

STATECZNOŚĆ ORTOTROPOWYCH PŁYT Z WZDŁUŻNYMI ROZWARSTWIENIAMI

SŁAWOMIR KĘDZIORA

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź*

W pracy przeanalizowano stateczność prostokątnych ortotropowych płyt z rozwarstwieniami biegnącymi wzdłuż całej długości płyty. Przyjęto, że płyty są swobodnie podparte na obciążonych końcach. Zagadnienie rozwiązano w ramach pierwszego rzędu przybliżenia teorii Koitera (1) przy wykorzystaniu macierzy przejścia.

Przeanalizowano wpływ wymiarów geometrycznych rozwarstwienia na stateczność płyt.

1. Wprowadzenie

Materiały kompozytowe dzięki swojej lekkości, łatwości formowania i uzyskania pożądanych własności są coraz szerzej wykorzystywane w konstrukcjach cienkościennych np. przemysł samochodowy, zbrojeniowy, maszynowy, lotniczy. Stosowanie materiałów kompozytowych wymaga jednak bardziej złożonej i wszechstronnej analizy pracy konstrukcji.

Wykorzystanie kompozytów w praktyce inżynierskiej wymusza opracowanie metod analizy uwzględniających szczególne cechy tych materiałów.

Celem prezentowanej pracy jest opracowanie metody analizy stateczności płyt kompozytowych przy uwzględnieniu zjawiska delaminacji w kierunku wzdłużnym przy uwzględnieniu różnych warunków brzegowych na wzdłużnych brzegach.

2. Definicje, założenia

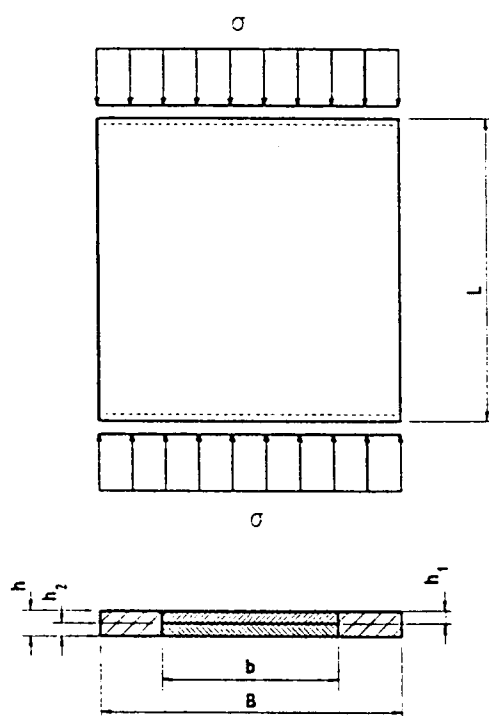
Rozpatrzono ściskaną płytę ortotropową z dwoma symetrycznymi rozwarstwieniami biegnącymi wzdłuż długości płyty (Rys 2.1)

Założono przegubowe podparcie poprzecznych obciążonych brzegów oraz swobodnie podparcie na wzdłużnych brzegach.

Przyjęto, że suma grubości rozwarstwień jest równa grubości płyty nierozwarstwionej oraz że przed obciążeniem warstwy środkowe wszystkich rozwarstwień i części płyty nierozwarstwionej leżą w jednej płaszczyźnie.

W przyjętym modelu obliczeniowym nie uwzględniono zjawiska kontaktu między rozwarstwieniami. Taki założenie jest możliwe dla płyt krótkich $B/L \approx 1$. Podobne uproszczenia poczynił Protte (6).

Zagadnienie rozwiązano w ramach pierwszego rzędu przybliżenia asymptotycznej teorii Koitera(1) przyjmując bardziej dokładne zależności na odkształcenia względne i wykorzystując metodę macierzy przejścia [3÷5].



Rys 2.1. Analizowana płyta
Fig. 2.1. Analysed plate

Blonowe odkształcenia dla poszczególnych płyt składowych przyjęto w postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 ; \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} u_{,y}^2 + \frac{1}{2} w_{,y}^2 ; \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} ;\end{aligned}\quad (1)$$

Z zasady prac przygotowanych wynikają następujące różniczkowe równania równowagi dla pierwszego rzędu przybliżenia (2÷5).

$$\begin{aligned}u_{,xx} + \eta v v_{,xy} + \frac{G(1-\eta v^2)}{E} (u_{,yy} + v_{,xy}) &= 0 ; \\ v_{,yy} + \eta u_{,xy} + \frac{G(1-\eta v^2)}{\eta E} (u_{,xy} + v_{,xx}) - \frac{1-\eta v^2}{\eta} \lambda \Delta v_{,xx} &= 0 ; \\ D_x (w_{,xxxx} + \eta v w_{,xxy}) + D_y (w_{,yyyy} + \eta w_{,xyy}) + 4D_{xy} w_{,xxyy} + Eh\lambda \Delta w_{,xx} &= 0 ;\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie dokrytyczne pole przemieszczeń, przy założeniu bezzgięciowego stanu dokrytycznego, założono w postaci:

$$u^o = -\kappa \Delta \lambda ; \quad v^o = v_y \Delta \lambda ; \quad w^o = 0 ; \quad (3)$$

Zastosowane we wzorach (2) i (3) oznaczenia są identyczne jak w pracy (3).

