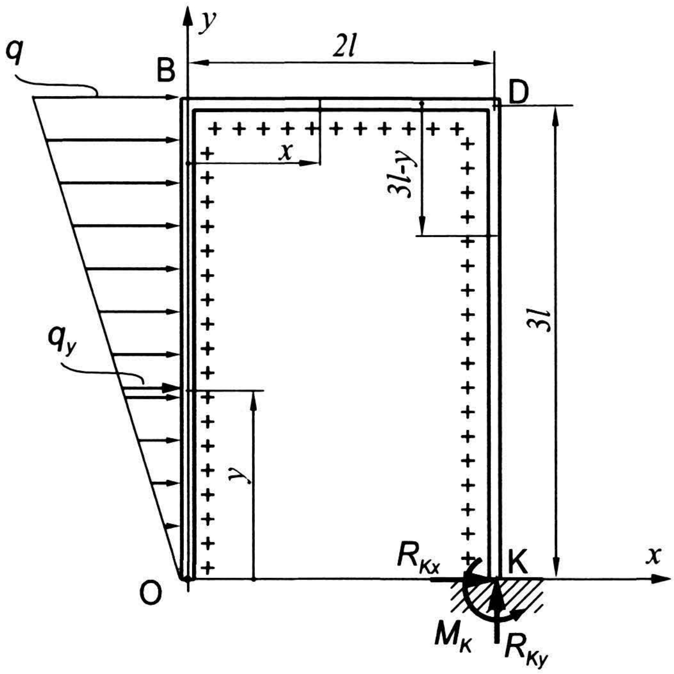
$$(M_g)_{x=5l} = -3(M_g)_{x=l} + M_0 = -3(-\frac{1}{6}ql^2) + \frac{1}{6}ql^2 = \frac{2}{3}ql^2.$$




**Rys. 8.13**

Wykres $M_g$, pokazany na rys. 8.13, narysowano na podstawie wartości momentów obliczonych dla $x=0$, $x=l$, $x=4l$ i $x=5l$ oraz w oparciu o znajomość przebiegu funkcji $M_g$ w odpowiednich przedziałach.

**Zadanie 8.4.** Narysować wykresy sił wewnętrznych, tzn. sił normalnych, sił tnących oraz momentów zginających dla ramy zamocowanej i obciążonej jak pokazano na rys. 8.14.




**Rys. 8.14**

R o z w i ą z a n i e. Z równań równowagi ramy obliczono reakcje utwierdzenia w punkcie $K$

$$\sum F_{ix}=0 \Rightarrow R_{kx}=-\frac{1}{2}\cdot q\cdot 3l=-\frac{3}{2}ql,$$

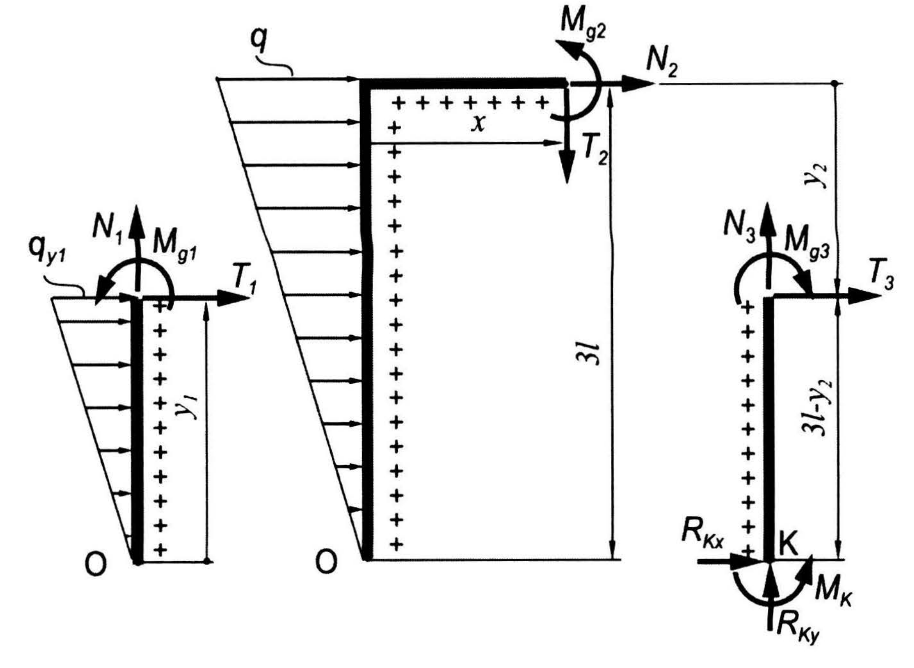
$$\sum F_{iy}=0 \Rightarrow R_{ky}=0,$$

$$\sum M_k=0 \Rightarrow M_k=\frac{1}{2}q\cdot 3l\cdot\frac{2}{3}\cdot 3l=3ql^2.$$

Znakami plus na rys. 8.14 zaznaczono umownie „dolne" włókna ramy. Pozwalają one na przyjęcie dodatnich zwrotów momentów zginających w poszczególnych elementach ramy zgodnie z umową zilustrowaną na rys. 8.1. Wzory na siły wewnętrzne $N$, $T$ i $M_g$ wynikają z równań równowagi sił dla myślowo odciętych części ramy pokazanych na rys. 8.15.

Wartość obciążenia $q_{y_1}$ wynika z podobieństwa trójkątów

$$\frac{q_{y_1}}{y_1}=\frac{q}{3l} \Rightarrow q_{y_1}=\frac{q}{3l}y_1$$




**Rys. 8.15**

Przedział $0 \le y_1 \le 3l$

$$N_1 = 0,$$

$$T_1 = -\frac{1}{2} q_{y_1} \cdot y_1 = -\frac{q y_1^2}{6l},$$

$$M_{g_1} = -\frac{1}{2} q_{y_1} \cdot y_1 \cdot \frac{1}{3} y_1 = -\frac{q y_1^3}{18l}.$$

Przedział $0 \le x \le 2l$

$$N_2 = -\frac{1}{2} q \cdot 3l = -\frac{3}{2} ql$$

$$T_2 = 0$$

$$M_{g_2} = -\frac{1}{2} q \cdot 3l \cdot \frac{1}{3} \cdot 3l = -\frac{3}{2} ql^2$$

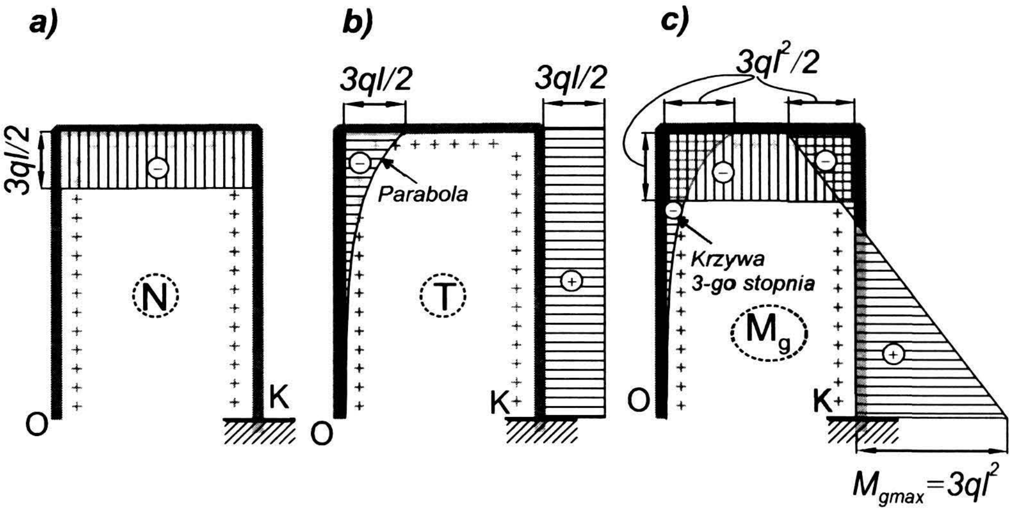
Przedział $0 \le y_2 \le 3l$

$$N_3 = -R_{ky} = 0,$$

$$T_3 = -R_{kx} = \frac{3}{2} ql,$$

$$M_{g3} = M_k + R_{kx}(3l - y_2) = 3ql^2 - \frac{3}{2} ql(3l - y_2) = \frac{3}{2} ql(y_2 - l).$$

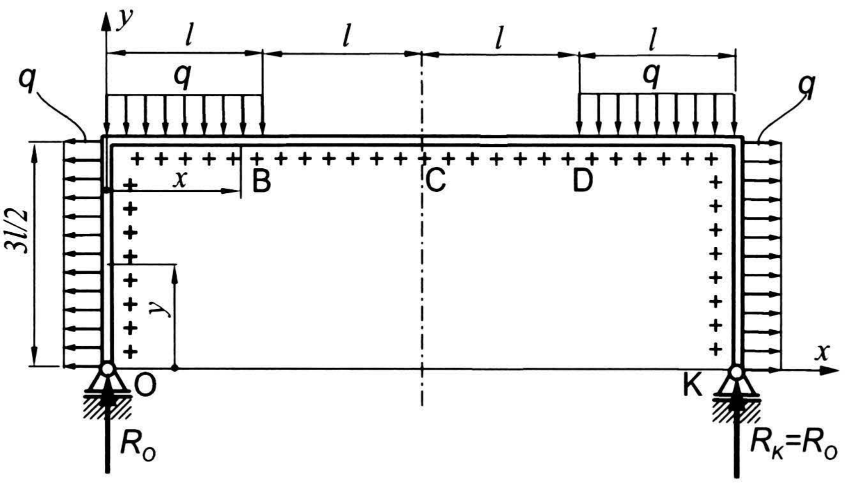
Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na rys. 8.16.




**Rys. 8.16**

Ujemne wartości sił wewnętrznych są rysowane po stronie wewnętrznej (zaznaczonej krzyżykami), a dodatnie po stronie zewnętrznej.

**Zadanie 8.5.** Rama symetrycznej budowy jest symetrycznie obciążona, jak pokazano na rys. 8.17. Dla ramy tej zapisać wzory na siły wewnętrzne $N$, $T$ i $M_g$ oraz narysować wykresy tych sił.




**Rys. 8.17**

R o z w i ą z a n i e. W ramach symetrycznej budowy z symetrycznym obciążeniem, symetryczne są: reakcje podpór, wykresy sił normalnych $N$ i wykresy momentów zginających $M_g$, natomiast antysymetryczny jest wykres sił tnących $T$. Wynika to z zasady akcji i reakcji. W związku z tym, aby narysować wykresy sił wewnętrznych, wystarczy przeanalizować połowę konstrukcji.

W rozpatrywanym przypadku reakcje podpór $R_o$ i $R_k$ są równe i wynoszą

$$R_o = R_k = ql.$$

Wzory dla sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach, wynikające z równań równowagi sił działających na myślowo odcięte części ramy, mają postać podaną niżej.

Przedział $0 \leq y \leq \frac{3}{2}l$

$$N_1 = -R_o = -ql,$$

$$T_1 = qy,$$

$$M_{g_1} = qy\frac{y}{2} = \frac{qy^2}{2}.$$

Przedział $0 \leq x \leq l$

$$N_2 = q\frac{3}{2}l = \frac{3}{2}ql,$$

$$T_2 = R_o - qx = q(l - x),$$

$$M_{g_2} = R_o \cdot x + q\frac{3}{2}l \cdot \frac{3l}{4} - qx\frac{x}{2} = \frac{9}{8}ql^2 + qlx - \frac{qx^2}{2}.$$

Przedział $l \leq x \leq 2l$

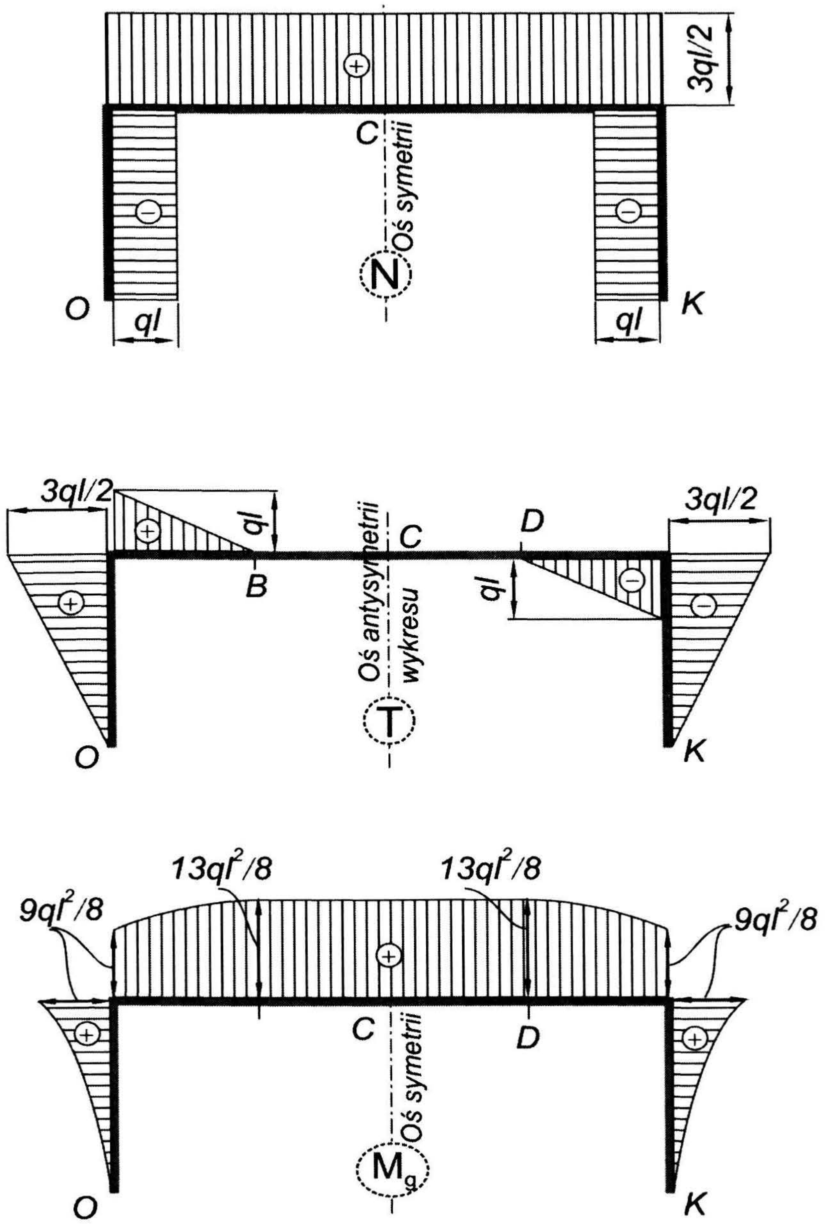
$$N_3 = \frac{3}{2}ql,$$

$$T_3 = R_o - ql = ql - ql = 0,$$

$$M_{g_3} = R_o x + q\frac{3}{2}l \cdot \frac{3l}{4} - ql(x - \frac{l}{2}) = \frac{13}{8}ql^2.$$

Wykresy sił wewnętrznych

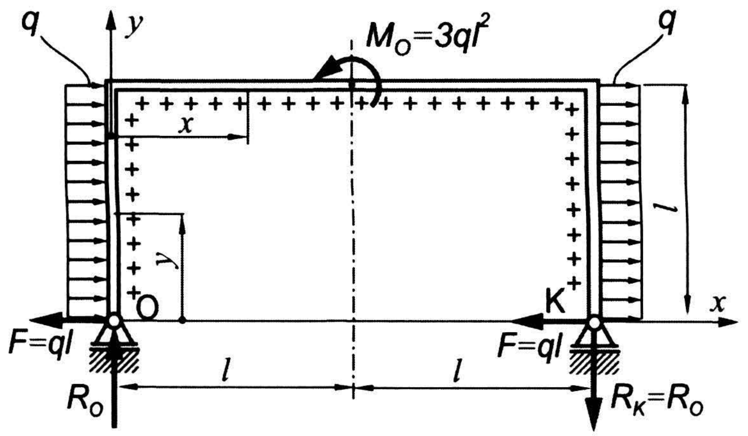
$$M_{g\max} = \frac{13}{8}ql^2.$$




**Rys. 8.18**

Na osi symetrii układu $T = 0$.

**Zadanie 8.6.** Rama symetrycznej budowy jest obciążona antysymetrycznie w sposób pokazany na rys. 8.19. Narysować wykresy sił normalnych $N$, sił tnących $T$ oraz momentów zginających $M_g$, uwzględniając antysymetrię obciążenia.




**Rys. 8.19**

R o z w i ą z a n i e. Przy symetrycznej budowie ramy i antysymetrycznym obciążeniu reakcje $R_o$ i $R_k$ muszą być również antysymetryczne, tzn. że muszą mieć te same wartości, ale przeciwne zwroty.
Z sumy momentów sił względem punktu $K$ można obliczyć reakcję $R_o$

$$R_o \cdot 2l + 2ql \cdot \frac{l}{2} - M_o = 0$$

$$R_o = \frac{M_o}{2l} - \frac{ql}{2} = \frac{3}{2}ql - \frac{1}{2}ql = ql.$$

Z sumy rzutów na oś $y$ wynika, że

$$R_k = R_o = ql,$$

co wynika również z antysymetrii obciążenia.
Wzory dla sił wewnętrznych dla lewej połowy ramy.
Przedział $0 \le y \le l$

$$N_1 = -R_o = -ql,$$

$$T_1 = F - qy = q(l - y),$$

$$M_{g_1} = Fy - \frac{qy^2}{2} = qly - \frac{qy^2}{2}.$$

Przedział $0 \le x \le l$

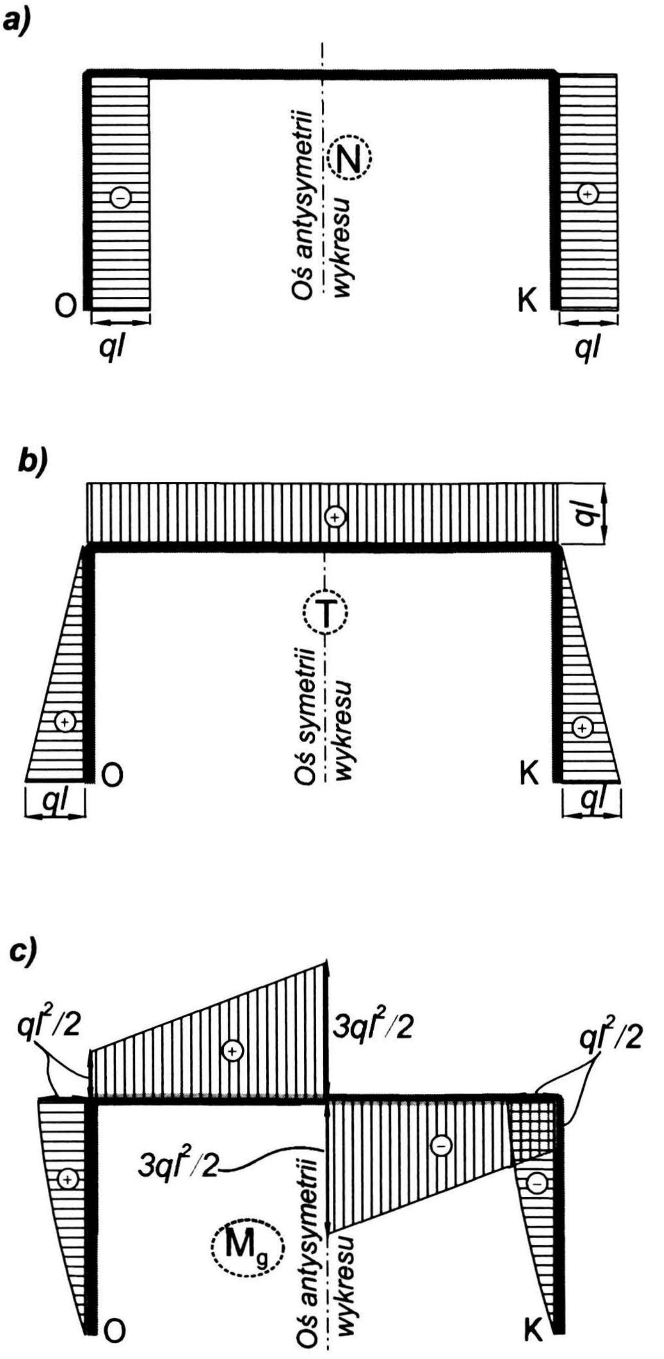
$$N_2 = F - ql = 0,$$

$$T_2 = R_o = ql,$$

$$M_{g_2} = R_o x + Fl - ql\frac{l}{2} = \frac{ql^2}{2} + qlx.$$

Przy symetrycznej budowie i antysymetrycznym obciążeniu wykres sił tnących jest symetryczny, a wykresy sił normalnych i momentów zginających są antysymetryczne. Na osi symetrii układu obciążonego antysymetrycznie $N = 0$ i $M_g = 0$ (ale lewostronna i prawostronna granica funkcji $M_{g2}$ dla $x = l$ w tym zadaniu nie jest równa zero).

Wykresy sił wewnętrznych przedstawiają rys. 8.20a, b, c.




**Rys. 8.20**

Maksymalny dodatni moment zginający jest równy bezwzględnej wartości minimalnego ujemnego momentu zginającego

$$M_{g\,\max} = \frac{3}{2}ql^2 = \left|-\frac{3}{2}ql^2\right|$$

Uskok na wykresie momentów zginających jest równy przyłożonemu momentowi skupionemu $M_o = 3ql^2$.

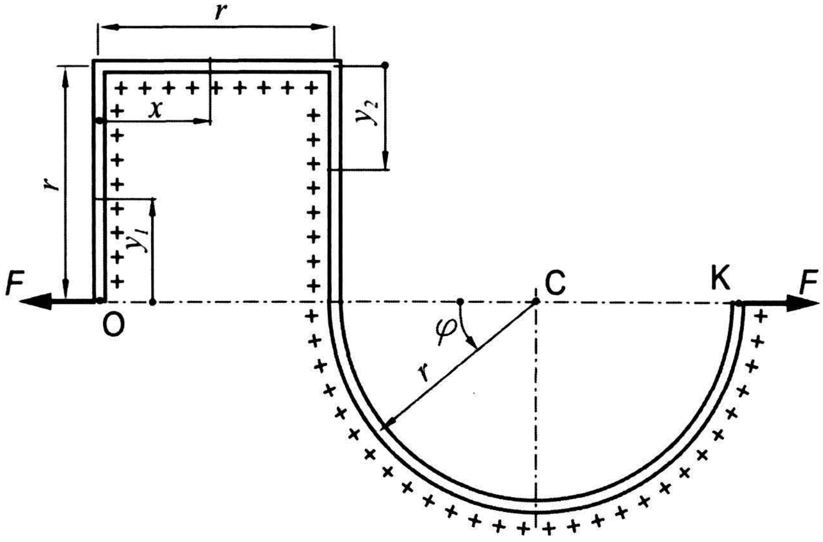
$$M_o = \frac{3}{2}ql^2 + \left|-\frac{3}{2}ql^2\right| = 3ql^2.$$

Maksymalne naprężenia zginające w ramach oblicza się z tych samych wzorów co w belkach

$$\left|\sigma_g\right|_{\max} = \frac{\left|M_g\right|_{\max}}{I_{zc}}\left|y_{\max}\right| = \frac{\left|M_g\right|_{\max}}{W}.$$

Należy pamiętać, że w ramach i łukach oprócz naprężeń od momentów zginających występują naprężenia od sił normalnych.

**Zadanie 8.7.** Sporządzić wykres sił wewnętrznych $N$, $T$ i $M_g$ dla ramołuku, obciążonego jak pokazano na rys. 8.21.




**Rys. 8.21**

R o z w i ą z a n i e. Wzory dla sił wewnętrznych w poszczególnych przedziałach.
Przedział $0 \le y_1 \le r$

$$N_1 = 0,$$
$$T_1 = F,$$
$$M_{g_1} = Fy_1.$$

Przedział $0 \le x \le r$

$$N_2 = F,$$
$$T_2 = 0,$$
$$M_{g_2} = F \cdot r.$$

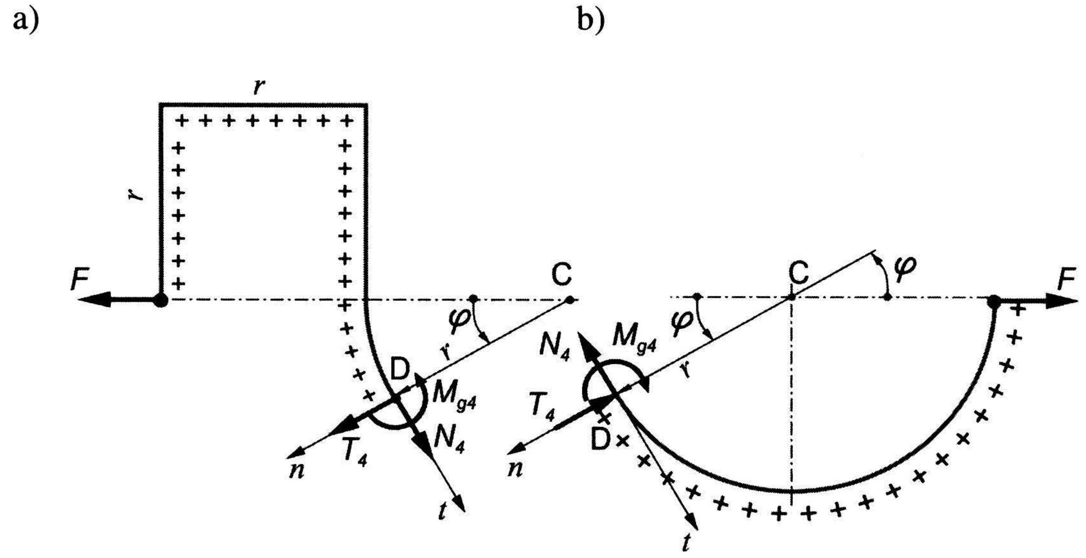
Przedział $0 \le y_2 \le r$

$N_3 = 0,$

$T_3 = -F,$

$M_{g_3} = F(r - y_2).$

Przedział $0 \le \varphi \le \pi$




**Rys. 8.22**

Wzory na siły wewnętrzne w przedziale $0 \le \varphi \le \pi$ można otrzymać z równań równowagi sił działających na myślowo odcięte części konstrukcji (lewą lub prawą) pokazane na rys. 8.22a lub 8.22b.

