

Politechnika Łódzka

Jan Rogowski

Modelowanie i symulacja komputerowa  
zjawiska rozpraszania SH fali na cienkiej  
niejednorodności w materiale sprężystym

Monografie Politechniki Łódzkiej  
Łódź 2021

Jan Rogowski

Modelowanie i symulacja komputerowa  
zjawiska rozpraszania SH fali na cienkiej  
niejednorodności w materiale sprężystym

Monografie Politechniki Łódzkiej  
Łódź 2021

Recenzenci:

prof. dr hab. inż. Liliana Byczkowska-Lipińska

prof. dr hab. inż. Ewa Napieralska-Juszczak

© Copyright by Politechnika Łódzka, Łódź 2021

ISBN 978-83-66741-29-4

DOI: 10.34658/9788366287294

Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223

Tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52

E-mail: [zamowienia@info.p.lodz.pl](mailto:zamowienia@info.p.lodz.pl)

[www.wydawnictwo.p.lodz.pl](http://www.wydawnictwo.p.lodz.pl)

Monografie Politechniki Łódzkiej, Nr 2387

# Spis treści

<b>Rozdział 1. Wstęp</b> . . . . .	4
1.1. Układ pracy . . . . .	4
1.2. Uzasadnienie wyboru tematu . . . . .	5
1.2.1. Przegląd ultradźwiękowych metod nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn . . . . .	5
1.2.2. Rola wzorców w badaniach ultradźwiękowych . . . . .	10
1.2.3. Modelowanie i symulacja procedur oraz metod ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn . . . . .	11
1.2.4. Oprogramowanie symulujące procedury ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli wykorzystywane zamiast wzorców w procedurach ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli . . . . .	12
1.2.5. Przegląd istniejących modeli pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym . . . . .	13
1.3. Cele i tezy pracy . . . . .	14
1.4. Oznaczenia . . . . .	15
1.5. Wnioski . . . . .	15
<b>Rozdział 2. Opis wykorzystanych metod</b> . . . . .	16
2.1. Opis metody Wienera-Hopfa . . . . .	16
2.2. Opis metody Galerkina rozwiązywania równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju . . . . .	22
2.3. Opis metody kwadratur mechanicznych rozwiązywania równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju . . . . .	22
2.4. Wnioski . . . . .	23
<b>Rozdział 3. Opis zagadnień</b> . . . . .	24
3.1. Wprowadzenie . . . . .	24
3.2. Wyprowadzenie zasady wzajemności dla ruchu harmonicznego . . . . .	28
3.3. Przedstawienie pola fali rozproszonej na niejednorodności w materiale sprężystym w postaci całki po powierzchni niejednorodności . . . . .	29
3.4. Wnioski . . . . .	33

<b>Rozdział 4. Model pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym</b>	34
4.1. Wyprowadzenie efektywnych warunków brzegowych	34
4.2. Wyprowadzenie mocno osobliwych równań całkowych	37
4.3. Analityczne rozwiązanie równań całkowych	39
4.4. Wnioski	48
<b>Rozdział 5. Model pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności w materiale sprężystym</b>	49
5.1. Wprowadzenie efektywnych warunków brzegowych	49
5.2. Wyprowadzenie układu mocno osobliwych równań całkowych	49
5.3. Analityczne rozwiązanie układu równań całkowych	51
5.4. Wnioski	56
<b>Rozdział 6. Weryfikacja przedstawionych modeli</b>	57
6.1. Weryfikacja efektywnych warunków brzegowych	57
6.1.1. Weryfikacja efektywnych warunków brzegowych dla cienkiej płaskiej niejednorodności	57
6.1.2. Weryfikacja efektywnych warunków brzegowych dla cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności	59
6.2. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązania równania całkowego dla cienkiej płaskiej niejednorodności	60
6.2.1. Numeryczne rozwiązanie mocno osobliwego równania całkowego przy użyciu metody Galerkina dla przypadku miękkiej niejednorodności	60
6.2.2. Numeryczne rozwiązanie mocno osobliwego równania całkowego przy użyciu metody kwadratur mechanicznych dla przypadku sztywnej niejednorodności	62
6.2.3. Numeryczne rozwiązanie mocno osobliwego równania całkowego dla przypadku dowolnego stosunku właściwości mechanicznych niejednorodności i materiału	67
6.2.4. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązania równania całkowego dla cienkiej płaskiej niejednorodności	67
6.3. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązań układów równań całkowych dla cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności	70
6.3.1. Numeryczne rozwiązanie układu mocno osobliwych równań całkowych przy użyciu metody Galerkina	70
6.3.2. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązania równania całkowego dla cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności	72
6.4. Wnioski	72
<b>Rozdział 7. Symulacja komputerowa zjawiska rozpraszania SH fali na cienkiej niejednorodności w materiale sprężystym</b>	74

<i>Spis treści</i>	3
7.1. Pakiet Mathematica . . . . .	74
7.2. Język programowania Java . . . . .	75
7.3. Interfejs J/Link . . . . .	76
7.4. OpenGL . . . . .	76
7.5. Aplikacja symulująca zjawisko rozpraszania SH fali na cienkiej niejednorodności w materiale sprężystym . . . . .	77
7.6. Wnioski . . . . .	79
<b>Rozdział 8. Podsumowanie, wnioski i propozycje kierunków dalszych badań . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>Rozdział 9. Załącznik . . . . .</b>	<b>83</b>
9.1. Obliczanie wartości całki ze wzoru (4.68) . . . . .	83
9.2. Obliczanie wartości całki ze wzoru (4.78) . . . . .	85
9.3. Obliczanie całek ze wzorów (6.11) oraz (6.42) . . . . .	87
<b>Bibliografia . . . . .</b>	<b>89</b>

---

# Rozdział 1

## Wstęp

### 1.1. Układ pracy

Rozprawa składa się z ośmiu (wraz ze wstępem) rozdziałów.

**Rozdział 1** - wstęp zawierający uzasadnienie wyboru tematu na które składają się przegląd ultradźwiękowych metod nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn, opis roli wzorców w badaniach ultradźwiękowych, modelowanie procedur oraz metod ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn, przegląd oprogramowania symulującego wykorzystywanego zamiast wzorców oraz przegląd istniejących modeli dla cienkich płaskich włączeń, które mogą zostać użyte w oprogramowaniu symulującym

**Rozdział 2** zawiera opis metod wykorzystywanych w rozdziałach czwartym, piątym oraz szóstym. W rozdziale tym przedstawione są następujące metody: metoda Winera-Hopfa, metoda kwadratur mechanicznych oraz metoda Galorkina.

**Rozdział 3** przedstawia zagadnienia modelowaniu których poświęcona jest niniejsza rozprawa. Pierwsze zagadnienie polega na rozpraszaniu fali na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym przy założeniu identycznych warunków brzegowych na górnym i dolnym brzegu niejednorodności. Drugie zagadnienie polega na rozpraszaniu fali na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym przy założeniu braku przemieszczeń na dolnym brzegu niejednorodności

**Rozdział 4** przedstawia model pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym dla pierwszego zagadnienia przedstawionego w rozdziale trzecim. Przy opracowaniu modelu wykorzystuje się metodę szeregów asymptotycznych, metodę Fouriera oraz metodę Winera-Hopfa rozwiązywania mocno osobliwych równań całkowych.

**Rozdział 5** przedstawia model pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym dla drugiego zagadnienia przedstawionego w rozdziale trzecim. Przy opracowaniu modelu wykorzystuje się metodę szeregów asymptotycznych, metodę

Fouriera oraz metodę Winera-Hopfa rozwiązywania układów mocno osobliwych równań całkowych.

**Rozdział 6** poświęcony jest weryfikacji modeli przedstawionych w rozdziałach czwartym i piątym.

**Rozdział 7** przedstawia program symulacyjny wykorzystujący modele przedstawione rozdziałach czwartym i piątym.

**Rozdział 8** zawiera podsumowanie, wnioski z przeprowadzonych prac oraz propozycje kierunków dalszych badań w dziedzinie.

## 1.2. Uzasadnienie wyboru tematu

W ostatnich latach znacznie wzrosło zainteresowanie problemem matematycznego modelowania rozprzestrzeniania się fal elastycznych w jednorodnych izotropowych liniowo-sprężystych ośrodkach oraz dyfrakcji fal sprężystych na nieciągłościach występujących w ośrodkach ciągłych w związku z szybkim rozwojem ultradźwiękowych metod badań materiałów sprężystych.

### 1.2.1. Przegląd ultradźwiękowych metod nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn

Ultradźwiękowe metody nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn wykorzystywane obecnie powszechnie w przemyśle na etapie produkcji oraz przy okresowych przeglądach. Metody te służą do wykrywania nieciągłości (wad) w materiałach, do określenia położenia nieciągłości oraz do określenia wielkości, kształtu, orientacji nieciągłości. Pozwala to na podejmowanie decyzji co do zasadności dalszej eksploatacji danej konstrukcji. Metody ultradźwiękowe pozwalają na wykrycie następujących nieciągłości w materiałach sprężystych [4]:

- jamy skurczowe lub pozostałości jamy skurczowej, rzadzizny i wtrącenia w kęsach i wlewkach,
- pęknięcia podłużne (głównie) i poprzeczne, w tym pęknięcia płatkowe, wtrącenia i inne nieciągłości objętościowe, pozostałości jamy usadowej i zawalcowania w prętach,
- pęknięcia podłużne (głównie) i poprzeczne, pozostałości jamy usadowej, zawalcowania, rozwarstwienia, zanieczyszczenia oraz niewłaściwa grubość ścianki rur,
- pęknięcia, jamy skurczowe, rzadzizny, wtrącenia, pęcherze i porowatość w odlewach,
- rzadzizny, wtrącenia niemetaliczne: tlenki, siarczki, wtrącenia, np. materiałów ogniotrwałych, żuźle, duże pęknięcia kuźnicze, w tym krzyże kucia, pęknięcia cieplne i drobne pęknięcia (płatkowe) i segregacje w odkuwkach,
- rozwarstwienia, wtrącenia i pęknięcia w blachach,
- pęknięcia płatkowe, rozwarstwienia, zawalcowania itd. w szynach,



- nieciągłości płaskie: przyklejenia brzegowe i międzywarstwowe, braki przetopu, pęknięcia podłużne i poprzeczne, wycieki, podtopienia lica i grani, nadmierne nadlewy lica, uskoki w złączach spawanych oraz rozwarstwienia w materiale podstawowym, w obszarze przesuwu głowic ultradźwiękowych, a także nieciągłości przestrzenne: pęcherze i skupiska pęcherzy, zużele i wtrącenia obcego metalu w tych złączach,
- pęknięcia, przyklejenia w połączeniach zgrzewanych,
- nieciągłości makroskopowe: rozwarstwienia, braki przyczepności i pęknięcia, wtrącenia, porowatość, rozszczepienia włókien, a także nieciągłości strukturalne (niedopuszczalne odstępstwa od założonej struktury, np. niedostateczna zawartość włókien wzmacniających, niewłaściwy kierunek ich ułożenia, niedostateczna adhezja pomiędzy składnikami kompozytów, mikropęknięcia i pory) materiałów kompozytowych-odznaczają się one silną anizotropią i dużą wartością współczynnika tłumienia fal ultradźwiękowych; informacja o występowaniu nieciągłości jest zawarta w anomaliach tłumienia fal oraz w zmianach czasu przejścia fal.

Większość ultradźwiękowych metod bazuje się na rozpraszaniu sprężystych (ultradźwiękowych) fal przez skazy (nieciągłości, niejednorodności, włączenia) w badanym materiale. W metodach tych uzyskuje się geometryczne oraz mechaniczne parametry skazy w oparciu o pole fali rozproszonej na tej skazie. W praktyce dane pomiarowe porównuje się z danymi teoretycznymi uzyskanymi dla fal harmonicznymi.

Metodami ultradźwiękowymi można badać wyroby przemysłowe powstałe w wyniku procesów walcowania, przeciągania, odlewania oraz kucia. Badane wyroby mogą być wykonane z metali (stali, aluminium, magnezu, miedzi, stopów miedzi, stopu ołowiu, cynku, niklu, stopów niklu, cyrkonu, metali spiekanych, aluminium, wolframu, tytanu, tantalu), materiałów kompozytowych, drewna, tworzyw ceramicznych (porcelany, ceramiki ogniotrwałej), tworzyw sztucznych, szkła, betonu, gumy i wyrobów gumowych oraz połączeń, przede wszystkim złączy spawanych stali ferrytycznych. Metodami tymi mogą być również badane połączenia zgrzewane, połączenia klejone, lutowane, nitowane oraz obiekty wykonane ze struktur z wypełniaczami komórkowymi, z których wykonuje się podzespoły statków powietrznych (stery wysokości, stery kierunku, owiewki, podłoga) oraz podzespoły samochodów. Metody ultradźwiękowe przydają się do badań dużych oraz grubych wyrobów, takich jak kęsy, pręty, rury. Możliwe jest wykrywanie wewnętrznych nieciągłości materiałowych oraz nieciągłości powierzchniowych oraz podpowierzchniowych. Badane wyroby mogą mieć różnorodne kształty. Metody ultradźwiękowe pozwalają stwierdzać obecność nieciągłości w materiale, określać położenie nieciągłości, określać wymiary nieciągłości (głębokości, długości oraz szerokości). Wachlarz zastosowań metod ultradźwiękowych jest bardzo szeroki. Najbardziej istotne zastosowania to:

- defektoskopia różnych obiektów

- pomiar grubości obiektów
- mikrodefektoskopia materiałów
- mikroskopia ultradźwiękowa
- badania właściwości materiałów

Parametry fal ultradźwiękowych wykorzystywanych w badaniach zależą od makroskopowych oraz mikroskopowych właściwości materiałów obiektów badanych takich jak: wymiary, gęstość, własności sprężyste, anizotropia oraz budowa molekularna. Na przykład do wykrywania małych nieciągłości, o ile jest to możliwe ze względu na tłumienie fal ultradźwiękowych, powinny być stosowane przetworniki o możliwie dużej częstotliwości pracy. Najlepsza wykrywalność nieciągłości w wyrobach jest uzyskiwana, jeśli kierunek wiązki ultradźwiękowej jest prostopadły do nieciągłości.

Zalety metod ultradźwiękowych są następujące:

- Możliwość kontroli obiektów w całej ich objętości-od powierzchni, po której przesuwa się głowicę przetwornika do ścian tylnych(den).
- Możliwość wykrywania nieciągłości położonych głęboko w obiektach
- Prowadzenie badań nie jest niebezpieczne dla operatorów oraz innych osób znajdujących się w pobliżu.
- Możliwość prowadzenia badań przy dostępie tylko do jednej powierzchni obiektów.
- Możliwość wykonywania automatycznej analizy i dokumentowania wyników badań prowadzonych z wykorzystywaniem defektoskopów cyfrowych i zautomatyzowanych systemów badań.

W ultradźwiękowych badaniach defektoskopowych zakłada się stałość prędkości propagacji fal w materiale badanego obiektu. Nieniszczące badania obiektów są prowadzone falami ultradźwiękowymi o częstotliwościach od 20kHz do 100MHz. Poniżej podano przykładowe zastosowania ultradźwięków , według stosowanych częstotliwości [4]:

Zakres częstotliwości	Materiały/zastosowanie
0,5-25MHz (najczęściej 1-6MHz)	obiekty metalowe
20kHz-1MHz (często ok. 40-50 kHz)	badanie wytrzymałości betonów na podstawie prędkości propagacji fal
100-500 kHz (ew. 1Mhz)	drewno
1MHz	guma
1-2 MHz	tworzywa sztuczne
0,5-2,25 MHz	materiały kompozytowe
50 MHz	badanie mikrodefektów materiałów kompozytowych
(10 MHz) 50-100 MHz	wykrywanie mikrodefektów w metalach
2-4 MHz	pomiary makronaprzeżeń w obiektach o dużych masach i gabarytach

Obecnie wykorzystywane są następujące metody ultradźwiękowe:

- Metoda echa. Metoda ta jest oparta na odbiciu fal od powierzchni obiektów oraz od nieciągłości obiektów.
- Metoda cienia (przepuszczania). Ta metoda oparta jest na przesłanianiu wiązki fal przez nieciągłość. Wykorzystywana do badania materiałów silnie tłumiących fale ultradźwiękowe.
- Metoda TOFD (ang. Time Of Flight Diffraction). Metoda ta wykorzystuje dyfrakcyjne ugięcie oraz rozpraszanie fal ultradźwiękowych na krawędziach poprzecznych, w stosunku do kierunku propagacji fal, nieciągłości płaskich.

W jednym procesie badań mogą być łączone różne metody badań ultradźwiękowych, np. metoda echa z metodą przepuszczania. W systemach badań wykorzystujących metodę TOFD jest stosowana metoda przepuszczania i zjawisko odbicia fal.

**Metoda echa.** Przy wykorzystaniu metody echa prowadzący badania musi mieć dostęp tylko do jednej powierzchni obiektu, tej z której prowadzi się skanowanie. W metodzie tej informację o występowaniu i wymiarach nieciągłości zawiera jej echo. Echem nazywamy sygnały, wywołane przez reflektory obiektów, prezentowane na ekranach defektoskopów ultradźwiękowych. Echo nieciągłości pojawia się między impulsem początkowym, stanowiącym obrazowanie sygnału, wzbudzającym przetwornik ultradźwiękowy do drgań a echem dna obiektu lub między dalszymi echem dna obiektu. Położenie echa nieciągłości, wzdłuż wyskalowanej podstawy czasu (osi poziomej defektoskopu), zawiera informację o odległości nieciągłości od powierzchni przesuwu głowicy przetwornika. Lokalizacja (określenie odległości nieciągłości od powierzchni przesuwu głowicy przetwornika)

nieciągłości polega na pomiarze czasu przejścia fali ultradźwiękowej w określonym materiale.

Na wysokość echa nieciągłości, przy określonym wzmocnieniu defektoskopu, mają wpływ:

- rodzaj i kształt nieciągłości,
- pole powierzchni nieciągłości,
- orientacja nieciągłości względem wprowadzonej wiązki fal ultradźwiękowych,
- odległość nieciągłości od głowicy przetwornika,
- własności sprężyste, jednorodność i anizotropia materiału.

**Metoda przepuszczania.** Ta metoda jest stosowana do badania obiektów, wykonanych z materiałów silnie tłumiących fale ultradźwiękowe, dla których nie może być wykorzystana metoda echa oraz do wykrywania nieciągłości położonych blisko powierzchni obiektu. W metodzie przepuszczania dwie oddzielne głowice pojedyncze są umieszczane naprzeciwko siebie, na przeciwległych powierzchniach obiektu. Jedna z głowic pełni rolę głowicy nadawczej, a druga-głowicy odbiorczej. Sygnał, obserwowany na ekranie defektoskopu, stanowi impuls fali, która przechodzi przez obiekt. Jeśli na drodze fali występuje nieciągłość, to rejestrowany impuls ma mniejszą amplitudę, niż wtedy, gdy nie ma nieciągłości. O występowaniu nieciągłości świadczy więc osłabienie energii fali przechodzącej od nadajnika do odbiornika. Osłabienie energii tej fali zależy od wymiarów i położenia nieciągłości względem głowic. W tej metodzie nie ma możliwości lokalizacji nieciągłości, ponieważ obserwuje się jedynie impuls wywołany przez przejście fal. Większe osłabienie energii fali przechodzącej następuje, gdy danej wielkości nieciągłość znajduje się bliżej głowicy nadawczej. Wtedy nieciągłość przysłania większą część padającej na nią wiązki ultradźwiękowej niż, wtedy gdy taka sama nieciągłość znajduje się bliżej głowicy odbiorczej. Ocena wymiarów nieciągłości, wykrytych metodą przepuszczania, jest oparta na analizie amplitudy impulsu przechodzącego i na pomiarze szerokości obwiedni tego impulsu [4]. Metoda przepuszczania jest też stosowana w aplikacjach metody TOFD.

**Metoda TOFD.** W aplikacjach tej metody wykorzystywane jest zjawisko dyfrakcji fal ultradźwiękowych na krawędziach nieciągłości płaskich, a także odbicie fal ultradźwiękowych. W przypadku płaskich nieciągłości poprzecznych ugięcie fali ultradźwiękowej następuje zarówno na dolnych, jak i na górnych ich krawędziach. Nieciągłości płaskie zorientowane poziomo powodują odbicie fal. Nieciągłości objętościowe powodują odbicie części wiązki od górnej ich powierzchni. Część wiązki obiega dolną powierzchnię nieciągłości, tracąc swoją energię wskutek odpromieniowania. W badaniach z wykorzystaniem metody TOFD dwie głowice skośne fal podłużnych są umieszczane symetrycznie po obu stronach badanego obszaru obiektu. Jedna z głowic pełni funkcję głowicy nadawczej, a druga-głowicy odbiorczej. Między głowicą nadawczą a głowicą odbiorczą rozchodzi się fala podpowierzchniowa podłużna. Wskutek dyfrakcji fal, zachodzącej na górnej i dolnej krawędzi nieciągłości,

występują także fale ugięte. Impulsy, wywołane przez fale ugięte pojawiają się na ekranie ultradźwiękowego defektoskopu między impulsem wywołanym przez falę podpowierzchniową a impulsem wywołanym przez falę odbita od dna obiektu. W aplikacjach metody TOFD jest wykorzystywana informacja zawarta zarówno w amplitudzie, jak i w fazie sygnałów głowic przetworników ultradźwiękowych. Impuls odbity od dna obiektu (zazwyczaj odbity od granicy z ośrodkiem o mniejszej akustycznej oporności falowej) oraz impuls wywołany przez falę ugiętą na górnej krawędzi nieciągłości mają fazę różną o  $180^\circ$  w stosunku do fazy impulsu wywołanego falą podpowierzchniową. Analiza fazy ugiętych sygnałów dostarcza informacji odnośnie do rodzajów wykrytych nieciągłości.

### 1.2.2. Rola wzorców w badaniach ultradźwiękowych

W badaniach nieniszczących wyrobów przemysłowych metodami ultradźwiękowymi powszechnie wykorzystywane są różnego rodzaju wzorce. Poniżej przedstawiono najważniejsze zastosowania wzorców [4]:

- sprawdzenia możliwości wykonania określonych badań za pomocą wybranej aparatury,
- porównywania wskazań (wysokości obrazów ech, otrzymywanych dla określonej odległości), wywołane przez naturalne nieciągłości obiektów ze wskazaniem, uzyskiwanymi dla sztucznych nieciągłości wzorców,
- porównywania nieznanymi wartościami mierzonej wielkości, np. grubości ścianki zbiorników lub głębokości zalegania nieciągłości materiałowych, z wartością znaną-grubością lub innym wymiarem określonego wzorca,
- porównywania własności materiałów, np. prędkości propagacji fal, ze znanymi, kontrolowanymi własnościami wzorców,
- opracowywania procedur badań,
- porównywania wyników badań, wykonanych przez różne instytucje, z użyciem różnej aparatury,
- wykonywania kalibracji: skalowania zakresu obserwacji układów defektoskop-głowica oraz w sprawdzeniu defektoskopów,
- ustawiania czułości badania,
- sprawdzania parametrów głowic, przede wszystkim rzeczywistego położenia środka oraz kąta załamania głowic skośnych, a także badania widma częstotliwościowego, geometrii wiązki ultradźwiękowej i wielkości ogniska przetworników o wiązce ogniskowanej,
- sprawdzania poprawności pracy i powtarzalności uzyskiwanych wyników badań,
- sprawdzania parametrów defektoskopów: liniowości toru X i charakterystyki wzmocnienia toru Y,
- pomiarów strat przejścia,
- wyznaczania skoku głowic skośnych,

- sporządzania wykresów OWR (Odległość-Wzmocnienie-Rozmiar),
- sporządzania krzywych OKA (Odległościowa Korekta Amplitudy),
- wykonywania badań, w wyniku których są oceniane wymiary nieciągłości, z wykorzystaniem metody OWR,
- wykonywania badań, w wyniku których objekty są kwalifikowane do wadliwych i do takich, w których nie wykryto nieciągłości przekraczających wybrany próg selekcji, na podstawie krzywych OKA, funkcji zasięgowej regulacji wzmocnienia ZRW i przy odnoszeniu sygnałów wywołanych przez naturalne nieciągłości obiektów do sygnałów wywołanych przez określone nieciągłości sztuczne, np. nacięcia,
- wykonywania pomiarów prędkości fal ultradźwiękowych, w celu zapewnienia poprawnej lokalizacji nieciągłości obiektów. Powstaje problem wytworzenia wzorców posiadających określone parametry mechaniczne i zawierających nieciągłości o wymaganych parametrach mechanicznych oraz geometrycznych.

**Ze względu na trudności związane z wytworzeniem różnego rodzaju wzorców do badań ultradźwiękowych prowadzący badania może sięgnąć po oprogramowanie symulujące pole fali rozproszonej niejednorodności w materiale sprężystym.**

### **1.2.3. Modelowanie i symulacja procedur oraz metod ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn**

Modelowanie procedur oraz metod ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli w ostatniej dekadzie jest rozwijającą się dyscypliną z rozszerzającym się zainteresowaniem ze strony przemysłu. Powyższy fakt wymuszają nowe, bardziej rygorystyczne wymagania niezawodności wykorzystywanych metod oraz procedur w NDE/NDT (nondestructive evaluation - nieniszczącej ewaluacji/nondestructive testing - nieniszczącej kontroli) materiałów sprężystych. W celu zakwalifikowania procedury badań ultradźwiękowych do użycia w określonych warunkach musi zostać wykonana spora praca eksperymentalna. Zwiększa to ogólny koszt oraz czas przeprowadzenia badań nieniszczących różnych wyrobów przemysłowych. W celu obniżenia kosztów badań gruntownie uzasadniony model może zostać wykorzystany jako alternatywa oraz uzupełnienie pracy eksperymentalnej.

Największą zaletą wydajnego obliczeniowo, szybkiego, uzasadnionego oraz zweryfikowanego modelu jest jego zdolność do parametrycznych badań oraz do tworzenia nowych procedur testowych.

W przypadku przetestowanych i wdrożonych w proces NDE narzędzi symulacyjnych spore korzyści ekonomiczne mogą być czerpane w całym cyklu życia produktu. Kontrola może być rozważona w sensie liczbowym już na etapie wstępnego projektu podzespołu, kontrola w trakcie produkcji może być zoptymalizowana, natomiast reakcja na sytuacje związane

z użytkowaniem podzespołu może być szybsza i tańsza. Wykorzystanie narzędzi symulujących NDE pozwala skrócić znacząco czas tracony na przeprowadzenie całej procedury NDE. Na przykład dla badań radiologicznych wywołanie każdej kliszy zajmuje sporo czasu w sytuacji kiedy trzeba wykonać kilkadziesiąt zdjęć radiologicznych aby móc obejrzeć podzespół o skomplikowanej geometrii pod każdym interesującym badacza kątem. Wykorzystanie narzędzia symulującego pozwala uzyskać podobne wyniki zdecydowanie szybciej. Uzyskanie lub wyprodukowanie podzespołów z wadami (nieciągłościami) urządzenia znajdujących się we wszystkich krytycznych miejscach urządzenia jest bardzo drogie [78].

Narzędzia symulacyjne NDE pozwalają zademonstrować możliwości metod NDE oraz zakwalifikowanie metod NDE. Zazwyczaj jest dużo parametrów zmieniających się niezależnie. Modele (makiety) dużych urządzeń (turbiny, reaktorów itd.) kosztują sporo pieniędzy, a w trakcie eksperymentów tylko niektóre parametry mogą być zmieniane. Symulacje pozwalają tanim kosztem przeprowadzać badania niezależnie zmieniając dowolne parametry w celu wyznaczenia istotnych z punktu widzenia eksploatacji urządzenia zakresów zmienności parametrów. Wyznaczenie tych zakresów znacząco wpływa na bezpieczeństwo eksploatacji urządzenia [78].

#### **1.2.4. Oprogramowanie symulujące procedury ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli wykorzystywane zamiast wzorców w procedurach ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli**

W chwili obecnej istnieje kilka pakietów oprogramowania symulującego całą procedurę testową.

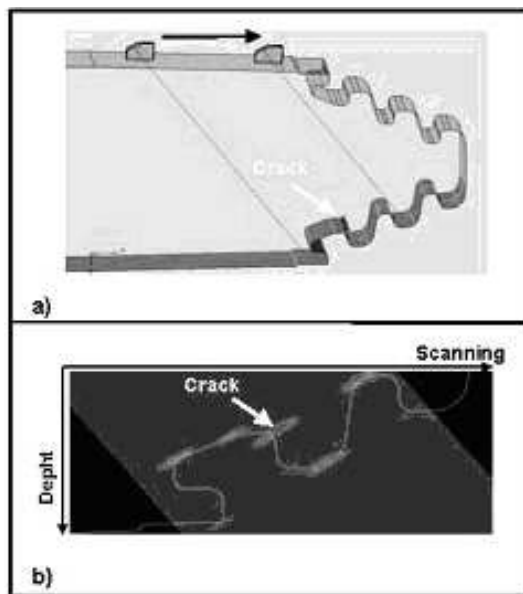
Istnieje kilka poważnych wymagań stawianych takiemu oprogramowaniu. Po pierwsze taki program musi działać na dowolnym sprzęcie, co pociąga za sobą wymóg pracy w środowisku większości systemów operacyjnych dostępnych na rynku. Po drugie oprogramowanie musi dostarczać wyniki w czasie bardzo zbliżonym do rzeczywistego, co pociąga za sobą wykorzystywanie szybkich algorytmów modelujących.

Symulatory NDE mogą być wykorzystywane zamiast wzorców w trakcie badań ultradźwiękowych.

Analiza rynku oprogramowania tego rodzaju pozwala wyciągnąć wniosek, iż najbardziej popularnym pakietem jest CIVA [5], [60], [78], [96], [97], [105], [112], [113], [114], [122], [127], [128], [129], [130]. Pakiet CIVA powstał we Francuskiej Komisji Energii Atomowej (French Atomic Energy Commission-CEA). CIVA pozwala symulować całą procedurę NDT nie tylko dla badań ultradźwiękowych, ale także dla badań radiologicznych oraz prądów wirowych. Dla badań ultradźwiękowych pakiet ten pozwala zamodelować pole ultradźwiękowej fali rozproszonej na kilku różnych klasach niejednorodności w materiale sprężystym.

Symulatory NDE składają się z następujących składników (modułów) [78]:

1. graficznego interfejsu użytkownika (GUI)



Rysunek 1.1. Fragment okna pakietu CIVA zawierający symulację badań ultradźwiękowych a) oraz B-Scan otrzymany w wyniku symulacji b) [114].

2. modułu geometrycznej reprezentacji badanej części lub podzespołu
3. modułu geometrycznej reprezentacji niejednorodności (skazy) w badanym podzespołe
4. modułu symulującego sygnał wejściowy (sygnał ultradźwiękowy)
5. modułu wykonującego obliczenia wzajemnego oddziaływania sygnału wejściowego, podzespołu oraz niejednorodności
6. modułu obliczającego sygnał odbierany przez odbiornik
7. modułu wykonującego post processing syntetycznych danych

**Moduł 5 wykorzystuje modele pola fali rozproszonej na niejednorodności w materiale sprężystym.**

### 1.2.5. Przegląd istniejących modeli pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym

Przeprowadzona analiza literatury pozwala wyróżnić oprócz klasycznych modeli takich jak model Bourn'a zakładający małą różnicę wartości parametrów mechanicznych niejednorodności oraz materiału oraz model Fresnel'a uwzględniający wkład w pole fali rozproszonej tylko składowej geometrycznej fali padającej na niejednorodność następujących modeli:

- modele pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym dla niejednorodności o małym współczynniku sprężystości w porównaniu z materiałem macierzy (pęknięcie) [13], [40], [61], [72], [75], [84], [117], [146],
- modele pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym



dla niejednorodności o dużym współczynniku sprężystości w porównaniu z materiałem macierzy [42], [73], [116],

- Modele dla cienkich płaskich niejednorodności o współczynniku sprężystości i gęstości podobnych do materiału macierzy [33], [97],
- Model dla cienkich płaskich niejednorodności symetrycznych względem osi przechodzącej przez środek niejednorodności dla dowolnych współczynników sprężystości i gęstości niejednorodności i materiału macierzy [154].

Analiza literatury prowadzi do następującego wniosku: istnieje potrzeba stworzenia uniwersalnego modelu pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym obejmującego wszystkie trzy przypadki

- cienkich płaskich niejednorodności o dużym współczynniku sprężystości w porównaniu z materiałem macierzy
- cienkich płaskich niejednorodności o małym współczynniku sprężystości w porównaniu z materiałem macierzy (pęknięcie)
- cienkich płaskich niejednorodności o współczynniku sprężystości i gęstości podobnych do materiału macierzy

### 1.3. Cele i tezy pracy

Niniejsza rozprawa ma na celu opracowanie uniwersalnych modeli pola fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym uwzględniających dowolne parametry materiału oraz niejednorodności dla różnych warunków brzegowych na brzegu niejednorodności oraz stworzenie oprogramowania symulacyjnego wykorzystującego opracowane modele.

Na podstawie badań własnych i analizy literatury zostały sformułowane tezy pracy w sposób następujący:

**Możliwe jest stworzenie uniwersalnego modelu pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym, który uwzględni dowolne wartości parametrów mechanicznych (gęstość, współczynnik sprężystości) materiału oraz włączenia.**

**Możliwe jest stworzenie uniwersalnego modelu pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności w materiale sprężystym, który uwzględni dowolne wartości parametrów mechanicznych (gęstość, współczynnik sprężystości) materiału oraz włączenia.**

## 1.4. Oznaczenia

W rozprawie wykorzystywana jest notacja wektorowa oraz notacja indeksowa. W prostokątnym prawoskrętnym Kartezjańskim układzie współrzędnych ze współrzędnymi oznaczonymi  $x_j$ , wektor  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  jest przedstawiony jako

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i}_1 + u_2 \mathbf{i}_2 + u_3 \mathbf{i}_3, \quad (1.1)$$

gdzie  $\mathbf{i}_j$  są wersorami układu współrzędnych. Ponieważ w pracy często będzie wykorzystywane sumowanie jak we wzorze (1.1), wprowadzona została zasada sumowania zakładająca, że za powtarzającymi się indeksami łacińskimi będzie przeprowadzane sumowanie. Zgodnie z tą zasadą równanie (1.1) może zostać zapisane w postaci  $\mathbf{u} = u_j \mathbf{i}_j$ .

Poniżej umieszczone zostały poszczególne symbole wykorzystywane w rozprawie

$\mathbf{x}$	wektor pozycji (współrzędne $x_i$ )
$\mathbf{u}$	wektor przemieszczeń (składowe $u_i$ )
$\varepsilon$	tensor małych deformacji (składowe $\varepsilon_{ij}$ )
$\tau$	tensor naprężeń (składowe $\tau_{ij}$ )
$\dot{\mathbf{u}}$	pierwsza pochodna po czasie
$\ddot{\mathbf{u}}$	druga pochodna po czasie
$\rho$	gęstość
$\mu$	moduł ścięcia (stała Lamego)
$\lambda$	moduł sprężystości podłużnej (stała Lamego)
$(.,.)$	iloczyn skalarny

Wprowadzony został również skrócony zapis dla pochodnych cząstkowych:  $\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = u_{i,j}$ . Wzory numerowane są kolejno w formacie (rozdział.wzór), np.: (1.2). Odwołania do wzorów mają postać ich porządkowych numerów (jw.). W podobny sposób, tylko że bez nawiasów numerowane są rysunki oraz tabele. Odwołania do rysunków oraz tabel oprócz numeru porządkowego zawierają również słowo - odpowiednio - "rysunek" (rys.), "tabela" (tab.)

## 1.5. Wnioski

W podrozdziale 1.2 zostało umieszczone uzasadnienie wyboru tematu rozprawy na które się składają: przegląd ultradźwiękowych metod nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn, omówienie roli wzorców w badaniach ultradźwiękowych, omówienie zagadnienia modelowania procedur oraz metod ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn, omówienie oprogramowania symulującego wykorzystywanego zamiast wzorców w procedurach ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli

W podrozdziale 1.3 zostały umieszczone cele oraz tezy pracy.

W podrozdziale 1.4 zostały wprowadzone oznaczenia wykorzystane w pracy.