Istotna różnica polega na konieczności spełnienia warunków współpracy (4), co zdecydowanie odróżnia ją od metody zastosowanej w pracy (3÷5).

Warunki ciągłości i współpracy w miejscu rozwarstwienia poszczególnych płyt składowych przyjęto w następującej postaci:

$$\begin{aligned} u^- &= u_1^+ ; & v^- &= v_1^+ ; & w^- &= w_1^+ ; \\ w_{,y}^- &= w_{,y_1}^- ; & N_y^- &= \sum_{i=1}^n N_{y_i}^+ ; & M_y^- &= \sum_{i=1}^n M_{y_i}^+ ; \\ N_{xy}^- &= \sum_{i=1}^n N_{xy_i}^+ ; & Q_y^- &= \sum_{i=1}^n Q_{y_i}^+ ; \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: indeks i oznacza i -te rozwarstwienie, a n liczbę rozwarstwień.

Zastosowana metoda rozwiązania zagadnienia stateczności dla pojedynczej płyty jest analogiczna jak w pracach (3÷5).

3. Wyniki obliczeń numerycznych

W analizie numerycznej badano wpływ szerokości symetrycznego rozwarstwienia na wartości naprężeń krytycznych płyty swobodnie podpartej na wzdłużnych brzegach (Rys. 2.1).

W pracy przedstawiono jedynie wyniki dla płyty o stosunku szerokości do długości $B/L=1$. Szerokość rozwarstwienia zmieniano w zakresie $0 \div 0.8 \ b/B$ (Rys. 2.1) .

Obliczenia przeprowadzono dla pierwszych trzech postaci wyboczenia

Do obliczeń przyjęto płytę o następujących wymiarach:

- $B/L=1.0$;
- $B/h=100$;
- $b/B=0 \div 0.8$.

W niniejszej pracy przedstawiono jedynie wyniki dla płyty izotropowej tzn. $\eta=1$, $\nu=0.3$, $E=E_x=E_y$.

Dla rozpatrywanej płyty przeprowadzono obliczenia dla dwóch stosunków grubości rozwarstwień $h_1/h_2=0.25$, $h_1/h_2=1$, gdzie $h_1+h_2=h$.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku (Rys. 3.1) i w tabeli (Tab. 3.1).

W celu zweryfikowania opracowanej metody otrzymane wyniki porównano z metodą elementów skończonych (ANSYS-em). Program ten umożliwił znalezienie naprężeń krytycznych dla badanej swobodnie podpartej płyty; $b/B=1$, $h_1/h_2=0.25$, $h_1/h_2=1$. Wyniki zamieszczono w tabeli (Tab. 3.1).

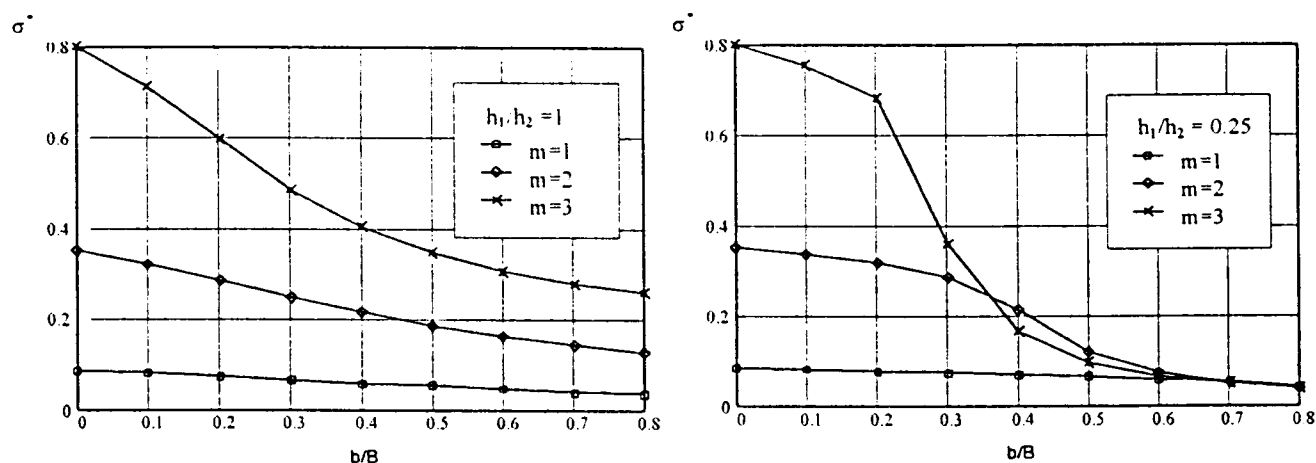
Uzyskano dobrą zgodność otrzymanych rezultatów, a zatem należy sądzić, że opracowana metoda jest poprawna.