$\sum F_{it} = 0 \Rightarrow N_4 - F\sin\varphi = 0,$

$N_4 = F\sin\varphi;$

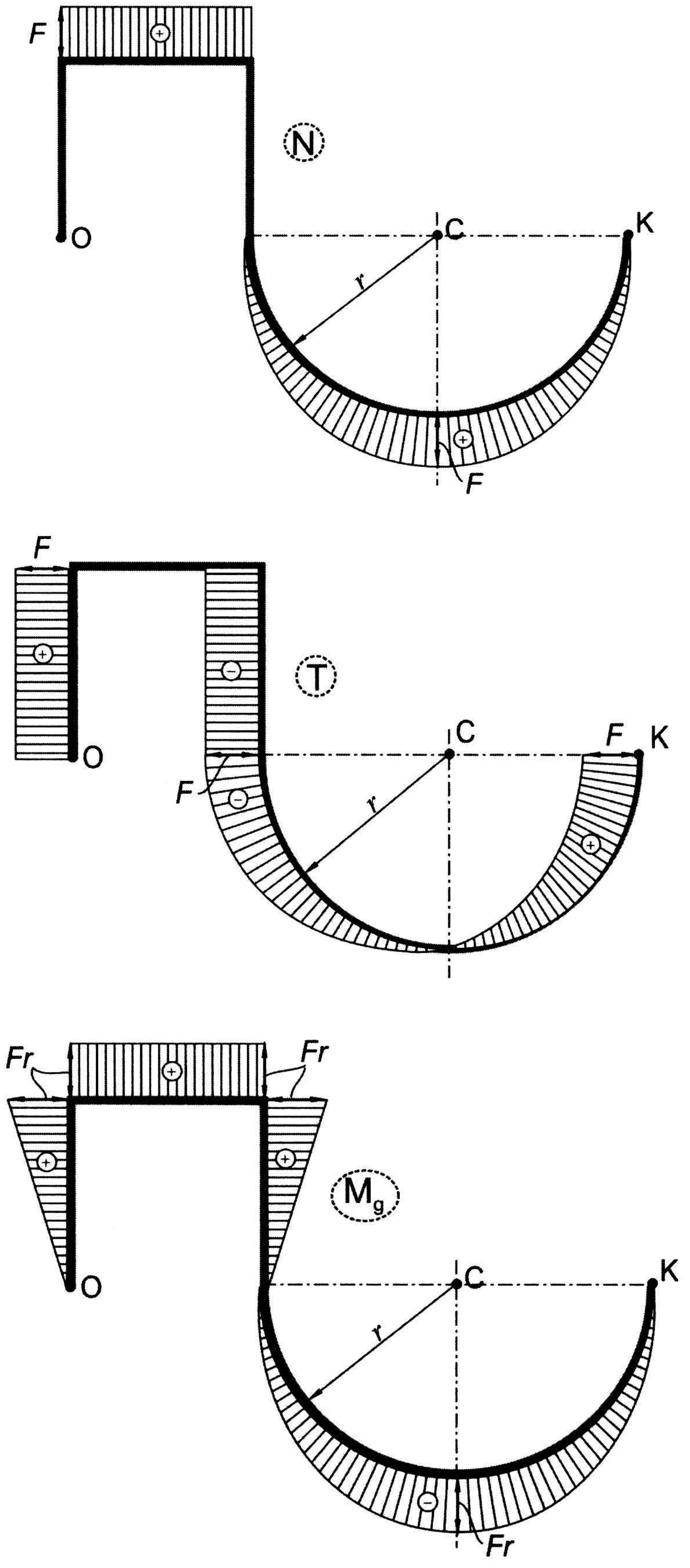
$\sum F_{in} = 0 \Rightarrow T_4 + F\cos\varphi = 0,$

$T_4 = -F\cos\varphi;$

$\sum M_D = 0 \Rightarrow M_{g4} + Fr\sin\varphi = 0,$

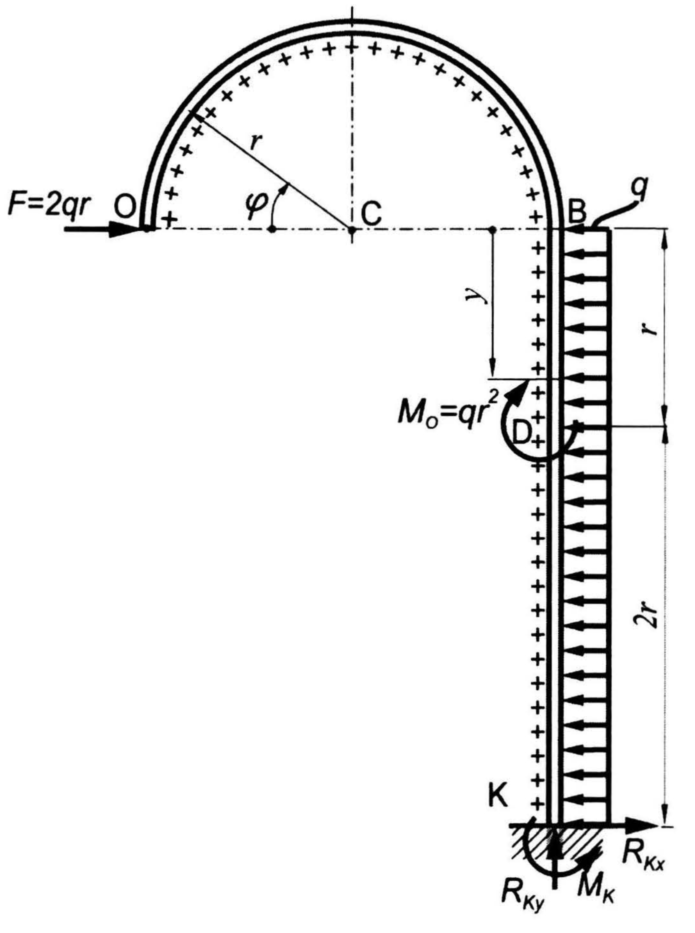
$M_{g4} = -Fr\sin\varphi.$

Wykresy sił wewnętrznych pokazano na rys. 8.23.




**Rys. 8.23**

**Zadanie 8.8.** Zakrzywiony pręt o wymiarach i obciążeniu podanym na rys. 8.24 jest utwierdzony na dolnym końcu. Podać wzory dla sił wewnętrznych $N$, $T$ i $M_g$, narysować ich wykresy i znaleźć maksymalną wartość momentu zginającego.




**Rys. 8.24**

R o z w i ą z a n i e. Reakcje w utwierdzeniu, wynikające z równań równowagi, wynoszą:

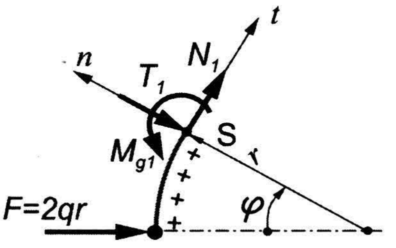
$R_{kx} = qr,$

$R_{ky} = 0,$

$M_k = 2{,}5qr^2.$

Pręt trzeba podzielić na trzy przedziały: $0 \geq \varphi \leq \pi$, $0 \leq y \leq r$ i $r \leq y \leq 3r$. Wzory na siły wewnętrzne w poszczególnych przedziałach podano niżej.

Przedział $0 \leq \varphi \leq \pi$




**Rys. 8.25**

Z sumy rzutów sił na oś styczną i normalną do łuku w rozpatrywanym przekroju otrzymano:

$$N_1 = -2qr\sin\varphi,$$
$$T_1 = -2qr\cos\varphi.$$

Wzór na moment zginający $M_{g_1}$ otrzymano z sumy momentów względem punktu $S$

$$M_{g_1} = -2qr \cdot r\sin\varphi = -2qr^2\sin\varphi.$$

Sprawdzenie:

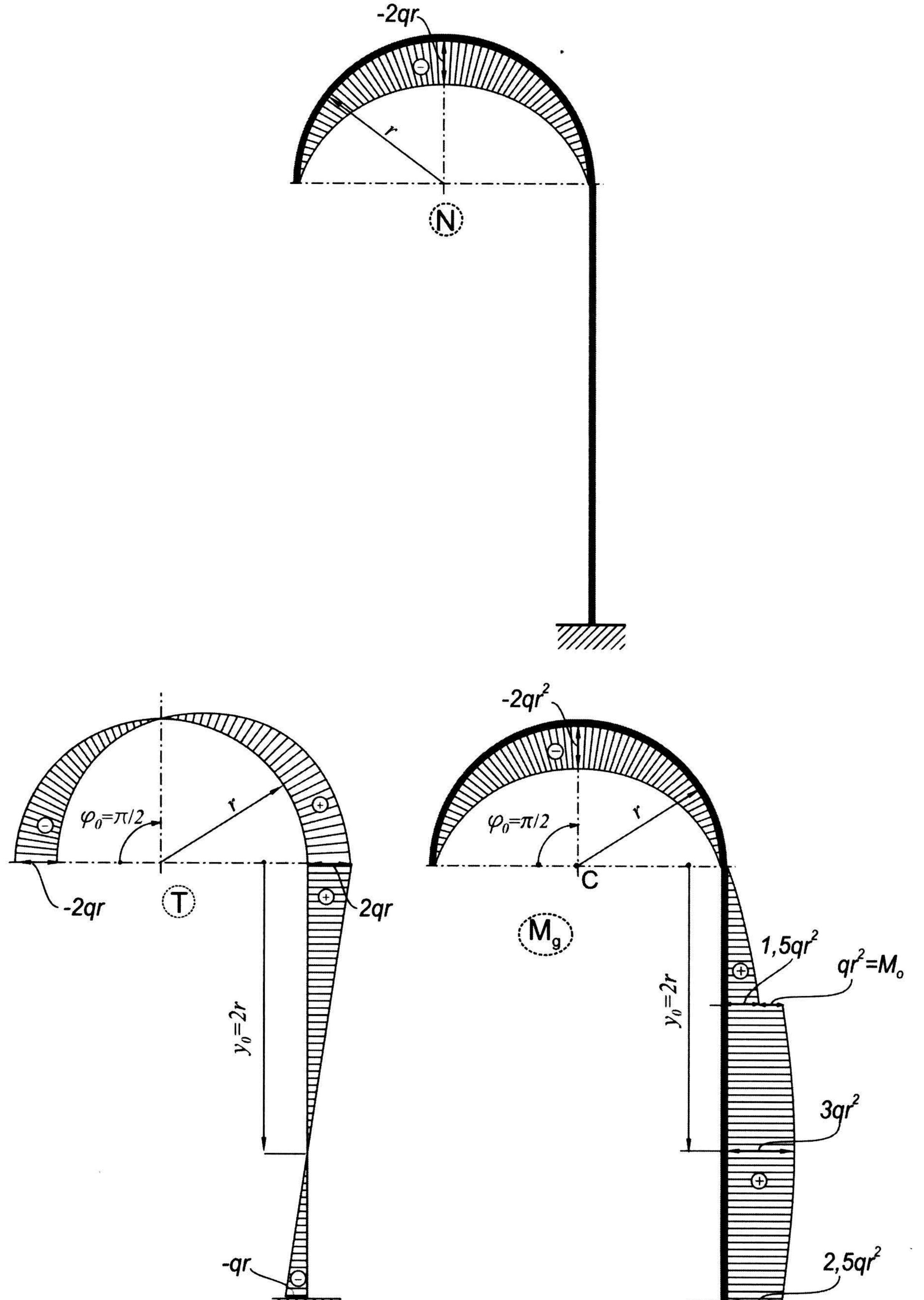
$$T_1 = \frac{dM_g}{rd\varphi} = -2qr\cos\varphi.$$

Przedział $0 \leq y \leq r$

$$N_2 = 0,$$
$$T_2 = 2qr - qy,$$
$$M_{g_2} = 2qry - \frac{qy^2}{2}.$$

Przedział $r \leq y \leq 3r$

$$N_3 = 0,$$
$$T_3 = 2qr - qy,$$
$$M_{g_3} = 2qry - \frac{qy^2}{2} + qr^2.$$


-2qr
r
N
φ0=π/2
r
-2qr
T
2qr
y0=2r
-qr
-2qr2
φ0=π/2
r
C
Mg
1,5qr2
qr2=Mo
y0=2r
3qr2
2,5qr2

**Rys. 8.26**

Ekstremalne wartości momentów zginających występują w przekrojach, w których siła tnąca jest równa zero. W rozpatrywanym zadaniu takie przekroje występują: w przedziale $0 \le \varphi \le \pi$ dla $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ oraz w przedziale $r \le y \le 3r$ dla $T = 2qr - qy_0 = 0$, czyli dla $y_0 = 2r$.

W przekroju $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ moment zginający jest równy $(M_{g_1})_{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}} = -\,2qr^2$, a jego wartość bezwzględna $\left|M_{g_1}\right|_{\varphi_0 = \frac{\pi}{2}} = 2qr^2$.

W przekroju $y_0 = 2r$

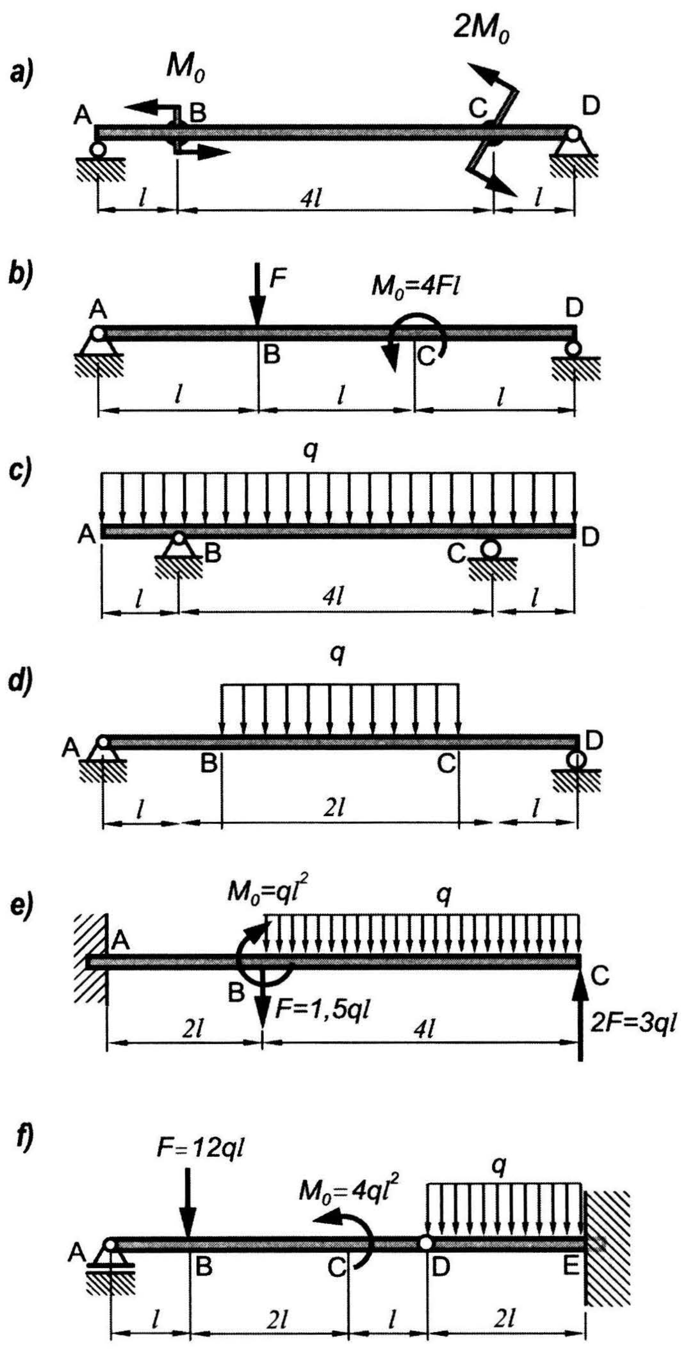
$$(M_{g_3})_{y_0 = 2r} = 2qr \cdot 2r - \frac{q(2r)^2}{2} + qr^2 = 3qr^2 = M_{g\,\max}$$

i jest to w analizowanym zadaniu maksymalny moment zginający.

### *8.2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania*

**Zadanie 8.9.** Dla belek o wymiarach, obciążeniach i podparciu, jak pokazano na rysunkach 8.27a÷f:

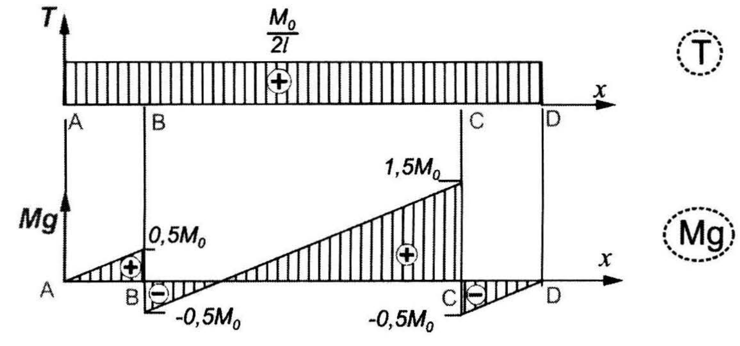
- obliczyć reakcje podpór,
- zapisać wzory na siły tnące i momenty zginające w poszczególnych przedziałach,
- narysować wykresy sił tnących i momentów zginających,
- podać maksymalną, co do wartości bezwzględnej, wartość momentu zginającego.




**Rys. 8.27**

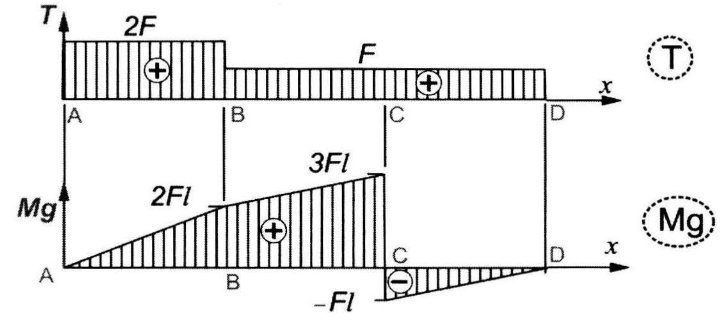
ODPOWIEDŹ:

a) $R_A = \dfrac{M_0}{2l}, \quad R_D = -\dfrac{M_0}{2l}, \quad M_{g\,\max} = 1{,}5ql^2.$



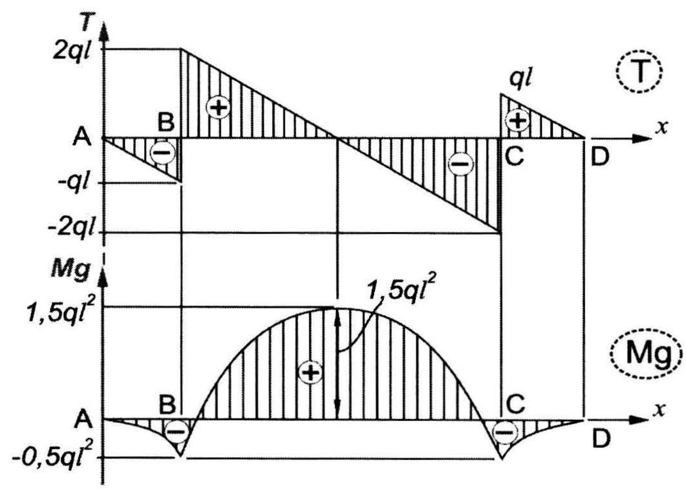

**Rys. 8.28a**

b) $R_A = 2F, \quad R_D = -F, \quad M_{g\max} = 3Fl.$



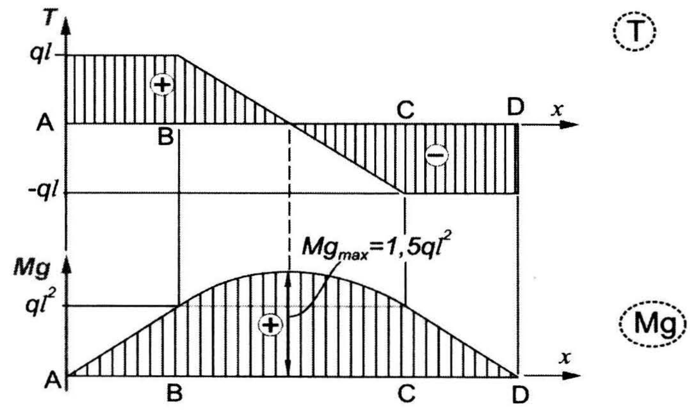

**Rys. 8.28b**

c) $R_B = R_C = 3ql, \quad M_{g\max} = \dfrac{3}{2}ql^2.$



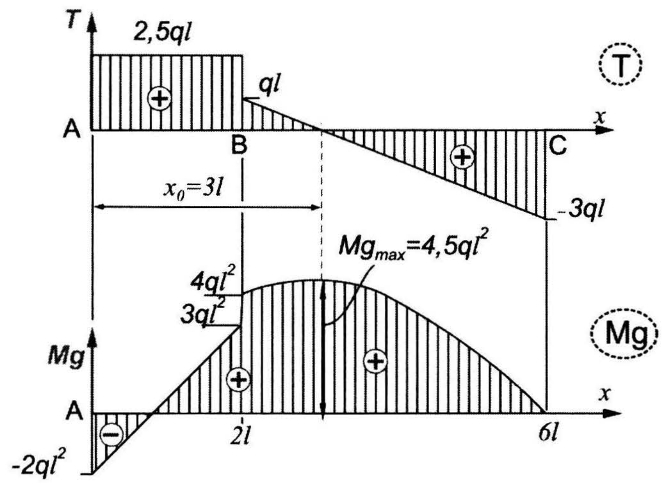

**Rys. 8.28c**

d) $R_A = R_D = ql, \quad M_{\max} = \dfrac{3}{2}ql^2.$



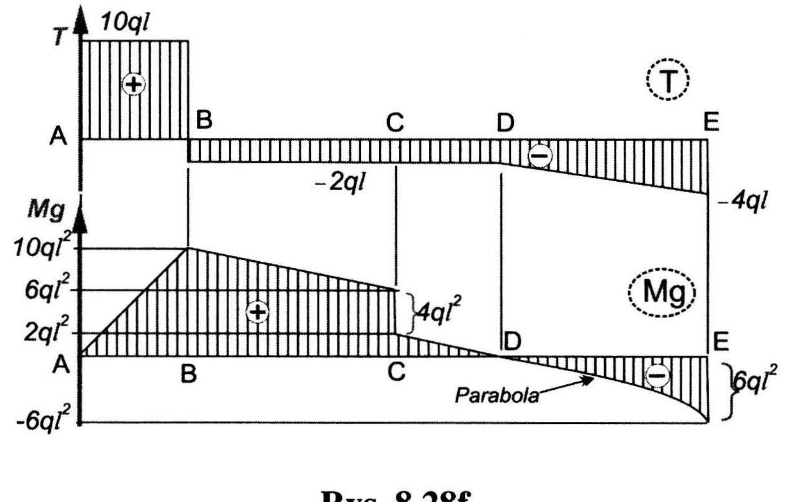

**Rys. 8.28d**

e) $R_A = 2{,}5ql, \quad M_A = -\,2ql^2, \quad M_{g\,\max} = 4{,}5ql^2.$



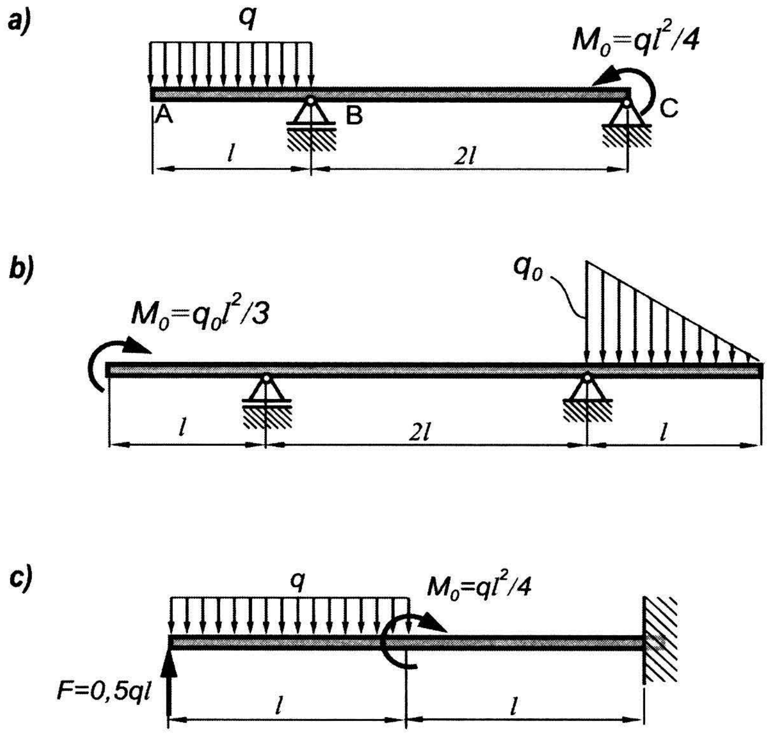

**Rys. 8.28e**

f) $R_A = 10ql, \quad R_E = 4ql, \quad M_E = -\,6ql^2, \quad M_{g\,\max} = 10ql^2.$




**Rys. 8.28f**

**Zadanie 8.10.** Dla belek o wymiarach, obciążeniu i podparciu, jak pokazano na rys. 8.29a÷c, narysować wykresy momentów zginających $M_g$ – bez obliczania reakcji podpór. Podać maksymalną, co do wartości bezwzględnej, wartość momentu zginającego.



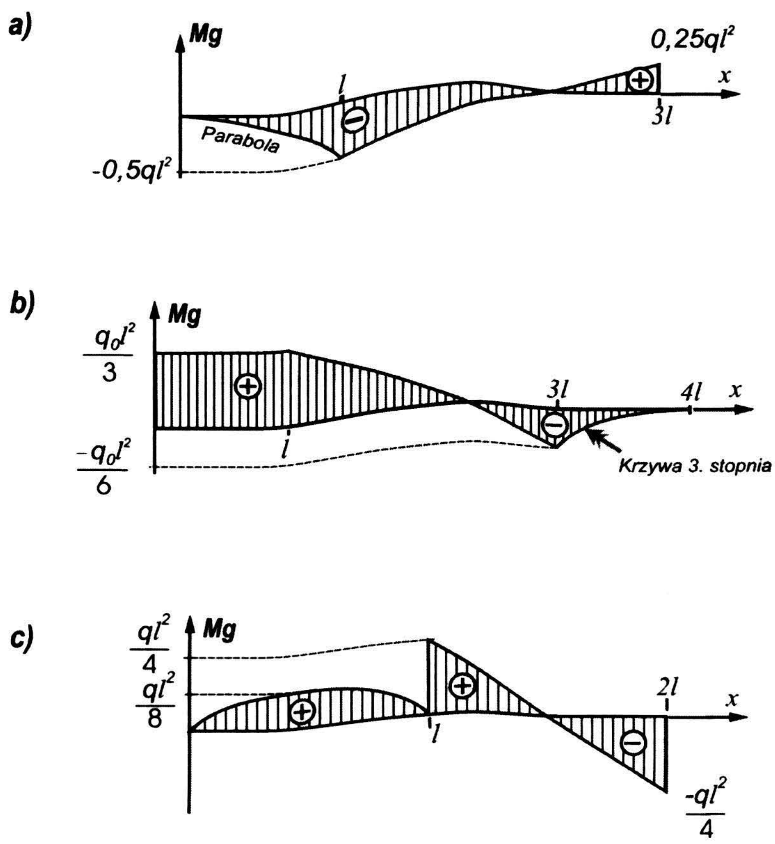

**Rys. 8.29**

ODPOWIEDŹ:

a) $\left|M_g\right|_{\max}=\dfrac{1}{2}ql^2$,

b) $M_{g\max}=\dfrac{1}{3}q_0l^2$,

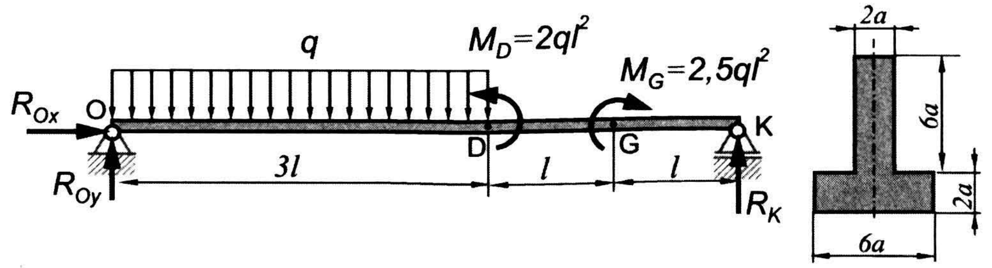
c) $M_{g\max}=\dfrac{1}{4}ql^2$




Rys. 8.30

## 8.3. Obliczanie naprężeń w belkach, ramach i łukach

**Zadanie 8.11.** Belka o teowym przekroju poprzecznym jest podparta przegubowo na końcach i obciążona w sposób pokazany na rys. 8.31. Sporządzić wykresy sił tnących i momentów zginających $M_g$. Następnie obliczyć wskaźnik wytrzymałości przekroju poprzecznego belki na zginanie oraz największe co do wartości bezwzględnej naprężenia rozciągające i ściskające.