## Rozdział 2

# Opis wykorzystanych metod

### 2.1. Opis metody Wienera-Hopfa

Metoda Wienera-Hopfa [8], [17],[145] służy do rozwiązywania równań oraz układów równań postaci

$$\int_0^{\infty} \Phi(z_0)K(z - z_0)dz_0 = A(z), \quad 0 < z < \infty \quad (2.1)$$

lub

$$\Phi(z) + \int_0^{\infty} \Phi(z_0)K(z - z_0)dz_0 = A(z), \quad 0 < z < \infty \quad (2.2)$$

(niejednorodne równania pierwszego oraz drugiego typu). W zagadnieniach związanych z dyfrakcją fal sprężystych w równaniach (2.1-2.2) jądro przekształcenia całkowego  $K(z - z_0)$  określa znana funkcja Greena, natomiast prawa strona równań  $A(z)$  opisuje rodzaj pola fali padającej. W równaniach (2.1-2.2) niewiadomą jest funkcja  $\Phi(z)$ , która opisuje zazwyczaj rozkład przemieszczeń lub naprężeń na powierzchni półnieskończonej niejednorodności w materiale sprężystym. Równania (2.1-2.2) nazywane są równaniami całkowymi Wienera-Hopfa. Można zauważyć, że równania (2.1-2.2) miałyby postać równań typu spłotu gdyby całki w tych równaniach miały nieskończone granice całkowania, czyli  $-\infty < z < \infty$ , zaś równania byłyby określone dla wszystkich  $z$ . Do rozwiązywania równań typu spłotu można zastosować przekształcenie Fouriera. W przestrzeni przekształcenia Fouriera równania typu spłotu są zwykłymi równaniami algebraicznymi. Pierwszym krokiem w rozwiązywaniu równań (2.1-2.2) jest sprowadzenie tych równań do postaci równań spłotu. W tym celu oznaczmy

$$\Phi_+(z) = \begin{cases} \Phi(z) & , z > 0 \\ 0 & , z < 0 \end{cases} ,$$

gdzie (+) oznacza, że funkcja równa się zeru przy  $z < 0$ . Lewą część równania (2.1) można zamienić na

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z_0)K(z - z_0)dz_0.$$

Prawą stroną równania (2.1) przedstawimy w postaci

$$A_+(z) = \begin{cases} A(z) & , z > 0 \\ 0 & , z < 0 \end{cases} .$$

Teraz możemy zapisać równanie(2.1) w postaci

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{(+)}(z_0)K(z - z_0)dz_0 = A_{(+)}(z), \quad -\infty < z < \infty, \quad (2.3)$$

ale uzyskane równanie nie jest prawdziwe dla wszystkich  $z < 0$ . Aby równanie (2.3) było spełnione dla wszystkich  $z$  musimy wprowadzić dodatkową nieznaną funkcję  $B_{(-)}$  równą zero dla wszystkich  $z > 0$ . Równanie (2.3) możemy teraz zapisać w postaci do której możemy zastosować przekształcenie Fouriera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{(+)}(z_0)K(z - z_0)dz_0 = A_{(+)}(z) - B_{(-)}(z), \quad -\infty < z < \infty. \quad (2.4)$$

W trakcie przekształcenia równania (2.4) musimy znać asymptotyki wchodzących do tego równania funkcji w celu określenie obszarów analityczności ich przekształceń Fouriera. Ponieważ funkcje  $K(z)$  oraz  $A_{(+)}(z)$  są znane, możemy łatwo określić obszary analityczności na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$  funkcji  $k(\alpha) = \mathbf{F}(K(z))$  oraz  $a_{(+)}(\alpha) = \mathbf{F}(A_{(+)}(z))$ , gdzie  $\mathbf{F}(K(z))$  jest przekształceniem Fouriera funkcji  $K(z)$ . Zachowanie nieznanych funkcji  $\Phi_{(+)}$  oraz  $B_{(-)}$  przy  $z \rightarrow 0$  może być określone a priori na podstawie fizycznych uwarunkowań rozpatrywanego zagadnienia. A więc obszary analityczności funkcji  $\phi_{(+)}(\alpha) = \mathbf{F}(\Phi_{(+)}(z))$  oraz  $b_{(-)}(\alpha) = \mathbf{F}(B_{(-)}(z))$  też mogą zostać określone. Funkcje  $k(\alpha)$ ,  $a_{(+)}(\alpha)$ ,  $\phi_{(+)}(\alpha)$  oraz  $b_{(-)}(\alpha)$  muszą posiadać wspólny obszar analityczności na płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$ . Oznaczmy ten pas  $\tau_- < \tau < \tau_+$ , gdzie  $\tau = \text{Re}(\alpha)$ . Stosując do równania (2.4) przekształcenie Fouriera dostajemy

$$\phi_{(+)}(\alpha)k(\alpha) = a_{(+)}(\alpha) - b_{(-)}(\alpha), \quad \tau_- < \tau < \tau_+, \quad (2.5)$$

które zazwyczaj nazywane jest równaniem Wienera-Hopfa lub funkcyjnym równaniem Wienera-Hopfa.

Równanie to zawiera dwie funkcje niewiadome  $b_{(-)}(\alpha)$  oraz  $\phi_{(+)}(\alpha)$ . Funkcje  $a_{(+)}(\alpha)$  oraz  $k(\alpha)$  są znane. Metoda Wienera-Hopfa pozwala znaleźć obydwie funkcje niewiadome z jednego równania. Zakładamy, że funkcję występujące w równaniu są analityczne w następujących obszarach:

$$\begin{aligned} a_{(+)}(\alpha) & \text{ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie } \text{Im}(\alpha) > \tau'_-, \\ \phi_{(+)}(\alpha) & \text{ jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie } \text{Im}(\alpha) > \tau''_-, \\ b_{(-)}(\alpha) & \text{ jest analityczna w dolnej półpłaszczyźnie } \text{Im}(\alpha) < \tau_+. \end{aligned}$$

Zakładamy, że  $\tau_- = \max(\tau'_-, \tau''_-)$ . Wszystkie funkcje występujące w równaniu będą analityczne w pasie  $\tau_- < \tau < \tau_+$ , a więc równanie jest określone w tym pasie.

Metoda ta polega na przedstawieniu równania (2.5) w postaci

$$E^+(\alpha) = E^-(\alpha), \quad \tau_- < \tau < \tau_+. \quad (2.6)$$

W równaniu (2.6)  $E^+(\alpha)$  zawiera  $\phi_{(+)}(\alpha)$  oraz znane funkcje, natomiast  $E^-(\alpha)$  zawiera  $b_{(-)}(\alpha)$  oraz znane funkcje. Funkcja  $E^+(\alpha)$  jest analityczna dla  $Im(\alpha) > \tau_-$ , natomiast funkcja  $E^-(\alpha)$  jest analityczna dla  $Im(\alpha) < \tau_+$ .

W pasie  $\tau_- < Im(\alpha) < \tau_+$  funkcje  $E^+(\alpha)$  oraz  $E^-(\alpha)$  są ciągłe i są sobie równe. Zatem możemy traktować funkcję  $E^+(\alpha)$  jako przedłużenie analityczne funkcji  $E^-(\alpha)$ , a funkcję  $E^-(\alpha)$  możemy traktować jako przedłużenie analityczne funkcji  $E^+(\alpha)$ . Funkcje  $E^+(\alpha)$  oraz  $E^-(\alpha)$  reprezentują zatem jedną funkcję całkowitą  $E(\alpha)$  (analityczną na całej płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $|\alpha| < \infty$ ). Następnie wykorzystywane jest twierdzenie Liouville'a, które mówi, iż jeżeli  $E(\alpha)$  jest funkcją całkowitą oraz  $|E(\alpha)|$  jest ograniczony dla wszystkich wartości z płaszczyzny zmiennej zespolonej  $\alpha$ , to  $E(\alpha)$  jest stała. W celu wyznaczenia wartości tej stałej musimy wyznaczyć wartość funkcji  $E^+(\alpha)$  lub funkcji  $E^-(\alpha)$  dla dowolnego  $\alpha$ . Zazwyczaj wykazuje się, że  $E(\alpha) = o(1)$  dla  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , co po zastosowaniu twierdzenia Liouville'a daje  $E(\alpha) \equiv 0$ .

W celu przedstawienia równania (2.5) w postaci (2.6) musimy sfaktoryzować znaną funkcję  $k(\alpha)$ , czyli musimy przedstawić tę funkcję w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$k(\alpha) = k_{(+)}(\alpha)k_{(-)}(\alpha), \quad (2.7)$$

gdzie  $k_{(+)}(\alpha)$  jest regularna w górnej półpłaszczyźnie  $\tau > \tau_-$ , natomiast  $k_{(-)}(\alpha)$  jest analityczna w dolnej półpłaszczyźnie  $\tau < \tau_+$  zmiennej zespolonej  $\alpha$ . Dodatkowo funkcje te nie mogą posiadać miejsc zerowych w swoich obszarach analityczności.

Podstawienie (2.7) w (2.5) daje

$$\phi_{(+)}(\alpha)k_{(+)}(\alpha) = \frac{a_{(+)}(\alpha)}{k_{(-)}(\alpha)} - \frac{b_{(-)}(\alpha)}{k_{(-)}(\alpha)}, \quad \tau_- < \tau < \tau_+. \quad (2.8)$$

Ponieważ zarówno iloczyn jak i iloraz funkcji analitycznych jest funkcją analityczną lewa strona równania (2.8) jest analityczna w górnej półpłaszczyźnie, natomiast iloraz  $b_{(-)}(\alpha)/k_{(-)}(\alpha)$  jest analityczny w dolnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$ .

Następnie iloraz  $a_{(+)}(\alpha)/k_{(-)}(\alpha)$  musi być przedstawiony w postaci sumy

$$\frac{a_{(+)}(\alpha)}{k_{(-)}(\alpha)} = V_{(+)}(\alpha) + V_{(-)}(\alpha). \quad (2.9)$$

Podstawienie (2.9) w (2.8) daje (2.6), gdzie  $E^{(+)}(\alpha)$  oraz  $E^{(-)}(\alpha)$  zdefiniowane są w następujący sposób

$$E^{(+)}(\alpha) = \phi_{(+)}(\alpha)k_{(+)}(\alpha) - V_{(+)}(\alpha), \quad E^{(-)}(\alpha) = V_{(-)}(\alpha) - \frac{b_{(-)}(\alpha)}{k_{(-)}(\alpha)}, \quad \tau_- < \tau < \tau_+.$$

W równaniu (2.9) wymagane jest rozłożenie funkcji (oznaczymy tę funkcję  $V(\alpha)$ ) na sumę

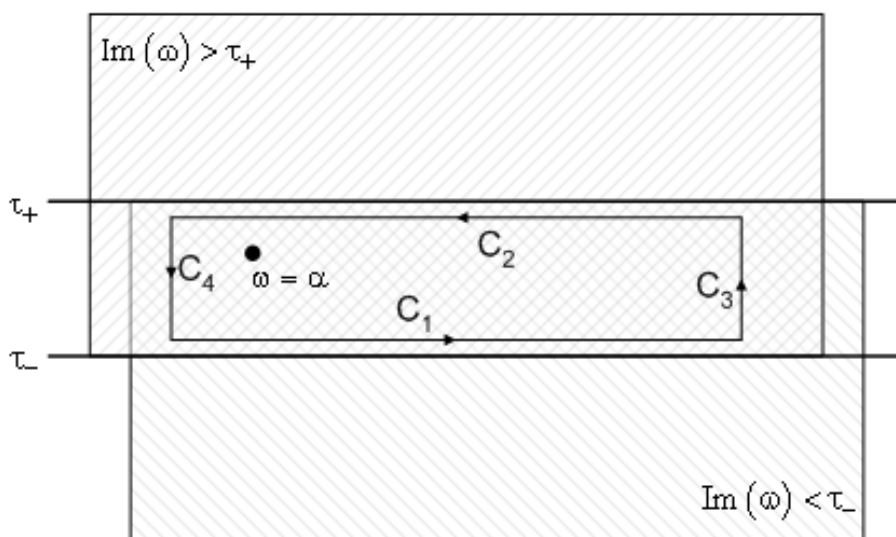
$$V(\alpha) = V_{(+)}(\alpha) + V_{(-)}(\alpha), \quad (2.10)$$

w której funkcja  $V(\alpha)$  jest analityczna w pasie  $\tau_- < \text{Im}(\alpha) < \tau_+$  oraz  $V(\alpha) \rightarrow 0$  równomiernie dla  $|\text{Re}(\alpha)| \rightarrow \infty$  w pasie swojej analityczności, natomiast funkcje  $V_{(+)}(\alpha)$  oraz  $V_{(-)}(\alpha)$  są analityczne dla  $\text{Im}(\alpha) > \tau_-$  oraz  $\text{Im}(\alpha) < \tau_+$  odpowiednio. Funkcja  $V_{(+)}(\alpha) \rightarrow 0$  dla  $\text{Im}(\alpha) \rightarrow \infty$ , funkcja  $V_{(-)}(\alpha) \rightarrow 0$  dla  $\text{Im}(\alpha) \rightarrow -\infty$ .

W rozłożeniu (2.10) możemy wykorzystać całkowite twierdzenie Cauchiego [59], [148], które wiąże wartość funkcji analitycznej w dowolnym punkcie obszaru jej analityczności ograniczonym pewnym konturem z wartościami funkcji na tym konturze według poniższego wzoru:

$$V(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega.$$

Na na rys. 2.1 przedstawiony jest obszar analityczności funkcji  $V(\alpha)$  oraz kontur całkowania  $C$  z twierdzenia całkowitego Cauchiego przestawiony w postaci czterech odcinków  $C_1, C_3, C_2, C_4$ .



Rysunek 2.1. Obszar analityczności funkcji  $V(\alpha)$  oraz kontur całkowania  $C$ .

Dla wszystkich  $\alpha$  z obszaru wewnątrz prostokątnego konturu  $C_1 - C_2 - C_3 - C_4$  zachodzi następujący wzór

$$2\pi i V(\alpha) = \int_{C_1} \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega + \int_{C_2} \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega + \int_{C_3+C_4} \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega.$$

Ponieważ  $V_{(+)}(\alpha) \rightarrow 0$  dla  $|\text{Re}(\omega)| \rightarrow \infty$ , to jeżeli założymy, że szerokość konturu  $C_1 - C_3 - C_2 - C_4$  jest nieskończona, wartość całek po konturach  $C_3$  oraz  $C_4$  wynosi 0. Kontury  $C_1$  oraz  $C_2$  mogą być wybrane dowolnie blisko  $\tau_+$  oraz  $\tau_-$ , więc możemy przyjąć

$$2\pi i V(\alpha) = \int_{-\infty+i\tau_-}^{\infty+i\tau_-} \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega - \int_{-\infty+i\tau_+}^{\infty+i\tau_+} \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega.$$

Ponieważ pierwsza oraz druga całki są analityczne odpowiednio dla  $Im(\alpha) > \tau_-$  oraz  $Im(\alpha) < \tau_+$ , to możemy przyjąć

$$V_{(+)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_-}^{\infty+i\tau_-} \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega, \quad V_{(-)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_+}^{\infty+i\tau_+} \frac{V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega. \quad (2.11)$$

Z równania (2.7) wypływa następująca zależność

$$\ln k(\alpha) = \ln k_{(+)}(\alpha) + \ln k_{(-)}(\alpha). \quad (2.12)$$

Jeżeli  $V(\alpha)$  jest analityczna i nie posiada miejsc zerowych w pasie  $\tau_- < Im(\alpha) < \tau_+$  oraz  $V(\alpha) \rightarrow 1$  równomiernie dla  $|Re(\alpha)| \rightarrow \infty$  w pasie swojej analityczności, natomiast funkcje  $V_{(+)}(\alpha)$  oraz  $V_{(-)}(\alpha)$  są analityczne i nie posiadają miejsc zerowych w  $Im(\alpha) > \tau_-$  oraz  $Im(\alpha) < \tau_+$  odpowiednio, to na podstawie (2.11) oraz (2.12) możemy przedstawić funkcję  $V(\alpha)$  w postaci

$$V(\alpha) = V_{(+)}(\alpha) + V_{(-)}(\alpha), \quad (2.13)$$

gdzie funkcje  $V_{(+)}(\alpha)$  oraz  $V_{(-)}(\alpha)$  określone są przy pomocy następujących wzorów

$$V_{(+)}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_-}^{\infty+i\tau_-} \frac{\ln V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega, \quad V_{(-)}(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_+}^{\infty+i\tau_+} \frac{\ln V(\omega)}{\omega - \alpha} d\omega. \quad (2.14)$$

W przypadku wektorowych funkcjonalnych równań Wienera-Hopfa jądro operatorów całkowych jest macierzą kwadratową  $\mathbf{K}(\alpha)$ . Dla każdej funkcji przedstawionej w postaci macierzy  $\mathbf{K}(\alpha)$  logarytm naturalny  $\mathbf{G}(\alpha) = \ln(\mathbf{K}(\alpha))$  może zostać przedstawiony w postaci szeregu potęgowego  $\ln[\mathbf{I} + (\mathbf{K}(\alpha) - \mathbf{I})] = (\mathbf{K}(\alpha) - \mathbf{I}) - (1/2)(\mathbf{K}(\alpha) - \mathbf{I})^2 + \dots$ , gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową. Rozkład  $\mathbf{G}(\alpha)$  na sumę dwóch funkcji może być wykonany przy użyciu całek typu Cauchy'ego dla każdego elementu macierzy. Sfaktoryzowanie funkcji  $\mathbf{G}(\alpha)$  w postaci

$$\exp[\mathbf{G}^+(\alpha) + \mathbf{G}^-(\alpha)] = \exp[\mathbf{G}^+(\alpha)] \exp[\mathbf{G}^-(\alpha)]$$

jest możliwe wtedy i tylko wtedy gdy

$$\mathbf{K}^+(\alpha)\mathbf{K}^-(\alpha) \equiv \exp[\mathbf{G}^+(\alpha)] \exp[\mathbf{G}^-(\alpha)] = \exp[\mathbf{G}^-(\alpha)] \exp[\mathbf{G}^+(\alpha)] \equiv \mathbf{K}^-(\alpha)\mathbf{K}^+(\alpha),$$

czyli kiedy faktoryzacja jest przemienna. Każde jądro operatora całkowego przedstawione w postaci macierzy kwadratowej  $\mathbf{K}(\alpha)$  pozwalające na faktoryzację przemienną może zostać przedstawione (przy pomocy mnożenia na odpowiednie macierze) w postaci Khrapkova [29]:

$$\mathbf{K}(\alpha) = a(\alpha)\mathbf{I} + b(\alpha)\mathbf{J}(\alpha) \quad (2.15)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową,  $a(\alpha)$  oraz  $b(\alpha)$  są dowolnymi skalarnymi funkcjami  $\alpha$  analitycznymi w pasie  $D$  rosnącymi nie szybciej niż wielomianowo przy dążeniu argumentu do nieskończoności, natomiast  $\mathbf{J}(\alpha)$  jest macierzą kwadratową której elementami są funkcje

całkowite. Elementy macierzy  $\mathbf{J}(\alpha)$  są funkcjami rosnącymi nie szybciej niż wielomianowo przy dążeniu argumentu do nieskończoności oraz zachodzi następująca zależność

$$\mathbf{J}^2(\alpha) = \Delta^2(\alpha)\mathbf{I},$$

gdzie  $\Delta^2(\alpha)$  jest wielomianem względem  $\alpha$ . Dzięki ostatniej właściwości macierzy  $\mathbf{J}(\alpha)$  przemienna faktoryzacja  $\mathbf{K}(\alpha)$  może zostać przedstawiona jako

$$\mathbf{K}(\alpha) = \mathbf{Q}^-(\alpha)\mathbf{Q}^+(\alpha),$$

gdzie  $\mathbf{Q}^\pm(\alpha)$  oraz macierze, których elementy są funkcjami odwrotnymi do elementów  $\mathbf{Q}^\pm(\alpha)$  są analityczne w obszarach  $D^\pm$ . Macierze  $\mathbf{Q}^\pm(\alpha)$  można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{Q}^\pm(\alpha) = r_\pm(\alpha) \left[ \cosh [\Delta(\alpha)\theta_\pm(\alpha)] \mathbf{I} + \frac{1}{\Delta(\alpha)} \sinh [\Delta(\alpha)\theta_\pm(\alpha)] \mathbf{J}(\alpha) \right].$$

Funkcja  $\Delta(\alpha)$  posiada punkty rozgałęzienia w obydwu półpłaszczyznach, natomiast funkcje  $\mathbf{Q}^\pm(\alpha)$  tych punktów nie posiadają, ponieważ są funkcjami kwadratu  $\Delta(\alpha)$ . Zagadnienie redukuje się do rozwiązania dla skalarnych funkcji  $r_\pm(\alpha)$  oraz  $\theta_\pm(\alpha)$ . Funkcje te mogą być wyznaczone poprzez pomnożenie  $\mathbf{Q}^+(\alpha)$  przez  $\mathbf{Q}^-(\alpha)$  i podstawienie wyniku tego mnożenia w równanie (2.15). Uzyskujemy w ten sposób

$$\begin{aligned} r_+(\alpha)r_-(\alpha) \cosh [\Delta(\alpha)(\theta_+(\alpha) + \theta_-(\alpha))] &= a(\alpha), \\ \frac{r_+(\alpha)r_-(\alpha)}{\Delta(\alpha)} \sinh [\Delta(\alpha)(\theta_+(\alpha) + \theta_-(\alpha))] &= b(\alpha), \end{aligned}$$

co po przekształceniach daje

$$[r_+(\alpha)r_-(\alpha)]^2 = a^2(\alpha) - \Delta^2(\alpha)b^2(\alpha), \quad (2.16)$$

$$\theta_+(\alpha) + \theta_-(\alpha) = \frac{1}{\Delta(\alpha)} \operatorname{arctanh} \left[ \frac{\Delta(\alpha)b(\alpha)}{a(\alpha)} \right]. \quad (2.17)$$

Uwzględniając równania (2.10) oraz (2.11) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \theta_+(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_-}^{\infty+i\tau_-} \frac{\operatorname{arctanh} \left[ \frac{\Delta(\omega)b(\omega)}{a(\omega)} \right]}{\Delta(\omega)(\omega - \alpha)} d\omega, \\ \theta_-(\alpha) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\tau_+}^{\infty+i\tau_+} \frac{\operatorname{arctanh} \left[ \frac{\Delta(\omega)b(\omega)}{a(\omega)} \right]}{\Delta(\omega)(\omega - \alpha)} d\omega. \end{aligned}$$

Analogicznie uwzględniając równania (2.13) oraz (2.14) uzyskujemy wzory dla funkcji  $r_+(\alpha)$  oraz  $r_-(\alpha)$ .

W przypadku wektorowych funkcjonalnych równań Wienera-Hopfa po sfaktoryzowaniu jądra operatora całkowego  $\mathbf{K}(\alpha)$  postępujemy dalej zgodnie z algorytmem przedstawionym powyżej.

Rozwiązanie równań (2.1) oraz (2.2), czyli funkcję  $\Phi_{(+)}(z)$  uzyskuje się stosując odwrotne przekształcenie Fouriera dla znalezionej funkcji  $\phi_{(+)}(z)$ .



## 2.2. Opis metody Galerkina rozwiązywania równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju

W celu rozwiązania równania

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x, p)u(p)dp = f(x) \quad (2.18)$$

metodą Galerkina obiera się układ funkcji  $\phi_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) zupełny w przestrzeni  $L^2(a, b)$  i taki, że dla dowolnego  $N$  układ  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$  jest liniowo niezależny [1], [62]. Następnie przyjmuje się, że rozwiązanie przybliżone jest funkcją postaci

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \phi_n(x). \quad (2.19)$$

Współczynniki  $a_n$  wyznacza się z warunku, aby residuum równania (2.19) było ortogonalne do funkcji  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$ . W przestrzeni  $L^2(a, b)$  iloczyn skalarny dwóch elementów  $f(x)$  i  $g(x)$  jest określony jako

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)\bar{g}(x)dx,$$

gdzie  $\bar{g}$  jest wielkością sprzężoną do  $g$ . Warunek ortogonalności residuum równania (2.19) dla funkcji bazowych w przestrzeni  $L^2(a, b)$  sprowadza się do układu równań liniowych dla niewiadomych współczynników  $a_n$

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \phi_n(x)dx - \lambda \sum_{n=1}^N a_n \int_a^b \int_a^b K(x, p)\phi_n(p)dp\bar{\phi}_m(x)dx = \int_a^b f(x)\bar{\phi}_m(x)dx, \quad (2.20)$$

$$m = 1, 2, \dots, N.$$

Jeśli  $\lambda$  nie jest liczbą charakterystyczną, to przy  $N$  dostatecznie dużych układ (2.20) daje rozwiązanie jednoznaczne. Przy  $N \rightarrow \infty$  rozwiązania przybliżone (2.19) dążą w przestrzeni  $L^2(a, b)$  do rozwiązania dokładnego  $\phi(x)$  równania (2.18). Zachodzi oszacowanie

$$\|\phi - \phi_N\| \leq (1 + \varepsilon_N) \|\phi - P_N\phi\|,$$

gdzie  $P_N$  jest operatorem rzutowania na podprzestrzeń rozpiętą na funkcjach  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_N(x)$ , a  $\varepsilon \rightarrow 0$  przy  $N \rightarrow \infty$ .

## 2.3. Opis metody kwadratur mechanicznych rozwiązywania równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju

W celu rozwiązania równania

$$u(x) - \int_a^b K(x, p)u(p)dp = f(x) \quad (2.21)$$

metodą kwadratur mechanicznych do całki występującej w tym równaniu stosujemy dowolny wzór na kwadraturę [1], [62], [149]. Niech będzie to wzór postaci

$$\int_a^b K(x)dx = \sum_{n=1}^N a_n K(x_n). \quad (2.22)$$

Wtedy równanie (2.21) zostanie zastąpione w sposób przybliżony przez równanie

$$u(x) - \sum_{n=1}^N a_n K(x, x_n)u(x_n) = f(x). \quad (2.23)$$

Przyjmując tu  $x = x_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ) otrzymamy układ równań algebraicznych z niewiadomymi  $u(x_m)$ :

$$u(x_m) - \sum_{n=1}^N a_n K(x_m, x_n)u(x_n) = f(x_m), \quad m = 1, 2, \dots, N. \quad (2.24)$$

Rozwiązując ten układ otrzymamy wartości niewiadomej funkcji  $u(x)$  w punktach  $x_m$ . Stosując interpolację uzyskamy wartości funkcji  $u(x)$  na całym przedziale  $[a, b]$ . Metoda kwadratur mechanicznych jest zbieżna też dla pewnej klasy równań z nieciągłym jądrem.

## 2.4. Wnioski

W rozdziale tym przedstawione zostały metody, które zostaną wykorzystane w dalszej części rozprawy.

W podrozdziale 2.1 przedstawiona została metoda Wienera-Hopfa, która zostanie wykorzystana w rozdziałach 4 oraz 5. W podrozdziałach 2.2 oraz 2.3 przedstawione zostały odpowiednio metody Galorkina i kwadratur mechanicznych wykorzystane w rozdziale 6.

## Rozdział 3

# Opis zagadnień

### 3.1. Wprowadzenie

Materiał sprężysty zawierający cienką płaską skazę może zostać zamodelowany jako jednorodny izotropowy liniowo-sprężysty ośrodek zawierający cienką płaską niejednorodność.

*Izotropowy* oznacza, że sprężyste parametry ośrodka nie zależą od kierunku badania ośrodka. Anizotropia (zależność parametrów sprężystych ośrodka od kierunku badania) występuje np. w kryształach. Większość materiałów anizotropii jednak nie wykazuje, więc to założenie nie ogranicza znacząco wachlarza zastosowań modelu.

*Jednorodność* ośrodka polega na tym, że właściwości sprężyste ośrodka nie są funkcjami współrzędnych (są stałe dla całego ośrodka). Ponieważ z reguły w praktyce bada się wyroby przemysłowe wykonane z jednego materiału lub z takiego materiału, którego parametry sprężyste zmieniają się w niewielkim zakresie oraz powoli. To założenie nie ogranicza zasadniczo uniwersalności modelu.

*Liniowa sprężystość* ośrodka polega na tym, że zależność pomiędzy deformacjami i naprężeniami zachodzącymi w ośrodku jest liniowa. Implikuje to wymóg niewielkich amplitud deformacji zachodzących w ośrodku. Wykorzystywane w badaniach fale ultradźwiękowe są powodem rozprzestrzeniania się w ośrodku sprężystym deformacji o niewielkiej amplitudzie.

Zakładamy, że ośrodek ma znane parametry gęstości  $\rho$  oraz modułu ścięcia  $\mu$ . W ośrodku znajduje się jednorodna cienka płaska niejednorodność. Materiał niejednorodności ma gęstość  $\rho_0$  oraz moduł ścięcia  $\mu_0$ . Zakładamy idealny (sztywny) kontakt niejednorodności z ośrodkiem, czyli zakładamy ciągłość naprężeń oraz przemieszczeń na granicy niejednorodności.

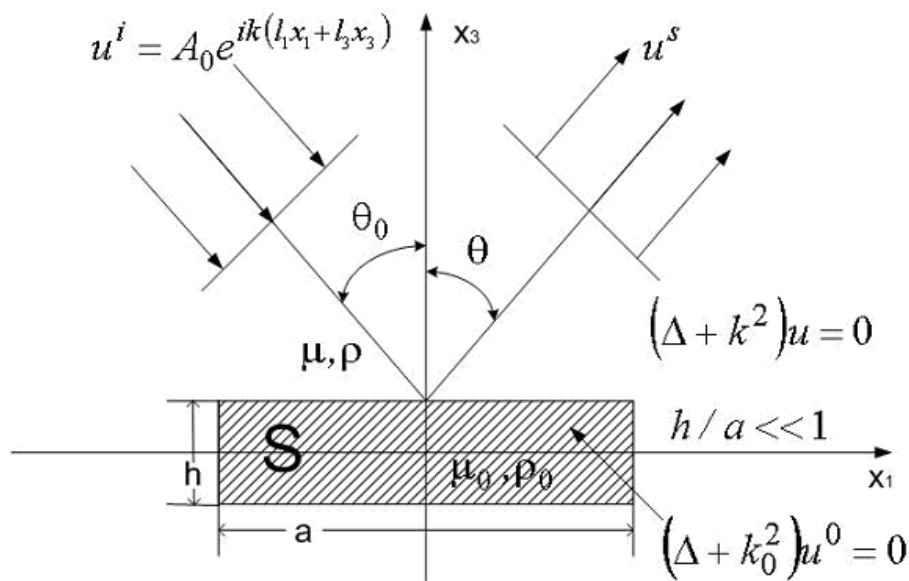
Niejednorodność zajmuje obszar  $S = \{|x_1| < a, |x_3| < h/2\}$ ,  $|x_2| < \infty$ , gdzie  $a$  jest szerokością niejednorodności,  $h$  jest grubością niejednorodności,  $x_1, x_2$  oraz  $x_3$  są współrzędnymi Kartezjańskiego układu współrzędnych umieszczonego w centrum ciężkości niejednorodności. Ponieważ niejednorodność jest jednorodna, środek ciężkości jest środkiem niejednorodności.

Zagadnienie jest dwuwymiarowe. Zakładamy, że niejednorodność jest ograniczona w kierunku osi  $x_2$ . Zakładamy, że pole fali padającej i odbitej oraz całkowite pole nie zależy od współrzędnej  $x_2$ . W praktyce nie stanowi to dużego ograniczenia, ponieważ wkład brzegów niejednorodności w polu dalekim (a takim się zajmujemy) nie jest istotny. Pole dalekie (strefa Fraunhofera) zaczyna się w odległości kilku długości fali od źródła tej fali. W strefie Fraunhofera pole zawiera tylko składową falową, czyli jest o wiele mniej skomplikowane niż przy powierzchni źródła lub źródła wtórnego, którym jest skaza. W praktyce tak dobiera się częstotliwość fali wykorzystywanej w badaniach, że nawet przy wykrywaniu skaz podpowierzchniowych skaza znajduje się w polu dalekim nadajnika, natomiast odbiornik znajduje się w polu dalekim skazy.

Ogólnie wady dzielimy na objętościowe oraz płaskie. W tej pracy zajmujemy się wadami płaskimi. Zakładamy, że stosunek grubości do szerokości niejednorodności jest bardzo mały:  $h/a \ll 1$ . W praktyce istnieje cała klasa zagadnień dotyczących badań wad cienkich w stosunku do szerokości. Takimi wadami są pęknięcia oraz włączenia innych materiałów. Nie stanowi więc to dużego ograniczenia modelu.

Trzeba podkreślić, że nie nakładamy żadnych ograniczeń na sprężyste parametry ośrodka oraz niejednorodności ani na stosunek tych parametrów. Sprawia to, że model jest bardzo uniwersalny.

Zakładamy, że na granicy niejednorodności z ośrodka spada płaska harmoniczna poprzeczna, spolaryzowana poziomo sprężysta fala (fala SH). Przedstawione to zostało na rys. 3.1.



Rysunek 3.1. Opis zagadnienia pierwszego.

Fala padająca jest opisana następującym równaniem:

$$u^i(\mathbf{x}) = A_0 \exp [ik(\mathbf{l}, \mathbf{x})], \quad (3.1)$$

gdzie  $A_0$  jest amplitudą fali padającej,  $k$  jest liczbą falową w ośrodku,  $k = \omega/c$  gdzie  $\omega$  jest częstością kołową,  $c$  jest prędkością fali w ośrodku,  $\mathbf{l} = (l_1, l_3)$ ,  $l_1 = \sin \theta_0$ ,  $l_3 = -\cos \theta_0$  jest kierunkiem rozprzestrzeniania się fali,  $\theta_0$  jest kątem pomiędzy kierunkiem rozchodzenia się fali a zewnętrzną normalną do górnej powierzchni niejednorodności,  $\theta$  jest kątem obserwacji,  $\nu = (\sin \theta_0, \cos \theta_0)$  jest kierunkiem obserwacji. Prędkość fali poprzecznej w ośrodku wynosi  $c^2 = \mu/\rho$ , natomiast w niejednorodności prędkość ta wynosi  $c_0^2 = \mu_0/\rho_0$ .

Zakładamy również, że grubość niejednorodności jest mała w porównaniu z długością fali wykorzystywaną w badaniach, czyli  $kh \ll 1$ . Nie stanowi to żadnego ograniczenia modelu, ponieważ, jak zaznaczyłem wyżej w praktyce zawsze można dobrać odpowiednią częstotliwość fali padającej.

Zagadnienie rozpraszania harmonicznycch fal w ośrodkach sprężystych opisywane jest układem równań Lamego:

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.2)$$

Jest to układ równań ruchu dla ośrodków sprężystych, czyli takich w których mogą rozprzestrzeniać się oprócz fal podłużnych jeszcze fale poprzeczne. W tej pracy zakładamy, że w badaniach jest wykorzystywana tylko fala poprzeczna spolaryzowana poziomo (fala SH). W przypadku fal tego typu nie zachodzą transformacje fal przy odbiciu od niejednorodności, co bardzo upraszcza model. W przypadku odbicia fal podłużnych oraz fal poprzecznych spolaryzowanych pionowo (fal SV) od dowolnej przeszkody powstają dwie fale odbite. W przypadku odbicia fali podłużnej powstaje odbita fala podłużna oraz odbita fala SV. W przypadku odbicia fali SV powstaje odbita fala SV oraz odbita fala podłużna. W fali SH przemieszczenia cząstek ośrodka zachodzą tylko w kierunku  $x_2$ . Pozwala to w równaniu (3.2) pominąć człon  $(\lambda + \mu) \text{grad} \text{div} \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . W ten sposób z (3.2) uzyskujemy równanie

$$\mu \Delta u(\mathbf{x}) + \rho \omega^2 u(\mathbf{x}) = 0,$$

które uwzględniając zależność  $c^2 = \mu/\rho$  możemy przedstawić w postaci

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 u(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.3)$$

Jest to znane z teorii akustyki falowe równanie Helmholtza. Równanie (3.3) opisuje pole przemieszczeń w ośrodku  $u(\mathbf{x})$ . W równaniu (3.3)  $k$  jest liczbą falową w ośrodku. Pole przemieszczeń w niejednorodności  $u^0(\mathbf{x})$  opisywane jest przy pomocy równania

$$\Delta u^0(\mathbf{x}) + k_0^2 u^0(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.4)$$

gdzie  $k_0$  jest liczbą falową w niejednorodności.

