

ELEMENTY ANALIZY ZESPOLONEJ Z PRZYKŁADAMI

MARIUSZ DOLIŃSKI
RENATA WIETESKA

Mariusz Doliński
Renata Wieteska

Elementy analizy zespolonej

z przykładami

Łódź 2024

Recenzent:

dr hab. Marek Galewski, prof. PŁ

Projekt okładki: Agata Niewiadomska

© Copyright by Politechnika Łódzka, Łódź 2024

ISBN: 978-83-67934-19-0

DOI: 10.34658/9788367934190

Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej

93-005 Łódź, Wólczańska 223

Tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52

E-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl

www.wydawnictwo.p.lodz.pl

Podręczniki i skrypty Politechniki Łódzkiej, Nr 2445

Publikacja elektroniczna

Spis treści

Wstęp	4
1 Algebra liczb zespolonych	6
1.1. Określenie zbioru liczb zespolonych	6
1.2. Postać kartezjańska liczby zespolonej	8
1.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej	11
1.4. Potęga i pierwiastek liczby zespolonej	14
1.4.1. Potęgowanie liczb zespolonych	14
1.4.2. Pierwiastkowanie liczb zespolonych	15
1.5. Wielomiany zmiennej zespolonej	17
Zadania do samodzielnego rozwiązania	20
2 Funkcje zespolone zmiennej zespolonej	21
2.1. Pojęcia podstawowe	21
2.2. Ciągi liczbowe o wyrazach zespolonych	34
2.3. Granica i ciągłość funkcji zmiennej zespolonej	39
2.4. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej	41
2.5. Funkcja holomorficzna	48
Zadania do samodzielnego rozwiązania	53
3 Całki funkcji zespolonych	55
3.1. Całka funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej	55
3.2. Krzywe na płaszczyźnie zespolonej	57
3.3. Całka funkcji zespolonej zmiennej zespolonej	61
Zadania do samodzielnego rozwiązania	75
4 Szeregi zespolone	78
4.1. Szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych	78
4.2. Szeregi potęgowe o wyrazach zespolonych	81
4.3. Szereg Laurenta	85
Zadania do samodzielnego rozwiązania	89
5 Punkty osobliwe. Residua	92
5.1. Punkty zerowe funkcji holomorficznego	92

5.2. Punkty osobliwe odosobnione	95
5.3. Residua	100
Zadania do samodzielnego rozwiązania	109
6 Transformata Laplace’a	112
6.1. Przekształcenie Laplace’a	112
6.2. Własności przekształcenia Laplace’a	116
6.3. Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace’a	121
6.4. Własności przekształcenia odwrotnego względem przekształcenia Laplace’a	121
6.5. Splot	123
6.6. Wyznaczanie oryginału, gdy znana jest transformata	124
6.7. Metoda operatorowa	125
Zadania do samodzielnego rozwiązania	129
7 Dodatek	132
7.1. Rozkład wyrażeń wymiernych na sumę ułamków prostych	132
Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań	137
Bibliografia	144
Skorowidz	146

Wstęp

Niniejszy skrypt powstał jako rezultat zajęć prowadzonych dla studentów kierunku automatyka i robotyka na Wydziale Mechanicznym Politechniki Łódzkiej i jest przeznaczony w szczególności dla technicznych kierunków niematematycznych.

Pierwszy rozdział skryptu poświęcony jest algebrze liczb zespolonych i ma na celu przypomnienie i zebranie podstawowych wiadomości dotyczących liczb zespolonych. Zawiera on określenie zbioru liczb zespolonych, omówienie postaci liczb zespolonych, przedstawienie działań na liczbach zespolonych oraz wyznaczania pierwiastków wielomianów zmiennej zespolonej.

Rozdział drugi ma celu zapoznanie Czytelnika z funkcjami zespolonymi zmiennej zespolonej. W pierwszej części dokonano przeglądu ważniejszych funkcji analizy zespolonej. Dalsza część obejmuje zagadnienia związane z ciągami zespolonymi, granicą oraz pochodną funkcji zespolonej. Ostatnia część tego rozdziału poświęcona jest holomorficzności funkcji, która jest warunkiem znacznie silniejszym niż różniczkowanie w sensie rzeczywistym.

W rozdziale trzecim omówiono tematykę związaną z całkami krzywoliniowymi funkcji zespolonych. Po omówieniu funkcji zespolonych zmiennej rzeczywistej oraz rodzajów krzywych na płaszczyźnie zespolonej zaprezentowane zostały narzędzia, które można wykorzystać przy obliczaniu całek krzywoliniowych funkcji zespolonych zmiennej zespolonej, w tym jeden z ważniejszych wzorów w analizie zespolonej – wzór Cauchy’ego.

W rozdziale czwartym uwaga Czytelnika zostaje skierowana na szeregi liczbowe oraz potęgowe o wyrazach zespolonych, a w szczególności na szereg Laurenta, w którym to szeregu występują zarówno składniki o wykładniku nieujemnym, jak i ujemnym.

Rozdział piąty zaczyna się od analizy zagadnienia punktów zerowych funkcji zespolonych. Następnie przeprowadzono klasyfikację punktów osobliwych. Rozdział kończy rachunek residuów, który jest wykorzystywany zarówno w analizie zespolonej, jak i rzeczywistej.

W rozdziale szóstym, po zdefiniowaniu przekształcenia Laplace'a, omówiono jego własności, a następnie wprowadzono przekształcenie odwrotne oraz splot. Sposoby wyznaczenia oryginału funkcji, gdy znana jest transformata, są zilustrowane na przykładach. Rozdział kończy się przykładami zastosowania metody operatorowej do rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

Ostatni, siódmy rozdział, zawiera dodatek, w którym przypomniany został rozkład ułamków wymiernych na sumę ułamków prostych, które to umiejętności można wykorzystać podczas stosowania metody operatorowej do rozwiązywania równań różniczkowych.

W skrypcie, dla wyeksponowania oraz ułatwienia wyszukiwania potrzebnych danych i narzędzi, definicje zostały zamieszczone w jasnoniebieskich ramkach, a dla twierdzeń zostały zastosowane ramki ciemnoniebieskie. Twierdzenia zostały opatrzone komentarzami oraz licznymi przykładami. Bezpośrednio pod przykładami zostały zamieszczone ćwiczenia, których rozwiązywanie pozwoli Czytelnikowi utrwalić omówiony materiał. Niektóre tematy zostały wsparte ilustracjami. Na końcu każdego rozdziału, niezależnie od ćwiczeń, zostały dołączone zadania do samodzielnego rozwiązania. Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań zostały umieszczone na końcu skryptu.

Składamy serdeczne podziękowanie Recenzentowi, dr. hab. prof. PŁ Markowi Galewskiemu, za liczne wskazówki i niezwykle cenne uwagi oraz spostrzeżenia i sugestie, które znacząco wpłynęły na jakość i ostateczną wersję skryptu, dr Annie Dębińskiej-Nagórskiej za poświęcony czas na przeczytanie skryptu, sugestie zmian i ulepszeń tekstu oraz Dyrektorowi Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki, dr. prof. PŁ Andrzejowi Justowi, za przychylność i możliwość opublikowania niniejszego opracowania.

Autorzy

Rozdział 1

Algebra liczb zespolonych

W skrypcie będziemy stosowali następujące oznaczenia zbiorów liczbowych:

Oznaczenia zbiorów liczbowych

- \mathbb{N} — zbiór liczb naturalnych,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

- \mathbb{N}_0 — zbiór liczb naturalnych z dołączoną liczbą zero,

$$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- \mathbb{Z} — zbiór liczb całkowitych,

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- \mathbb{R} — zbiór liczb rzeczywistych.

1.1. Określenie zbioru liczb zespolonych

Weźmy pod uwagę zbiór $\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ i zdefiniujmy dodawanie i mnożenie elementów $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ tego zbioru następująco:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (1.1)$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \quad (1.2)$$

Zbiór liczb zespolonych

Zbiór $\mathbb{C} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$ z działaniami dodawania i mnożenia określonymi równościami odpowiednio (1.1), (1.2), nazywamy zbiorem liczb zespolonych. Elementy zbioru \mathbb{C} nazywamy liczbami zespolonymi i oznaczamy pojedynczymi literami, np. z, w .

Przykład 1.1. Niech $z_1 = (1, -3)$, $z_2 = (2, 4)$. Wówczas:

- a) $z_1 + z_2 = (1, -3) + (2, 4) = (3, 1)$,
- b) $z_1 \cdot z_2 = (1, -3) \cdot (2, 4) = (1 \cdot 2 - (-3) \cdot 4, 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2) = (14, -2)$.

Ćwiczenie 1.1. Obliczyć sumę i iloczyn liczb $z_1 = (-4, 1)$, $z_2 = (3, -1)$.

Każdej liczbie $x \in \mathbb{R}$ możemy wzajemnie jednoznacznie przyporządkować parę $(x, 0) \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Przyporządkowanie to pozwala utożsamić zbiór \mathbb{R} ze zbiorem $\mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{C}$. Dlatego też liczbę $(x, 0) \in \mathbb{C}$ będziemy utożsamiać z liczbą $x \in \mathbb{R}$ i zapisywać

$$(x, 0) = x. \quad (1.3)$$

Jednostka urojona

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną oraz oznaczamy literą i . Mamy więc

$$(0, 1) = i.$$

Własność jednostki urojonej

$$i^2 = -1.$$

Dowód. Korzystając z (1.2) oraz (1.3) mamy

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

□

1.2. Postać kartezjańska liczby zespolonej

Niech $z = (x, y) \in \mathbb{C}$. Wówczas z (1.1), (1.2) oraz (1.3) mamy

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

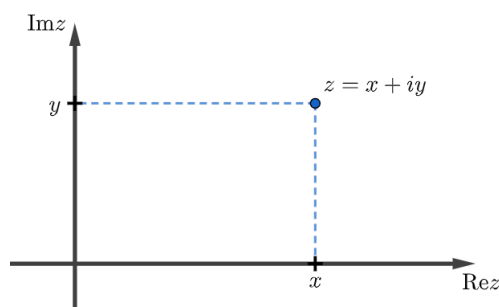
Zatem każdą liczbę zespoloną z możemy zapisać w postaci $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$.

Postać kartezjańska liczby zespolonej

Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Postać $z = x + iy$ nazywamy postacią kartezjańską (algebraiczną) liczby zespolonej z , przy czym x nazywamy częścią rzeczywistą liczby z i oznaczamy $x = \operatorname{Re}z$, a y nazywamy częścią urojoną liczby z i oznaczamy $y = \operatorname{Im}z$.

Dwie liczby zespolone $z_1 = x_1 + iy_1$ oraz $z_2 = x_2 + iy_2$, dane w postaci kartezjańskiej, są równe wtedy i tylko wtedy, gdy mają takie same części rzeczywiste oraz takie same części urojone, tzn. gdy $x_1 = x_2$ oraz $y_1 = y_2$.

Niech $x, y \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że każdej liczbie zespolonej $z = x + iy$ możemy jednoznacznie przyporządkować punkt o współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie Oxy i na odwrót, każdemu punktowi o współrzędnych (x, y) na płaszczyźnie Oxy możemy przyporządkować jednoznacznie liczbę zespoloną $z = x + iy$. Płaszczyznę z tak określonym odwzorowaniem nazywamy płaszczyzną zespoloną. Jeśli na płaszczyźnie zespolonej wprowadzimy prostokątny układ współrzędnych, to oś poziomą nazwiemy osią rzeczywistą ($\operatorname{Re}z$), natomiast oś pionową nazwiemy osią urojoną ($\operatorname{Im}z$), (rysunek 1.1).



Rysunek 1.1: Płaszczyzna zespolona

Sprzężenie liczby zespolonej

Liczbą sprzężoną do liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, (lub sprzężeniem liczby zespolonej) nazywamy liczbę zespoloną \bar{z} określoną wzorem

$$\bar{z} = x - iy.$$

Własność sprzężenia

Twierdzenie 1.1. Jeżeli $z = x + iy \in \mathbb{C}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, to

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

Działania na liczbach zespolonych w postaci kartezjańskiej wykonujemy analogicznie jak na wyrażeniach algebraicznych, przy czym przy dzieleniu przez liczbę zespoloną dokonujemy mnożenia dzielnej i dzielnika przez liczbę do niej sprzężoną. Podczas wykonywania działań zastępujemy $i^2 = -1$.

Przykład 1.2. Niech $z_1 = 6 - 7i$ oraz $z_2 = 2 + i$. Wówczas:

- a) $z_1 + z_2 = (6 - 7i) + (2 + i) = 6 + 2 - 7i + i = 8 - 6i$,
- b) $z_1 - z_2 = (6 - 7i) - (2 + i) = 6 - 2 - 7i - i = 4 - 8i$,
- c) $z_1 \cdot z_2 = (6 - 7i)(2 + i) = 12 + 6i - 14i - 7i^2 = 19 - 8i$,
- d) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(6 - 7i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{12 - 6i - 14i + 7i^2}{4 + 1} = 1 - 4i$.

Ćwiczenie 1.2. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

- a) $\frac{\overline{1 - i} \cdot (3 - i)}{7 + i}$,
- b) $\frac{\operatorname{Im}(1 + 5i)}{1 - 3i}$.

Moduł liczby zespolonej

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy liczbę $|z| \in [0, +\infty)$ określoną wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Bezpośrednio z definicji modułu wynika, że zbiór

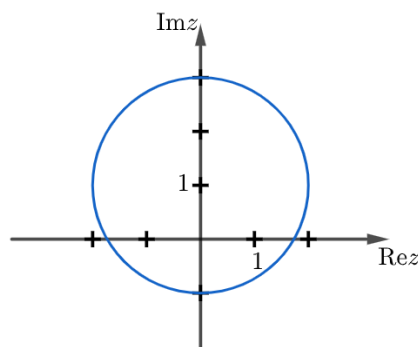
$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\},$$

gdzie $r > 0$, jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu r . Ogólnie zbiór

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

gdzie $r > 0$, jest okręgiem o środku w punkcie z_0 i promieniu r .

Przykład 1.3. Zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 2\}$ jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = i$ oraz promieniu $r = 2$, (rysunek 1.2).



Rysunek 1.2

Ćwiczenie 1.3. Nazwać i naszkicować zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2 + 3i| = 4\}$.

Własności modułu

Twierdzenie 1.2. Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas:

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- $|\alpha z| = \alpha |z|$, gdzie $\alpha \in [0, +\infty)$,
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
- $|z^n| = |z|^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$,
- $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$,
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$,
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

Przykład 1.4. Niech $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 2i$. Wówczas

$$|z_1| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5, \quad |z_2| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2,$$

a więc:

$$\text{a) } |z_1 \cdot z_2| = |(4 - 3i)(2i)| = |4 - 3i||2i| = 5 \cdot 2 = 10,$$

$$\text{b) } |z_1^3| = |(4 - 3i)^3| = |4 - 3i|^3 = 5^3 = 125,$$

$$\text{c) } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{4 - 3i}{2i} \right| = \frac{|4 - 3i|}{|2i|} = \frac{5}{2}.$$

Ćwiczenie 1.4. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

$$\text{a) } \frac{2 + 6i}{|1 + i\sqrt{3}|}, \quad \text{b) } \frac{|3 - 4i|}{1 + 3i}.$$

1.3. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Argument liczby zespolonej

Argumentem liczby zespolonej $z \neq 0$, danej w postaci $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, nazywamy każdą liczbę $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniającą układ równań

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby $z = 0$ jest każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$.

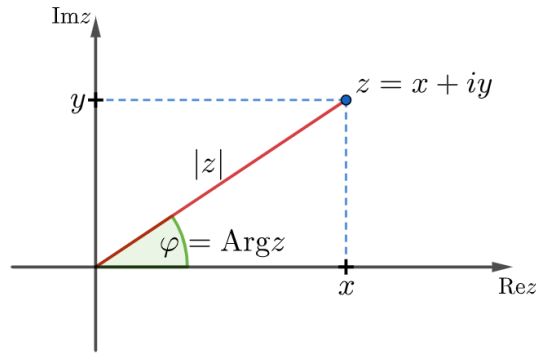
Z okresowości funkcji sinus oraz cosinus wynika, że każda liczba zespolona różna od zera posiada nieskończenie wiele argumentów, które różnią się o całkowite wielokrotności 2π .

Argument główny liczby zespolonej

Argument $\varphi \in [0, 2\pi)$ liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argumentem głównym i oznaczamy $\text{Arg}z$, (rysunek 1.3).

Dla liczby $z = 0$ przyjmujemy, że $\text{Arg}0 = 0$.

Każda liczba zespolona posiada dokładnie jeden argument główny.



Rysunek 1.3: Argument główny liczby zespolonej

Przykład 1.5. Dla $z = 3i$ mamy $x = 0$, $y = 3$, $|z| = \sqrt{0^2 + 3^2} = 3$. Argumentem liczby $z = 3i$ jest każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniająca układ równań

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{0}{3} = 0, \\ \sin \varphi = \frac{3}{3} = 1, \end{cases}$$

a więc jej argumentem jest dowolna liczba postaci $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$, w szczególności $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Liczba $\varphi = \frac{\pi}{2}$ jest jednocześnie argumentem głównym, tj. $\text{Arg}(3i) = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$.

Ćwiczenie 1.5. Wyznaczyć moduł, dowolny argument oraz argument główny liczby $z = -5$.

Przyjmuje się też, w niektórych zastosowaniach, że $\text{Arg}z \in (-\pi, \pi]$, wówczas wartość bezwzględna argumentu głównego nie przekracza π .

Przykład 1.6. Jeśli przyjmiemy $\text{Arg}z \in (-\pi, \pi]$, to:

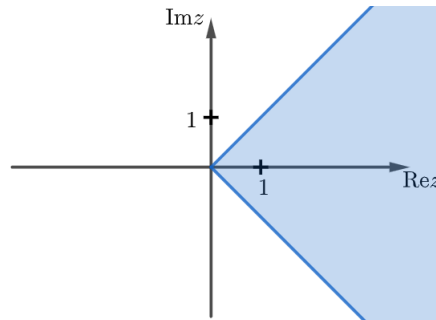
- a) Dla liczby $z = -2i$, $|z| = 2$, a liczbą $\varphi \in (-\pi, \pi]$ spełniającą układ równań

$$\begin{cases} \cos \varphi = 0, \\ \sin \varphi = -1, \end{cases}$$

jest liczba $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, a więc $\text{Arg}(-2i) = -\frac{\pi}{2}$.

- b) Zbiór przedstawiony na rysunku 1.4 możemy zapisać nierównościami następująco

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{4} \leq \text{Arg}z \leq \frac{\pi}{4} \right\}.$$



Rysunek 1.4

Ćwiczenie 1.6. Przyjmując, że $\text{Arg}z \in (0, 2\pi)$:

- Wyznaczyć argument główny liczby $z = -2i$,
- Opisać nierównościami zbiór przedstawiony na rysunku 1.4.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Postacią trygonometryczną liczby zespolonej z nazywamy postać

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie φ jest dowolnym argumentem liczby z .

Postać trygonometryczną otrzymujemy po przekształceniu wzorów (1.4) do postaci $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$, a następnie podstawieniu do postaci kartezjańskiej liczby zespolonej, mianowicie

$$z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Przykład 1.7. Dla liczby zespolonej $z = -2 + 2i$ mamy $x = -2$, $y = 2$, $|z| = 2\sqrt{2}$. Układ równań

$$\begin{cases} \cos \varphi = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

spełnia np. $\varphi = \frac{3}{4}\pi$. Zatem liczbę $z = -2 + 2i$ możemy zapisać w następującej postaci trygonometrycznej

$$z = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right).$$

Ćwiczenie 1.7. Zapisać w postaci trygonometrycznej liczbę $z = \sqrt{3} - i$.

1.4. Potęga i pierwiastek liczby zespolonej

1.4.1. Potęgowanie liczb zespolonych

Działania na liczbach zespolonych w postaci trygonometrycznej

Twierdzenie 1.3. *Jeśli $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz*

$$z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

to:

- $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad z_2 \neq 0.$

Powyższy wzór na mnożenie liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej możemy uogólnić na dowolną ilość czynników. W szczególności możemy otrzymać wzór na n -tą potęgę liczby zespolonej, mianowicie

Wzór de Moivre'a

Jeżeli $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ oraz $n \in \mathbb{N}$, to

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)).$$

Przykład 1.8. Zapisując jednostkę urojoną i w postaci trygonometrycznej $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ możemy, korzystając ze wzoru de Moivre'a, obliczyć dowolną jej potęgę.

$$i^n = \begin{cases} i, & \text{jeśli } n = 4k + 1, \\ -1, & \text{jeśli } n = 4k + 2, \\ -i, & \text{jeśli } n = 4k + 3, \\ 1, & \text{jeśli } n = 4k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Przykład 1.9. Obliczmy $(\sqrt{3}-i)^{99}$. Połóżmy $z = \sqrt{3}-i$. Liczbę tę możemy zapisać w postaci trygonometrycznej $|z| = 2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right)$. Stosując teraz wzór de Moivre'a otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 (\sqrt{3} - i)^{99} &= 2^{99} \left(\cos \frac{1089}{6}\pi + i \sin \frac{1089}{6}\pi \right) \\
 &= 2^{99} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -2^{99}i.
 \end{aligned}$$

Potęgi niektórych liczb zespolonych możemy obliczyć bez odwoływania się do postaci trygonometrycznej, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 1.10. Obliczmy $(1 - i)^7$. Mamy

$$\begin{aligned}
 (1 - i)^7 &= (1 - i)^6 \cdot (1 - i) = ((1 - i)^2)^3 (1 - i) \\
 &= (1 - 2i + i^2)^3 (1 - i) = (-2)^3 i^3 (1 - i) \\
 &= -8 \cdot (-i)(1 - i) = 8i(1 - i) = 8 + 8i.
 \end{aligned}$$

Ćwiczenie 1.8. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

$$\text{a) } (\sqrt{2} + i)^5, \quad \text{b) } \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{86}.$$

1.4.2. Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastek z liczby zespolonej

Pierwiastkiem stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$, z liczby zespolonej z nazywamy każdą taką liczbę zespoloną w , że $w^n = z$.

Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$.

Pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej

Twierdzenie 1.4. Każda liczba zespolona $z \neq 0$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}$. Zbiór tych pierwiastków jest postaci

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\},$$

gdzie

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (1.5)$$

$k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, φ jest dowolnym argumentem liczby z , natomiast $\sqrt[n]{|z|}$ oznacza pierwiastek arytmetyczny.