Rys. 8.31

R o z w i ą z a n i e. Z równań równowagi sił wyznaczono reakcje podporowe

$\sum F_{ix} = 0 \Rightarrow R_{ox} = 0,$

$\sum M_k = 0 \Rightarrow R_{oy} \cdot 5l - 3ql \cdot 3{,}5l - 2ql^2 + 2{,}5ql^2 = 0$

$R_{oy} = 2ql,$

$\sum M_o = 0 \Rightarrow R_k \cdot 5l - 2{,}5ql^2 + 2ql^2 - 3ql \cdot 1{,}5ql = 0$

$R_k = ql$

Sprawdzenie:

$\sum F_{iy} = 0 \Rightarrow R_{oy} - 3ql + R_k = 2ql - 3ql + ql = 0$

Wzory na siły tnące i momenty zginające w trzech przedziałach belki mają postać:

$0 \le x \le 3l$

$T_1 = R_{oy} - qx = 2ql - qx,$

$M_{g1} = R_{oy} \cdot x - \frac{qx^2}{2} = 2qlx - \frac{qx^2}{2};$

$3l \le x \le 4l$

$T_2 = R_{oy} - 3ql = 2ql - 3ql = -ql,$

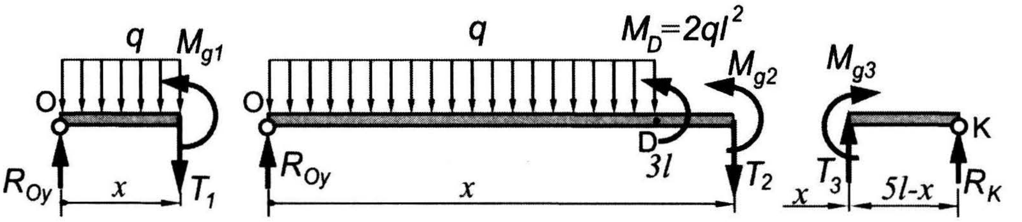
$M_{g_2} = R_{oy} \cdot x - q \cdot 3l(x - 1{,}5l) - M_D = 2qlx - 3qlx + 4{,}5ql^2 - 2ql^2 = 2{,}5ql^2 - qlx,$

$4l \le x \le 5l$

$T_3 = -R_k = -ql,$

$M_{g3} = R_k(5l - x) = ql(5l - x).$

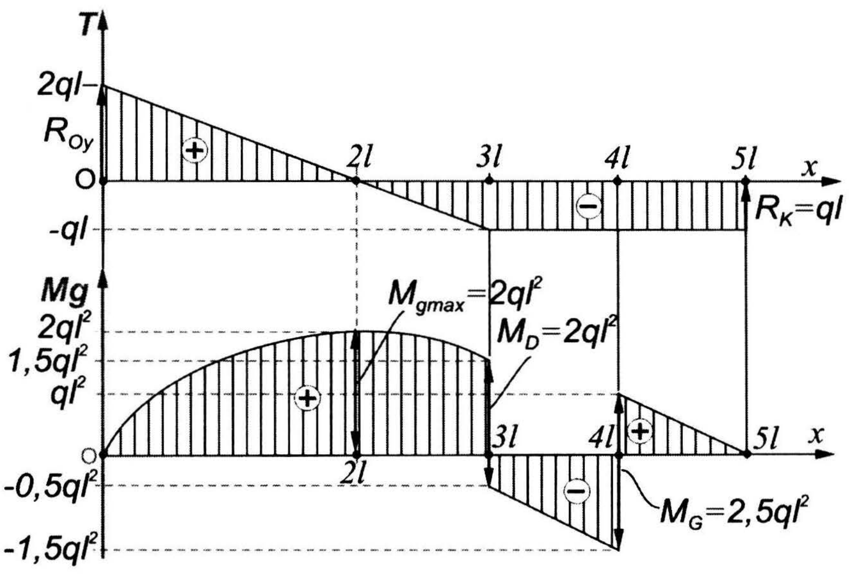
Wzory te wynikają z równań równowagi dla odciętych myślowo (w odpowiednich przedziałach) części belki (rys. 8.32). Siły tnące wyznacza się z sumy rzutów sił na oś prostopadłą do osi belki, a momenty zginające – z sumy momentów sił względem osi prostopadłych do płaszczyzny zginania belki przechodzących przez środek ciężkości rozpatrywanego przekroju.




**Rys. 8.32**

Poprawność wzorów można sprawdzić zależnością $T = \frac{dM_g}{dx}$.

Wykresy $T$ i $M_g$ (rys. 8 33).



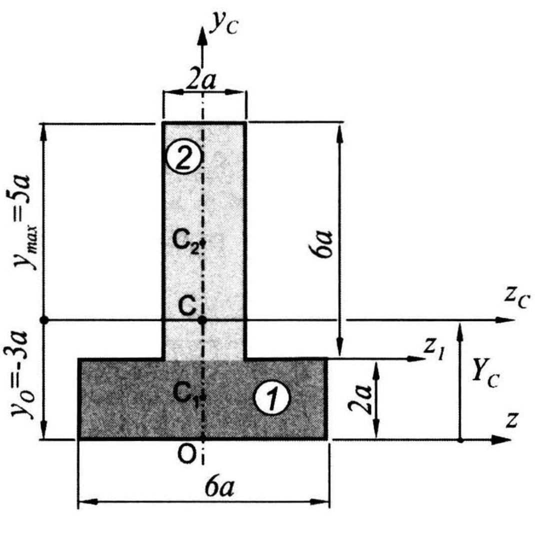

**Rys. 8.33**

Obliczenie maksymalnego momentu zginającego

$$T_1 = \frac{dM_{g_1}}{dx} = 2ql - qx_0 = 0$$

$x_0 = 2l$

$$(M_{g_1})_{x=2l} = 2ql \cdot 2l - \frac{q(2l)^2}{2} = 2ql^2.$$




**Rys. 8.34**

Obliczenie współrzędnej $Y_c$ środka ciężkości przekroju poprzecznego belki. Współrzędna $y_c$ jest osią symetrii przekroju poprzecznego belki, a zatem środek ciężkości leży na tej osi, więc współrzędna pozioma środka ciężkości $Z_c = 0$. Współrzędną pionową $Y_c$ odmierzoną od osi z (rys. 8.34) oblicza się ze wzoru

$$Y_c = \frac{\sum S_{zi}}{\sum A_i},$$

w którym:

$\sum S_{zi}$ jest momentem statycznym przekroju poprzecznego belki względem osi $z$, równym sumie momentów statycznych figur składowych;

$\sum A_i$ jest polem powierzchni rozpatrywanego przekroju równym sumie pól powierzchni figur składowych.

Przy obliczaniu współrzędnej $Y_c$, a następnie momentu bezwładności przekroju poprzecznego teownika podzielono go na dwa prostokąty, oznaczone na rys. 8.34 jako prostokąty 1 i 2 o polach powierzchni odpowiednio $A_1$ i $A_2$

$$Y_c = \frac{A_1 \cdot Y_{c_1} + A_2 Y_{c_2}}{A_1 + A_2} = \frac{6a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a + 2a \cdot 6a(2a + \frac{1}{2} \cdot 6a)}{6a \cdot 2a + 2a \cdot 6a} = 3a.$$

Moment bezwładności rozpatrywanego teownika względem poziomej centralnej głównej osi bezwładności $z_c$ (prostopadłej do płaszczyzny zginania), można obliczyć dwoma sposobami. Sposób pierwszy ogólny jest stosowany przy dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Polega on na zsumowaniu momentów bezwładności figur składowych przekroju względem osi centralnej całego przekroju poprzecznego

$$I_{zc} = \sum_{i=1}^{n} (I_{zci} + A_i Y_{Ci}^2),$$

gdzie: $I_{zci}$ – moment bezwładności $i$-tej figury składowej względem jej osi centralnej $z_{ci}$ równoległej do osi $z_c$,

$A_i$ – pole powierzchni $i$-tej figury,

$Y_{Ci}$ – odległość między osiami $z_{ci}$ i $z_c$ (patrz wzór Steinera).

Dla rozpatrywanego przekroju poprzecznego

$$I_{zc} = \frac{6a(2a)^3}{12} + 6a \cdot 2a(2a)^2 + \frac{2a(6a)^3}{12} + 2a \cdot 6a(5a - 3a)^2 = 136a^4.$$

W rozpatrywanym przypadku skorzystamy z drugiego sposobu, który można stosować do figur, w których występuje jedna oś pozioma przechodząca przez podstawy lub środki ciężkości wszystkich prostych figur składowych (prostokąt, trójkąt, koło, półkole).

W teowniku taką osią jest oś $z_1$, która przechodzi przez podstawy obu prostokątów, wtedy

$$I_{z1} = \frac{6a(2a)^3}{3} + \frac{2a(6a)^3}{3} = 160a^4.$$

Moment bezwładności całej figury względem osi $z_c$ oblicza się ze wzoru Steinera

$$I_{zc} = I_{z1} - A(Y_c - 2a)^2 = 160a^4 - 24a^2 \cdot a^2 = 136a^4.$$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju poprzecznego belki na zginanie (rys. 8.34)

$$W = \frac{I_{zc}}{|y|_{\max}} = \frac{136a^4}{5a} = 27{,}2a^3.$$

Obliczenie naprężeń.
Naprężenia przy zginaniu płaskim belek oblicza się ze wzoru

$$\sigma_g(y) = -\frac{M_g}{I_{zc}}\,y.$$

Powyższy wzór obowiązuje, gdy oś $y$ skierowana jest do góry, a dodatni moment zginający powoduje rozciąganie dolnych włókien belki. Obliczmy naprężenia w przekroju $B$ ($x = 2l$), w którym występuje maksymalny moment zginający $M_{g\max} = 2ql^2$.

$$(\sigma_{gB})_{y=5a} = -\frac{2ql^2}{136a^4}\cdot 5a = -\,0{,}0735\frac{ql^2}{a^3} \quad \text{(naprężenie ściskające)},$$

$$(\sigma_{gB})_{y=-3a} = -\frac{2ql^2}{136a^4}(-\,3a) = 0{,}0441\frac{ql^2}{a^3} \quad \text{(naprężenia rozciągające)}.$$

Obliczmy jeszcze naprężenia działające po lewej stronie przekroju $G(x^- = 4l)$, w którym działa moment zginający $M_g = -\,1{,}5ql^2$.

W górnych włóknach tego przekroju ($y = 5a$) naprężenie wynosi

$$(\sigma_{gG})_{y=5a} = -\frac{(-\,1{,}5ql^2)}{136a^4}5a = 0{,}0551\frac{ql^2}{a^3},$$

a w dolnych ($y = -\,3a$)

$$(\sigma_{gG})_{y=-3a} = -\frac{(-1{,}5ql^2)}{135a^4}(-3a) = -\,0{,}0331\frac{ql^2}{a^3}.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że maksymalne co do wartości bezwzględnej naprężenia działają we włóknach górnych ($y = 5a$) przekroju określonego współrzędną $x = 2l$ i wynoszą

$$\left|(\sigma_{gB})_{y=5a}\right| = \frac{|M_g|_{\max}}{W} = 0{,}0735\frac{ql^2}{a^3}.$$

Największe naprężenia rozciągające działają we włóknach górnych ($y = 5a$) przekroju $x^- = 4l$, gdzie lewostronna granica $M_g = -\,1{,}5ql^2$ i wynoszą

$$(\sigma_{gG})_{y=5a} = 0{,}0551\frac{ql^2}{a^3}.$$

Z warunków bezpiecznego projektowania mamy

$$0{,}0735\frac{ql^2}{a^3} \le k_c,$$

$$0{,}0551\frac{ql^2}{a^3} \le k_r.$$

Z nierówności tych można obliczyć tylko jedną wielkość, np. $q_{dop}$, gdy dane są pozostałe wielkości $l, a, k_c, k_r$ lub wymiar $a$, gdy dane są wielkości $q, l, k_r, k_c$. W przypadku gdy $k_r = k_c = k$ wystarczy rozpatrzyć tylko nierówność pierwszą.
Przykładowe obliczenia liczbowe.
1) Dane: $l = 0{,}5\ m$, $a = 2\ cm$, $k_c = 150\ MPa$, $k_r = 120\ MPa$

$$q_1 \le \frac{k_c a^3}{0{,}0735 l^2} = \frac{150 \cdot 10^3 kPa (2 \cdot 10^{-2} m)^3}{0{,}0735 (0{,}5\ m)^2} = 65{,}3\frac{kN}{m}$$

$$q_2 \le \frac{k_r a^3}{0{,}0551 l^2} = \frac{120 \cdot 10^3 kPa (2 \cdot 10^{-2} m)^3}{0{,}0551 (0{,}5\ m)^2} = 69{,}7\frac{kN}{m}$$

Jako obciążenie dopuszczalne należy przyjąć mniejsze z obciążeń $q_1$ i $q_2$, czyli

$$q_{dop} \le 65{,}3\ kN/m$$

wówczas spełnione będą obie nierówności.
2) Dane: $l = 0{,}5\ m$, $q = 80\ kN/m$, $k_r = k_c = k = 150\ MPa$

$$|\sigma_g|_{\max} = \frac{|M_g|_{\max}}{W} = \frac{2ql^2}{27{,}2a^3} = 0{,}0735\frac{ql^2}{a^3} \le k$$

$$a \ge \sqrt[3]{\frac{0{,}0735 q l^2}{k}} = \sqrt[3]{\frac{0{,}0735 \cdot 80 \cdot 10^{-3}\frac{MN}{m}}{150\ MPa}(0{,}5\ m)^2} = 0{,}0214\ m = 21{,}4\ mm.$$

**Zadanie 8.12.** Obliczyć pole powierzchni przekroju poprzecznego belki z zadania 8.1 dla dwóch różnych kształtów przekroju:

- prostokąt o szerokości $b$ i wysokości $h = 2b$,
- dwuteownik walcowany produkowany przez huty.

Dane liczbowe: $q = 16\ kN/m$, $l = 1\ m$, $k_g = 120\ MPa$.

Maksymalny moment zginający belkę jest podany na rys. 8.6 i wynosi:

$$M_{g\max} = \frac{9}{8}ql^2 = \frac{9}{8}\cdot 16\frac{kN}{m}(1\ m)^2 = 18\ kNm = 18 \cdot 10^{-3} MNm.$$

Warunek projektowania belek zginanych na wytrzymałość ma postać:

$$\sigma_{g\max} = \frac{M_{g\max}}{W} \le k_g$$

Z warunku tego wynika, że

$$W \geq \frac{M_{g\max}}{k_g} = \frac{18 \cdot 10^{-3} MNm}{120\, MPa} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} m^3 = 150\, cm^3.$$

Wskaźnik wytrzymałości na zginanie dla belki o przekroju prostokątnym jest określony wzorem

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3} b^3$$

Wymiar $b$ obliczamy z warunku

$$W_1 = \frac{2}{3} b^3 \geq 150\, cm^3$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{450}{2}} cm = 6{,}08\, cm.$$

Po przyjęciu $b = 6{,}1\, cm$ pole powierzchni przekroju poprzecznego belki wynosi

$$A_1 = b \cdot h = 2b^2 = 2(6{,}1\, cm)^2 = 74{,}4\, cm^2.$$

Aby zaprojektować belkę o przekroju dwuteownika normalnego walcowanego, trzeba skorzystać z tablic do projektowania konstrukcji stalowych. Po odnalezieniu tablicy z danymi dotyczącymi dwuteowników normalnych trzeba w niej znaleźć dwuteownik, który ma wskaźnik wytrzymałości na zginanie najbliższy większy od $150\, cm^3$. W tablicy, z której korzystano, był to wskaźnik równy $161\, cm^3$. Jest to wskaźnik na zginanie dwuteownika I180 o wysokości $h = 180\, mm$ i szerokości półek $s = 82\, mm$. Pole powierzchni przekroju poprzecznego tego dwuteownika podane jest w tablicy i wynosi

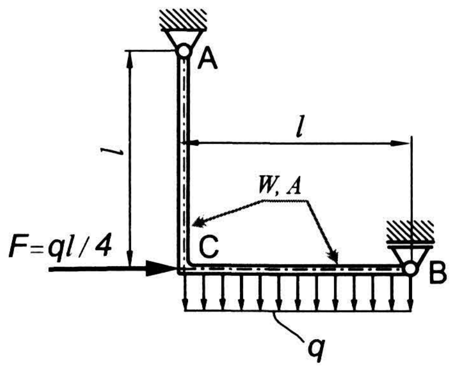
$$A_2 = 27{,}9\, cm^2.$$

Porównując to pole powierzchni z polem powierzchni przekroju prostokątnego $A_1 = 74{,}4\, cm^2$, widzimy, że pole powierzchni przekroju dwuteownika jest $74{,}4 : 27{,}9 \cong 2{,}67$ razy mniejsze od przekroju prostokątnego, co oznacza, że belka dwuteowa będzie 2,67 razy lżejsza. Maksymalne naprężenia w belce dwuteowej będą równe

$$\sigma_{g\max} = \frac{18 \cdot 10^{-3} MNm}{161 \cdot 10^{-6} m^3} = 112\, MPa < k_g = 120\, MPa.$$

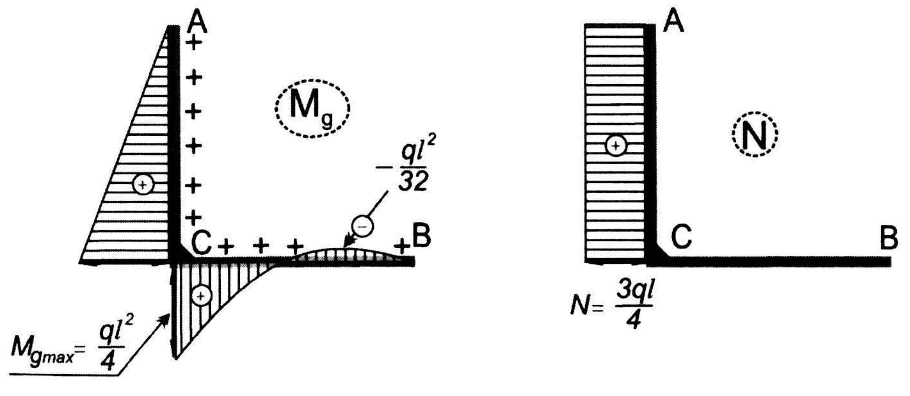
**Zadanie 8.13.** Obliczyć maksymalne naprężenia w ramie podpartej i obciążonej jak pokazano na rys. 8.35, mając dane:

$q$ – obciążenie ciągłe,
$l$ – długości elementów,
$W$ – wskaźnik wytrzymałości na zginanie,
$A$ – pole powierzchni przekroju poprzecznego.




**Rys. 8.35**

R o z w i ą z a n i e. Wykresy momentów zginających i sił normalnych pokazano na rys. 8.36.




**Rys. 8.36**

Maksymalne naprężenie występuje w elemencie pionowym w bezpośrednim sąsiedztwie naroża ramy (punkt $C$). Maksymalne naprężenia od zginania wynoszą:

$$\sigma_{g\max} = \frac{M_{g\max}}{W} = \frac{ql^2}{4W}.$$

W tym samym przekroju naprężenia od rozciągania (od siły normalnej) są równe

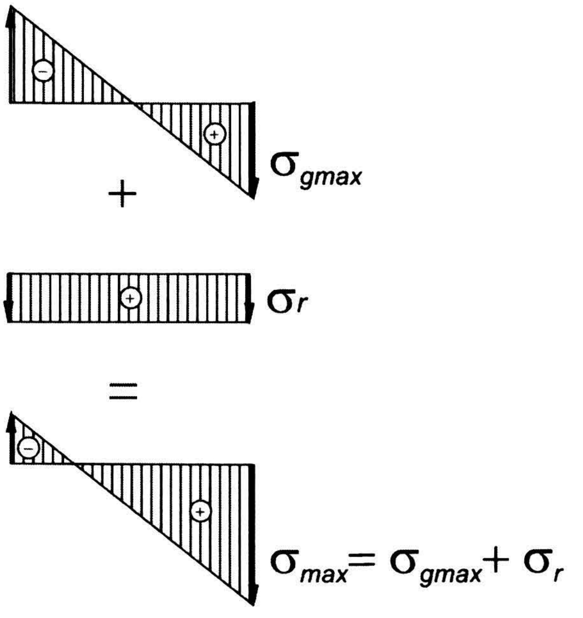
$$\sigma_r = \frac{N}{A} = \frac{3ql}{4A}.$$

Po stronie rozciąganej pręta pionowego, zaznaczonej na wykresie $M_g$ plusami, naprężenia $\sigma_{g\max}$ i $\sigma_r$ mają ten sam kierunek i zwrot, więc możemy je dodać algebraicznie.

$$\sigma_{\max} = \sigma_{g\max} + \sigma_r = \frac{ql^2}{4W} + \frac{3ql}{4A} = \frac{ql^2}{4W}(1 + \frac{3W}{Al}).$$

Wielkość $\frac{W}{Al}$ jest bardzo często wielkością małą w porównaniu z jednością. Gdy $\frac{W}{Al} < 0{,}01$ naprężenia $\sigma_r$ można w obliczeniach wytrzymałościowych pominąć.

Dla przekroju poprzecznego z dwiema osiami symetrii rozkład naprężeń wzdłuż wysokości przekroju $C$ pokazano na rys. 8.37.

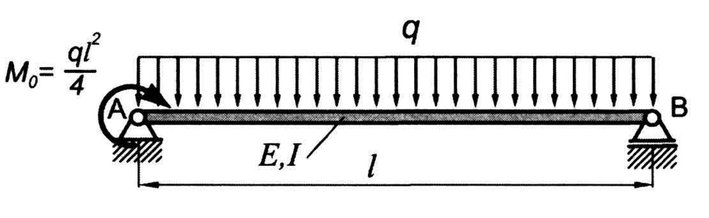



**Rys. 8.37**

## 8.4. Obliczanie ugięć belek

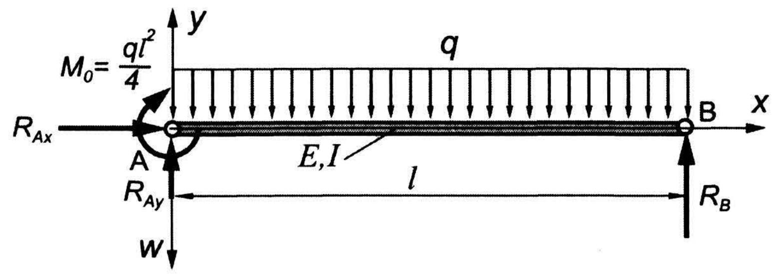
### *8.4.1. Przykłady wyznaczania funkcji ugięcia belek jedno i wieloprzedziałowych*

**Zadanie 8.14.** Belka o sztywności na zginanie $EI$ i długości $l$, podparta przegubowo na końcach, jest obciążona równomiernie rozłożonym obciążeniem $q$ oraz momentem skupionym $M_0 = \frac{1}{4}ql^2$ w sposób pokazany na rys. 8.38. Wyznaczyć funkcję ugięcia oraz funkcję kąta ugięcia osi belki, a następnie kąty ugięcia przy podporach $\theta_A$, $\theta_B$ oraz ugięcie maksymalne (strzałkę ugięcia) $f$.




**Rys. 8.38**

R o z w i ą z a n i e. Na rys. 8.39 pokazano belkę uwolnioną od więzów z przyjętymi układami osi współrzędnych $x$, $y$ oraz $x$, $w$, gdzie $w = w(x)$ jest funkcją ugięcia osi belki.




**Rys. 8.39**

Z sumy momentów sił względem punktu $B$ belki

$$R_{Ayl} + M_0 - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0$$

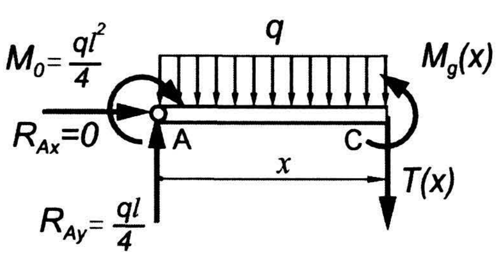
wyznaczono składową pionową reakcji w punkcie $A$

$$R_{Ay} = \frac{ql}{2} - \frac{M_0}{l} = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{4} = \frac{ql}{4}.$$

Pozostałych reakcji nie trzeba wyznaczać, aby rozwiązać zadanie.
Dla przyjętego na rys. 8.39 układu współrzędnych równanie różniczkowe ugiętej osi belki ma postać

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_g(x).$$

Moment zginający belkę w przekroju $x$ (rys. 8.40) wynika z sumy momentów sił względem osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez środek ciężkości rozpatrywanego przekroju poprzecznego (punkt C).




**Rys. 8.40**

$$M_g(x) = \frac{1}{4}ql^2 + \frac{1}{4}qlx - \frac{qx^2}{2}.$$

Po podstawieniu do równania różniczkowego linii ugięcia belki wzoru na $M_g(x)$ otrzymano

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{4}ql^2 - \frac{1}{4}qlx + \frac{qx^2}{2}.$$

Scałkowanie obu stron tego równania daje

$$EI\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{4}ql^2x - \frac{1}{8}qlx^2 + \frac{1}{6}qx^3 + C_1.$$

Po następnym scałkowaniu i podzieleniu przez $EI$ otrzymano funkcję ugięcia belki

$$w(x) = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{8}ql^2x^2 - \frac{1}{24}qlx^3 + \frac{1}{24}qx^4 + C_1x + C_2).$$

Stałe całkowania wyznacza się z następujących warunków brzegowych
$w = 0$ dla $x = 0$,
$w = 0$ dla $x = l$.
Z pierwszego warunku brzegowego otrzymano
$C_2 = 0$,
a z drugiego

$$\frac{1}{EI}(-\frac{1}{8}ql^4 - \frac{1}{24}ql^4 + \frac{1}{24}ql^4 + C_1l) = 0$$

skąd

$$C_1 = \frac{1}{8}ql^3.$$

Po podstawieniu stałych całkowania funkcja w(x) ma postać

$$w(x) = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{8}ql^2x^2 - \frac{1}{24}qlx^3 + \frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{8}ql^3x).$$

Pochodna tej funkcji, czyli funkcja kąta ugięcia $\theta(x)$ osi belki, jest następująca

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{4}ql^2x - \frac{1}{8}qlx^2 + \frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{8}ql^3).$$

Kąty ugięć belki przy podporach wynoszą:

$$\theta_A = \theta(0) = \frac{ql^3}{8EI},$$

$$\theta_B = \theta(l) = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{4}ql^3 - \frac{1}{8}ql^3 + \frac{1}{6}ql^3 + \frac{1}{8}ql^3) = -\frac{ql^3}{12EI}.$$

Dodatnie wartości kątów $\theta$ otrzymuje się przy obrocie osi belki w kierunku ruchu wskazówek zegara.
Maksymalne ugięcie belki wystąpi w przekroju $x = x_0$, w którym pochodna

$$\frac{dw}{dx} = \theta(x_0) = 0$$

$$\theta(x_0) = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{4}ql^2x_0 - \frac{1}{8}qlx_0^2 + \frac{1}{6}qx_0^3 + \frac{1}{8}ql^3) = 0.$$

Aby wyznaczyć $x_0$, trzeba rozwiązać równanie 3. stopnia

$$4x_0^3 - 3x_0^2 - 6x_0 + 3l = 0,$$

wynikające z warunku $\theta(x_0) = 0$.

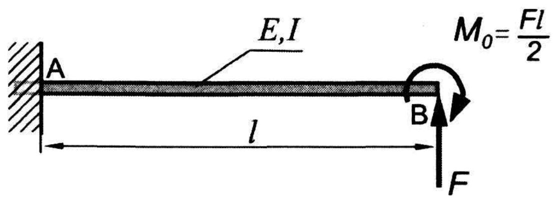
Z rozwiązania tego równania otrzymano

$$x_0 \cong 0{,}459l$$

Maksymalne ugięcie belki

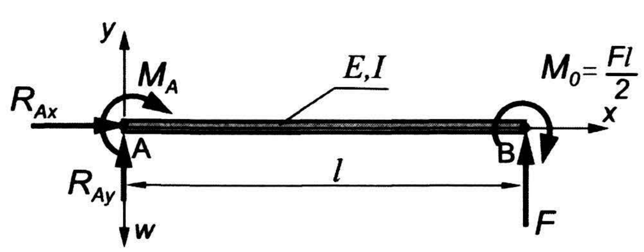
$$f = w(0{,}459l) = \frac{ql^4}{EI}(-0{,}0263 - 0{,}0040 + 0{,}0018 + 0{,}0574) = 0{,}029\frac{ql^4}{EI}.$$

**Zadanie 8.15.** Belka o długości $l$ i sztywności na zginanie $EI$ jest utwierdzona na lewym końcu w nieodkształcalnej ścianie. Na prawym swobodnym końcu belka jest obciążona pionową siłą $F$ skierowaną do góry oraz momentem skupionym $M_0 = \frac{1}{2}Fl$ o zwrocie zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 8.41). Wyznaczyć funkcję ugięcia osi belki $w(x)$ oraz maksymalne co do wartości bezwzględnej ugięcie belki i kąt ugięcia belki.




**Rys. 8.41**

R o z w i ą z a n i e. Reakcje $R_{Ax}$, $R_{Ay}$, $M_A$ w miejscu utwierdzenia oblicza się z równań równowagi belki uwolnionej od więzów (rys. 8. 42).