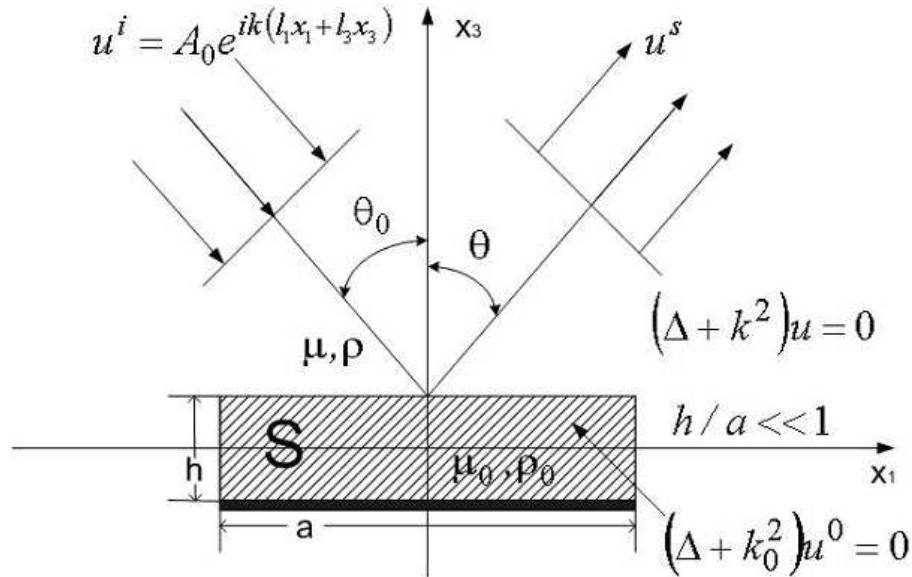
W przypadku zagadnienia pierwszego równania (3.3) oraz (3.4) powiązane ze sobą przy pomocy warunków na brzegu niejednorodności  $\mathbf{x} \in \partial S$

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \partial S, \quad (3.6)$$

gdzie  $\mathbf{n}$  jest zewnętrzną normalną do górnej powierzchni niejednorodności. Równanie (3.5) opisuje ciągłość przemieszczeń na brzegu niejednorodności, natomiast równanie (3.6) zakłada ciągłość normalnych składowych naprężeń na brzegu niejednorodności. Wprowadzamy oznaczenie  $\gamma = \mu_0/\mu$ .

Zagadnienie drugie przy obowiązujących wszystkich przytoczonych wyżej założeniach zakłada również, że niejednorodność jest sztywno podparta z jednej strony. W praktyce sytuacja taka ma miejsce między innymi w materiałach kompozytowych, kiedy kompozyt zawiera skazę znajdującą się tuż nad prętem lub tkaniną wzmacniającą. Zazwyczaj materiał, z którego wykonane są pręty lub tkaniny wzmacniające kompozyty jest bardzo sztywny w porównaniu z resztą składników kompozytu. W przypadku naszego modelu dodatkowe założenie zmienia warunki na brzegach niejednorodności. Opis zagadnienia drugiego przedstawiony został na rys. 3.2.



Rysunek 3.2. Opis zagadnienia drugiego.

Sztywne podparcie niejednorodności implikuje brak przemieszczeń na brzegu niejednorodności od strony podparcia.

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\mu_0}{\mu} \frac{\partial u^0(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{x} \in \partial S \setminus \left\{ x_3 = -\frac{h}{2} \right\}, \quad (3.7)$$

$$u(\mathbf{x}) = u^0(\mathbf{x}) = 0, \quad x_3 = -h/2. \quad (3.8)$$

Równanie (3.7) opisuje ciągłość przemieszczeń oraz ciągłość normalnych składowych naprężeń na brzegu niejednorodności pomijając część brzegu od strony podparcia, natomiast równanie (3.8) zakłada brak przemieszczeń na brzegu niejednorodności od strony podparcia.

Równania (3.1)-(3.8) modelują ruch ośrodka sprężystego zawierającego cieniłą płaską niejednorodność (zagadnienie pierwsze) oraz zawierającego cieniłą płaską sztywno podpartą niejednorodność (zagadnienie drugie) w przypadku rozchodzenia się w ośrodku harmonicznego fali sprężystej. Opisują one kontaktowe zagadnienia brzegowe dynamicznej teorii sprężystości.

Równania te są równaniami wyjściowymi dla poniżej przedstawionych modeli amplitudy (w polu dalekim)  $u^s(\mathbf{x})$  fali odbitej od włączenia w materiale sprężystym.

### 3.2. Wyprowadzenie zasady wzajemności dla ruchu harmonicznego

Drugie prawo Newtona dla ośrodków sprężystych przybiera postać pierwszego prawa ruchu Cauchyego

$$\tau_{ij,j} + f_j = \rho \ddot{u}_i, \quad (3.9)$$

gdzie  $f$  jest siłą działającą na jednostkę objętości ośrodka o gęstości  $\rho$ ,  $\tau_{ij}$  są składowymi tensora naprężeń,  $u_i$  są składowymi wektora przemieszczeń. Dla ruchu harmonicznego (zależność czasowa postaci  $e^{-i\omega t}$ ) równanie to przyjmuje postać

$$\tau_{ij,j} - \rho \omega^2 u_i = -f_j. \quad (3.10)$$

W liniowo sprężystych ośrodkach deformację można przedstawić przy pomocy tensora małych odkształceń  $\varepsilon$  którego składowe zależą od składowych wektora przemieszczeń w następujący sposób

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.11)$$

Oczywiście  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , więc  $\varepsilon$  jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu.

Składowe tensora naprężeń  $\tau_{ij}$  powiązane ze składowymi tensora małych odkształceń  $\varepsilon_{ij}$  przy pomocy prawa Hooke'a, które dla jednorodnych izotropowych ośrodków przyjmuje postać

$$\tau_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.12)$$

gdzie  $\lambda$  oraz  $\mu$  są stałymi Lamego opisującymi właściwości sprężyste ośrodka, natomiast  $\delta_{ij}$  jest deltą Kronekera

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

Podstawiając równanie (3.11) do równania (3.12), a następnie podstawiając otrzymany wynik w równanie (3.10) uzyskujemy (3.2) dla poszczególnych składowych wektora przemieszczeń  $u_i$  przy założeniu, że  $f(x, \omega) \equiv 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Rozpatrzmy dwa różne pola przemieszczeń  $u_i^A$  oraz  $u_i^B$  spełniające poniższe równania

$$\tau_{ij,j}^A - \rho\omega^2 u_i^A = -f_i^A, \quad (3.13)$$

$$\tau_{ij,j}^B - \rho\omega^2 u_i^B = -f_i^B. \quad (3.14)$$

Mnożymy równanie (3.13) przez  $u_i^B$ , a równanie (3.14) przez  $u_i^A$  i odejmujemy równanie (3.14) od równania (3.13). Dostajemy

$$f_i^B u_i^A - f_i^A u_i^B = \tau_{ij,j}^A u_i^B - \tau_{ij,j}^B u_i^A. \quad (3.15)$$

Z równań (3.11) oraz (3.12) otrzymujemy

$$\tau_{ij,j}^A u_i^B - \tau_{ij,j}^B u_i^A = 0. \quad (3.16)$$

Uwzględniając równanie (3.16) oraz zależność

$$\left( \tau_{ij}^A u_i^B - \tau_{ij}^B u_i^A \right)_{,j} = \tau_{ij,j}^A u_i^B + \tau_{ij}^A u_{i,j}^B - \tau_{ij,j}^B u_i^A - \tau_{ij}^B u_{i,j}^A$$

z równania (3.15) uzyskujemy

$$f_i^B u_i^A - f_i^A u_i^B = \left( \tau_{ij}^A u_i^B - \tau_{ij}^B u_i^A \right)_{,j} \quad (3.17)$$

Całkując obustronnie równanie (3.17) po dowolnym obszarze  $V$  z brzegiem  $S$  oraz stosując twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego dostajemy

$$\int_V f_i^B u_i^A - f_i^A u_i^B dV = \int_S \left( \tau_{ij}^A u_i^B - \tau_{ij}^B u_i^A \right) \mathbf{n}_j dS. \quad (3.18)$$

W równaniu (3.18)  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem kierunku zewnętrznej normalnej do powierzchni  $S$ . Równanie (3.18) jest elastodynamiczną zasadą wzajemności dla fal harmoniczych. Tożsamość ta pozwala uzależnić pole fali rozproszonej na niejednorodności znajdującej się w materiale sprężystym z wartością pola na powierzchni tej niejednorodności.

### 3.3. Przedstawienie pola fali rozproszonej na niejednorodności w materiale sprężystym w postaci całki po powierzchni niejednorodności

Niech znajdująca się w materiale sprężystym niejednorodność zajmuje obszar  $S$  wraz z brzegiem  $\partial S$ . Zakładamy, że  $S_R$  jest okręgiem o promieniu  $R$  ze środkiem w początku



przyjętego przez nas układu współrzędnych,  $V_R$  jest wnętrzem okręgu  $S_R$ .  $R$  wybieramy tak, aby niejednorodność całkowicie mieściła się w  $S_R$ . Zakładamy również, że w obszarze  $D = V_R - S$  znajduje się źródło fali padającej na niejednorodność. Fala padająca jest rozpraszana na niejednorodności, więc niejednorodność jest źródłem wtórnego promieniowania. Całkowite pole w  $D$  może być przedstawione w postaci

$$u_i = u_i^i + u_i^s, \quad \tau_{ij} = \tau_{ij}^i + \tau_{ij}^s,$$

gdzie  $u_i^i$  oraz  $\tau_{ij}^i$  opisują pole przemieszczeń oraz naprężeń w przypadku braku niejednorodności. Rozproszone pole spełnia jednorodne równanie (3.2) (dla  $f(\mathbf{x}, \omega) \equiv 0$ ) oraz pewne warunki brzegowe na  $\partial S$ . Zastosujemy zasadę wzajemności (3.18) dla obszaru  $D$  dla następujących dwu stanów

$$\{u_i^A(\mathbf{x}), \tau_{ij}^A(\mathbf{x})\} = \{u_i^s(\mathbf{x}), \tau_{ij}^s(\mathbf{x})\}$$

oraz

$$\{u_i^B(\mathbf{x}), \tau_{ij}^B(\mathbf{x})\} = \{u_{i;k}^G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^Q), \tau_{ij;k}^G(\mathbf{x} - \mathbf{x}^Q)\}.$$

Stan A odpowiada polu fali rozproszonej na niejednorodności. Stan B odpowiada rozwiązaniu równania (3.10) dla punktowego źródła  $f^B$  o jednostkowej amplitudzie umieszczonego w punkcie obserwacji  $Q$  i promieniującego w kierunku  $i_k$

$$f^B = i_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^Q), \quad (3.19)$$

gdzie funkcja  $\delta$  jest deltą Diraka [131]. Jest to tak zwane rozwiązanie podstawowe.

Dla  $\mathbf{x}^Q$  należącego do  $D$  wzór (3.18) przybiera postać

$$u_k^s(\mathbf{x}^Q) = - \int_S (u_{i;k}^G \tau_{ij}^s - u_i^s \tau_{ij;k}^G) n_j dS + I_k, \quad (3.20)$$

gdzie

$$I_k = - \int_{S_R} (u_{i;k}^G \tau_{ij}^s - u_i^s \tau_{ij;k}^G) n_j dS \quad (3.21)$$

oraz  $\mathbf{n}$  jest jednostkowym wektorem kierunku zewnętrznej normalnej do powierzchni  $\partial S$  oraz  $S_R$  (normalna do powierzchni  $\partial S$  jest skierowana w otaczający niejednorodność materiał).

We wzorach (3.20) oraz (3.21) został uwzględniony ten fakt, iż dla rozproszonego pola w (3.18)  $f_i^A \equiv 0$  oraz  $f_i^B \equiv 1$ , ponieważ opisane równaniem (3.19) źródło ma jednostkową amplitudę.

Dowiedziemy, że całka (3.21) znika przy  $R \rightarrow \infty$ . Możemy tego dokonać korzystając z warunku promieniowania Sommerfelda. Warunek ten głosi, że na dużych odległościach od źródła zależność pomiędzy przemieszczeniami i naprężeniami, które mają miejsce w fali muszą być lokalnie takie same jak w fali płaskiej biegnącej w nieskończoność. Oprócz tego amplituda fali maleje przy  $R \rightarrow \infty$  jak  $1/R$  dla przypadku trójwymiarowego lub jak  $1/\sqrt{R}$

dla przypadku dwuwymiarowego. Warunek promieniowania Sommerfelda można zapisać w następującej postaci

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left( \frac{\partial}{\partial R} - ik \right) u(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.22)$$

dla

$$R = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

lub

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left( \frac{\partial}{\partial R} - ik \right) u(\mathbf{x}) = 0 \quad (3.23)$$

dla

$$R = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

gdzie

$$k = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Ponieważ rozwiązanie podstawowe spełnia warunek promieniowania Sommerfelda, to  $u_{i;k}^G \rightarrow 0$  oraz  $\tau_{ij;k}^G \rightarrow 0$  przy  $R \rightarrow \infty$ . Więc przy  $R \rightarrow \infty$  całka (3.21) dąży do zera. Dalej będziemy zakładać, że argumentem funkcji  $u_k^s(\mathbf{x})^Q$  jest punkt obserwacji rozproszonego na niejednorodności pola przemieszczeń i będziemy go oznaczać  $\mathbf{x}$ , natomiast lewą stronę równania (3.20) będziemy oznaczać  $u_k^s(\mathbf{x})$ . Ponieważ  $S_R$  możemy wybrać dowolnie (lewa strona równania (3.20) nie zależy od wyboru  $R$ ) możemy równanie (3.20) zapisać w postaci

$$u_k^s(\mathbf{x}) = - \int_S \left( u_{i;k}^G \tau_{ij}^s - u_i^s \tau_{ij;k}^G \right) n_j dS. \quad (3.24)$$

Dla przypadku dwuwymiarowego rozwiązanie podstawowe  $u^G$  przyjmuje postać

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x} - \mathbf{y}|), \quad (3.25)$$

gdzie  $H_0^{(1)}(z)$  jest funkcją Hankela pierwszego rodzaju.  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  jest funkcją dwóch zmiennych. Wartość tej funkcji określa przemieszczenie w punkcie  $\mathbf{x}$  powstałe na skutek działania w punkcie  $\mathbf{y}$  jednostkowego źródła punktowego określonego równaniem (3.19).

Pole fali rozproszonej na niejednorodności w materiale sprężystym  $u^s$  musi spełniać warunek promieniowania Sommerfelda [8]. Wynika z tego, że

$$u^s(\mathbf{x}) \approx A \frac{e^{ikR+i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k R}}, \quad R \rightarrow \infty, \quad R = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad (3.26)$$

gdzie  $A$  jest zespoloną amplitudą fali rozproszonej. Ogólnie wartość  $A$  zależy od liczby falowej  $k$  oraz kierunku  $\mathbf{l}$  fali użytej w badaniu oraz od kierunku obserwacji  $\nu = \mathbf{x}/|\mathbf{x}| = (\sin \theta, \cos \theta)$ . Dlatego będziemy korzystać z oznaczenia  $f(k; \mathbf{l}, \nu)$  dla zespolonej amplitudy fali rozproszonej i równanie (3.26) przyjmie postać

$$u^s(\mathbf{x}) \approx f(k; \mathbf{l}, \nu) \frac{e^{ikR+i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k R}}, \quad R \rightarrow \infty, \quad R = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (3.27)$$

Funkcję Hankela pierwszego rodzaju przy  $R \rightarrow \infty$  możemy przedstawić w postaci przybliżonej:

$$H_0^{(1)}(kR) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi k R}} e^{ikR - i\pi/4}.$$

Tak więc funkcję  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  przy  $R \rightarrow \infty$  możemy zapisać w postaci

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \approx -\sqrt{\frac{1}{8\pi k R}} e^{ikR + i\pi/4} e^{-ik(\nu, \mathbf{y})}. \quad (3.28)$$

Ponieważ składowe tensora naprężeń są proporcjonalne do pochodnej wektora przemieszczeń w kierunku zewnętrznej normalnej do powierzchni, równanie (3.24) możemy zapisać w postaci (wektorowej)

$$u^s(\mathbf{x}) = \int_S \left( g(\mathbf{x}^Q, \mathbf{y}) \tau^s(\mathbf{y}) - u^s(\mathbf{y}) \frac{\partial g(\mathbf{x}^Q, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} \right) \mathbf{n} dS_y. \quad (3.29)$$

Dla zagadnień opisywanych wzorami (3.1)-(3.8), czyli dla cienkich płaskich niejednorodności w materiale sprężystym przy założeniu  $kh \ll 1$  równanie (3.29) przyjmuje postać

$$u^s(\mathbf{x}) = \int_{-a}^a \left( g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Phi_1(y_1) - \Phi_3(y_1) \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_3} \right)_{y_3=0} dy_1, \quad (3.30)$$

gdzie  $\Phi_3(y_1)$  jest skokową zmianą przemieszczeń na włączeniu (różnicą wartości przemieszczeń między górnym i dolnym brzegu), natomiast  $\Phi_1(y_1)$  jest skokową zmianą naprężeń na włączeniu.

$$\Phi_1(y_1) = \left( \frac{\partial u^+(\mathbf{y})}{\partial x_3} - \frac{\partial u^-(\mathbf{y})}{\partial x_3} \right)_{y_3=0}, \quad \Phi_3(y_1) = u^+(\mathbf{y}) - u^-(\mathbf{y}), \quad (3.31)$$

gdzie

$$u^\pm(\mathbf{y}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(y_1, \pm\varepsilon).$$

W równaniu (3.30) całkowanie odbywa się po środkowej linii włączenia. Uwzględniając zależność (3.28) równanie (3.30) możemy zapisać w postaci

$$u^s(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ik|\mathbf{x}| + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k |\mathbf{x}|}} \int_{-a}^a \left[ \Phi_1(y_1) e^{-ik(\nu, \mathbf{y})} + \Phi_3(y_1) \frac{\partial}{\partial y_3} e^{-ik(\nu, \mathbf{y})} \right]_{y_3=0} dy_1 \quad (3.32)$$

Obliczając pochodną cząstkową drugiego składnika funkcji podcałkowej w równaniu (3.32) uzyskujemy

$$u^s(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ik|\mathbf{x}| + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k |\mathbf{x}|}} \int_{-a}^a \left[ \Phi_1(y_1) e^{-ik(\nu, \mathbf{y})} + \Phi_3(y_1) ik\nu_3 e^{-ik(\nu, \mathbf{y})} \right]_{y_3=0} dy_1 \quad (3.33)$$

Uwzględniając, że w równaniu (3.33) całkowanie odbywa się wzdłuż środkowej linii niejednorodności ( $y_3 = 0$ ) uzyskujemy

$$u^s(\mathbf{x}) = -\frac{e^{ik|\mathbf{x}| + i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k |\mathbf{x}|}} \int_{-a}^a \Phi_1(y_1) e^{-ik\nu_1 y_1} + \Phi_3(y_1) ik\nu_3 e^{-ik\nu_1 y_1} dy_1 \quad (3.34)$$

Uwzględniając równanie (3.27) z równania (3.34) uzyskujemy

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = - \int_{-a}^a \Phi_1(y_1) e^{-ik\nu_1 y_1} + \Phi_3(y_1) ik\nu_3 e^{-ik\nu_1 y_1} dy_1 \quad (3.35)$$

Równanie (3.35) pozwala obliczyć w polu dalekim zespoloną amplitudę fali rozproszonej na niejednorodności w materiale sprężystym. W praktyce wykorzystuje się tylko część rzeczywistą amplitudy  $\text{Re}(f(\omega; \mathbf{l}, \nu))$ .

Przedstawione w rozprawie modele pozwalają uzyskiwać wartość amplitudy (3.35) dla dowolnych kierunków sondowania  $\mathbf{l}$ , dowolnych kierunków obserwacji  $\nu$ , oraz dowolnych współczynników sprężystości  $\mu$  i gęstości  $\rho$  materiału sprężystego i niejednorodności.

Równanie (3.35) zawiera niewiadome funkcje  $\Phi_1(y_1)$  oraz  $\Phi_3(y_1)$ . Wyznaczenie tych funkcji dla dwóch zagadnień przedstawionych w tym rozdziale stanowi treść następnych dwóch rozdziałów.

### 3.4. Wnioski

W podrozdziale 3.1 zostały przedstawione zagadnienia tworzeniu modeli których jest poświęcona rozprawa.

W podrozdziale 3.2 została wyprowadzona zasada wzajemności dla ruchu harmonicznego w oparciu o którą w podrozdziale 3.3 pole fali rozproszonej na niejednorodności w materiale sprężystym zostało przedstawione w postaci całki po powierzchni niejednorodności.

W podrozdziale 3.3 został wyprowadzony wzór (3.35) pozwalający obliczyć w polu dalekim zespoloną amplitudę fali rozproszonej na niejednorodności w materiale sprężystym. Równanie (3.35) zawiera niewiadome funkcje  $\Phi_1(y_1)$  oraz  $\Phi_3(y_1)$ . Wyznaczeniem tych funkcji dla pierwszego zagadnienia przedstawionego w podrozdziale 3.1 zajmiemy się w rozdziale 4, natomiast wyznaczeniem funkcji  $\Phi_1(y_1)$  oraz  $\Phi_3(y_1)$  dla drugiego zagadnienia przedstawionego w podrozdziale 3.1 zajmiemy się w rozdziale 5.

W dalszej części rozprawy stosować będziemy  $x_1$  do oznaczenia argumentu funkcji  $\Phi_1$  oraz  $\Phi_3$ , aby zaznaczyć, że argument tych funkcji jest pierwszą składową wektora współrzędnych punktu w układzie współrzędnych kartezjańskich.

## Rozdział 4

# Model pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym

### 4.1. Wyprowadzenie efektywnych warunków brzegowych

Wprowadzając efektywne warunki brzegowe możemy zastąpić układ równań różniczkowych (3.3) i (3.4) oraz warunki brzegowe (3.5) i (3.6) tylko jednym równaniem, które musi spełniać szukana funkcja spełniająca jednocześnie efektywne warunki brzegowe. Upraszcza to znacząco zagadnienie, co prowadzi do skrócenia czasu potrzebnego do uzyskania rozwiązania zagadnienia [43], [45], [46], [55], [65], [73], [126]. Wyprowadzenie efektywnych warunków brzegowych zgodnie z ogólnym schematem metody asymptotycznej [81], [82], [103] zaczynamy od wprowadzenia zmiennej  $\bar{x}_3 : x_3 = \varepsilon \bar{x}_3$  oraz przedstawienia pola przemieszczeń w niejednorodności (pomijając otoczenie punktów  $x_1 = \pm a$ ) w postaci szeregu asymptotycznego:

$$u^0(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j^0(x_1, \bar{x}_3), \mathbf{x} \in S. \quad (4.1)$$

Analogicznie dla  $R_2 \setminus S$  przedstawiamy pole rozproszone w postaci szeregu asymptotycznego

$$u^s(\mathbf{x}) \approx \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j^s(\mathbf{x}). \quad (4.2)$$

Asymptotyki pól (4.1) oraz (4.2) uzależnione są od relacji pomiędzy parametrami  $\gamma$  oraz  $\varepsilon$ :

1.  $\sqrt{\varepsilon} \leq \gamma \leq 1/\sqrt{\varepsilon}$ ;
2.  $0 \leq \gamma \leq \sqrt{\varepsilon}$ ;
3.  $1/\sqrt{\varepsilon} \leq \gamma \leq \infty$ .

Przedział 1 odpowiada słabej niejednorodności kiedy mechaniczne parametry ośrodka i niejednorodności są zbliżone.

Przedział 2 opisuje przypadek miękkiej niejednorodności kiedy sztywność niejednorodności jest o wiele mniejsza od sztywności ośrodka.

Przedział 3 odpowiada niejednorodności o dużej sztywności.

Podstawiając równania (4.1), (4.2) w odpowiednie równania Helmholtza (3.3), (3.4) i warunki brzegowe (3.5) i (3.6) oraz przyrównując do siebie współczynniki przy takich samych potęgach  $\varepsilon$  uzyskujemy rekurencyjny ciąg zwykłych równań różniczkowych zmiennej  $x_3 = \varepsilon \bar{x}_3$  względem nieznanymi współczynnikami równań (4.1) oraz (4.2). Uwzględniając tylko pierwsze wyrazy szeregów (4.1) oraz (4.2) i uwzględniając ten fakt, że  $\gamma \approx \text{const} \neq 0$  przy  $\varepsilon \rightarrow 0$  dla słabej niejednorodności uzyskujemy

$$\Phi_1(x_1) \approx (1 - \gamma)h \frac{\partial^2 u^i(x_1)}{\partial x_1^2} + (k^2 - \gamma k_0^2)h u^i(x_1), \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x_1) &\approx \frac{1 - \gamma}{\gamma} h \left. \frac{\partial u^i(\mathbf{x})}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}, \quad |x_1| < a, \\ u^0(\mathbf{x}) &\approx u^i(x_1) + \frac{x_3}{\gamma} \left. \frac{\partial u^i(\mathbf{x})}{\partial x_3} \right|_{x_3=0}, \quad \mathbf{x} \in S, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\Phi_1 = \left[ \frac{\partial u}{\partial x_3} \right]_-^+ = \frac{\partial u^+}{\partial x_3} - \frac{\partial u^-}{\partial x_3}, \quad \Phi_3 = [u]_-^+ = u^+ - u^-, \quad u^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x_1, \pm \varepsilon).$$

Dla przypadku miękkiej niejednorodności ( $\gamma = o(\varepsilon)$  dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) uzyskujemy

$$\Phi_1(x_1) = 0, \quad \Phi_3(x_1) \approx \frac{1}{\gamma} h \left. \frac{\partial}{\partial x_3} u(\mathbf{x}) \right|_{x_3=0}, \quad |x_1| < a, \quad (4.5)$$

$$u^0(\mathbf{x}) \approx w(x_1) + \frac{x_3}{h} \Phi_3(x_1).$$

Dla przypadku niejednorodności o dużej sztywności ( $\gamma^{-1} = o(\varepsilon)$  dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) uzyskujemy

$$\Phi_1(x_1) = -\gamma h \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + k_0^2 \right] u(x_1), \quad \Phi_3(x_1) = 0, \quad |x_1| < a, \quad (4.6)$$

$$u^0(\mathbf{x}) \approx u(x_1),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} w(x_1) = 0, \quad x_1 = \pm a, \quad w = \frac{1}{2} (u^+ + u^-). \quad (4.7)$$

Warunek (4.7) określa brak składowej  $\sigma_{13}$  tensora naprężeń na końcach niejednorodności o dużej sztywności.

Aby uzyskać model wzajemnego oddziaływania niejednorodności z ośrodkiem który jest niezależny od relacji pomiędzy parametrami  $\gamma$  oraz  $\varepsilon$  musimy zastosować metodę Fraenkela dopasowywania szeregów asymptotycznych [21], [38], [98], [118] dla wzorów (4.3-4.6). Rozpatrzmy przedziały 1 i 2. Zakładamy, że we wzorze (4.5)  $\gamma = O(1)$  oraz  $\gamma^{-1} = O(1)$  przy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Poszukujemy rozwiązania dla zagadnienia określonego równaniami (3.3), (3.4) oraz (4.5) w postaci szeregu asymptotycznego

$$u^s(\mathbf{x}) = \omega_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \omega_1(\mathbf{x}) + \dots, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.8)$$

Podstawiając (4.8) w równania (3.3), (3.4) oraz (4.5) uzyskujemy dla funkcji  $\omega_j(\mathbf{x})$ , ( $j = 0, 1$ ) na przedziale  $|x_1| < a$  następujące zależności

$$\omega_0(\mathbf{x}) = 0; \quad \frac{\partial \omega_1^+}{\partial x_3} - \frac{\partial \omega_1^-}{\partial x_3} = 0, \quad \omega_1^+ - \omega_1^- = \varepsilon^{-1} \gamma^{-1} h \frac{\partial u^i}{\partial x_3}.$$

Stosując twierdzenie Greena uzyskujemy

$$u^s(\mathbf{x}) \approx \varepsilon \omega_1(\mathbf{x}) = -\frac{h}{\gamma} \int_{-a}^a \frac{\partial u^i(\mathbf{y})}{\partial y_3} \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_3} \Big|_{y_3=0} dy_1. \quad (4.9)$$

Przyjmując  $\gamma = \varepsilon \bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma} = \text{const}$  przy  $\varepsilon \rightarrow 0$  z prawej strony równania (3.30), w którym funkcje  $\Phi_1$  oraz  $\Phi_3$  wyznaczone są przy pomocy warunku (4.3) uzyskamy ten sam wynik co daje nam prawa strona równania (4.9). A więc zgodnie z metodą Fraenkela dopasowywania szeregów asymptotycznych [38] musi istnieć przedział w którym rozwiązania odpowiadające zakresom 1 oraz 2 się pokrywają. Określimy ten przedział przyjmując  $\gamma = \varepsilon^{1/2} \bar{\gamma}$ ,  $\bar{\gamma} = \text{const}$  przy  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Warunki określające zachowanie pól przemieszczeń  $u^s$  oraz  $u^0$  w przedziale  $0 \leq \gamma < \varepsilon^{-1/2}$  mogą być uzyskane poprzez sumowanie warunków określonych równaniami (4.3), (4.4) oraz (4.5) bez uwzględnienia ich wspólnych części wyznaczonych przez równanie (4.9). W ten sposób uzyskujemy

$$\Phi_1(x_1) = (1 - \gamma) h \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u^i(x_1) + (k^2 - \gamma k_0^2) h u^i(x_1), \quad (4.10)$$

$$\Phi_3(x_1) = \frac{h}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x_3} [u(\mathbf{x}) - \gamma u^i(\mathbf{x})]_{x_3=0}.$$

Stosując teraz metodę Fraenkela dopasowywania szeregów asymptotycznych do wzorów (4.6) oraz (4.10) uzyskujemy efektywne warunki brzegowe wzajemnego elastodynamicznego oddziaływania cienkiej niejednorodności z ośrodkiem (do wielkości (członu) rzędu  $\varepsilon$ ).

$$\Phi_1(x_1) = -2Z_1 m k \left( 1 + \xi^2 k^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) w(x_1) + h \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) u^i(x_1), \quad (4.11)$$

$$\Phi_3(x_1) = 2k^{-1} Z_3 m \frac{\partial}{\partial x_3} [w(\mathbf{x}) - Z_3^{-1} u^i(\mathbf{x})]_{x_3=0}, \quad \frac{\partial w}{\partial x_1} \Big|_{x_1=\pm a} = 0,$$

$$u^0(\mathbf{x}) = w(x_1) + \frac{x_3}{\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial x_3} u(\mathbf{x}) \right]_{x_3=0}, \quad \mathbf{x} \in S,$$

$$Z_1 = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad Z_3 = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad \xi = \frac{c_0}{c}, \quad m = \frac{kh}{2}.$$

Warunki (4.11) obowiązują dla dowolnych wartości  $\gamma$  dla  $|x_1| < a$ .

## 4.2. Wyprowadzenie mocno osobliwych równań całkowych

Ponieważ środkowa powierzchnia niejednorodności jest płaska możemy przedstawić funkcję  $H_0^{(1)}$  (falę cylindryczną) w postaci superpozycji fal płaskich:

$$H_0^{(1)}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) = -\frac{i}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mp(x_3 - y_3)\gamma(\alpha) + i\alpha(x_1 - y_1)}}{\gamma(\alpha)} d\alpha, \quad \gamma(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - 1},$$

gdzie gałąź funkcji  $\gamma(\alpha)$  jest wybrana tak, aby był spełniony warunek  $\text{Im}\gamma < 0$  dla  $|\alpha| < 1$ . Kontur całkowania  $\Gamma$  przechodzi wzdłuż osi rzeczywistej wszędzie oprócz punktów rozgałęzienia funkcji  $\gamma(\alpha)$ :  $\alpha = \pm 1$ . Kontur omija te punkty poniżej w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$  ( $\alpha = \sigma + i\tau$ ) oraz powyżej w lewej półpłaszczyźnie. Punkt  $\alpha = 0$  znajduje się poniżej konturu całkowania.

Przedstawiając funkcję  $g(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  w postaci superpozycji fal płaskich uzyskujemy

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{i}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{\mp(x_3 - y_3)k\gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)}}{\gamma(\alpha)} d\alpha. \quad (4.12)$$

Uwzględniając wzory (3.30) oraz (4.12) pole fali rozproszonej możemy przedstawić w postaci:

$$u^s(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \mp k\Phi_3(p) \right\} e^{\mp x_3 k\gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)}. \quad (4.13)$$

We wzorze (4.13) i w poniższych wzorach  $y_1$  jest składową wektora  $\mathbf{p}$ . Przedstawiając pole fali rozproszonej jako różnicę pola całkowitego i pola fali padającej oraz uwzględniając wzór (4.13) dla górnej powierzchni włączenia uzyskujemy

$$u^+(\mathbf{x}) - u^i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} - k\Phi_3(p) \right\} e^{-x_3 k\gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)}, \quad (4.14)$$

a dla dolnej powierzchni niejednorodności uzyskujemy:

$$u^-(\mathbf{x}) - u^i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} + k\Phi_3(p) \right\} e^{x_3 k\gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)}. \quad (4.15)$$

Dodając do siebie równania (4.14), (4.15) i dzieląc wynik przez 2 oraz uwzględniając wzory na funkcje sinus oraz kosinus hiperboliczny uzyskujemy:

$$w(\mathbf{x}) - u^i = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \cosh(x_3 k\gamma(\alpha)) + k\Phi_3(p) \sinh(x_3 k\gamma(\alpha)) \right\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)}$$

lub

$$w(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \cosh(x_3 k\gamma(\alpha)) + k\Phi_3(p) \sinh(x_3 k\gamma(\alpha)) \right\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} + u^i \quad (4.16)$$

Podstawiając (4.16) do wzoru na funkcję  $\Phi_1(x_1)$  w (4.11) uzyskujemy dla  $x_3 = 0$

$$\Phi_1(x_1) = 2Z_1 m k \left( 1 + \xi^2 k^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \right\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} - \quad (4.17)$$



$$-2Z_1mk \left(1 + \xi^2 k^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) u^i(x_1) + h \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) u^i(x_1).$$

Obliczając w (4.17) drugą pochodną po  $x_1$  funkcji  $u^i(x_1)$  dla  $x_3 = 0$  uzyskujemy

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u^i(x_1) = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} e^{ikl_1 x_1} = -k^2 l_1^2 e^{ikl_1 x_1}. \quad (4.18)$$

Uwzględniając (4.18) oraz obliczając w (4.17) drugą pochodną po  $x_1$  funkcji podcałkowej uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1) = 2Z_1mk \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \right\} (1 - \xi^2 \alpha^2) e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} - \\ - 2Z_1mk (1 - \xi^2 l_1^2) e^{ikl_1 x_1} + h(k^2 - k^2 l_1^2) e^{ikl_1 x_1}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Po przekształceniach wzór (4.19) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1) = 2Z_1mk \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \right\} (1 - \xi^2 \alpha^2) e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} - \\ - Z_1 h k^2 (1 - \xi^2 l_1^2) e^{ikl_1 x_1} + h k^2 (1 - l_1^2) e^{ikl_1 x_1}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Podstawiając  $\sin(\theta_1) = \xi^2 l_1^2$  do wzoru (4.20) oraz uwzględniając zależność  $1 - l_1^2 = -l_3^2$  uzyskujemy

$$\begin{aligned} \Phi_1(x_1) = 2Z_1mk \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \right\} (1 - \xi^2 \alpha^2) e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} - \\ - h k^2 (Z_1 \cos^2(\theta_1) - l_3^2) e^{ikl_1 x_1}. \end{aligned}$$

lub

$$\Phi_1(x_1) - Z_1mk \int_{-a}^a \Phi_1(p) K_1(k|x_1 - p|) dp = q_1(\theta_0) e^{ikl_1 x_1}, \quad (4.21)$$

$$K_1(|z|) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\pm i\alpha z} L_1(\alpha) d\alpha, \quad L_1(\alpha) = \frac{1 - \xi^2 \alpha^2}{\gamma(\alpha)},$$

$$q_1(\theta_0) = -2mk(Z_1 \cos^2(\theta_1) - l_3^2).$$

Podstawiając (4.16) do wzoru na funkcję  $\Phi_3(x_1)$  w (4.11) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \Phi_3(x_1) = \left(-2Z_3mk^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \cosh(x_3 k \gamma(\alpha)) \right\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} + \\ + \left(-2Z_3mk^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \{k \Phi_3(p) \sinh(x_3 k \gamma(\alpha))\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} + \\ + 2Z_3mk^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} u^i(x_1) - 2mk^{-1} \frac{\partial}{\partial x_3} u^i(x_1). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Obliczając w (4.22) pochodną po  $x_3$  funkcji  $u^i(x_1)$  dla  $x_3 = 0$  uzyskujemy

$$\frac{\partial}{\partial x_3} u^i(x_1) = ikl_3 e^{ikl_1 x_1}. \quad (4.23)$$

Uwzględniając (4.23) oraz obliczając w (4.22) pochodną po  $x_3$  funkcji podcałkowych uzyskujemy dla  $x_3 = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_3(x_1) = & -2Z_3h \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \Phi_3(p) k^2 \gamma(\alpha) e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} + \\ & + 2iZ_3ml_3 e^{ikl_1 x_1} - 2iml_3 e^{ikl_1 x_1} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Po przekształceniach wzór (4.24) przyjmuje następującą postać:

$$\Phi_3(x_1) - Z_3mk \int_{-a}^a \Phi_3(p) K_3(k|x_1 - p|) dp = q_3(\theta_0) e^{ikl_1 x_1}, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} K_3(|z|) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\pm i\alpha z} L_3(\alpha) d\alpha, \quad L_3(\alpha) = -\gamma(\alpha), \\ q_3(\theta_0) = & 2il_3m(Z_3 - 1). \end{aligned}$$

Podstawiając (4.16) do wzoru na warunek na końcach włączenia w (4.11) uzyskujemy dla  $x_3 = 0$ ,  $x_1 = \pm a$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \right\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} = \frac{\partial}{\partial x_1} u^i(x_1). \quad (4.26)$$

Obliczając pochodne po  $x_1$  w równaniu (4.26) uzyskujemy dla  $x_3 = 0$ ,  $x_1 = \pm a$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} \right\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} = ikl_1 e^{ikl_1 x_1}. \quad (4.27)$$

Warto zwrócić uwagę na to, że równania (4.21) oraz (4.27) stanowią układ równań, natomiast równanie (4.25) nie jest powiązane z równaniami (4.21) oraz (4.27), czyli równanie to możemy rozwiązywać oddzielnie.