Warto zwrócić uwagę, że symbol pierwiastka w odniesieniu do liczb rzeczywistych, inaczej niż w przypadku liczb zespolonych, jest określony jednoznacznie i oznacza liczbę rzeczywistą.

Wykorzystanie wzoru (1.5) ilustruje następujący przykład.

Przykład 1.11. Obliczmy $\sqrt[3]{-8i}$.

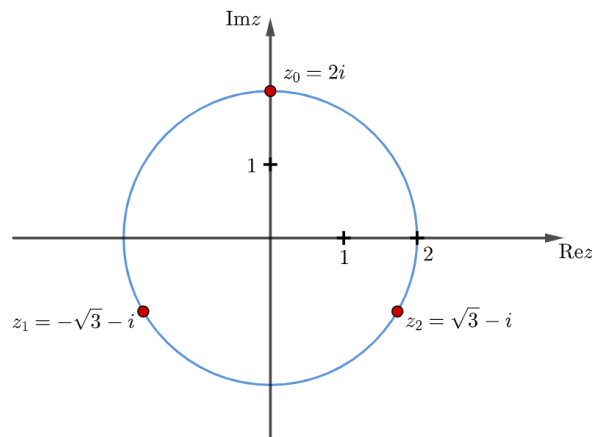
Zaczynamy od wyznaczenia modułu oraz argumentu liczby $z = -8i$.

$$|z| = 8, \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Stąd i ze wzoru (1.5) wynika, że

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2i, \\ z_1 &= 2 \left(\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi \right) = -\sqrt{3} - i, \\ z_2 &= 2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) = \sqrt{3} - i. \end{aligned}$$

Rysunek 1.5 przedstawia położenie obliczonych pierwiastków na płaszczyźnie zespolonej. Zauważmy, że pierwiastki te leżą na okręgu o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu $r = \sqrt[3]{8} = 2$ oraz dzielą go na trzy równe łuki.



Rysunek 1.5: Pierwiastki 3. stopnia z liczby $-8i$

Spostrzeżenie z ostatniego przykładu można sformułować ogólniej. Mianowicie, pierwiastki stopnia n liczby zespolonej $z \neq 0$ leżą na okręgu o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu $r = \sqrt[n]{|z|}$ oraz dzielą go na n równych łuków.

Pierwiastki z liczb zespolonych możemy również wyznaczać z pominięciem wzoru (1.5).

Przykład 1.12. Obliczmy $\sqrt{5 - 12i}$. Z definicji poszukujemy takiej liczby zespolonej w , że $w^2 = 5 - 12i$. Niech $w = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, wówczas

$$\begin{aligned}(x + iy)^2 &= 5 - 12i, \\ x^2 + 2xyi + i^2y^2 &= 5 - 12i, \\ x^2 - y^2 + 2xyi &= 5 - 12i.\end{aligned}$$

Porównując części rzeczywiste i urojone liczb po lewej i prawej stronie ostatniej równości otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ 2xy = -12, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem są pary liczb $\begin{cases} x = 3, & x = -3, \\ y = -2, & y = 2. \end{cases}$

Zatem $\sqrt{5 - 12i} = \{3 - 2i, -3 + 2i\}$.

Ćwiczenie 1.9. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

$$\text{a) } \sqrt{15 - 8i}, \quad \text{b) } \sqrt[3]{-27}.$$

1.5. Wielomiany zmiennej zespolonej

Wielomian zespolony

Wielomianem zespolonym stopnia n , gdzie $n \in \mathbb{N}_0$, zmiennej zespolonej z o współczynnikach zespolonych $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ nazywamy każdą funkcję postaci

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad \text{gdzie } a_n \neq 0.$$

Pierwiastek wielomianu

Liczbę zespoloną z_0 nazywamy pierwiastkiem wielomianu zespolonego W , jeżeli $W(z_0) = 0$.

Zasadnicze twierdzenie algebry

Twierdzenie 1.5. *Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbb{N}$ posiada pierwiastek zespolony.*

Z zasadniczego twierdzenia algebry i twierdzenia Bézout wynika, że każdy wielomian zespolony dowolnego stopnia $n \in \mathbb{N}$ posiada dokładnie n pierwiastków zespolonych (uwzględniając pierwiastki wielokrotne). Zauważmy, że sytuacja taka nie ma miejsca w przypadku wielomianu rzeczywistego o współczynnikach rzeczywistych. Wielomian $W(x) = x^2 + 1$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, nie ma pierwiastków rzeczywistych, bowiem równanie $x^2 + 1 = 0$ nie ma rozwiązania w zbiorze liczb rzeczywistych. Jeśli rozpatrzmy powyższy wielomian jako wielomian zmiennej zespolonej postaci $W(z) = z^2 + 1$, gdzie $z \in \mathbb{C}$, to ma on dwa pierwiastki zespolone $z_1 = i$, $z_2 = -i$ będące rozwiązaniami równania $z^2 + 1 = 0$ w zbiorze liczb zespolonych.

Pierwiastki wielomianu zespolonego stopnia drugiego

Twierdzenie 1.6. *Pierwiastki wielomianu zespolonego stopnia drugiego*

$$W(z) = az^2 + bz + c,$$

gdzie $a, b, c \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, wyrażają się wzorami

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a},$$

gdzie $\sqrt{b^2 - 4ac} = \{\delta_1, \delta_2\}$.

Przykład 1.13. Rozwiążemy w zbiorze liczb zespolonych równanie

$$z^2 + 2z + 5 = 0.$$

Mamy $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$, a więc

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{16i^2} = \{-4i, 4i\}.$$

Zatem

$$z_1 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i, \quad z_2 = \frac{-2 + 4i}{2} = -1 + 2i.$$

Ćwiczenie 1.10. Rozwiązać równanie $(1 - i)z^2 + (2 - i)z + 1 = 0$ w zbiorze liczb zespolonych.

Przykład 1.14. Wyznaczymy rozwiązania równania

$$(z^2 + 3)(z^2 + 2z + 5) = 0$$

spełniające warunek

$$|z + 1 + i| < 2.$$

Mamy

$$z^2 + 3 = 0 \quad \vee \quad z^2 + 2z + 5 = 0.$$

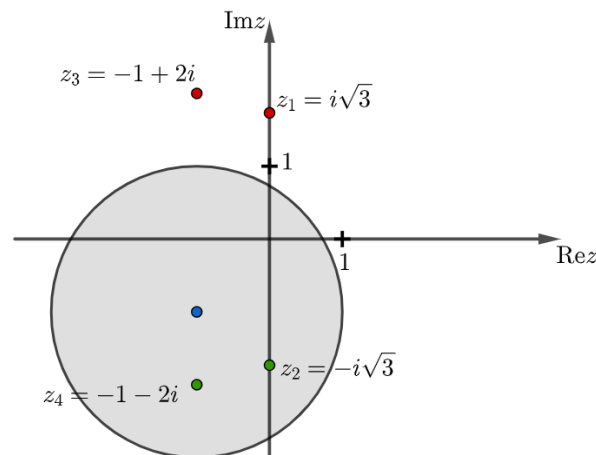
Stąd i z przykładu 1.13.

$$z_1 = i\sqrt{3}, \quad z_2 = -i\sqrt{3}, \quad z_3 = -1 + 2i, \quad z_4 = -1 - 2i.$$

Podany warunek spełniają pierwiastki z_2 oraz z_4 , gdyż

$$\begin{aligned} |z_1 + 1 + i| &= \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} > 2, & |z_2 + 1 + i| &= \sqrt{5 - 2\sqrt{3}} < 2, \\ |z_3 + 1 + i| &= 3 > 2, & |z_4 + 1 + i| &= 1 < 2. \end{aligned}$$

Aby sprawdzić, które pierwiastki spełniają podany warunek, można też narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z + 1 + i| < 2\}$ oraz zamieścić na niej obliczone pierwiastki, (rysunek 1.6) i na tej podstawie wskazać pierwiastki spełniające podany warunek.



Rysunek 1.6

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (2+i)(1+3i) + \overline{1+6i}, & \text{b)} \frac{(1+4i)(2-i) - 4 - 3i}{1+i}, \\ \text{c)} \frac{(1+i)^4(i-3)}{4+2i}, & \text{d)} \frac{(\operatorname{Im}(4+2i) - i^{56}) \cdot \overline{1-3i}}{3+i}, \\ \text{e)} \frac{\overline{2-6i} \cdot i^{119} + \operatorname{Im}(8-3i)}{4+2i}, & \text{f)} \frac{2 \left(\cos \frac{17}{6}\pi + i \sin \frac{17}{6}\pi \right)}{1+i\sqrt{3}}. \end{array}$$

Zadanie 2. Zapisać podane liczby w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 1+i, & \text{b)} 2-2i, & \text{c)} -1+i\sqrt{3}, \\ \text{d)} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, & \text{e)} 2e^{\pi i}, & \text{f)} e^{\frac{\pi}{4}i}. \end{array}$$

Zadanie 3. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

$$\text{a)} (\sqrt{3}+i)^{29}, \quad \text{b)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right)^{58}, \quad \text{c)} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{102}.$$

Zadanie 4. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

$$\text{a)} \sqrt{3-4i}, \quad \text{b)} \sqrt[3]{1}, \quad \text{c)} \sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}, \quad \text{d)} \sqrt[4]{-64}.$$

Zadanie 5. Rozwiązać równania w dziedzinie zespolonej (wyniki podać w postaci kartezjańskiej):

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (i-3)z + z = 1 + 5i - iz, & \text{b)} i(z + \bar{z}) + 3z = 6 + i, \\ \text{c)} z^2 + 4z + 13 = 0, & \text{d)} iz^2 + 2z + i = 0, \\ \text{e)} z^2 + (1-2i)z - 1 - i = 0, & \text{f)} (1+i)z^2 + (2+i)z + 1 = 0, \\ \text{g)} (z^2 + 4)(z^2 - (3-i)z - 3i) = 0, & \text{h)} (z^4 - 1)((2+i)z - 4i) = 0. \end{array}$$

Zadanie 6. Wyznaczyć wszystkie rozwiązania podanych równań należące do zbioru A :

$$\begin{array}{ll} \text{a)} (iz+2)(2iz+z-3-i) = 0, & A = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 2\}, \\ \text{b)} (1+i)z^3 + (3-i)z^2 - 2iz = 0, & A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} \leq \operatorname{Arg} z \leq \frac{3}{4}\pi\}, \\ \text{c)} (z^4 - 1)(z^2 - 2z + 1 - 2i) = 0, & A = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2 \wedge \operatorname{Arg} z < \pi\}. \end{array}$$

Rozdział 2

Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

2.1. Pojęcia podstawowe

W rozdziale tym przyjrzymy się kilku ważnym w analizie zespolonej funkcjom zespolonym zmiennej zespolonej. Omówimy ich własności, podając przy tym uzasadnienia oraz przykłady wraz ilustracjami. Wskażemy również zależności między nimi.

Funkcja zespolona zmiennej zespolonej

Funkcję określoną na zbiorze $D \subset \mathbb{C}$ o wartościach w zbiorze \mathbb{C} nazywamy funkcją zespoloną zmiennej zespolonej. Zbiór D nazywamy obszarem określoności, polem lub tradycyjnie dziedziną funkcji zespolonej zmiennej zespolonej.

Funkcją zespoloną zmiennej zespolonej jest

Wielomian zespolony

Wielomian zespolony zmiennej zespolonej z stopnia n

$$W(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0,$$

gdzie $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$.

W poprzednim rozdziale omówione zostały pierwiastki wielomianu zespolonego oraz sposoby ich wyznaczania. W tym rozdziale zwrócimy uwagę na pewne własności przekształcenia liniowego.

Przekształcenie liniowe

- Niech $a, b, z \in \mathbb{C}$. Odwzorowanie postaci

$$z \rightarrow az + b$$

nazywamy przekształceniem liniowym, przy czym $|a|$ nazywamy współczynnikiem podobieństwa, natomiast $\text{Arg } a$ - kątem obrotu. Jeżeli $|a| = 1$, to powyższe przekształcenie nazywamy ruchem. Ruch, którego $\text{Arg } a = 0$ nazywamy przesunięciem i wówczas b nazywamy wektorem przesunięcia.

- Niech $a, z, z_0 \in \mathbb{C}$. Przekształcenie liniowe

$$z \rightarrow z_0 + a(z - z_0)$$

nazywamy obrotem o środku w punkcie z_0 , jeśli $|a| = 1$, a jednokładnością o środku w punkcie z_0 , jeśli $\text{Arg } a = 0$.

Zauważmy, że

Własność przekształcenia liniowego

Twierdzenie 2.1. *Każde przekształcenie liniowe*

$$z \rightarrow az + b,$$

gdzie $a, b, z \in \mathbb{C}$, jest złożeniem obrotu i jednokładności o środku w punkcie $z_0 = 0$ oraz przesunięcia.

Dowód. Niech $a, b, z \in \mathbb{C}$ oraz $h(z) = az + b$. Połóżmy

$$h_1(z) = e^{i \text{Arg } a} z, \quad h_2(z) = |a|z, \quad h_3(z) = z + b.$$

Zauważmy, że przekształcenie h_1 jest obrotem o środku w punkcie $z_0 = 0$, h_2 jest jednokładnością o środku w punkcie $z_0 = 0$, a przekształcenie h_3 jest przesunięciem.

Wówczas

$$(h_2 \circ h_1)(z) = |a|e^{i \operatorname{Arg} a} z = az.$$

A zatem

$$(h_3 \circ h_2 \circ h_1)(z) = az + b = h(z).$$

□

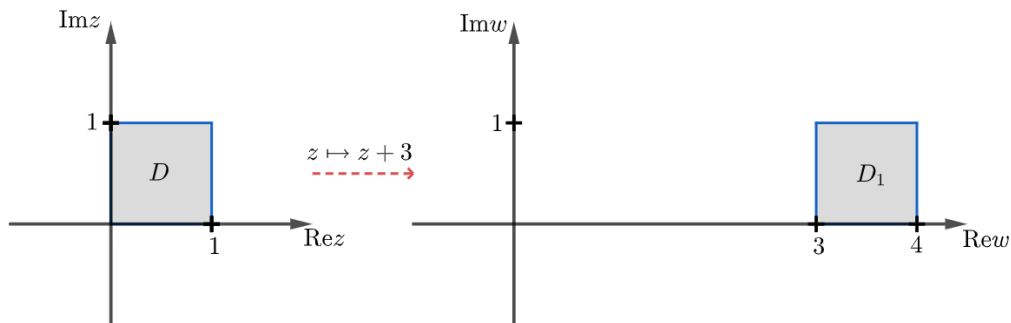
Wyznamy obrazy zadanego zbioru D przy podanych przekształceniach liniowych. Na jednej płaszczyźnie naszkicujemy zbiór D , natomiast na drugiej obraz zbioru D przy zadanym przekształceniu.

Przykład 2.1. Rozważmy zbiór

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \wedge 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}.$$

a) Odwzorowanie $z \mapsto z + 3$ jest przesunięciem o wektor $b = 3$, a więc przeprowadza punkty zbioru D na punkty zbioru D_1 , (rysunek 2.1), gdzie

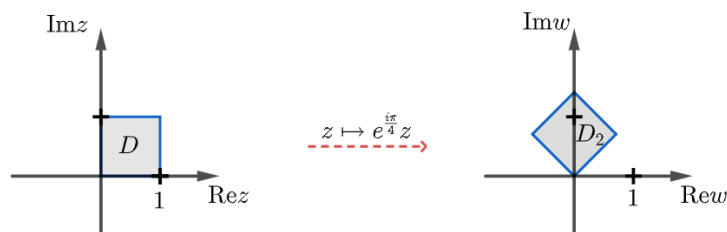
$$D_1 = \{w \in \mathbb{C} : 3 \leq \operatorname{Re} w \leq 4 \wedge 0 \leq \operatorname{Im} w \leq 1\}.$$



Rysunek 2.1: Przykład 2.1. (a)

b) Odwzorowanie $z \mapsto \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) z$ jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{4}$ dookoła początku układu współrzędnych przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, a więc przeprowadza punkty zbioru D na punkty zbioru D_2 , (rysunek 2.2), gdzie

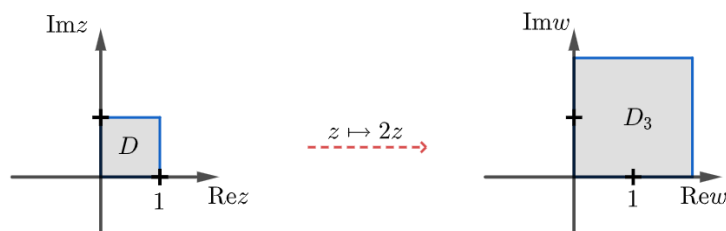
$$D_2 = \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} w| \leq \operatorname{Im} w \leq \sqrt{2} - |\operatorname{Re} w|\}.$$



Rysunek 2.2: Przykład 2.1. (b)

c) Odwzorowanie $z \mapsto 2z$ jest jednokładnością. Przeprowadza ono punkty zbioru D na punkty zbioru D_3 , (rysunek 2.3), gdzie

$$D_3 = \{w \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} w \leq 2 \wedge 0 \leq \operatorname{Im} w \leq 2\}.$$



Rysunek 2.3: Przykład 2.1. (c)

Ćwiczenie 2.1. Wyznaczyć obraz zbioru

$$D = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$$

przy odwzorowaniu

$$\text{a) } z \rightarrow iz, \quad \text{b) } z \rightarrow 2z, \quad \text{c) } z \rightarrow z + i.$$

Funkcja wykładnicza

Funkcję wykładniczą o podstawie e zmiennej zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, definiujemy wzorem

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Funkcję wykładniczą o podstawie e nazywa się również funkcją eksponencjalną i oznacza przez \exp .

Z definicji funkcji wykładniczej dla liczby $z = 0 + iy$, gdzie $y \in \mathbb{R}$, mamy $e^{0+iy} = e^0(\cos y + i \sin y)$. Otrzymaliśmy zatem, że

Wzór Eulera

Dla każdego $y \in \mathbb{R}$ zachodzi wzór

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

nazywany wzorem Eulera.

Przyjrzyjmy się teraz najważniejszym własnościom funkcji wykładniczej.

Własności funkcji wykładniczej

Twierdzenie 2.2.

(1) Niech $z = x + iy \in \mathbb{C}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}.$$

(2) Dla dowolnych $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}.$$

(3) Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$

$$|e^z| = e^x, \text{ gdzie } x = \operatorname{Re} z.$$

(4) Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$

$$e^z \neq 0.$$

(5) Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ oraz dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$

$$e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

(6) Dla liczby $0 \in \mathbb{C}$ zachodzi $e^0 = 1$.

(7) Niech $z \in \mathbb{C}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$e^z = 1 \iff z = 2k\pi i.$$

Dowód. Ad. (1) Jeżeli $z = x + i0$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, to

$$e^z = e^{x+i0} = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x.$$

Stąd i ze wzoru Eulera

$$e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z = e^{x+iy}.$$

Ad. (2) Niech $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, gdzie $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas z własności (1), wzoru Eulera oraz wzorów trygonometrycznych na sinus i cosinus sumy dwóch dowolnych kątów mamy

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+iy_1+x_2+iy_2} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}e^{iy_1}e^{iy_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \end{aligned}$$

Ad. (3) Niech $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^{x+iy}| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = \\ &= |e^x| |\cos y + i \sin y| = e^x \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = e^x. \end{aligned}$$

Ad. (4) Z własności (3) dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $|e^z| = e^x$, gdzie $x = \operatorname{Re} z$. Jednocześnie, dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $e^x > 0$. Zatem dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ mamy $|e^z| > 0$, a więc $e^z \neq 0$.

Ad. (5) Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ z własności (2) oraz wzoru Eulera mamy

$$e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(\cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi)) = e^z.$$

Ad. (6) Dla liczby $0 \in \mathbb{C}$ mamy

$$e^0 = e^{0+i0} = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$$

Ad. (7) Z własności (6) dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 \iff e^z = e^0.$$

Z własności (5)

$$z = 0 + 2k\pi i,$$

a więc

$$z = 2k\pi i$$

dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$. □

Warto zwrócić uwagę, że omawiana funkcja wykładnicza określona na dziedzinie zespolonej ma kilka własności, jak np. okresowość czy fakt, że jedyną wartością, której nie przyjmuje jest zero, które w istotny sposób odróżniają ją od funkcji wykładniczej określonej na dziedzinie rzeczywistej.

Zauważmy jeszcze, że zastępując w postaci trygonometrycznej liczby zespolonej, zgodnie ze wzorem Eulera, wyrażenie $\cos \varphi + i \sin \varphi$ przez $e^{i\varphi}$ możemy liczbę zespoloną zapisać w postaci nazywanej postacią wykładniczą, mianowicie

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Postacią wykładniczą liczby zespolonej z nazywamy postać

$$z = |z|e^{i\varphi},$$

gdzie φ jest dowolnym argumentem liczby z .

Poniżej podajemy przykłady pokazujące działanie odwzorowania $z \rightarrow e^z$ na punkty płaszczyzny zespolonej.

Przykład 2.2. a) Niech dana będzie prosta l opisana równaniem

$$l : z = 2 + iy, \quad y \in \mathbb{R}.$$

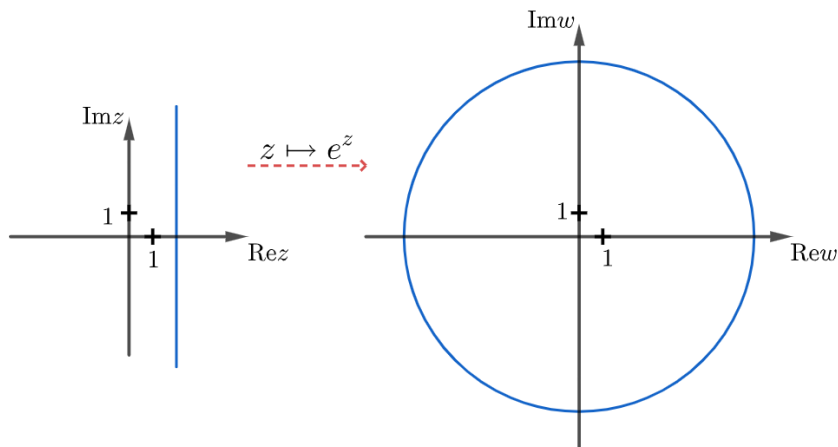
Odwzorowanie $z \mapsto e^z$ przeprowadza punkty prostej l na punkty leżące na okręgu o środku w punkcie $w_0 = 0$ i promieniu e^2 , (rysunek 2.4), bowiem

$$e^z = e^{2+iy} = e^2 e^{iy} = e^2(\cos y + i \sin y).$$

Położmy $w = e^2(\cos y + i \sin y)$. Wówczas

$$\begin{cases} \operatorname{Re} w = e^2 \cos y, \\ \operatorname{Im} w = e^2 \sin y, \end{cases}$$

czyli $(\operatorname{Re} w)^2 + (\operatorname{Im} w)^2 = e^4$.