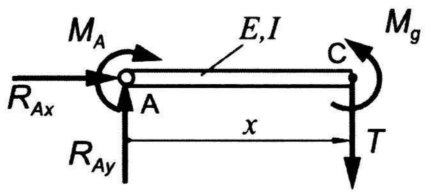

**Rys. 8.42**

$$\sum F_{ix} \Rightarrow R_{Ax} = 0,$$

$$\sum F_{iy} \Rightarrow R_{Ay} + F = 0 \quad \Rightarrow R_{Ay} = -F,$$

$$\sum M_A \Rightarrow M_A + M_0 - Fl = 0 \quad \Rightarrow M_A = Fl - M_0 = \frac{1}{2}Fl.$$

Moment zginający $M_g(x)$ w przekroju $x$, gdzie $0 \le x \le l$, otrzymuje się z sumy momentów sił względem punktu $C$ dla odciętej części belki (rys. 8.43).




**Rys. 8.43**

$$M_g(x) = M_A + R_{Ay}x = \frac{1}{2}Fl - Fx,$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia osi belki dla układu współrzędnych $x$, $w$ przyjętego jak na rys. 8.42, ma postać

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_g(x).$$

Po podstawieniu momentu zginającego $M_g(x)$ równanie to przyjmuje postać następującą

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{2}Fl + Fx.$$

Równanie to można rozwiązać metodą kolejnych całkowań. Po pierwszym scałkowaniu otrzymano

$$EI\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{2}Flx + \frac{1}{2}Fx^2 + C_1,$$

a po drugim

$$EIw(x) = -\frac{1}{4}Flx^2 + \frac{1}{6}Fx^3 + C_1x + C_2.$$

Ostatecznie mamy

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}Flx^2 + \frac{1}{6}Fx^3 + C_1x + C_2\right).$$

Stałe całkowania $C_1$ i $C_2$ wyznacza się z warunków brzegowych odpowiadających utwierdzeniu belki w punkcie $A$, czyli

1) $\frac{dw}{dx} = 0$ dla $x = 0$,

2) $w = 0$ dla $x = 0$.

Z pierwszego warunku brzegowego otrzymano $C_1 = 0$, a z drugiego $C_2 = 0$.
Funkcję ugięcia osi belki można zapisać jak niżej

$$w(x) = \frac{Fx^2}{12EI}(2x - 3l).$$

Pochodna funkcji ugięcia, czyli funkcja kąta ugięcia osi belki ma postać

$$\theta(x) = \frac{dw}{dx} = \frac{Fx}{2EI}(x - l).$$

Kąt ugięcia prawego końca belki

$$\theta_B = \theta(l) = (\frac{dw}{dx})_{x=l} = 0,$$

co oznacza, że funkcja ugięcia $w(x)$ ma w punkcie $x = l$ ekstremum o wartości

$$w(l) = \frac{Fl^2}{12EI}(2l - 3l) = -\frac{Fl^3}{12EI}.$$

Jest to, co do wartości bezwzględnej, największe ugięcie $f$ belki skierowane do góry (przeciwnie do dodatniego zwrotu osi $w$). Ekstremum kąta ugięcia belki występuje w przekroju, w którym $\frac{d\theta}{dx} = -\frac{M_g(x)}{EI} = 0$, czyli w przekroju, w którym $M_g(x) = 0$

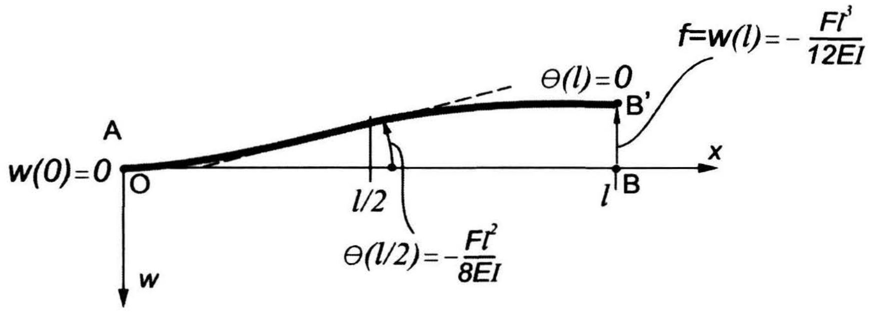
$$\frac{1}{2}Fl - Fx_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}l.$$

A zatem

$$\theta_{ekstr} = \theta(\frac{l}{2}) = -\frac{Fl^2}{8EI}.$$

W przyjętym układzie współrzędnych $x$, $w$ ujemne wartości kąta $\theta$ należy odmierzać od osi $x$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

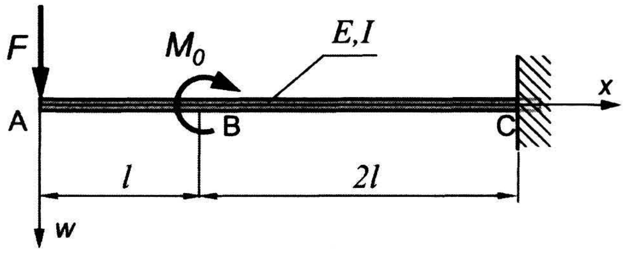
Wykres funkcji ugięcia belki oraz kąt ugięcia w przekroju $x = \frac{l}{2}$ pokazano na rys. 8.44.




**Rys. 8.44**

**Zadanie 8.16.** Belka wspornikowa o długości $3l$ i sztywności na zginanie $EI$ jest utwierdzona na prawym końcu. Na lewym swobodnym końcu belka jest obciążona siłą pionową $F$ skierowaną w dół. W odległości $l$ od lewego końca na belkę działa para sił o momencie $M_0$ i zwrocie zgodnym z ruchem wskazówek zegara (rys. 8.45).

Wyznaczyć funkcje ugięcia $w$ i kąta ugięcia $\theta = \dfrac{dw}{dx}$ osi belki oraz ugięcia i kąty ugięć w punktach $A$ i $B$ belki, stosując metodę Clebscha.




**Rys. 8.45**

R o z w i ą z a n i e. Analizowana belka jest belką dwuprzedziałową, o długości przedziałów $l$ i $2l$. Zgodnie z warunkami metody Clebscha moment zginający w I i II przedziale belki ma postać

$$M_g(x) = -F \cdot x\Big|_I + M_0(x-l)^0\Big|_{II}.$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki dla współrzędnych $x$, $w$ (rys. 8.45) ma postać

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = -M_g(x).$$

Po podstawieniu $M_g(x)$ otrzymano

$$EI\frac{d^2w}{dx^2} = F \cdot x\Big|_I - M_0(x-l)^0\Big|_{II}.$$

Scałkowanie równania zgodnie z warunkami metody Clebscha daje

$$EI\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2}Fx^2 + C_1\Big|_I - M_0(x-l)\Big|_{II}.$$

Po drugim scałkowaniu otrzymano

$$EIw = \frac{1}{6}F \cdot x^3 + C_1 \cdot x + C_2\Big|_I - \frac{1}{2}M^0(x-l)^2\Big|_{II}.$$

Warunki brzegowe w miejscu utwierdzenia belki ($x = 3l$) występują w przedziale II i są następujące:

1) $\dfrac{dw}{dx} = 0$ dla $x = 3l$,

2) $w = 0$ dla $x = 3l$.

Z pierwszego warunku brzegowego

$$\frac{9}{2}Fl^2 + C_1 - M_0 \cdot 2l = 0$$

otrzymano

$$C_1 = 2M_0 l - \frac{9}{2}Fl^2 .$$

Drugi warunek brzegowy daje

$$\frac{27}{6}Fl^3 + C_1 3l + C_2 - 2M_0 l^2 = 0,$$

$$C_2 = 2M_0 l^2 - \frac{9}{2}Fl^3 - 6M_0 l^2 + \frac{27}{2}Fl^3 = -\,4M_0 l^2 + 9Fl^3 .$$

Funkcje ugięcia i kąta ugięcia mają postać:

$$w = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}Fx^3 + 2M_0 lx - \frac{9}{2}Fl^2 x - 4M_0 l^2 + 9Fl^3\Big|_I - \frac{1}{2}M_0 (x-l)^2\Big|_{II}\right],$$

$$\theta = \frac{dw}{dx} = \left[\frac{1}{2}Fx^2 + 2M_0 l - \frac{9}{2}Fl^2\Big|_I - M_0 (x-l)\Big|_{II}\right].$$

Ugięcia i kąty ugięć belki w punktach $A$ i $B$ wynoszą [punkt $A$ ($x = 0$) jest w przedziale I, punkt $B$ ($x = l$) leży na granicy przedziałów I i II].

$$w_A = \frac{1}{EI}(-\,4M_0 l + 9Fl^3),$$

$$\theta_A = \frac{1}{EI}(2M_0 l - \frac{9}{2}Fl),$$

$$w_B = \frac{1}{EI}(-\,2M_0 l^2 + \frac{14}{3}Fl^3),$$

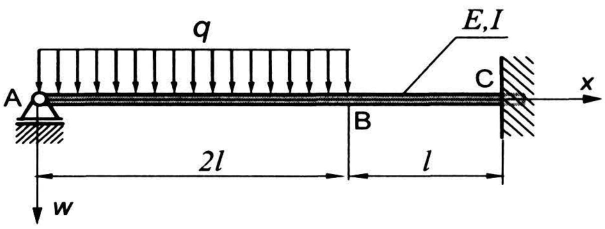
$$\theta_B = \frac{1}{EI}(2M_0 l - 4Fl^2).$$

Warunki metody Clebscha zastosowane przy rozwiązaniu zadania:

- w wyrażeniu na moment gnący moment skupiony $M_0$ pomnożono przez ramię $x - l$ podniesione do potęgi zerowej,
- stałe całkowania dopisano w przedziale I,
- całkowano „bez otwierania nawiasów” (wyrażenia w nawiasach traktowano jako zmienną),
- początek układu współrzędnych przyjmuje się zawsze w lewym skrajnym przekroju belki.

Warunki brzegowe, ugięcia i kąty ugięć wyznaczano w przekrojach, w których znajdują się punkty $A$, $B$ i $C$.

**Zadanie 8.17.** Jednokrotnie statycznie niewyznaczalna belka o długości $3l$ i sztywności na zginanie $EI$ jest podparta i obciążona, jak pokazano na rys. 8.46. Wyznaczyć funkcję ugięcia $w(x)$ i kąta ugięcia $\theta(x)$ osi belki oraz kąt ugięcia $\theta_A$ przy podporze $A$ i ugięcie w punkcie $B$ belki.




**Rys. 8.46**

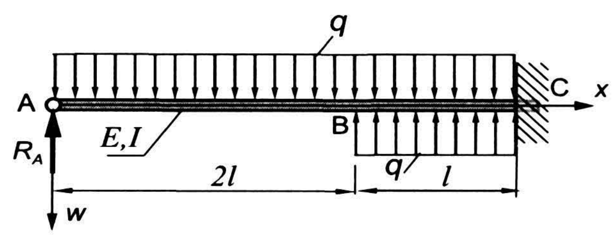
R o z w i ą z a n i e. Liczba warunków brzegowych w belkach statycznie niewyznaczalnych jest równa sumie liczby stałych całkowania równania różniczkowego linii ugięcia belki oraz krotności statycznej niewyznaczalności belki. Równanie różniczkowe linii ugięcia jest równaniem drugiego rzędu dlatego w rozwiązaniu występują dwie stałe całkowania. W analizowanej belce mamy trzy warunki brzegowe

1) $w = 0$ dla $x = 0$,

2) $w = 0$ dla $x = 3l$,

3) $\dfrac{dw}{dx} = 0$ dla $x = 3l$.

Te trzy warunki brzegowe pozwalają obliczyć dwie stałe całkowania oraz jedną z reakcji statycznie niewyznaczalnych (w zadaniu jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym). Najłatwiej jest rozwiązać to zadanie, przyjmując za wielkość statycznie niewyznaczalną reakcję $R_A$ w podporze $A$. Ponieważ belka jest dwuprzedziałowa, do rozwiązania zadania zastosowano metodę Clebscha. Częściowo uwolnioną od więzów belkę z warunkiem metody Clebscha dotyczącym przedłużenia obciążenia ciągłego do końca belki pokazano na rys. 8.47.




**Rys. 8.47**

Wzór na moment zginający w przedziałach I ($0 \le x \le 2l$) i II ($2l \le x \le 3l$) zgodnie z warunkami metody Clebscha ma postać następującą

$$M_g(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2}\bigg|_I + \frac{q(x-2l)^2}{2}\bigg|_{II}.$$

Rozwiązywanie równania różniczkowego metodą kolejnych całkowań (zgodnie z warunkami metody Clebscha) bez otwierania nawiasów daje

$$EI\frac{dw}{dx} = -R_A\frac{x^2}{2} + \frac{qx^3}{6} + C_1\Bigg|_I - \frac{q(x-2l)^3}{6}\Bigg|_{II},$$

$$EIw = -R_A = -R_A\frac{x^3}{6} + \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2\Bigg|_I - \frac{q(x-2l)^4}{24}\Bigg|_{II}.$$

Z podanych wyżej warunków brzegowych otrzymano $C_2 = 0$ oraz układ dwóch równań algebraicznych z niewiadomymi $R_A$ i $C_1$

$$-R_A\frac{27l^3}{6} + \frac{q81l^4}{24} + C_1\cdot 3l - \frac{ql^4}{24} = 0,$$

$$-R_A\frac{ql^2}{2} + \frac{q27l^3}{6} + C_1 - \frac{ql^3}{6} = 0.$$

Po rozwiązaniu tych równań otrzymano

$$R_A = \frac{29}{27}ql,$$

$$C_1 = \frac{ql^3}{2}.$$

Funkcje $w(x)$ i $\theta(x) = \dfrac{dw}{dx}$ spełniające warunki brzegowe belki mają postać

$$w(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{29qlx^3}{162} + \frac{qx^4}{24} + \frac{ql^3x}{2}\Bigg|_I - \frac{q(x-2l)^4}{24}\Bigg|_{II}\right],$$

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{29qlx^2}{54} + \frac{qx^3}{6} + \frac{ql^3}{2}\Bigg|_I - \frac{q(x-2l)^3}{6}\Bigg|_{II}\right].$$

Kąt ugięcia belki przy podporze $A$ ($x = 0$, przedział I)

$$\theta_A = \theta(0) = \frac{ql^3}{2EI}$$

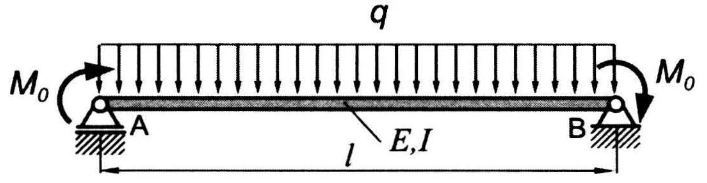
Ugięcie belki w punkcie $B$ ($x = 2l$) na styku przedziałów I i II można obliczać z przedziału I lub II

$$w_B = w(2l) = \frac{1}{EI}[-\frac{29ql(2l)^3}{162} + \frac{q(2l)^4}{24} + \frac{ql^3(2l)}{2}] = \frac{19ql^4}{81EI}.$$

### *8.4.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania*

**Zadanie 8.18.** Obliczyć ugięcia i kąty ugięć w przekrojach $x = 0; \frac{l}{4}; \frac{l}{2}; \frac{3}{4}l; l$ belki obciążonej i podpartej jak pokazano na rys. 8.48.
Dane: $l$ – długość belki, $EI$ – sztywność belki na zginanie,

$M_0 = \dfrac{ql^2}{16}$ – momenty skupione działające w miejscach podpór.




**Rys. 8.48**

ODPOWIEDŹ:

$w(0) = 0,$

$w(\frac{1}{4}l) = \frac{21}{2048}\frac{ql^4}{EI},$

$w(\frac{1}{2}l) = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI},$

$w(\frac{3}{4}l) = -\frac{29}{6144}\frac{ql^4}{EI},$

$w(l) = 0,$

$\theta(0) = \frac{5}{96}\frac{ql^3}{EI},$

$\theta(\frac{1}{4}l) = \frac{7}{256}\frac{ql^3}{EI},$

$\theta(\frac{1}{2}l) = -\frac{1}{192}\frac{ql^3}{EI},$

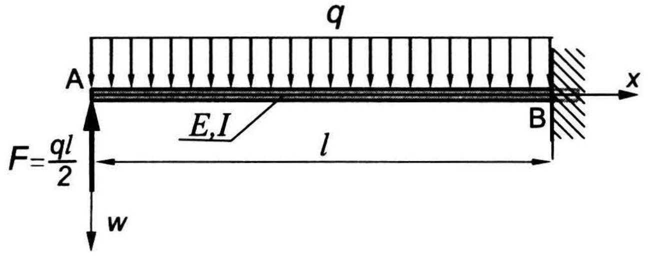
$\theta(\frac{3}{4}l) = -\frac{23}{768}\frac{ql^3}{EI},$

$\theta(l) = -\frac{1}{32}\frac{ql^3}{EI}.$

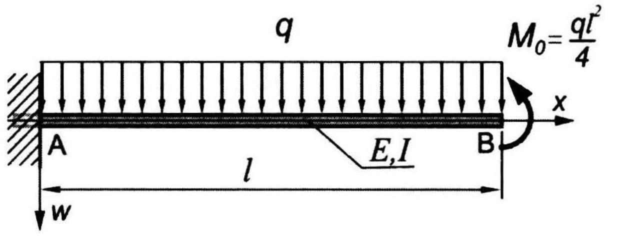
$$w = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{32}ql^2x^2 - \frac{1}{16}qlx^3 + \frac{1}{24}qx^4 + \frac{5}{96}ql^3x),$$

$$\theta = \frac{1}{EI}(-\frac{1}{16}ql^2x - \frac{3}{16}qlx^2 + \frac{1}{6}qx^3 + \frac{5}{96}ql^3).$$

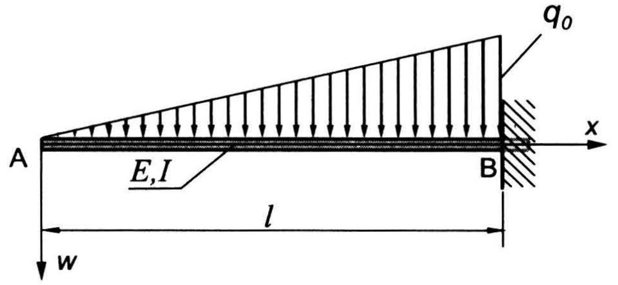
**Zadania 8.19(a÷d).** Wyznaczyć funkcje ugięcia oraz ugięcia i kąty ugięć swobodnego końca belek, obciążonych jak pokazano na rys. 8.49(a÷d).



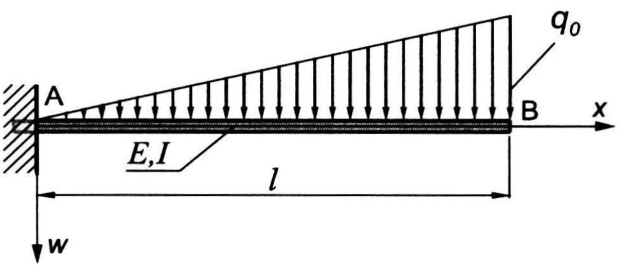

**Rys. 8.49a**




**Rys. 8.49b**




**Rys. 8.49c**




**Rys. 8.49d**

ODPOWIEDŹ DO ZADANIA 8.19a:

$$w(x) = \frac{q}{24EI}(-l^4 + 2l^3x - 2lx^3 + x^4),$$

$$w_A = w(0) = -\frac{ql^4}{24EI},$$

$$\theta_A = \theta(0) = \frac{ql^3}{12EI}.$$

ODPOWIEDŹ DO ZADANIA 8.19b:

$$w(x) = \frac{qx^2}{24EI}(3l^2 - 4lx + x^2),$$

$$w_B = w(l) = 0,$$

$$\theta_B = \theta(l) = -\frac{ql^3}{12EI}.$$

ODPOWIEDŹ DO ZADANIA 8.19c:

$$w(x) = \frac{1}{EI}(+\frac{q_0x^5}{120l} - \frac{q_0l^3x}{24} + \frac{q_0l^4}{30}),$$

$$w_A = w(0) = \frac{q_0l^4}{30EI},$$

$$\theta_A = \theta(0) = -\frac{q_0l^3}{24EI}.$$

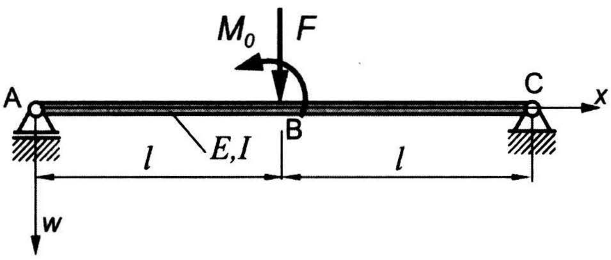
ODPOWIEDŹ DO ZADANIA 8.19d:

$$w(x) = \frac{q_0x^2}{120EIl}(20l^3 - 10l^2x + x^3),$$

$$w_B = w(l) = \frac{11q_0l^4}{120EI},$$

$$\theta_B = \theta(l) = \frac{q_0l^3}{8EI}.$$

**Zadanie 8.20.** Belka o długości $2l$ i sztywności na zginanie $EI$ jest podparta na końcach na dwóch podporach przegubowych. W środku rozpiętości belka jest obciążona pionową siłą $F$ skierowaną do dołu oraz momentem skupionym $M_0 = 2Fl$, jak pokazano na rys. 8.50.




**Rys. 8.50**

Stosując metodę Clebscha, wyznaczyć:

- funkcję ugięcia osi belki,
- kąty ugięć w punktach $A$, $B$ i $C$,
- maksymalne ugięcie belki.

ODPOWIEDŹ:

$$\frac{dw}{dx}=\frac{F}{EI}\left[-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{12}l^2\Big|_I+\frac{(x-l)^2}{2}+2l(x-l)\Big|_{II}\right];$$

$$w=\frac{F}{EI}\left[-\frac{1}{4}x^3+\frac{5}{12}l^2x\Big|_{II}+\frac{(x-l)^3}{6}+l(x-l)^2\Big|_{II}\right];$$

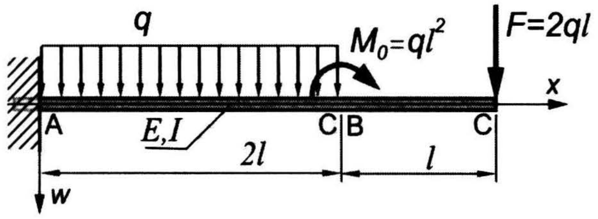
$$\theta_A=\frac{5}{12}\frac{Fl^2}{EI},$$

$$\theta_B=-\frac{Fl^2}{3EI},$$

$$\theta_C=-\frac{1}{12}\frac{Fl^2}{EI};$$

$$f=w_{\max}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}l\right)=\frac{5\sqrt{5}}{54}\frac{Fl^3}{EI}.$$

**Zadanie 8.21.** Belka wspornikowa o długości $3l$ i sztywności na zginanie $EI$ jest obciążona i podparta jak pokazano na rys. 8.51. Stosując metodę Clebscha, wyznaczyć funkcję ugięcia $w(x)$ osi belki.

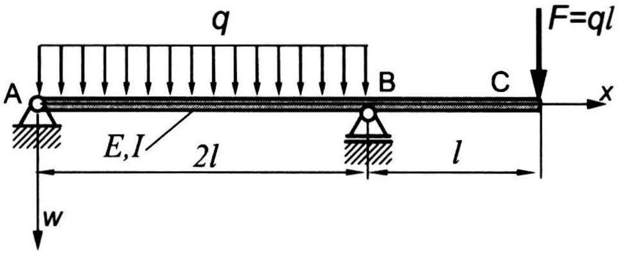



**Rys. 8.51**

ODPOWIEDŹ:

$$w(x)=\frac{1}{EI}\left[\frac{9}{2}ql^2x^2-\frac{2}{3}qlx^3+\frac{qx^4}{24}\bigg|_I-\frac{q(x-2l)^4}{24}-\frac{ql^2(x-2l)^2}{2}\bigg|_{II}\right].$$

**Zadanie 8.22.** Belka o długości $3l$ i sztywności na zginanie $EI$ podparta jest i obciążona jak pokazano na rys. 8.52. Stosując metodę Clebscha, wyznaczyć funkcję ugięcia osi belki oraz ugięcie belki w przekrojach $x = l$ i $x = 3l$.




**Rys. 8.52**

ODPOWIEDŹ:

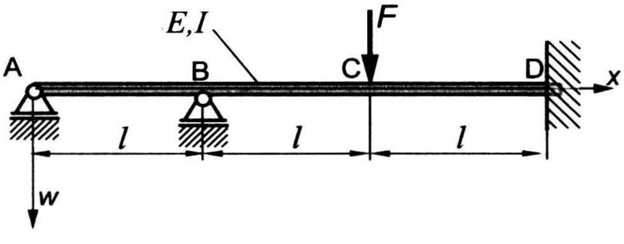
$$w=\frac{1}{EI}\left[-\frac{qlx^3}{12}+\frac{qx^4}{24}\bigg|_I-\frac{q(x-2l)^4}{24}-\frac{5ql}{12}(x-2l)^3\bigg|_{II}\right],$$

$$w(l)=-\frac{ql^4}{24EI},$$

$$w(3l)=\frac{2}{3}\frac{ql^4}{EI}.$$

**Zadanie 8.23.** Dwukrotnie niewyznaczalna belka o długości $3l$ i sztywności na zginanie $EI$ jest podparta i obciążona jak pokazano na rys. 8.53.
Stosując metodę Clebscha wyznaczyć:

- reakcje podpór $A$ i $B$,
- funkcje ugięcia osi belki,
- ugięcie belki pod siłą $F$.




**Rys. 8.53**

ODPOWIEDŹ:

$$R_A = -\frac{3}{20}F, \quad R_B = \frac{23}{40}F,$$

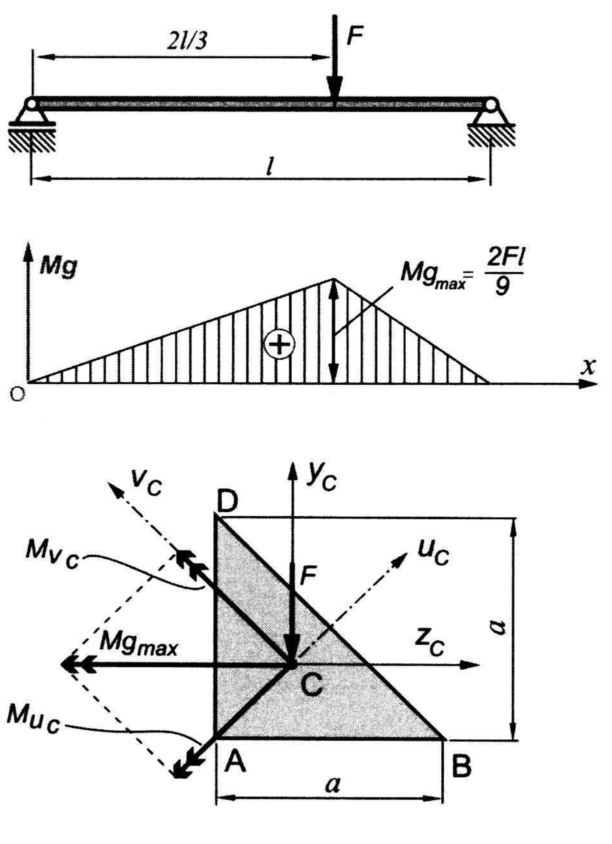
$$w = \frac{F}{EI}\left[\frac{x^3}{40} - \frac{l^2 x}{40}\bigg|_I - \frac{23}{240}(x-l)^3\bigg|_{II} + \frac{(x-2l)^3}{6}\bigg|_{III}\right],$$

$$w_C = w(2l) = \frac{13}{240}\frac{Fl^3}{EI}.$$

## 8.5. Zginanie ukośne

**Zadanie 8.24.** Belka o przekroju w kształcie równoramiennego trójkąta prostokątnego (rys. 8.54) podparta przegubowo na końcach, jest obciążona pionową siłą $F$ przyłożoną w odległości $\frac{2}{3}l$ od lewego końca belki. Siła $F$ jest przyłożona w środku ciężkości przekroju poprzecznego. Obliczyć naprężenia od zginania działające w punktach $A$, $B$ i $D$ przekroju belki, w którym działa maksymalny moment zginający $M_{g\max} = \frac{2}{9}Fl$.