### 4.3. Analityczne rozwiązanie równań całkowych

Główne człony rozwinięć w szeregi asymptotyczne (dla  $x = ka \gg 1$ ) funkcji  $\Phi_\beta(x_1)$ ,  $\beta = 1, 3$  występujących w równaniach (4.21), (4.25) oraz (4.27) możemy przedstawić w postaci [51]

$$\Phi_\beta(x_1) = \Phi_\beta^+(x_1) + \Phi_\beta^-(x_1) - \vartheta_\beta(x_1), \quad |x_1| < a, \quad (4.28)$$

gdzie funkcje  $\vartheta_\beta(\eta) = \Phi_\beta(\eta k^{-1})$  oraz  $\Phi_\beta^\pm(\eta) = \Phi_\beta(\mp a \pm \eta k^{-1})$  spełniają równania typu splotu:

$$\vartheta_\beta(\eta) - Z_\beta \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_\beta(\zeta) K_\beta(|\eta - \zeta|) d\zeta = q_\beta(\theta_0) \exp(i\eta l_1), \quad -\infty < \eta < \infty, \quad (4.29)$$

$$\Phi_\beta^\pm(\eta) - Z_\beta \int_0^\infty \Phi_\beta^\pm(\zeta) K_\beta(|\eta - \zeta|) d\zeta = q_\beta(\theta_0) \exp(i\eta l_1), \quad 0 < \eta < \infty. \quad (4.30)$$

Ponieważ równania (4.29) wyznaczone na całej osi rzeczywistej możemy do rozwiązania tych równań zastosować metodę przekształcenia Fouriera. Stosujemy przekształcenie Fouriera dla obydwu stron równania (4.29) korzystając z twierdzenia o przekształceniu Fouriera splotu (przekształcenie splotu dwóch funkcji jest iloczynem przekształceń tych funkcji). Następnie stosując elementarne przekształcenia uzyskujemy wzór na przekształcenie Fouriera funkcji  $\vartheta_\beta(\eta)$ . Stosując odwrotne przekształcenie Fouriera do tego wzoru uzyskamy rozwiązanie równania (4.29)

$$\vartheta_\beta(\eta) = W_\beta(\theta_0) \exp(i\eta l_1), \quad W_\beta(\theta_0) = q_\beta(\theta_0) R_\beta^{-1}(l_1), \quad (4.31)$$

$$R_\beta(\alpha) = 1 - Z_\beta m L_\beta(\alpha).$$

We wzorach (4.31) funkcje  $R_\beta(\alpha)$  są funkcjami regularnymi w płaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$ , która jest rozcięta tak, aby był spełniony warunek  $\text{Re} \gamma = 0$ . Funkcja  $R_3(\alpha)$  nie posiada miejsc zerowych, natomiast funkcja  $R_1(\alpha)$  posiada miejsca zerowe określone równaniem

$$\alpha^2 \approx \frac{1}{\xi^2} + \frac{i}{Z_1 m \xi^2} = \xi_1^2.$$

Trzeba zwrócić uwagę na to, że niezerowa część urojona  $\xi_1$  jest związana z oddziaływaniem ośrodka na niejednorodność. Jeżeli  $\mu_0 \mu^{-1} = O(ah^{-1})$  (sztywność niejednorodności jest duża w porównaniu ze sztywnością ośrodka), to  $Z_1 \xi^2 = O(x)$  i zero  $\xi_1$  musi być uwzględnione.

Rozwiązując równanie Wienera-Hopfa (4.30) wykorzystując transformatę Fouriera uzyskujemy zagadnienie Riemanna:

$$R_\beta(\alpha) \phi_\beta^\pm(\alpha) = Y_\beta^-(\alpha) + \frac{i q_\beta}{(\alpha \pm l_1)}, \quad \alpha \in \Gamma, \quad (4.32)$$

$$\phi_\beta^\pm(\alpha) = \int_0^\infty \Phi_\beta^\pm(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi, \quad Y_\beta^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 y_\beta(\xi) e^{i\alpha \xi} d\xi,$$

gdzie  $y_\beta$  jest nową nieznaną funkcją.

Rozwiązujemy to zagadnienie wykorzystując metodę Wienera-Hopfa.

Zgodnie z wymogami metody Wienera-Hopfa funkcje, które można sfaktoryzować nie mogą posiadać miejsc zerowych oraz muszą dążyć do jedynki przy argumentie dążącym do nieskończoności. Funkcje  $R_\beta(\alpha)$  nie spełniają obydwu tych warunków. Wprowadzamy więc funkcje  $r_\beta(\alpha)$ , które spełniają powyższe warunki (nie posiadają miejsc zerowych oraz  $r_\beta(\alpha) \rightarrow 1$  dla  $|\alpha| \rightarrow \infty$ )

$$r_1(\alpha) = \frac{R_1(\alpha) \gamma(\alpha)}{Z_1 \xi^2 (\alpha^2 - \xi_1^2)}, \quad r_3(\alpha) = \frac{R_3(\alpha)}{Z_3 \gamma(\alpha)}, \quad (4.33)$$

Funkcje  $r_\beta(\alpha)$  mogą być przedstawione (sfaktoryzowane) w postaci:

$$r_\beta(\alpha) = r_\beta^+(\alpha) r_\beta^-(\alpha), \quad r_\beta^\pm(\alpha) = \exp[\chi_\beta^\pm(\alpha)], \quad \alpha \in P_\pm,$$

gdzie funkcje  $\chi_\beta^\pm(\alpha)$  są funkcjami regularnymi odpowiednio w górnej  $P_+$  oraz w dolnej  $P_-$  półpłaszczyznach zmiennej zespolonej  $\alpha$ , które powstały po podziale płaszczyzny przez kontur całkowania  $\Gamma$ . Funkcje  $\chi_\beta^\pm(\alpha)$  zdefiniowane są następująco:

$$\begin{aligned}\pi\chi_1^\pm(u) &= \int_0^\infty \arctan \left[ \frac{\sqrt{1+\tau^2}}{Z_1(1+\tau^2\xi^2)} \right] \frac{id\tau}{i\tau \pm u} - \int_0^1 \arctan \left[ \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{Z_1(1-\sigma^2\xi^2)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma \pm u}, \\ \pi\chi_3^\pm(u) &= \int_0^\infty \arctan \left[ \frac{1}{Z_3\sqrt{1+\tau^2}} \right] \frac{id\tau}{i\tau \pm u} - \int_0^1 \arctan \left[ \frac{1}{Z_3\sqrt{1-\sigma^2}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma \pm u}.\end{aligned}$$

Wykorzystując (4.33) przedstawiamy dla  $\phi_3^+(\alpha)$  równanie (4.32) w następującej postaci

$$\sqrt{\alpha+1}r_3^+(\alpha)\phi_3^+(\alpha) = \frac{Y^-}{Z_3r_3^-(\alpha)\sqrt{\alpha-1}} + \frac{iq_3}{Z_3(\alpha+l_1)r_3^-(\alpha)\sqrt{\alpha-1}}. \quad (4.34)$$

Lewa strona równania (4.34) jest analityczna w półpłaszczyźnie  $P_+$ . Zgodnie ze schematem postępowania metody Wienera-Hopfa przedstawimy drugi składnik prawej strony równania (4.34) w postaci sumy dwóch funkcji z których jedna jest analityczna w półpłaszczyźnie  $P_+$ , natomiast druga jest analityczna w półpłaszczyźnie  $P_-$ . Możemy zapisać równanie (4.34) w następującej postaci

$$\sqrt{\alpha+1}r_3^+(\alpha)\phi_3^+(\alpha) = \frac{Y^-}{Z_3r_3^-(\alpha)\sqrt{\alpha-1}} + H_3^+ + H_3^-. \quad (4.35)$$

Stosując całkowite twierdzenie Cauchiego możemy zapisać funkcje  $H_3^+$  oraz  $H_3^-$  następująco

$$\begin{aligned}H_3^+(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{iq_3}{Z_3(\alpha+l_1)r_3^-(\alpha)\sqrt{\alpha-1}} \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha}, \\ H_3^-(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{iq_3}{Z_3(\alpha-l_1)r_3^-(\alpha)\sqrt{\alpha-1}} \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha}.\end{aligned}$$

Zamykając kontur całkowania całki we wzorze na funkcję  $H_3^+$  w półpłaszczyźnie  $P_-$  i obliczając residua funkcji podcałkowej uzyskujemy

$$H_3^+(\alpha) = \frac{q_3}{Z_3(\alpha+l_1)r_3^-(-l_1)\sqrt{1+l_1}}. \quad (4.36)$$

Zamykając kontur całkowania całki we wzorze na funkcję  $H_3^-$  w półpłaszczyźnie  $P_+$  i obliczając residua funkcji podcałkowej uzyskujemy

$$H_3^-(\alpha) = \frac{q_3}{Z_3(\alpha-l_1)r_3^-(l_1)\sqrt{1-l_1}}. \quad (4.37)$$

Przekształćmy równanie (4.35) do następującej postaci

$$\sqrt{\alpha+1}r_3^+(\alpha)\phi_3^+(\alpha) - H_3^+ = \frac{Y^-}{Z_3r_3^-(\alpha)\sqrt{\alpha-1}} + H_3^-. \quad (4.38)$$

Lewa strona równania (4.38) jest analityczna w półpłaszczyźnie  $P_+$ , natomiast prawa strona jest analityczna w półpłaszczyźnie  $P_-$ . Stosując twierdzenie o przedłużeniu analitycznym oraz twierdzenie Liouville'a możemy stwierdzić, że obydwie strony równania (4.38) opisują tę samą funkcją stałą.

Uwzględniając ten fakt, iż zagadnienie (4.32) ma rozwiązanie w klasie funkcji spełniających warunek  $\phi_1^\pm(\alpha) \rightarrow \text{const}|\alpha|^{-1/2}$  oraz  $\phi_3^\pm(\alpha) \rightarrow \text{const}|\alpha|^{-3/2}$  dla  $|\alpha| \rightarrow \infty$  uzyskujemy

$$\sqrt{\alpha+1}r_3^+(\alpha)\phi_3^+(\alpha) - H_3^+ = \frac{Y^-}{Z_3r_3^-(\alpha)\sqrt{\alpha-1}} + H_3^- = 0. \quad (4.39)$$

Po przekształceniu równania (4.39) uzyskujemy

$$\sqrt{\alpha+1}r_3^+(\alpha)\phi_3^+(\alpha) = H_3^+$$

i ostatecznie

$$\phi_3^+(\alpha) = \frac{q_3}{Z_3r_3^-(l_1)r_3^+(\alpha)(\alpha+l_1)\sqrt{1+l_1}\sqrt{1+\alpha}}. \quad (4.40)$$

Postępując analogicznie uzyskamy dla  $\phi_3^-(\alpha)$

$$\phi_3^-(\alpha) = \frac{q_3}{Z_3r_3^-(l_1)r_3^+(\alpha)(\alpha-l_1)\sqrt{1-l_1}\sqrt{1+\alpha}}. \quad (4.41)$$

W przypadku funkcji  $\phi_1^\pm(\alpha)$  postępujemy analogicznie. W tym przypadku funkcje  $H_1^\pm$  zdefiniowane są następująco:

$$H_1^\pm(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{iq_1}{\zeta \pm l_1} \frac{\sqrt{\zeta-1}}{(\zeta-\xi_1)r_1^-(\zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta-\alpha}.$$

Obliczając wartość całki w powyższym wzorze uzyskujemy

$$H_1^\pm(\alpha) = -\frac{q_1\sqrt{1\pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)(\alpha \pm l_1)}.$$

Podstawiając funkcje  $H_1^\pm$  do równania (4.32), wykonując przekształcenia, stosując twierdzenia o przedłużeniu analitycznym i Liouville'a oraz uwzględniając zachowanie asymptotyczne funkcji  $\phi_3^\pm(\alpha)$  uzyskujemy

$$\phi_1^\pm(\alpha) = \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(\alpha+\xi_1)r_1^+(\alpha)} \left[ ic_\pm - \frac{q_1}{Z_1\xi^2} \frac{\sqrt{1\pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1)(\alpha \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)} \right] + \phi_1^0(\alpha), \quad (4.42)$$

$$\phi_1^0(\alpha) = -iA_*^\pm \frac{2\xi_1 r_1^+(\xi_1)(1+\xi_1)^{-1/2}\sqrt{1+\alpha}}{r_1^+(\alpha)(\alpha^2-\xi_1^2)}, \quad \xi_1 \in P_+,$$

gdzie  $\phi_1^0(\alpha)$  jest jednorodnym rozwiązaniem równania (4.32) odpowiadającym powierzchniowej fali o amplitudzie  $A_*$  biegnącej po powierzchni niejednorodności i odbitej od końca niejednorodności, natomiast  $c_\pm$  są dowolnymi stałymi.

W celu wyznaczenia  $c_{\pm}$  przepiszemy warunek (4.27) w następującej postaci

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\Gamma} \phi_1^{\pm}(\alpha) \gamma^{-1}(\alpha) e^{-i\alpha\eta} = \pm 2ikl_1, \quad \eta = 0. \quad (4.43)$$

Uwzględniając asymptotykę  $\phi_1^{\pm}(\alpha) \approx ic_{\pm}(1+\alpha)^{1/2}(\alpha+\xi_1)^{-1}$ , przy  $|\alpha| \rightarrow \infty$  oraz definicję funkcji  $\gamma(\alpha)$  możemy przedstawić całkę występującą w równaniu (4.43) w następującej postaci

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(\alpha+\xi_1)\sqrt{\alpha^2-1}} ic_{\pm} e^{-i\alpha\eta} d\alpha = \\ = ic_{\pm} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha\eta}}{(\alpha+\xi_1)\sqrt{\alpha-1}} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Obliczając wartość całki we wzorze (4.44) uzyskujemy

$$\begin{aligned} ic_{\pm} \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \frac{e^{i\alpha\eta}}{\sqrt{-\xi_1-1}} = \\ = ic_{\pm} \frac{1}{2\pi} (-2\pi i) \frac{e^{i\alpha\eta}}{-i\sqrt{1+\xi_1}} = \\ = ic_{\pm} \frac{e^{i\alpha\eta}}{\sqrt{1+\xi_1}}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Podstawiając wartość całki (4.45) do (4.43) uzyskujemy

$$ic_{\pm} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{e^{i\alpha\eta}}{\sqrt{1+\xi_1}} = \pm 2ikl_1. \quad (4.46)$$

Obliczając wartość pochodnej  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  po lewej stronie równania (4.46) uzyskujemy

$$-c_{\pm} \frac{\xi_1}{\sqrt{1+\xi_1}} = \pm 2ikl_1,$$

i ostatecznie

$$c_{\pm} = \mp \frac{2ikl_1 \sqrt{1+\xi_1}}{\xi_1}. \quad (4.47)$$

W celu uzyskania funkcji  $\Phi_1^{\pm}(\eta)$  w przestrzeni oryginałów stosujemy odwrotne przekształcenie Fouriera do wzoru (4.42):

$$\Phi_1^{\pm}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \phi_1^{\pm}(\alpha) e^{-i\alpha\eta} d\alpha. \quad (4.48)$$

Podstawiając wzór (4.42) do wzoru (4.48) uzyskujemy

$$\Phi_1^{\pm}(\eta) = I_{11} + I_{12} + I_1^0, \quad (4.49)$$

gdzie całki  $I_{11}$ ,  $I_{12}$  oraz  $I_1^0$  określone są przy pomocy następujących wzorów:

$$I_{11} = \frac{ic_{\pm}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1+\alpha}}{(\alpha+\xi_1)r_1^+(\alpha)} e^{-i\alpha\eta} d\alpha, \quad (4.50)$$

$$I_{12} = -\frac{q_1}{Z_1\xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{(\alpha + \xi_1)r_1^+(\alpha)(\alpha \pm l_1)} e^{-i\alpha\eta} d\alpha, \quad (4.51)$$

$$I_1^0 = -iA_*^\pm \frac{2\xi_1 r_1^+(\xi_1)}{\sqrt{1 + \xi_1} 2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{r_1^+(\alpha)(\alpha^2 - \xi_1^2)} e^{-i\alpha\eta} d\alpha. \quad (4.52)$$

Zamykamy kontur całkowania (4.50) w górnej półplaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$ . Stosujemy zamianę zmiennej  $\alpha$  na  $-\alpha$  i uzyskujemy

$$I_{11} = -\frac{ic_{\pm}}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{(\alpha - \xi_1)r_1^+(-\alpha)} e^{i\alpha\eta} d\alpha. \quad (4.53)$$

Wartość całki (4.53) równa się wartości residuum funkcji podcałkowej w punkcie  $\alpha = \xi_1$  pomnożonej przez  $2\pi i$  i wynosi

$$I_{11} = -\frac{ic_{\pm} 2\pi i}{2\pi} \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} e^{i\xi_1\eta} = c_{\pm} \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} e^{i\xi_1\eta}. \quad (4.54)$$

Zamykamy kontur całkowania (4.51) w górnej półplaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$ . Stosujemy zamianę zmiennej  $\alpha$  na  $-\alpha$  i uzyskujemy

$$I_{12} = -\frac{q_1}{Z_1\xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{(\alpha - \xi_1)r_1^+(-\alpha)(\alpha \mp l_1)} e^{i\alpha\eta} d\alpha. \quad (4.55)$$

Wartość całki (4.55) równa się wartości residuum funkcji podcałkowej w punktach  $\alpha = \xi_1$  oraz  $\alpha = \pm l_1$  pomnożonej przez  $2\pi i$  i wynosi

$$\begin{aligned} I_{12} &= -\frac{q_1}{Z_1\xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1} 2\pi i}{(\xi_1 \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)2\pi} \left[ \frac{\sqrt{1 - \xi_1} e^{i\xi_1\eta}}{r_1^+(-\xi_1)(\xi_1 \mp l_1)} + \frac{\sqrt{1 \mp l_1} e^{\pm il_1\eta}}{(\pm l_1 - \xi_1)r_1^+(\mp l_1)} \right] = \\ &= -i \frac{q_1}{Z_1\xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)} \left[ \frac{\sqrt{1 - \xi_1} e^{i\xi_1\eta}}{r_1^+(-\xi_1)(\xi_1 \mp l_1)} + \frac{\sqrt{1 \mp l_1} e^{\pm il_1\eta}}{(\pm l_1 - \xi_1)r_1^+(\mp l_1)} \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Zamykamy kontur całkowania (4.52) w górnej półplaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$ . Stosujemy zamianę zmiennej  $\alpha$  na  $-\alpha$  i uzyskujemy

$$I_1^0 = -iA_*^\pm \frac{2\xi_1 r_1^+(\xi_1)}{\sqrt{1 + \xi_1} 2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{r_1^+(-\alpha)(\alpha^2 - \xi_1^2)} e^{i\alpha\eta} d\alpha. \quad (4.57)$$

Wartość całki (4.57) równa się wartości residuum funkcji podcałkowej w punkcie  $\alpha = \xi_1$  pomnożonej przez  $2\pi i$  i wynosi

$$I_1^0 = -iA_*^\pm \frac{2\xi_1 r_1^+(\xi_1) 2\pi i}{\sqrt{1 + \xi_1} 2\pi} \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1) 2\xi_1} e^{i\xi_1\eta} = A_*^\pm \frac{r_1^+(\xi_1) \sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1) \sqrt{1 + \xi_1}} e^{i\xi_1\eta}. \quad (4.58)$$

Podstawiając wzory (4.54), (4.56) oraz (4.58) do (4.49) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \Phi_1^\pm(\eta) &= c_{\pm} \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} e^{i\xi_1\eta} - i \frac{q_1}{Z_1\xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)} \left[ \frac{\sqrt{1 - \xi_1} e^{i\xi_1\eta}}{r_1^+(-\xi_1)(\xi_1 \mp l_1)} + \frac{\sqrt{1 \mp l_1} e^{\pm il_1\eta}}{(\pm l_1 - \xi_1)r_1^+(\mp l_1)} \right] + \\ &\quad + A_*^\pm \frac{r_1^+(\xi_1) \sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1) \sqrt{1 + \xi_1}} e^{i\xi_1\eta} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{i l_1 \eta} \left[ \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} c_{\pm} - \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)(\xi_1 \mp l_1)} i \frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1) r_1^-(\mp l_1)} \right] - \\
&- i \frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1} \sqrt{1 \mp l_1}}{(\xi_1 \pm l_1) r_1^-(\mp l_1) (\pm l_1 - \xi_1) r_1^+(\mp l_1)} e^{\pm i l_1 \eta} + A_*^{\pm} \frac{r_1^+(\xi_1) \sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1) \sqrt{1 + \xi_1}} e^{i \xi_1 \eta}.
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Wykorzystując we wzorze (4.59) wzór na funkcję  $r_1(\alpha) = r_1^+(\alpha) r_1^-(\alpha)$  uzyskujemy

$$\begin{aligned}
\Phi_1^{\pm}(\eta) &= e^{i \xi_1 \eta} \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} \left[ c_{\pm} - i \frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1} r_1^+(\mp l_1)}{(\xi_1^2 - l_1^2) r_1^+(\mp l_1) r_1^-(\mp l_1)} \right] + \\
&+ i \frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 - l_1^2}}{(\xi_1^2 - l_1^2) r_1(\mp l_1)} e^{\pm i \xi_1 \eta} + A_*^{\pm} \frac{r_1^+(\xi_1) \sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1) \sqrt{1 + \xi_1}} e^{i \xi_1 \eta} = \\
&= e^{i \xi_1 \eta} \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} \left[ c_{\pm} - i \frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 - l_1^2} r_1^+(\mp l_1)}{(\xi_1^2 - l_1^2) r_1(\mp l_1) \sqrt{1 \mp l_1}} \right] + \\
&+ i \frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{l_1^2 - 1}}{(l_1^2 - \xi_1^2) r_1(\mp l_1)} e^{\pm i \xi_1 \eta} + A_*^{\pm} \frac{r_1^+(\xi_1) \sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1) \sqrt{1 + \xi_1}} e^{i \xi_1 \eta}.
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Korzystając z definicji funkcji  $r_1(\alpha)$  przedstawiamy funkcję  $R_1(\alpha)$  w następującej postaci:

$$R_1(\alpha) = \frac{r_1(\alpha) Z_1 \xi^2 (\alpha^2 - \xi_1^2)}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}. \tag{4.61}$$

Definiujemy funkcję  $R$ :

$$R = \frac{r_1^+(\xi_1) \sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1) \sqrt{1 + \xi_1}}. \tag{4.62}$$

Korzystając ze wzorów (4.61) oraz (4.62) możemy zapisać wzór (4.60) następująco:

$$\Phi_1^{\pm}(\eta) = e^{i \xi_1 \eta} \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} \left[ c_{\pm} - \frac{q_1 r_1^+(\mp l_1)}{R_1(l_1) \sqrt{1 \mp l_1}} \right] + \frac{q_1}{R_1(l_1)} e^{\pm i \xi_1 \eta} + A_*^{\pm} R e^{i \xi_1 \eta}. \tag{4.63}$$

Wprowadzamy funkcję  $W_1$ :

$$W_1 = \frac{q_1}{R_1(l_1)} \tag{4.64}$$

oraz funkcje  $D_1^{\pm}$ :

$$D_1^{\pm} = i \frac{\sqrt{1 - \xi_1}}{r_1^+(-\xi_1)} \left[ \mp \frac{2k l_1 \sqrt{1 + \xi_1}}{\xi_1} + i \frac{r_1^+(\mp l_1)}{\sqrt{1 \mp l_1}} W_1 \right]. \tag{4.65}$$

Pierwszy składnik w nawiasach we wzorze (4.65) jest wartością stałej  $c_{\pm}$  ze wzoru (4.47).

Wykorzystując wzory (4.64) oraz (4.65) możemy zapisać wzór (4.63) następująco:

$$\Phi_1^{\pm}(\eta) = W_1 e^{\pm i l_1 \eta} + D_1^{\pm} e^{i \xi_1 \eta} + \Phi_1^0(\eta), \tag{4.66}$$

gdzie funkcja  $\Phi_1^0(\eta)$  jest przekształceniem Fouriera funkcji  $\phi_1^0(\alpha)$ :

$$\Phi_1^0(\eta) = A_*^{\pm} R e^{i \xi_1 \eta}. \tag{4.67}$$



Wzór (4.66) obowiązuje dla  $\theta_0 < \pi/2$ , czyli dla przypadków, kiedy  $|l_1| < 1$ . Dla przypadku  $\theta_0 = \pi/2, |l_1| = 1$  we wzorze (4.49) zmieni się wartość całki  $I_{12}$  i wzór (4.51) przyjmie postać

$$\begin{aligned} I_{12} &= -\frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1) r_1^-(\mp l_1) 2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{1 + \alpha}}{(\alpha + \xi_1) r_1^+(\alpha) (\alpha \pm l_1)} e^{-i\alpha\eta} d\alpha = \\ &= -\frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1) r_1^-(\mp l_1) 2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha\eta}}{(\alpha + \xi_1) r_1^+(\alpha) \sqrt{1 + \alpha}} d\alpha. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Wartość całki (4.68) wynosi

$$I_{12} = -i \frac{e^{i\xi_1\eta}}{\sqrt{1 - \xi_1 r_1^+(-\xi_1)}} + i \frac{1}{(1 - \xi_1) r_1^+(-1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta + \pi/4)}, \quad (4.69)$$

natomiast wzór (4.66) przyjmuje dla  $|l_1| = 1$  następującą postać:

$$\Phi_1^\pm(\eta) = D_1^\pm(\pi/2) e^{i\xi_1\eta} + \Phi_1^0(\eta) - i \frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1) r_1^-(\mp l_1) (1 - \xi_1) r_1^+(-1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta + \pi/4)}. \quad (4.70)$$

Dla przypadku  $-l_1$  we wzorze (4.70) pierwiastek w liczniku trzeciego składnika równa się zeru i trzeci składnik znika. Uwzględniając wartość  $l_1$  zapisujemy wzór (4.70) następująco:

$$\Phi_1^\pm(\eta) = D_1^\pm(\pi/2) e^{i\xi_1\eta} + \Phi_1^0(\eta) - i \frac{q_1(\pi/2)}{Z_1 \xi^2} \frac{\delta_\pm \sqrt{2}}{(\xi_1 + 1) r_1^-( -1) (1 - \xi_1) r_1^+(-1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta + \pi/4)}, \quad (4.71)$$

$$\delta_\pm = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

Uwzględniając zależność  $r_1(\alpha) = r_1^+(\alpha) r_1^-(\alpha)$  możemy przepisać wzór (4.71) następująco:

$$\Phi_1^\pm(\eta) = D_1^\pm(\pi/2) e^{i\xi_1\eta} + \Phi_1^0(\eta) - i \frac{q_1(\pi/2)}{Z_1 \xi^2} \frac{\delta_\pm \sqrt{2}}{(1 - \xi_1^2) r_1(-1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta + \pi/4)}, \quad (4.72)$$

Na mocy definicji funkcji  $r_1(\alpha)$  możemy napisać:

$$r_1(1) = \left. \frac{R_1(\alpha) \gamma(\alpha)}{Z_1 \xi^2 (1 - \xi_1^2)} \right|_{\alpha=1}, \quad (4.73)$$

natomiast uwzględniając definicję funkcji  $R_1(\alpha)$  możemy przedstawić licznik we wzorze (4.73) w postaci:

$$R_1(\alpha) \gamma(\alpha) = \gamma(\alpha) [1 - Z_1 L_1(\alpha)],$$

lub po uwzględnieniu definicji funkcji  $L_1(\alpha)$  w następującej postaci:

$$R_1(\alpha) \gamma(\alpha) = -Z_1 (1 - \xi^2). \quad (4.74)$$

Wartość funkcji  $q_1$  dla  $\theta_0 = \pi/2$  obliczymy posługując się definicją tej funkcji:

$$q_1(\pi/2) = -2k Z_1 (1 - \sin^2 \theta_1) = -2k Z_1 (1 - \xi^2). \quad (4.75)$$

Podstawiając wzory (4.74) oraz (4.75) do wzoru (4.72) uzyskujemy:

$$\Phi_1^\pm(\eta) = D_1^\pm(\pi/2)e^{i\xi_1\eta} + \Phi_1^0(\eta) - i\delta_\pm \frac{\sqrt{2}[-2kZ_1(1-\xi_1)]}{-Z_1(1-\xi_1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)},$$

lub po uwzględnieniu faktu, iż mnożenie przez  $-i$  powoduje zmniejszenie liczby zespolonej o  $\pi/2$

$$\Phi_1^\pm(\eta) = 2k\delta_\pm \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)} + D_1^\pm(\pi/2)e^{i\xi_1\eta} + \Phi_1^0(\eta). \quad (4.76)$$

W celu uzyskania funkcji  $\Phi_3^\pm(\eta)$  w przestrzeni oryginałów stosujemy odwrotne przekształcenie Fouriera do wzorów (4.40) oraz (4.41):

$$\Phi_3^\pm(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \phi_3^\pm(\alpha) e^{-i\alpha\eta} d\alpha. \quad (4.77)$$

Podstawiając wzór (4.77) do wzorów (4.40) oraz (4.41) uzyskujemy

$$\Phi_3^\pm(\eta) = -\frac{q_3}{Z_3\sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha\eta}}{\sqrt{1 + \alpha(\alpha \pm l_1)r_3^\pm(\alpha)}} d\alpha. \quad (4.78)$$

Obliczając wartość całki w (4.78) dla  $\theta_0 < \pi/2$ , czyli dla przypadków, kiedy  $|l_1| < 1$  uzyskujemy

$$\Phi_3^\pm(\eta) = W_3 e^{\pm il_1\eta} + i \frac{q_3}{Z_3\pi\sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} g^\pm(\eta, l_1), \quad (4.79)$$

gdzie funkcja  $W_3$  jest zdefiniowana w sposób następujący:

$$W_3 = \frac{q_3}{R_3(l_1)}, \quad q_3 = 2il_3 \left( Z_3 - \frac{kh}{2} \right), \quad R_3(\alpha) = 1 + Z_3\gamma(\alpha), \quad (4.80)$$

natomiast funkcje  $g^\pm(\eta, l_1)$  są zdefiniowane następująco:

$$g^\pm(\eta, l_1) = \frac{r_1^+(1)}{1 \mp l_1} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)} g_0(\eta), \quad (4.81)$$

$$g_0(\eta) = 1 - \frac{1}{Z_3} \sqrt{\frac{\pi\eta}{2}} e^{i\pi/4} e^{i\eta/2Z_3^2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{1}{Z_3} \sqrt{\frac{\eta}{2}} e^{i\pi/4} \right], \quad (4.82)$$

$$\operatorname{erfc}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Wprowadzamy funkcje  $D_3^\pm$ :

$$D_3^\pm = i \frac{q_3 r_3^+(1)}{Z_3 l_3 \sqrt{1 \mp l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}}. \quad (4.83)$$

Podstawiając definicję (4.83) do (4.79) uzyskujemy

$$\Phi_3^\pm(\eta) = W_3 e^{\pm il_1\eta} + D_3^\pm \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)} g_0(\eta). \quad (4.84)$$

Dla przypadku  $\theta_0 = \pi/2, |l_1| = 1$  wartość funkcji  $\Phi_3^\pm(\eta)$  wynosi zero. Dzieje się tak za sprawą zerowania się funkcji  $q_3$ , która znajduje się w liczniku obydwu składników po prawej stronie wzoru (4.84).

Funkcje  $D_\beta^\pm$  są współczynnikami dyfrakcji na lewym i prawym końcu niejednorodności,  $R$  jest współczynnikiem odbicia fali powierzchniowej, której amplituda wynosi  $A_*^\pm$ . Pierwsze człony we wzorach (4.66), (4.76) oraz (4.84) opisują składniki pól dyfrakcyjnych odpowiadające promieniom optyki geometrycznej, natomiast pozostałe dwa człony odpowiadają falom rozproszonym na końcach niejednorodności.

Podstawiając wzory (4.66), (4.76) i (4.84) do (3.35) oraz uwzględniając tylko wtórną dyfrakcję uzyskujemy

$$f(k; \mathbf{1}, \nu) = -2x \left\{ k^{-1} W_1 + i\nu_3 W_1 j_0 [x(l_1 - \nu_1)] + e^{ix\xi_1} k^{-1} \sum_{\pm} e^{\mp ixl_1} A_*^\pm j_0 [x(\nu_1 \mp \xi_1)] + \right. \\ \left. i\nu_3 \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi x}} \sum_{\pm} D_3^\pm e^{ix(\pm\nu_1 \mp l_1)} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{iu^2(1 \mp \nu_1)} g_0(u^2) du \right\}, \quad (4.85)$$

$$A_*^\pm = D_1^\pm + D_1^\mp R e^{2i\xi_1 x}, \quad j_0(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \quad x = ka.$$

Wzór (4.85) jest poszukiwanym modelem w polu dalekim amplitudy fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym.

#### 4.4. Wnioski

W podrozdziale 4.1 zostały wyprowadzone efektywne warunki brzegowe upraszczające znacząco pierwsze zagadnienie przedstawione w podrozdziale 3.1, co prowadzi do skrócenia czasu potrzebnego do uzyskania rozwiązania zagadnienia.

W podrozdziale 4.2 zostały wyprowadzone mocno osobliwe równania całkowe dla niewiadomych funkcji  $\Phi_1(x_1)$  oraz  $\Phi_3(x_1)$ .

W podrozdziale 4.3 równania te zostały rozwiązane przy użyciu metody Wienera-Hopfa, co pozwoliło uzyskać analityczne wzory dla funkcji  $\Phi_1(x_1)$  oraz  $\Phi_3(x_1)$ . Po podstawieniu tych wzorów do równania (3.35) uzyskano dla pola dalekiego poszukiwany model (wzór (4.85)) fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym dla pierwszego zagadnienia przedstawionego w podrozdziale 3.1.