Tabela 3.1. Porównanie wyników otrzymanych MES (ANSYS) i z omawianej metody dla płyty swobodnie podpartej

Table 3.1. Comparison of the obtained result for simply supported -FEM (ANSYS) and the described method

m	MES program ANSYS		Prezentowana metoda	
	k		k	
	$h_1/h_2 = 0.25$	$h_1/h_2 = 1$	$h_1/h_2 = 0.25$	$h_1/h_2 = 1$
1	0.719	0.581	0.718	0.580
2	1.253	2.062	1.299	2.053
3	1.274	3.832	1.070	3.815

Należy zwrócić uwagę, że w prezentowanych rozważaniach przyjęto analizę modalną. W metodzie elementów skończonych nie ma takich ograniczeń i tym faktem należy wytłumaczyć różnice w otrzymanych wynikach.



Rys. 3.1. Wykres naprężenia krytycznego σ^* dla płyty swobodnie podpartej w funkcji względnej szerokości b/B rozwarstwienia dla różnej liczby półfal m (1÷3)

Fig. 3.1. Curves presenting critical stress σ^* for plate with free longitudinal edge versus nondimensional width of the delamination b/B for a few number of half-waves m (1÷3)

Z przeprowadzonych obliczeń dla płyty swobodnie podpartej przy stosunku rozwarstwień $h_1/h_2=0.25$ i w przedziale zmienności b/B powyżej 0.6 występuje spadek naprężeń krytycznych dla $m>1$; ustalają się one na pewnym niewiele różniąc się od siebie poziomie (Rys. 3.1).

Analiza MES-em dla tej płyty pokazuje także tę tendencję ale mniej wyraźnie.

Zatem im większa różnica grubości rozwarstwień, tym mniejsza różnica naprężeń krytycznych dla $m>1$ przy szerokich rozwarstwieniach.

Zjawisko to tłumaczyć można tym, że dla stosunkowo wąskich rozwarstwień cała płyta (rozwarstwienia i część płyty nierozwarstwiona) traci stateczność poprzez wyboczenie w taką samą liczbę półfal. Wraz ze wzrostem b/B następuje zmiana charakteru wyboczenia: utratę stateczności inicjuje najcieńsze rozwarstwienie.

To szczególnie zachowanie zaobserwowano dzięki możliwością jakie niesie MES i wizualizacja postaci wyboczenia jaką posiada program ANSYS.

Jednak zjawisko to nie musi wypełni odpowiadać rzeczywistemu modelowi, gdyż nie uwzględniono w modelu numerycznym kontaktu między rozwarstwieniami.

6. Wnioski Końcowe

Z przedstawionej pracy wynika, że opracowana metoda może być użyteczna przy rozpatrywaniu wyboczenia lokalnego ortotropowych słupów z wzdłużnymi rozwarstwieniami ścian.

Zaprezentowane podejście umożliwia także modelowanie dźwigarów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego.

Obliczenia przeprowadzone metodą elementów skończonych i programem zbudowanym w oparciu o prezentowaną metodę potwierdziły dużą ich zgodność.

Opracowana metoda po niezbędnych modyfikacjach umożliwi analizę stateczności ortotropowych belek-słupów o dowolnym przekroju poprzecznym przy uwzględnieniu delaminacji przekroju oraz wpływ delaminacji na sprzężone wyboczenie.

Wyniki obliczeń dla innych warunków podparcia płyt na wzdłużnych brzegach zostaną przedstawione na sympozjum.

Literatura

1. Koiter W.T., *Elastic stability and post-buckling behaviour*, *Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems*, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin (1963), 257-275.
2. Królak M. (red.), *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN Warszawa-Łódź (1990)
3. Królak M. (red.), *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Politechnika Łódzka, Monografie Łódź (1995).
4. Kolakowski Z Królak M., *Interactive elastic buckling of thin-walled closed orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction Vol.4* (1995), 571-590.
5. Królak M. Kolakowski Z., *Interactive elastic buckling of thin-walled open orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction Vol.4* (1995), 591-602.
6. Protte W. *Zur kombinierten Beulung zweier sich auf Kontakt berührender elastischer, längsgedrückter Rechteckplatten mit unterschiedlichen Dicken*. *Bauingenieur* 68(1993) 137-143. Springer-Verlag 1993.

Summary

STABILITY OF ORTHOTROPIC PLATES WITH LONGITUDINAL DELAMINATION

This investigation is concerned with buckling of thin-walled plate with longitudinal delamination under axial compression. The plate is assumed to be simply supported at the ends.

The asymptotic expansion established by Byskov and Hutchinson is employed in the numerical calculation in the form of the transition matrix method.

The calculations are carried out for a few plates with different width of delamination. The results showing the relationship between nondimensional width of the delamination and the critical stress are presented in diagrams for a few number of half-waves.