Dane: $F$, $l$, $a$.




**Rys. 8.54**

R o z w i ą z a n i e. Rozpatrywany przekrój poprzeczny ma jedną oś symetrii (oś $u_c$ na rys. 8.54). Oś ta jest zatem jedną z głównych centralnych osi bezwładności. Druga główna centralna oś bezwładności musi być prostopadła do osi $u_c$ i przechodzić przez środek ciężkości $C$ przekroju poprzecznego. Jest to oś $v_c$ (rys. 8.54). Główne centralne momenty bezwładności wynoszą:

$$I_{v_c} = \frac{a\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}a)^3}{36} = \frac{a^4}{72},$$

$$I_{u_c} = 2\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}(\frac{a\sqrt{2}}{2})^3}{12} = \frac{a^4}{24}.$$

Wektor maksymalnego momentu zginającego w przekroju $x = \frac{2}{3}l$ (pod siłą $F$) ma kierunek poziomy (rys. 8.54) i wynosi $M_{g\max} = \frac{2}{9}Fl.$

Jego składowe względem głównych centralnych osi bezwładności $u_c$ i $v_c$ są sobie równe i wynoszą:

$$M_{u_c} = M_{v_c} = \frac{\sqrt{2}}{2}M_{g\max} = \frac{\sqrt{2}}{9}Fl.$$

Naprężenia zginające w punktach $A$, $B$ i $D$ zostaną wyznaczone metodą superpozycji. Naprężenia pochodzące od momentu zginającego $M_{v_c}$ wynoszą:

$$\sigma_A' = \frac{M_{v_c}}{I_{v_c}} \cdot \overline{CA} = \frac{72\sqrt{2}Fl}{9a^4} \cdot \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{3}\frac{Fl}{a^3},$$

$$\sigma_B' = \sigma_D' = -\frac{M_{v_c}}{I_{v_c}} \cdot \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{72\sqrt{2}Fl}{9a^4}\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{8}{3}\frac{Fl}{a^3}.$$

Moment $M_{u_c}$ wywołuje następujące naprężenia:

$$\sigma_A'' = 0,$$

$$\sigma_B'' = \frac{M_{u_c}}{I_{u_c}} \cdot \frac{1}{2}\overline{DB} = \frac{24\sqrt{2}Fl}{9a^4} \cdot \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{8}{3}\frac{Fl}{a^3},$$

$$\sigma_D'' = -\sigma_B'' = -\frac{8}{3}\frac{Fl}{a^3}.$$

Naprężenia wypadkowe od momentu zginającego $M_{g\max}$ w punktach $A$, $B$ i $D$ wynoszą:

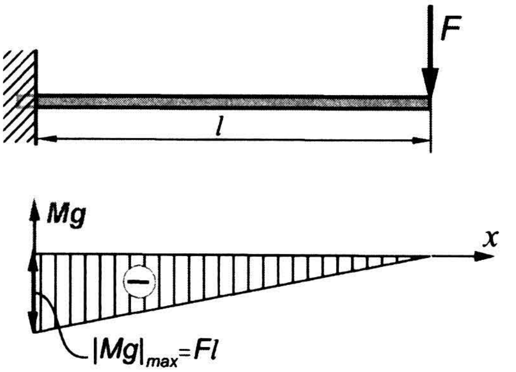
$$\sigma_A = \sigma_A^{'} + \sigma_A^{''} = \frac{16}{3}\frac{Fl}{a^3},$$

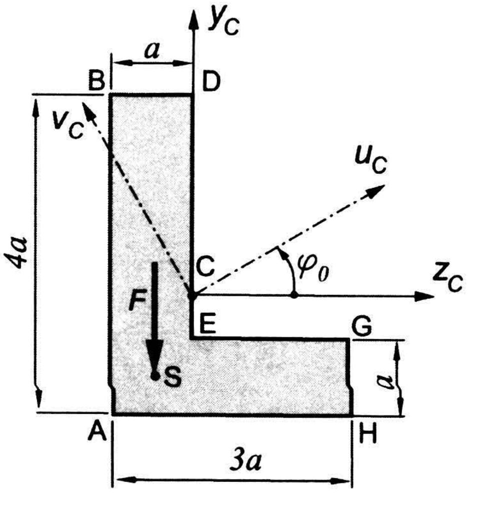
$$\sigma_B = \sigma_B^{'} + \sigma_B^{''} = -\frac{8}{3}\frac{Fl}{a^3} + \frac{8}{3}\frac{Fl}{a^3} = 0,$$

$$\sigma_D = \sigma_D^{'} + \sigma_D^{''} = -\frac{8}{3}\frac{Fl}{a^3} - \frac{8}{3}\frac{Fl}{a^3} = -\frac{16Fl}{3a^3}.$$

Ponieważ naprężenia w punktach $C$ (środek ciężkości) i $B$ są równe zero, oś obojętna zginania przechodzi przez punkty $C$ i $B$.

**Zadanie 8.25.** Belka wspornikowa o długości $l$ jest obciążona na swobodnym końcu pionową siłą $F$. Przekrój poprzeczny belki jest kątownikiem o wymiarach podanych na rys. 8.55. Siła $F$ jest przyłożona w środku sił poprzecznych (punkt $S$), aby nie powodowała skręcania belki. Obliczyć dopuszczalne wartości $F_1$ i $F_2$ siły $F$ odpowiednio przy najkorzystniejszym i najmniej korzystnym ustawieniu kątownika.
Dane liczbowe: $a = 2\ cm$, $l = 2\ m$, $k_g = 100\ MPa$.




Rys. 8.55

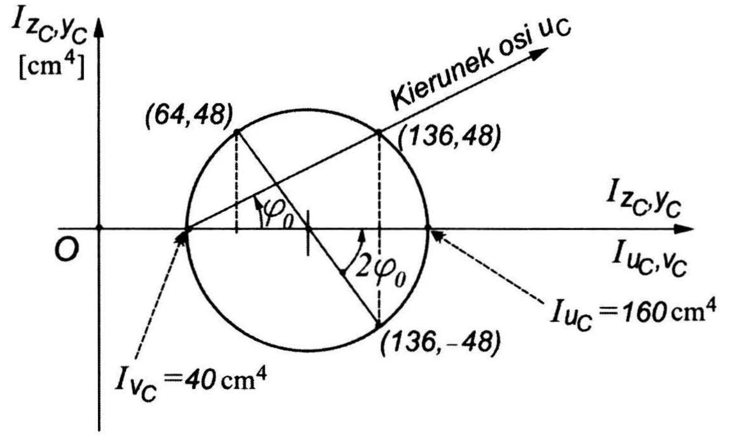
R o z w i ą z a n i e. Momenty bezwładności przekroju poprzecznego względem osi centralnych $z_c$, $y_c$:

$$I_{z_c} = \frac{2\cdot 5^3}{3} + \frac{6\cdot 3^3}{3} - \frac{4\cdot 1^3}{3} = 136\,cm^4,$$

$$I_{y_c} = \frac{8\cdot 2^3}{3} + \frac{2\cdot 4^3}{3} = 64\,cm^4,$$

$$I_{z_c y_c} = [0 + (2\cdot 8)(-1)(1)] + [0 + (4\cdot 2)2(-2)] = -48\,cm^4,$$

$$I_{y_c(-z_c)} = -I_{z_c y_c} = -48\,cm^4.$$

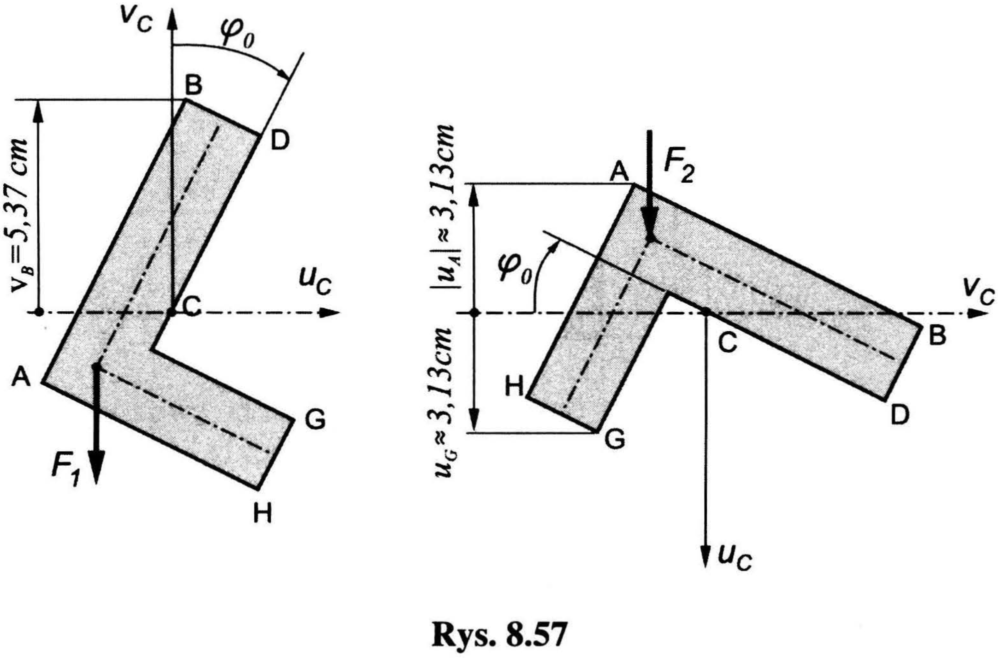



**Rys. 8.56**

Z koła Mohra dla momentów bezwładności (rys. 8.56) wynika, że główne centralne momenty bezwładności dla osi $u_c$ i $v_c$ obróconych w stosunku do osi $z_c$, $y_c$ w kierunku trygonometrycznym o kąt $\varphi_0 \cong 26{,}6°$ wynoszą:

$$I_{u_c} = I_{\max} = 160\,cm^4,$$

$$I_{v_c} = I_{\min} = 40\,cm^4.$$




**Rys. 8.57**

Dla ustawienia kątownika jak pokazano na rys. 8.57a

$$\sigma_{\max} = \sigma_{gB} = \frac{\left|-F_1 \cdot l\right|}{I_{u_c}} \cdot v_B \leq k_g,$$

gdzie $v_B$ jest odległością punktu $B$ od osi $u_C$ i wynosi $v_B \cong 5{,}37\ cm$.

Z podanej nierówności, po podstawieniu danych liczbowych, otrzymuje się maksymalną wartość siły $F$

$$F_1 = \frac{I_{u_c} \cdot k_g}{l \cdot v_B} = \frac{160 \cdot 10^{-8} \cdot m^4 \cdot 100 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2}}{2\,m \cdot 5{,}37 \cdot 10^{-2}\,m} \cong 1{,}49\ kN.$$

Dla ustawienia kątownika jak pokazano na rys. 8.57b

$$\left|\sigma_{gG}\right| = \sigma_{gA} = \sigma_{g\max} = \frac{\left|-F_2 \cdot l\right|}{I_{v_c}} \cdot u_A \leq k_g,$$

gdzie $u_A = 3{,}13\ cm$.

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

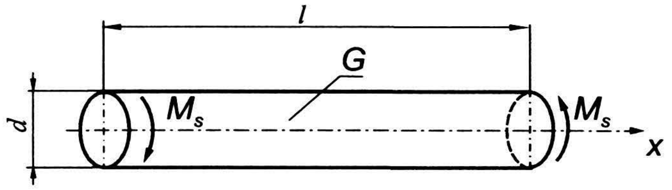
$$F_2 = \frac{I_{v_c} \cdot k_g}{l \cdot u_A} = \frac{40 \cdot 10^{-8} m^4 \cdot 10^5 \frac{kN}{m^2}}{2\,m \cdot 3{,}13 \cdot 10^{-2} m} \cong 0{,}64\ kN.$$

Siła $F_2$ jest ponad dwukrotnie mniejsza od siły $F_1$. Ponieważ siły $F_1$ i $F_2$ przechodzą przez środek sił poprzecznych rozpatrywanego przekroju i działają w kierunkach równoległych do osi głównych, więc wywołują tylko zginanie belki w płaszczyznach równoległych odpowiednio do osi $v_c$ i $u_c$.

# 9. SKRĘCANIE PRĘTÓW

## 9.1. Wprowadzenie

Czyste skręcanie prętów występuje wtedy gdy na pręt działają równoważące się pary sił w płaszczyznach prostopadłych do osi pręta. Obciążenia i reakcje działające na pręt skręcany przedstawia się w postaci momentów tych par sił.




**Rys. 9.1**

Często pręty skręcane mają przekroje poprzeczne kołowe, są to pręty pełne bądź niejednokrotnie drążone (rys. 9.1).

### *9.1.1. Podstawowe wzory dla prętów skręcanych o przekroju kołowym*

Moment $M_s$ działający w rozpatrywanym przekroju poprzecznym pręta nazywany jest momentem skręcającym. Moment ten powoduje wystąpienie w tym przekroju naprężeń stycznych określonych wzorem

$$\tau(\rho) = \frac{M_s}{I_0}\rho, \tag{9.1}$$

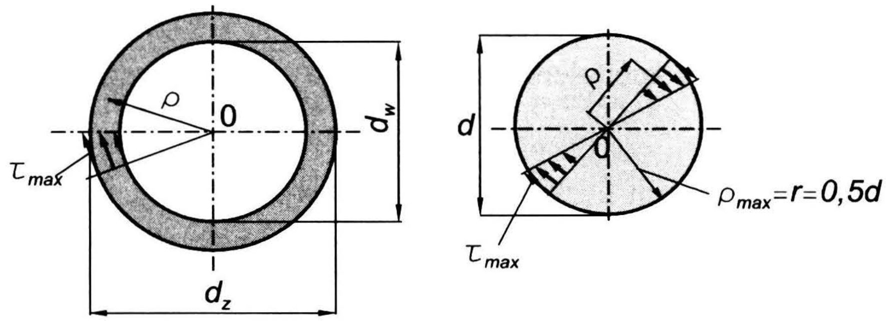
gdzie $\tau(\rho)$ jest prostopadłe do promienia $\rho$ (rys. 9.2),

$I_0$ – biegunowy moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta.

Dla przekroju kołowego pełnego $I_0 = \frac{\pi d^4}{32}$, natomiast dla wału wydrążonego o przekroju poprzecznym pierścieniowym

$$I_0 = \frac{\pi\left(d_z^4 - d_w^4\right)}{32}, \tag{9.2}$$

$\rho$ – odległość naprężenia $\tau(\rho)$ od środka przekroju poprzecznego $\left(0 \le \rho \le \frac{d}{2}\right.$ lub $\left.\frac{d_w}{2} \le \rho \le \frac{d_z}{2}\right)$.




**Rys. 9.2**

Rozkład naprężeń $\tau$ w przekroju poprzecznym pręta pokazano na rys. 9.2. Maksymalne, co do wartości bezwzględnej, naprężenia od skręcania występują w przekroju, w którym działa maksymalny moment skręcający. Naprężenia te występują w punktach leżących na obwodzie zewnętrznym przekroju, tzn. dla $\rho_{max} = \frac{1}{2} d_z$.
Naprężenia maksymalne oblicza się ze wzoru

$$|\tau_s|_{max} = \frac{|M_s|_{max}}{W_0}, \tag{9.3}$$

gdzie:

$W_0 = \frac{I_0}{\rho_{max}}$, $W_0 = \frac{\pi d^3}{16}$ – dla pręta o przekroju kołowym pełnym,

$W_0 = \frac{\pi\left(d_z^4 - d_w^4\right)}{16 d_z}$ – dla prętów wydrążonych.

Warunek bezpiecznego projektowania prętów skręcanych ze względu na wytrzymałość jest następujący

$$|\tau_s|_{max} = \frac{|M_s|_{max}}{W_0} \le k_s, \tag{9.4}$$

gdzie $k_s$ są naprężeniami dopuszczalnymi na skręcanie. Przekroje poprzeczne pręta w wyniku skręcania obracają się względem siebie o pewien kąt $\varphi$, nazywany kątem skręcenia. Wzór na kąt skręcenia pręta ma postać

$$\varphi = \int_l \frac{M_s}{G I_0} dx \tag{9.5}$$

dla $\frac{M_s}{GI_0} = const$

$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_0}, \tag{9.6}$$

gdzie $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ jest modułem odkształcenia postaciowego (zwanym również modułem Kirchhoffa).

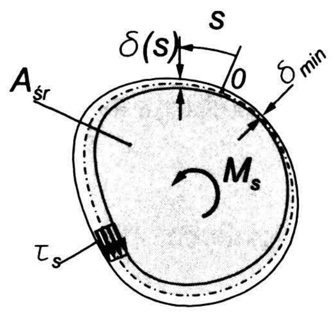
Po podstawieniu danych liczbowych $M_s[MNm]$, $G[MPa]$, $I_0[m^4]$ kąt $\varphi$ otrzymuje się w radianach. Kąt skręcenia dla 1 $m$ długości pręta nosi nazwę jednostkowego kąta skręcenia, oznaczany jest symbolem $\theta$ i wynosi

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{M_s}{GI_0} \; [\frac{rad}{m}]. \tag{9.7}$$

Wielkość $GI_0$ jest nazywana sztywnością pręta na skręcanie.

### *9.1.2. Podstawowe wzory dla cienkościennych prętów skręcanych o profilu zamkniętym (wzory Bredta)*

W cienkościennych prętach o profilu zamkniętym (rys. 9.3) skręcanych momentem $M_s$ przyjmuje się, że naprężenia skręcające są równomiernie rozłożone na grubości ścianki. Wartości tych naprężeń zależą w stosunku odwrotnie proporcjonalnym do grubości $\delta$ ścianki.




**Rys. 9.3**

W cienkościennych prętach o profilu zamkniętym naprężenia $\tau_s$ wywołane momentem skręcającym $M_s$ oblicza się ze wzoru

$$\tau_s = \frac{M_s}{2A_{śr} \cdot \delta}, \tag{9.8}$$

gdzie $A_{śr}$ jest polem powierzchni ograniczonej na przekroju poprzecznym pręta linią środkową ścianki (patrz pole zacienione na rys. 9.3). Kierunek naprężeń $\tau_s$ jest zawsze styczny do linii środkowej ścianki. Jeżeli na całej długości pręta przekrój poprzeczny pręta jest jednakowy, to maksymalne co wartości bezwzględnej naprężenia od skręcania występują w przekroju poprzecznym pręta, w którym $|M_s| = |M_s|_{max}$ – w miejscu gdzie ścianka pręta jest najcieńsza ( $\delta = \delta_{min}$ ). Naprężenia te oblicza się z pierwszego wzoru Bredta

$$|\tau|_{max} = \frac{|M_s|_{max}}{2A_{śr} \cdot \delta_{min}}. \tag{9.9}$$

Przy bezpiecznym projektowaniu skręcanych prętów cienkościennych o profilu zamkniętym na skręcanie musi być spełniona nierówność

$$\frac{|M_s|_{max}}{2A_{śr}\delta_{min}} \le k_s. \tag{9.10}$$

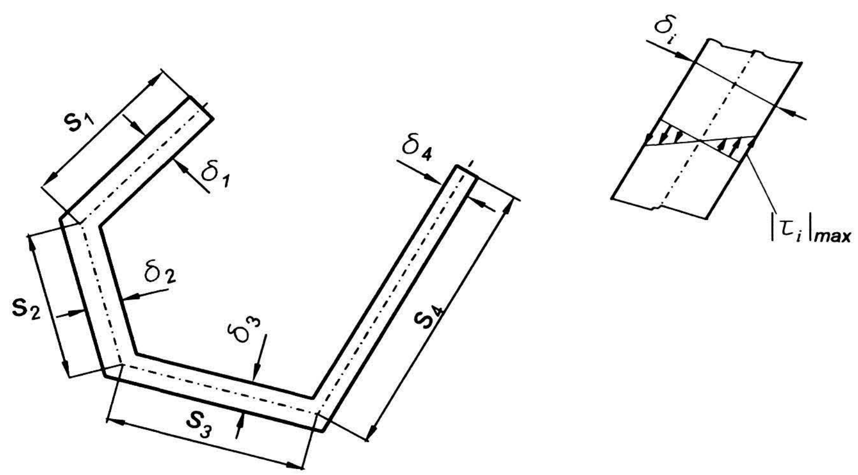
Jednostkowy kąt skręcenia $\theta$ omawianych prętów oblicza się z drugiego wzoru Bredta

$$\theta = \frac{M_s}{4GA_{śr}^2} \oint \frac{ds}{\delta(s)}, \tag{9.11}$$

gdzie współrzędna $s$ mierzona jest wzdłuż linii środkowej przekroju ścianki pręta (rys. 9.3), $\oint$ – oznacza całkę po obwodzie zamkniętym.

### *9.1.3. Podstawowe wzory dla cienkościennych prętów skręcanych o profilu otwartym*

W cienkościennych prętach o profilu otwartym (rys. 9.4) skręcanych momentem $M_s$ naprężenia od skręcania są naprężeniami stycznymi i rozkładają się liniowo na grubości ścianek, przyjmując wartości zerowe w środku grubości (rys. 9.4).




**Rys. 9.4**

W prętach cienkościennych o przekroju otwartym przyjmuje się, ze w trakcie skręcania kąt obrotu $\theta$ całego przekroju pręta jest równy kątowi obrotu $\theta_i$ przekroju poprzecznego $i$-tej ścianki, tzn.

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_i = \ldots = \theta_n, \tag{9.12}$$

gdzie $n$ – liczba ścianek.

Po oznaczeniu sztywności pręta na skręcanie przez $C$, a sztywności na skręcanie poszczególnych ścianek przez $C_i$ mamy:

$$\theta = \frac{M_{si}}{C_i} = \frac{M_s}{C}, \tag{9.13}$$

z czego wynika, że momenty skręcające przejmowane przez poszczególne ścianki wynoszą

$$M_{si} = \frac{C_i}{C} M_s. \tag{9.14}$$

Dla przekrojów poprzecznych, dla których $\delta_i \le \frac{s_i}{10}$, przyjmuje się, że

$$C_i \approx \frac{1}{3} G s_i \delta_i^3, \tag{9.15}$$

natomiast

$$C = \sum_{i=1}^{n} C_i, \tag{9.16}$$

$$M_s = \sum_{i=1}^{n} M_{si}. \tag{9.17}$$

Naprężenia $\tau_i$ działające we „włóknach” zewnętrznych poszczególnych ścianek oblicza się ze wzoru

$$\tau_i = \frac{3M_{si}}{s_i \delta_i^2}. \tag{9.18}$$

Pręt bezpiecznie pracuje na skręcanie ze względu na wytrzymałość materiału, gdy

$$|\tau_i|_{max} \le k_s. \tag{9.19}$$

Jednostkowy kąt skręcenia pręta $\theta$ oblicza się ze wzoru

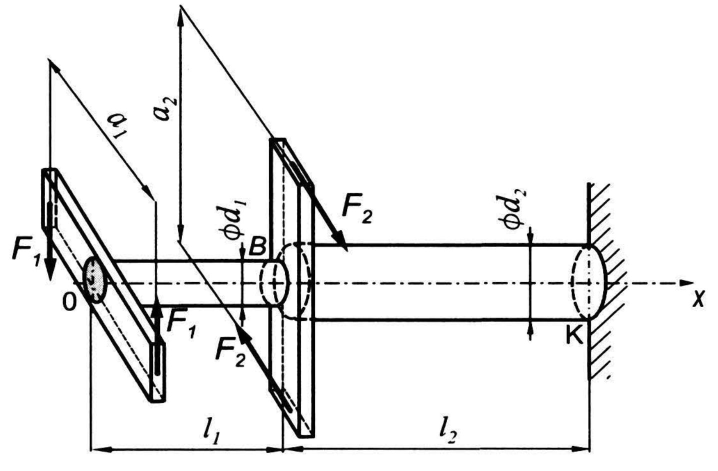
$$\theta = \frac{M_s}{C} = \frac{M_{si}}{C_i} \left[\frac{rad}{m}\right]. \tag{9.20}$$

W przypadku długich prętów często żąda się, aby $\theta \le \theta_{dop}$. Warunek ten nosi nazwę warunku ograniczonej sztywności.

## 9.2. Pręty o przekroju kołowym

### *9.2.1. Przykłady obliczeń*

**Zadanie 9.1.** Wspornikowy pręt o przekroju poprzecznym kołowym utwierdzony na prawym końcu, jest obciążony dwiema parami sił działającymi w płaszczyznach prostopadłych do osi pręta w sposób widoczny na rys. 9.5.

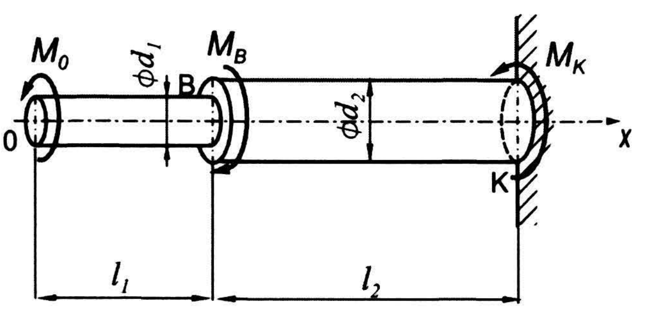



**Rys. 9.5**

Dane dotyczące wymiarów konstrukcji, wielkości obciążających ją sił oraz własności materiałowych pręta są następujące: $l_1 = 1{,}2\ m$, $l_2 = 1{,}8\ m$, $a_1 = 0{,}8\ m$, $a_2 = 1{,}6\ m$, $F_1 = 200\ N$, $F_2 = 300\ N$, $E = 2 \cdot 10^5 MPa$, $\nu = 0{,}3$, $k_s = 90\ MPa$.

Wykonać wykres momentów skręcających $M_S$, obliczyć średnice $d_1$ i $d_2$ oraz kąt skręcenia $\varphi$ całego pręta.

R o z w i ą z a n i e. Lewy koniec pręta jest obciążony momentem pary sił $F_1$ o wartości $M_0 = F_1 \cdot a_1$. W przekroju $B$ $(x = l_1)$ pręta przyłożona jest para sił o momencie równym $M_B = F_2 a_2$. Schematycznie obciążenie pręta momentami $M_0$ i $M_B$ pokazano na rys. 9.6, $M_K$ – reakcyjny moment podporowy.




**Rys. 9.6**

Z równania równowagi momentów sił względem osi wału otrzymano

$M_0 - M_B + M_K = 0,$

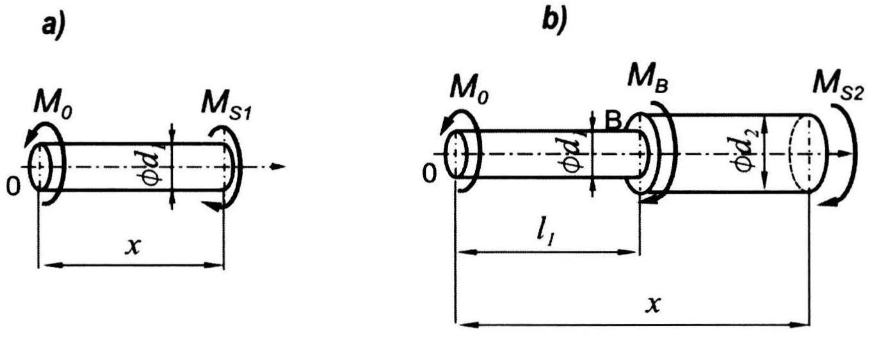
skąd

$M_K = M_B - M_0.$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$M_0 = F_1 \cdot a_1 = 200\ N \cdot 0{,}8\ m = 160\ Nm,$
$M_B = F_2 \cdot a_2 = 300\ N \cdot 1{,}6\ m = 480\ Nm,$
$M_K = M_B - M_0 = 480\ Nm - 160\ Nm = 320\ Nm.$

Moment skręcający $M_{S1}$ działający w pręcie w przedziale $0 \le x \le l_1$ oraz moment skręcający $M_{S2}$ działający w przedziale $l_1 \le x \le l_1 + l_2$ oblicza się z równań równowagi sił dla myślowo odciętych części pręta (rys. 9.7).

