

SPRĘŻONE WYBOCZENIE CIENKOŚCIENNYCH ORTOTROPOWYCH BELEK - SŁUPÓW O PRZEKROJACH OTWARTYCH

M. KRÓLAK
Z. KOŁAKOWSKI

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź*

W pracy przeanalizowano interakcyjne wyboczenie cienkościennych ortotropowych belek-słupów. Przyjęto, że słupy są swobodnie podparte na obu końcach. Zastosowano drugi rząd nieliniowego przybliżenia asymptotycznej teorii Koitera (3) wykorzystując w obliczeniach numerycznych metodę macierzy przejścia. Przeprowadzono analizę wpływu współczynnika ortotropii ścian o głównych kierunkach ortotropii równoległych do ich krawędzi na zachowanie się belek słupów o przekrojach otwartych.

1. Wstęp

Szybki postęp naukowo-technologiczny pozwala coraz szerzej stosować cienkościennie elementy nośne wykonane z materiałów kompozytowych (np. kompozyty włókniste). Materiały kompozytowe modeluje się najczęściej jako materiały ortotropowe. W związku z tym zagadnienie wpływu ortotropii materiału na zachowanie się konstrukcji i jej nośność staje się zagadnieniem aktualnym ze względów poznawczych i praktycznych.

Niektóre konstrukcje cienkościennie zbudowane z elementów płytowych mogą pracować po lokalnej utracie stateczności. Na skutek lokalnego wyboczenia następuje zmniejszenie wzdłużnej sztywności konstrukcji. Wzajemne oddziaływanie różnych postaci utraty stateczności, dla konstrukcji rzeczywistych obciążonych niedokładnościami wstępnymi, jest często decydującym czynnikiem określającym ich nośność graniczną. W bogatej literaturze dotyczącej zagadnień ortotropowych konstrukcji cienkościennych odczuwa się brak szczegółowej analizy sprzężonego wyboczenia uwzględniającego różnorodne postaci odpowiadające wyboczeniu giętnemu, giętno-skrętnemu, zwichrzeniu, lokalnemu, dystorsyjnemu oraz mieszanemu. Szersze omówienie literatury podano np. w (2,6,8,9).

W niniejszej pracy przeanalizowano zagadnienie interakcyjnego wyboczenia cienkościennych belek-słupów wykonanych z homogenicznych płyt ortotropowych o głównych kierunkach ortotropii równoległych do ich krawędzi. Zastosowana metoda rozwiązania zagadnienia umożliwia uwzględnienie wszystkich typów postaci utraty stateczności, zjawiska shear-lag, efektu deplanacji przekrojów poprzecznych oraz uwzględnienie transformacji postaci wyboczenia wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego.

2. Postawienie zagadnienia

W pracy rozpatrzono pryzmatyczne, cienkościenne słupy o przekrojach otwartych zbudowane z homogenicznych ortotropowych płyt prostokątnych połączonych na wzdłużnych brzegach. Założono, że główne osie ortotropii płyt są równoległe do ich brzegów oraz że końce konstrukcji podparte są swobodnie. Materiał wszystkich płyt podlega prawu Hooke'a.

Dla i -tego pasma ortotropowego założono dokładniejsze zależności na odkształcenia względne dla cienkich płyt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ix} &= u_{i,x} + \frac{1}{2}(w_{i,x}^2 + v_{i,x}^2), & \varepsilon_{iy} &= v_{i,y} + \frac{1}{2}(w_{i,y}^2 + u_{i,y}^2) \\ 2\varepsilon_{ixy} &= u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y} \\ \kappa_{ix} &= -w_{i,xx} & \kappa_{iy} &= -w_{i,yy} & \kappa_{ixy} &= -w_{i,xy} \end{aligned} \quad (1)$$

Dla rozpatrywanego przypadku ortotropii równania fizyczne mają następującą postać:

$$\varepsilon_{xi} = \frac{N_{xi} - \nu_{xyi}N_{yi}}{E_{xi}h_i}; \quad \varepsilon_{yi} = \frac{N_{yi} - \nu_{yxi}N_{xi}}{E_{yi}h_i}; \quad \varepsilon_{xyi} = \frac{N_{xyi}}{2G_ih_i} \quad (2)$$