## Rozdział 5

# Model pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności w materiale sprężystym

### 5.1. Wprowadzenie efektywnych warunków brzegowych

Dla tego zagadnienia wprowadzamy efektywne warunki brzegowe zgodnie ze schematem wprowadzonym w poprzednim rozdziale [44], [47], [48], [49]. Warunki brzegowe zagadnienia opisywanego równaniami (3.3), (3.4), (3.7) oraz (3.8) można zastąpić efektywnymi warunkami brzegowymi eliminując potrzebę rozwiązywania równania (3.4) dla niejednorodności:

$$u^+(x_1) = 2 \frac{Z}{k} \frac{\partial u^+(x_1)}{\partial x_3}, \quad (5.1)$$

$$u^-(x_1) = 0, \quad Z = \frac{m}{\gamma_0}, \quad u^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x_1, \pm\varepsilon). \quad (5.2)$$

### 5.2. Wyprowadzenie układu mocno osobliwych równań całkowych

Z definicji funkcji  $\Phi_3(x_1)$  wynika, że dla funkcji  $u^+(x_1)$  oraz  $u^-(x_1)$  występujących w warunkach brzegowych (5.1) oraz (5.2) ma miejsce następująca zależność:

$$u^+(x_1) - u^-(x_1) = u^+(x_1) = \Phi_3(x_1). \quad (5.3)$$

Przedstawiając całkowite pole przemieszczeń jako sumę pola fali padającej i pola fali rozproszonej na włączeniu oraz uwzględniając wzór (5.3) uzyskujemy dla górnej powierzchni włączenia:

$$\Phi_3(x_1) = u^i(x_1) + u^s(x_1). \quad (5.4)$$

Ze wzoru (4.13) wynika, że pole rozproszone na górnej powierzchni niejednorodności ma postać:

$$u^s(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} - k\Phi_3(p) \right\} e^{-x_3 k \gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)}. \quad (5.5)$$

Obliczając pochodną po  $x_3$  funkcji występujących we wzorze (5.5) uzyskujemy:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} u^s(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ k\Phi_1(p) + k^2\Phi_3(p)\gamma(\alpha) \right\} e^{-x_3 k \gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)}. \quad (5.6)$$

Podstawiając wzory (5.4) oraz (4.13) do warunku (5.1) uzyskujemy:

$$\begin{aligned} \Phi_3(x_1) = & - \left( \frac{2Z}{k} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} - k\Phi_3(p) \right\} e^{-x_3 k \gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)} + \\ & + \left( \frac{2Z}{k} \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u^i(x_1). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Korzystając ze wzorów (4.23) oraz (5.6) z równania (5.7) uzyskujemy dla  $x_3 = 0$ :

$$\Phi_3(x_1) = \frac{Z}{2\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \{ \Phi_1(p) - k\gamma(\alpha)\Phi_3(p) \} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} + 2iZl_3 e^{ikl_1 x_1}. \quad (5.8)$$

Przedstawiając całkowite pole przemieszczeń jako sumę pola fali padającej i pola fali rozproszonej na niejednorodności oraz uwzględniając warunek (5.2) uzyskujemy dla dolnej powierzchni niejednorodności:

$$u^i(x_1) + u^s(x_1) = 0. \quad (5.9)$$

Ze wzoru (4.13) wynika, że pole rozproszone na dolnej powierzchni włączenia ma postać:

$$u^s(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} - k\Phi_3(p) \right\} e^{x_3 k \gamma(\alpha) + i\alpha k(x_1 - y_1)}. \quad (5.10)$$

Podstawiając do wzoru (5.9) wzory (5.10) oraz (3.1) uzyskujemy dla  $x_3 = 0$ :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} d\alpha \left\{ \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} + k\Phi_3(p) \right\} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} = e^{ikl_1 x_1}. \quad (5.11)$$

Uwzględniając zależność

$$\int_{\Gamma} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} d\alpha = 2\pi \delta(k(x_1 - p)), \quad (5.12)$$

gdzie  $\delta(k(x_1 - p))$  jest funkcją Delta Diraka możemy przedstawić wzór (5.8) w następującej postaci:

$$\Phi_3(x_1) = \frac{Z}{k} \Phi_1(x_1) - \frac{kZ}{2\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} \gamma(\alpha) \Phi_3(p) e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} d\alpha + 2iZl_3 e^{ikl_1 x_1}, \quad (5.13)$$

natomiast wzór (5.11) możemy przedstawić w postaci

$$\frac{1}{2} \Phi_3(x_1) + \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a dp \int_{\Gamma} \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} e^{i\alpha k(x_1 - y_1)} d\alpha = e^{ikl_1 x_1}. \quad (5.14)$$

Równania (5.13) oraz (5.14) stanowią układ równań. Odejmując równanie (5.14) od równania (5.13) uzyskujemy następujący układ równań:

$$\Phi_1(x_1) + \frac{k}{Z} \int_{-a}^a \Phi_1(p) K_3(k|x_1 - p|) dp - k \int_{-a}^a \Phi_3(p) K_1(k|x_1 - p|) dp = q_1 e^{ikl_1 x_1}, \quad (5.15)$$

$$\Phi_3(x_1) + k \int_{-a}^a \Phi_1(p) K_3(k|x_1 - p|) dp = q_3 e^{ikl_1 x_1},$$

$$K_1(|z|) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\pm i\alpha z} \gamma(\alpha) d\alpha, \quad K_3(|z|) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{\pm i\alpha z} \gamma^{-1}(\alpha) d\alpha,$$

$$q_1 = 2il_3 + \frac{2}{Z}, \quad q_3 = 2.$$

### 5.3. Analityczne rozwiązanie układu równań całkowych

Główne człony rozwinięć w szeregi asymptotyczne (dla  $x = ka \gg 1$ ) funkcji  $\Phi_\beta(x_1)$ ,  $\beta = 1, 3$  (funkcji spełniających układ równań (5.15)) możemy przedstawić w postaci

$$\Phi_\beta(x_1) = \Phi_\beta^+(x_1) + \Phi_\beta^-(x_1) - \vartheta_\beta(x_1), \quad |x_1| < a, \quad \beta = 1, 3, \quad (5.16)$$

gdzie funkcje  $\Phi_\beta^\pm(\eta) = \Phi_\beta(\mp a \pm \eta k^{-1}) \exp(\pm i x l_1)$  spełniają układ równań typu splotu:

$$\Phi_1^\pm(\eta) + \frac{1}{Z} \int_0^\infty \Phi_1^\pm(\zeta) K_3(|\eta - \zeta|) d\zeta - \int_0^\infty \Phi_3^\pm(\zeta) K_1(|\eta - \zeta|) d\zeta = q_1 e^{\pm i \eta l_1}, \quad (5.17)$$

$$\Phi_3^\pm(\eta) + \int_0^\infty \Phi_1^\pm(\zeta) K_3(|\eta - \zeta|) d\zeta = q_3 e^{\pm i \eta l_1}, \quad 0 < \eta < \infty,$$

$$\vartheta_\beta(\eta) = \Phi_\beta(\eta k^{-1}), \quad \vartheta_\beta(\eta) = W_\beta \exp(i \eta l_1), \quad \beta = 1, 3,$$

$$W_1 = -A_0 \frac{2il_3}{1 - 2il_3 Z}, \quad W_3 = -A_0 \frac{4il_3 Z}{1 - 2il_3 Z}.$$

Wzory na funkcje  $\vartheta_\beta(\eta)$  zostały uzyskane przy użyciu metody przekształcenia Fouriera według schematu podanego w poprzednim rozdziale. Stosując przekształcenie Fouriera

$$\phi_\beta^\pm(\alpha) = \int_0^\infty \Phi_\beta^\pm(\eta) e^{i \alpha \eta} d\eta,$$

$$Y_\beta^-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 \Phi_\beta^\pm(\eta) e^{i \alpha \eta} d\eta$$

możemy przedstawić układ równań (5.17) w postaci macierzowego równania Wienera-Hopfa:

$$\mathbf{G}(\alpha) \begin{pmatrix} \phi_1^\pm(\alpha) \\ \phi_3^\pm(\alpha) \end{pmatrix} = \frac{i}{\alpha \pm l_1} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1^-(\alpha) \\ Y_3^-(\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \Gamma, \quad (5.18)$$

$$\mathbf{G}(\alpha) = \begin{pmatrix} g(\alpha) & -\gamma \\ \gamma^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad g(\alpha) = 1 + \frac{1}{Z\gamma(\alpha)}.$$

Aby zapewnić jednoznaczność rozwiązania układu równań (5.17) musimy uwzględnić następujący warunek brzegowy [Jemec Kuniec Matus, Arch Appl Mech]:

$$u^s(r, \phi) = a_0^\mp(\omega) + a_1^\mp(\omega) r^{1/4} \left( \cos \frac{\phi}{4} + \sin \frac{\phi}{4} \right) + o(r^{1/4}), \quad (5.19)$$

$$-\pi \leq \phi \leq \pi, \quad r \rightarrow 0, \quad \gamma_0 = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$u^s(r, \phi) = b_0^\mp(\omega) + b_1^\mp(\omega) r^{1/2} \cos \frac{\phi}{2} + o(r^{1/2}), \quad (5.20)$$

$$-\pi \leq \phi \leq \pi, \quad r \rightarrow 0, \quad \gamma_0 = O(1), \quad \gamma_0^{-1} = o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

gdzie znaki plus oraz minus odpowiadają odpowiednio lewemu i prawemu końcu niejednorodności,  $r$  jest odległością od końca niejednorodności, natomiast  $\phi$  jest kątem układu biegunowego z początkiem w lewym lub prawym końcu niejednorodności. Wartości  $a_n^\mp(\omega)$

oraz  $b_n^\mp(\omega)$ ,  $n = 0, 1$  zawierają parametry opisujące materiał niejednorodności oraz pole fali padającej. Asymptotyczne zachowanie pól  $u^s(r, \phi)$  zależy od stosunku parametrów  $\gamma_0$  oraz  $\varepsilon$ . Funkcje  $\phi_1^\pm(\alpha)$  oraz  $\phi_3^\pm(\alpha)$  mają następujące zachowanie asymptotyczne dla  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\phi_1^\pm(\alpha) = O(\alpha^{-1/4}), \quad \phi_3^\pm(\alpha) = O(\alpha^{-5/4}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (5.21)$$

$$\gamma_0 = O(\varepsilon),$$

$$\phi_1^\pm(\alpha) = O(\alpha^{-1/2}), \quad \phi_3^\pm(\alpha) = O(\alpha^{-3/2}), \quad |\alpha| \rightarrow \infty, \quad (5.22)$$

$$\gamma_0 = O(1), \quad \gamma_0 = O(\varepsilon^{-1}),$$

Najpierw rozpatrzmy przypadek  $\gamma_0 = 0(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pierwszym krokiem faktoryzacji jądra  $\mathbf{G}(\alpha)$  w równaniu (5.18) jest przedstawienie tej funkcji w postaci Khrapkova [Abrahams...]:

$$\mathbf{G}(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + g(\alpha))\mathbf{I} + \frac{1}{\gamma(\alpha)}\mathbf{J}(\alpha), \quad (5.23)$$

$$\mathbf{J}(\alpha) = \begin{pmatrix} (2Z)^{-1} & -\gamma^2 \\ 1 & -(2Z)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^2(\alpha) = -\gamma_1^2(\alpha)\mathbf{I}(\alpha),$$

$$\gamma_1(\alpha) = \sqrt{\alpha^2 - \xi^2}, \quad \xi^2 = 1 + \frac{1}{4Z^2},$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest macierzą jednostkową. Macierz  $\mathbf{G}(\alpha)$  w równaniu (5.23) jest w postaci Khrapkova, a więc może zostać sfaktoryzowana przy użyciu metody Khrapkova:

$$\mathbf{G}(\alpha) = \mathbf{G}_-(\alpha)\mathbf{G}_+(\alpha) = \mathbf{G}_+(\alpha)\mathbf{G}_-(\alpha), \quad (5.24)$$

$$\mathbf{G}_\pm(\alpha) = 2^{1/4}r_\pm^{1/2}(\alpha) \cos[\gamma_1(\alpha)\theta_\pm(\alpha)]\mathbf{I} + 2^{1/4}r_\pm^{1/2}(\alpha) \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \sin[\gamma_1(\alpha)\theta_\pm(\alpha)]\mathbf{J}(\alpha),$$

gdzie

$$r_+(\alpha)r_-(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + g(\alpha)),$$

$$\theta_+(\alpha) + \theta_-(\alpha) = \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \tan^{-1} \left( \frac{\gamma_1(\alpha)}{\gamma(\alpha) + (2Z)^{-1}} \right).$$

Funkcja  $\gamma_1(\alpha)$  posiada punkty rozgałęzienia w górnej  $P_+$  oraz w dolnej  $P_-$  półpłaszczyznach zmiennej zespolonej  $\alpha = \sigma + i\tau$ , które powstały po podziale płaszczyzny przez kontur całkowania  $\Gamma$ . Natomiast funkcje  $\mathbf{G}_\pm(\alpha)$  już nie posiadają punktów rozgałęzienia, ponieważ są to funkcje drugiej potęgi funkcji  $\gamma_1(\alpha)$ . Do wyznaczenia funkcji  $\theta_\pm(\alpha)$  korzystamy z następującego wzoru:

$$\theta_\pm(\alpha) = \frac{\pm 1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\tan^{-1}(\gamma_1(\zeta)/(\gamma(\zeta) + 1/2Z))}{\gamma_1(\zeta)(\zeta - \alpha)} d\zeta,$$

gdzie  $\pm\alpha$  znajduje się powyżej konturu  $\Gamma$ . Do wyznaczenia funkcji  $r_\pm(\alpha)$  korzystamy z następującego wzoru:

$$r_\pm(\alpha) = \exp[\pm\chi_\pm(\alpha)],$$

$$\chi_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2Z\gamma(\zeta)}\right)}{\zeta \pm \alpha} d\zeta,$$

gdzie  $\alpha$  znajduje się powyżej (poniżej)  $\zeta$  dla  $\chi_+(\alpha)$  ( $\chi_-(\alpha)$ ). W ten sposób uzyskujemy

$$\chi_{\pm}(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tan^{-1} \left[ \frac{1}{2Z\sqrt{1+\tau^2}} \right] \frac{id\tau}{i\tau \pm \alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \tan^{-1} \left[ \frac{1}{2Z\sqrt{1-\sigma^2}} \right] \frac{d\sigma}{\sigma \pm \alpha}, \quad (5.25)$$

$$\theta_-(\alpha) = \frac{i}{4\gamma_1(\alpha)} \ln \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \xi^2})(1 - \alpha)}{\alpha - \xi^2 + \sqrt{\xi^2 - 1}\sqrt{\xi^2 - \alpha^2}}, \quad \theta_+(\alpha) = \theta_-(-\alpha).$$

Kiedy  $|\alpha| \rightarrow \infty$  w górnej półpłaszczyźnie  $P_+$  z równań (5.24) oraz (5.25) wynika przybliżenie

$$\mathbf{G}_+(\alpha) \approx 2^{-3/4} \left[ (\alpha^{1/4} + \alpha^{-1/4})\mathbf{I} + \frac{1}{i\alpha}(\alpha^{1/4} - \alpha^{-1/4})\tilde{\mathbf{J}}(\alpha) \right], \quad (5.26)$$

$$\mathbf{G}_+^{-1}(\alpha) \approx 2^{-5/4} \left[ (\alpha^{1/4} + \alpha^{-1/4})\mathbf{I} - \frac{1}{i\alpha}(\alpha^{1/4} - \alpha^{-1/4})\tilde{\mathbf{J}}(\alpha) \right],$$

$$\tilde{\mathbf{J}}(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Następnym krokiem po faktoryzacji funkcji  $\mathbf{G}(\alpha)$  jest przedstawienie wzoru (5.18) w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_+(\alpha) \begin{pmatrix} \phi_1^{\pm} \\ \phi_3^{\pm} \end{pmatrix} - \frac{i}{\alpha \pm l_1} \mathbf{G}_-^{-1}(\mp l_1) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \end{pmatrix} &= \\ = \mathbf{G}_-^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} Y_1^- \\ Y_3^- \end{pmatrix} + \frac{i}{\alpha \pm l_1} \left[ \mathbf{G}_-^{-1}(\alpha) - \mathbf{G}_-^{-1}(\mp l_1) \right] \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Lewa strona (5.27) jest regularna w dolnej półpłaszczyźnie  $P_-$ , natomiast prawa strona jest regularna w górnej półpłaszczyźnie  $P_+$ . Stosując twierdzenie o przedłużeniu analitycznym możemy stwierdzić, że obydwie strony równania (5.27) są tą samą macierzową funkcją całkowitą  $\mathbf{C}(\alpha)$ . Uwzględniając zależności (5.21) i (5.26) oraz korzystając z twierdzenia Liouville'a dochodzimy do wniosku, że  $\mathbf{C}(\alpha)$  jest stałą macierzą postaci  $\mathbf{C}(\alpha) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ . Z powyższego wynika rozwiązanie równania (5.27):

$$\begin{pmatrix} \phi_1^{\pm} \\ \phi_3^{\pm} \end{pmatrix}(\alpha) = \mathbf{G}_+^{-1}(\alpha) \begin{pmatrix} I_1^{\pm}(\alpha) + c \\ I_3^{\pm}(\alpha) \end{pmatrix},$$

gdzie

$$\begin{bmatrix} I_1^{\pm}(\alpha) \\ I_3^{\pm}(\alpha) \end{bmatrix} = \frac{2^{-1/4}i}{(\alpha \pm l_1)r_-^{1/2}(\mp l_1)} \begin{bmatrix} q_1 \left( \cosh \phi_0^{\pm} - \frac{\sinh \phi_0^{\pm}}{2Z\phi_1} \right) - q_3 l_3^2 \frac{\sinh \phi_0^{\pm}}{\phi_1} \\ -q_1 \frac{\sinh \phi_0^{\pm}}{\phi_1} + q_3 \left( \frac{\sinh \phi_0^{\pm}}{2Z\phi_1} + \cosh \phi_0^{\pm} \right) \end{bmatrix},$$

$$\phi_0^{\pm} = \theta_-(\mp l_1)\phi_1, \quad \phi_1 = \left( l_3^2 + \frac{1}{4Z^2} \right)^{1/2}.$$



Niewiadoma stała  $c$  może być wyznaczona, jeżeli uwzględnimy zależność (5.21) oraz przybliżenie (5.26):

$$\begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_3^\pm \end{pmatrix}(\alpha) = 2^{-5/4}(c - i\tilde{I}_3^\pm) \begin{pmatrix} \alpha^{1/4} \\ i\alpha^{-3/4} \end{pmatrix} + O\left(\alpha^{-1/4}\right),$$

$$\tilde{I}_3^\pm = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha I_3^\pm(\alpha).$$

Aby zapewnić właściwe zachowanie funkcji  $\phi_{1,3}^\pm(\alpha)$  wybieramy  $c = i\tilde{I}_3^\pm$ . W ten sposób uzyskujemy wzory dla funkcji  $\phi_{1,3}^\pm(\alpha)$ :

$$\begin{aligned} \phi_1^\pm(\alpha) = 2^{-1/4}r_+^{-1/2}(\alpha) \left\{ [I_1^\pm(\alpha) + i\tilde{I}_3^\pm] \left( \cos \gamma_1\theta_+(\alpha) - \frac{\sin \gamma_1\theta_+(\alpha)}{2Z\gamma_1(\alpha)} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2(\alpha)}{\gamma_1(\alpha)} I_3^\pm(\alpha) \sin \gamma_1\theta_+(\alpha) \right\}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \phi_3^\pm(\alpha) = 2^{-1/4}r_+^{-1/2}(\alpha) \left\{ [-I_1^\pm(\alpha) + i\tilde{I}_3^\pm] \frac{1}{\gamma_1(\alpha)} \sin \gamma_1\theta_+(\alpha) + \right. \\ \left. + I_3^\pm(\alpha) \left( \cos \gamma_1\theta_+(\alpha) + \frac{\sin \gamma_1\theta_+(\alpha)}{2Z\gamma_1(\alpha)} \right) \right\}. \end{aligned}$$

W celu uzyskania funkcji  $\Phi_\beta^\pm(\eta)$  w przestrzeni oryginałów stosujemy odwrotne przekształcenie Fouriera do wzoru (5.28):

$$\begin{aligned} \Phi_\beta^\pm(\eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma e^{-i\eta\alpha} \phi_\beta^\pm(\alpha) d\alpha = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} e^{i\eta \cos \phi} \phi_\beta^\pm(-\cos \phi) \sin \phi d\phi, \end{aligned} \quad (5.29)$$

gdzie  $\Gamma_1$  jest nowym konturem całkowania przedstawionym na Rys 5.1. Punkty krytyczne (5.28) mogą być określone jako biegun ( $\phi = \frac{\pi}{2} \mp \theta_0$ ) oraz punkt brzegowy ( $\phi = 0$ ). Kiedy  $\eta$  jest duże, główny udział w całce (5.29) pochodzi od tych punktów. Uwzględniając zależności

$$r_-^{-1/2}(\alpha) \sin[\gamma_1\theta_-(\alpha)] = f_s(\alpha) [\gamma(\alpha) + (2Z)^{-1}]^{-1/2}, \quad (5.30)$$

$$f_s(\alpha) = -ir_+^{1/2}(\alpha)(2\sqrt{\xi})^{-1}(\alpha+1)^{1/4} [f_+^{1/4}(\alpha) - f_-^{1/4}(\alpha)],$$

$$f_\pm(\alpha) = \left( \alpha \pm i\sqrt{\xi^2 - \alpha^2} \right) \left( \xi^2 - \alpha \mp \frac{1}{2Z}\sqrt{\xi^2 - \alpha^2} \right)$$

uzyskujemy

$$\Phi_1^\pm = \nu_1(\pm\eta) + O(\eta^{-3/2}), \quad (5.31)$$

$$\Phi_3^\pm = \nu_3(\pm\eta) + \sqrt{\frac{1}{2\pi\eta}} e^{i(\eta-\pi/4)} g_0^\pm(\eta) + O(\eta^{-3/2}),$$

$$g_0^\pm(\eta) = 2^{-3/4}r_+^{1/2}(1)\xi^{-1/2} \left( 1 - \frac{i}{2Z} \right)^{1/4} \times \left[ i\tilde{I}_3^\pm + \frac{1}{1 \pm l_1} \left( \frac{\tilde{I}_3^\pm}{2Z} - \tilde{I}_1^\pm \right) \right] e^{i\frac{\eta}{8Z^2}} F\left(\sqrt{\frac{\eta}{8Z^2}}\right),$$

gdzie

$$F(u) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-\nu^2} d\nu$$

jest całką Fresnela.

Na mocy (5.16) oraz (5.31) możemy napisać

$$\Phi_1(x_1) \approx W_1 \exp(ikl_1x_1), \quad (5.32)$$

$$\Phi_3(x_1) \approx W_3 \exp(ikl_1x_1) + \sum_{\pm} D^{\pm} \frac{e^{ik(\alpha \pm x_1)}}{(\alpha \pm x_1)^{1/2}} g_0^{\pm}[k(a \pm x_1)],$$

$$D^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{2\pi k}} e^{-i\pi/4} e^{\mp i\alpha l_1}.$$

Kiedy  $\eta$  jest małe, z równan (5.28) oraz (5.29) uzyskujemy

$$\Phi_3^{\pm}(\eta) \approx 2^{-1/4} \tilde{I}_3^{\pm} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp(-i\alpha\eta) \alpha^{-5/4} d\alpha + \Phi_3^0(\eta), \quad (5.33)$$

$$\Phi_3^0(\eta) \approx -A_* \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \exp(-i\alpha\eta) \frac{\alpha^{-1/4}}{\alpha - 1} d\alpha.$$

Funkcja  $\Phi_3^0(\eta) = A_* e^{-i\eta}$ ,  $\eta < 0$  odpowiada promieniom padającym, których pole powstaje na skutek kolejnych dyfrakcji na końcach niejednorodności. Wykorzystując wzór

$$\int_{\Gamma} \exp(-i\alpha\eta) \alpha^{-5/4} d\alpha = -\frac{4\pi}{\Gamma(1/4)} e^{i3\pi/8} \eta^{1/4},$$

gdzie  $\Gamma$  jest funkcją Gamma, uzyskujemy wartość całki (5.33) dla  $\eta \ll 1$ :

$$\Phi_3^{\pm}(\eta) \approx -2 \frac{e^{i3\pi/8}}{\Gamma(1/4)} \eta^{1/4} (2^{-1/4} \tilde{I}_3^{\pm} - iA_*). \quad (5.34)$$

W celu określenia zachowania funkcji  $\Phi_3^{\pm}(\eta)$  w okolicach końców niejednorodności musimy wyznaczyć wartość  $A_*$ . Ze wzoru (5.32) widać, że podstawowe pola dyfrakcyjne zanikają jak  $\mathbf{x}^{-1}$  przy  $Z \neq \infty$  oraz jak  $\mathbf{x}^{-1/2}$  przy  $Z = \infty$ . Korzystając ze wzoru (5.34) możemy napisać

$$\Phi_3^{\pm}(x_1) = -2 \frac{e^{i3\pi/8}}{\Gamma(1/4)} [k(\alpha \pm x_1)]^{1/4} \left( \frac{\tilde{I}_3^{\pm}}{\sqrt[4]{2}} - iA_*^{\pm} \right) e^{\mp i\alpha l_1}, \quad (5.35)$$

$$A_*^{\pm} = (2a)^{-1/2} D^{\mp} e^{2ix} g_0^{\mp}(2x), \quad x_1 \rightarrow \mp a, \quad x \gg 1.$$

Ostatecznie wykorzystując równania (3.27), (3.30), (5.31) oraz równania (5.35) i (5.19) uzyskujemy

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = -2 \frac{\sin[x(l_1 - \nu_1)]}{l_1 - \nu_1} (W_1 + i\nu_3 W_3) - \quad (5.36)$$

$$-i\nu_3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{\pm} e^{\mp i\alpha(l_1 - \nu_1)} \int_0^{\sqrt{2x}} e^{i\nu^2(1 \mp \nu_1)} g_0^{\pm}(\nu^2) d\nu,$$

$$a_1^\pm(\omega) = -\frac{e^{i3\pi/8}}{\Gamma(1/4)} \left(\frac{k}{2}\right)^{1/4} (\tilde{I}_3^\pm - 2^{1/4}iA_*^\pm) e^{\mp i\omega x_1}. \quad (5.37)$$

Dla przypadku  $\gamma_0 = O(1)$ ,  $\gamma_0^{-1} = o(\varepsilon)$  kiedy  $\varepsilon \rightarrow 0$  układ równań całkowych (5.15) może zostać rozwiązany przy użyciu metody iteracyjnej. Rozwiązania pierwszego rzędu mogą być przedstawione w następującej postaci:

$$\Phi_1(x_1) = \Phi_1^{(0)}(x_1) + Z\Phi_1^{(1)}(x_1) + \dots, \quad (5.38)$$

$$\Phi_3(x_1) = Z\Phi_3^{(1)}(x_1) + \dots,$$

gdzie funkcje  $\Phi_\beta^{(i)}(x_1)$ ,  $\beta = 1, 3$ ,  $i = 0, 1$  spełniają następujące równania

$$k \int_{-a}^a \Phi_1^{(i)}(p) K_3(k|x_1 - p|) dp = a_i, \quad i = 0, 1; \quad |x_1| < a, \quad (5.39)$$

$$\Phi_3^{(1)}(x_1) = \Phi_1^{(0)}(x_1) - 2il_3 \exp(ikl_1 x_1), \quad a_0 = q_3 \exp(ikl_1 x_1),$$

$$a_1 = -\Phi_3^{(1)}.$$

Równanie (5.39) rozwiążemy wykorzystując metodę Wienera-Hopfa. Uzyskujemy

$$f(k; \mathbf{1}, \nu) = -2 \frac{\sin[x(l_1 - \nu_1)]}{l_1 - \nu_1} (W_1 + i\nu_3 W_3), \quad (5.40)$$

$$b_1^\pm = 2q_3 Z \sqrt{1 \mp l_1(\pi k)^{1/2}} e^{-i\pi/4} e^{\mp i\omega x_1}. \quad (5.41)$$

Równania (5.36) oraz (5.40) opisują rozwiązanie dla strefy falowej niejednorodności (w polu dalekim), natomiast równania (5.19), (5.37) oraz (5.41) opisują rozwiązanie w okolicach końców niejednorodności. Rozwiązania te obowiązują dla zakresu wysokich częstotliwości, kiedy długość fali użytej w badaniach jest mała w porównaniu z długością niejednorodności.

## 5.4. Wnioski

W podrozdziale 5.1 zostały wprowadzone efektywne warunki brzegowe upraszczające znacząco drugie zagadnienie przedstawione w podrozdziale 3.1, co prowadzi do skrócenia czasu potrzebnego do uzyskania rozwiązania zagadnienia.

W podrozdziale 5.2 został wyprowadzony układ mocno osobliwych równań całkowych dla niewiadomych funkcji  $\Phi_1(x_1)$  oraz  $\Phi_3(x_1)$ .

W podrozdziale 5.3 układ ten został rozwiązany przy użyciu metody Wienera-Hopfa, co pozwoliło uzyskać analityczne wzory dla funkcji  $\Phi_1(x_1)$  oraz  $\Phi_3(x_1)$ . Po podstawieniu tych wzorów do równania (3.35) uzyskano dla pola dalekiego poszukiwany model (wzory (5.36) oraz (5.40)) fali rozproszonej na cienkim płaskim włączeniu w materiale sprężystym dla drugiego zagadnienia przedstawionego w podrozdziale 3.1.

## Rozdział 6

# Weryfikacja przedstawionych modeli

W celu weryfikacji przedstawionych modeli musimy dowieść, że wprowadzenie efektywnych warunków brzegowych (4.11) oraz (5.1)-(5.2) nie powoduje wprowadzenia błędów do modelu większych od  $\varepsilon$  a także udowodnić, że analityczne rozwiązanie układów równań całkowych (4.21),(4.25),(4.27) oraz (5.15) daje wyniki zgodne z numerycznym rozwiązaniem tych równań.

### 6.1. Weryfikacja efektywnych warunków brzegowych

#### 6.1.1. Weryfikacja efektywnych warunków brzegowych dla cienkiej płaskiej niejednorodności

W celu weryfikacji efektywnych warunków brzegowych rozpatrzmy przypadek nieskończonej cienkiej warstwy o grubości  $h = \text{const}$ . Dla tego przypadku do obliczenia  $\Phi_\beta(x_1)$ ,  $\beta = 1, 3$  może zostać użyta metoda Fouriera.

Wykorzystując efektywne warunki brzegowe (4.11) dla nieskończonej cienkiej warstwy uzyskujemy

$$\Phi_\beta(x_1) = \frac{q_\beta m \exp(ikl_1 x_1)}{1 - Z_\beta m L_\beta(l_1)}. \quad (6.1)$$

Z drugiej strony stosując metodę Fouriera do zagadnienia brzegowego (3.1),(3.3)-(3.6) dla nieskończonej cienkiej warstwy uzyskujemy

$$\Phi_1(x_1) = A_0 \frac{-2km [Z_1 s(m) \cos^2 \theta_1 \cos(ml_3) - l_3^2 \cosh(m\gamma_1) \text{si}(ml_3)]}{\cosh(m\gamma_1) - Z_1 m L_1(l_1) s(m)} e^{ikl_1 x_1}, \quad (6.2)$$

$$\Phi_3(x_1) = A_0 \frac{-2iml_3 \text{si}(ml_3) [\cosh(m\gamma_1) - Z_3 \text{si}^{-1}(ml_3) s(m) \cos(ml_3)]}{\cosh(m\gamma_1) - Z_3 m L_3(l_1) s(m)} e^{ikl_1 x_1},$$

$$s(m) = \frac{\sinh(m\gamma_1)}{m\gamma_1}, \quad \text{si}(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad \sin \theta_1 = \xi \sin \theta_0, \quad \gamma_1 = \sqrt{l_1^2 - \xi^{-2}}.$$

Dla dowolnych małych wartości falowej grubości warstwy  $\max(kh, k_0 h) \ll 1$  równanie (6.2) przyjmuje postać

$$\Phi_1(x_1) = A_0 \frac{-2km (Z_1 \cos^2 \theta_1 - l_3^2)}{1 - Z_1 m L_1(l_1)} e^{ikl_1 x_1}, \quad \Phi_3(x_1) = A_0 \frac{-2iml_3 (1 - Z_3)}{1 - Z_3 m L_3(l_1)} e^{ikl_1 x_1}. \quad (6.3)$$

Równanie (6.3) jest identyczne z równaniem (6.1) oraz maksymalne błędy wynikające z zastosowania efektywnych warunków brzegowych (4.11) są mniejsze od  $\varepsilon$  dla dowolnych mechanicznych parametrów materiału oraz włączenia.

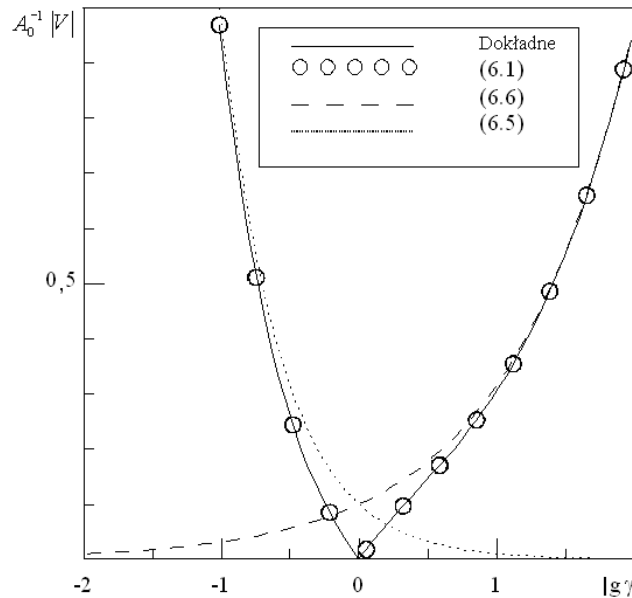
Dla przypadku nieskończonej cienkiej warstwy efektywne warunki brzegowe (4.3) (słaba niejednorodność), (4.5) (miękkie włączenie) oraz (4.6) (włączenie o dużej sztywności) przyjmują postać odpowiednio

$$\Phi_1(x_1) = -2A_0km \left( Z_1 \cos^2 \theta_1 - l_1^2 \right) e^{ikl_1x_1}, \quad \Phi_3(x_1) = -2A_0iml_3(1 - Z_3) e^{ikl_1x_1}, \quad (6.4)$$

$$\Phi_1(x_1) = 0, \quad \Phi_3(x_1) = 2A_0 \frac{iml_3Z_3}{1 - Z_3mL_3(l_1)} e^{ikl_1x_1} \quad (6.5)$$

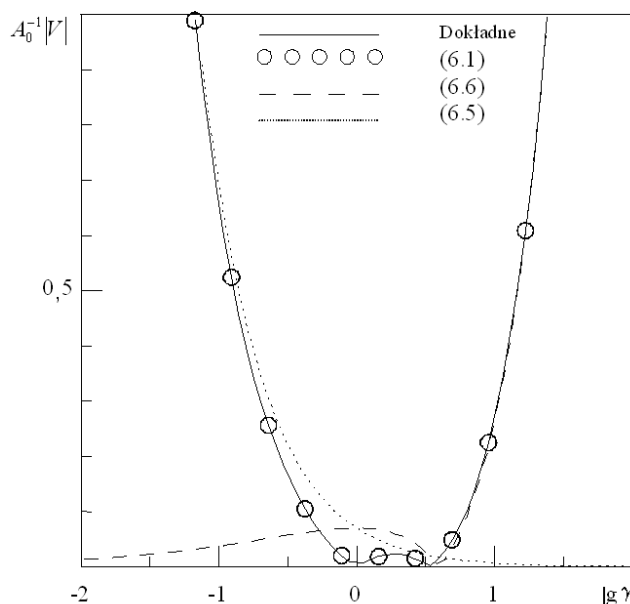
oraz

$$\Phi_1(x_1) = -2A_0 \frac{kmZ_1 \cos^2 \theta_1}{1 - Z_1mL_1(l_1)} e^{ikl_1x_1}, \quad \Phi_3(x_1) = 0. \quad (6.6)$$



Rysunek 6.1. Wpływ efektywnych warunków brzegowych na wartość znormalizowanego współczynnika odbicia. Znormalizowany współczynnik odbicia jako funkcja  $\lg\gamma$  dla  $\theta_0 = 0$ .