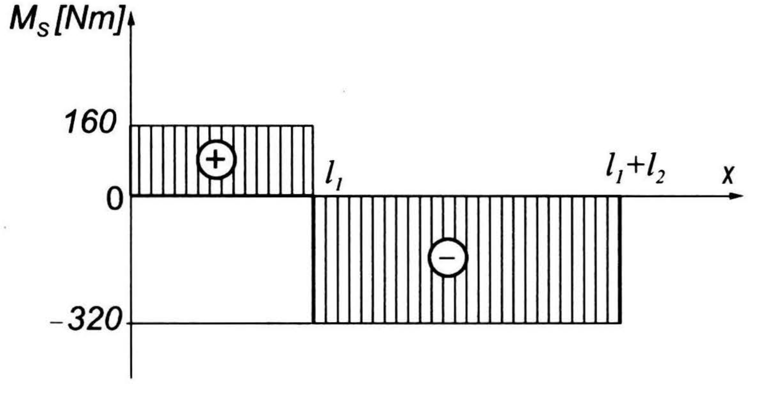



**Rys. 9.7**

Z rysunku 9.7 wynika, że:

$M_{S1} = M_0 = 160\ Nm,$
$M_{S2} = M_0 - M_B = -\ 320\ Nm.$

Wykres momentów skręcających przedstawia rys. 9.8.




**Rys. 9.8**

Maksymalne naprężenia styczne w I przedziale pręta wywołane momentem skręcającym $M_{s1}$ oblicza się ze wzoru

$$\tau_{1\max} = \frac{M_{S1}}{I_{01}}\rho_{1\max} = \frac{M_{S1}}{W_{01}},$$

gdzie $I_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32}$ jest biegunowym momentem bezwładności przekroju poprzecznego pręta o średnicy $d_1$,

$\rho_{1\max} = \frac{1}{2}d_1$ jest promieniem przekroju,

$W_{01} = \frac{I_{01}}{\rho_{1\max}} = \frac{\pi d_1^3}{16}$ jest wskaźnikiem wytrzymałości przekroju poprzecznego pręta na skręcanie.

Przy projektowaniu prętów skręcanych maksymalne naprężenia muszą być co najwyżej równe naprężeniom dopuszczalnym na skręcanie $k_s$. Średnicę $d_1$ pręta w przedziale $0 \le x \le l_1$ projektuje się z warunku

$$\tau_{1\max} = \frac{M_{S1}}{W_{01}} = \frac{16M_{S1}}{\pi d_1^3} \le k_s,$$

z którego wynika, że

$$d_1 \ge \sqrt[3]{\frac{16M_{S1}}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 160\ Nm}{\pi \cdot 90 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}} = 2{,}09 \cdot 10^{-2} m = 20{,}9\ mm.$$

Można przyjąć, że $d_1 = 21\ mm$.
W podobny sposób oblicza się średnicę $d_2$ pręta (w przedziale $l_1 \le x \le l_1 + l_2$). Jednak ze względu na ujemne wartości $M_{S2}$ i $\tau_{2\max}$ bierze się ich wartości bezwzględne

$$|\tau_2|_{\max} = \frac{|M_{S2}|}{W_{02}} = \frac{16\,|M_{S2}|}{\pi d_2^3} \le k_s,$$

$$d_2 \ge \sqrt[3]{\frac{16\,|M_{S2}|}{\pi k_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 320\ Nm}{\pi \cdot 90 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}} = 2{,}63 \cdot 10^{-2} m.$$

Średnicę $d_2$ można przyjąć równą $d_2 = 27\ mm$. Kąt skręcenia całego pręta jest równy sumie kątów skręcenia pręta w przedziałach o długościach $l_1$ i $l_2$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{M_{S1}l_1}{GI_{01}} + \frac{Ms_2 l_2}{GI_{02}},$$

gdzie $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ jest modułem sprężystości postaciowej (moduł Kirchhoffa). Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$G = \frac{2 \cdot 10^5 MPa}{2(1+0{,}3)} \cong 7{,}69 \cdot 10^4 MPa = 7{,}69 \cdot 10^{10} Pa,$$

$$I_{01} = \frac{\pi d_1^4}{32} = \frac{\pi(2{,}1 \cdot 10^{-2} m)^4}{32} = 1{,}91 \cdot 10^{-8} m^4,$$

$$I_{02} = \frac{\pi d_2^4}{32} = \frac{\pi(2{,}7 \cdot 10^{-2} m)^4}{32} = 5{,}22 \cdot 10^{-8} m^4,$$

$$\varphi = \frac{160\, Nm \cdot 1{,}2\, m}{7{,}69 \cdot 10^{10} \dfrac{N}{m^2} \cdot 1{,}91 \cdot 10^{-8} m^4} + \frac{(-320\, Nm) \cdot 1{,}8\, m}{7{,}69 \cdot 10^{10} \dfrac{N}{m^2} \cdot 5{,}22 \cdot 10^{-8} m^4} \cong 0{,}131\, rad - 0{,}143\, rad =$$

$$= -\ 0{,}012\, rad = -\ 0°41'.$$

**Zadanie 9.2.** Maszyna napędzana jest przez silnik elektryczny. Na wał napędowy maszyny, przy $n = 1910\ obr/\min$, przekazywana jest moc $P$ = 54,4 *KM*. Zaprojektować bezpieczne średnice wału drążonego o stosunku średnicy wewnętrznej do zewnętrznej $\dfrac{d_w}{d_z} \cong \dfrac{3}{4}$. Naprężenie dopuszczalne materiału wału na skręcanie $k_s = 60\ MPa$.

R o z w i ą z a n i e. Moment skręcający $M_S$ [*Nm*], jakim obciążony jest wał wykonujący *n* [obr / min] i przenoszący moc *P*[*kW*], jest określony wzorem

$$M_S[Nm] = 9550 \frac{P[kW]}{n\,[obr/\min]},$$

Wiadomo, że

$$1\, KM \cong 0{,}735\, kW,$$

zatem moc, jaką przenosi wał, wyrażona w kW wynosi

$$P = 54{,}4\ KM = 54{,}4 \cdot 0{,}735\ kW = 40\ kW,$$

czyli w omawianym przypadku moment skręcający wał

$$M_S = 9550 \frac{40}{1910}\, Nm = 200\, Nm.$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie przekroju poprzecznego wału drążonego

$$W_0 = \frac{I_0}{\frac{1}{2} d_z} = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{16 d_z} = \frac{\pi[d_z^4 - (\frac{3}{4} d_z)^4]}{16 d_z} = 0{,}134 d_z^3.$$

Maksymalne naprężenie wywołane skręcaniem musi być mniejsze i co najwyżej równe naprężeniu dopuszczalnemu $k_s$

$$\tau_{max} = \frac{M_S}{W_0} = \frac{M_S}{0{,}134 d_z^3} \le k_s,$$

$$d_z \ge \sqrt[3]{\frac{M_S}{0{,}134 k_s}} = \sqrt[3]{\frac{200\ Nm}{0{,}134 \cdot 60 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}} = 2{,}92 \cdot 10^{-2} m,$$

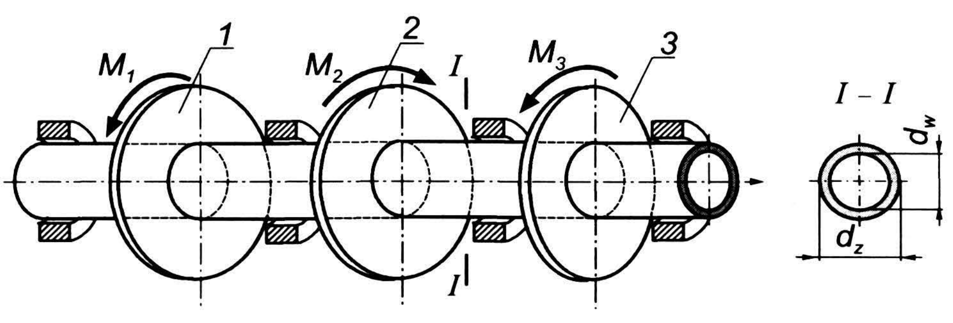
$$d_w = \frac{3}{4} d_z = \frac{3}{4} \cdot 2{,}92 \cdot 10^{-2} m = 2{,}19 \cdot 10^{-2} m.$$

Ostatecznie przyjęto $d_z$ = 30 *mm*, $d_w$ = 22,5 *mm*. Przy tak dobranych wartościach średnic spełniony jest warunek $\frac{d_w}{d_z} = \frac{3}{4}$, a jednocześnie przyjęta wielkość średnicy zewnętrznej $d_z$ = 30 *mm* jest nieco większa od obliczonej ($d_z$ = 30 *mm* > 29,2 *mm*).
Dla przyjętych średnic

$$W_0 = 3{,}624 \cdot 10^{-6} m^3,$$

$$\tau_{max} = 55{,}2\ MPa < k_s = 60\ MPa.$$

**Zadanie 9.3.** Na wale drążonym zamocowane są trzy koła (rys. 9.9), oznaczone numerami 1, 2 i 3. Kołem napędzającym jest koło nr 2, które przenosi moc $P_2$ = 132 *kW*. Koło nr 1 przejmuje $\frac{1}{3}$ tej mocy, tzn. $P_1 = \frac{1}{3} P_2 = 44\ kW$, a koło nr 3 pozostałą moc $P_3 = P_2 - P_1 = \frac{2}{3} P_2 = 88\ kW$. Obliczyć momenty skręcające działające na wał w miejscu kół przy obrotach wału $n = 1400\ obr/\min$. Następnie wykonać wykres momentów skręcających i obliczyć średnicę zewnętrzną $d_z$ i wewnętrzną $d_w$ wału przy stosunku średnic $\frac{d_w}{d_z} = \frac{2}{3}$. Naprężenia dopuszczalne materiału wału na skręcanie $k_s = 90\ MPa.$




**Rys. 9.9**

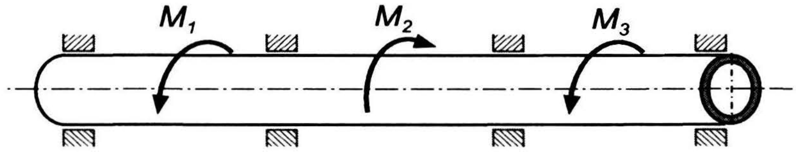
R o z w i ą z a n i e. Obliczenie momentów działających na koła

$$M_1[Nm] = 9550\frac{P_1}{n}\ [\frac{kW}{obr/\min}] = 9550\frac{44\,[kW]}{1400\,[obr/\min]} = 300\ Nm,$$

$$M_2 = 3M_1 = 900\ Nm,$$

$$M_3 = \frac{2}{3}M_2 = 600\ Nm.$$

W wale obciążonym momentami $M_1$, $M_2$ i $M_3$ (rys. 9.10) wartości momentów skręcających $M_{S1}$ działających na wał między kołami nr 1 i nr 2 oraz $M_{S2}$ działających między kołami nr 2 i nr 3 obliczono niżej

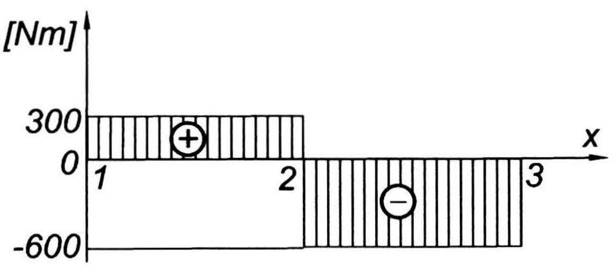



**Rys. 9.10**

$$M_{S1} = M_1 = 300\ Nm,$$

$$M_{S2} = M_1 - M_2 = 300 - 900 = -\ 600\ Nm.$$

Wykres momentów skręcających przedstawia rys. 9.11.




**Rys. 9.11**

$$|M_S|_{\max} = |M_{S2}| = 600\ Nm.$$

Maksymalne co do wartości bezwzględnej naprężenie od skręcania

$$|\tau_s|_{\max} = \frac{|M_S|_{\max}}{W_0} \le k_s$$

gdzie

$$W_0 = \frac{\pi[d_z^4 - (\frac{2}{3}dz)^4]}{16dz} = 0{,}1576d_z^3$$

$$\frac{|M_S|_{\max}}{0{,}1576d_z^3} \le k_s$$

$$d_z \geq \sqrt[3]{\frac{|M_S|_{max}}{0{,}1576 k_s}} = \sqrt[3]{\frac{600\ Nm}{0{,}1576 \cdot 90 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}}} = 3{,}484 \cdot 10^{-2}\, m.$$

Ostatecznie można przyjąć $d_z = 36\ mm$ i $d_w = 24\ mm$, co powoduje, że

$$|\tau_s|_{max} = 81{,}6\ MPa < k_s = 90\ MPa.$$

**Zadanie 9.4.** Przeanalizować, co zmieni się w zadaniu poprzednim, jeżeli przy tych samych danych kołem napędzającym będzie koło nr 3.
R o z w i ą z a n i e. Z treści zadania wynika, że:

$$P_3 = 132\ kW,$$

$$P_1 = \frac{1}{3} P_3 = 44\ kW,$$

$$P_2 = P_3 - P_1 = (132 - 44)\ kW = 88\ kW.$$

Momenty obrotowe działające na poszczególne koła

$$M_1 = 9550 \frac{P_1}{n}\ [Nm] = 9550 \frac{44}{1400}\ Nm = 300\ Nm,$$

$$M_2 = 2M_1 = 600\ Nm,$$

$$M_3 = 3M_1 = 900\ Nm.$$

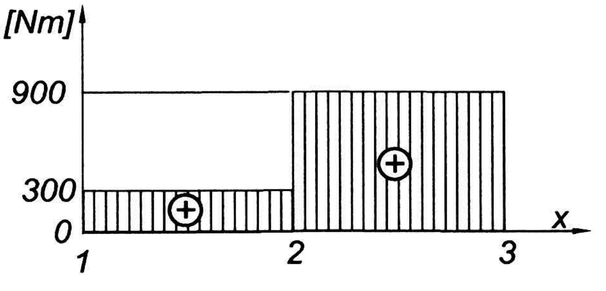
Momenty skręcające wał
między kołami nr 1 i nr 2

$$M_{S1} = M_1 = 300\ Nm$$

między kołami nr 2 i nr 3

$$M_{S2} = M_1 + M_2 = 300\ Nm + 600\ Nm = 900\ Nm$$

Wykres momentów skręcających (rys. 9.12).




**Rys. 9.12**

Maksymalny moment skręcający wał

$$M_{S\,max} = 900\ Nm.$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie przekroju poprzecznego wału drążonego (patrz zadanie poprzednie)

$$W_0 = 0{,}1576 d_z^3.$$

Warunek projektowania ze względu na wytrzymałość

$$\tau_{\max} = \frac{M_{S\max}}{W_0} = \frac{900\ Nm}{0{,}1576 d_z^3\ [m^3]} \le k_s = 90 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2},$$

daje

$$d_z \ge \sqrt[3]{\frac{900\, m^3}{0{,}1576 \cdot 90 \cdot 10^6}} = 3{,}99 \cdot 10^{-2} m,$$

$$d_w = \frac{2}{3} d_z = 2{,}66 \cdot 10^{-2} m.$$

Ostatecznie można przyjąć

$$d_z{}' = 4 \cdot 10^{-2} m = 40\ mm,$$

$$d_w{}' = 2{,}7 \cdot 10^{-2} m = 27\ mm,$$

co daje maksymalne naprężenia $\tau_{\max}$ większe o około 0.5% od naprężeń dopuszczalnych

$$W_0 \cong 9{,}958 \cdot 10^{-6} m^3,$$

$$\tau_{\max} = 90{,}38\ MPa \approx 90\ MPa = k_s.$$

Tak małe przekroczenie naprężeń dopuszczalnych jest dozwolone przez Normy.

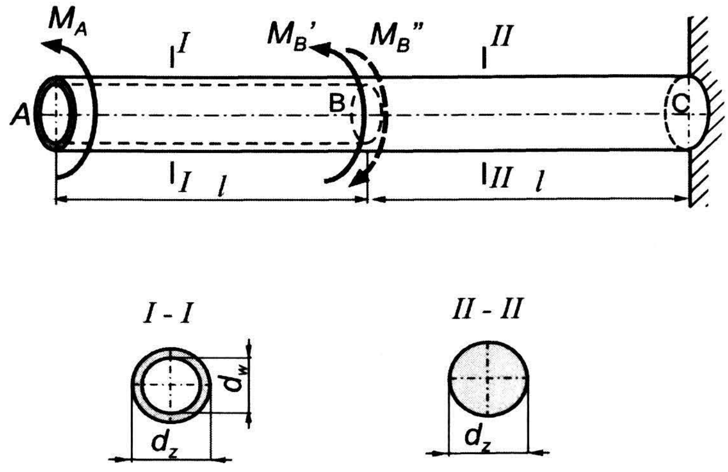
Gdy $d_z' = 40\ mm$, $d_w = 26{,}5\ mm$, $\tau_{\max} < 90\ MPa$

Stosunek ciężaru $G_2$ wału z tego zadania do ciężaru $G_1$ wału z zadania poprzedniego wynosi

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{(d_z')^2 - (d_w')^2}{d_z^2 - d_w{}^2} = \frac{(4{,}0)^2 - (2{,}7)^2}{(3{,}6)^2 - (2{,}4)^2} \cong 1{,}2,$$

czyli wał z niniejszego zadania jest o około 20% cięższy. Z obliczeń widać, że kolejność rozmieszczenia napędzanych kół na wale ma istotny wpływ na ciężar wału.

**Zadanie 9.5.** Wał o długość $2l$ i średnicy zewnętrznej $d_z$ jest na długości $l$, licząc od lewego końca, wałem drążonym o średnicy wewnętrznej $d_w$ (rys. 9.13). Prawy koniec wału jest utwierdzony. Wyznaczyć, przy jakim stosunku wartości momentów obciążających $M_B/M_A$ (rys. 9.13) maksymalne naprężenia skręcające w obu przedziałach wału będą, co do wartości bezwzględnej, równe. Dane: $l$, $d_z$, $d_w = \frac{2}{3} d_z$, $G$ – moduł odkształcenia postaciowego i $k_s$ – naprężenia dopuszczalne na skręcanie. Rozpatrzyć dwa przypadki, gdy $M_A$ i $M_B$ mają zgodne i przeciwne zwroty.




**Rys. 9.13**

R o z w i ą z a n i e. Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie przekroju wału drążonego

$$W_{01} = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{16 d_z} = \frac{\pi[d_z^4 - (\frac{2}{3}d_z)^4]}{16 d_z} = \frac{65}{81}\frac{\pi d_z^3}{16}$$

Wskaźnik wytrzymałości na skręcanie przekroju wału pełnego

$$W_{02} = \frac{\pi d_z^3}{16}.$$

Jeżeli momenty $M_A$ i $M_B$ mają zgodne zwroty, wtedy maksymalne naprężenia wynoszą:

$$\tau'_{S1} = \frac{M_A}{W_{01}} = \frac{81 \cdot 16}{65 \pi d_z^3} M_A \quad \text{– w części drążonej wału,}$$

$$\tau'_{S2} = \frac{M_A + M_B}{W_{02}} = \frac{16(M_A + M_B)}{\pi d_z^3} \quad \text{– w części wału pełnego.}$$

Z porównania naprężeń $\tau'_{S1} = \tau'_{S2}$ otrzymano

$$\frac{81}{65} M_A = M_A + M_B,$$

czyli

$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{16}{65} = 0{,}246.$$

Gdy momenty $M_A$ i $M_B$ mają przeciwne zwroty, wtedy największe co do wartości bezwzględnej naprężenia, odpowiednio w przedziałach pierwszym i drugim wynoszą

$$\tau''_{S1} = \frac{M_A}{W_{01}} = \frac{81 \cdot 16|M_A|}{65\pi d_z^3},$$

$$|\tau''_{S2}| = \frac{|M_A - M_B|}{W_{02}} = \frac{16|M_A - M_B|}{\pi d_z^3}.$$

Jeżeli wartości bezwzględne tych naprężeń są jednakowe, to

$$81|M_A| = 65|M_A - M_B|.$$

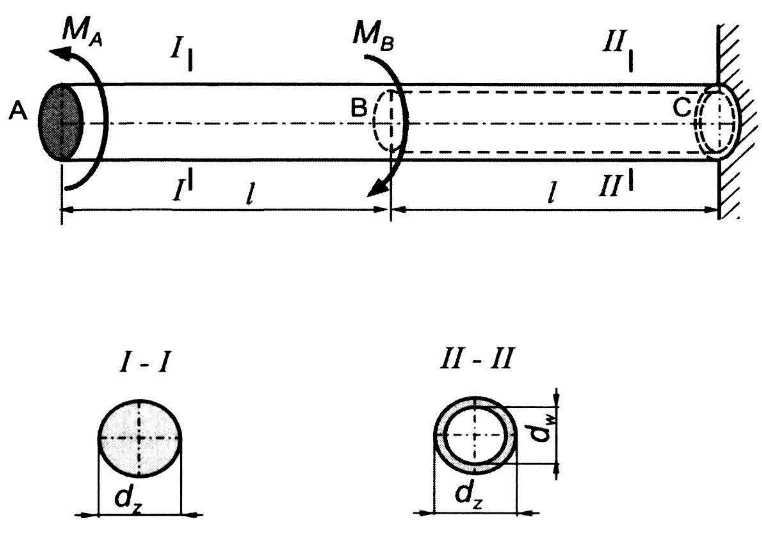
Aby można było spełnić warunek równości bezwzględnych wartości maksymalnych naprężeń, momenty skręcające $M_{S1} = M_A$ i $M_{S2} = M_A - M_B$ muszą być różnych znaków, z czego wynika, że powyższą zależność po opuszczeniu znaków wartości bezwzględnych trzeba zapisać następująco:

$$81M_A = -65(M_A - M_B),$$

co daje

$$\frac{M_B}{M_A} = \frac{146}{65} = 2{,}246.$$

**Zadanie 9.6.** Pręt o długości $2l$ i stałej średnicy zewnętrznej $d_z$ ma wydrążenie w prawej połowie, o średnicy $d_w$. Pręt jest utwierdzony prawym końcem i obciążony dwoma momentami $M_A$ i $M_B$ jak pokazano na rys. 9.14. Obliczyć, przy jakich wartościach momentów $M_A$ i $M_B$ we wszystkich przekrojach poprzecznych pręta zostaną osiągnięte jednocześnie naprężenia dopuszczalne na skręcanie $k_s$. Po przeprowadzeniu obliczeń narysować wykresy momentów skręcających i podać wartości kąta skręcenia całego pręta. Dane: $l = 1\ m$, $d_z = 50\ mm$, $d_w = 40\ mm$, $k_s = 60\ MPa$, $G = 8 \cdot 10^4\ MPa$.




**Rys. 9.14**

R o z w i ą z a n i e. Moment skręcający w przedziale $0 \le x \le l$ jest równy $M_{S1} = M_A$, a w przedziale drugim $l \le x \le 2l$

$$M_{S2} = M_A - M_B.$$

Bezwzględne wartości maksymalnych naprężeń skręcających odpowiednio w przedziale 1 i 2 wynoszą

$$|\tau_1|_{\max} = \frac{|M_A|}{W_{01}},$$

$$|\tau_2|_{\max} = \frac{|M_A - M_B|}{W_{02}},$$

gdzie:

$$W_{01} = \frac{\pi d_z^3}{16},$$

$$W_{02} = \frac{\pi(d_z^4 - d_w^4)}{16 d_z}.$$

Z treści zadania wynika, że $|\tau_1|_{\max} = |\tau_2|_{\max} = k_s$

$$\frac{|M_A|}{W_{01}} = \frac{|M_A - M_B|}{W_{02}} = k_s.$$

Rozpatrzmy dalej dwa przypadki.
W przypadku pierwszym załóżmy, że momenty skręcające $M_{S1}$ i $M_{S2}$ są jednakowego znaku. Wtedy z wyżej zapisanej zależności wynika, że

$$\frac{M_A}{W_{01}} = k_s \Rightarrow M_A = W_{01} k_s,$$

$$\frac{M_A - M_B}{W_{02}} = k_s \Rightarrow M_B = M_A - W_{02} k_s = (W_{01} - W_{02}) k_s.$$

Po podstawieniu danych liczbowych mamy:

$$W_{01} = \frac{\pi d_z^3}{16} = 2{,}454 \cdot 10^{-5} m^3,$$

$$W_{02} = 1{,}449 \cdot 10^{-5} m^3,$$

$$M_A = W_{01} \cdot k_s = 2{,}454 \cdot 10^{-5} m^3 \cdot 60 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2} = 1{,}472\ kNm,$$

$$M_B = (W_{01} - W_{02}) k_s = (2{,}454 \cdot 10^{-5} m^3 - 1{,}449 \cdot 10^{-5} m^3) \cdot 60 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2} = 0{,}603\ kNm,$$

$$M_{S1} = M_A = 1{,}472\ kNm,$$

$$M_{S2} = M_A - M_B = 0{,}869\ kNm,$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{S1} \cdot l}{G I_{01}} + \frac{M_{S2} l}{G I_{02}} = \frac{2l}{G d_z}\left(\frac{M_{S1}}{W_{01}} + \frac{M_{S2}}{W_{02}}\right) = \frac{4\, l k_s}{G d_z} = \frac{4 \cdot 1\, m \cdot 60\ MPa}{8 \cdot 10^4 MPa \cdot 50 \cdot 10^{-3} m} = 0{,}06\ rad.$$

W drugim przypadku zakładamy, że momenty skręcające $M_{S1}$ i $M_{S2}$ są różnych znaków (np. $M_{S1} > 0$, $M_{S2} < 0$), wtedy

$$\frac{M_A}{W_{01}} = k_s \Rightarrow M_A = W_{01}k_s,$$

$$-\frac{M_A - M_B}{W_{02}} = k_s \Rightarrow M_B = M_A + W_{02}k_s = (W_{01} + W_{02})k_s.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$M_A = 1{,}472\ kNm,$$

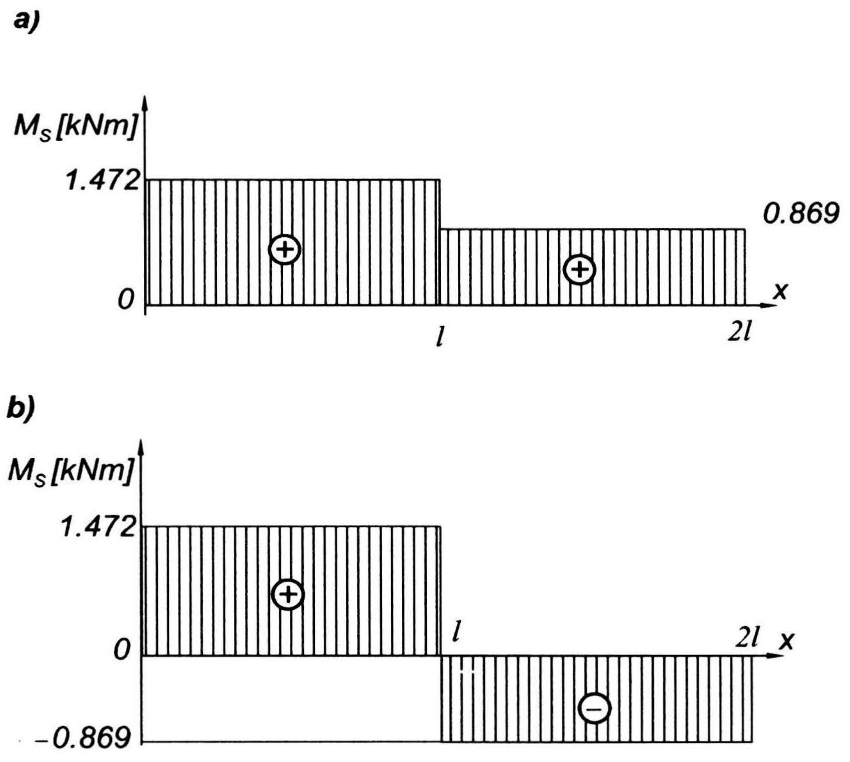
$$M_B = (2{,}454 \cdot 10^{-5} m^3 + 1{,}449 \cdot 10^{-5} m^3) 60 \cdot 10^3 \frac{kN}{m^2} = 2{,}342\ kNm,$$

$$M_{S1} = M_A = 1{,}472\ kNm,$$

$$M_{S2} = M_A - M_B = 1{,}472\ kNm - 2{,}342\ kNm = -\ 0{,}869\ kNm,$$

$$\varphi_2 = \frac{M_{S1}l}{GI_{01}} + \frac{M_{S2}l}{GI_{02}} = \frac{2l}{d_z G}(k_s - k_s) = 0.$$

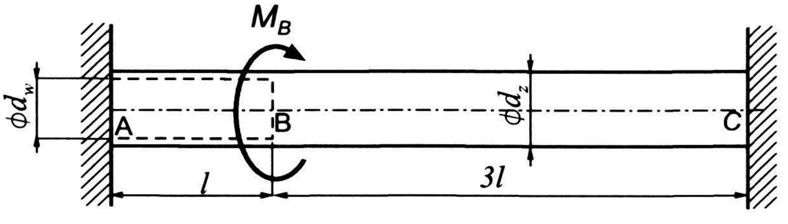
Wykresy momentów skręcających pokazano na rys. 9.15.