Występujące w równaniach (2) moduły Younga i współczynniki Poissona zgodnie z twierdzeniem Betty'ego-Maxwella muszą spełniać związek:

$$E_{xi}\nu_{yxi} = E_{yi}\nu_{xyi} \quad (3)$$

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczej ścianki wynikają następujące różniczkowe równania równowagi:

$$N_{ix,x} + N_{ixy,y} + (N_{iy}u_{i,y})_{,y} = 0; \quad N_{iy,y} + N_{ixy,x} + (N_{ix}v_{i,x})_{,x} = 0; \quad (4)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + (N_{ix}w_{i,x})_{,x} + (N_{iy}w_{i,y})_{,y} + (N_{ixy}w_{i,x})_{,y} + (N_{ixy}w_{i,y})_{,x} = 0$$

W miejscu połączenia stykających się ścianek spełniono odpowiednie kinematyczne i

statyczne warunki współpracy oraz warunki brzegowe na obciążonych końcach ($x=0$, $x=1$) (4-9).

Nieliniowe zagadnienie stateczności rozwiązano asymptotyczną metodą Byskova i Hutchinsona (1). Pola przemieszczeń \bar{U} i sił \bar{N} rozwinięto w szereg potęgowy względem amplitud postaci wyboczenia ξ_n (amplituda n-tej postaci wyboczenia odniesiona do grubości pierwszej płyty):

$$\bar{U} = \lambda \bar{U}_i^{(0)} + \xi_n \bar{U}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{U}_i^{(nn)} + \dots, \quad \bar{N} = \lambda \bar{N}_i^{(0)} + \xi_n \bar{N}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{N}_i^{(nn)} + \dots, \quad (5)$$

Po podstawieniu rozwinięć (5) do równań równowagi (4), warunków ciągłości i warunków brzegowych otrzymano zagadnienie brzegowe zerowego, pierwszego i drugiego rzędu (1,4,5,7). Aproksymacja zerowa opisuje stan przedwyboczeniowy, podczas gdy pierwszy rząd przybliżenia pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne i odpowiadające jemu postaci wyboczenia. Analiza ograniczona tylko do pierwszego nieliniowego przybliżenia rozwiązania zagadnienia stateczności cienkościennych konstrukcji wskazuje wrażliwość konstrukcji rzeczywistych na niedokładności. Dobrze wiadomo, że konstrukcje, dla których lokalne wyboczenie poprzedza globalne, mogą przenieść obciążenie przewyższające obciążenie odpowiadające krytycznej wartości wyboczenia lokalnego. Analiza ich zachowania się nie zawsze może być otrzymana w ramach asymptotycznej teorii pierwszego nieliniowego przybliżenia, w której graniczne obciążenie jest zawsze mniejsze od minimalnej wartości obciążenia krytycznego zagadnienia liniowego. Konieczne jest zatem uwzględnienie drugiego rzędu przybliżenia, tzn. członów czwartego stopnia w energii potencjalnej, co pozwala wyznaczyć pokrytyczne ścieżki równowagi.

Drugi rząd przybliżenia redukuje się do liniowego układu równań różniczkowych niejednorodnych, którego prawe strony zależą jedynie od pola sił i przemieszczeń pierwszego rzędu. Rozwiązanie tego układu równań przewidziano w postaci szeregów trygonometrycznych w kierunku wzdłużnym zaś w kierunku poprzecznym funkcje drugiego rzędu wyznaczono metodą macierzy przeniesienia, identycznie jak dla pierwszego rzędu (4-6,8,9). Prostota spełnienia warunku ortogonalności jest jedną z głównych przyczyn wybranego tutaj sposobu rozwiązania drugiego rzędu przybliżenia w postaci szeregów, w porównaniu z innymi sposobami. Równania dla lokalnych postaci drugiego przybliżenia zależą nie tylko od odpowiedniej lokalnej postaci pierwszego rzędu, ale ze względu na warunki ortogonalności, końcowe rozwiązanie zależy także od rozpatrywanych postaci pierwszego rzędu. Dlatego też każda z lokalnych postaci drugiego rzędu otrzymana przy uwzględnieniu interakcyjnego wyboczenia nie jest identyczna z postacią otrzymaną w ramach teorii jednomodalnego wyboczenia.

Pokrytyczne ścieżki równowagi dla konstrukcji cienkościennych z amplitudami imperfekcji $\bar{\xi}_n$ odpowiadającymi ξ_n są określone przez następujący układ N równań nieliniowych (1,3,7):

$$a_J \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_J} \right) \xi_J + a_{ijJ} \xi_i \xi_j + b_{ijkJ} \xi_J^3 + \dots = a_J \bar{\xi}_J \frac{\lambda}{\lambda_J}, \quad J=1, \dots, N; \quad (6)$$

gdzie: λ - parametr obciążenia; λ_J - krytyczna wartość λ .