Na rys. 6.1 oraz rys. 6.2 została przedstawiona wartość znormalizowanego współczynnika odbicia  $A_0^{-1}|V|$ ,  $V = \frac{1}{2} \left[ \Phi_3(0) + \frac{1}{ik \cos \theta_0} \Phi_1(0) \right]$  w funkcji  $\lg\gamma$  dla  $\rho_0/\rho = \gamma^{1/2}$ ,  $kh = 0.05$ ,  $\theta_0 = 0$  oraz  $\theta_0 = \pi/4$  dla fali odbitej od nieskończonej cienkiej warstwy. Dokładne rozwiązanie zostało przedstawione razem z trzema przybliżeniami (6.1), (6.6), (6.5). Jak widać wyniki uzyskane przy użyciu efektywnych warunków brzegowych (4.5) dla nieskończonej cienkiej warstwy są zgodne z dokładnym rozwiązaniem tylko kiedy  $\lg\gamma \leq -0.5$ , natomiast wyniki uzyskane przy użyciu efektywnych warunków brzegowych (4.6) dla nieskończonej cienkiej warstwy są zgodne z dokładnym rozwiązaniem tylko kiedy  $\lg\gamma > 0.5$ . Warunki brzegowe (4.11) użyte do nieskończonej cienkiej warstwy są zgodne z dokładnym rozwiązaniem dla



Rysunek 6.2. Wpływ efektywnych warunków brzegowych na wartość znormalizowanego współczynnika odbicia. Znormalizowany współczynnik odbicia jako funkcja  $\lg \gamma$  dla  $\theta_0 = \pi/4$ .

całego zakresu wartości  $\lg \gamma$ . Na rys. 6.3 została przedstawiona wartość  $|V_1 = V(A_0 k h)^{-1}|$  w funkcji  $\lg \gamma$  dla  $\theta_0 = 0$ . Dokładne rozwiązanie zostało przedstawione razem z dwoma przybliżeniami (6.1) oraz (6.4). Jak widać wyniki uzyskane przy użyciu efektywnych warunków brzegowych (6.4) są zgodne z dokładnym rozwiązaniem tylko kiedy  $-1 \leq \lg \gamma \leq 2$ . Warunki brzegowe (6.1) są zgodne z dokładnym rozwiązaniem dla całego zakresu wartości  $\lg \gamma$ .

### 6.1.2. Weryfikacja efektywnych warunków brzegowych dla cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności

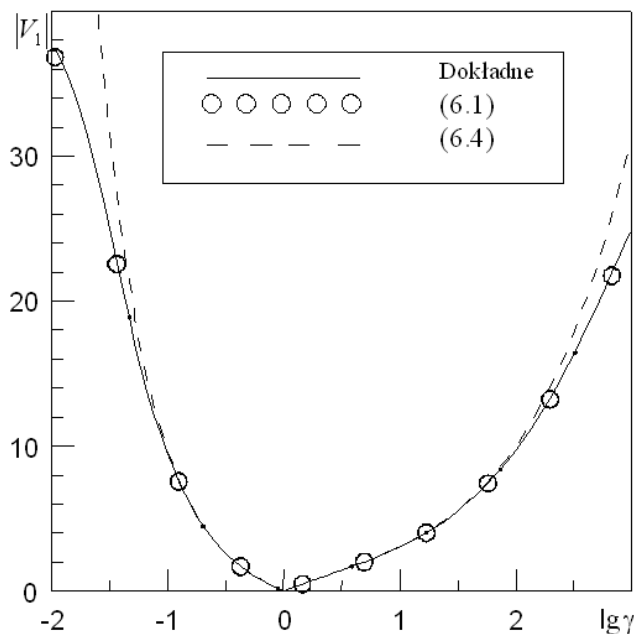
Tak jak powyżej w celu weryfikacji efektywnych warunków brzegowych (5.1)-(5.2) rozpatrzmy przypadek nieskończonej cienkiej warstwy o grubości  $h = \text{const}$  do którego możemy użyć metodę Fouriera.

Wykorzystując efektywne warunki brzegowe (5.1)-(5.2) dla nieskończonej cienkiej warstwy uzyskujemy wartość amplitudy fali rozproszonej na tej warstwie [49]:

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = -\frac{1 - i k h l_3 \gamma^{-1}}{1 + i k h l_3 \gamma^{-1}}. \quad (6.7)$$

Z drugiej strony stosując metodę Fouriera do zagadnienia brzegowego (3.1), (3.3)-(3.4), (3.7)-(3.8) dla nieskończonej cienkiej warstwy uzyskujemy

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = -\frac{\cos \theta_2 - i \xi \gamma^{-1} l_3 \tan(k_0 h \cos \theta_2)}{\cos \theta_2 + i \xi \gamma^{-1} l_3 \tan(k_0 h \cos \theta_2)}, \quad \sin \theta_2 = \frac{k l_1}{k_0}. \quad (6.8)$$



Rysunek 6.3. Wpływ efektywnych warunków brzegowych na wartość znormalizowanego współczynnika odbicia.  $|V_1| = |V|(A_0kh)^{-1}$  jako funkcja  $\lg \gamma$  dla  $\theta_0 = \pi/4$ .

Dla dowolnych małych wartości falowej grubości warstwy  $\max(kh, k_0h) \ll 1$  równanie (6.8) przyjmuje postać

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = -\frac{\cos \theta_2 - i\xi\gamma^{-1}l_3k_0h \cos \theta_2}{\cos \theta_2 + i\xi\gamma^{-1}l_3k_0h \cos \theta_2}. \quad (6.9)$$

Równanie (6.9) jest identyczne z równaniem (6.7) oraz maksymalne błędy wynikające z zastosowania efektywnych warunków brzegowych (5.1)-(5.2) są mniejsze od  $\varepsilon$  dla dowolnych mechanicznych parametrów materiału oraz włączenia.

## 6.2. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązania równania całkowego dla cienkiej płaskiej niejednorodności

### 6.2.1. Numeryczne rozwiązanie mocno osobliwego równania całkowego przy użyciu metody Galerkin dla przypadku miękkiej niejednorodności

Do weryfikacji modelu pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym dla przypadku miękkiej niejednorodności przedstawimy numeryczne rozwiązanie równania (4.25) i porównamy uzyskane wyniki z wyjściem modelu. Zgodnie ze schematem metody Galerkin zaprezentowanym w rozdziale 2 przedstawimy nieznaną funkcję  $\Phi_3(x_1)$  występującą w równaniu (4.25) w postaci kombinacji liniowej wielomianów Czebyszewa pierwszego rodzaju [51], [52]

$$\Psi_m(x_1) = \sin(m \arccos(x_1/a)) \quad (6.10)$$

w sposób następujący [88], [43]:

$$\Phi_3(x_1) = q_3 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Psi_m(x_1), \quad (6.11)$$

gdzie  $a_m$  są nieznanymi współczynnikami. W celu wyznaczenia  $a_m$  podstawimy wzór (6.11) do równania (4.25) oraz wprowadzimy zamiany zmiennych:  $x_1 = au$  oraz  $p = ap'$ . W ten sposób uzyskujemy algebraiczny układ równań liniowych dla niewiadomych zmiennych  $a_m$

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \Psi_m(u) + Z_3 x \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Psi_m(p) \int_{\Gamma} \gamma(\alpha) e^{ix(u-p)\alpha} d\alpha dp = e^{ixl_1 u}. \quad (6.12)$$

Podstawiając zależność [125], [2]

$$\int_{-1}^1 \Psi_m(p) e^{-ixp\alpha} dp = (-i)^{m-1} \pi m \frac{J_m(\alpha x)}{\alpha x} \quad (6.13)$$

do równania (6.12) uzyskujemy

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \Psi_m(u) + Z_3 x \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \gamma(\alpha) \sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{ixu\alpha} (-i)^{m-1} \pi m \frac{J_m(\alpha x)}{\alpha x} d\alpha = e^{ixl_1 u}. \quad (6.14)$$

Występująca w równaniach (6.13) oraz (6.14) funkcja  $J_m$  jest cylindryczną funkcją Bessela  $m$ -tego rzędu. Mnożąc obustronnie równanie (6.14) przez  $\Psi_n(u)$ , a następnie całkując obustronnie to równanie po zmiennej  $u$  w przedziale  $[-1, 1]$  uzyskujemy

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-1}^1 \Psi_m(u) \Psi_n(u) du + \frac{Z_3}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (-i)^{m-1} m a_m \int_{\Gamma} \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x)}{\alpha} \int_{-1}^1 e^{ixu\alpha} \Psi_n(u) d\alpha du = \\ = \int_{-1}^1 e^{ixl_1 u} \Psi_n(u) du. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Podstawiając zależność [125], [2]

$$\int_{-1}^1 \Psi_n(u) e^{ixu\alpha} du = (i)^{n-1} \pi n \frac{J_n(\alpha x)}{\alpha x} \quad (6.16)$$

do lewej i prawej strony równania (6.15) uzyskujemy

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-1}^1 \Psi_m(u) \Psi_n(u) du + \frac{Z_3}{2} \int_{\Gamma} \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{\infty} a_m (-i)^{m-1} m (i)^{n-1} n \pi = \\ = (i)^{n-1} n \pi \frac{J_n(xl_1)}{xl_1}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Podstawiając wzór (6.10) do pierwszej całki występującej w lewej stronie równania (6.17) oraz zaznaczając tę całkę  $C_{mn}$  uzyskujemy

$$C_{mn} = \int_{-1}^1 \Psi_m(u) \Psi_n(u) du = \int_{-1}^1 \sin(m \arccos u) \sin(n \arccos u) du. \quad (6.18)$$



Wprowadzając zamianę zmiennych  $u = \cos \vartheta$  w (6.18) uzyskujemy

$$C_{mn} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(m\vartheta) \sin(n\vartheta) \sin \vartheta d\vartheta. \quad (6.19)$$

Zaznaczając drugą całkę występującą w lewej stronie równania (6.17)

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha \quad (6.20)$$

oraz uwzględniając wzór (6.19) możemy układ równań (6.17) zapisać następująco:

$$\sum_{m=1}^N a_m \left[ C_{mn} + \frac{Z_3}{x} mn(i)^{n-m} I_{mn} \right] = n(i)^{n-1} \pi \frac{J_n(xl_1)}{xl_1}. \quad (6.21)$$

W układzie liniowych algebraicznych równań (6.21) występuje  $N$  równań. W celu uzyskania dobrej dokładności dla każdej wartości bezwymiarowej liczby falowej  $x = ka$  wystarczy ustalić liczbę równań  $N = 2x$ .

Uzyskane współczynniki  $a_m$  podstawiamy do wzoru (6.11) i w ten sposób uzyskujemy wartość funkcji  $\Phi_3(x_1)$ , którą następnie podstawiamy do wzoru (3.35). Wzór (3.35) przyjmuje następującą postać:

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = - \int_{-a}^a \Phi_3(y_1) ik\nu_3 e^{-ik\nu_1 y_1} dy_1 = -ix\nu_3 \sum_{m=1}^N a_m \int_{-1}^1 \Phi_3(y_1) e^{-ix\nu_1 y_1} dy_1. \quad (6.22)$$

Podstawiając zależność (6.13) do wzoru (6.22) uzyskujemy

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = \nu_3 \pi x \sum_{m=1}^N a_m m(-i)^m \frac{J_m(x\nu_1)}{x\nu_1}. \quad (6.23)$$

Dla każdej wartości  $x$  przed rozwiązaniem układu równań (6.21) musimy obliczyć wszystkie współczynniki  $C_{mn}$  oraz  $I_{mn}$  dla  $n = [1..N]$  oraz  $m = [1..N]$  co zajmuje więcej czasu niż samo rozwiązywanie układu równań. Opłaca się więc sporządzenie tablicy współczynników  $C_{mn}$  oraz  $I_{mn}$  przed właściwym rozwiązywaniem układu równań (6.21). Ponieważ liczba równań, a więc i liczba współczynników zależą od wartości  $x$  dla której chcemy uzyskać wartość amplitudy  $f(k; \mathbf{l}, \nu)$ , to wielkość tabeli współczynników i czas potrzebny na zapełnienie tej tablicy również zależą od wartości  $x$ . Dla dużej wartości  $x$  czas potrzebny na wypełnienie tablicy współczynników układu równań może sięgać kilku dni na komputerach klasy PC.

### 6.2.2. Numeryczne rozwiązanie mocno osobliwego równania całkowego przy użyciu metody kwadratur mechanicznych dla przypadku sztywnej niejednorodności

Zacniemy od wprowadzenia następującego oznaczenia we wzorze (4.11):

$$f(x_1) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + k^2 \xi^{-2} \right) w(x_1). \quad (6.24)$$

Podstawiając (6.24) do (4.11) po przeprowadzeniu przekształceń uzyskujemy

$$f(x_1) = -\frac{\Phi_1(x_1)}{\xi^2 2Z_1 m k^{-1}} + \frac{h}{2Z_1 m k^{-1} \xi^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + k^2 \right) u^i(x_1)$$

lub uwzględniając definicje  $Z_1$  oraz  $m$ :

$$f(x_1) = -\Phi_1(x_1)(h\gamma)^{-1} + \gamma^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + k^2 \right) u^i(x_1). \quad (6.25)$$

Rozpatrzmy równanie falowe dla przypadku jednostkowego punktowego źródła zaburzeń umieszczonego w punkcie  $\mathbf{y}$ :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + k^2 \xi^{-2} \right) \varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Rozwiązaniem tego równania (zwanego równaniem podstawowym) jest funkcja

$$\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2ik\xi^{-1}} e^{ik\xi^{-1}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}. \quad (6.26)$$

W celu uzyskania rozwiązania równania falowego z niezerową prawą stroną musimy pomnożyć (6.26) przez prawą stronę równania. W naszym przypadku funkcja  $f(x_1)$  w (6.24) jest określona na powierzchni niejednorodności, dlatego w rozwiązaniu trzeba uwzględnić całkowanie funkcji  $f(x_1)$  po powierzchni niejednorodności. Uzyskujemy w ten sposób dla  $w(x_1)$ :

$$w(x_1) = c_1 \cos(k\xi^{-1}x_1) + c_2 \sin(k\xi^{-1}x_1) + \int_{-a}^a f(y_1) \frac{1}{2ik\xi^{-1}} e^{ik\xi^{-1}|x_1-y_1|} dy_1. \quad (6.27)$$

Wartość pochodnej po  $x_1$  funkcji  $w(x_1)$  wynosi

$$\frac{\partial w(x_1)}{\partial x_1} = -k\xi^{-1}c_1 \sin(k\xi^{-1}x_1) + k\xi^{-1}c_2 \cos(k\xi^{-1}x_1) + \int_{-a}^a f(y_1) \frac{1}{2ik\xi^{-1}} ik\xi^{-1} e^{ik\xi^{-1}|x_1-y_1|} dy_1.$$

W celu wyznaczenia stałych  $c_1$  oraz  $c_2$  uwzględnimy warunki na końcach włączenia (4.27)

$$\left. \frac{\partial w(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1=a} = -k\xi^{-1}c_1 \sin(x\xi^{-1}) + k\xi^{-1}c_2 \cos(x\xi^{-1}) + \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(y_1) e^{ik\xi^{-1}|a-y_1|} dy_1 = 0, \quad (6.28)$$

$$\left. \frac{\partial w(x_1)}{\partial x_1} \right|_{x_1=-a} = k\xi^{-1}c_1 \sin(x\xi^{-1}) + k\xi^{-1}c_2 \cos(x\xi^{-1}) - \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(y_1) e^{ik\xi^{-1}|a+y_1|} dy_1 = 0, \quad (6.29)$$

Po dodaniu równań (6.28) oraz (6.29) uzyskujemy

$$2k\xi^{-1}c_2 \cos(x\xi^{-1}) + \frac{1}{2} e^{ix\xi^{-1}} \int_{-a}^a f(y_1) [e^{-ik\xi^{-1}y_1} - e^{ik\xi^{-1}y_1}] dy_1 = 0,$$

i po uwzględnieniu wzorów Eulera uzyskujemy

$$c_2 = \frac{ie^{ix\xi^{-1}}}{2k\xi^{-1} \cos(x\xi^{-1})} \int_{-a}^a f(y_1) \sin(k\xi^{-1}y_1) dy_1. \quad (6.30)$$

Odejmując równanie (6.28) od równania (6.29) uzyskujemy

$$2k\xi^{-1}c_1 \sin(x\xi^{-1}) - \frac{1}{2}e^{ix\xi^{-1}} \int_{-a}^a f(y_1) [e^{ik\xi^{-1}y_1} + e^{-ik\xi^{-1}y_1}] dy_1 = 0,$$

i po uwzględnieniu wzorów Eulera uzyskujemy

$$c_1 = \frac{ie^{ix\xi^{-1}}}{2k\xi^{-1} \sin(x\xi^{-1})} \int_{-a}^a f(y_1) \cos(k\xi^{-1}y_1) dy_1. \quad (6.31)$$

Podstawiając wzory (6.30) oraz (6.31) do (6.27) uzyskujemy

$$\begin{aligned} w(x_1) = & \frac{e^{x\xi^{-1}}}{2k\xi^{-1} \sin(x\xi^{-1})} \int_{-a}^a f(y_1) \cos(k\xi^{-1}y_1) dy_1 \cos(k\xi^{-1}x_1) + \\ & + \frac{ie^{ix\xi^{-1}}}{2k\xi^{-1} \cos(x\xi^{-1})} \int_{-a}^a f(y_1) \sin(k\xi^{-1}y_1) dy_1 \sin(k\xi^{-1}x_1) + \frac{1}{2ik\xi^{-1}} \int_{-a}^a f(y_1) e^{ik\xi^{-1}|x_1-y_1|} dy_1. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Wprowadzamy funkcję  $g(x, y_1, x_1)$ :

$$\begin{aligned} g(x, y_1, x_1) = & \frac{e^{x\xi^{-1}}}{\sin(x\xi^{-1})} \cos(k\xi^{-1}y_1) \cos(k\xi^{-1}x_1) + \\ & + \frac{ie^{ix\xi^{-1}}}{\cos(x\xi^{-1})} \sin(k\xi^{-1}y_1) \sin(k\xi^{-1}x_1) - ie^{ik\xi^{-1}|x_1-y_1|} dy_1. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Po przeprowadzeniu zamiany zmiennej całkowania i po uwzględnieniu definicji funkcji  $g(x, y_1, x_1)$  wzór (6.32) możemy zapisać następująco:

$$w(u) = \frac{a^2}{2x\xi^{-1}} \int_{-1}^1 f(p)g(x, p, u) dp. \quad (6.34)$$

Korzystając z zależności

$$w(u) = u^i(u) - \frac{a}{4\pi} \int_{-1}^1 dp \int_{\Gamma} d\alpha \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} e^{i\alpha x(u-p)} d\alpha$$

oraz korzystając z zależności (6.25) uzyskujemy

$$\begin{aligned} -\frac{a^2}{2x\xi^{-1}} \int_{-1}^1 [\Phi_1(p)(h\gamma)^{-1}] g(x, p, t) dp + \frac{a}{4\pi} \int_{-1}^1 dp \int_{\Gamma} d\alpha \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} e^{i\alpha x(t-p)} + \\ + \frac{a^2}{2x\xi^{-1}\gamma} \int_{-1}^1 \left( \frac{\partial^2}{\partial p^2} + k^2 \right) u^i(p)g(x, p, t) dp = u^i(t), \quad |t| < 1. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Uwzględniając wzór (3.1) oraz obliczając drugą pochodną po  $p$  funkcji fali padającej na niejednorodność  $u^i(p)$  zapiszemy (6.35) następująco

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2x\xi^{-1}h\gamma} \int_{-1}^1 \Phi_1(p)g(x, p, t) dp + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dp \int_{\Gamma} d\alpha \frac{\Phi_1(p)}{\gamma(\alpha)} e^{i\alpha x(t-p)} = \\ = -\frac{x l_3^2}{2\xi^{-1}\gamma} \int_{-1}^1 e^{ix l_1 p} g(x, p, t) dp + e^{ix l_1 t}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Przedstawimy nieznaną funkcję  $\Phi_1(p)$  występującą w równaniu (6.36) w postaci kombinacji liniowej wielomianów Czebysheva drugiego rodzaju w sposób następujący [88], [43]:

$$\Phi_1(p) = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_m(p), \quad (6.37)$$

gdzie  $a_m$  są nieznanymi współczynnikami. W celu wyznaczenia  $a_m$  podstawimy wzór (6.37) do równania (4.36):

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{2x\xi^{-1}h\gamma} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_m(p) g(x, p, t) dp + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dp \int_{\Gamma} d\alpha \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_m(p) \frac{1}{\gamma(\alpha)} e^{i\alpha x(t-p)} = -\frac{x l_3^2}{2\xi^{-1}\gamma} \int_{-1}^1 e^{ixl_1 p} g(x, p, t) dp + e^{ixl_1 t}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Mnożąc obustronnie równanie (6.38) przez  $T_n(p)/\sqrt{1-t^2}$ , a następnie całkując obustronnie to równanie po zmiennej  $t$  w przedziale  $[-1, 1]$  uzyskujemy

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{2x\xi^{-1}h\gamma} \int_{-1}^1 dp \int_{-1}^1 dt \frac{1}{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-t^2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_m(p) T_n(p) g(x, p, t) + \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 dp \int_{-1}^1 dt \int_{\Gamma} d\alpha \frac{1}{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-t^2}} \sum_{m=0}^{\infty} a_m T_m(p) T_n(p) \frac{1}{\gamma(\alpha)} e^{i\alpha x(t-p)} = \\ & = -\frac{x l_3^2}{2\xi^{-1}\gamma} \int_{-1}^1 dp \int_{-1}^1 dt \frac{T_n(p)}{\sqrt{1-t^2}} e^{ixl_1 p} g(x, p, t) + \int_{-1}^1 \frac{T_n(p)}{\sqrt{1-t^2}} e^{ixl_1 t} dt. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Korzystając z następujących zależności [125], [2]

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(p)}{\sqrt{1-p^2}} e^{-i\alpha x p} dp = \pi i^m J_m(\alpha x) \quad (6.40)$$

oraz

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(p)}{\sqrt{1-p^2}} e^{i\alpha x p} dp = \pi (-i)^n J_n(\alpha x)$$

możemy przedstawić równanie (6.39) w następującej postaci

$$\sum_{m=0}^N a_m I_{mn} = C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (6.41)$$

$$I_{mn} = -\frac{a}{2xh\xi^{-1}\gamma} B_{mn} + \frac{\pi}{2} I_{mn}^{(1)} i^{m-n}, \quad (6.42)$$

$$I_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\gamma(\alpha)} d\alpha, \quad (6.43)$$

$$c_n = -\frac{x l_3^2}{2\xi^{-1}\gamma} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{e^{ixl_1 p} T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} g(x, p, t) dp dt + \pi (-i)^n J_n(xl_1), \quad (6.44)$$

$$B_{mn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{T_n(p) T_m(p) g(x, p, t)}{\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-t^2}} dp dt. \quad (6.45)$$

Zgodnie ze schematem postępowania metody kwadratur mechanicznych zastępujemy całkowanie sumą wartości funkcji podcałkowej w wyznaczonych punktach:

$$\int_{-1}^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} du \approx \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N f(x_k), \quad x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2N}. \quad (6.46)$$

Wykorzystując (6.46) zapisujemy (6.44) oraz (6.45) następująco:

$$c_n = -\frac{x l_3^2}{2\xi^{-1}\gamma} \frac{\pi}{N} \sum_{k=1}^N T_n(t) \int_{-1}^1 e^{ixl_1 p} g(x, p, x_k) dp + \pi(-i)^n J_n(xl_1), \quad (6.47)$$

$$B_{mn} = \left(\frac{\pi}{N}\right)^2 \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^N g(x, x_k, x_j) T_m(x_k) T_n(x_j). \quad (6.48)$$

Po przeprowadzeniu przekształceń trygonometrycznych funkcję  $g(x, p, u)$  możemy zapisać następująco

$$g(x, p, t) = \sin(x\xi^{-1}|t-p|) + \frac{1}{2\sin(2x\xi^{-1})} \left[ \cos[x\xi^{-1}(2-|t-p|)] + \right. \quad (6.49) \\ \left. + \cos[x\xi^{-1}(2+|t-p|)] + 2\cos[x\xi^{-1}|t+p|] \right].$$

W układzie liniowych równań algebraicznych (6.41) występuje  $N$  równań. W celu uzyskania dobrej dokładności dla każdej wartości bezwymiarowej liczby falowej  $x = ka$  wystarczy ustalić liczbę równań  $N = 2x$ .

Uzyskane współczynniki  $a_m$  podstawiamy do wzoru (6.37) i w ten sposób uzyskujemy wartość funkcji  $\Phi_1(x_1)$ , którą następnie podstawiamy do wzoru (3.35). Wzór (3.35) przyjmuje następującą postać:

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = -\int_{-a}^a \Phi_1(y_1) e^{-ik\nu_1 y_1} dy_1 = -\sum_{m=0}^N a_m \int_{-1}^1 T_m(p) \frac{e^{-ix\nu_1 p}}{\sqrt{1-p^2}} dp. \quad (6.50)$$

Podstawiając zależność (6.40) do wzoru (6.50) uzyskujemy

$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = -\pi \sum_{m=0}^N a_m (i)^m J_m(x\nu_1). \quad (6.51)$$

Dla każdej wartości  $x$  przed rozwiązaniem układu równań (6.41) musimy obliczyć wszystkie wsółczynniki  $C_n$ ,  $B_{mn}$  oraz  $I_{mn}^{(1)}$  dla  $n = [0..N]$  oraz  $m = [0..N]$ , co zajmuje więcej czasu niż samo rozwiązywanie układu równań. Oplaca się więc sporządzenie tablicy współczynników  $C_n$ ,  $B_{mn}$  oraz  $I_{mn}^{(1)}$  przed właściwym rozwiązywaniem układu równań (6.41). Ponieważ liczba równań, a więc i liczba współczynników zależą od wartości  $x$  dla której chcemy uzyskać wartość amplitudy  $f(k; \mathbf{l}, \nu)$ , to wielkość tabeli współczynników i czas potrzebny na zapelnienie tej tabliczy również zależą od wartości  $x$ .

### 6.2.3. Numeryczne rozwiązanie mocno osobliwego równania całkowego dla przypadku dowolnego stosunku właściwości mechanicznych niejednorodności i materiału

Dla dowolnego stosunku właściwości mechanicznych niejednorodności i materiału wzór (3.35) przyjmuje następującą postać:

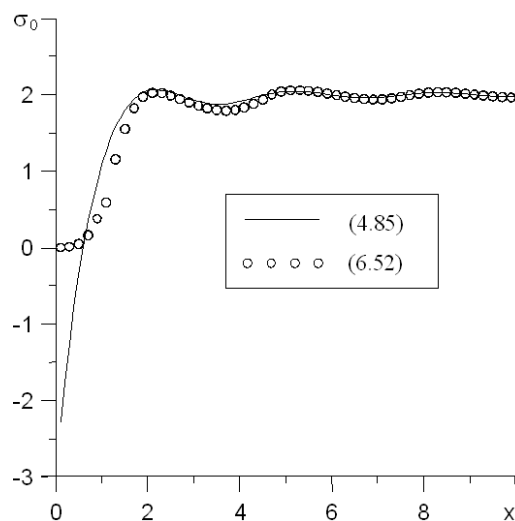
$$f(k; \mathbf{l}, \nu) = -\pi \sum_{m=0}^N a_m (i)^m J_m(x\nu_1) + \nu_3 \pi x \sum_{m=1}^N a_m m (-i)^m \frac{J_m(x\nu_1)}{x\nu_1}. \quad (6.52)$$

### 6.2.4. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązania równania całkowego dla cienkiej płaskiej niejednorodności

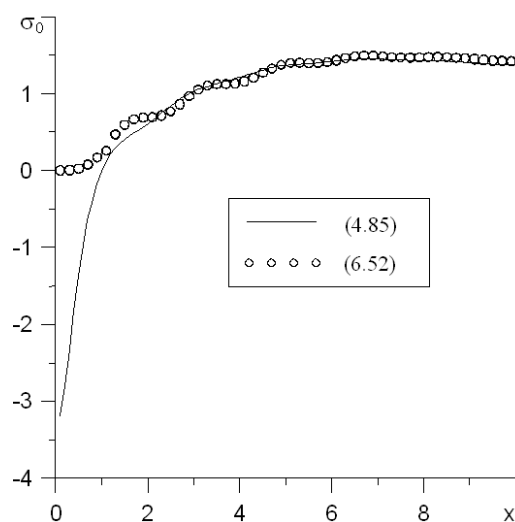
Wartość amplitudy fali rozproszonej może być użyta do określenia czynnego przekroju rozpraszania fali na cienkim płaskim włączeniu w materiale sprężystym. Czynny przekroj rozpraszania jest stosunkiem energii odbitej od włączenia w wybranym kierunku do całkowitej energii, którą niesie fala padająca na włączenie. Czynny przekroj rozpraszania jest obliczany według następującego wzoru:

$$\sigma(\theta_0) = \frac{1}{A_0 k} \text{Im} f(k; \mathbf{l}, \mathbf{l}). \quad (6.53)$$

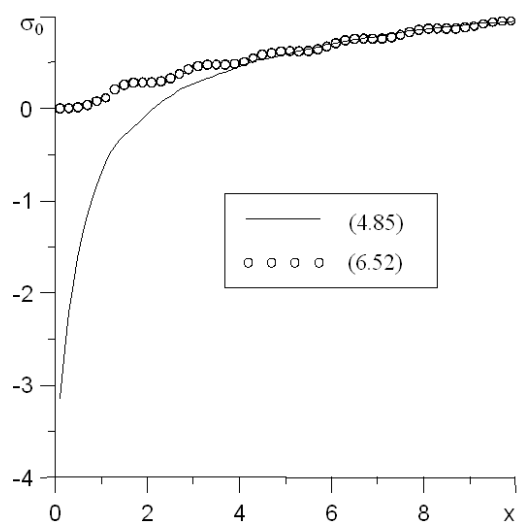
Na rysunkach rys. 6.4-6.6 przedstawione są wykresy bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania  $\sigma^0 = \sigma(\theta_0)/2a$  w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla różnych kątów obserwacji. Do obliczenia wartości bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania została użyta wartość amplitudy fali rozproszonej uzyskana numerycznie (wzór 6.52) oraz przy użyciu zaprezentowanego w rozprawie modelu (wzór 4.85). Jak widać na rys. 6.4 dla  $\theta_0 = 0$  zaprezentowany w rozprawie model pozwala uzyskać dobrą dokładność dla zakresu wartości bezwymiarowej liczby falowej  $x$  zaczynającego się od 2. Dla większych kątów obserwacji zaprezentowany w rozprawie model pozwala uzyskać dobrą dobrą dokładność dla zakresu wartości  $x$  zaczynającego się od nieco większych wartości  $x$  (6.5, 6.6).



Rysunek 6.4. Wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\theta_0 = 0$  oraz  $\mu_0 = 0.2 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 920 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 27 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 10600 \text{kg/m}^3$ .



Rysunek 6.5. Wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\theta_0 = \pi/4$  oraz  $\mu_0 = 0.2 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 920 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 27 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 10600 \text{kg/m}^3$ .



Rysunek 6.6. Wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\theta_0 = \pi/3$  oraz  $\mu_0 = 0.2 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 920 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 27 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 10600 \text{kg/m}^3$ .



### 6.3. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązań układów równań całkowych dla cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności

#### 6.3.1. Numeryczne rozwiązanie układu mocno osobliwych równań całkowych przy użyciu metody Galerkin

Do weryfikacji modelu pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności w materiale sprężystym przedstawimy numeryczne rozwiązanie układu równań (5.15) i porównamy uzyskane wyniki z wyjściem modelu. Zgodnie ze schematem metody Galerkin zaprezentowanym w rozdziale 2 przedstawimy nieznanne funkcje  $\Phi_1(x_1)$  oraz  $\Phi_3(x_1)$  występujące w układzie równań (5.15) w postaci kombinacji liniowej wielomianów ortogonalnych Jacobiego w sposób następujący [43], [53], [86], [88]:

$$\Phi_1(x_1) = q_1(1 - p^2)^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p), \quad p = x_1/a, \quad (6.54)$$

oraz

$$\Phi_3(x_1) = q_3(1 - p^2)^{\mu_3} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n3} P_n^{(\mu_3, \mu_3)}(p), \quad (6.55)$$

gdzie  $a_{n1}$  oraz  $a_{n3}$  są niewiadomymi współczynnikami, natomiast funkcje  $P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p)$  oraz  $P_n^{(\mu_3, \mu_3)}(p)$  są wielomianami ortogonalnymi Jacobiego. Stałe  $\mu_\beta$  określone przez równania (5.19) oraz (5.20):  $\mu_1 = -3/4$ ,  $\mu_3 = 1/4$  dla  $\gamma_0 = O(\varepsilon)$  oraz  $\mu_1 = -3/2$ ,  $\mu_3 = 1/2$  dla  $\gamma_0 = o(\varepsilon^{-1})$  i  $\gamma_0 = O(1)$ . W celu wyznaczenia  $a_{n1}$  oraz  $a_{n3}$  podstawimy wzory (6.54) oraz (6.55) do układu równań (5.15) oraz wprowadzimy zamianę zmiennych  $x_1 = ua$ . W ten sposób pierwsze równanie układu (5.15) przyjmuje postać algebraicznego układu równań liniowych dla niewiadomych współczynników  $a_{n1}$  oraz  $a_{n3}$

$$q_1(1 - u^2)^{\mu_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(u) + \frac{kq_1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} \int_{-1}^1 (1 - p^2)^{\mu_1} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p) K_3(k|u - p|) dp - \quad (6.56)$$

$$-kq_3 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n3} \int_{-1}^1 (1 - p^2)^{\mu_3} P_n^{(\mu_3, \mu_3)}(p) K_1(k|u - p|) dp = q_1 e^{ikl_1 u}.$$

Mnożąc obustronnie równanie (6.56) przez  $\sqrt{1 - u^2} U_m(u)$ , gdzie  $U_m(u)$  jest ortogonalnym wielomianem Czebyszewa drugiego rodzaju, a następnie całkując obustronnie to równanie po zmiennej  $u$  w przedziale  $[-1, 1]$  uzyskujemy

$$q_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} \int_{-1}^1 (1 - u^2)^{\mu_1 + 1/2} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(u) U_m(u) du + \quad (6.57)$$

$$+ \frac{kq_1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1 - p^2)^{\mu_1} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p) K_3(k|u - p|) dp \sqrt{1 - u^2} U_m(u) du -$$

$$\begin{aligned} -kq_3 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\mu_3} P_n^{(\mu_3, \mu_3)} K_1(k|u-p|) dp \sqrt{1-u^2} U_m(u) du = \\ = q_1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} U_m(u) e^{ikl_1 u} du, \end{aligned}$$

lub po wprowadzeniu definicji funkcji  $K_1(k|u-p|)$  oraz  $K_3(k|u-p|)$

$$\begin{aligned} q_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} \int_{-1}^1 (1-u^2)^{\mu_1+1/2} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(u) U_m(u) du + \\ + \frac{kq_1}{2\pi Z} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\mu_1} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p) \int_{\Gamma} \frac{e^{iku\alpha} e^{-ikp\alpha} d\alpha}{\gamma(\alpha)} dp \sqrt{1-u^2} U_m(u) du - \\ - \frac{kq_3}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n3} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\mu_3} P_n^{(\mu_3, \mu_3)}(p) \int_{\Gamma} e^{iku\alpha} e^{-ikp\alpha} \gamma(\alpha) d\alpha dp \sqrt{1-u^2} U_m(u) du = \\ = q_1 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} U_m(u) e^{ikl_1 u} du. \end{aligned} \quad (6.58)$$

Wykorzystując w układzie równań (6.58) oraz do drugiego równania w układzie równań (5.15) następujące zależności [125],[2]

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} U_m(u) e^{iku\alpha} du = \frac{\pi}{\alpha x} i^m (m+1) J_{m+1}(\alpha x),$$

gdzie  $x = ka$ ,  $J_m$  jest cylindryczną funkcją Bessela  $m$ -tego rzędu, oraz

$$e^{-ikp\alpha} = \frac{2}{\alpha k} \sum_{j=0}^{\infty} (-i)^j (j+1) J_{j+1}(\alpha k) U_j(p)$$

uzyskujemy algebraiczny układ równań liniowych dla niewiadomych współczynników  $a_{n1}$  oraz  $a_{n3}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_{n,1} (A_{nm,1} + \frac{B_{nm,1}}{Zx}) - a_{n,3} q_0^{-1} B_{nm,2} \right] = b_m, \quad (6.59)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[ a_{n,3} A_{nm,3} + a_{n,1} \frac{q_0}{x} B_{nm,1} \right] = b_m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (6.60)$$

$$B_{mn,\beta} = (m+1) \sum_{j=0}^{\infty} i^{m-j} (j+1) B_{nj}^{\beta} I_{mj,\beta}, \quad q_0 = \frac{q_1}{q_3}, \quad \beta = 1, 3,$$

$$B_{nj}^1 = \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\mu_1} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p) U_j(p) dp, \quad B_{nj}^3 = \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\mu_3} P_n^{(\mu_3, \mu_3)}(p) U_j(p) dp,$$

$$A_{nm,1} = \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\mu_3} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p) U_m(p) dp, \quad A_{nm,3} = \int_{-1}^1 (1-p^2)^{\mu_1} P_n^{(\mu_1, \mu_1)}(p) U_m(p) dp,$$

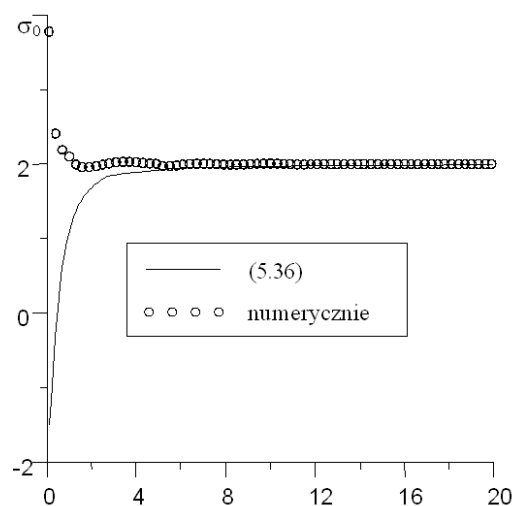
$$I_{mn,1} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{\gamma(\alpha)} J_{m+1}(x\alpha) J_{n+1}(x\alpha) \alpha^{-2} d\alpha, \quad I_{mn,3} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma(\alpha) J_{m+1}(x\alpha) J_{n+1}(x\alpha) \alpha^{-2} d\alpha,$$

$$b_m = \frac{\pi}{xl_1} i^m (m+1) J_{m+1}(xl_1).$$

Uzyskane współczynniki  $a_{n1}$  oraz  $a_{n3}$  podstawiamy odpowiednio do wzorów (6.54) oraz (6.55) i w ten sposób uzyskujemy wartości funkcji  $\Phi_1(x_1)$  oraz  $\Phi_3(x_1)$ , które następnie podstawiamy do wzoru (3.35).