Rysunek 2.4: Przykład 2.2. (a)

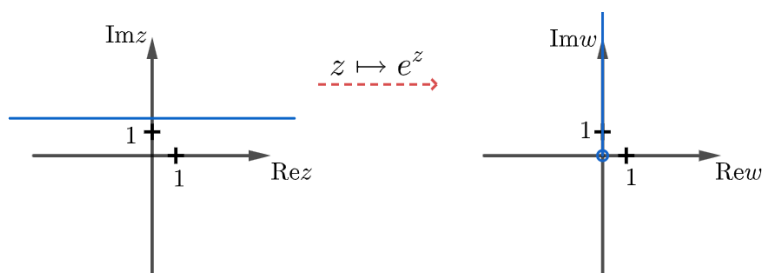
b) Weźmy teraz prostą k opisaną równaniem

$$k : z = x + \frac{\pi}{2}i, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Odwzorowanie $z \mapsto e^z$ przeprowadza punkty prostej k na punkty leżące na dodatniej części osi urojonej $\text{Im } w$, (rysunek 2.5). Mamy bowiem

$$e^z = e^{x + \frac{\pi}{2}i} = e^x e^{\frac{\pi}{2}i} = e^x i.$$

Położmy $w = e^x i$. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy $e^x > 0$, a więc odwzorowanie $z \rightarrow e^z$ istotnie przeprowadza punkty rozważanej prostej k na punkty leżące na dodatniej części osi urojonej $\text{Im } w$.



Rysunek 2.5: Przykład 2.2. (b)

Zauważmy, że odwzorowanie $z \mapsto e^z$ nie przeprowadzi żadnych punktów płaszczyzny zespolonej na punkt $z_0 = 0$.

Ćwiczenie 2.2. Sprawdzić, na jakie punkty płaszczyzny zespolonej przeprowadza odwzorowanie $z \rightarrow e^z$ punkty leżące na prostej

$$l : z = \ln 2 + iy, \quad \text{gdzie } y \in \mathbb{R}.$$

Funkcje trygonometryczne

Funkcje trygonometryczne sinus i cosinus zmiennej zespolonej z definiujemy odpowiednio wzorami

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Przedstawimy teraz własności zdefiniowanych wyżej funkcji trygonometrycznych zmiennej zespolonej o wartościach zespolonych. Niektóre z własności funkcji trygonometrycznych określonych w dziedzinie zespolonej są analogiczne do własności funkcji trygonometrycznych określonych w dziedzinie rzeczywistej, jak np. jedynka trygonometryczna czy okresowość. Istotną różnicą jest, że w przypadku zespolonym jedynka trygonometryczna nie po- ciąga za sobą ograniczoności funkcji sinus ani cosinus.

Własności funkcji trygonometrycznych

Twierdzenie 2.3.

(1) Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$

(2) Istnieją takie $z \in \mathbb{C}$, że

$$|\sin z| > 1 \quad \text{lub} \quad |\cos z| > 1.$$

(3) Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ oraz dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$

$$\sin(z + 2k\pi) = \sin z, \quad \cos(z + 2k\pi) = \cos z.$$

(4) Niech $z \in \mathbb{C}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$. Wówczas

$$\sin z = 0 \iff z = k\pi, \quad \cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Dowód. Ad. (1) Niech $z \in \mathbb{C}$. Bezpośrednio z definicji funkcji sinus oraz cosinus mamy

$$\begin{aligned}\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{4} (e^{2iz} - 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}) + \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2e^{iz}e^{-iz} + e^{-2iz}) \\ &= \frac{1}{4} (-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}) + \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}) = 1.\end{aligned}$$

Ad. (2) Weźmy $z = \frac{\pi}{2} - i$. Wówczas

$$\begin{aligned}|\sin z| &= \frac{|e^{i(\frac{\pi}{2}-i)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}-i)}|}{|2i|} = \frac{|e^{i\frac{\pi}{2}+1} - e^{-i\frac{\pi}{2}-1}|}{2} \\ &= \frac{|ie + ie^{-1}|}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2} > 1.\end{aligned}$$

Ad. (3) Niech $k \in \mathbb{Z}$. Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ z definicji funkcji sinus mamy

$$\begin{aligned}\sin(z + 2k\pi) &= \frac{e^{i(z+2k\pi)} - e^{-i(z+2k\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz+2k\pi i} - e^{-iz-2k\pi i}}{2i} \\ &= \frac{e^{iz}e^{2k\pi i} - e^{-iz}e^{-2k\pi i}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin z.\end{aligned}$$

Analogicznie pokazujemy, że okresem funkcji cosinus jest $2k\pi$.

Ad. (4) Niech $z \in \mathbb{C}$. Wówczas z definicji funkcji sinus oraz okresowości funkcji eksponencjalnej mamy

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow iz = -iz + 2k\pi i \Leftrightarrow z = k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Z definicji funkcji cosinus mamy

$$\cos z = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -e^{-iz}.$$

Przedstawiając liczbę $z = -1$ w postaci wykładniczej $-1 = e^{i\pi}$ otrzymujemy

$$e^{iz} = e^{i\pi}e^{-iz} \Leftrightarrow e^{iz} = e^{i\pi-iz} \Leftrightarrow iz = i\pi - iz + 2k\pi i \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$. □

Związki między funkcjami trygonometrycznymi a wykładniczą

Twierdzenie 2.4. *Niech $z \in \mathbb{C}$. Wówczas:*

$$(1) e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$(2) e^{-iz} = \cos z - i \sin z.$$

Dowód.

Niech $z \in \mathbb{C}$. Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{oraz} \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Stąd

$$2 \cos z = e^{iz} + e^{-iz} \quad \text{oraz} \quad 2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz}.$$

Dodając i odejmując stronami ostatnie dwa równania otrzymujemy

$$2 \cos z + 2i \sin z = 2e^{iz} \quad \text{oraz} \quad 2 \cos z - 2i \sin z = 2e^{-iz},$$

a więc

$$\cos z + i \sin z = e^{iz} \quad \text{oraz} \quad \cos z - i \sin z = e^{-iz}.$$

□

Funkcje hiperboliczne

Funkcje hiperboliczne sinus oraz cosinus zmiennej zespolonej z definiujemy odpowiednio wzorami

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Własności funkcji hiperbolicznych

Twierdzenie 2.5. *Niech $z \in \mathbb{C}$. Wówczas:*

$$(1) \cosh^2 z - \sinh^2 z = 1,$$

$$(2) \cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \sin(iz).$$

Zauważmy, że definicje funkcji hiperbolicznych w dziedzinie zespolonej są analogiczne do definicji tych funkcji w dziedzinie rzeczywistej. Analogiczny jest też wzór na jedynekę hiperboliczną.

Przykład 2.3. Niech dana będzie prosta l opisana równaniem $z = \frac{\pi}{4} + iy$, $y \in \mathbb{R}$. Rozważmy odwzorowanie $z \mapsto \cos z$ dla $z \in l$. Wówczas

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+iy)} + e^{-i(\frac{\pi}{4}+iy)}}{2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-y} + e^{-i\frac{\pi}{4}}e^y}{2} \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-y} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^y}{2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{-y} + e^y) - i\frac{\sqrt{2}}{2}(e^y - e^{-y})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh y - i\frac{\sqrt{2}}{2} \sinh y. \end{aligned}$$

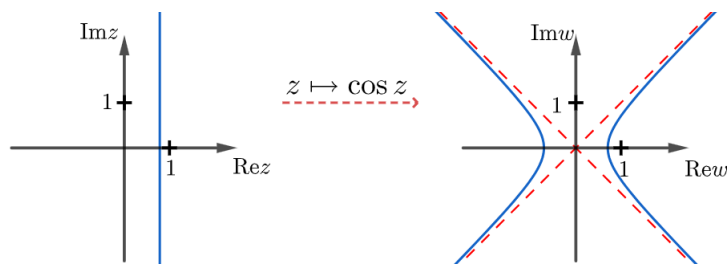
Przyjmijmy $w = u - iv$, gdzie

$$u = \frac{\sqrt{2}}{2} \cosh y, \quad v = \frac{\sqrt{2}}{2} \sinh y.$$

Z własności (1), twierdzenie 2.5., zachodzi

$$u^2 - v^2 = \frac{1}{2} \cosh^2 y - \frac{1}{2} \sinh^2 y = \frac{1}{2}.$$

Zatem prosta o równaniu $z = \frac{\pi}{4} + iy$ przy odwzorowaniu $z \mapsto \cos z$ przechodzi w hiperbolę o wierzchołkach w punktach $w_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, (rysunek 2.6).



Rysunek 2.6: Przykład 2.3.

Logarytm naturalny liczby zespolonej

Logarytmem naturalnym liczby zespolonej $z \neq 0$, który oznaczamy $\ln z$, nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość

$$e^w = z.$$

Wzór na logarytm naturalny

Twierdzenie 2.6. *Każda liczba $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ma nieskończenie wiele logarytmów naturalnych i są one określone wzorami*

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Logarytm główny liczby zespolonej

Logarytmem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy liczbę określoną wzorem

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Przykład 2.4. Obliczymy logarytm główny liczby $z_1 = 1$ oraz $z_2 = -1$. Dla liczby z_1 mamy $|z_1| = 1$ oraz $\operatorname{Arg} z_1 = 0$, dla z_2 natomiast $|z_2| = 1$ oraz $\operatorname{Arg} z_2 = \pi$, a więc

$$\operatorname{Ln}(1) = \ln 1 + 0 = 0 \text{ oraz } \operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + \pi i = \pi i.$$

Ponadto zauważmy, że

$$\operatorname{Ln}[(-1)(-1)] = \operatorname{Ln} 1 = 0 \text{ oraz } \operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}(-1) = 2\pi i,$$

czyli

$$\operatorname{Ln}[(-1)(-1)] \neq \operatorname{Ln}(-1) + \operatorname{Ln}(-1).$$

Zatem w dziedzinie zespolonej nie jest prawdą, że logarytm główny iloczynu argumentów jest równy sumie logarytmów głównych tych argumentów. Nie zachodzi również, że $\operatorname{Ln}(z^n) = n \operatorname{Ln} z$ dla $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Otrzymaliśmy bowiem

$$\operatorname{Ln}(-1)^2 = \operatorname{Ln} 1 = 0, \text{ a } 2 \operatorname{Ln}(-1) = 2\pi i.$$

Ćwiczenie 2.3. Obliczyć logarytm główny liczby $z = i$.

Każdą funkcję zespoloną $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$, zmiennej zespolonej $z = x + iy$, możemy przedstawić w postaci

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

gdzie $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Funkcje rzeczywiste u i v nazywamy odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną funkcji f i oznaczamy $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$.

A więc każdej funkcji zespolonej zmiennej zespolonej odpowiadają dwie funkcje rzeczywiste dwóch zmiennych rzeczywistych.

Przykład 2.5. Wyznaczymy część rzeczywistą oraz urojoną funkcji f zmiennej $z = x + iy \in \mathbb{C}$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, jeśli:

$$\text{a) } f(z) = z, \quad \text{b) } f(z) = e^z, \quad \text{c) } f(z) = \cos z.$$

Ad. a) Dla funkcji liniowej $f(z) = z$ mamy $z = x + iy$, więc część rzeczywista $u(x, y) = x$, zaś urojona $v(x, y) = y$.

Ad. b) Dla funkcji wykładniczej $f(z) = e^z$ mamy

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + i e^x \sin y,$$

więc część rzeczywista $u(x, y) = e^x \cos y$, zaś urojona $v(x, y) = e^x \sin y$.

Ad. c) Dla funkcji trygonometrycznej $f(z) = \cos z$ mamy

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \frac{1}{2} (e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) = \frac{1}{2} (e^{ix} e^{-y} + e^{-ix} e^y) \\ &= \frac{1}{2} ((\cos x + i \sin x) e^{-y} + (\cos x - i \sin x) e^y), \end{aligned}$$

więc część rzeczywista $u(x, y) = \frac{1}{2} \cos x (e^{-y} + e^y)$, zaś urojona $v(x, y) = \frac{1}{2} \sin x (e^{-y} - e^y)$.

Ćwiczenie 2.4. Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną funkcji $f(z) = \sin z$.

2.2. Ciągi liczbowe o wyrazach zespolonych

Ciąg zespolony

Ciągiem o wyrazach zespolonych nazywamy odwzorowanie zbioru \mathbb{N} w zbiór \mathbb{C} .

Ciągi zespolone oznaczamy $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lub krótko (z_n) .

Ciąg zbieżny

Mówimy, że liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ jest granicą ciągu $(z_n) \subset \mathbb{C}$, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|z_n - z_0| < \varepsilon$, gdy $n > n_0$. Ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$, którego granicą jest liczba $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy ciągiem zbieżnym.

Geometrycznie fakt, że granicą ciągu zespolonego (z_n) jest liczba z_0 oznacza, że we wnętrzu koła o środku w punkcie z_0 i dowolnie małym promieniu ε leżą prawie wszystkie wyrazy tego ciągu, tzn. wszystkie z pominięciem skończonej liczby wyrazów.

Fakt posiadania przez ciąg (z_n) granicy równej z_0 oznaczamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z_0 \quad \text{lub krótko} \quad z_n \rightarrow z_0.$$

Przykład 2.6. Pokażemy z definicji, że liczba $z_0 = 0$ jest granicą ciągu $z_n = \frac{i^n}{n}$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Szukamy takiej liczby $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla każdego $n > n_0$ spełniona będzie nierówność

$$\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Z definicji oraz własności modułu mamy

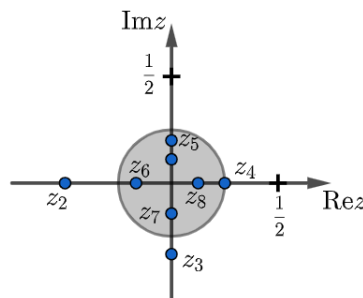
$$\left| \frac{i^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{i^n}{n} \right| = \frac{|i|^n}{|n|} = \frac{1}{n}.$$

A zatem

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Możemy więc za n_0 przyjąć dowolną liczbę naturalną, która spełnia warunek $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Otrzymaliśmy, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|z_n - z_0| < \varepsilon$, gdy $n > n_0$, a więc granicą ciągu $z_n = \frac{i^n}{n}$ jest liczba $z_0 = 0$.

We wnętrzu koła o środku $z_0 = 0$ i dowolnie małym promieniu leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (z_n) , (rysunek 2.7).



Rysunek 2.7: Przykład 2.6.

Ćwiczenie 2.5. Wykazać z definicji, że granicą ciągu $z_n = 2 - \frac{3i}{n}$ jest liczba $z_0 = 2$.

Bezpośrednio z definicji granicy ciągu zbieżnego wynika

Granica ciągu równa 0

Twierdzenie 2.7. *Jeżeli $(z_n) \subset \mathbb{C}$, to*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0.$$

Zauważmy, że po lewej stronie równoważności mamy granicę ciągu zespolonego, a po prawej granicę ciągu liczb rzeczywistych.

Przykład 2.7. Wykażemy, że ciąg $z_n = \left(\frac{2+i}{5}\right)^n$ ma granicę równą zeru. Mamy

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \left(\frac{2+i}{5}\right)^n \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{2+i}{5} \right|^n \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{|2+i|}{|5|} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{5}}{5} \right)^n = 0, \end{aligned}$$

a więc z twierdzenia 2.7. wynika, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$.

Ćwiczenie 2.6. Wykazać, że ciąg $z_n = \frac{e^{in}}{3^n}$ ma granicę równą zeru.

Granice ciągów o wyrazach zespolonych w przypadku granic sumy, różnicy, iloczynu, ilorazu, mają własności analogiczne do własności ciągów o wyrazach rzeczywistych. Przy obliczaniu granic ciągów o wyrazach zespolonych można zastąpić ciąg o wyrazach zespolonych dwoma ciągami o wyrazach rzeczywistych, o czym mówi poniższe twierdzenie

Warunek konieczny i wystarczający zbieżności ciągu

Twierdzenie 2.8. *Niech $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby ciąg $(z_n = x_n + iy_n) \subset \mathbb{C}$ był zbieżny do granicy $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ jest, aby ciągi $(x_n), (y_n)$ były jednocześnie zbieżne odpowiednio do x_0 oraz y_0 .*

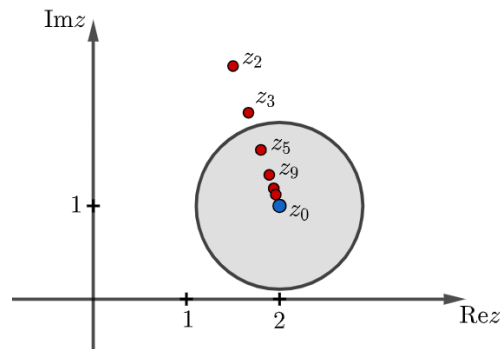
Przykład 2.8. Weźmy ciąg $z_n = \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 + \frac{3}{n}\right)i$. Wówczas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$$

oraz

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right) = 1.$$

Zatem ciąg (z_n) jest zbieżny do $z_0 = 2 + i$. Zauważmy, że we wnętrzu koła o środku w punkcie $z_0 = 2 + i$ i dowolnie małym promieniu leżą prawie wszystkie wyrazy ciągu (z_n) , (rysunek 2.8).



Rysunek 2.8: Przykład 2.8.

Ćwiczenie 2.7. Obliczyć granicę ciągu

$$z_n = e^{-n} + i \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}.$$

Ciąg zespolony rozbieżny

Mówimy, że ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$ ma granicę równą ∞ , jeżeli dla dowolnej liczby $M > 0$ istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $|z_n| > M$, gdy $n > n_0$. Ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$, którego granicą jest ∞ , nazywamy ciągiem rozbieżnym.

Geometrycznie fakt, że ciąg zespolony (z_n) jest rozbieżny oznacza, że prawie wszystkie wyrazy tego ciągu znajdują się na zewnątrz koła o dowolnym promieniu i środku w punkcie $z_0 = 0$.

Granica ciągu równa ∞

Twierdzenie 2.9. Jeżeli ciąg $(z_n) \subset \mathbb{C}$, to

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty.$$

W zbiorze \mathbb{C} granica ∞ oznacza, że przy $n \rightarrow +\infty$ odległość punktu z_n od punktu $z_0 = 0$, a więc długość wektora z_n , dąży do $+\infty$.

Płaszczyzna Gaussa

Płaszczyznę zespoloną uzupełnioną o punkt ∞ nazywamy płaszczyzną Gaussa.

Przykład 2.9. Wykażemy, że ciąg $z_n = (1+i)^n$ ma granicę równą ∞ . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |(1+i)^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |1+i|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2})^n = +\infty,$$

a więc z twierdzenia 2.9. wynika, że $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = \infty$.

Ćwiczenie 2.8. Wykazać, że ciąg $z_n = \frac{n^2+i}{n}$ ma granicę równą ∞ .

Rozpatrzmy jeszcze następujący przykład pokazujący, że przy badaniu granic ciągów należy zwracać uwagę, czy rozpatrywany ciąg jest ciągiem o wyrazach zespolonych czy rzeczywistych.

Przykład 2.10. Niech $z_n = n(-1)^n$ będzie ciągiem o wyrazach zespolonych. Korzystając z twierdzenia 2.9. pokażemy, że granica tego ciągu jest równa ∞ . Mamy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |n(-1)^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |n| \cdot |-1|^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty,$$

zatem

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(-1)^n = \infty.$$

Zauważmy, że jeżeli ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = n(-1)^n$ będziemy rozpatrywali jako ciąg o wyrazach rzeczywistych, to granica takiego ciągu nie istnieje. Istotnie. Rozważmy podciągi (a_{2k}) oraz (a_{2k+1}) , $k \in \mathbb{N}$, ciągu (a_n) . Wówczas

$$a_{2k} = k, \quad a_{2k+1} = -k,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k} = +\infty \neq -\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{2k+1}.$$

2.3. Granica i ciągłość funkcji zmiennej zespolonej

Otoczenie punktu

Otoczeniem punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy zbiór

$$\{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}, \quad \text{gdzie } r > 0.$$

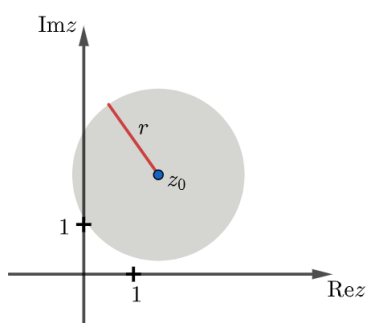
Sąsiedztwo punktu

Sąsiedztwem punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy zbiór

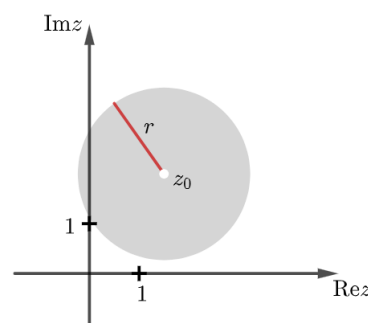
$$\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z - z_0| < r\}, \quad \text{gdzie } r > 0.$$

Sąsiedztwo punktu jest też w analizie zespolonej nazywane otoczeniem pierścieniowym.

W interpretacji geometrycznej otoczenie punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ przedstawia wnętrze koła o środku z_0 i promieniu r , (rysunek 2.9), natomiast sąsiedztwo punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ przedstawia wnętrze koła o środku z_0 i promieniu r z wyłączeniem punktu z_0 , (rysunek 2.10).



Rysunek 2.9: Otoczenie punktu



Rysunek 2.10: Sąsiedztwo punktu

Punkt skupienia i punkt izolowany zbioru

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy punktem skupienia zbioru $D \subset \mathbb{C}$, jeżeli w każdym jego sąsiedztwie znajdują się punkty tego zbioru. Punkt $z_0 \in D$, który nie jest punktem skupienia zbioru D , nazywamy punktem izolowanym tego zbioru.