**Rys. 9.15**

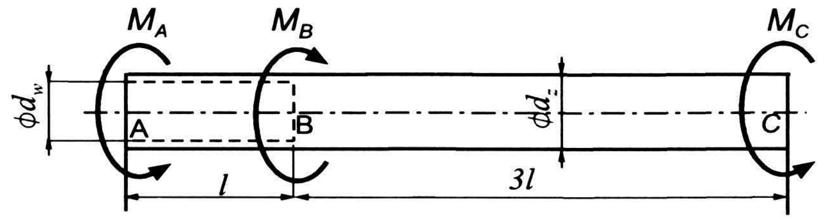
**Zadanie 9.7.** Pręt o długości $4l$ i stałej średnicy zewnętrznej $d_z$ jest wydrążony na długości $l$, licząc od lewego końca pręta. Średnica wydrążenia $d_w = 0{,}8\ d_z$. Końce pręta są utwierdzone w nieodkształcalnych ścianach (rys. 9.16). W odległości $l$ od lewego końca pręt obciążono momentem $M_0$ pary sił działającej w płaszczyźnie prostopadłej do

osi pręta. Znaleźć dopuszczalną wartość momentu $M_B$ oraz kąt obrotu przekroju poprzecznego pręta w połowie jego długości.
Dane: $l = 1\ m$, $d_z = 50\ mm$, $d_w = 40\ mm$, $G = 8 \cdot 10^4\ MPa$, $k_s = 60\ MPa$.




**Rys. 9.16**

R o z w i ą z a n i e.




**Rys. 9.17**

Na rys. 9.17 pokazano pręt po uwolnieniu go od więzów. Suma momentów sił względem osi $x$ pręta daje równanie

$$M_A - M_B + M_C = 0.$$

W równaniu tym niewiadomymi są momenty utwierdzenia $M_A$ i $M_C$ – jest to zadanie jednokrotnie statycznie niewyznaczalne.
Drugie równanie wynika z zależności między odkształceniami.
W omawianym przypadku końce pręta są utwierdzone w nieodkształcalnych ścianach, a więc nie mogą doznać obrotu, co oznacza, że kąt skręcenia całego pręta jest równy zeru.

$$\varphi = \varphi_{AB} + \varphi_{BC} = \frac{M_{S1} l}{G I_{01}} + \frac{M_{S2} \cdot 3l}{G I_{02}} = 0,$$

tu $M_{S1} = M_A$ w przedziale, dla którego $0 \le x \le l$,

$M_{S2} = M_A - M_B$ w przedziale, gdy $l \le x \le 4l$.

$$I_{01} = \frac{\pi (d_z^4 - d_w^4)}{32},$$

$$I_{02} = \frac{\pi d_z^4}{32}.$$

Wiedząc, że w omawianym przypadku $d_w = 0{,}8\ d_z$

$$I_{01} = \frac{\pi d_z^4}{32}[1-(\frac{d_w}{d_z})^4] = \frac{\pi d_z^4}{32}[1-(\frac{40}{50})^4] = 0{,}5904 I_{02}.$$

Z równania wynikającego ze związku między kątami skręceń (z warunków dotyczących odkształceń)

$$\frac{M_A \cdot l}{G \cdot 0{,}5904 I_{02}} + \frac{(M_A - M_B) \cdot 3l}{G \cdot I_{02}} = 0$$

otrzymuje się

$$M_A = 0{,}639 M_B,$$

a z sumy momentów sił zewnętrznych względem osi pręta (z równania równowagi)

$$M_C = M_B - M_A = 0{,}361 M_B.$$

Maksymalne bezwzględne wartości naprężeń w rozpatrywanych przedziałach wynoszą

$$|\tau_1|_{\max} = \frac{|M_{S1}|}{W_{01}} = \frac{|M_A|}{W_{01}} = \frac{0{,}639 M_B}{W_{01}},$$

$$|\tau_2|_{\max} = \frac{|M_{S2}|}{W_{02}} = \frac{|M_A - M_B|}{W_{02}} = \frac{0{,}361 M_B}{W_{02}},$$

gdzie:

$$W_{01} = \frac{2}{d_z} I_{01} = \frac{2}{d_z} \cdot 0{,}5904 I_{02} = 0{,}5904 \frac{\pi d_z^3}{16},$$

$$W_{02} = \frac{\pi d_z^3}{16}.$$

Po podstawieniu do wzorów na $\tau$ wskaźników wytrzymałości otrzymano

$$|\tau_1|_{\max} = \frac{16 \cdot 0{,}639 M_B}{0{,}5904\, \pi d_z^3} = 5{,}512 \frac{M_B}{d_z^3},$$

$$|\tau_2|_{\max} = \frac{16 \cdot 0{,}361 M_B}{\pi d_z^3} = 1{,}838 \frac{M_B}{d_z^3}.$$

Widać, że większe naprężenia skręcające występują w pierwszym przedziale, gdzie pręt jest wydrążony. Z warunku bezpiecznego projektowania

$$5{,}512 \frac{M_{Bdop}}{d_z^3} \le k_s,$$

więc

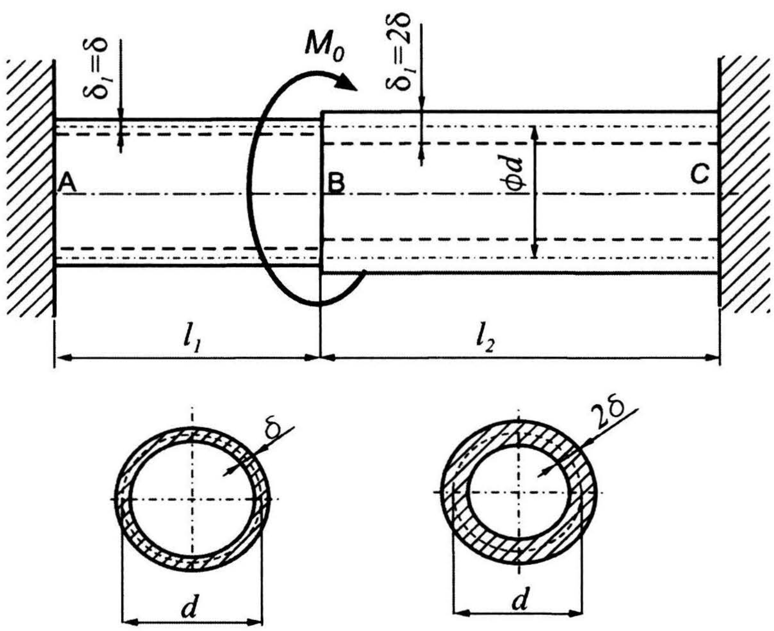
$$M_{Bdop} \le \frac{k_s \cdot d_z^3}{5{,}512} = \frac{60 \cdot 10^6 \dfrac{N}{m^2} \cdot (50 \cdot 10^{-3} m)^3}{5{,}512} = 1360\ Nm.$$

Kąt obrotu przekroju poprzecznego pręta w połowie jego długości wynosi

$$\varphi = \frac{M_C \cdot 2l}{GI_{02}} = \frac{0{,}722 M_B l}{GI_{02}} = \frac{32 \cdot 0{,}722 \cdot 1360\ Nm \cdot 1\ m}{\pi 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \dfrac{N}{m^2} (50 \cdot 10^{-3} m)^4} = 0{,}02\ rad$$

**Zadanie 9.8.** Cienkościenna rura kołowa o średnicy linii środkowej ścianek $d = 2r$ i grubości ścianki: $\delta$ – na odcinku $l_1$ i $2\delta$ na odcinku o długości $l_2$, jest utwierdzona obustronnie w nieodkształcalnych ścianach (rys. 9.18). W miejscu zmiany grubości ścianki rura obciążona jest momentem $M_0$ pochodzącym od pary sił działającej w płaszczyźnie prostopadłej do osi rury. Wyznaczyć długość $l_1$, przy której maksymalne naprężenia na całej długości rury będą równe naprężeniom dopuszczalnym na ścinanie $k_t$. Przyjmując, że $2\delta << d$, zadanie rozwiązać dwiema metodami:

- wzorami Bredta,
- wzorami dla wałów drążonych.




**Rys. 9.18**

R o z w i ą z a n i e. Moment skręcający w przedziale $0 \le x \le l_1$ jest równy $M_{S1} = M_A$, natomiast w przedziale $l_1 \le x \le l_1 + l_2$ jest równy $M_{S2} = -M_C$. Po uwolnieniu rury od więzów z równania równowagi mamy

$$M_A + M_C - M_0 = 0 \Rightarrow M_C = M_0 - M_A.$$

Rozwiązanie oparte na wzorach Bredta

Maksymalne bezwzględne wartości naprężeń skręcających, wynikające ze wzoru Bredta wynoszą

$$\left|\tau_1\right|_{\max}=\frac{\left|M_{S1}\right|}{2A_{śr}\delta}=\frac{M_A}{2A_{śr}\delta}=k_t,$$

$$\left|\tau_2\right|_{\max}=\frac{\left|M_{S2}\right|}{2A_{śr}2\delta}=\frac{M_C}{2A_{śr}2\delta}=k_t,$$

gdzie $A_{śr}$ jest polem powierzchni ograniczonym przez linię środkową przekroju poprzecznego ścianki rury $A_{śr}\cong\pi\frac{d^2}{4}=\pi r^2$, czyli polem koła o średnicy $d$ (rys. 9.18).

Z zależności tych oraz z treści zadania $\left|\tau_1\right|_{\max}=\left|-\tau_2\right|_{\max}$ wynika

$$\frac{M_A}{2A_{śr}\delta}=\frac{M_C}{2A_{śr}2\delta},$$

czyli $M_C=2M_A$.

Wykorzystując powyższy związek w równaniu równowagi, otrzymano:

$$M_A=\frac{1}{3}M_0,$$

$$M_C=\frac{2}{3}M_0.$$

Z drugiego wzoru Bredta kąt skręcenia φ cienkościennego pręta o przekroju kołowym o $d_{sr}=d=2r$ i grubości δ ma postać

$$\varphi=\theta\cdot l=\frac{M_S\cdot l}{4G(A_{sr})^2}\oint\frac{ds}{\delta}=\frac{M_S\cdot l}{2G\pi r^3\delta}$$

Przyrównajmy do siebie kąty obrotów obu stykających się ze sobą części rury

$$\left|\varphi_{AB}\right|=\left|\varphi_{BC}\right|$$

$$\frac{M_A\cdot l_1}{2G\pi r^3\delta}=\left|-\frac{M_C l_2}{2G\pi r^3 2\delta}\right|,$$

czyli

$$M_C\cdot l_2=2M_A\cdot l_1.$$

Po podstawieniu $M_C=\frac{2}{3}M_0$ i $M_A=\frac{1}{3}M_0$ otrzymano $l_1=l_2=\frac{1}{2}l.$

Rozwiązanie metodą opartą na wzorach dla wałów drążonych

$$\left|\tau_1\right|_{\max}=\frac{\left|M_{S1}\right|}{W_{01}}=\frac{M_A}{W_{01}}=k_t,$$

$$\left|\tau_2\right|_{\max}=\frac{\left|M_{S2}\right|}{W_{02}}=\frac{M_C}{W_{02}}=k_t,$$

gdzie:

$$W_{01} = \frac{I_{01}}{r} \cong \frac{(2\pi r\delta)\cdot r^2}{r} = 2\pi r^2\delta,$$

$$W_{02} = \frac{I_{02}}{r} = \frac{(2\pi r\cdot 2\delta)\cdot r^2}{r} = 4\pi r^2\delta.$$

Wymaga się, aby bezwzględne wartości naprężeń w obu przedziałach rury były jednakowe, więc:

$$\frac{M_A}{W_{01}} = \frac{M_C}{W_{02}},$$

$$\frac{M_A}{2\pi r^2\delta} = \frac{M_C}{4\pi^2\delta},$$

stąd wynika, że

$$M_C = 2M_A.$$

Po podstawieniu do równania równowagi $M_C = 2M_A$ mamy:

$$M_A = \frac{1}{3}M_0,$$

$$M_C = \frac{2}{3}M_0.$$

Z porównania kątów obrotu przekroju poprzecznego obu stykających się części wału rury w miejscu zmiany grubości ścianki (lub z warunku, że kąt skręcenia całej rury jest równy zeru) mamy:

$$\frac{M_A\cdot l_1}{GI_{01}} = \frac{M_C\cdot l_2}{GI_{02}},$$

$$\frac{\frac{1}{3}M_0 l_1}{G2\pi r^3\delta} = \frac{\frac{2}{3}M_0\cdot l_2}{G4\pi r^3\delta} \Rightarrow l_1 = l_2 = \frac{l}{2}.$$

Z obydwu metod otrzymano takie same wyniki:

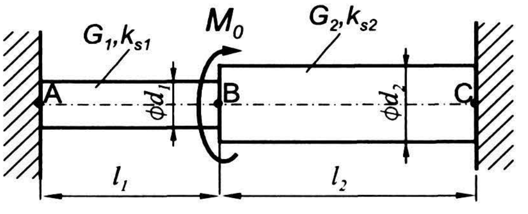
$$l_1 = l_2 = \frac{l}{2},$$

$$\tau_{S\max} = \frac{M_A}{2\pi r^2\delta} = \frac{\frac{M_{0\max}}{3}}{2\pi r^2\delta} = k_s \Rightarrow M_{0\max} = 6\pi r^2\delta k_s.$$

W przypadku rur cienkościennych skręcanych rozkład naprężeń stycznych $\tau$ jest na grubości ścianki w przybliżeniu równomierny, więc naprężenie dopuszczalne materiału na skręcanie przyjmuje się równe naprężeniu dopuszczalnemu na ścinanie $k_s = k_t$.

### *9.2.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania*

**Zadanie 9.9.** Pręt o skokowo zmiennej średnicy, wykonany z dwóch materiałów, jest utwierdzony na obu końcach w nieodkształcalnych ścianach (rys. 9.19).



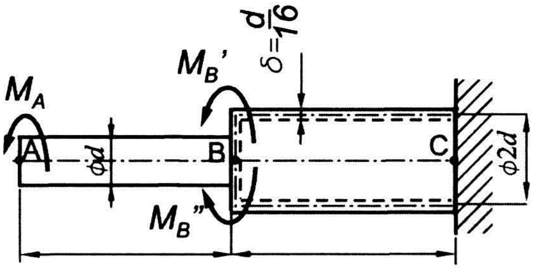

**Rys. 9.19**

Część pręta o średnicy $d_1$ i długości $l_1$ została wykonana z materiału o module sprężystości postaciowej $G_1$ i o naprężeniach dopuszczalnych na skręcanie $k_{s1}$. Druga część pręta o średnicy $d_2$ i długości $l_2$ jest z materiału o module $G_2$ i naprężeniach dopuszczalnych $k_{s2}$. Pręt w miejscu zmiany średnicy obciążono parą sił (działającą w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta) o momencie $M_0$. Wyznaczyć, dla jakiego stosunku $l_2/l_1$ bezwzględne wartości naprężeń maksymalnych w obu przedziałach $(0 \le x \le l_1$ i $l_1 \le x \le l_1 + l_2)$ równocześnie są równe odpowiednim naprężeniom dopuszczalnym $k_{s1}$ i $k_{s2}$.

ODPOWIEDŹ:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{G_2 k_{s1} d_2}{G_1 k_{s2} d_1}.$$

**Zadanie 9.10.** Element wytoczony z jednego kawałka stali przyspawano do nieodkształcalnej ściany i obciążono momentami $M_A$ i $M_B$ (rys. 9.20).




**Rys. 9.20**

Określić, przy jakim stosunku $M_A/M_B$ maksymalne naprężenia skręcające w obu częściach (części $AB$ oraz $BC$) na całej długości elementu będą co do wartości bezwzględnej równe naprężeniom dopuszczalnym.

Dane: $d$, $\delta = \frac{d}{16}$, $l$, $k_s = k_t$.

Rozpatrzyć dwa przypadki:

- momenty $M_A$ i $M_B$ mają zgodne zwroty,
- momenty $M_A$ i $M_B$ mają zwroty przeciwne.

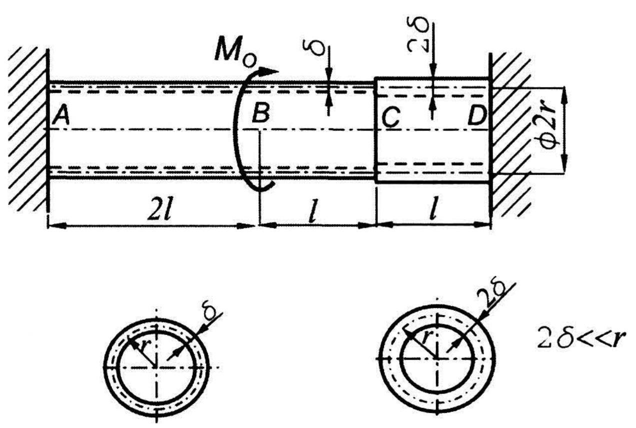
ODPOWIEDŹ:

dla momentów $M_A$ i $M_B^{'}$ o zgodnych zwrotach $\dfrac{M_B^{'}}{M_A}=1,\ M_B^{'}=M_A=\dfrac{1}{16}\pi d^3 k_s$,

dla momentów $M_A$ i $M_B^{''}$ o przeciwnych zwrotach $\dfrac{M_B^{''}}{M_A}=3,\ M_A=\dfrac{1}{16}\pi d^3 k_s$.

Przy obliczeniach dotyczących cienkościennej rury można wykorzystać wzory Bredta.

**Zadanie 9.11.** Cienkościenna rura o długości $4l$, na odcinku $3l$ od lewego końca ma grubość ścianki $\delta$, a na pozostałej długości $l$ – grubość ścianki wynosi $2\delta$. Średni promień rury (promień środkowej warstwy ścianek) wynosi $r$. Rura obciążona jest w środku długości parą sił działającą w płaszczyźnie prostopadłej do jej osi. Moment tej pary jest równy $M_0$. Rura jest przyspawana na obu końcach do dwóch pionowych nieodkształcalnych ścian (rys. 9.21). Wyznaczyć momenty utwierdzenia $M_A$ i $M_D$, narysować wykres momentów skręcających oraz obliczyć maksymalne co do wartości bezwzględnej naprężenia.
Dane: $M_0$, $l$, $r$, $\delta$, $G$.

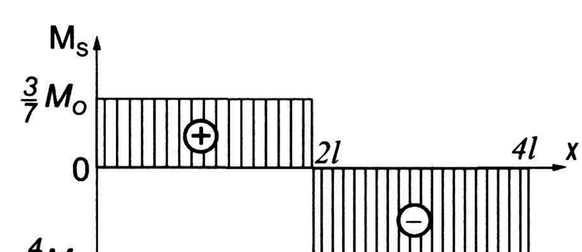



**Rys. 9.21**

ODPOWIEDŹ:

$$M_A=\frac{3}{7}M_0,\ M_D=\frac{4}{7}M_0.$$

Wykres momentów skręcających.

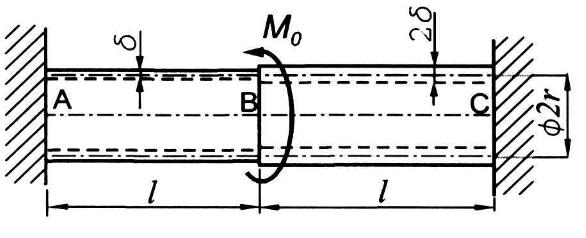



**Rys. 9.22**

Maksymalne naprężenia występują w przedziale dla $2l \leq x \leq 3l$ i wynoszą

$$|\tau|_{\max} = |\tau_{BC}| = \frac{2}{7}\frac{M_0}{\pi r^2 \delta}.$$

**Zadanie 9.12.** Cienkościenna rura o długości $2l$ z obu stron utwierdzona w nieodkształcalnych ścianach jest obciążona w połowie długości momentem $M_0$ (rys. 9.23). Lewa połowa rury ma grubość ścianki $\delta$, a prawa $2\delta$. Średni promień rury wynosi $r$, przy czym $2\delta << r$. Moduł sprężystości materiału $G = const$, a naprężenie dopuszczalne na skręcanie $k_s = k_t$. Obliczyć dopuszczalną wartość momentu $M_0$, a następnie dla tego obciążenia kąt obrotu przekroju poprzecznego w środku długości rury.



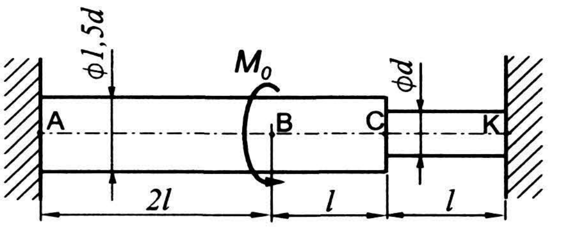

Rys. 9.23

ODPOWIEDŹ:

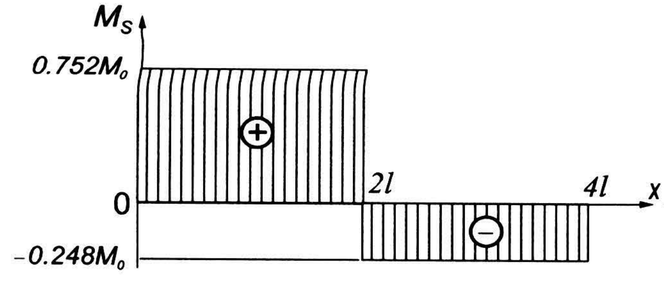
$$M_{0dop} = \frac{3}{8}\pi r^3 k_t,$$

$$\varphi_{x=l} = \frac{M_{0dop} \cdot l}{6\pi G r^3 \delta} = \frac{k_t \cdot l}{16 G \delta}.$$

**Zadanie 9.13.** Pręt o skokowo zmiennej średnicy jest utwierdzony końcami w nieodkształcalnych ścianach. Prawa część CK (rys. 9.24) pręta o długości $l$ ma średnicę $d$, a lewa o długości $3l$ – ma średnicę $\frac{3}{2}d$. W połowie długości ($x = 2l$) pręt obciążony jest momentem $M_0$ (rys. 9.24). Wykonać wykres momentów skręcających oraz obliczyć dopuszczalną wartość momentu $M_0$ przy następujących danych: $l = 1{,}2\ m$, $d = 0{,}02\ m$, $E = 2{,}065 \cdot 10^5 MPa$, $\nu = 0{,}29$, $k_s = 90\ MPa$.




Rys. 9.24




**Rys. 9.25**

ODPOWIEDŹ:

$M_{0dop} = 570\ Nm.$

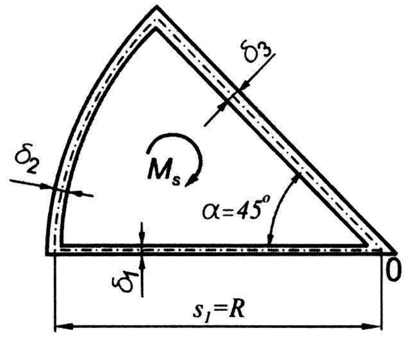
Przy tym obciążeniu maksymalna (co do wartości bezwzględnej) wartość naprężenia występującego w przedziale CK pręta wynosi

$|\tau_s|_{\max} = |\tau_{CK}| = |-90| MPa = k_s.$

## 9.3. Pręty cienkościenne o przekrojach zamkniętych lub otwartych

### *9.3.1. Przykłady obliczeń*

**Zadanie 9.14.** Cienkościenny pręt o profilu zamkniętym, pokazanym na rys. 9.26, jest obciążony stałym momentem skręcającym $M_S$. Obliczyć maksymalne naprężenia wywołane skręcaniem oraz kąt skręcenia pręta o długości $l$. Dane: $l$ = 3 $m$, $\delta_1$ = 2 $mm$, $\delta_2$ = 3 $mm$, $\delta_3$ = 4 $mm$, $G = 8 \cdot 10^4$ $MPa$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $M_S$ = 500 $Nm$, $R$ = 80 $mm$.




**Rys. 9.26**

R o z w i ą z a n i e. Maksymalne naprężenie występuje w najcieńszej ściance. Oblicza się je z pierwszego wzoru Bredta.

$$\tau_{\max} = \frac{M_S}{2A_{śr} \cdot \delta_1},$$

gdzie $A_{śr} = \frac{1}{8}\pi R^2$ jest polem powierzchni ograniczonym linią środkową przekrojów ścianek (linią dzielącą grubości ścianek na połowy). Po podstawieniu danych liczbowych

$$\tau_{max} = \frac{4M_S}{\pi R^2 \delta_1} = \frac{4 \cdot 500 \cdot 10^{-6} MNm}{\pi (80 \cdot 10^{-3} m)^2 \cdot 2 \cdot 10^{-3} m} = 49{,}74\ MPa.$$

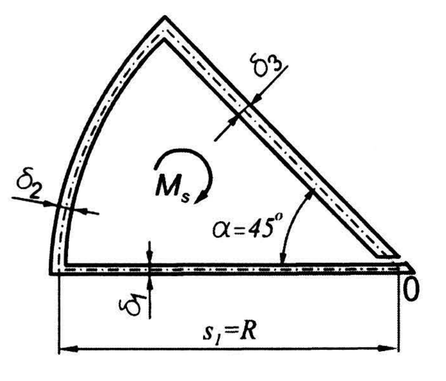
Kąt skręcenia pręta uzyskano z drugiego wzoru Bredta

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_S l}{4G(A_{śr})^2} \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{M_S l}{4G(\frac{1}{8}\pi R^2)^2} (\frac{R}{\delta_1} + \frac{\pi R}{4\delta_2} + \frac{R}{\delta_3}) =$$

$$= \frac{500 \cdot 10^{-6} MNm \cdot 3\ m}{4 \cdot 8 \cdot 10^4 MPa\, [\frac{1}{8}\pi (80 \cdot 10^{-3} m)^2]^2} (\frac{80}{2} + \frac{\pi \cdot 80}{4 \cdot 3} + \frac{80}{4}) \cong 0{,}06\ rad = 3°28'$$

**Zadanie 9.15.** Pręt cienkościenny o profilu otwartym, widoczny na rys. 9. 27, na całej swej długości skręcany jest momentem skręcającym $M_S$. Obliczyć naprężenia we wszystkich ściankach pręta oraz znaleźć jednostkowy kąt skręcenia $\theta$.

Dane: $M_S = 50\ Nm$, $G = 8 \cdot 10^4 MPa$, $k_s = 90\ MPa$, $R = 80\ mm$, $\delta_1 = 2\ mm$, $\delta_2 = 3\ mm$, $\delta_4 = 4\ mm$.