Wyrażenia na a_o , a_J , a_{ijJ} , b_{ijkJ} podano w pracach (1,7). Pokrytyczne współczynniki a_{ijJ} zależą tylko od wartości krytycznych, podczas gdy współczynniki b_{ijkJ} zależą ponadto od pól drugiego rzędu. Wyznaczenie nieliniowych współczynników pokrytycznych oraz współczynników redukcji sztywności wzdłużnej w ramach nieliniowego drugiego rzędu przybliżenia pozwala opisać pełne zachowanie się konstrukcji cienkościennej w zakresie sprężystym.

W rozważaniach przyjęto następujące warunki brzegowe na obu poprzecznych końcach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = 0, y_i) dy_i &= \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = 1, y_i) dy_i = N_{ix}^o; \\ v_i(x_i = 0, y_i) &= v_i(x_i = 1, y_i) = 0, \quad w_i(x_i = 0, y_i) = w_i(x_i = 1, y_i) = 0, \\ w_{i,xx}(x_i = 0, y_i) &= w_{i,xx}(x_i = 1, y_i) = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

Dla scharakteryzowania sposobu obciążenia wprowadzono współczynnik zbliżenia brzegów $\kappa = u_1^{(0)} / u_2^{(0)}$, gdzie $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$ są wartościami przemieszczeń na końcach płyty.

3. Analiza wyników obliczeń

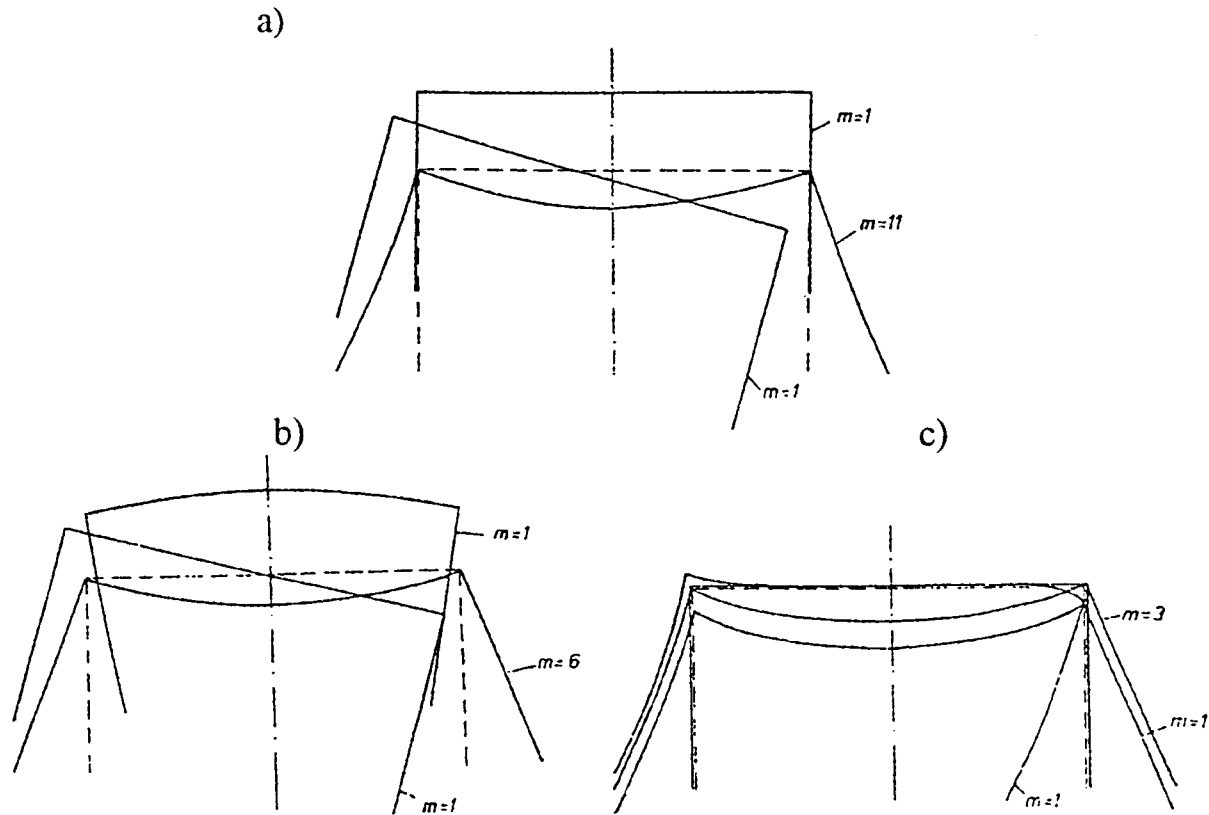
Szczegółowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla ściskanych ortotropowych słupów o przekrojach otwartych.