Niech funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$, oraz niech z_0 będzie punktem skupienia zbioru D .

Granica funkcji

Mówimy, że liczba $g \in \mathbb{C}$ jest granicą funkcji f w punkcie z_0 , jeżeli dla każdego ciągu punktów (z_n) zbioru D różnych od z_0 relacja $z_n \rightarrow z_0$ pociąga za sobą relację $f(z_n) \rightarrow g$.

Niech teraz funkcja $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$, oraz niech $z_0 \in D$.

Ciągłość funkcji

- Mówimy, że funkcja f jest ciągła w punkcie z_0 , jeżeli zachodzi jeden z dwóch przypadków:

- 1) punkt z_0 jest punktem izolowanym zbioru D ,
- 2) punkt z_0 jest punktem skupienia zbioru D oraz

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0).$$

- Mówimy, że funkcja f jest ciągła w zbiorze D , jeśli jest ciągła w każdym punkcie tego zbioru.

Przykład 2.11. Pokażemy z definicji, że funkcja $f(z) = \operatorname{Re}z$ jest ciągła w zbiorze \mathbb{C} . Weźmy dowolne $z_0 \in \mathbb{C}$. Niech (z_n) będzie ciągiem o wyrazach zespolonych różnych od z_0 i zbieżnym do z_0 . Pokażemy, że $f(z_n)$ zbiega do $f(z_0)$. Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolną liczbą. Z założenia ciąg (z_n) jest zbieżny do z_0 , a więc istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że dla dowolnego $n > n_0$ zachodzi $|z_n - z_0| < \varepsilon$. Zauważmy, że $|\operatorname{Re}z| \leq |z|$, zatem $|\operatorname{Re}(z_n - z_0)| < \varepsilon$. Stąd

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_0)| < \varepsilon$$

dla dowolnego $n > n_0$, a więc $f(z_n) = \operatorname{Re}(z_n)$ zbiega do $f(z_0) = \operatorname{Re}(z_0)$, czyli

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \operatorname{Re}z = \operatorname{Re}(z_0).$$

Z dowolności z_0 mamy ciągłość funkcji $f(z) = \operatorname{Re}z$ w zbiorze \mathbb{C} .

Przy sprawdzaniu ciągłości funkcji zespolonej możemy wykorzystać

Warunek konieczny i wystarczający ciągłości funkcji

Twierdzenie 2.10. *Funkcja zespolona $f = u + iv$ jest ciągła w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, wtedy i tylko wtedy, gdy jej część rzeczywista u oraz urojona v są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) .*

Przykład 2.12. Pokażemy, że funkcja $f(z) = \bar{z}$ jest ciągła na \mathbb{C} . Przedstawiając funkcję f w postaci $f(z) = x - iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, mamy że jej część rzeczywista $u(x, y) = x$, natomiast urojona $v(x, y) = -y$. Funkcje u oraz v są funkcjami ciągłymi na \mathbb{R}^2 . Zatem z twierdzenia 2.10. wynika ciągłość funkcji f na \mathbb{C} .

Ćwiczenie 2.9. Wykazać, że funkcja $f(z) = z^2 + iz$ jest ciągła na \mathbb{C} .

2.4. Pochodna funkcji zmiennej zespolonej

Zbiór otwarty

Zbiór $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy zbiorem otwartym, jeżeli każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym, tj. jeżeli dla każdego punktu $z_0 \in D$ istnieje otoczenie, które jest zawarte w zbiorze D .

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, oraz niech $z_0 \in D$.

Pochodna funkcji

- Jeżeli istnieje granica ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z},$$

i jest ona różna od ∞ , to granicę tę nazywamy pochodną funkcji f w punkcie z_0 i oznaczamy $f'(z_0)$ lub $\frac{d}{dz}f(z_0)$.

- Mówimy, że funkcja f ma pochodną w zbiorze D , gdy ma pochodną w każdym punkcie tego zbioru.

Definicja pochodnej funkcji zespolonej zmiennej zespolonej w punkcie jest formalnie taka sama jak definicja pochodnej funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej (różnica polega na tym, że przyrost Δz dążąc do zera, może przebiegać dowolne wartości zespolone), stąd w taki sam sposób dowodzi się reguł formalnego różniczkowania. Słuszne są więc twierdzenia o pochodnej sumy, iloczynu, ilorazu, funkcji złożonej oraz odwrotnej (przy założeniu, że odpowiednie funkcje są różniczkowalne), znane z rachunku różniczkowego funkcji rzeczywistych. Dla funkcji zespolonej zmiennej zespolonej prawdziwy pozostaje również warunek konieczny istnienia pochodnej w punkcie, mianowicie

Warunek konieczny istnienia pochodnej

Twierdzenie 2.11. *Jeżeli funkcja zespolona f jest określona na pewnym otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ i ma w punkcie z_0 pochodną, to jest ciągła w tym punkcie.*

Dowód. Załóżmy, że w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ istnieje pochodna funkcji zespolonej f . Kładąc $\Delta z = z - z_0$ otrzymujemy

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Mamy również

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0).$$

A zatem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = f'(z_0) \cdot 0.$$

Stąd

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) - f(z_0)) = 0,$$

czyli

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

co oznacza ciągłość funkcji f w punkcie z_0 . □

Uwaga. Ciągłość funkcji w punkcie jest warunkiem koniecznym istnienia pochodnej w tym punkcie. Implikacja odwrotna jest fałszywa. Istnieją funkcje ciągłe, które nie mają pochodnej, np. funkcja $f(z) = \operatorname{Re}z$ jest funkcją ciągłą na \mathbb{C} , ale w żadnym punkcie nie ma pochodnej.

Istotnie. W przykładzie (2.11.) pokazaliśmy, że funkcja $f(z) = \operatorname{Re}z$ jest ciągła na \mathbb{C} . Weźmy dowolne $z_0 \in \mathbb{C}$. Pokażemy, że funkcja ta nie ma pochodnej w żadnym punkcie. Niech $z_0 = x_0 + iy_0$, gdzie $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, gdzie $\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$. Zbadajmy granicę ilorazu różnicowego

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z_0 + \Delta z) - \operatorname{Re}(z_0)}{\Delta z}.$$

Przyrost Δz dąży do zera przez dowolne wartości zespolone. Niech więc, w szczególności, $\Delta z = \Delta x$. Wówczas

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z_0 + \Delta z) - \operatorname{Re}(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(x_0 + iy_0 + \Delta x) - \operatorname{Re}(x_0 + iy_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Z drugiej strony, kładąc $\Delta z = i\Delta y$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(z_0 + \Delta z) - \operatorname{Re}(z_0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Re}(x_0 + iy_0 + i\Delta y) - \operatorname{Re}(x_0 + iy_0)}{i\Delta y} = \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{x_0 - x_0}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

A zatem funkcja $f(z) = \operatorname{Re}z$ nie ma pochodnej w żadnym punkcie zbioru \mathbb{C} .

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym.

Równania Cauchy'ego-Riemanna

Twierdzenie 2.12. *Jeżeli funkcja zespolona $f = u + iv$, gdzie $u = \operatorname{Re}f$, $v = \operatorname{Im}f$, ma pochodną w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$, gdzie $x_0 = \operatorname{Re}z_0$, $y_0 = \operatorname{Im}z_0$, to istnieją w punkcie (x_0, y_0) pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji u oraz v spełniające równania:*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

nazywane równaniami Cauchy'ego-Riemanna.

Dowód. Niech $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, gdzie $\Delta x = \operatorname{Re}(\Delta z)$, $\Delta y = \operatorname{Im}(\Delta z)$. Załóżmy, że w punkcie z_0 istnieje pochodna funkcji f . Wówczas

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Przyrost Δz dąży do zera przez dowolne wartości zespolone. Zatem, w szczególności, kładąc $\Delta z = \Delta x$ i uwzględniając, że $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ oraz $z_0 = x_0 + iy_0$, mamy

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + iv(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Z drugiej strony, kładąc $\Delta z = i\Delta y$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + iv(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} + \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right) \\ &= -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Po porównaniu części rzeczywistych i części urojonych otrzymujemy równania Cauchy'ego Riemanna. \square

Uwaga. Spełnienie warunków Cauchy'ego Riemanna nie gwarantuje istnienia pochodnej funkcji w danym punkcie, np. dla funkcji

$$f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re}z \cdot \operatorname{Im}z|}$$

w punkcie $z_0 = 0$ są spełnione równania Cauchy'ego Riemanna, ale funkcja nie ma w tym punkcie pochodnej.

Istotnie. Niech $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re}z \cdot \operatorname{Im}z|}$, gdzie $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas $\sqrt{|\operatorname{Re}z \cdot \operatorname{Im}z|} = \sqrt{|xy|}$. Połóżmy

$$u(x, y) = \operatorname{Re}f(z) = \sqrt{|xy|}, \quad v(x, y) = \operatorname{Im}f(z) = 0.$$

Mamy

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(0 + \Delta x)0} - 0}{\Delta x} = 0, & \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0(0 + \Delta y)} - 0}{\Delta y} = 0, & \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0),$$

a więc funkcje u, v spełniają w punkcie $(0, 0)$ równania Cauchy'ego-Riemanna. Sprawdźmy teraz, czy istnieje w punkcie $z_0 = 0$ granica ilorazu różnicowego

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re}(\Delta z) \cdot \operatorname{Im}(\Delta z)|} - 0}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re}(\Delta z) \cdot \operatorname{Im}(\Delta z)|}}{\Delta z}. \end{aligned}$$

Niech $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Wówczas

$$\sqrt{|\operatorname{Re}(\Delta z) \cdot \operatorname{Im}(\Delta z)|} = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}.$$

Kładąc $\Delta x = \Delta y$ mamy $\Delta z = \Delta x + i\Delta x$, a więc

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re}(\Delta z) \cdot \operatorname{Im}(\Delta z)|}}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x \cdot \Delta x}}{(1 + i)\Delta x} = \frac{1}{1 + i} = \frac{1 - i}{2}.$$

Kładąc $\Delta x = 4\Delta y$ mamy $\Delta z = 4\Delta y + i\Delta y$, a więc

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\operatorname{Re}(\Delta z) \cdot \operatorname{Im}(\Delta z)|}}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4\Delta y \cdot \Delta y}}{(4 + i)\Delta y} = \frac{2}{4 + i} = \frac{8 - 4i}{5}.$$

A zatem $f'(0)$ nie istnieje.

Przy dodatkowym warunku ciągłości pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu zachodzi twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2.12.

Warunek wystarczający istnienia pochodnej funkcji zespolonej

Twierdzenie 2.13. Niech $f = u + iv$, gdzie $u = \operatorname{Re}f$, $v = \operatorname{Im}f$. Jeżeli funkcje u, v mają pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w pewnym otoczeniu punktu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, pochodne te są ciągłe w tym punkcie oraz spełniają w nim równania Cauchy'ego-Riemanna, to funkcja f ma w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ pochodną, przy czym

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Podamy teraz wzory na pochodne omawianych w tym rozdziale funkcji zespolonych, a następnie udowodnimy wybrane z tych wzorów korzystając z przedstawionych wcześniej zależności.

Pochodne - wzory podstawowe

Twierdzenie 2.14. Dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ zachodzi:

- (1) $(z^n)' = nz^{n-1}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$,
- (2) $(e^z)' = e^z$,
- (3) $(\cos z)' = -\sin z$,
- (4) $(\sin z)' = \cos z$,
- (5) $(\operatorname{Log} z)' = \frac{1}{z}$, przy $\operatorname{Arg} z \neq 0$.

Dowód. Ad. (1) Niech $f(z) = z$, gdzie $z \in \mathbb{C}$. Mamy

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 1 = 1.$$

Stąd oraz z definicji pochodnej $(z)' = 1$, co dowodzi wzoru (1) dla $n = 1$. Załóżmy teraz, że wzór (1) jest prawdziwy dla liczby $k \in \mathbb{N}$, tzn.

$$(z^k)' = kz^{k-1}.$$

Stąd oraz z reguł różniczkowania iloczynu funkcji

$$\begin{aligned}(z^{k+1})' &= (z^k \cdot z)' = (z^k)' \cdot z + z^k \cdot (z)' = kz^{k-1} \cdot z + z^k \\ &= kz^k + z^k = (k+1)z^k.\end{aligned}$$

Zatem wzór (1) jest prawdziwy dla liczby $(k+1) \in \mathbb{N}$. Na mocy indukcji matematycznej wzór (1) jest prawdziwy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Ad. (2) Niech $z \in \mathbb{C}$. Z definicji

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y,$$

gdzie $x, y \in \mathbb{R}$. Połóżmy

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mamy

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos y, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -e^x \sin y, \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) &= e^x \sin y, & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) &= e^x \cos y.\end{aligned}$$

Pochodne cząstkowe funkcji u i v są ciągłe na całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 i spełniają na \mathbb{R}^2 równania Cauchy'ego-Riemanna, tj.,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zatem z twierdzenia 2.13. istnieje pochodna funkcji e^z dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, przy czym

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z.$$

Ad. (3) Z definicji $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ dla $z \in \mathbb{C}$. Stąd, korzystając ze wzoru (2) oraz reguł różniczkowania funkcji złożonej

$$(\cos z)' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = \frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\sin z.$$

Ad. (5) Niech $\text{Arg} z \neq 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}e^{\text{Log} z} &= e^{\ln|z| + i\text{Arg} z} = e^{\ln|z|} \cdot e^{i\text{Arg} z} = e^{\ln|z|}(\cos(\text{Arg} z) + i \sin(\text{Arg} z)) \\ &= |z|(\cos(\text{Arg} z) + i \sin(\text{Arg} z)) = z.\end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{d}{dz} (e^{\operatorname{Log} z}) = 1.$$

Mamy również, z reguły różniczkowania funkcji złożonej, że

$$\frac{d}{dz} (e^{\operatorname{Log} z}) = e^{\operatorname{Log} z} \cdot \frac{d}{dz} (\operatorname{Log} z).$$

A więc

$$1 = z \cdot \frac{d}{dz} (\operatorname{Log} z).$$

Stąd

$$\frac{d}{dz} (\operatorname{Log} z) = \frac{1}{z}.$$

□

Ćwiczenie 2.10. Korzystając z twierdzenia 2.13. wykazać, że dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzi $(\sin z)' = \cos z$.

2.5. Funkcja holomorficzna

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym, oraz niech $z_0 \in D$.

Funkcja holomorficzna

- Mówimy, że funkcja f jest holomorficzna w punkcie z_0 , jeżeli ma pochodną w pewnym otoczeniu punktu z_0 .
- Mówimy, że funkcja f jest holomorficzna w zbiorze D , jeżeli jest holomorficzna w każdym punkcie tego zbioru.

Przykład 2.13. Pokażemy, że funkcja $f(z) = 2z + 1$ jest holomorficzna w każdym punkcie $z \in \mathbb{C}$. Niech $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$2z + 1 = 2(x + iy) + 1 = 2x + 1 + 2yi.$$

Kładąc $u = 2x + 1$, $v = 2y$ mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2 = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$. Pochodne cząstkowe funkcji u oraz v , będących odpowiednio częścią rzeczywistą oraz urojoną funkcji f , są ciągłe na całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 oraz spełniają na niej równania Cauchy'ego-Riemanna, zatem z twierdzenia 2.13. funkcja $f(z) = 2z + 1$ posiada pochodną w każdym punkcie $z \in \mathbb{C}$, a więc jest holomorficzną na całej płaszczyźnie \mathbb{C} .

Przykład 2.14. Pokażemy, że funkcja $f(z) = z \operatorname{Re} z$ nigdzie nie jest holomorficzną. Funkcja f jest określona dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$. Niech $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$f(z) = (x + iy) \operatorname{Re}(x + iy) = (x + iy)x = x^2 + ixy.$$

Pochodne cząstkowe funkcji

$$u(x, y) = x^2, \quad v(x, y) = xy,$$

będących odpowiednio częścią rzeczywistą i urojoną funkcji f , są równe

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = x \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = y.$$

Wyznamy punkty, w których spełnione są równania Cauchy'ego-Riemanna, tzn. punkty w których

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y),$$

a więc punkty, które spełniają warunki

$$2x = x \quad \text{oraz} \quad 0 = -y.$$

Stąd

$$x = 0 \quad \text{oraz} \quad y = 0.$$

Otrzymaliśmy więc, że funkcje u i v spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna tylko w jednym punkcie, punkcie $(0, 0)$, wobec tego z twierdzenia 2.13. mamy, że funkcja $f(z) = z \operatorname{Re} z$ jest różniczkowalna tylko w jednym punkcie, punkcie $z_0 = 0$. A zatem nigdzie nie jest holomorficzną.

Ćwiczenie 2.11. Pokazać, że funkcja $f(z) = \bar{z}$ nigdzie nie jest holomorficzną.

Funkcja harmoniczna

- Mówimy, że funkcja $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym, jest harmoniczna w punkcie $(x_0, y_0) \in \Omega$, gdy ma w pewnym otoczeniu tego punktu ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu oraz spełnia równanie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

nazywane równaniem Laplace'a.

- Mówimy, że funkcja u jest harmoniczna w zbiorze Ω , jeżeli jest harmoniczna w każdym punkcie tego zbioru.

Przykład 2.15. Sprawdźmy, że część rzeczywista $u(x, y) = e^x \cos y$ i urojona $v(x, y) = e^x \sin y$ funkcji $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, są funkcjami harmonicznymi na \mathbb{R}^2 . W tym celu obliczamy odpowiednie pochodne drugiego rzędu.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) &= e^x \cos y, & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) &= -e^x \cos y, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) &= e^x \sin y, & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) &= -e^x \sin y. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy, że pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji u oraz v spełniają na całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 równanie Laplace'a, a więc funkcje u oraz v są funkcjami harmonicznymi na \mathbb{R}^2 .

Ćwiczenie 2.12. Sprawdzić, że funkcja $u(x, y) = x^2 - y^2 + 2x - 4y$ jest funkcją harmoniczną na \mathbb{R}^2 .

Dla funkcji holomorficzej mamy

Warunek konieczny holomorficzości

Twierdzenie 2.15. *Jeżeli funkcja zespolona $f = u + iv$ jest holomorficzna w zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{C}$, to jej część rzeczywista u oraz urojona v są funkcjami harmonicznymi w tym zbiorze.*

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Część rzeczywista $u(x, y) = x$ oraz urojona $v(x, y) = -y$ funkcji $f(z) = \bar{z} = x - iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$, spełniają równanie Laplace'a na całej płaszczyźnie \mathbb{R}^2 , bowiem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0$$

dla dowolnych $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, natomiast funkcja f nigdzie nie jest holomorphyzna.

Przy dodatkowym założeniu, że zbiór $D \subset \mathbb{C}$ jest obszarem jednospójnym¹, zachodzi twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2.15.

Funkcja harmoniczna a funkcja holomorphyzna

Każda funkcja harmoniczna w obszarze jednospójnym $D \subset \mathbb{R}^2$ jest częścią rzeczywistą (urojoną) pewnej funkcji holomorphyznej.

Mając daną funkcję harmoniczną u możemy, wykorzystując równania Cauchy'ego-Riemanna, jednoznacznie wyznaczyć taką funkcję v , z dokładnością do stałej, że funkcja $f = u + iv$ ($f = v + iu$) jest funkcją holomorphyzną.

Przykład 2.16. Wyznamy funkcję $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorphyzną na płaszczyźnie \mathbb{C} wiedząc, że jej część urojona $v(x, y) = 2xy - y + 1$ oraz $f(1) = 3 + i$.

Zauważmy najpierw, że funkcja v spełnia równania Laplace'a, bowiem

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 2x - 1,$$

stąd

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x, y) = 0,$$

dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, a więc jest częścią urojoną jakiejś funkcji holomorphyznej. Funkcja f ma być holomorphyzna na płaszczyźnie \mathbb{C} , a więc jej część rzeczywista u oraz urojona v mają spełniać dla dowolnych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ równania Cauchy'ego-Riemanna

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

¹Definicja obszaru jednospójnego wraz z przykładami zostanie podana w rozdziale 5, str. 67

Korzystając z pierwszego z równań Cauchy'ego-Riemanna mamy

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x - 1.$$

Całkując powyższe równanie stronami względem x mamy

$$u(x, y) = x^2 - x + C(y),$$

gdzie $C(y)$ jest dowolną funkcją różniczkowalną zmiennej y . Różniczkując teraz funkcję u względem zmiennej y dostajemy

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = C'(y).$$

Korzystając teraz z drugiego z równań Cauchy'ego-Riemanna otrzymujemy

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Zatem

$$C'(y) = -2y,$$

czyli

$$C(y) = -y^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Ostatecznie

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - x - y^2 + C + i(2xy - y + 1) \\ &= (x + iy)^2 - (x + iy) + i + C = z^2 - z + i + C. \end{aligned}$$

Uwzględniając warunek $f(1) = 3 + i$ mamy $f(z) = z^2 - z + 3 + i$.

Ćwiczenie 2.13. Wyznaczyć funkcję $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ holomorficzną na płaszczyźnie \mathbb{C} wiedząc, że jej część rzeczywista $u(x, y) = x^2 - y^2 + 4x$ oraz $f(0) = 2i$.