**Rys. 9.27**

R o z w i ą z a n i e. Długości linii środkowych przekrojów poprzecznych ścianek pręta

$s_1 = R,$

$s_2 = \frac{\pi}{4} R,$

$s_3 = R.$

Sztywności na skręcanie kolejnych ścianek:

$$C_1 = \frac{1}{3} G R \delta_1^3 = \frac{1}{3} 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} 80 \cdot 10^{-3} m \, (2 \cdot 10^{-3} m)^3 = 17{,}07 \; Nm^2,$$

$$C_2 = \frac{1}{3} G \frac{\pi}{4} R \delta_2^3 = \frac{1}{3} 8 \cdot 10 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} \frac{\pi}{4} 80 \cdot 10^{-3} m \, (3 \cdot 10^{-3} m)^3 = 45{,}24 \; Nm^2,$$

$$C_3 = \frac{1}{3} G R \delta_3^3 = 8 \cdot C_1 = 136{,}56 \; Nm^2.$$

Sztywność całego pręta na skręcanie

$$C = \sum_{i=1}^{3} C_i = (17{,}07 + 45{,}24 + 136{,}56) \; Nm^2 = 198{,}87 \; Nm^2.$$

Momenty skręcające poszczególne ścianki pręta wynoszą:

$$M_{S1} = \frac{C_1}{C} M_S = \frac{17{,}07}{198{,}84} 50 \; Nm = 4{,}29 \; Nm,$$

$$M_{S2} = \frac{C_2}{C} M_S = \frac{45{,}24}{198{,}84} 50 \; Nm = 11{,}38 \; Nm,$$

$$M_{S3} = \frac{C_3}{C} M_S = \frac{136{,}56}{198{,}84} 50 \; Nm = 34{,}33 \; Nm.$$

Sprawdzenie

$$\sum M_{Si} = (4{,}29 + 11{,}38 + 34{,}33) \; Nm = 50 \; Nm = M_S.$$

Naprężenia maksymalne w poszczególnych ściankach:

$$\tau_1 = \frac{3 M_{S1}}{S_1 \delta_1^2} = \frac{3 \cdot 4{,}29 \cdot 10^{-6} MNm}{80 \cdot 10^{-3} m \, (2 \cdot 10^{-3} m)^2} = 40{,}22 \; MPa,$$

$$\tau_2 = \frac{3 M_{S2}}{S_2 \delta_2^2} = \frac{3 \cdot 11{,}38 \cdot 10^{-6} MNm}{\frac{\pi}{4} \cdot 80 \cdot 10^{-3} m \, (3 \cdot 10^{-3} m)^2} = 60{,}37 \; MPa,$$

$$\tau_3 = \frac{3 M_{S3}}{S_3 \delta_3^2} = \frac{3 \cdot 34{,}33 \cdot 10^{-6} MNm}{80 \cdot 10^{-3} m \, (4 \cdot 10^{-2} m)^2} = 80{,}46 \; MPa.$$

Maksymalne naprężenia skręcające występują w zewnętrznych włóknach przekroju poprzecznego najgrubszej ścianki i są mniejsze od naprężeń dopuszczalnych

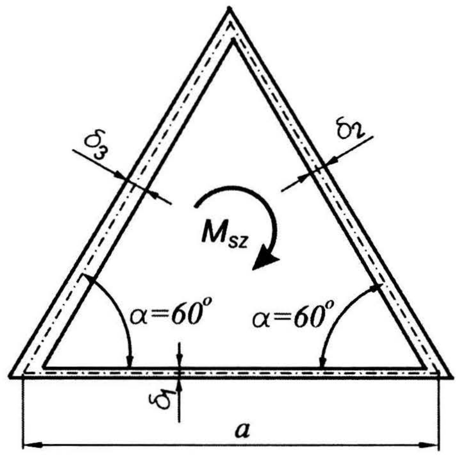
$$\tau_{\max} = \tau_3 = 80{,}46 \; MPa < k_s = 90 \; MPa.$$

Jednostkowy kąt skręcenia pręta wynosi

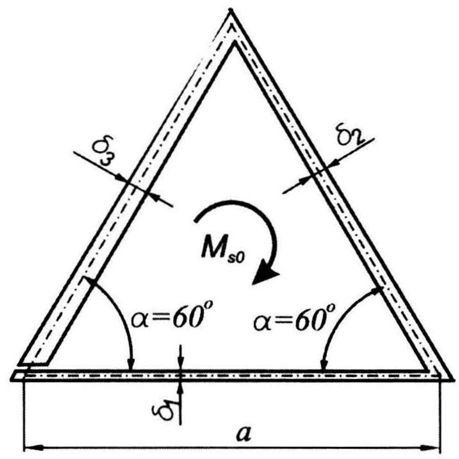
$$\theta = \frac{M_S}{C} = \frac{50 \; Nm}{198{,}87 \; Nm^2} \cong 0{,}25 \frac{rad}{m} \cong 0{,}25 \cdot \frac{180}{\pi} \frac{\deg}{m} = 14{,}3 \frac{\deg}{m}.$$

**Zadanie 9.16**. Dwa pręty cienkościenne o takich samych wymiarach są wykonane z tego samego materiału, przy czym jeden z prętów ma profil trójkątny zamknięty (rys. 9.28a), a drugi taki sam profil, ale otwarty (rys. 9 28b).

a)




b)




**Rys. 9.28**

Każdy z prętów jest poddany skręcaniu momentem $M_S$ = const. Obliczyć dopuszczalne wartości momentów $M_{sz}$ i $M_{so}$ i odpowiadające tym momentom jednostkowe kąty skręcenia $\theta_Z$ i $\theta_0$.

Dane: $a = 60\ mm,\ \delta_1 = 3\ mm,\ \delta_2 = 4\ mm,\ \delta_3 = 5\ mm,\ G = 8 \cdot 10^4\ MPa,\ k_t = 80\ MPa$.

R o z w i ą z a n i e.

a) Obliczenia pręta o profilu zamkniętym (wzorami Bredta)

$$\tau_{\max} \le \tau_{\max,dop} = \frac{M_{SZdop}}{2A_{śr}\delta_{\min}} = k_t,$$

$$M_{SZ} \le M_{SZdop} = 2A_{śr}\delta_1 k_t,$$

$$A_{śr} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}(60 \cdot 10^{-3} m)^2 = 1{,}559 \cdot 10^{-3} m^2$$

$$M_{SZdop} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}(60 \cdot 10^{-3} m)^2 (3 \cdot 10^{-3} m)\, 80 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2} = 748{,}2\ Nm$$

$$\theta_{Zdop} = \frac{M_{SZdop}}{4GA_{śr}^2}\oint \frac{ds}{\delta} = \frac{M_{SZdop}}{4GA_{śr}^2}\left(\frac{a}{\delta_1} + \frac{a}{\delta_2} + \frac{a}{\delta_3}\right) =$$

$$= \frac{748{,}2\ Nm}{4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6\, Nm\, (1{,}559 \cdot 10^{-3} m^2}\left(\frac{60}{3} + \frac{60}{4} + \frac{60}{5}\right) = 0{,}0449\, \frac{rad}{m}$$

b) Obliczenia pręta o profilu otwartym.
Szerokości kolejnych ścianek wynoszą

$s_1 = s_2 = s_3 = a = 60\ mm.$

Sztywności ścianek na skręcanie:

$$C_1 = \frac{1}{3} Ga\delta_1^3 = \frac{1}{3} \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}(60 \cdot 10^{-3} m)(3 \cdot 10^{-3} m)^3 = 43{,}2\ Nm^2,$$

$$C_2 = \frac{1}{3} Ga\delta_2^3 = 102{,}4\ Nm^2,$$

$$C_3 = \frac{1}{3} Ga\delta_3^3 = 200\ Nm^2.$$

Sztywność całego pręta na skręcanie

$$C = \sum_{i=1}^{3} C_i = C_1 + C_2 + C_3 = (43{,}2 + 102{,}4 + 200)\ Nm^2 = 345{,}6\ Nm^2$$

Momenty skręcające kolejne poszczególne ścianki pręta:

$$M_{S1} = \frac{C_1}{C} M_S = \frac{43{,}2}{345{,}6} M_S = 0{,}125 M_S,$$

$$M_{S2} = \frac{C_2}{C} M_S = 0{,}296 M_S,$$

$$M_{S3} = \frac{C_3}{C} M_S = 0{,}579 M_S.$$

Największe naprężenia skręcające występują w ściance o największej grubości

$$\tau_{max} = \frac{3M_{S3}}{a\delta_3^2} = \frac{3 \cdot 0{,}579 M_{S0dop}}{60 \cdot 10^{-3} m\, (5 \cdot 10^{-3} m)^2} = k_s = 80 \cdot 10^6 \frac{N}{m^2}.$$

Z tej nierówności obliczono

$$M_{S0dop} = \frac{60 \cdot 10^{-3} m\,(5 \cdot 10^{-3} m)^2 \cdot 80 \cdot 10^6 \dfrac{N}{m^2}}{3 \cdot 0{,}579} = 69{,}0\ Nm,$$

$$\theta_{0dop} = \theta_{0\max} = \frac{M_{S0dop}}{C} = \frac{69{,}0\ Nm}{345{,}6\ Nm^2} \cong 0{,}2 \frac{rad}{m}.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że:

$$\frac{M_{SZdop}}{M_{S0dop}} = \frac{748{,}2}{69{,}0} = 10{,}84,$$

$$\frac{\theta_{0\max}}{\theta_{Z\max}} = \frac{0{,}2}{0{,}0449} = 4{,}454.$$

Wniosek z przeprowadzonych obliczeń: pręty o profilu otwartym przenoszą dużo mniejsze momenty skręcające przy jednoczesnym występowaniu dużych kątów skręcenia.

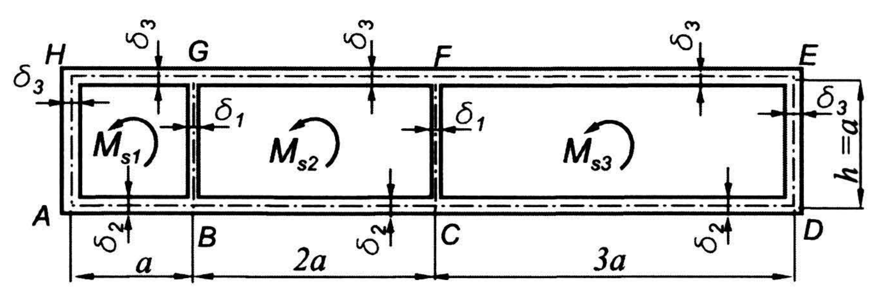
**Zadanie 9.17.** Cienkościenny pręt o przekroju poprzecznym trójkomorowym (rys. 9.29) jest obciążony momentem skręcającym $M_s = 2 \cdot 10^{-2} MNm.$ Wymiary przekroju poprzecznego: $a = 10^{-1} m,$ $\delta_1 = 2 \cdot 10^{-3} m,$ $\delta_2 = 4 \cdot 10^{-3} m,$ $\delta_3 = 5 \cdot 10^{-3} m.$ Moduł odkształcenia postaciowego materiału pręta $G = 8 \cdot 10^4 MPa.$

Obliczyć: $C$ – sztywność pręta na skręcanie,

$\theta$ – jednostkowy kąt skręcenia,

$M_{si}$ – momenty skręcające działające na poszczególne komory ($i$ = 1, 2, 3),

$\tau_{\max}$ – maksymalne naprężenie (podać, w której ściance występuje).




**Rys. 9.29**

R o z w i ą z a n i e.

Pola powierzchni komór ograniczone liniami środkowymi ścian

$$A_{1śr} = a^2 = 10^{-2} m^2,$$

$$A_{2śr} = 2a^2 = 2 \cdot 10^{-2} m^2,$$

$$A_{3śr} = 3 \cdot 10^{-2} m^2.$$

Sztywność komór i całego pręta na skręcanie

$$C_1 = \frac{4G(A_{1śr})^2}{\frac{a}{\delta_1}+\frac{a}{\delta_2}+\frac{2a}{\delta_3}} = \frac{4\cdot 8\cdot 10^4 MPa\,(10^{-2}m^2)^2}{\frac{10^{-1}}{2\cdot 10^{-3}}+\frac{10^{-1}}{4\cdot 10^{-3}}+\frac{2\cdot 10^{-1}}{5\cdot 10^{-3}}} = \frac{32\cdot MPa\cdot m^4}{50+25+40} = 0{,}278\, MPa\cdot m^4,$$

$$C_2 = \frac{4\cdot 8\cdot 10^4 MPa\,(2\cdot 10^{-2}m^2)^2}{\frac{2\cdot 10^{-1}}{2\cdot 10^{-3}}+\frac{2\cdot 10^{-1}}{4\cdot 10^{-3}}+\frac{2\cdot 10^{-1}}{5\cdot 10^{-3}}} = \frac{128\, MPa\cdot m^4}{100+50+40} = 0{,}674\, MPa\cdot m^4,$$

$$C_3 = \frac{4\cdot 8\cdot 10^4 MPa\cdot(3\cdot 10^{-2}m^2)^2}{\frac{10^{-1}}{2\cdot 10^{-3}}+\frac{3\cdot 10^{-1}}{4\cdot 10^{-3}}+\frac{4\cdot 10^{-1}}{5\cdot 10^{-3}}} = \frac{288\, MPa\cdot m^4}{50+75+80} = 1{,}405\, MPa\cdot m^4,$$

$$C = C_1 + C_2 + C_3 = (0{,}278+0{,}674+1{,}405)\, MPa\cdot m^4 = 2{,}357\, MPa\cdot m^4 = 2{,}357\, MNm^2.$$

Jednostkowy kąt skręcenia

$$\theta = \frac{M_s}{C} = \frac{2\cdot 10^{-2} MNm}{2{,}357\, MNm^2} = 4{,}24\cdot 10^{-3}\frac{rad}{m} = 0{,}243\frac{\deg}{m}.$$

Momenty skręcające przypadające na poszczególne komory

$$M_{s1} = \frac{C_1}{C}M_s = 0{,}118 M_s = 2{,}36\cdot 10^{-3} MNm,$$

$$M_{s2} = \frac{C_2}{C}M_s = \frac{0{,}674}{2{,}357}M_s = 0{,}286 M_s = 5{,}72\cdot 10^{-3} MNm.$$

$$M_{s3} = \frac{C_3}{C}M_s = \frac{1{,}405}{2{,}357}M_s = 0{,}596 M_s = 11{,}92\cdot 10^{-3} MNm.$$

Sprawdzenie:

$$M_{s1} + M_{s2} + M_{s3} = (2{,}36+5{,}72+11{,}92)\cdot 10^{-3} MNm = 20\cdot 10^{-3} MNm = 2\cdot 10^{-2} MNm = M_s$$

Obliczenie naprężeń w poszczególnych ściankach pręta

$$\tau_{AH} = \tau_{HG} = \frac{M_{s1}}{2A_{1śr}\delta_3} = \frac{2{,}36\cdot 10^{-3} MNm}{2\cdot 10^{-2}m^2\cdot 5\cdot 10^{-3}m} = 23{,}6\, MPa$$

$$\tau_{GB} = \frac{M_{s1}}{2A_{1śr}\delta_1} - \frac{M_{s2}}{2A_{2śr}\delta_1} = \frac{2{,}36\cdot 10^{-3} MNm}{2\cdot 10^{-2}m^2\cdot 2\cdot 10^{-3}m} - \frac{5{,}72\cdot 10^{-3} MNm}{2\cdot 2\cdot 10^{-2}m^2\cdot 2\cdot 10^{-3}} =$$
$$= 59\, MPa - 71{,}5\, MPa = -12{,}5\, MPa,$$

$$\tau_{BA} = \frac{M_{s1}}{2A_{1śr}\delta_2} = \frac{2{,}36\cdot 10^{-3} MNm}{2\cdot 10^{-2}m^2\cdot 4\cdot 10^{-3}m} = 29{,}5\, MPa,$$

$$\tau_{GF} = \frac{M_{s2}}{2A_{2śr}\delta_3} = \frac{5{,}72\cdot 10^{-3} MNm}{2\cdot 2\cdot 10^{-2}m^2\cdot 5\cdot 10^{-3}m} = 28{,}6\, MPa,$$

$$\tau_{FC} = \frac{M_{s2}}{2A_{2śr}\delta_1} - \frac{M_{s3}}{2A_{3śr}\delta_1} = \frac{5{,}72\cdot10^{-3}MNm}{2\cdot2\cdot10^{-2}m^2\cdot2\cdot10^{-3}m} - \frac{11{,}92\cdot10^{-3}MNm}{2\cdot3\cdot10^{-2}m^2\cdot2\cdot10^{-3}m} =$$
$$= 71{,}5\ MPa - 99{,}3\ MPa = 27{,}8\ MPa,$$

$$\tau_{CB} = \frac{M_{s2}}{2A_{2śr}\delta_2} = \frac{5{,}72\cdot10^{-3}MNm}{2\cdot2\cdot10^{-2}m^2\cdot4\cdot10^{-3}m} = 35{,}75\ MPa,$$

$$\tau_{FE} = \tau_{ED} = \frac{M_{s3}}{2A_{3śr}\delta_3} = \frac{11{,}92\cdot10^{-3}MNm}{2\cdot3\cdot10^{-2}m^2\cdot5\cdot10^{-3}m} = 39{,}7\ MPa,$$

$$\tau_{DC} = \frac{M_{s3}}{2A_{3śr}\delta_2} = \frac{11{,}92\cdot10^{-3}MNm}{2\cdot3\cdot10^{-2}m^2\cdot4\cdot10^{-3}m} = 49{,}67\ MPa.$$

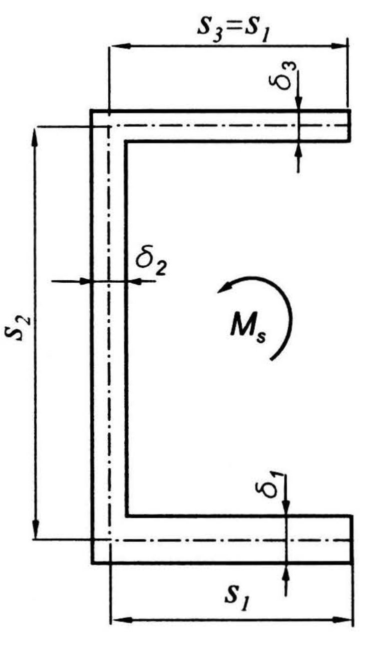
Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że największe naprężenia występują w ściance $DC$ i wynoszą $\tau_{\max} = 49{,}67\ MPa.$

### *9.3.2. Zadania do samodzielnego rozwiązania*

**Zadanie 9. 18.** Obliczyć, przy jakiej wartości momentu skręcającego $M_S$, cienkościenny pręt o przekroju poprzecznym ceowym (rys. 9.30) i długości $l$ skręci się o kąt $\varphi_0 = 3\deg$; następnie wyznaczyć maksymalne naprężenia występujące w pręcie.

Dane: $\delta_1 = 5\ mm,\quad \delta_2 = 3\ mm,\quad \delta_3 = 4\ mm,\quad s_1 = s_3 = 50\ mm,\quad s_2 = 60\ mm,$

$G = 8\cdot10^4 MPa,\ l = 3\ m.$




**Rys. 9.30**

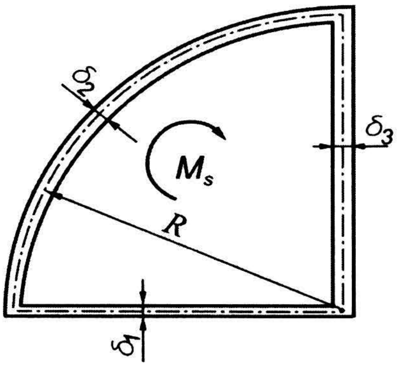
ODPOWIEDŹ:

$M_S = 5{,}15\ Nm,$

$\tau_{\max} \cong 7\ MPa.$

**Zadanie 9.19.** Obliczyć maksymalne naprężenia oraz jednostkowy kąt skręcenia pręta cienkościennego o profilu zamkniętym pokazanym na rys. 9.31. Pręt jest obciążony stałym momentem skręcającym $M_s$.

Dane: $R = 60\ mm,\ \delta_1 = 2\ mm,\ \delta_2 = 3\ mm,\ \delta_3 = 4\ mm,\ M_s = 500\ Nm,\ G = 8 \cdot 10^4 MPa.$




**Rys. 9.31**

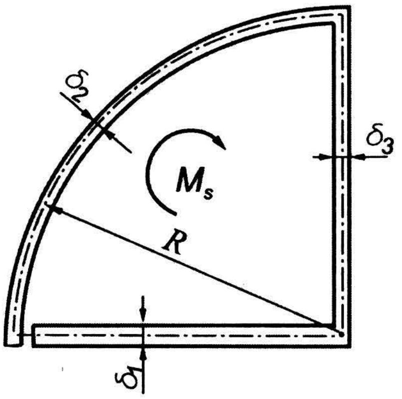
ODPOWIEDŹ:

$\tau_{\max} = 44{,}2\ MPa,$

$\theta = 0{,}0149 \dfrac{rad}{m}.$

**Zadanie 9.20.** Obliczyć maksymalne naprężenia w ściankach cienkościennego pręta skręcanego o profilu otwartym obciążonego momentem skręcającym $M_s = 50\ Nm.$ Przekrój poprzeczny pręta pokazano na rys. 9.32.

Dane: $R = 60\ mm,\ \delta_1 = 2\ mm,\ \delta_2 = 3\ mm,\ \delta_3 = 4\ mm,\ G = 8 \cdot 10^4 MPa.$

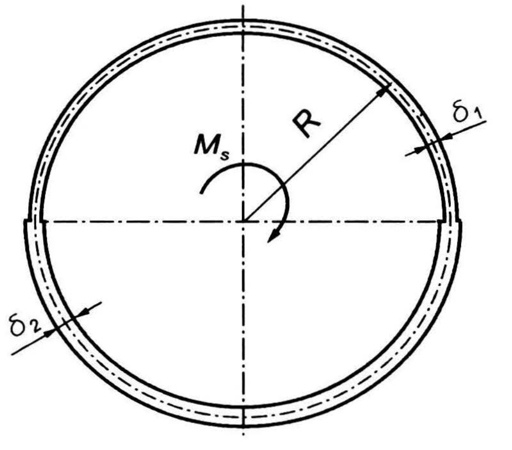



**Rys. 9.32**

ODPOWIEDŹ: $\tau_1 = 43{,}7\ MPa,\ \tau_2 = 65{,}5\ MPa,\ \tau_3 = 87{,}4\ MPa.$

Maksymalne naprężenia występują w najgrubszej ściance. Rozkład naprężeń na grubości ścianki jest liniowy.

**Zadanie 9.21.** Cienkościenna rura o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 9.33, jest skręcana momentem $M_s$ = 1 *kNm*. Wyznaczyć maksymalne naprężenia oraz jednostkowy kąt skręcenia. Dane: $r = 25{,}47$ *mm*, $\delta_1 = 3$ *mm* $\delta_2 = 6$ *mm*, $G = 8 \cdot 10^4\,MPa$.



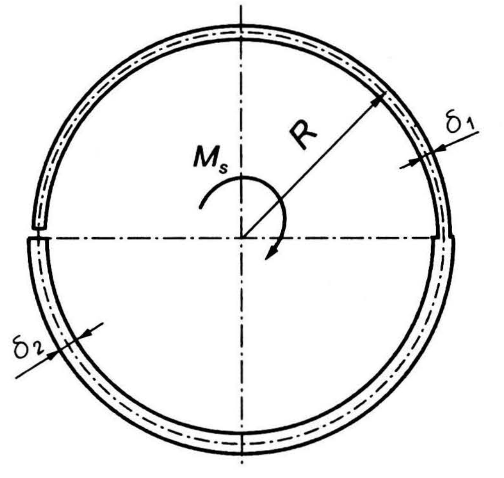

**Rys. 9.33**

ODPOWIEDŹ:

$\tau_{\max} = 81{,}8\,MPa$,

$\theta = 0{,}03\,\dfrac{rad}{m}$.

**Zadanie 9.22.** Rurę z zadania 9.21 rozcięto wzdłuż tworzącej, jak pokazano na rys. 9.34 i obciążono ją momentem skręcającym $M_s$ = 100 *Nm*. Pozostałe dane przyjąć jak w zadaniu 8.21. Obliczyć $\tau_{\max}$ i $\theta$ dla tej rury.



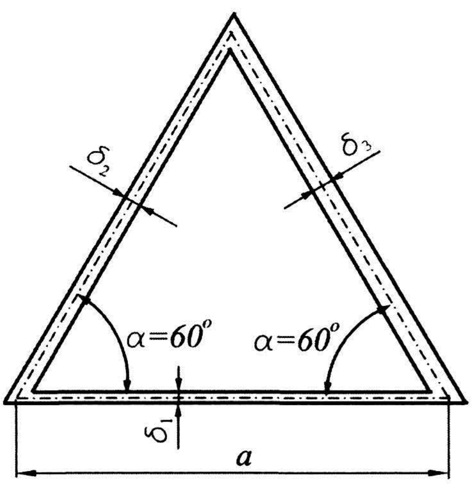

**Rys. 9.34**

ODPOWIEDŹ:

$\tau_{\max} = 92{,}6\, MPa,$

$\theta = 0{,}193 \dfrac{rad}{m}.$

**Zadanie 9.23.** Cienkościenny pręt o profilu zamkniętym, w którym linie środkowe ścian przekroju poprzecznego tworzą trójkąt równoboczny o boku $a = 4 \cdot 10^{-2} m$ (rys. 9.35), jest skręcany momentem $M_s = 200\, Nm = 2 \cdot 10^{-4} MNm$. Pręt wykonano ze stali o module odkształcenia postaciowego $G = 8 \cdot 10^4 MPa$ i naprężeniach dopuszczalnych na skręcanie $k_s = 80\, MPa$. Grubości ścian pręta wynoszą: $\delta_1 = 2 \cdot 10^{-3} m$, $\delta_2 = 3 \cdot 10^{-3} m$ i $\delta_3 = 4 \cdot 10^{-3} m$. Obliczyć maksymalne naprężenia $\tau_{\max}$ oraz jednostkowy kąt skręcenia pręta $\theta\, [\dfrac{rad}{m}]$. Sprawdzić, czy $\tau_{\max}$ są mniejsze od $k_s$.

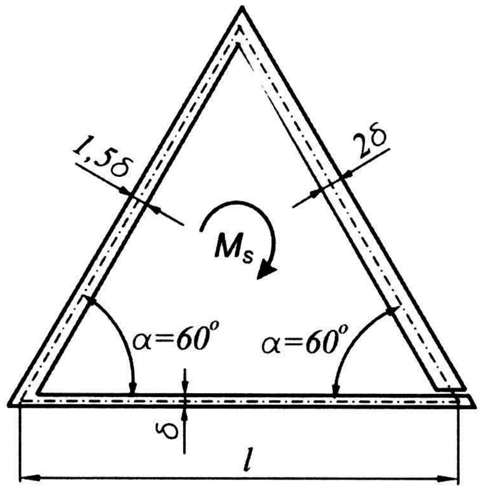



**Rys. 9.35**

ODPOWIEDŹ:

$\tau_{\max} = 72{,}2\, MPa, \quad \theta = 0{,}0564 \dfrac{rad}{m}.$

**Zadanie 9.24.** Cienkościenny pręt o profilu otwartym, w którym linie środkowe ścian przekroju poprzecznego tworzą trójkąt równoboczny o boku $a = 20\delta$, gdzie $\delta$ jest grubością najcieńszej ścianki, jest skręcany momentem skręcającym $M_s$. Pręt jest wykonany z materiału o module Kirchhoffa $G$. Grubości ścian pręta wynoszą: $\delta_1 = \delta$, $\delta_2 = 1{,}5\delta$ i $\delta_3 = 2\delta$ (rys. 9.36). Obliczyć: sztywność pręta na skręcanie, maksymalne naprężenia $\tau_{\max}$ oraz jednostkowy kąt skręcenia $\theta\, [\dfrac{rad}{m}]$.




**Rys. 9.36**

ODPOWIEDŹ:

$$C = 82{,}5\, G\delta^4,$$

$$\tau_{\max} = \frac{4}{165}\frac{M_s}{\delta^3},$$

$$\theta = \frac{2}{165}\frac{M_s}{G\delta^4}.$$

# LITERATURA PODSTAWOWA

## Podręczniki

[1] Bąk R., Burczyński T., Wytrzymałość materiałów z elementami ujęcia komputerowego. Warszawa, WNT, 2001.
[2] Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłos Z., Wytrzymałość materiałów. Warszawa, WNT, 1999.
[3] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., Wytrzymałość Materiałów. Warszawa, PWN, 2000.
[4] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe. Poradnik. Warszawa, WNT, 2004.
[5] Ostwald M., Podstawy wytrzymałości materiałów. Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2007.

## Zbiory zadań

[6] Banasiak M., Grossman K., Trombski M., Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów. Warszawa, PWN, 1998.
[7] Niezgodziński M.E., Niezgodziński T., Zadania z wytrzymałości materiałów. Warszawa, WNT, 2000.
[8] Ostwald M., Wytrzymałość materiałów. Zbiór zadań. Poznań, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2008.

ISBN 978-83-7283-277-1