### 6.3.2. Porównanie analitycznego oraz numerycznego rozwiązania równania całkowego dla cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności

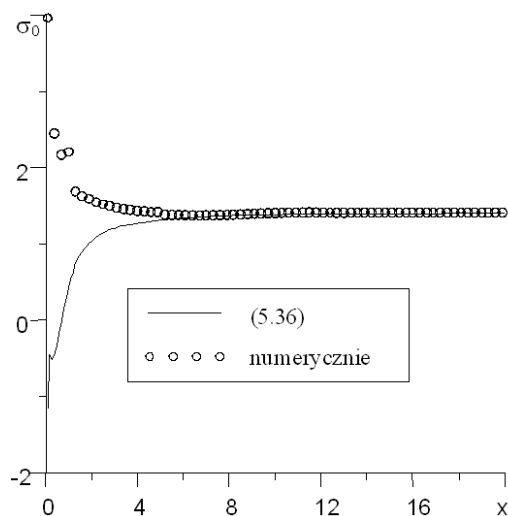
Na rysunkach rys. 6.7-6.9 przedstawione są wykresy bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania  $\sigma^0$  w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla różnych kątów obserwacji. Do obliczenia wartości bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania została użyta wartość amplitudy fali rozproszonej uzyskana numerycznie oraz przy użyciu zaprezentowanego w rozprawie modelu (wzór 5.36). Jak widać na rys. 6.7 oraz 6.8 dla  $\theta_0 = 0$  oraz  $\theta_0 = \pi/4$  zaprezentowany w rozprawie model pozwala uzyskać dobrą dokładność dla zakresu wartości bezwymiarowej liczby falowej  $x$  zaczynającego się od 5. Dla  $\theta_0 = \pi/3$  zaprezentowany w rozprawie model pozwala uzyskać dobrą dokładność dla zakresu wartości  $x$  zaczynającego się od nieco większych wartości  $x$  (rys. 6.9).



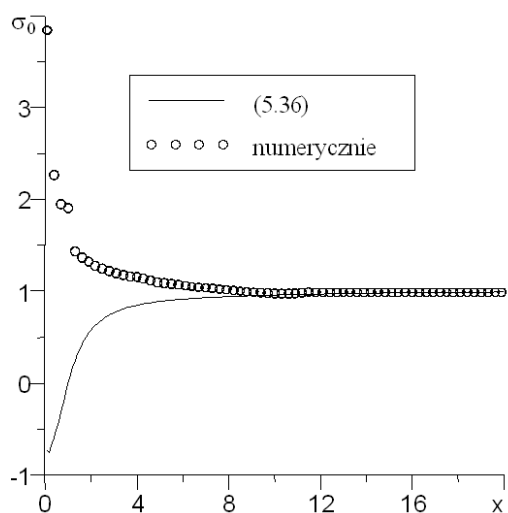
Rysunek 6.7. Wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\theta_0 = 0$  oraz  $\mu_0 = 1.9 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1100 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 80 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ .

## 6.4. Wnioski

W rozdziale tym zamieszczono weryfikację modeli przedstawionych w rozdziale 4 oraz w rozdziale 5. Wyniki podrozdziałów 6.1.1, 6.1.2, 6.2.4 oraz 6.3.2 stanowią dowód zasadności przedstawionych w rozprawie modeli.



Rysunek 6.8. Wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\theta_0 = \pi/4$  oraz  $\mu_0 = 1.9 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1100 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 80 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ .



Rysunek 6.9. Wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\theta_0 = \pi/3$  oraz  $\mu_0 = 1.9 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1100 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 80 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ .

## Rozdział 7

# Symulacja komputerowa zjawiska rozpraszania SH fali na cienkiej niejednorodności w materiale sprężystym

### 7.1. Pakiet Mathematica

Do zaimplementowania przedstawionych w rozprawie algorytmów został użyty język programowania Java oraz pakiet Mathematica. Mathematica jest wiodącym narzędziem na rynku oprogramowania wykorzystywanego do wykonywania różnego rodzaju obliczeń, tworzenia modeli matematycznych zagadnień z różnych dziedzin nauki i techniki, tworzenia symulacji i wizualizacji różnych procesów ciągłych oraz dyskretnych [10], [11], [18], [19], [23], [24], [27], [31], [37], [67], [68], [91], [92], [99], [101], [102], [104], [123], [124], [134], [137], [139], [140], [141], [142], [143], [151], [152], [153], [157].

Mathematica zawiera olbrzymią bibliotekę zaimplementowanych algorytmów i metod numerycznych do rozwiązywania matematycznych problemów z bardzo szerokiego zakresu. Narzędzie to pozwala na automatyczny dobór algorytmu do konkretnego zagadnienia. Pozwala również na wskazanie wybranej metody lub algorytmu. Mathematica zawiera również definicje funkcji specjalnych, na przykład takich jak wielomiany Czebyszewa pierwszego i drugiego rodzaju, cylindryczną funkcję Bessela lub funkcję Rfc. Bardzo ważną cechą pakietu Mathematica jest numeryczne oraz analityczne obliczanie całek oznaczonych, również zawierających osobliwości, wyznaczanie głównej wartości Cauchiego. Są to cechy, które zdecydowały o wyborze pakietu Mathematica jako narzędzia do zaimplementowania przedstawionych w rozprawie algorytmów.

Mathematica składa się z modułu służącego do wykonywania obliczeń (Mathematica Kernel) oraz modułu pozwalającego komunikować się z użytkownikiem, pobierać dane oraz wypisywać lub kreślić wyniki (tzw. Mathematica FrontEnd).

Pakiet Mathematica dostępny jest dla wielu platform sprzętowo-systemowych, co umożliwia uruchamianie aplikacji stworzonych w tym narzędziu na szerokiej gamie systemów komputerowych bez konieczności wprowadzania jakichkolwiek zmian do kodu aplikacji.

Mathematica umożliwia tworzenie wizualizacji danych uzyskanych w procesie symulacji.

Posiada również możliwość współpracy z zewnętrznymi programami bardziej przystosowanymi do tworzenia różnego rodzaju wizualizacji oraz animacji.

## 7.2. Język programowania Java

Język programowania Java został stworzony przez firmę Sun Microsystems jako język programowania umożliwiający tworzenie aplikacji przeznaczonych dla wielu urządzeń oraz platform sprzętowo-systemowych. Podstawowym założeniem twórców Javy było umożliwienie programistom tworzenia kodu, który bez żadnych zmian będzie działał na różnych urządzeniach, pod kontrolą różnych systemów operacyjnych. Stało się to możliwe dzięki wprowadzeniu dodatkowej warstwy oprogramowania pomiędzy systemem operacyjnym a programami stworzonymi w Javie. Ta dodatkowa warstwa oprogramowania nazywa się JVM, czyli Wirtualna Maszyna Javy. JVM tłumaczy tak zwany byte-code programów stworzonych w Javie na kod maszynowy sprzętu na którym działa. Umożliwia to uruchomienie tej samej aplikacji napisanej w Javie na dowolnym urządzeniu (nie koniecznie komputerze) posiadającym JVM. Jak się okazało pomysł twórców Javy był bardzo udany. W tej chwili język programowania Java jest jednym z najbardziej popularnych języków programowania ciągle pozyskującym nowe dziedziny informatyki, w których znajduje zastosowanie [12], [20], [25], [26], [28], [34], [35], [36], [39], [58], [63], [64], [69], [70], [71], [89], [90], [93], [94], [100], [110], [133], [135], [136], [138], [150], [156].

W chwili obecnej jedną z największych zalet Javy jest jej popularność oraz fakt, iż coraz więcej producentów oprogramowania dołącza do swoich programów możliwość współpracy z aplikacjami stworzonymi w Javie. Pozwala to na wykorzystywanie Javy jako narzędzia integrującego oprogramowanie różnych producentów oraz jako integratora rozbudowanych systemów informatycznych. Pakiet Mathematica posiada specjalny interfejs J/Link pozwalający na współpracę z zewnętrznymi programami stworzonymi w Javie. Daje to możliwość tworzenia w Javie aplikacji pobierających dane od użytkownika poprzez graficzny interfejs użytkownika, wysyłających do pakietu Mathematica tych danych jako parametrów pewnych modeli matematycznych zaimplementowanych w tym pakiecie, a następnie pobierających wyniki symulacji i przesyłających te wyniki do innych aplikacji lub narzędzi graficznych. Czyli stwarza to możliwość tworzenia w Javie aplikacji wykorzystywanych jako klej łączący pakiet Mathematica oraz inne pakiety i programy w celu stworzenia wizualizacji różnych procesów fizycznych.

### 7.3. Interfejs J/Link

Interfejsem pakietu Mathematica pozwalającym na współpracę z aplikacjami stworzonymi w Javie jest J/Link. J/Link umożliwia wysyłanie różnych danych do modułu pakietu Mathematica odpowiedzialnego za wykonywanie obliczeń z pominięciem FrontEnd. Daje to możliwość korzystania tylko z Mathematica Kernel jako zaawansowanego kalkulatora z pominięciem pozostałych składników pakietu Mathematica. Interfejs J/Link pozwala na:

- uruchomienie Mathematica Kernel,
- wczytanie przez Mathematica Kernel zawartości różnych plików (w tym plików zawierających definicje funkcji implementujących dowolny model matematyczny),
- przesłanie do Mathematica Kernel danych pobranych od użytkownika (np. parametrów modelu matematycznego),
- wysłanie żądania wykonania przez Mathematica Kernel różnych obliczeń (np. wywołanie różnych funkcji implementujących model matematyczny),
- uzyskanie wyników obliczeń od Mathematica Kernel (np. wyników symulacji),
- zamknięcie Mathematica Kernel.

### 7.4. OpenGL

Do wizualizacji wyników została użyta technologia OpenGL oraz biblioteka języka Java Java3D, która obsługuje tę popularną technologię.

OpenGL jest pierwszym przenośnym środowiskiem programistycznym (biblioteką) do tworzenia interaktywnych aplikacji dwu i trzy wymiarowych. OpenGL stanowi jedną z podstawowych bibliotek typu API (Application Programming Interface) obok DirectX powszechnie używanych do wizualizacji i tworzenia precyzyjnych aplikacji graficznych [109], [111], [132]. Struktura OpenGL pozwala na tworzenie oprogramowania niezależnego od platformy sprzętowej. OpenGL włożył olbrzymi wkład w rozwój aplikacji, pozwalając wykorzystać zaawansowane techniki renderingu, teksturowania, efektów specjalnych i wszelkiego rodzaju funkcji wizualizacyjnych. Niezależność sprzętowa i otwartość biblioteki pozwala na jej nieustanny rozwój przez niezależnych programistów z całego świata, jak i rozwój sprzętu wspomagającego operacje renderingu.

Technologia OpenGL spełnia założenia dotyczące dostępności aplikacji dla wielu platform sprzętowo-systemowych. Również pozwala w atrakcyjny sposób wizualizować uzyskane wyniki. Dla systemów operacyjnych firmy Microsoft może być również wykorzystana technologia DirectX.

## 7.5. Aplikacja symulująca zjawisko rozpraszania SH fali na cienkiej niejednorodności w materiale sprężystym

Schemat działania aplikacji wykorzystujących przedstawione w rozprawie modeli jest ten sam dla wszystkich aplikacji i bazuje się na następujących krokach [52], [85], [86]:

- po uruchomieniu wyświetla graficzny interfejs użytkownika stworzony przy pomocy standardowej biblioteki graficznych kontrolek Java
- użytkownik podaje parametry materiału oraz włączenia
- program uruchamia moduł Mathematica Kernel pakietu Mathematica
- do modułu Mathematica Kernel zostaje wysłane żądanie wczytania pliku definicji funkcji implementujących przedstawione w rozprawie modele
- program wysyła do Mathematica Kernel parametry podane przez użytkownika
- do modułu Mathematica Kernel zostaje wysłane żądanie uruchomienia wybranych funkcji implementujących modele i wykonanie odpowiednich obliczeń
- moduł Mathematica Kernel po wykonaniu obliczeń przesyła wyniki do programu
- program wyświetla wyniki obliczeń w postaci wykresów dwuwymiarowych oraz przy wykorzystaniu technologii OpenGL wyświetla wyniki w nowym oknie w postaci wykresów trójwymiarowych posiadających tą właściwość, iż użytkownik może przy pomocy myszki obracać wykres i oglądać ten wykres pod dowolnym kątem

Program korzysta ze wzoru (4.85) dla pierwszego zagadnienia przedstawionego w podrozdziale 3.1 oraz ze wzorów (5.36) oraz (5.40) dla drugiego zagadnienia przedstawionego w podrozdziale 3.1 w celu obliczenia amplitudy fali rozproszonej na cienkim płaskim włączeniu w materiale sprężystym.

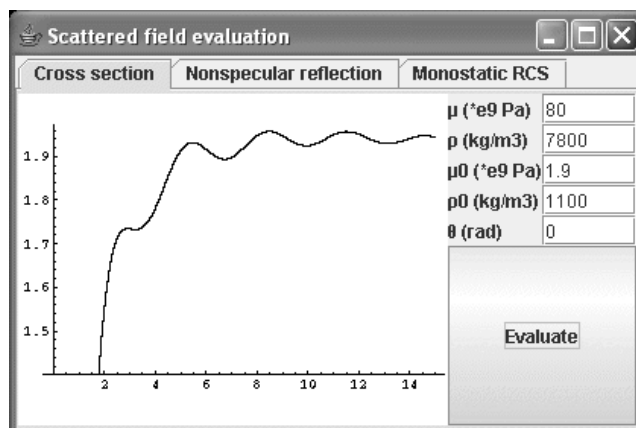
Na rys. 7.1 oraz rys. 7.2 przedstawione jest okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania  $\sigma^0 = \sigma(\theta_0)/2a$  w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla różnych wartości gęstości i współczynnika sprężystości materiału i włączenia.

Wartość amplitudy fali rozproszonej może być użyta również do określenia radarowego przekroju skutecznego (RCS). Radarowy przekrój skuteczny jest obliczany według następującego wzoru:

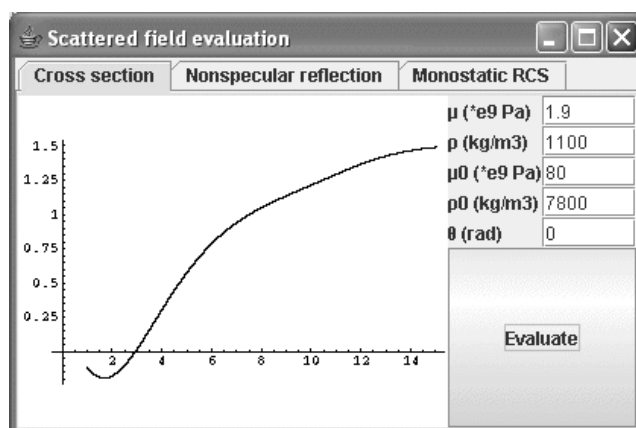
$$\text{RCS}(\theta_0) = 20 \log \left[ \frac{|f(k; \mathbf{1}, -1)|}{A_0} \right]. \quad (7.1)$$

Na rys. 7.3 oraz rys. 7.4 przedstawione jest okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres radarowego przekroju skutecznego w funkcji kąta obserwacji  $\theta_0$  dla różnych wartości bezwymiarowej liczby falowej  $x$  oraz dla różnych wartości gęstości i współczynnika sprężystości materiału i włączenia.





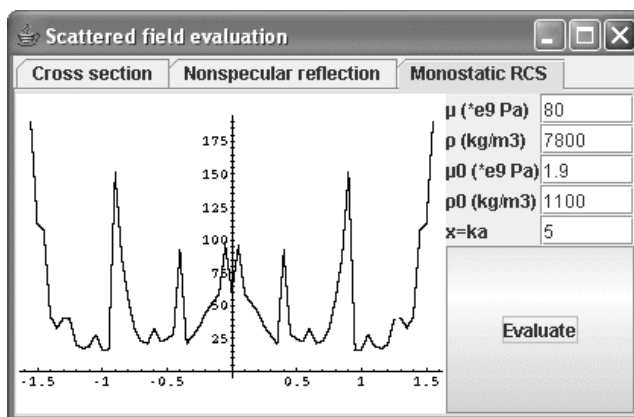
Rysunek 7.1. Okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania  $\sigma^0$  w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\mu_0 = 1.9 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1100 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 80 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ ,  $\theta_0 = 0$ .



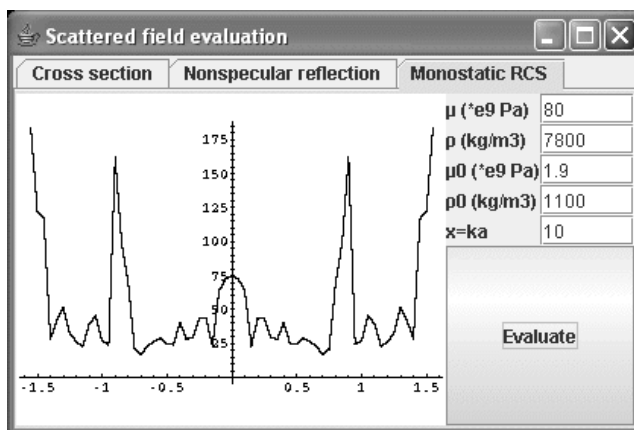
Rysunek 7.2. Okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres bezwymiarowego czynnego przekroju rozpraszania  $\sigma^0$  w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  dla  $\mu = 1.9 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 1100 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu_0 = 80 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 7800 \text{kg/m}^3$ ,  $\theta_0 = 0$ .

Na rys. 7.5 przedstawione jest okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres na którym widoczny jest efekt nie lustrzanego odbicia fali od włączenia dla znormalizowanej amplitudy fali  $f^* = |f(k; \mathbf{l}, -\mathbf{l})|/2a$ .

Na rys. 7.6 przedstawione jest okno OpenGL aplikacji zawierające trójwymiarowy wykres czynnego przekroju rozpraszania w funkcji w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  oraz kąta obserwacji  $\theta_0$ .



Rysunek 7.3. Okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres radarowego przekroju skutecznego dla zakresu kątów obserwacji  $\theta_0$  od  $-Pi/2$  do  $Pi/2$  dla  $x = 5$  oraz  $\mu_0 = 1.9 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1100 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 80 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ .

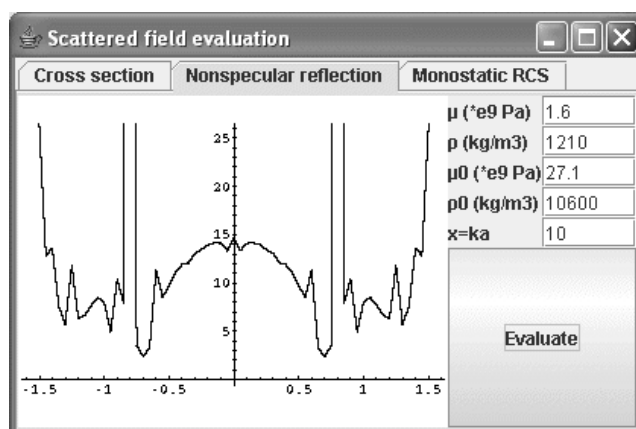


Rysunek 7.4. Okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres radarowego przekroju skutecznego dla zakresu kątów obserwacji  $\theta_0$  od  $-Pi/2$  do  $Pi/2$  dla  $x = 10$  oraz  $\mu_0 = 1.9 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 1100 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu = 80 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 7800 \text{kg/m}^3$ .

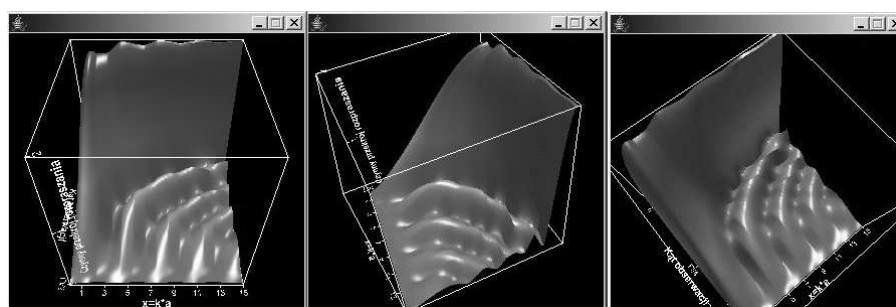
## 7.6. Wnioski

W podrozdziałach 7.1, 7.2, 7.3 oraz 7.4 zostały przedstawione technologie i narzędzia użyte do tworzenia aplikacji symulującej pole fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym.

W podrozdziale 7.5 zostały przedstawione wyniki symulacji.



Rysunek 7.5. Okno aplikacji zawierające dwuwymiarowy wykres na którym widoczny jest efekt nie lustrzanego odbicia fali od włączenia dla znormalizowanej amplitudy fali dla  $x = 10$  oraz dla  $\mu = 1.6 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 1210 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu_0 = 27.1 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 10600 \text{kg/m}^3$ .



Rysunek 7.6. Okno OpenGL aplikacji zawierające trójwymiarowy wykres czynnego przekroju rozpraszania w funkcji w funkcji bezwymiarowej liczby falowej  $x$  oraz kąta obserwacji  $\theta_0$  dla  $\mu = 2.41 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho = 1180 \text{kg/m}^3$ ,  $\mu_0 = 131.1 \cdot 10^9 \text{Pa}$ ,  $\rho_0 = 19100 \text{kg/m}^3$ .

## Rozdział 8

# Podsumowanie, wnioski i propozycje kierunków dalszych badań

Zakres wykonanych prac i uzyskane wyniki stanowią realizację postawionych przez autora pracy celów. Do najważniejszych rezultatów pracy należy zaliczyć w szczególności:

- opracowanie oryginalnego modelu pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym, który uwzględnia dowolne wartości parametrów mechanicznych (gęstość, współczynnik sprężystości) materiału oraz włączenia. Uzyskany analityczny wzór pozwala w efektywny sposób obliczać pole fali rozproszonej, co umożliwia użycie modelu w oprogramowaniu symulującym wykorzystywanym w ultradźwiękowej nieniszczącej kontroli elementów konstrukcji i maszyn, a w szczególności w oprogramowaniu pozwalającym zastąpić wzorce skaz i wad występujących w materiałach sprężystych,
- opracowanie oryginalnego modelu pola SH fali rozproszonej na cienkiej płaskiej sztywno podpartej niejednorodności w materiale sprężystym,
- stworzenie oprogramowania wykorzystującego opracowane modele. Oprogramowanie wykorzystuje trzy różne technologie informatyczne takie jak pakiet służący do wykonywania zaawansowanych obliczeń matematycznych, język wysokiego poziomu jakim jest Java oraz bibliotekę graficzną OpenGL pozwalającą wizualizować uzyskane wyniki. Trzeba podkreślić wykorzystanie języka wysokiego poziomu jako narzędzia łączącego różne technologie informatyczne w celu dostarczenia użytecznego narzędzia dla zespołów prowadzących badania nieniszczące. Jest to możliwe dzięki powszechnej akceptacji języka Java jako pomocnego i potężnego narzędzia w różnych dziedzinach informatyki. Przeprowadzone przez autora rozprawy prace pozwalają na wyciągnięcie wniosków, iż język wysokiego poziomu Java może być wykorzystany jako łącznik służący do integracji różnych systemów informatycznych opartych o różne technologie informatyczne.

Wszystkie trzy powyższe punkty stanowią element oryginalny pracy. Na uwagę zasługuje fakt, iż przedstawione modele zostały poparte pełnymi wyprowadzeniami.

Tezy pracy sformułowane w rozdziale 1 zostały udowodnione zarówno teoretycznie - przez wyprowadzenie w rozdziałach 4 oraz 5 analitycznych wzorów - jak i praktycznie, przez wykorzystanie opracowanych modeli w oprogramowaniu symulacyjnym.

Jako propozycję kierunków dalszych badań trzeba wymienić opracowanie uniwersalnych modeli pola SH fali rozproszonej na:

- cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym przy założeniu braku naprężeń na dolnej powierzchni niejednorodności (niejednorodność jest odklejona od materiału z dołu)
- cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym przy założeniu braku naprężeń na górnej powierzchni niejednorodności (niejednorodność jest odklejona od materiału z góry)
- cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym przy założeniu braku przemieszczeń na górnej powierzchni niejednorodności (niejednorodność jest sztywno przymocowana do materiału od góry)

## Rozdział 9

# Załącznik

### 9.1. Obliczanie wartości całki ze wzoru (4.68)

Zacznijmy od tego, że wypiszemy jeszcze raz całkę ze wzoru (4.68):

$$I_{12} = -\frac{q_1}{Z_1 \xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1) r_1^{\mp}(\mp l_1)} 2\pi \int_{\Gamma} \frac{e^{-i\alpha\eta}}{(\alpha + \xi_1) r_1^+(\alpha) \sqrt{1 + \alpha}} d\alpha. \quad (9.1)$$

Całka ta jest postaci:

$$I = \text{const} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\alpha\eta} \frac{f(\alpha)}{(\alpha + \xi_1) \sqrt{1 + \alpha}} d\alpha. \quad (9.2)$$

W całce ze wzoru (9.1) funkcja  $f(\alpha) \equiv \frac{1}{r_1^+(\alpha)}$ . W celu zamknięcia konturu całkowania w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$  dokonamy zamianę zmiennych  $\alpha = -\alpha$  w całce (9.2). Gałąź funkcji  $\sqrt{1 - \alpha}$  w mianowniku funkcji podcałkowej została wybrana tak, aby był spełniony warunek  $\sqrt{1 - \alpha} = i\sqrt{\alpha - 1}$ . Pomijając stałą przed znakiem całki możemy napisać:

$$I = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1) \sqrt{1 - \alpha}} d\alpha = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1) \sqrt{\alpha - 1}} d\alpha. \quad (9.3)$$

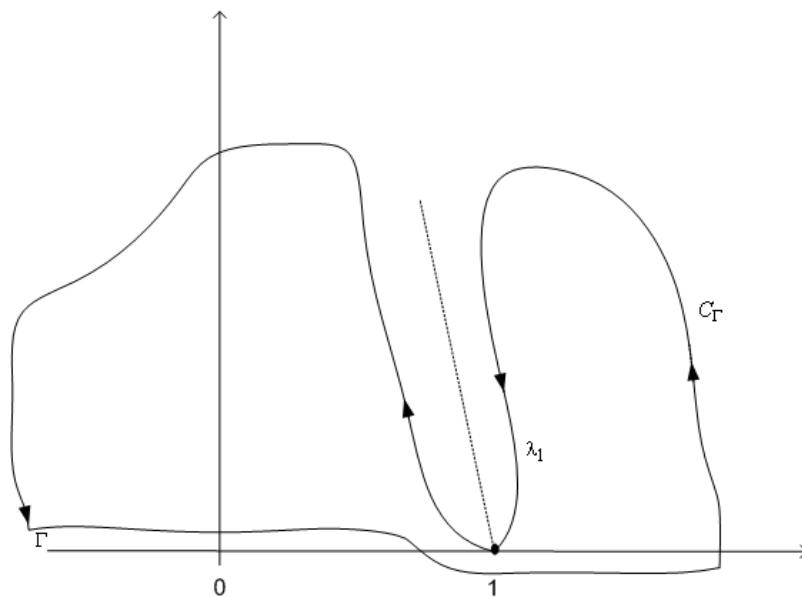
Zamykamy kontur całkowania w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$ . Na rys. 9.1 został przedstawiony nowy kontur  $C_{\Gamma}$  zamknięty w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$  składający się z konturu  $\Gamma$  oraz pętli  $\lambda_1$ .

Korzystając z uogólnienia twierdzenia całkowego Cauchy'ego które mówi, że wartość całki po konturze zamkniętym leżącym w obszarze analityczności funkcji podcałkowej (funkcja podcałkowa jest analityczna w całym obszarze poza skończoną ilością punktów) równa się sumie residuów funkcji podcałkowej w jej punktach osobliwych pomnożonej przez  $2\pi i$ , możemy napisać:

$$\int_{\Gamma} g(\alpha) + \int_{\lambda_1} g(\alpha) = \int_{C_{\Gamma}} g(\alpha) = 2\pi i \sum_a \text{res}_a g(\alpha). \quad (9.4)$$

Wartość całki po konturze zamkniętym  $C_{\Gamma}$  równa się wartości residuum w punkcie  $\xi_1$  pomnożonej przez  $2\pi i$ :

$$\frac{i}{2\pi} \int_{C_{\Gamma}} e^{i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1) \sqrt{\alpha - 1}} d\alpha = -e^{i\xi_1\eta} \frac{f(-\xi_1)}{\sqrt{\xi_1 - 1}}. \quad (9.5)$$

Rysunek 9.1. Kontur całkowania  $C_\Gamma$ .

Korzystając ze wzorów (9.4) oraz (9.5) możemy napisać:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1)\sqrt{\alpha - 1}} d\alpha = -e^{i\xi_1\eta} \frac{f(-\xi_1)}{\sqrt{\xi_1 - 1}} + \frac{i}{2\pi} \int_{\lambda_1} e^{i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1)\sqrt{\alpha - 1}} d\alpha$$

lub

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1)\sqrt{\alpha - 1}} d\alpha = -ie^{i\xi_1\eta} \frac{f(-\xi_1)}{\sqrt{1 - \xi_1}} + \frac{i}{2\pi} \int_{\lambda_1} e^{i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1)\sqrt{\alpha - 1}} d\alpha \quad (9.6)$$

W całce po konturze  $\lambda_1$  wprowadzamy zamianę zmiennych  $\alpha - 1 = s^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2\pi} \int_{\lambda_1} e^{i\alpha\eta} \frac{f(-\alpha)}{(\alpha - \xi_1)\sqrt{\alpha - 1}} d\alpha &= \frac{i}{2\pi} \int_{\lambda_1} e^{i(s^2+1)\eta} \frac{f(-1-s^2)2s}{(1+s^2-\xi_1)s} ds = \\ &= i \frac{2f(-1)}{2\pi(1-\xi_1)} e^{i\eta} \int_{\lambda_1} e^{is^2\eta} ds = i \frac{f(-1)}{\pi(1-\xi_1)} e^{i\eta} \sqrt{\frac{\pi}{\eta}} e^{i\pi/4} = i \frac{f(-1)}{(1-\xi_1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Korzystając ze wzorów (9.6) oraz (9.7) możemy napisać:

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-i\alpha\eta} \frac{f(\alpha)}{(\alpha + \xi_1)\sqrt{1 + \alpha}} d\alpha = -ie^{i\xi_1\eta} \frac{f(-\xi_1)}{\sqrt{1 - \xi_1}} + i \frac{f(-1)}{(1 - \xi_1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)}. \quad (9.8)$$

Korzystając ze wzoru (9.8) uzyskujemy wartość całki ze wzoru (9.2):

$$I = \text{const} \left\{ -ie^{i\xi_1\eta} \frac{f(-\xi_1)}{\sqrt{1 - \xi_1}} + i \frac{f(-1)}{(1 - \xi_1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)} \right\}. \quad (9.9)$$

Zamieniając we wzorze (9.9) funkcję  $f(\alpha)$  na  $\frac{1}{r_1^+(\alpha)}$ , podstawiając  $-\xi$  jako wartość parametru do tej funkcji oraz podstawiając

$$-\frac{q_1}{Z_1\xi^2} \frac{\sqrt{1 \pm l_1}}{(\xi_1 \pm l_1)r_1^-(\mp l_1)}$$

jako wartość stałej uzyskujemy:

$$I = -i \frac{e^{i\xi_1\eta}}{\sqrt{1 - \xi_1 r_1^+(-\xi_1)}} + i \frac{1}{(1 - \xi_1)r_1^+(-1)} \sqrt{\frac{1}{\pi\eta}} e^{i(\eta+\pi/4)}. \quad (9.10)$$

Wzór (9.10) odpowiada wzoru (4.69) z rozdziału 4.

## 9.2. Obliczanie wartości całki ze wzoru (4.78)

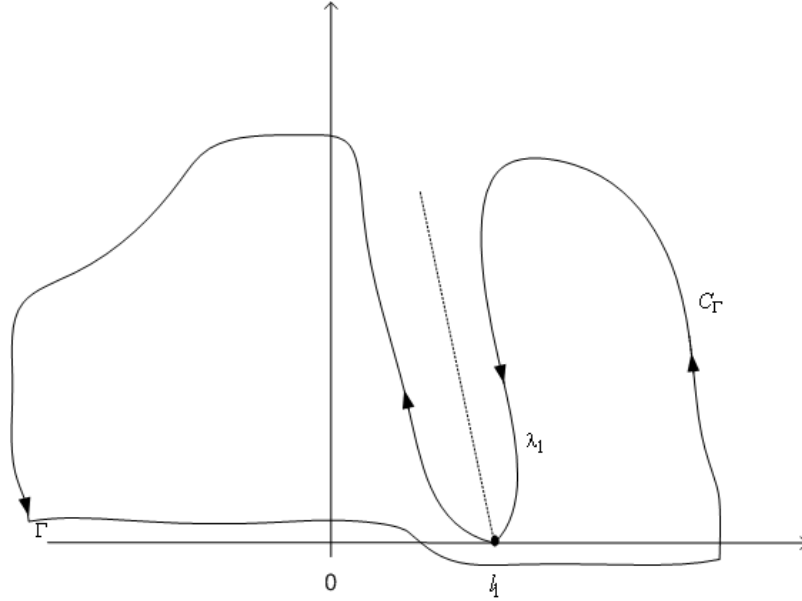
Zacniemy od tego, że wypiszemy jeszcze raz całkę ze wzoru (4.78):

$$\Phi_3^\pm(\eta) = -\frac{q_3}{Z_3\sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{e^{-i\alpha\eta}}{\sqrt{1 + \alpha(\alpha \pm l_1)r_3^+(\alpha)}} d\alpha. \quad (9.11)$$

Zamykamy kontur całkowania w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$ . Stosujemy zamianę zmiennej  $\alpha$  na  $-\alpha$  i uzyskujemy

$$\Phi_3^\pm(\eta) = \frac{q_3}{Z_3\sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \frac{e^{i\alpha\eta}}{\sqrt{1 - \alpha(\alpha \mp l_1)r_3^+(-\alpha)}} d\alpha. \quad (9.12)$$

Na rys. 9.2 oraz rys. 9.3 został przedstawiony nowy kontur  $C_\Gamma$  zamknięty w górnej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej  $\alpha$  składający się z konturu  $\Gamma$  oraz pętli  $\lambda_1$  dla przypadków uwzględniających  $l_1$  (przy obliczaniu  $\Phi_3^+$ ) oraz  $-l_1$  (przy obliczaniu  $\Phi_3^-$ ).