Funkcje harmoniczne sprzężone

Dwie funkcje harmoniczne związane ze sobą równaniami Cauchy'ego-Riemanna nazywamy funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

Zatem część rzeczywista i urojona każdej funkcji holomorficzej są funkcjami harmonicznymi sprzężonymi.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Zbadać zbieżność następujących ciągów:

$$\begin{aligned} \text{a) } z_n &= 3 - \frac{i}{n^2}, & \text{b) } z_n &= 4 + i(n+1), & \text{c) } z_n &= \frac{2 - i5n^2}{n^2 + 1}, \\ \text{d) } z_n &= \left(\frac{1+i}{2}\right)^n, & \text{e) } z_n &= \frac{n^2}{1+2n^2} + i(-1)^n, & \text{f) } z_n &= e^{i\frac{\pi}{2}n}. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną funkcji f , jeśli:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(z) &= \bar{z}(2-3z), & \text{b) } f(z) &= \frac{\operatorname{Im}(z+i)}{z}, & \text{c) } f(z) &= 1+z^2, \\ \text{d) } f(z) &= \frac{1}{1+z^2}, & \text{e) } f(z) &= (z+i)^2, & \text{f) } f(z) &= \frac{z+1}{z-1}. \end{aligned}$$

Zadanie 3. Wyznaczyć część rzeczywistą i urojoną liczb:

$$\begin{aligned} \text{a) } e^{1+\frac{\pi}{4}i}, & & \text{b) } e^{1-\frac{\pi}{2}i}, & & \text{c) } 2e^{\pi i}, \\ \text{d) } \sin(i-\pi), & & \text{e) } \cos i, & & \text{f) } \cos(1-i). \end{aligned}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć obraz zbioru D przy odwzorowaniu f , jeśli:

$$\begin{aligned} \text{a) } D &= \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im}z \leq 1 - \operatorname{Re}z \wedge \operatorname{Re}z \geq 0\}, & f(z) &= 2z+1, \\ \text{b) } D &= \{z \in \mathbb{C} : z = 1+iy, y \in \mathbb{R}\}, & f(z) &= e^{\pi i}z, \\ \text{c) } D &= \{z \in \mathbb{C} : z = x - \pi i, x \in \mathbb{R}\}, & f(z) &= e^z, \\ \text{d) } D &= \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \operatorname{Re}z \leq 2 \wedge -1 \leq \operatorname{Im}z \leq 1\}, & f(z) &= e^{\frac{\pi}{2}i}z - 2. \end{aligned}$$

Zadanie 5. Wyznaczyć obszary, w których funkcja f jest holomorficzna, jeśli:

$$\text{a) } f(z) = z^2, \quad \text{b) } f(z) = z \operatorname{Im}z, \quad \text{c) } f(z) = \frac{1}{z^2}, \quad \text{d) } f(z) = \operatorname{Im}z.$$

Zadanie 6. Wyznaczyć funkcję holomorficzną $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ taką, że $f(1) = i$, jeśli:

$$\begin{aligned} \text{a) } u(x, y) &= 2xy + 3x, & \text{b) } u(x, y) &= x^3 - 3xy^2, \\ \text{c) } u(x, y) &= x^2 - y^2 + 2x, & \text{d) } v(x, y) &= 2xy + 3x, \\ \text{e) } v(x, y) &= \frac{y}{x^2 + y^2}, & \text{f) } v(x, y) &= 2x^2 - 2y^2 + x. \end{aligned}$$

Zadanie 7. Wyznaczyć część rzeczywistą u oraz urojoną v funkcji f oraz sprawdzić, że funkcje te spełniają równania Cauchy'ego-Riemanna, jeśli:

a) $f(z) = z^3,$

b) $f(z) = e^{-z},$

c) $f(z) = \sin z.$

Rozdział 3

Całki funkcji zespolonych

3.1. Całka funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej

Funkcja zespolona zmiennej rzeczywistej

Funkcją zespoloną zmiennej rzeczywistej nazywamy funkcję określoną na pewnym przedziale $I \subset \mathbb{R}$ o wartościach w zbiorze \mathbb{C} .

Każdą funkcję zespoloną zmiennej rzeczywistej można przedstawić w postaci

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

gdzie $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$, $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$. A więc opisanie funkcji zespolonej zmiennej rzeczywistej jest równoważne określeniu dwóch funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej. Stąd też badanie ciągłości, obliczanie pochodnych czy całek funkcji z sprowadza się do badania ciągłości, obliczania pochodnych i całek funkcji x oraz y .

Niech $z(t) = x(t) + iy(t)$, gdzie $t \in I$, $I \subset \mathbb{R}$, $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Ciągłość

Twierdzenie 3.1. *Funkcja z jest ciągła w punkcie $t_0 \in I$ wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje x, y są ciągłe w punkcie t_0 .*

Przykład 3.1. Funkcja $z(t) = t + it^2$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, jest ciągła w dowolnym punkcie $t \in \mathbb{R}$, bo ciągłe w dowolnym punkcie $t \in I$ są obie funkcje $x(t) = t$ oraz $y(t) = t^2$.

Różniczkowalność

Twierdzenie 3.2. Funkcja z ma w punkcie $t_0 \in I$ pochodną

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje x, y mają w punkcie t_0 odpowiednio pochodne $x'(t_0), y'(t_0)$.

Przykład 3.2. Obliczymy pochodną funkcji

$$z(t) = (2 + it)^2,$$

gdzie $t \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że $z(t) = 4 + 4it + i^2t^2 = 4 - t^2 + 4it$. Funkcje $x(t) = 4 - t^2$ oraz $y(t) = 4t$ mają pochodne dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, a więc z twierdzenia 3.2. dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$z'(t) = (4 - t^2)' + i(4t)' = -2t + 4i.$$

Ćwiczenie 3.1. Obliczyć pochodną funkcji $z(t) = 3 + ie^{t^2}$.

Całkowalność

Twierdzenie 3.3. Funkcja z jest całkowalna na przedziale $[a, b] \subset I$, przy czym

$$\int_a^b z(t)dt = \int_a^b x(t)dt + i \int_a^b y(t)dt$$

wtedy i tylko wtedy, gdy obie funkcje x, y są całkowalne na przedziale $[a, b]$.

Przykład 3.3. Obliczymy całki:

$$\text{a) } \int_0^3 (4t - (1 - i)t^2)dt, \quad \text{b) } \int_0^\pi (it + 2) \sin t dt.$$

Ad. a) Z twierdzenia 3.3. mamy

$$\begin{aligned} \int_0^3 (4t - (1 - i)t^2)dt &= \int_0^3 (4t - t^2)dt + i \int_0^3 t^2 dt \\ &= \left(2t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^3 + i \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 9 + 9i. \end{aligned}$$

Ad. b) Z twierdzenia 3.3. mamy

$$\int_0^\pi (it + 2) \sin t dt = \int_0^\pi (it \sin t + 2 \sin t) dt = 2 \int_0^\pi \sin t dt + i \int_0^\pi t \sin t dt.$$

Ponieważ

$$2 \int_0^\pi \sin t dt = -2 \cos t \Big|_0^\pi = -2(-1 - 1) = 4,$$

oraz z twierdzenia o całkowaniu przez części

$$\int_0^\pi t \sin t dt = \left| \begin{array}{l} f(t) = t \quad g'(t) = \sin t \\ f'(t) = 1 \quad g(t) = -\cos t \end{array} \right| = -t \cos t \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos t dt = \pi,$$

więc

$$\int_0^\pi (it + 2) \sin t dt = 4 + \pi i.$$

Ćwiczenie 3.2. Obliczyć całkę

$$\int_0^1 i(t^2 - i)^2 dt.$$

3.2. Krzywe na płaszczyźnie zespolonej

Niech $z(t) = x(t) + iy(t)$, gdzie $t \in [a, b]$, $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Krzywa na płaszczyźnie zespolonej

Krzywą na płaszczyźnie zespolonej nazywamy zbiór

$$C = \{z(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\},$$

gdzie z jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, różną od stałej. Równanie $z = z(t)$ nazywamy równaniem parametrycznym (lub parametryzacją) krzywej C .

Równanie parametryczne odcinka

Równanie

$$z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t, \quad t \in [0, 1], \quad (3.1)$$

gdzie $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_2$, jest równaniem parametrycznym odcinka o początku w punkcie z_1 i końcu w punkcie z_2 .

Równanie parametryczne okręgu

Równanie

$$z(t) = z_0 + re^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (3.2)$$

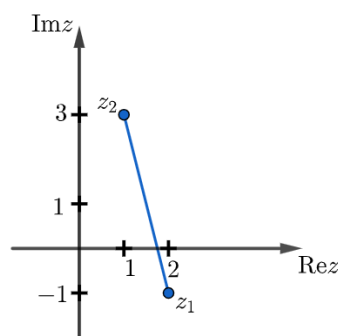
gdzie $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, jest równaniem parametrycznym okręgu o środku w punkcie z_0 i promieniu r .

Przykład 3.4. Zapiszemy równania parametryczne:

- odcinka o początku w punkcie $z_1 = 2 - i$ i końcu w punkcie $z_2 = 1 + 3i$,
- łuku będącego częścią okręgu $|z - i| = 2$ o początku w punkcie $z_1 = 2 + i$ oraz końcu w punkcie $z_2 = -2 + i$ i spełniającego warunek $\text{Im}(z) \geq 1$,
- fragmentu wykresu funkcji $y = (x - 1)^2$ o początku w punkcie $z_1 = i$ oraz końcu w punkcie $z_2 = 3 + 4i$.

Ad. a) Odcinek łączący punkty z_1 i z_2 przedstawia rysunek 3.1. Korzystając ze wzoru (3.1) otrzymujemy

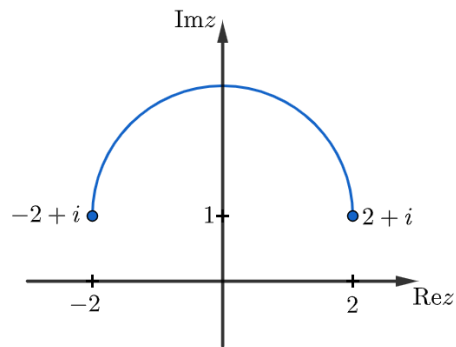
$$\begin{aligned} z(t) &= 2 - i + (1 + 3i - (2 - i))t = 2 - i + (4i - 1)t \\ &= 2 - t + (4t - 1)i, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$



Rysunek 3.1

Ad. b) Równanie $|z - i| = 2$ opisuje okrąg o środku w punkcie $z_0 = i$ i promieniu $r = 2$. Korzystając ze wzoru (3.2) oraz uwzględniając warunek $\text{Im} z \geq 1$, (rysunek 3.2), otrzymujemy

$$z(t) = i + 2e^{it}, \quad t \in [0, \pi].$$



Rysunek 3.2

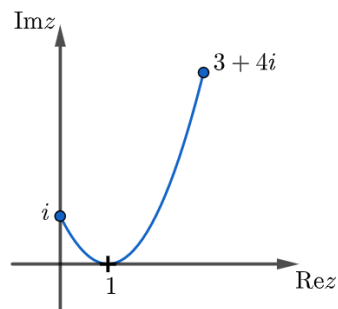
Ad. c) Szukamy równania fragmentu paraboli postaci $z(t) = x(t) + iy(t)$. Położmy $x(t) = t + 1$. Ponieważ krzywa jest fragmentem wykresu funkcji $y = (x - 1)^2$, więc

$$y(t) = (x(t) - 1)^2 = ((t + 1) - 1)^2 = t^2.$$

Stąd szukana krzywa ma równanie

$$z(t) = t + 1 + it^2.$$

Zauważmy, że $z(t) = i$ dla $t = -1$, natomiast $z(t) = 3 + 4i$ dla $t = 2$. Wynika stąd, że $t \in [-1, 2]$, (rysunek 3.3).



Rysunek 3.3

Zaproponowane równanie parametryczne fragmentu paraboli będącej wykresem funkcji $y = (x - 1)^2$ jest jednym z wielu możliwych. Funkcję x możemy dobrać dowolnie. Od tego wyboru zależy postać funkcji y oraz zakres parametru t .

Ćwiczenie 3.3. Zapisać równanie parametryczne:

- a) odcinka o początku w punkcie $z_1 = 1 - i$ i końcu w punkcie $z_2 = 3$,

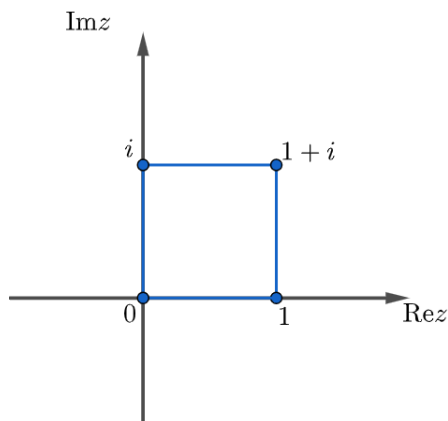
- b) okręgu $|z - 1 + i| = 1$ o początku w punkcie $z_1 = 1 - 2i$ i końcu w punkcie $z_2 = 1$ spełniającego warunek $\operatorname{Re} z \geq 1$,
- c) fragmentu wykresu funkcji $y = (x - 1)^2$ o początku punkcie $z_1 = i$ oraz końcu w punkcie $z_2 = 3 + 4i$, kładąc $x(t) = t$.

Rodzaje krzywych

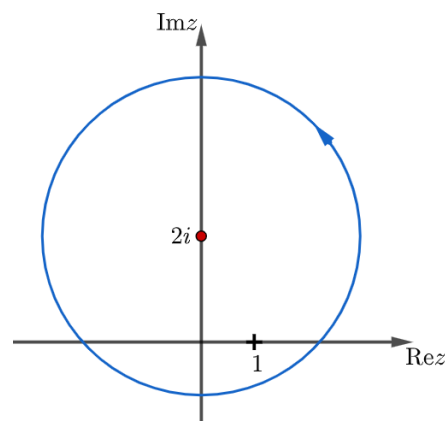
Niech $\{z(t) \in \mathbb{C} : t \in [a, b]\}$ będzie krzywą na płaszczyźnie zespolonej.

- Mówimy, że krzywa $z = z(t)$ nie ma punktów wielokrotnych, jeśli dla dowolnych $t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 \neq t_2$, mamy $z(t_1) \neq z(t_2)$.
- Krzywą, która nie ma punktów wielokrotnych nazywamy łukiem zwykłym.
- Krzywą, której końce się pokrywają nazywamy krzywą zamkniętą.
- Łuk zwykły zamknięty nazywamy krzywą Jordana.
- Łuk zwykły, w którym ustalono początek i koniec nazywamy łukiem skierowanym. Jeżeli ze wzrostem parametru poruszamy się po łuku w kierunku orientacji, to mówimy, że parametryzacja łuku jest zgodna z jego orientacją.
- Mówimy, że krzywa Jordana jest skierowana dodatnio, jeśli poruszając się po tej krzywej w kierunku orientacji mamy jej wnętrze, czyli zbiór ograniczony tą krzywą, po lewej stronie. W przeciwnym przypadku mówimy, że krzywa Jordana jest zorientowana ujemnie.
- Łuk zwykły nazywamy łukiem gładkim (regularnym), jeśli posiada na danym przedziale $[a, b]$ ciągłą pochodną różną od zera.
- Łuk zwykły nazywamy kawałkami gładkim, jeśli można go podzielić na skończoną liczbę łuków gładkich.
- Regularną krzywą Jordana skierowaną dodatnio nazywamy konturem.

Łukami zwykłymi są krzywe przedstawione w przykładzie 3.4. (rysunek 3.1, 3.2 oraz 3.3). Nie są to krzywe Jordana, bo nie są krzywymi zamkniętymi. Krzywą Jordana będzie np. łamana zamknięta o wierzchołkach $0, 1, 1 + i, i$ (rysunek 3.4). Jeżeli po tej krzywej, będącej bokami kwadratu, będziemy poruszać się od wierzchołka do wierzchołka tak, że jej wnętrze mamy po lewej stronie, to mamy krzywą zorientowaną dodatnio. Łamana ta nie jest łukiem gładkim, ale jest łukiem kawałkami gładkim (łukiem gładkim jest każdy z boków kwadratu). Łukiem gładkim będzie dowolny okrąg np. o środku w punkcie $2i$ i promieniu 3 (rysunek 3.5) i będzie on skierowany dodatnio, jeżeli będziemy poruszać się po okręgu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Jest on też krzywą zamkniętą, a zatem jest regularną krzywą Jordana skierowaną dodatnio, a więc konturem.



Rysunek 3.4: Krzywa Jordana kawałkami gładka



Rysunek 3.5: Kontur

3.3. Całka funkcji zespolonej zmiennej zespolonej

Niech $C : z = z(t)$, gdzie $t \in [a, b]$, będzie łukiem gładkim na płaszczyźnie zespolonej, określonym zgodnie z jego parametryzacją. Niech funkcja zespolona f będzie określona na $D \subset \mathbb{C}$ oraz niech łuk $C \subset D$.

Podzielmy odcinek $[a, b]$ w dowolny sposób punktami (rysunek 3.6)

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

Podział ten ustala podział krzywej C na n -łuków częściowych $\widehat{z_0 z_1}$, $\widehat{z_1 z_2}$, ..., $\widehat{z_{n-1} z_n}$, gdzie

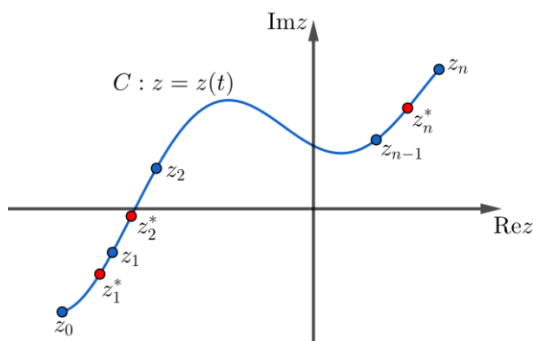
$$z_0 = z(t_0), z_1 = z(t_1), z_2 = z(t_2), \dots, z_{n-1} = z(t_{n-1}), z_n = z(t_n)$$



Rysunek 3.6

Na każdym łuku częściowym $z_{i-1} \widehat{=} z_i$, $i = 1, \dots, n$, obierzmy punkt pośredni z_i^* (rysunek 3.7) i utwórzmy sumę

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(z_i^*)(z_i - z_{i-1}).$$



Rysunek 3.7

Jeżeli istnieje granica ciągu (S_n) przy $n \rightarrow +\infty$ (różna od ∞) i jednocześnie długość najdłuższego z przedziałów $[t_{i-1}, t_i]$ dla $i \in [1, n]$ dąży do zera oraz granica ta nie zależy od sposobu wyboru punktów t_i oraz punktów pośrednich z_i^* , to granicę tę nazywamy **całką krzywoliniową** funkcji f po łuku C i oznaczamy symbolem

$$\int_C f(z) dz.$$

Całkę krzywoliniową funkcji f zmiennej zespolonej, przy spełnieniu pewnych założeń, można sprowadzić do całki oznaczonej zmiennej rzeczywistej.

Zamiana całki krzywoliniowej na oznaczoną

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli $C : z = z(t)$, gdzie $t \in [a, b]$ jest łukiem gładkim na płaszczyźnie zespolonej, określonym zgodnie z jego parametryzacją oraz funkcja zespolona f jest ciągła na C , to*

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.3)$$

Z twierdzenia 3.4. wynika w szczególności, że całka krzywoliniowa funkcji zespolonej zmiennej zespolonej określonej na łuku gładkim zachowuje wszystkie własności całki krzywoliniowej funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej. A więc zachodzi

Własności całki krzywoliniowej

Twierdzenie 3.5. *Jeżeli istnieją całki krzywoliniowe funkcji f i g wzdłuż gładkiego skierowanego łuku C , $k \in \mathbb{C}$ oraz gładkie, skierowane łuki C_1 i C_2 są takie, że $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ oraz $C_1 \cup C_2 = C$, to:*

- $\int_C (f(z) + g(z))dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz,$
- $\int_C kf(z)dz = k \int_C f(z)dz,$
- $\int_{-C} f(z)dz = - \int_C f(z)dz,$ gdzie " $-C$ " oznacza łuk skierowany przeciwnie do łuku C ,
- $\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz,$
- jeżeli $|f(z)| \leq M$ dla każdego $z \in C$ oraz d jest długością łuku C , to

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq Md.$$

Przykład 3.5. Obliczymy całki:

- a) $\int_C z \operatorname{Im}(z) dz,$ gdzie C jest odcinkiem o początku w punkcie $z_1 = 2i$ oraz końcu w punkcie $z_2 = 3 - i,$
- b) $\int_C \bar{z} \operatorname{Re}(z) dz,$ gdzie C jest łukiem będącym częścią okręgu o równaniu $|z| = 2$ od punktu $z_1 = -2i$ do punktu $z_2 = 2i$ spełniającym warunek $\operatorname{Re}(z) \geq 0.$

Ad. a) Na początek wyznaczmy równanie parametryczne krzywej C , (rysunek 3.8). Korzystając ze wzoru (3.1) mamy

$$z(t) = 2i + (3 - 3i)t = 3t + (2 - 3t)i, \quad t \in [0, 1].$$

Funkcja podcałkowa $f(z) = z\text{Im}(z)$, a więc

$$f(z(t)) = (3t + (2 - 3t)i)(2 - 3t) = 9(i - 1)t^2 + 6(1 - 2i)t + 4i.$$

Uwzględniając, że $z'(t) = 3 - 3i$, ze wzoru (3.3) mamy

$$\begin{aligned} \int_C z\text{Im}(z)dz &= (3 - 3i) \int_0^1 (9(i - 1)t^2 + 6(1 - 2i)t + 4i)dt = \\ &= (3 - 3i)(3(i - 1)t^3 + 3(1 - 2i)t^2 + 4it) \Big|_0^1 = (3 - 3i)i = 3 + 3i. \end{aligned}$$

Ad. b) Krzywa C (rysunek 3.9) jest półokręgiem o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu $r = 2$ o równaniu parametrycznym

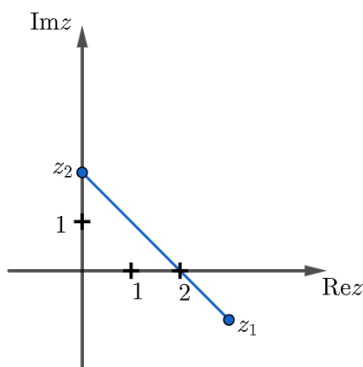
$$z(t) = 2e^{it}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Funkcja podcałkowa $f(z) = \bar{z}\text{Re}(z)$, a więc

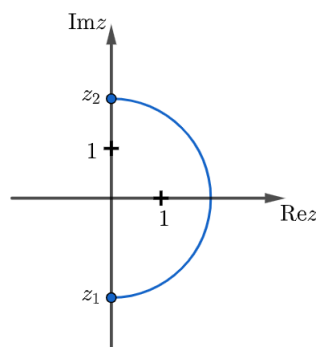
$$\begin{aligned} f(z(t)) &= \overline{2e^{it}}\text{Re}(2e^{it}) = \overline{2(\cos t + i \sin t)} \cdot \text{Re}(2(\cos t + i \sin t)) \\ &= 2(\cos t - i \sin t) \cdot 2 \cos t = 4(\cos(-t) + i \sin(-t)) \cos t = 4e^{-it} \cos t. \end{aligned}$$

Uwzględniając, że $z'(t) = 2ie^{it}$, ze wzoru (3.3) mamy

$$\int_C \bar{z}\text{Re}(z)dz = 8i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-it} \cos t e^{it} dt = 8i \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = 8i \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 16i.$$



Rysunek 3.8: Przykład 3.5. a)



Rysunek 3.9: Przykład 3.5. b)

Ćwiczenie 3.4. Obliczyć całkę

$$\int_C \overline{z - idz},$$

gdzie C jest częścią paraboli opisaną równaniem $y = 1 - x^2$ o początku w punkcie $z_1 = i$ i końcu w punkcie $z_2 = 1$.