W analizie numerycznej badano pola drugiego rzędu, pokrytyczne ścieżki równowagi w funkcji współczynnika ortotropii $\beta = E_x / E_y$, parametrów konstrukcji, postaci wyboczenia oraz ich wpływ na obciążenie graniczne.

Dla określenia maksymalnej wartości obciążenia (tzw. nośności granicznej) konstrukcji rzeczywistej z kilkoma postaciami własnymi jest konieczne uwzględnienie wzajemnego oddziaływania różnych postaci wyboczenia. W analizie sprzężonego wyboczenia ograniczono się jedynie do uwzględnienia globalnej postaci

wyboczenia i dwóch najbardziej niebezpiecznych lokalnych postaci mających takie same liczby półfal (4,5).

Przykładowe postaci wyboczenia ściskanego słupa o przekroju ceowym dla różnych współczynników ortotropii β (2) przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Globalne i lokalne postacie wyboczenia dla:
a - $\beta=0.0728$; b - $\beta=1.0$; c - $\beta=13.7362$

Fig. 1. Two global and local buckling modes for compressed column
corresponding to: a - $\beta=0.0728$; b - $\beta=1.0$; c - $\beta=13.7362$

Obliczenia potwierdziły, że w przypadku, gdy wartość obciążenia globalnego przewyższa obciążenie lokalne, jest możliwe osiągnięcie nośności granicznej większej od minimalnej wartości obciążenia lokalnego dla umiarkowanych imperfekcji. Uwzględnienie w analizie sprzężonego wyboczenia drugiego rzędu przybliżenia istotnie ogranicza teoretyczny obszar czułości na niedokładności.

Wyniki obliczeń dla drugiego rzędu przybliżenia zostaną przedstawione podczas referowania pracy.

Praca wykonana w ramach grantu KBN nr PB-251/T07/97/12

Literatura

1. Byskov E., Hutchinson J. W.: *Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells*. AIAA J., 15, 7, 1977, pp. 941-948.
2. Chandra R. Raju B., *Postbuckling analysis for rectangular orthotropic plates*. Int. J. Mech. Sci. Vol. 16, 1973, pp. 81-97.
3. Koiter W.T., *Elastic stability and post-buckling behaviour*, Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin, 1963, pp. 257-275.
4. Kołakowski Z., *Interactive buckling of thin-walled beam-columns with open and close cross sections*. Thin-Walled Structures, Vol. 15, 1993, pp. 159-183.
5. Kołakowski Z.: *Influence of modification of boundary conditions on load carrying capacity in thin-walled columns in the second order approximation*. Int. J. Solids Structures, Vol. 30, No. 19, 1993, pp. 2597-2609.
6. Kołakowski Z. Królak. M, *Interactive elastic buckling of thin-walled closed orthotropic beam-columns*. Engineering Transaction, Vol. 4, 1995, pp. 571-590.
7. Królak M. (red.), *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN Warszawa-Łódź, 1990.
8. Królak M. (red.), *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Politechnika Łódzka Monografie Łódź, 1995.
9. Królak M. Kołakowski Z., *Interactive elastic buckling of thin-walled open orthotropic beam-columns*. Engineering Transaction, Vol. 4, 1995, pp. 591-602.

Summary

INTERACTIVE ELASTIC BUCKLING OF THIN-WALLED OPEN ORTHOTROPIC BEAM-COLUMNS

The present papers deals with a nonlinear analysis of stability of the elastic thin-walled orthotropic beam-columns. The columns are assumed to be simply supported at the ends. The investigation is concerned with a method for the approximate evaluation of the load carrying capacity of thin-walled structures based on the second order nonlinear approximation of the asymptotic theory of stability (3). The asymptotic expansion established by Byskov and Hutchinson (1) is carried out in the numerical calculations using the transition matrix method. The principal goal of numerical analysis is to study the influence of the wall orthotropy factor of open cross-section beam-columns subject to axial and bending.