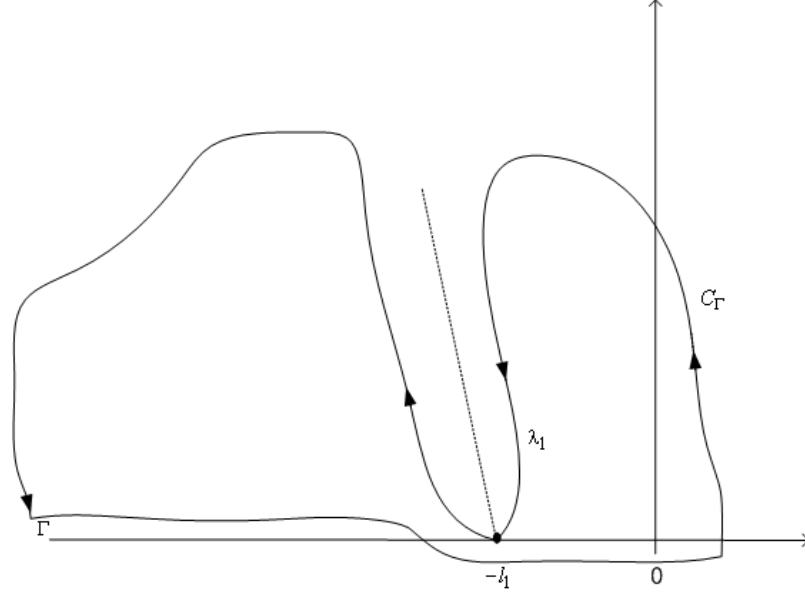


Rysunek 9.2. Kontur całkowania  $C_\Gamma$  dla przypadku  $l_1$ .

Wartość całki po konturze zamkniętym  $C_\Gamma$  równa się wartości residuum w punkcie  $l_1$  (lub  $-l_1$ ) pomnożonej przez  $2\pi i$ :

$$\frac{q_3}{Z_3\sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} \frac{1}{2\pi} \int_{C_\Gamma} \frac{e^{i\alpha\eta}}{\sqrt{1 - \alpha(\alpha \mp l_1)r_3^+(-\alpha)}} d\alpha = i \frac{q_3}{Z_3\sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} \frac{e^{\pm i l_1 \eta}}{\sqrt{1 \mp l_1 r_3^+(\mp l_1)}}. \quad (9.13)$$



Rysunek 9.3. Kontur całkowania  $C_\Gamma$  dla przypadku  $-l_1$ .

Korzystając ze wzorów (9.4) oraz (9.13) uzyskujemy:

$$\Phi_3^\pm(\eta) = -\frac{q_3}{Z_3\sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} \left\{ i \frac{e^{\pm i l_1 \eta}}{\sqrt{1 \mp l_1 r_3^\pm(\mp l_1)}} - \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}}{\sqrt{1-\alpha}(\alpha \mp l_1)r_3^\pm(-\alpha)} d\alpha \right\}. \quad (9.14)$$

Całkę występującą w prawej stronie równania (9.14) możemy przedstawić w następującej postaci:

$$\int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}\sqrt{1+\alpha}r_3^-(-\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2}(\alpha \mp l_1)r_3(\alpha)} d\alpha = Z_3 \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}}{Z_3\gamma(\alpha)\sqrt{1-\alpha}(\alpha \mp l_1)r_3^+(-\alpha)} d\alpha. \quad (9.15)$$

Korzystając z definicji funkcji  $R_3(\alpha)$  możemy przedstawić wzór (9.15) w następującej postaci:

$$Z_3 \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}}{Z_3\gamma(\alpha)\sqrt{1-\alpha}(\alpha \mp l_1)r_3^+(-\alpha)} d\alpha = Z_3 \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}\sqrt{1+\alpha}r_3^+(\alpha)}{iR_3(\alpha)(\alpha \mp l_1)} d\alpha. \quad (9.16)$$

Po zastosowaniu definicji funkcji  $R_3(\alpha)$  do wzoru (9.16) uzyskujemy

$$Z_3 \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}\sqrt{1+\alpha}r_3^+(\alpha)}{iR_3(\alpha)(\alpha \mp l_1)} d\alpha = Z_3 \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}\sqrt{1+\alpha}r_3^+(\alpha)}{i[1+Z_3\sqrt{\alpha^2-1}](\alpha \mp l_1)} d\alpha. \quad (9.17)$$

Całkę ze wzoru (9.16) przedstawiamy jako sumę czterech całek:

$$\begin{aligned} & Z_3 \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta}\sqrt{1+\alpha}r_3^+(\alpha)}{i[1+Z_3\sqrt{\alpha^2-1}](\alpha \mp l_1)} d\alpha = \\ & = \frac{Z_3}{i} \left\{ - \int_0^\infty \frac{e^{-\tau\eta}\sqrt{1+i\tau}r_3^+(i\tau)}{i[1+Z_3\sqrt{\tau^2+1}](i\tau \mp l_1)} id\tau + \int_0^\infty \frac{e^{-\tau\eta}\sqrt{1+i\tau}r_3^+(i\tau)}{i[1-Z_3\sqrt{\tau^2+1}](i\tau \mp l_1)} id\tau + \right. \end{aligned} \quad (9.18)$$

$$\left. + \int_0^1 \frac{e^{i\sigma\eta} \sqrt{1 + \sigma r_3^+(\sigma)}}{[1 + iZ_3 \sqrt{1 - \sigma^2}] (\sigma \mp l_1)} d\sigma - \int_0^1 \frac{e^{i\sigma\eta} \sqrt{1 + \sigma r_3^+(\sigma)}}{[1 - iZ_3 \sqrt{1 - \sigma^2}] (\sigma \mp l_1)} d\sigma \right\}.$$

Korzystając z poniższych zależności

$$\begin{aligned} -\frac{1}{1 + iZ_3 \sqrt{1 - i\tau^2}} + \frac{1}{1 - iZ_3 \sqrt{1 + i\tau^2}} &= \frac{-1 + iZ_3 \sqrt{1 + \tau^2} + 1 + iZ_3 \sqrt{1 + \tau^2}}{1 + Z_3^2(1 + \tau^2)} = \\ &= \frac{2iZ_3 \sqrt{1 + \tau^2}}{1 + Z_3^2(1 + \tau^2)} \\ \frac{1}{1 + iZ_3 \sqrt{1 - \sigma^2}} - \frac{1}{1 - iZ_3 \sqrt{1 - \sigma^2}} &= \frac{1 - iZ_3 \sqrt{1 - \sigma^2} - 1 - iZ_3 \sqrt{1 - \sigma^2}}{1 + Z_3^2(1 - \sigma^2)} = \\ &= \frac{-2iZ_3 \sqrt{1 - \sigma^2}}{1 + Z_3^2(1 - \sigma^2)} \end{aligned}$$

możemy przedstawić wzór (9.18) w następującej postaci

$$\begin{aligned} &Z_3 \int_{\lambda_1} \frac{e^{i\alpha\eta} \sqrt{1 + \alpha r_3^+(\alpha)}}{i [1 + Z_3 \sqrt{\alpha^2 - 1}] (\alpha \mp l_1)} d\alpha = \tag{9.19} \\ &= 2Z_3^2 \left\{ \int_0^\infty \frac{e^{-\tau\eta} \sqrt{1 + i\tau} \sqrt{1 + \tau^2} r_3^+(i\tau)}{[1 + Z_3^2 \sqrt{\tau^2 + 1}] (i\tau \mp l_1)} id\tau - \int_0^1 \frac{e^{i\sigma\eta} (1 + \sigma) \sqrt{1 - \sigma} r_3^+(\sigma)}{[1 + Z_3^2(1 - \sigma^2)] (\sigma \mp l_1)} i\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Wartością dwóch całek po prawej stronie wzoru (9.19) jest funkcja  $g^\pm(\eta, l_1)$  zdefiniowana we wzorze (4.81). Podstawiając definicję funkcji  $g^\pm(\eta, l_1)$  do wzoru (9.14) oraz uwzględniając definicję funkcji  $W_3$  ze wzoru (4.80) uzyskujemy:

$$\Phi_3^\pm(\eta) = W_3 e^{\pm il_1 \eta} + i \frac{q_3}{Z_3 \pi \sqrt{1 \pm l_1 r_3^\mp(\mp l_1)}} g^\pm(\eta, l_1). \tag{9.20}$$

Wzór (9.20) odpowiada wzoru (4.79) z rozdziału 4.

### 9.3. Obliczanie całek ze wzorów (6.11) oraz (6.42)

Zacniemy od wypisania jeszcze raz całki ze wzoru (6.11):

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha. \tag{9.21}$$

Spróbujemy przedstawić tę całkę w postaci umożliwiającej uzyskanie jej wartości przy użyciu procedur numerycznych. Rozbijając przedział całkowania w (9.21) uzyskujemy

$$I_{mn} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha. \tag{9.22}$$

Korzystając z właściwości cylindrycznych funkcji Bessela z (9.22) uzyskujemy

$$I_{mn} = \frac{(-1)^{m+n}}{2} \int_0^\infty \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha.$$

i następnie

$$I_{mn} = \frac{1 + (-1)^{m+n}}{2} \int_0^\infty \frac{\gamma(\alpha) J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha^2} d\alpha. \quad (9.23)$$

Następnie przedstawiamy (9.23) w następującej postaci:

$$I_{mn} = \frac{1 + (-1)^{m+n}}{2} \left[ \int_0^\infty \frac{J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\alpha} d\alpha + \int_0^\infty \left[ \frac{\gamma(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right] J_m(\alpha x) J_n(\alpha x) d\alpha \right]. \quad (9.24)$$

Wartość pierwszej całki w (9.24) wynosi  $\delta_{mn}/2n$ , gdzie  $\delta_{mn}$  jest deltą Kronekera. Oznaczmy  $I_{mn}^0$  drugą całkę w (9.24). Rozbijając przedział całkowania w tej całce uzyskujemy

$$I_{mn}^0 = \int_0^1 \left[ \frac{\gamma(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right] J_m(\alpha x) J_n(\alpha x) d\alpha + \int_1^\infty \left[ \frac{\gamma(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right] J_m(\alpha x) J_n(\alpha x) d\alpha. \quad (9.25)$$

Wprowadzając zamianę zmiennych  $\alpha = \sin \vartheta$  w pierwszej całce we wzorze (9.25) uzyskujemy

$$I_{mn}^0 = - \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{i \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \right] J_m(x \sin \vartheta) J_n(x \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta + \quad (9.26)$$

$$+ \int_1^\infty \left[ \frac{\gamma(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right] J_m(\alpha x) J_n(\alpha x) d\alpha.$$

i ostatecznie całka ze wzoru (6.11) przyjmuje postać

$$I_{mn} = \frac{1 + (-1)^{m+n}}{2} \left[ \frac{\sigma_{nm}}{2n} - \int_0^{\pi/2} \left[ \frac{i \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{\sin \vartheta} \right] J_m(x \sin \vartheta) J_n(x \sin \vartheta) \cos \vartheta d\vartheta + \quad (9.27)$$

$$+ \int_1^\infty \left[ \frac{\gamma(\alpha)}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha} \right] J_m(\alpha x) J_n(\alpha x) d\alpha \right].$$

Wartość całki ze wzoru (9.27) możemy uzyskać przy użyciu procedur numerycznych.

Postępując analogicznie całkę ze wzoru (6.42) można przedstawić w następującej postaci

$$I_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{J_m(\alpha x) J_n(\alpha x)}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} d\alpha = \frac{1 + (-1)^{m+n}}{2} \left[ i \int_0^{\pi/2} J_m(x \cos \vartheta) J_n(x \cos \vartheta) d\vartheta + \quad (9.28)$$

$$+ \int_1^\infty \frac{J_m(x\alpha) J_n(x\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} d\alpha \right].$$

## Bibliografia

- [1] Bjoerck A. and Dahlquist G. *Numerical mathematics and scientific computation*. Web Draft, 1999.
- [2] Brychkov Yu. A. *Specialnye funkicii. Proizvodnye, integraly, ryady i drugie formuly. Spravochnik*. FML, 2006. In Russian.
- [3] Böstrom A. and Wirdelius H. Utdefect: A simulation tool for ultrasonic ndt. In *14th International Conference on NDE in the Nuclear and Pressure Vessel Industries Proceedings*, Stockholm, September 1996.
- [4] Lewińska-Romicka A. *Badania nieniszczące. Podstawy defektoskopii*. WNT, 2001.
- [5] Lhémercy A. Multiple-technique ndt simulations of realistic configurations at the french atomic energy commission (cea). *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 18, 1999.
- [6] Nazarov S. A. and Plamenevsky B. A. *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*. Walter de Gruyter, 1994.
- [7] Senior T. B. A. and Volakis J. L. *Approximate Boundary Conditions in Electromagnetic*. IEEE Press, 1995.
- [8] Sumbatyan M. A. and Scalia A. *Equations of Mathematical Diffraction Theory*. CRC Press, 2005.
- [9] Thau S. A. and Lu T. H. Diffraction of transient horizontal waves by a finite crack and a finite rigid ribbon. *Int. J. Eng. Sci.*, 8:857–874, 1970.
- [10] Martha L. Abell and James P. Braselton. *Differential equations with Mathematica*. Elsevier Academic Press, Amsterdam, The Netherlands, third edition, 2004.
- [11] Martha L. Abell and James P. Braselton. *Mathematica by example*. Elsevier Academic Press, Amsterdam, The Netherlands, third edition, 2004.
- [12] Ken Arnold, James Gosling, and David (David Colin) Holmes. *The Java Programming Language*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, fourth edition, 2005.
- [13] Budiansky B. and Rice J.R. An integral equation for dynamic elastic response of an isolated 3-d crack. *Wave Motion*, 187, 1979.
- [14] Kurylyak D. B., Nazarchuk Z. T., and Voitko M. V. Analysis of the field of a plane sh-wave scattered by a finite crack on the interface of materials. *Materials Science*, 42(6):711–724, 2006.

- [15] Movchan A. B. and Movchan N. V. *Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations*. Crane and Russak, 1973.
- [16] Movchan A. B. and Movchan N. V. *Mathematical modeling of solids with nonregular boundaries*. CRC Press, 1995.
- [17] Noble B. *Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations*. Pergamon Press, 1958.
- [18] Jenny A. (Jenny Antoinette) Baglivo. *Mathematica laboratories for mathematical statistics: emphasizing simulation and computer intensive methods*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2005.
- [19] Gerd Baumann. *Mathematica in theoretical physics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., second edition, 2005.
- [20] Joshua Bloch. *Effective Java: Programming Language Guide*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 2001.
- [21] Bender C. and Orszag S. *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*. McGraw-Hill, 1978.
- [22] Eck C., Nazarov S. A., and Wendland W. L. Asymptotic analysis for a mixed boundary-value contact problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 156:275–316, 2001.
- [23] David Calvis. *Mathematica for differential equations: projects, insights, syntax and animations*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, USA, 2004.
- [24] Ferdinand Cap. *Mathematical methods in physics and engineering with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, USA, 2003.
- [25] Frank M. Carrano and Janet Prichard. *Data Abstraction and Problem Solving with Java, Walls and Mirrors*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, updated edition, 2004.
- [26] Stephen J. Chapman. *Java for Engineers and Scientists*. P T R Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, USA, 2000.
- [27] Chi Keung Cheung, editor. *Getting started with Mathematica*. John Wiley and Sons, Inc., Chichester, UK, second edition, 2005.
- [28] William J. (William Joseph) Collins. *Data structures and the Java collections framework*. Irwin/McGraw Hill, Boston, MA, USA, 2001.
- [29] Abrahams I. D. On the application of the wiener-hopf technique to problems in dynamic elasticity. *Wave Motion*, 36:311–333, 2002.
- [30] Achenbach J. D. and Zhu H. Effect of interfacial zone on mechanical behavior and failure of fiber-reinforced composites. *J. Mech. Physics Solids*, 37:381–393, 1989.
- [31] Dublin D. *Numerical and Analytical Methods for Scientists and Engineers, Using Mathematica*. Wiley, 2003.
- [32] Polyanin A. D. and Manzhirov A. V. *Spravochnik po integralnym uravnenijam. Tochnye resheniya*. Faktorial, 1998. In Russian.
- [33] Simons D.A. Scattering of sh waves by thin, semi-infinite inclusions. *International Journal of Solids and Structures*, 16:177–192, 1980.

- [34] Ian F. Darwin. *Java Cookbook: Solutions and Examples for Java Developers*. O'Reilly, 981 Chestnut Street, Newton, MA 02164, USA, second edition, 2003.
- [35] Harvey M. Deitel and Paul J. Deitel. *Java: how to program*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, USA, fifth edition, 2003.
- [36] Adam Drozdek. *Data structures and algorithms in Java*. Brooks/Cole, Pacific Grove, CA, USA, 2001.
- [37] Daniel Dubin. *Numerical and analytical methods for scientists and engineers using Mathematica*. Wiley-Interscience, New York, NY, USA, 2003.
- [38] Fraenkel L. E. On the method of matched asymptotic expansions. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 65:209–231, 1969.
- [39] Bruce Eckel. *Thinking in Java*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, USA, 2000.
- [40] Emets V. F. Integral equations of the problem of the scattering of elastic waves by a plane thin-walled inclusion of small stiffness. In *Dopovidi NAN Ukraine*, pages 35–37, 1995. In Ukrainian.
- [41] Emets V. F. Plane inverse problem of elastic wave scattering a thin inclusion of high rigidity. *J. Acoustical Physics*, 41(3), 1995.
- [42] Emets V. F. Plane inverse problem of elastic wave scattering by a thin-walled inclusion of low rigidity. In *Mech. Solids*, pages 86–93, 1995.
- [43] Emets V. F. *Modeling and interpretation of data of ultrasonic scattering by local objects*. Fenics Press, 2001. In Ukrainian.
- [44] Emets V. F. Scattering of high-frequency by a thin-walled plane rigidly supported inclusion. In *DIPED-2005 Proceedings*, pages 219–222, Tbilisi, 2005.
- [45] Emets V. F. and Zelavska I. A. Diffraction by a thin-walled plane inclusion of arbitrary rigidity: the case of sh-waves. In *DIPED-2002 Proceedings*, pages 145–149, Tbilisi, October 2002.
- [46] Emets V. F. and Kunets Ya. I. Scattering of sh-waves by a crack-like inclusion. In *DIPED-1998 Proceedings*, pages 126–130, Tbilisi, 1998.
- [47] Emets V. F. and Kunets Ya. I. Effective boundary conditions for a thin curved layer with tips. In *DIPED-1999 Proceedings*, pages 152–157, Tbilisi, 1999.
- [48] Emets V. F. and Kunets Ya. I. In *DIPED-2003 Proceedings*, pages 215–218, Tbilisi, 2003.
- [49] Emets V. F., Kunets Ya. I., and Matus V. V. Scattering of sh waves by an elastic thin-walled rigidly supported inclusion. *Archive of Appl. Mech.*, 73:769–780, 2004.
- [50] Emets V. F. and Rogowski J. Modeling of time-harmonic waves scattering in ultrasonic nondestructive testing of materials with a thin-walled plane rigidly supported inclusions. In *Environmental Mechanics Methods of Computer Science, Simulations*, pages 106–114, Lviv, June 2004.
- [51] Emets V. F. and Rogowski J. Modelling of the interaction of time-harmonic sh waves with a thin-walled plane inclusion. In *TCSET'2004 Proceedings*, pages 150–153, Lviv-Slavsko, February 2004.

- [52] Emets V. F. and Rogowski J. An application for modelling of plane harmonic sh wave scattering on a thin plane inclusion in elastic medium. In *System Modelling Control-2005*, pages 93–98, Zakopane, October 2005.
- [53] Emets V. F. and Rogowski J. Diffraction of high-frequency wave by a thinwalled electrically resistive strip. In *CPEE'06 Proceedings*, pages 46–50, Lviv-Odessa, 2006.
- [54] Emets V. F. and Rogowski J. A simulation tool for ultrasonic ndt of elastic materials with thin plane inclusions. In *SMC'2007 Proceedings*, Zakopane, 2007.
- [55] Emets V. F., Kit H. S., and Kunets Ya. I. Interaction of time-harmonic sh waves with a crack-like inclusion: edge region analysis. *International Journal of Fracture*, 94:51–62, 1998.
- [56] Emets' V. F. and Porokhovs'kii V. V. The inverse scattering problem for a prolate acoustically rigid solid of revolution. *Journal of Mathematical Sciences*, 86(2):2627–2632, 1997.
- [57] Treves F. *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*. Plenum Press, 1982.
- [58] David Flanagan. *Java in a nutshell*. O'Reilly, 981 Chestnut Street, Newton, MA 02164, USA, fifth edition, 2005.
- [59] Cain G. *Complex analysis*. free web version, 1999.
- [60] Haiat G. et al. Application of ultrasonic modeling to the positioning of defect in a cladded component. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 23, 2004.
- [61] Johansson G. and Niklasson A. J. Approximate dynamic boundary conditions for a thin piezoelectric layer. *J. Solids Struct.*, 40:3477–3492, 2003.
- [62] Michlin S. G. and Smolicki C. L. *Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych*. PWN, 1969.
- [63] Michael T. Goodrich and Roberto Tamassia. *Data structures and algorithms in Java*. John Wiley and Sons, New York, NY, USA; London, UK; Sydney, Australia, second edition, 2001.
- [64] James Gosling, Bill Joy, Guy L. Steele, and Gilad Bracha. *The Java language specification*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, second edition, 2000.
- [65] Ammari H. and He S. Effective impedance boundary conditions for an inhomogeneous thin layer on a curved metallic surface. *IEEE Trans. Antenn. Propag.*, 46:710–715, 1998.
- [66] Nayfeh A. H. *Perturbation methods*. John Wiley, 1973.
- [67] Sadri Hassani. *Mathematical methods using Mathematica: for students of physics and related fields*. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 2003.
- [68] Hartmut F. W. Hoft and Margret Hoft. *Computing with Mathematica*. Academic Press, New York, NY, USA, second edition, 2003.
- [69] Barry (Barry J.) Holmes and Daniel T. Joyce. *Object-oriented programming with Java*. Jones and Bartlett, Boston, MA, USA, 2001.
- [70] Steve Holzner. *Java Black Book*. Coriolis Group Books, Scottsdale, AZ, USA, 2000.
- [71] Cay S. Horstmann and Gary Cornell. *Core Java 2*. Sun Microsystems Press, Palo Alto, CA, USA, fifth edition, 2001.

- [72] Popov H.Ya. *Elastic Stress Concentration Near the Press Tools, Cuts, Thin Inclusions and Stiffeners*. Nauka, 1982.
- [73] Gorbal S. I. and Yemets V. F. Integro-differential equations of the problem of the scattering of elastic waves by a plane thin-walled inclusion of large stiffness. *J. Appl. Maths Mechs*, 60(2):269–275, 1996.
- [74] Kunets' Ya. I. and Matus V. V. Scattering of an acoustic pulse by a rigid sphere on a sedimentary (fluid) bottom. *Journal of Mathematical Sciences.*, 90(2):2026–2030, 1998.
- [75] Rokhlin S. I. and Wang Y. J. Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 89:503–515, 1991.
- [76] Veliev E. I., Kobayashi M., Ogata M., and Koshikawa S. Diffraction by a strip with different surface impedances: solution by the analytical-numerical approach. In *URSI Inter. Symposium on Electromagnetic theory*, pages 727–729, Thessalonica, Greece, May 1998.
- [77] Lifanov I.K., Poltavskii L.N., and Vainikko G.M. *Hypersingular integral equations and their applications*. CRC Press, 2004.
- [78] Amos J., Gray J., et al. Future applications of nde simulators. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 23:1620–1632, 2004.
- [79] Dundurus J. and Sotiropoulos D. A. On stress condition and computations at bi-material interfaces. *Computational Mech.*, 21:300–305, 1998.
- [80] Helsing J. and Peters G. Integral equation method and numerical solution of crack and inclusion problems in planar elastostatic. *SIAM J. Appl. Math.*, 59:965–982, 1999.
- [81] Hinch E. J. *Perturbation methods*. Cambridge University Press, 1995.
- [82] Kevorkian J. and Cole J. D. *Multiple scale and singular perturbation methods*. Springer, 1996.
- [83] Liu Y. J., Xu N., and Luo J. F. Modeling of interphases in fiber-reinforced composites under transverse loading using the boundary elements method. *ASME J. Appl. Mech.*, 67:41–49, 2000.
- [84] Mattsson J., Niclasson A.J., and Eriksson A. Three-dimensional ultrasonic crack detection in anisotropic materials. *Research in Nondestructive Evaluation*, 9:59–79, 1997.
- [85] Rogowski J. Aplikacja sŁuŹĄca do modelowania wzajemnego oddziaŁywania poprzecznej harmonicznej pŁaskiej fali i cienkiej pŁaskiej niejednorodnoŚci w materiale. In *SIS'2004 Proceedings*, pages 569–574, Łódź, October 2004.
- [86] Rogowski J. Aplikacja modelująca pole ultradźwiękowej fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym. *Pomiary Automatyka Kontrola*, 9bis:319–320, 2005.
- [87] Rogowski J. Aplikacja modelująca pole ultradźwiękowej fali rozproszonej na cienkiej płaskiej niejednorodności w materiale sprężystym. *Przegląd Elektrotechniczny Konferencje*, 2:161–166, 2007.
- [88] Tsalamengas J.L. Direct singular integral equation methods in scattering and propagation in strip- or slot-loaded structures. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 46(10):1560–1570, 1998.



- [89] Martin Kalin. *Object-Oriented Programming in Java*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, USA, 2001.
- [90] Jeffrey Kingston and Brian Cole. *Algorithms and Data Structures: Design, Correctness, Analysis: Java Edition*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, 2001.
- [91] Prem K. Kythe, Puri, Pratap, and Michael R. Schaferkotter. *Partial differential equations and boundary value problems with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, USA, second edition, 2003.
- [92] Rubin H. Landau, Robyn Wangberg, et al. *A first course in scientific computing: symbolic, graphical, and numeric problem solving using Maple, Java, Mathematica, and Fortran*. Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 2005.
- [93] John Lewis and William Loftus. *Java software solutions: foundations of program design*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, third edition, 2003.
- [94] Y. Daniel Liang. *Introduction to Java Programming*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, USA, 2001.
- [95] Aleksandrov V. M. Asymptotic methods applied to contact problems. *International Applied Mechanics*, 39(8):912–920, 2003.
- [96] Darmon M., Calmon P., and Bele B. Modelling of the ultrasonic response of inclusions in steel. *Review of Progress in QNDE*, 22, 2003.
- [97] Darmon M., Calmon P., and Bele B. An integrated model to simulate the scattering of ultrasounds by inclusions in steels. *Ultrasonics*, 42:237–241, Apr 2004.
- [98] Iljin A. M. *Soglasovanie asimptoticheskikh razlozhenij reshenij kraevykh zadach*. Nauka, 1989. In Russian.
- [99] Roman Maeder. *Computer Science with Mathematica: Theory and Practice for Science, Mathematics, and Engineering*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2000.
- [100] M. (Michael) Main. *Data structures and other objects using Java*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, second edition, 2003.
- [101] Addolorata Marasco and Antonio Romano. *Scientific computing with Mathematica: mathematical problems for ordinary differential equations*. Birkhäuser, Cambridge, MA, USA; Berlin, Germany; Basel, Switzerland, 2001.
- [102] David McMahan and Dan Topa. *A beginners guide to Mathematica*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, USA, 2006.
- [103] Holmes M.H. *Introduction to perturbation methods*. Springer, 1995.
- [104] Chikara Miyaji and Paul Abbott. *MathLink: network programming with Mathematica*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2001.
- [105] Gengembre N., Lhémy A., et al. A semi-analytic-fem hybrid model for simulating ut configurations involving complicated interactions of waves with defects. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 23:74–80, 2004.
- [106] Shavlakadze N. A contact problem of the interaction of a semi-finite inclusion with a plate. *Georgian Mathematical Journal*, 5(3):285–300, 1998.

- [107] Shavhlakadze N. On some contact problems for bodies with elastic inclusions. *Georgian Mathematical Journal*, 6(5):489–500, 1999.
- [108] Shavhlakadze N. The contact problems of the mathematical theory of elasticity for plates with an elastic inclusion. *Acta Applicandae Mathematicae: An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications*, 99(1):29–51, 2007.
- [109] Jackie Neider, Tom Davis, and Mason Woo. *OpenGL Programming Guide*. Addison-Wesley, Reading MA, 1993.
- [110] Patrick Niemeyer and Jonathan Knudsen. *Learning Java*. O'Reilly, 981 Chestnut Street, Newton, MA 02164, USA, third edition, 2005.
- [111] Opengl - the industry standard for high performance graphics. <http://www.opengl.org/> (September 2007).
- [112] Calmon P., Lhémery A., et al. Integrated models of ultrasonic examination for ndt expertise. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 16:1861–1868, 1997.
- [113] Calmon P., Lhémery A., et al. Models for the computation of ultrasonic fields and their interaction with defects in realistic ndt configurations. *Nucl. Eng. and Design*, 1998.
- [114] Calmon P., Leberre S., Sollier Th., and Benoist Ph. Civa, an integration software platform for the simulation and processing of ndt data. *World Conference on NDT*, 9, 2004.
- [115] Olson P. Elastodynamic scattering from penny-shaped and non planar crack-like flaws with dissipation and restoring forces. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.*, 57:661–666, 1990.
- [116] Olson P. Acoustic scattering by a sound-hard rectangle. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(6):3344–3347, 1991.
- [117] Olson P. and Böstrom A. Elastic waves propagation in the presence of crack and thin interface layers. *J. Tech. Phys.*, 31:393–400, 1990.
- [118] Lagerstrom P.A. *Matched Asymptotic Expansions. Ideas and Techniques*. Springer, 1988.
- [119] Hill R. Interfacial operators in the mechanics of composite media. *J. Mech. Phys. Solids*, 31:347–357, 1982.
- [120] Huang R., Schmerr L.W., and Sedov A. Improving the born approximation for the scattering of ultrasound in elastic solids. *Ultrasonics*, 44(1):981–984, 2006.
- [121] Huang R., Schmerr L.W., and Sedov A. Improving the born approximation for the scattering of ultrasound in elastic solids. *Ultrasonics*, 44:981–984, 2006.
- [122] Raillon R. et al. Transient elastodynamic model for beam defect interaction. application to nondestructive testing. *Ultrasonics*, 38:527–530, 2000.
- [123] Antonio Romano, Renato Lancellotta, and Addolorata Marasco. *Continuum mechanics using Mathematica: fundamentals, applications, and scientific computing*. Birkhäuser, Cambridge, MA, USA; Berlin, Germany; Basel, Switzerland, 2006.
- [124] Clay C. Ross. *Differential equations: an introduction with Mathematica*. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., second edition, 2004.
- [125] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M. *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press, 1993.

- [126] Kit G. S., Emets' V. F., and Ya. I. Kunets'. A model of the elastodynamic interaction of a thin-walled inclusion with a matrix under antiplanar shear. *Journal of Mathematical Sciences*, 97(1):3810–3816, 1999.
- [127] Lonné S., Lhémy A., et al. Modeling of ultrasonic attenuation in uni-directional fiber reinforced composites combining multiple-scattering and viscoelastic losses. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 23, 2004.
- [128] Lonné S., Lhémy A., et al. A simulation study to explain the variability of ultrasonic attenuation measurement in rtm composites. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 23:898–905, 2004.
- [129] Mahaut S. et al. Ultrasonic ndt simulation tools for phased array techniques. *Review of progress in QNDE*, 22, 2003.
- [130] Mahaut S. et al. Simulation and application of dynamic inspection modes using ultrasonic phased arrays. *Review of Quantitative Nondestructive Evaluation*, 23:777–784, 2004.
- [131] Vladimirov V. S. *Obobshchyonnye funkcii v matematicheskoy fizike*. Nauka, 1979. In Russian.
- [132] Mark Segal, Kurt Akeley, and Jon Leach (ed). *The OpenGL Graphics System: A Specification*. SGI, 1999.
- [133] Peter Sestoft. *Java precisely*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, second edition, 2005.
- [134] William T. Shaw. *Complex analysis with Mathematica*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2006.
- [135] Zbigniew M. Sikora. *Java: practical guide for programmers*. Morgan Kaufmann Publishers, Los Altos, CA 94022, USA, 2003.
- [136] Robert Simmons, Jr. *Hardcore Java: Secrets of the Java masters*. O'Reilly, 981 Chestnut Street, Newton, MA 02164, USA, 2004.
- [137] Ioannis P. Stavroulakis and Stepan A. Tersian. *Partial differential equations an introduction with Mathematica and MAPLE*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., P. O. Box 128, Farrer Road, Singapore 9128, second edition, 2004.
- [138] Stephen Stelting. *Robust Java: exception handling, testing, and debugging*. P T R Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, USA, 2005.
- [139] Fred Szabo. *Linear algebra: an introduction using Mathematica*. Academic Press, New York, NY, USA, 2000.
- [140] Michael Trott. *The Mathematica guidebook: mathematics in Mathematica*. TELOS division of Springer-Verlag, Santa Clara, CA, USA and New York, NY, USA, 2000.
- [141] Michael Trott. *The Mathematica guidebook for programming*. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 2004.
- [142] Michael Trott. *The Mathematica guidebook for numerics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 2005.
- [143] Michael Trott. *The Mathematica guidebook for numerics*. Springer-Verlag, Berlin, Germany / Heidelberg, Germany / London, UK / etc., 2006.
- [144] Litvin O. V. and Popov V. G. Stress concentration near a thin elastic inclusion under inter-

- action with harmonic waves in the case of smooth contact. *Mechanics of Solids*, 42(1):64–71, 2007.
- [145] Manzhirov A. V. and Polyanin A. D. *Spravochnik po integralnym uravnenijam. Metody resheniya*. Faktorial, 2000. In Russian.
- [146] Alexandrow V.M. and Mhitarian S.M. *Contact problems for Bodies with Coverings and Interlayers*. Nauka, 1983.
- [147] Babich V.M. and Buldyrev V.S. *Short-Wavelength Diffraction Theory. Asymptotic Methods*. Springer, 1991.
- [148] Ejderman V.Ya. *Osnovy teorii funkcij kompleksnogo peremennogo i operacionnogo ischisleniya*. FML, 2002. In Russian.
- [149] Collins G. W. *Fundamental Numerical Methods and Data Analysis*. Internet Edition, 2003.
- [150] Paul S. Wang. *Java with object-oriented programming*. Thomson/Brooks Cole, Pacific Grove, CA, USA, second edition, 2003.
- [151] Paul R. Wellin, Richard J. Gaylord, and Samuel N. Kamin. *An introduction to programming with Mathematica*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, third edition, 2005.
- [152] Stephen Wolfram. *The Mathematica book*. Wolfram Media, Champaign, IL, USA, fifth edition, 2003.
- [153] Wolfram Research, Inc. *Mathlink Reference Guide, Version 2.2*. Wolfram Research, Inc., 100 Trade Center Drive, Champaign, IL 61820-7237, USA, second edition, 1993.
- [154] Kunets Ya.I. Axisymmetric torsion of an elastic space with a thin elastic inclusion. *J. Appl. Maths Mechs*, 51:638–645, 1987.
- [155] Hashin Z. Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber composites. *J. Mech. Physics Solids*, 50:2509–2537, 2002.
- [156] Sharon Zakhour, Mary Campione, Jacob Royal, Isaac Rabinovitch, Tom Risser, and Mark Hoeber, editors. *The Java tutorial: a short course on the basics*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, fourth edition, 2006.
- [157] Robert L. Zimmerman and Fredrick Iver Olness. *Mathematica for physics*. Addison-Wesley, Reading, MA, USA, second edition, 2002.

ISBN 978-83-66741-29-4



9 788366 741294