Niech $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, gdzie $D \subset \mathbb{C}$ jest zbiorem otwartym.

Funkcja pierwotna

Mówimy, że funkcja $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ jest funkcją pierwotną funkcji f w zbiorze D , jeżeli dla dowolnego $z \in D$ zachodzi

$$F'(z) = f(z).$$

Między całką krzywoliniową funkcji zespolonej f a jej funkcją pierwotną F zachodzi następujący związek

Całka krzywoliniowa funkcji mającej funkcję pierwotną

Twierdzenie 3.6. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w zbiorze otwartym $D \subset \mathbb{C}$, a F jest jej funkcją pierwotną w tym zbiorze, to dla dowolnej krzywej regularnej $C \subset D$ o początku w punkcie z_1 i końcu w punkcie z_2 zachodzi*

$$\int_C f(z) dz = F(z_2) - F(z_1).$$

W szczególności, jeżeli krzywa C jest zamknięta, to $\int_C f(z) dz = 0$.

Przykład 3.6. Obliczmy całki:

a) $\int_C (z - i)(3z + i) dz$, gdzie C jest dowolną krzywą regularną o początku w punkcie $z_1 = 0$ oraz końcu w punkcie $z_2 = 2 + i$,

b) $\int_C 3z(z - i)^7 dz$, gdzie C jest dowolną krzywą regularną o początku w punkcie $z_1 = i$ oraz końcu $z_2 = 1$.

Ad. a) Funkcja $f(z) = (z - i)(3z + i) = 3z^2 - 2iz + 1$ jest ciągła w zbiorze \mathbb{C} i ma w tym zbiorze funkcję pierwotną $F(z) = z^3 - iz^2 + z$, bo $F'(z) = 3z^2 - 2iz + 1$ dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$, oraz krzywa $C \subset \mathbb{C}$. Zatem z twierdzenia 3.6.

$$\int_C (z - i)(3z + i) dz = \int_C (3z^2 - 2iz + 1) dz = (z^3 - iz^2 + z) \Big|_0^{2+i} = 8 + 9i.$$

Ad. b) Funkcja $f(z) = 3z(z - i)^7$ jest ciągła w zbiorze \mathbb{C} i ma w tym zbiorze funkcję pierwotną, którą wyznaczymy stosując twierdzenie o całkowaniu przez podstawienie.

$$\int 3z(z - i)^7 dz = \left. \begin{array}{l} z - i = t \\ z = t + i \\ dz = dt \end{array} \right| = \int 3t^8 + 3it^7 dt = \frac{1}{3}t^9 + \frac{3}{8}it^8 \\ = \frac{(z - i)^9}{3} + \frac{3i(z - i)^8}{8} + \gamma,$$

gdzie $\gamma \in \mathbb{C}$. Zatem z twierdzenia 3.6.

$$\int_C 3z(z - i)^7 dz = \left[\frac{(z - i)^9}{3} + \frac{3i(z - i)^8}{8} \right]_i^1 = \frac{(1 - i)^9}{3} + \frac{3i(1 - i)^8}{8} \\ = \frac{16 - 16i}{3} + 6i = \frac{16}{3} + \frac{2}{3}i.$$

Ćwiczenie 3.5. Obliczyć całkę

$$\int_C \cos(iz) dz,$$

gdzie C jest dowolną krzywą regularną o początku w punkcie $z_1 = 0$ i końcu w punkcie $z_2 = \frac{\pi}{6}i$.

Przy obliczaniu całek krzywoliniowych funkcji mających funkcję pierwotną możemy również zastosować twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej na oznaczoną.

Przykład 3.7. Obliczymy

$$\int_C z^2 dz,$$

jeśli C jest okręgiem określonym równaniem $z(t) = e^{it}$ dla $t \in [0, 2\pi]$, skierowanym zgodnie z parametryzacją.

a) Stosując twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej na oznaczoną (twierdzenie 3.4.) mamy

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{2\pi} (e^{it})^2 \cdot i \cdot e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} e^{3it} dt = \frac{1}{3} e^{3it} \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

b) Stosując twierdzenie 3.6., z uwagi na fakt, że krzywa C jest krzywą regularną zamkniętą, a f jest ciągła na całej płaszczyźnie zespolonej, mamy bezpośrednio $\int_C z^2 dz = 0$.

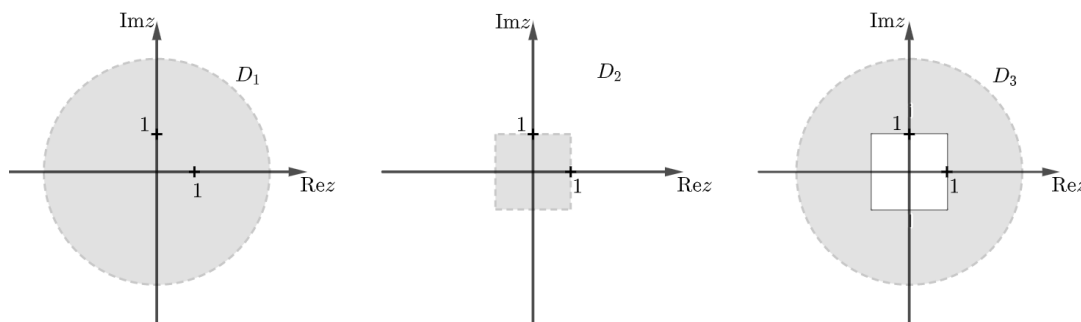
Obszar

Zbiór otwarty $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy obszarem, jeżeli każde dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną całkowicie w nim zawartą.

Obszar jednorodny

Obszar $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy obszarem jednorodnym, jeżeli należy do niego wnętrze każdej zawartej w nim krzywej Jordana.

Przykład 3.8. Obszarami jednorodnymi są zbiory $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$ oraz $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1 \wedge -1 < \operatorname{Im} z < 1\}$. Obszarem jednorodnym nie jest zbiór $D_3 = D_1 \setminus D_2$, (rysunek 3.10).



Rysunek 3.10

Ćwiczenie 3.6. Naszkicować obszar D oraz określić, czy jest on obszarem jednorodnym, jeśli:

- $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge 0 < \operatorname{Arg} z < \pi\}$,
- $D = \{z \in \mathbb{C} : 3 < |z - 1| < 4\}$,
- $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.

Sformułujemy teraz kilka bardzo ważnych w analizie zespolonej twierdzeń, pochodzących od Cauchy'ego, dotyczących całek funkcji holomorficzych.

Twierdzenie całkowe Cauchy'ego

Twierdzenie 3.7. *Jeżeli funkcja f jest holomorphyzna w jednospójnym obszarze $D \subset \mathbb{C}$, a krzywa C jest dowolną kawałkami gładką krzywą Jordana leżącą w tym obszarze, to*

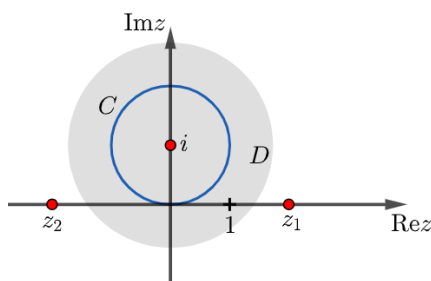
$$\int_C f(z) dz = 0.$$

Przykład 3.9. Obliczymy całkę

$$\int_C \frac{iz}{z^2 - 4} dz,$$

gdzie $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$.

Punkty $z_1 = 2i$ oraz $z_2 = -2i$, w których funkcja podcałkowa nie jest holomorphyzna, leżą na zewnątrz krzywej C , zatem istnieje obszar jednospójny D , w którym leży krzywa C i w którym funkcja podcałkowa jest holomorphyzna (rysunek 3.11).



Rysunek 3.11

Z twierdzenia całkowego Cauchy'ego (twierdzenie 3.7.) wynika, że

$$\int_C \frac{iz}{z^2 - 4} dz = 0.$$

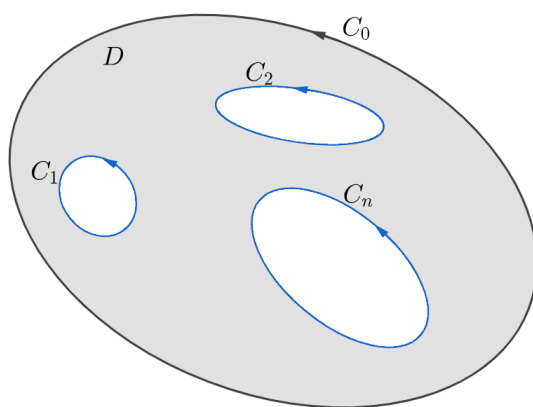
Ćwiczenie 3.7. Sprawdzić, dla której z całek są spełnione założenia twierdzenia całkowego Cauchy'ego:

- a) $\int_C (z^3 - 2) dz$, gdzie krzywa C jest brzegiem trójkąta o wierzchołkach $w_1 = -2i$, $w_2 = 4$, $w_3 = 3i$,
- b) $\int_C \frac{1}{z} dz$, gdzie krzywa C jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = 1$ i promieniu $r = 2$.

Uogólnienie twierdzenia całkowego Cauchy'ego na obszary wielospójne

Twierdzenie 3.8. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna wewnątrz i na brzegu obszaru $D \subset \mathbb{C}$ ograniczonego konturami C_0, C_1, \dots, C_n , przy czym kontury C_1, \dots, C_n leżą wewnątrz konturu C_0 i każdy z nich leży na zewnątrz pozostałych (rysunek 3.12), to*

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \dots + \int_{C_n} f(z)dz.$$



Rysunek 3.12

Z powyższego twierdzenia wynika następujący

Wniosek z uogólnienia tw. całkowego Cauchy'ego na obszary wielospójne

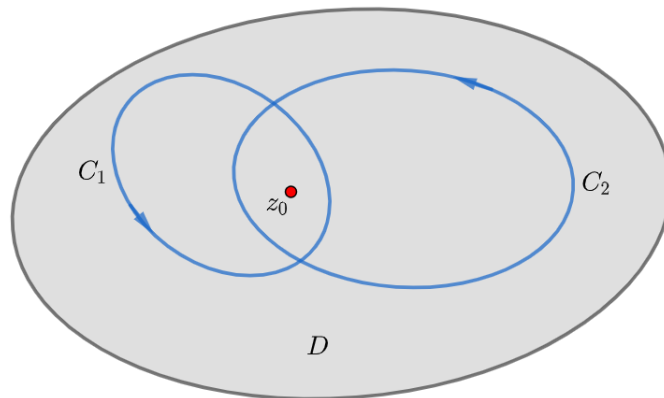
Wniosek 3.1. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze $D \subset \mathbb{C}$ z wyjątkiem punktu $z_0 \in D$, to*

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz,$$

gdzie C_1, C_2 są dowolnymi konturami leżącymi wewnątrz obszaru D i zawierającymi wewnątrz punkt z_0 , (rysunek 3.13).

Zbiór domknięty

Zbiór $D \subset \mathbb{C}$ nazywamy domkniętym, jeśli zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.



Rysunek 3.13

Podamy teraz wzór, zwany wzorem całkowym Cauchy'ego, który w przypadku funkcji holomorficznej pozwala na obliczenie jej wartości w każdym punkcie wewnętrznym obszaru jednospójnego domkniętego, w którym funkcja jest holomorficzna, za pomocą wartości tej funkcji na brzegu tego obszaru.

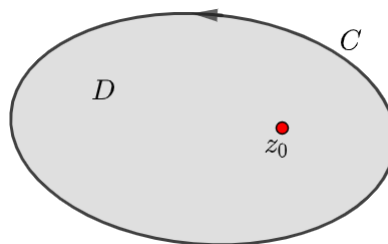
Wzór całkowy Cauchy'ego

Twierdzenie 3.9. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzna w obszarze jednospójnym domkniętym $D \subset \mathbb{C}$, którego brzegiem jest kontur C (rysunek 3.14), to w każdym punkcie wewnętrznym z_0 tego obszaru wyraża się ona wzorem*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Wzór ten można przepisać w równoważnej postaci

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0).$$



Rysunek 3.14

Przykład 3.10. Obliczmy całkę

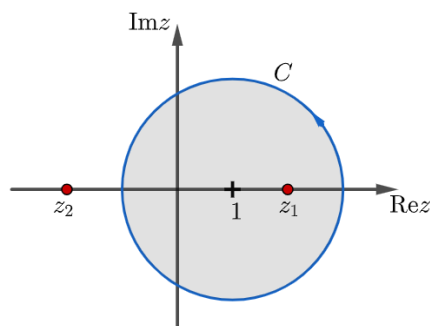
$$\int_C \frac{iz}{z^2 - 4} dz,$$

gdzie C - skierowana dodatnio krzywa określona następująco:

- a) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = 2\}$,
- b) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2| = 1\}$,
- c) $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 3\}$.

Zauważmy, że jedynymi punktami, w których funkcja podcałkowa nie jest holomorficzną są punkty $z_1 = 2$ oraz $z_2 = -2$. Zauważmy również, że w każdym z podpunktów zadana krzywa C jest dodatnio skierowanym okręgiem, a więc jest konturem.

Ad. a) Punkt z_1 leży wewnątrz krzywej C , a punkt z_2 na zewnątrz (rysunek 3.15).

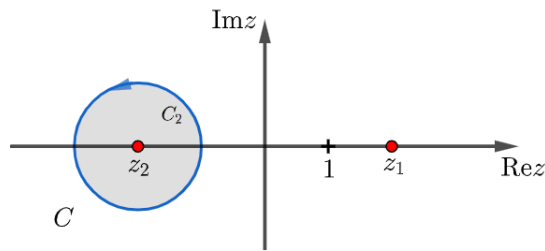


Rysunek 3.15

Funkcja $f(z) = \frac{iz}{z+2}$ jest holomorficzną wewnątrz i na brzegu obszaru D ograniczonego krzywą C . Obszar D jest jednospójny, a krzywa C będąca jego brzegiem jest konturem, więc ze wzoru całkowego Cauchy'ego (twierdzenie 3.9.) dla $z_0 = 2$ mamy

$$\int_C \frac{iz}{z^2 - 4} dz = \int_C \frac{iz}{(z - 2)(z + 2)} dz = \int_C \frac{\frac{iz}{z+2}}{z - 2} dz = 2\pi i \cdot f(2) = -\pi.$$

Ad. b) Punkt z_2 leży wewnątrz krzywej C , a punkt z_1 na zewnątrz (rysunek 3.16).



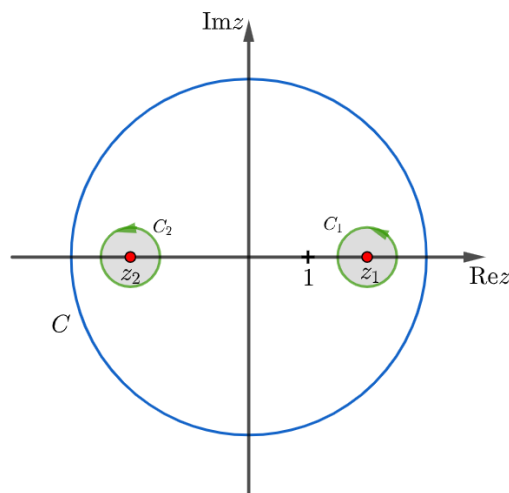
Rysunek 3.16

Funkcja $f(z) = \frac{iz}{z-2}$ jest holomorphyzna na obszarze D ograniczonym krzywą C , więc ze wzoru całkowego Cauchy'ego (twierdzenie 3.9.) dla $z_0 = -2$ mamy

$$\int_C \frac{iz}{z^2 - 4} dz = \int_C \frac{iz}{(z-2)(z+2)} dz = \int_C \frac{\frac{iz}{z-2}}{z+2} dz = 2\pi i \cdot f(-2) = -\pi.$$

Ad. c) Oba punkty z_1 oraz z_2 leżą wewnątrz krzywej C . W takiej sytuacji definiujemy dwa rozłączne zewnętrznie, zawarte w obszarze ograniczonym krzywą C takie kontury C_1 i C_2 , aby punkt z_1 leżał wewnątrz konturu C_1 , a punkt z_2 wewnątrz konturu C_2 . Przyjmijmy (rysunek 3.17)

$$C_1 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| = \frac{1}{2} \right\}, \quad C_2 = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z + 2| = \frac{1}{2} \right\}.$$



Rysunek 3.17

Z uogólnionego twierdzenia całkowego Cauchy'ego na obszary wielospójne (twierdzenie 3.8.) wynika, że

$$\int_C \frac{iz}{z^2 - 4} dz = \int_{C_1} \frac{iz}{z^2 - 4} dz + \int_{C_2} \frac{iz}{z^2 - 4} dz.$$

Z podpunktów a) i b) mamy

$$\int_{C_1} \frac{iz}{z^2 - 4} dz = -\pi \quad \text{oraz} \quad \int_{C_2} \frac{iz}{z^2 - 4} dz = -\pi.$$

Zatem

$$\int_C \frac{iz}{z^2 - 4} dz = -2\pi.$$

Ćwiczenie 3.8. Obliczyć, korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego oraz uogólnionego twierdzenia Cauchy'ego na obszary wielospójne, całkę

$$\int_C \frac{1}{z^2 + 9} dz,$$

jeśli C jest:

- od dodatnio skierowanym okręgiem opisanym równaniem $|z - 2i| = 2$,
- od dodatnio skierowanym okręgiem opisanym równaniem $|z - 1 + 3i| = 2$,
- od dodatnio skierowanym okręgiem opisanym równaniem $|z| = 6$.

O istnieniu pochodnych wyższych rzędów

Twierdzenie 3.10. *Jeżeli funkcja f jest holomorficzną w obszarze jednospójnym domkniętym $D \subset \mathbb{C}$, którego brzegiem jest kontur C , to ma ona w każdym punkcie wewnętrznym z_0 tego obszaru pochodne wszystkich rzędów określone wzorami*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego

Wzór w twierdzeniu 3.10. nazywamy uogólnionym wzorem całkowym Cauchy'ego. Można go zapisać w równoważnej postaci

$$\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0).$$

W szczególności dla $n = 0$ otrzymujemy wzór całkowy Cauchy'ego.

Własność sformułowana w twierdzeniu o istnieniu pochodnych wyższych rzędów odróżnia w sposób istotny funkcje różniczkowalne zmiennej zespolonej od funkcji różniczkowalnych zmiennej rzeczywistej. Wynika bowiem z niego, że jeśli funkcja zespolona zmiennej zespolonej, ma pochodną pierwszego rzędu w pewnym obszarze, to posiada w tym obszarze również pochodne wszystkich rzędów. Własność ta nie jest prawdziwa dla funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej.

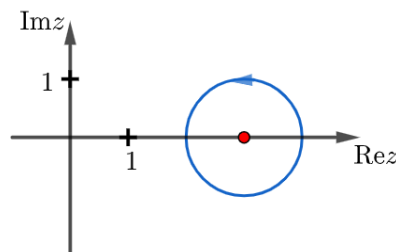
Twierdzenia 3.8., 3.9. oraz 3.10. pozostają prawdziwe, jeżeli krzywe występujące w tych twierdzeniach są kawałkami gładkimi, dodatnio zorientowanymi krzywymi Jordana.

Jako podsumowanie tego rozdziału podamy przykład, w którym do obliczenia zespolonych całek krzywoliniowych wykorzystamy wzór całkowy Cauchy'ego, uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego, a także twierdzenie o zamianie całki krzywoliniowej na oznaczoną.

Przykład 3.11. Obliczmy całki:

$$\text{a) } \int_C \frac{1}{z-3} dz, \quad \text{b) } \int_C \frac{1}{(z-3)^5} dz,$$

gdzie C - dodatnio skierowany okrąg o środku w punkcie $z_0 = 3$ i promieniu $r = 1$, (rysunek 3.18).



Rysunek 3.18

Ad. a) Punkt $z_0 = 3$, w którym funkcja podcałkowa nie jest holomorficzną, leży wewnątrz krzywej C , funkcja $f(z) = 1$ jest holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej, a więc także w obszarze jednospójnym D , którego brzegiem jest krzywa C będąca konturem. Zatem, stosując wzór całkowy Cauchy'ego mamy

$$\int_C \frac{1}{z-3} dz = 2\pi i \cdot f(3) = 2\pi i.$$

Powyższą całkę możemy też obliczyć korzystając z twierdzenia o zamianie całki krzywoliniowej na oznaczoną (twierdzenie 3.3)

$$\int_C \frac{1}{z-3} dz = \left| \begin{array}{l} z = 3 + e^{it} \\ dz = ie^{it} dt \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{3 + e^{it} - 3} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Ad. b) Kładąc $f(z) = 1$ i stosując uogólniony wzór całkowy Cauchy'ego mamy

$$\int_C \frac{1}{(z-3)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} \cdot f^{(4)}(z) \Big|_{z=3} = 0.$$

Korzystając z twierdzenia o zamianie całki krzywoliniowej na oznaczoną mamy

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{(z-3)^5} dz &= \left| \begin{array}{l} z = 3 + e^{it} \\ dz = ie^{it} dt \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right| = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{(e^{it})^5} dt = \\ &= i \int_0^{2\pi} e^{-4it} dt = -\frac{1}{4} e^{-4it} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{4} (e^{-8\pi i} - e^{0i}) = 0. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 3.9. Obliczyć, korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego lub uogólnionego wzoru Cauchy'ego, całki:

$$\text{a) } \int_C \frac{2z}{z^2 + 3iz - 2} dz, \quad \text{b) } \int_C \frac{2z}{(z^2 + 3iz - 2)^2} dz,$$

gdzie C jest dodatnio skierowanym okręgiem o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu $r = \frac{3}{2}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Obliczyć całki:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \int_1^3 (t^3 - 2ti) dt, & \text{b) } \int_0^2 (1 + (1+i)t^2) dt, & \text{c) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - i \cos(2t)) dt, \\ \text{d) } \int_0^\pi e^{it} dt, & \text{e) } \int_0^1 3(1-it)^5 dt, & \text{f) } \int_0^{2\pi} te^{-2ti} dt. \end{array}$$

Zadanie 2. Zapisać równania parametryczne krzywych:

- odcinek o początku $z_1 = 0$ i końcu $z_2 = i$,
- odcinek o początku $z_1 = 1 - i$ i końcu $z_2 = 2 + i$,
- okrąg o środku $z_0 = 0$ i promieniu $r = 2$,
- okrąg o środku $z_0 = 1 - 2i$ i promieniu $r = 3$,
- część okręgu $|z| = 1$ o początku w i oraz końcu w $-i$,
- część paraboli $y = x^2$ zawartej między punktami $z_1 = 1 + i$ i $z_2 = 2 + 4i$.

Zadanie 3. Obliczyć całki po zadanych krzywych:

- $\int_C \operatorname{Re}(z) dz$, gdzie C jest odcinkiem o początku $z_1 = -i$ oraz końcu $z_2 = 2$,
- $\int_C \bar{z} dz$, gdzie C jest odcinkiem o początku $z_1 = 2 - i$ oraz końcu $z_2 = 1 + i$,
- $\int_C \frac{dz}{\bar{z}}$, gdzie C jest częścią leżącego w drugiej, trzeciej i czwartej ćwiartce układu współrzędnych okręgu $|z| = 2$ o początku w $z_1 = 2i$ oraz końcu w $z_2 = 2$,
- $\int_C \bar{z} \operatorname{Im}(z^2) dz$, gdzie C jest częścią leżącego w pierwszej ćwiartce okręgu $|z| = 3$ o początku w $z_1 = 3$ oraz końcu w $z_2 = 3i$,
- $\int_C 3(z + \bar{z}) dz$, gdzie C jest częścią paraboli $y = x^2$ od punktu $z_1 = 0$ do punktu $z_2 = 1 + i$,
- $\int_C |e^z| z dz$, gdzie C jest odcinkiem o początku $z_1 = i$ oraz końcu $z_2 = 1 + i$.

Zadanie 4. Obliczyć całki (zakładamy, że krzywe C są regularne):

- $\int_C (z^3 - 4z) dz$, gdzie C jest dowolną krzywą o początku $z_1 = 0$ oraz końcu $z_2 = 2i$,
- $\int_C 2z(1 + z^2)^3 dz$, gdzie C jest dowolną krzywą o początku $z_1 = 0$ oraz końcu $z_2 = 1 + i$,
- $\int_C z e^z dz$, gdzie C jest dowolną krzywą o początku $z_1 = 0$ oraz końcu $z_2 = \pi i$,

- d) $\int_C \sin(i - 2z)dz$, gdzie C jest dowolną krzywą o początku $z_1 = 0$ oraz końcu $z_2 = \frac{\pi}{2}$,
- e) $\int_C \frac{4z}{z^2 + 2}dz$, gdzie C jest dowolną krzywą o początku $z_1 = i$ oraz końcu $1 + i$.

Zadanie 5. Obliczyć całki korzystając ze wzoru całkowego Cauchy'ego lub jego uogólnienia (zakładamy, że krzywe C są skierowane dodatnio):

- a) $\int_C \frac{3z^2}{(z - 2i)(z + i)}dz$, gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = -i$ i promieniu $r = 1$,
- b) $\int_C \frac{\cos(iz)}{z(z - \pi i)}dz$, gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = 4i$ i promieniu $r = 3$,
- c) $\int_C \frac{z^3}{z^2 - 4z + 5}dz$, gdzie C jest łamaną zamkniętą o wierzchołkach $0, 3 + 3i, 3 - i$,
- d) $\int_C \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 4}dz$, gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = 1 + 2i$ i promieniu $r = 2$,
- e) $\int_C \frac{dz}{(z^2 + 1)^2}$, gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = -2i$ i promieniu $r = 2$,
- f) $\int_C \frac{\cos z}{z^2(z + i)}dz$, gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = 0$ i promieniu $r = \frac{1}{2}$,
- g) $\int_C \frac{ze^{iz}}{(z - \pi)^3}dz$, gdzie C jest okręgiem o środku w punkcie $z_0 = 3$ i promieniu $r = 1$.

Rozdział 4

Szeregi zespolone

4.1. Szeregi liczbowe o wyrazach zespolonych

Niech (z_n) będzie ciągiem o wyrazach zespolonych. Zdefiniujemy ciąg (S_n) następująco

$$S_n = z_1 + z_2 + \dots + z_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Szereg liczbowy

- Wyrazy ciągu (S_n) nazywamy sumami częściowymi ciągu (z_n) .
- Ciąg (S_n) nazywamy szeregiem o wyrazie ogólnym z_n i oznaczamy $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$.
- Jeżeli istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, gdzie $S \in \mathbb{C}$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nazywamy zbieżnym, a granicę nazywamy jego sumą.
- Szereg, który nie jest zbieżny, nazywamy szeregiem rozbieżnym.
- Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, jeżeli zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$.
- Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest warunkowo zbieżny, jeżeli jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny.

Sformułujemy teraz kilka kryteriów zbieżności szeregów liczbowych o wyrazach zespolonych. Warunek konieczny zbieżności oraz bezwzględnej zbieżności szeregu, jak też kryterium porównawcze, d'Alemberta czy Cauchy'ego

mają swoje odpowiedniki w teorii szeregów rzeczywistych. Zaczniemy od kryterium, które takiego odpowiednika nie posiada.

Warunek równoważny zbieżności szeregu o wyrazach zespolonych

Twierdzenie 4.1. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o wyrazach zespolonych $z_n = x_n + iy_n \in \mathbb{C}$, gdzie $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$, jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy zbieżne są szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$, przy czym

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

Warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego

Twierdzenie 4.2. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny, to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0.$$

Warunek konieczny bezwzględnej zbieżności szeregu liczbowego

Twierdzenie 4.3. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny, to jest zbieżny.

Kryterium porównawcze zbieżności szeregu

Twierdzenie 4.4. Jeżeli $|z_n| \leq a_n$ dla prawie wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest bezwzględnie zbieżny.

Kryterium d'Alemberta zbieżności szeregu

Twierdzenie 4.5. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ o wyrazach różnych od zera, dla którego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = g$$

jest bezwzględnie zbieżny, gdy $g < 1$, a rozbieżny, gdy $g > 1$.

Kryterium Cauchy'ego zbieżności szeregu

Twierdzenie 4.6. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, dla którego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = g$$

jest bezwzględnie zbieżny, gdy $g < 1$, a rozbieżny, gdy $g > 1$.

Przypomnijmy z analizy rzeczywistej, że

O zbieżności szeregu harmonicznego

Twierdzenie 4.7. Szereg harmoniczny rzędu α postaci

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

gdzie $\alpha > 0$, jest rozbieżny, gdy $0 < \alpha \leq 1$, a zbieżny, gdy $\alpha > 1$.

Przykład 4.1. Zbadamy zbieżność szeregów:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-i}{n}, & \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4i}{n^2}, & \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-in}{n^3}, \\ \text{d) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4i)^n}{n!}, & \text{e) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+3^ni}{2^n}. & \end{array}$$

Ad. a) Z twierdzenia 2.8. mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 \neq 0.$$

Zatem nie jest spełniony warunek konieczny zbieżności szeregu liczbowego (twierdzenie 4.2.), a więc dany szereg jest rozbieżny.

Ad. b) Niech $z_n = \frac{n+4i}{n^2} = x_n + iy_n$, gdzie

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{4}{n^2}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest rozbieżny, jako harmoniczny rzędu 1. Stąd oraz z twierdzenia 4.1. wynika, że dany szereg jest rozbieżny.

Ad. c) Niech $z_n = \frac{3-in}{n^3}$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, mamy

$$|z_n| = \frac{|3-in|}{|n^3|} = \frac{\sqrt{9+n^2}}{n^3} \leq \frac{\sqrt{n^2+n^2}}{n^3} = \frac{n\sqrt{2}}{n^3} = \frac{\sqrt{2}}{n^2}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^2}$ jako harmoniczny rzędu 2, jest zbieżny. Stąd oraz z kryterium porównawczego (twierdzenie 4.4.) wynika, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Ad. d) Niech $z_n = \frac{(3-4i)^n}{n!}$. Wówczas

$$\left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{(3-4i)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(3-4i)^n} \right| = \left| \frac{3-4i}{n+1} \right| = \sqrt{\frac{25}{(n+1)^2}} = \frac{5}{n+1}.$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = 0 < 1.$$

Zatem z kryterium d'Alemberta (twierdzenie 4.5.) wynika, że dany szereg jest bezwzględnie zbieżny.

Ad. e) Niech $z_n = \frac{1+3^n i}{2^n}$. Wówczas

$$\sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{\frac{|1+3^n i|}{|2^n|}} = \sqrt[n]{\frac{1+3^{2n}}{2^{2n}}} = \sqrt[n]{\frac{3^{2n}(\frac{1}{3^{2n}}+1)}{2^{2n}}} = \frac{3}{2} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{2n}}+1}.$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^{2n}}+1} = 1,$$

a więc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \frac{3}{2} > 1.$$

Zatem z kryterium Cauchy'ego (twierdzenie 4.6.) wynika, że dany szereg jest rozbieżny.

Ćwiczenie 4.1. Zbadać zbieżność szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n^3}, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+i)^n}{n^n}, \quad \text{c) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{(n+1)!}.$$

4.2. Szeregi potęgowe o wyrazach zespolonych

Szereg potęgowy

Niech $(a_n) \subset \mathbb{C}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_0$. Szeregiem potęgowym o środku w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

W szczególności dla $z_0 = 0$ szereg potęgowy jest postaci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Promień i koło zbieżności szeregu potęgowego

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego (wzór 4.1) nazywamy liczbę

$$R = \sup\{|z - z_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ jest zbieżny}\}.$$

Jeśli $R \in (0, +\infty)$, to zbiór $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ nazywamy kołem zbieżności tego szeregu.

Przy wyznaczaniu promienia zbieżności szeregów potęgowych o wyrazach zespolonych możemy wykorzystać twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda, które jest odpowiednikiem twierdzenia dla szeregów potęgowych o wyrazach rzeczywistych.

Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda

Twierdzenie 4.8. *Promień zbieżności szeregu potęgowego określonego wzorem 4.1 wyraża się wzorem*

$$R = \begin{cases} 0 & \text{gdy } \gamma = +\infty, \\ \frac{1}{\gamma} & \text{gdy } 0 < \gamma < +\infty, \\ \infty & \text{gdy } \gamma = 0. \end{cases}$$

gdzie

$$\gamma = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}. \quad (4.2)$$

- Jeżeli $R = 0$, to szereg potęgowy jest zbieżny tylko w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$.
- Jeżeli $R \in (0, +\infty)$, to szereg jest zbieżny w kole $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$.
- Jeżeli $R = +\infty$, to szereg jest zbieżny dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$.

Przy wyznaczaniu promienia zbieżności można zastosować kryterium Cauchy'ego, kładąc we wzorze (4.2) $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ lub d'Alemberta (przy założeniu, że $a_n \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$), kładąc $\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$.

Przykład 4.2. Wyznaczymy promień i koło zbieżności szeregów:

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3i)^n}{n!} z^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{3}-i)^n}{n} (z+1)^n.$$

Ad. a) Niech $a_n = \frac{(n+3i)^n}{n!}$. Wówczas

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+3i)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+3i)^n} \right| = \frac{|n+3i|}{|n+1|} = \frac{\sqrt{n^2+9}}{n+1}.$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = 1 = \gamma,$$

a więc z kryterium d'Alemberta promień zbieżności $R = \frac{1}{\gamma} = 1$, natomiast koło zbieżności jest postaci $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Ad. b) Niech $a_n = \frac{(\sqrt{3}-i)^n}{n}$. Wówczas

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|\sqrt{3}-i|}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n}}.$$

Stąd

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 2 = \gamma,$$

a więc z kryterium Cauchy'ego wynika, że promień zbieżności $R = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}$ oraz koło zbieżności jest postaci $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| < \frac{1}{2}\}$.

Ćwiczenie 4.2. Wyznaczyć promień i koło zbieżności szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n}{(1+2i)^n} z^n.$$

Rozwinięcie funkcji holomorficzej w szereg Taylora

Twierdzenie 4.9. *Jeśli funkcja zespolona f zmiennej $z \in \mathbb{C}$ jest holomorficzna w pewnym otoczeniu punktu $z_0 \in \mathbb{C}$, to w każdym punkcie z tego otoczenia posiada rozwinięcie w szereg potęgowy*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

nazywany szeregiem Taylora funkcji f o środku w punkcie z_0 .

Szereg Maclaurina

Dla $z_0 = 0$ otrzymujemy

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Powyższy szereg nazywamy szeregiem Maclaurina funkcji f .

Szeregi Maclaurina wybranych funkcji

Twierdzenie 4.10. *Niech $z \in \mathbb{C}$. Wówczas:*

$$(1) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{dla } |z| < \infty.$$

$$(2) \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{dla } |z| < \infty.$$

$$(3) \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{dla } |z| < \infty.$$

$$(4) \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{dla } |z| < 1.$$

$$(5) \quad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{dla } |z| < 1.$$

Funkcja analityczna

Funkcję zespoloną f zmiennej $z \in \mathbb{C}$ nazywamy funkcją analityczną w obszarze $D \subset \mathbb{C}$, jeśli każdy punkt $z_0 \in D$ ma otoczenie, w którym funkcja ta jest sumą szeregu potęgowego postaci (4.1).

Związek między funkcją holomorficzną i analityczną

Twierdzenie 4.11. *Funkcja zespolona jest holomorficzną w obszarze $D \subset \mathbb{C}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest analityczna w tym obszarze.*

4.3. Szereg Laurenta

Szereg Laurenta

Szeregiem Laurenta o współczynnikach $a_n \in \mathbb{C}$ i środku $z_0 \in \mathbb{C}$ nazywamy szereg postaci

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (4.3)$$

Szereg Laurenta można zapisać w postaci sumy dwóch szeregów

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}.$$

Część regularna i osobliwa szeregu Laurenta

Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ nazywamy częścią regularną szeregu Laurenta.

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ nazywamy częścią główną (osobliwą) szeregu Laurenta.

Mówimy, że szereg Laurenta jest zbieżny w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, jeżeli jego część regularna jak i jego część główna są szeregami zbieżnymi w tym punkcie, rozbieżnym, jeżeli co najmniej jeden z tych szeregów jest rozbieżny. Przez sumę szeregu Laurenta rozumiemy sumę sum obydwu jego części.

Kryterium zbieżności szeregu Laurenta

Twierdzenie 4.12. *Część regularna szeregu Laurenta (4.3) jest szeregiem zbieżnym wewnątrz koła $|z - z_0| < R$, a rozbieżnym na zewnątrz tego koła, przy czym*

$$R = \frac{1}{\gamma}, \quad \text{gdzie } \gamma = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Część główna szeregu Laurenta (4.3) jest szeregiem rozbieżnym wewnątrz koła $|z - z_0| < r$, a zbieżnym na zewnątrz tego koła, przy czym

$$r = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}.$$

Liczby R oraz r nazywamy promieniami zbieżności odpowiednio części regularnej i głównej szeregu Laurenta.

Pierścień zbieżności szeregu Laurenta

Twierdzenie 4.13. *Jeżeli liczby R oraz r są zdefiniowane tak jak w twierdzeniu 4.12., a więc są promieniami zbieżności odpowiednio części głównej i regularnej szeregu Laurenta oraz $r < R$, to szereg ten jest zbieżny w pierścieniu*

$$P = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}.$$

Przykład 4.3. Wyznamy pierścień zbieżności oraz sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, jeśli

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n} & \text{dla } n \geq 0, \\ 2^n - 1 & \text{dla } n < 0. \end{cases}$$

Wyznamy sumę części regularnej oraz osobliwej szukanego szeregu. Wykorzystamy do tego wzór na sumę szeregu geometrycznego

$$\sum_{n=k}^{\infty} q^n = \frac{q^k}{1-q} \Leftrightarrow |q| < 1. \quad (4.4)$$

Dla części regularnej, korzystając ze wzoru (4.4), mamy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = \frac{3}{3-z}, \quad \text{dla } |z| < 3.$$

Z kolei dla części osobliwej dostajemy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n} - 1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n$ jest zbieżny, gdy $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$, czyli dla $|z| > \frac{1}{2}$ i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = \frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{1}{2z-1}.$$

Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ jest zbieżny, gdy $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, czyli dla $|z| > 1$ i wówczas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z-1}.$$

Otrzymaliśmy więc, że część osobliwa danego szeregu jest zbieżna dla $|z| > 1$. Podsumowując, dany szereg jest zbieżny w pierścieniu $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$, natomiast jego suma jest równa funkcji

$$f(z) = \frac{3}{3-z} + \frac{1}{2z-1} - \frac{1}{z-1}.$$

Ćwiczenie 4.3. Wyznaczyć pierścień zbieżności oraz sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, jeśli

$$a_n = \begin{cases} 2^n & \text{dla } n \geq 0, \\ (-3)^n & \text{dla } n < 0. \end{cases}$$

O rozwijaniu funkcji w szereg Laurenta

Twierdzenie 4.14. *Jeżeli funkcja f jest funkcją holomorficzną w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$, to daje się w tym pierścieniu rozwinąć w szereg Laurenta*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

przy czym

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

gdzie C jest dowolnym dodatnio skierowanym okręgiem o środku w punkcie z_0 zawartym w tym pierścieniu.

Przy rozwijaniu funkcji w szereg Laurenta możemy wykorzystać także własności szeregu geometrycznego oraz wzory na rozwinięcie funkcji w szereg Maclaurina.

Przykład 4.4. Wyznamy rozwinięcie funkcji

$$f(z) = \frac{4}{(1+z)(3-z)}$$

w szereg Laurenta w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3\}$.

Na początek rozłożymy ułamek występujący we wzorze funkcji f na sumę ułamków prostych. Mamy

$$\frac{4}{(1+z)(3-z)} = \frac{A}{1+z} + \frac{B}{3-z} = \frac{A(3-z) + B(1+z)}{(1+z)(3-z)},$$

a więc

$$4 = A(3-z) + B(1+z).$$

Stąd $A = B = 1$, czyli

$$f(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{3-z}$$

Zauważmy, że dla $z \in P$ zachodzi

$$\left| \frac{z}{3} \right| < 1 \quad \text{oraz} \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1.$$

Stąd oraz ze wzoru (4), twierdzenie 4.10., mamy

$$\frac{1}{3-z} = \frac{1}{3(1-\frac{z}{3})} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}},$$

natomiast ze wzoru (5), twierdzenie 4.10., dostajemy

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z(1+\frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

Otrzymaliśmy zatem, że

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^{n+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

gdzie

$$a_n = \begin{cases} 3^{-n-1} & \text{dla } n \geq 0, \\ (-1)^{-n-1} & \text{dla } n < 0. \end{cases}$$

Przykład 4.5. Wyznamy rozwinięcie funkcji

$$f(z) = \frac{1}{z-3} + \frac{3}{z}$$

w szereg Laurenta w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 2\}$.

Zauważmy, że dla $z \in P$ zachodzi

$$\left| \frac{z-3}{2} \right| < 1.$$

Chcemy rozwinąć funkcję f w szereg Laurenta o środku w punkcie $z_0 = 3$, tzn. zapisać ją w postaci

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-3)^n.$$

Stąd wystarczy rozwinąć w szereg Laurenta ułamek $\frac{3}{z}$, (ułamek $\frac{1}{z-3}$ jest już składnikiem powyższego szeregu). Mamy

$$\frac{3}{z} = \frac{3}{3+z-3} = \frac{3}{3(1+\frac{z-3}{3})} = \frac{1}{1+\frac{z-3}{3}}.$$

Zauważmy, że dla $z \in P$ zachodzi

$$\left| \frac{z-3}{3} \right| < \left| \frac{z-3}{2} \right| < 1.$$

Stąd oraz ze wzoru (5), twierdzenie 4.10., mamy

$$\frac{3}{z} = \frac{1}{1+\frac{z-3}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-3}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n (z-3)^n.$$

Ostatecznie

$$f(z) = \frac{1}{z-3} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3} \right)^n (z-3)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-3)^n,$$

gdzie

$$a_n = \begin{cases} \left(-\frac{1}{3} \right)^n & \text{dla } n \geq 0, \\ 1 & \text{dla } n = -1, \\ 0 & \text{dla } n \leq -2. \end{cases}$$

Ćwiczenie 4.4. Wyznaczyć rozwinięcie funkcji $f(z) = \frac{5}{z} + \frac{3}{1-2z}$ w szereg Laurenta w pierścieniu $P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Zbadać zbieżność następujących szeregów:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+5n^2i}{n^3},$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)(2-i)^n}{3^n},$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-i}{3} \right)^n,$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+i)^n}{2^n n},$

$$\begin{array}{ll}
\text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n i}{3^n}, & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2 + i}, \\
\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - i}, & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + i\sqrt{3})^n}{(2n)!}, \\
\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(in)}{2^n}, & \text{j)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + i\sqrt{3})^n}{n^3 2^n}, \\
\text{k)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(e - i)^n}, & \text{l)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n - 1} + \frac{1}{2n + 1} i \right).
\end{array}$$

Zadanie 2. Wyznaczyć koło i promień zbieżności szeregu potęgowego:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n, & \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n, & \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} (1 + i)^n z^n, \\
\text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n, & \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1 + i)} (z - i)^n, & \text{f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (z - 1)^n, \\
\text{g)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}, & \text{h)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} z^{2n}, & \text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(3n - 2)2^n}} (z - 1)^n.
\end{array}$$

Zadanie 3. Zbadać obszar zbieżności i sumę szeregu Laurenta $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$, jeśli:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{dla } n \geq 0, \\ 2^{n-1} - 1 & \text{dla } n < 0, \end{cases} & \text{b)} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \geq 0, \\ 2^{-(n+1)} & \text{dla } n < 0, \end{cases} \\
\text{c)} a_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{dla } n \geq 0, \\ 1 & \text{dla } n < 0, \end{cases} & \text{d)} a_n = \begin{cases} 0 & \text{dla } n \geq 0, \\ 2^{-(n+1)} - 1 & \text{dla } n < 0. \end{cases}
\end{array}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć rozwinięcie funkcji f w szereg Laurenta w podanym pierścieniu P :

$$\begin{array}{l}
\text{a)} f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2 - z}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}, \\
\text{b)} f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2 - z}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}, \\
\text{c)} f(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2 - z}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\},
\end{array}$$

$$\text{d) } f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \infty\},$$

$$\text{e) } f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\},$$

$$\text{f) } f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 2 < |z| < \infty\},$$

$$\text{g) } f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z-1| < \infty\},$$

$$\text{h) } f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2)}, \quad P = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 3\}.$$

Rozdział 5

Punkty osobliwe. Residua

W rozdziale tym zaczniemy od przyjrzenia się punktom zerowym funkcji zespolonej zmiennej zespolonej, które to punkty powiążemy później z punktami osobliwymi. Podamy wzory umożliwiające określenie rodzaju osobliwości w danym punkcie. Wzory te będą bazowały na rozwinięciu funkcji w szereg Laurenta oraz na badaniu odpowiednich granic.

5.1. Punkty zerowe funkcji holomorficzej

Określenia zer funkcji f holomorficzej w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{C}$ oraz ich krotności są analogiczne jak dla funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej.

Punkt zerowy

Punkt $z_0 \in D$ nazywamy punktem zerowym (lub krótko zerem) funkcji holomorficzej f , jeżeli $f(z_0) = 0$.

Punkt zerowy k -krotny

Punkt $z_0 \in D$ nazywamy k -krotnym punktem zerowym funkcji holomorficzej f mającej rozwinięcie w szereg potęgowy w otoczeniu punktu z_0 postaci

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

jeżeli

$$a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{k-1} = 0 \text{ oraz } a_k \neq 0, \text{ gdzie } k \in \mathbb{N}.$$

Przykład 5.1. Punktami zerowymi funkcji $f(z) = z^2 + 1$ są punkty $z_1 = i$ oraz $z_2 = -i$, bowiem $f(i) = 0$ oraz $f(-i) = 0$.

Ćwiczenie 5.1. Wyznaczyć punkty zerowe funkcji $f(z) = z^3 - 8$.

Przykład 5.2. Punkt $z_0 = 2$ jest trzykrotnym punktem zerowym (zerem trzykrotnym) funkcji $f(z) = 5(z - 2)^3$, bowiem $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ oraz $a_3 = 5 \neq 0$.

Ćwiczenie 5.2. Punkt $z_0 = 0$ jest zerem funkcji $f(z) = z^4(z + 3)^2$. Określić jego krotność.

Podamy teraz trzy warunki charakteryzujące krotność punktów zerowych funkcji holomorficzych w pewnym obszarze $D \subset \mathbb{C}$.

Krotność zer funkcji holomorficzej (1)

Twierdzenie 5.1. *Punkt $z_0 \in D$ jest k -krotnym punktem zerowym funkcji holomorficzej f wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$$

oraz

$$f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Przykład 5.3. Niech $f(z) = \cos z - 1$. Z równania $\cos z - 1 = 0$ otrzymujemy, że punktami zerowymi funkcji f są punkty $z_k = 2k\pi$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$. Ustalimy krotność punktów zerowych poprzez badanie wartości kolejnych pochodnych w tych punktach. Dla pochodnej rzędu pierwszego funkcji f mamy

$$f'(z) = -\sin z, \quad f'(z_k) = 0 \quad \text{dla dowolnego } k \in \mathbb{Z},$$

a więc punkty z_k nie są zerami jednokrotnymi. Badamy pochodną rzędu drugiego

$$f''(z) = -\cos z, \quad f''(z_k) \neq 0 \quad \text{dla dowolnego } k \in \mathbb{Z},$$

zatem punkty z_k są zerami dwukrotnymi funkcji f dla dowolnego $k \in \mathbb{Z}$.

Krotność zer funkcji holomorficzej (2)

Twierdzenie 5.2. *Jeżeli punkt $z_0 \in D$ jest k -krotnym punktem zerowym funkcji holomorficzej g oraz l -krotnym punktem zerowym funkcji holomorficzej h , to jest $(k+l)$ -krotnym punktem zerowym funkcji $g \cdot h$.*

Przykład 5.4. Niech $f(z) = (z^2 - 1)(z - 1)^3$. Połóżmy

$$g(z) = z^2 - 1, \quad h(z) = (z - 1)^3.$$

Punkty $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ są zerami jednokrotnymi funkcji g , natomiast punkt $z_0 = 1$ jest zerem trzykrotnym funkcji h . A zatem punkt $z_1 = 1$ jest zerem czterokrotnym funkcji f , a punkt $z_2 = -1$ jest jej zerem jednokrotnym.

Krotność zer funkcji holomorficzej (3)

Twierdzenie 5.3. *Punkt $z_0 \in D$ jest k -krotnym punktem zerowym funkcji holomorficzej f wtedy i tylko wtedy, gdy można ją przedstawić w postaci*

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z),$$

gdzie funkcja φ jest funkcją holomorficzną w punkcie z_0 oraz

$$\varphi(z_0) \neq 0.$$

Przykład 5.5. Niech $f(z) = (z - 1)^2(z + 1)$. Punkty $z_1 = 1$ oraz $z_2 = -1$ są zerami funkcji f . Funkcję f można zapisać w postaci

$$f(z) = (z - 1)^2 \varphi(z),$$

gdzie $\varphi(z) = z + 1$ jest funkcją holomorficzną w punkcie $z_1 = 1$ oraz $\varphi(z_1) = 2 \neq 0$, a zatem punkt $z_1 = 1$ jest dwukrotnym punktem zerowym funkcji f .

Analogicznie, zapisując funkcję f w postaci

$$f(z) = (z + 1)\psi(z),$$

gdzie $\psi(z) = (z - 1)^2$ jest funkcją holomorficzną w punkcie $z_2 = -1$ oraz $\psi(z_2) = 4 \neq 0$, wnosimy, że punkt $z_2 = -1$ jest jednokrotnym punktem zerowym danej funkcji f .

Ćwiczenie 5.3. Wyznaczyć zera funkcji f oraz określić ich krotności, jeśli:

$$\text{a) } f(z) = (z^2 + 4)(z - 2i), \quad \text{b) } f(z) = 1 + \sin z.$$

5.2. Punkty osobliwe odosobnione

Punkt regularny

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, dla którego istnieje otoczenie, w którym funkcja zespolona f jest holomorficzna, nazywamy punktem regularnym tej funkcji.

Punkt osobliwy odosobniony

Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, w którym funkcja zespolona f nie jest holomorficzna, ale jest holomorficzna w pewnym sąsiedztwie tego punktu, nazywamy punktem osobliwym odosobnionym tej funkcji.

Przykład 5.6. Funkcja $f(z) = z + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2+1}$ ma trzy punkty osobliwe odosobnione $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. Wszystkie pozostałe punkty płaszczyzny zespolonej są jej punktami regularnymi.

Ćwiczenie 5.4. Wskazać punkty osobliwe odosobnione funkcji $f(z) = \frac{i}{\sin z}$.

Wyróżniamy trzy rodzaje osobliwości, które określimy z wykorzystaniem rozwinięcia funkcji w szereg Laurenta. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie punktem osobliwym odosobnionym funkcji f oraz niech rozwinięcie funkcji f w otoczeniu pierścieniowym (sąsiedztwie) tego punktu w szereg Laurenta będzie postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

gdzie $a_n \in \mathbb{C}$ dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$. Wówczas

Punkt pozornie osobliwy

Punkt z_0 nazywamy punktem pozornie osobliwym funkcji f , jeżeli część osobliwa szeregu Laurenta redukuje się do zera.

Kładąc $f(z_0) = a_0$ funkcja f staje się holomorficzną w punkcie z_0 .

Biegun k -krotny

Punkt z_0 nazywamy biegunem k -krotnym (biegunem rzędu k) funkcji f , jeżeli część osobliwa szeregu Laurenta jest postaci

$$a_{-k}(z - z_0)^{-k} + \dots + a_{-2}(z - z_0)^{-2} + a_{-1}(z - z_0)^{-1},$$

przy czym $a_{-k} \neq 0$, a więc wówczas, gdy część osobliwa ma skończoną ilość współczynników różnych od zera.

Punkt istotnie osobliwy

Punkt z_0 nazywamy punktem istotnie osobliwym funkcji f , jeżeli część osobliwa szeregu Laurenta ma nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera.

Przykład 5.7.

a) Niech $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Punktem osobliwym jest punkt $z_0 = 0$. Ponieważ

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dla $z \in \mathbb{C}$, (twierdzenie 4.10., wzór (2)), więc rozwinięcie funkcji $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ w szereg Laurenta jest postaci

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots,$$

gdzie $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Część osobliwa rozwinięcia funkcji $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ w szereg Laurenta w otoczeniu pierścieniowym punktu $z_0 = 0$ zredukowała się do zera (wszystkie współczynniki w części osobliwej są równe zero), a więc punkt $z_0 = 0$ jest punktem pozornie osobliwym tej funkcji.

b) Niech $f(z) = \frac{4}{(z-1)^3} - \frac{3}{z-1} + 2(z-1) + 5(z-1)^4 - (z-1)^5$. Punkt $z_0 = 1$ jest punktem osobliwym funkcji f i jest on jej biegunem trzykrotnym (część osobliwa rozwinięcia funkcji f w szereg Laurenta w otoczeniu pierścieniowym punktu $z_0 = 1$ ma skończoną ilość współczynników różnych od zera, przy czym $a_{-3} = 4 \neq 0$).

c) Niech $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Punktem osobliwym jest punkt $z_0 = 0$. Kładąc $\frac{1}{z}$ w miejsce z w równości $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, (twierdzenie 4.10., wzór (1)), mamy

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots,$$

gdzie $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Część osobliwa rozwinięcia funkcji $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ w szereg Laurenta w otoczeniu pierścieniowym punktu $z_0 = 0$ ma nieskończenie wiele wyrazów różnych od zera, a więc punkt $z_0 = 0$ jest punktem istotnie osobliwym tej funkcji.

Ćwiczenie 5.5. Wyznaczyć punkt osobliwy odosobniony funkcji f oraz określić jego rodzaj, jeśli:

$$\text{a) } f(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{\cos z}{z^2}, \quad \text{c) } f(z) = e^{\frac{i}{z^2}}.$$

Charakteryzację punktów osobliwych odosobnionych można przeprowadzić poprzez badanie granicy funkcji w punkcie osobliwym.

Charakteryzacja punktów osobliwych odosobnionych

Twierdzenie 5.4. Niech $z_0 \in \mathbb{C}$ będzie punktem osobliwym odosobnionym funkcji zespolonej f . Wówczas

- Punkt z_0 jest punktem pozornie osobliwym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje granica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \neq \infty$.
- Punkt z_0 jest biegunem funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty.$$

Punkt z_0 jest biegunem k -krotnym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^k f(z)) \neq 0 \quad \text{i} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^{k+1} f(z)) = 0.$$

- Punkt z_0 jest punktem istotnie osobliwym funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy granica $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ nie istnieje.

Podstawiając w punkcie pozornie osobliwym $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

funkcja f staje się holomorficzną w punkcie z_0 .

Przykład 5.8.

a) Niech $f(z) = \frac{\sin z}{z}$. Granica funkcji f w punkcie osobliwym $z_0 = 0$ jest równa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1,$$

a zatem punkt $z_0 = 0$ jest punktem pozornie osobliwym funkcji f . Kładąc $f(0) = 1$ otrzymujemy funkcję

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{gdy } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 1 & \text{gdy } z = 0, \end{cases}$$

która jest funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej.

b) Niech $f(z) = \frac{2}{z-1}$. Punkt $z_0 = 1$ jest biegunem, ponieważ

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{2} = 0,$$

stąd

$$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{2}{z-1} = \infty.$$

Jest to biegun jednokrotny, ponieważ

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left((z-1) \frac{2}{z-1} \right) = 2 \neq 0$$

oraz

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left((z-1)^2 \frac{2}{z-1} \right) = 2 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) = 0.$$

c) Niech $f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Punkt $z_0 = 0$ jest punktem istotnie osobliwym. Pokażemy, że granica $\lim_{z \rightarrow 0} \sin \frac{1}{z}$ nie istnieje. Weźmy dwa różne ciągi

$$z'_n = \frac{1}{\pi n} \quad \text{oraz} \quad z''_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}.$$

Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wszystkie wyrazy obu ciągów są różne od zera i oba ciągi są zbieżne do zera. Natomiast

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n\pi) = 0, \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(z''_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Zatem granica funkcji f w punkcie $z_0 = 0$ nie istnieje.

Między zerami funkcji holomorficznej a biegunami zachodzą pewne zależności, które opisują trzy poniższe twierdzenia.

Związek między zerami a biegunami (1)

Twierdzenie 5.5. *Jeżeli punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest biegunem k -krotnym funkcji f , to jest on zerem k -krotnym funkcji*

$$h(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{dla } z \neq z_0, \\ 0 & \text{dla } z = z_0. \end{cases}$$

Związek między zerami a biegunami (2)

Twierdzenie 5.6. *Jeżeli punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest zerem k -krotnym funkcji f , to jest biegunem k -krotnym funkcji $\frac{1}{f}$.*

Związek między zerami a biegunami (3)

Twierdzenie 5.7. *Jeżeli funkcja g ma w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$ zero k -krotne, funkcja h ma w punkcie z_0 zero l -krotne, to punkt z_0 jest*

- *biegunem $(l - k)$ -krotnym funkcji $f = \frac{g}{h}$, gdy $l > k$,*
- *punktem pozornie osobliwym funkcji $f = \frac{g}{h}$, gdy $l \leq k$.*

Przykład 5.9.

a) Punkt $z_0 = 1$ jest zerem jednokrotnym funkcji $\tilde{f}(z) = \frac{z-1}{2}$, a więc jest on biegunem jednokrotnym funkcji $f(z) = \frac{1}{\tilde{f}(z)} = \frac{2}{z-1}$.

b) Niech $f(z) = \frac{z(z-2i)}{(z^2+4)^3}$. Funkcję tę możemy przepisać w postaci

$$f(z) = \frac{z(z-2i)}{(z-2i)^3(z+2i)^3}.$$

Położmy

$$g(z) = z(z-2i), \quad h(z) = (z-2i)^3(z+2i)^3.$$

Punkt $z_0 = 2i$ jest zerem trzykrotnym funkcji h oraz jest zerem jednokrotnym funkcji g , a zatem jest biegunem dwukrotnym funkcji f . Punkt $z_0 = -2i$

jest zerem trzykrotnym funkcji h , ale nie jest zerem funkcji g , a zatem jest biegunem trzykrotnym funkcji f .

c) Niech $f(z) = \frac{(z-1)(z+i)}{z^2-1}$. Funkcję tę możemy przepisać w postaci

$$f(z) = \frac{(z-1)(z+i)}{(z-1)(z+1)}.$$

Położmy

$$g(z) = (z-1)(z+i); \quad h(z) = (z-1)(z+1).$$

Punkt $z_0 = -1$ jest zerem jednokrotnym funkcji h oraz nie jest zerem funkcji g , a zatem jest biegunem jednokrotnym funkcji f . Punkt $z_0 = 1$ jest zerem jednokrotnym funkcji h , ale jest też zerem jednokrotnym funkcji g , a zatem jest punktem pozornie osobliwym funkcji f .

Ćwiczenie 5.6. Wyznaczyć punkty osobliwe podanych funkcji oraz określić ich rodzaj, jeśli:

$$\text{a) } f(z) = \frac{2z}{z^3 + z}, \quad \text{b) } f(z) = \frac{z+i}{(z^2-4)^2(z^2+(i-2)z-2i)}.$$

5.3. Residua

Niech funkcja zespolona f będzie holomorficzną w pewnym sąsiedztwie punktu $z_0 \in \mathbb{C}$.

Residuum

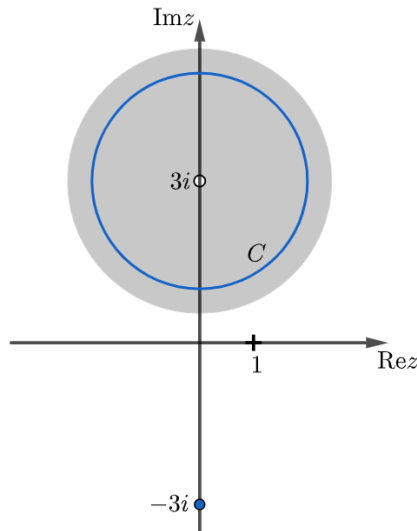
Residuum funkcji f w punkcie osobliwym odosobnionym z_0 nazywamy liczbę

$$\text{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz,$$

gdzie C jest dowolnym konturem zawierającym w swoim wnętrzu punkt z_0 oraz zawartym w sąsiedztwie punktu z_0 , w którym funkcja f jest holomorficzną.

Przykład 5.10. Niech $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$. Punktami osobliwymi funkcji f są punkty $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$. Funkcja f jest holomorficzną np. w sąsiedztwie $0 < |z - 3i| < \sqrt{6}$ punktu $z_1 = 3i$. Konturem C może być np. dodatnio

skierowany okrąg o środku w punkcie $z_1 = 3i$ i promieniu równym 2, (patrz rysunek 5.1).



Rysunek 5.1

Zauważmy, że

$$\int_C f(z) dz = \int_C \frac{1}{z^2 + 9} dz = \int_C \frac{1}{(z + 3i)(z - 3i)} dz = \int_C \frac{\frac{1}{z + 3i}}{z - 3i} dz.$$

Niech $g(z) = \frac{1}{z + 3i}$. Funkcja g jest holomorphyzna wewnątrz i na brzegu obszaru jednospójnego ograniczonego konturem C (punkt $z_2 = -3i$, w którym funkcja g nie jest holomorphyzna, leży na zewnątrz tego obszaru), więc ze wzoru całkowego Cauchy'ego

$$\int_C \frac{\frac{1}{z + 3i}}{z - 3i} dz = \int_C \frac{g(z)}{z - 3i} dz = 2\pi i \cdot g(3i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$

Zatem

$$\operatorname{res}_{3i} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{6}i.$$

Funkcja f jest również holomorphyzna np. w sąsiedztwie $0 < |z + 3i| < \sqrt{6}$ punktu $z_2 = -3i$. Niech C będzie teraz dowolnym konturem zawierającym w swoim wnętrzu punkt $z_2 = -3i$ zawartym w sąsiedztwie $0 < |z + 3i| < \sqrt{6}$.

Postępując analogicznie otrzymujemy

$$\operatorname{res}_{-3i} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}i.$$

Ćwiczenie 5.7. Wyznaczyć residuum funkcji f w punkcie $z_0 = -i$, jeśli

$$f(z) = \frac{iz}{z+i}.$$

Przy obliczaniu residuum funkcji zespolonych możemy wykorzystać następujący związek między residuum funkcji a jej rozwinięciem w szereg Laurenta.

Związek między residuum funkcji i jej szeregiem Laurenta

Twierdzenie 5.8. Residuum funkcji f holomorficznej w pewnym sąsiedztwie punktu $z_0 \in \mathbb{C}$ jest równe współczynnikowi a_{-1} przy $(z - z_0)^{-1}$ w rozwinięciu funkcji f w szereg Laurenta w tym sąsiedztwie, tj.

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = a_{-1}.$$

Dowód. Z założenia funkcja f jest holomorficzna w pewnym sąsiedztwie punktu $z_0 \in \mathbb{C}$, zatem jest w tym sąsiedztwie rozwijalna w szereg Laurenta, a więc możemy ją przedstawić w postaci

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n}.$$

Stąd

$$\int_C f(z) dz = \int_C \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n dz + \int_C \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz,$$

gdzie C jest dowolnym konturem zawartym w sąsiedztwie punktu z_0 , w którym funkcja f jest holomorficzna. Z twierdzenia całkowego Cauchy'ego

$$\int_C (z - z_0)^n dz = 0 \text{ dla dowolnego } n \geq 0.$$

Mamy więc

$$\int_C f(z) dz = \int_C a_{-1} \frac{1}{z - z_0} dz + \int_C a_{-2} \frac{1}{(z - z_0)^2} dz + \int_C a_{-3} \frac{1}{(z - z_0)^3} dz + \dots$$

Niech $C = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, gdzie $r > 0$. Krzywą C możemy zapisać w następującej postaci parametrycznej

$$C : z = z_0 + re^{it}, \quad \text{gdzie } t \in [0, 2\pi].$$

Wówczas

$$dz = ire^{it} dt.$$

Korzystając ze wzoru na zamianę całki zespolonej na całkę oznaczoną (twierdzenie 3.4.) mamy

$$\int_C a_{-1} \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} a_{-1} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = a_{-1} \int_0^{2\pi} i dt = a_{-1} 2\pi i.$$

Niech $n \geq 2$. Wówczas

$$\begin{aligned} \int_C a_{-n} \frac{1}{(z - z_0)^n} dz &= \int_0^{2\pi} a_{-n} \frac{1}{r^n e^{nit}} ire^{it} dt = \\ &= a_{-n} \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{it(1-n)} dt = a_{-n} \frac{i}{r^{n-1}} \frac{1}{i(1-n)} e^{it(1-n)} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= a_{-n} \frac{1}{r^{n-1}(1-n)} (e^{2\pi i(1-n)} - e^{0i}) = 0. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1},$$

Stąd

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \text{res}_{z_0} f(z).$$

□

Jeżeli punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ jest punktem pozornie osobliwym funkcji f , to część osobliwa szeregu Laurenta redukuje się do zera, a więc współczynnik a_{-1} przy $(z - z_0)^{-1}$ rozwinięcia jest równy zero, stąd residuum funkcji f w tym punkcie też jest równe zero.

Rozwinięcie funkcji w szereg Laurenta wykorzystujemy w szczególności przy obliczaniu residuum w punkcie istotnie osobliwym, co ilustruje poniższy przykład.

Przykład 5.11. Funkcja $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ jest holomorficzną w sąsiedztwie $0 < |z| < \infty$ punktu $z_0 = 0$. Rozwinięcie funkcji f w szereg Laurenta w tym sąsiedztwie jest postaci

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2 2!} + \frac{1}{z^3 3!} + \dots$$

Stąd

$$\operatorname{res}_0 e^{\frac{1}{z}} = 1.$$

Ćwiczenie 5.8. Wyznaczyć residuum funkcji f w punkcie $z_0 = 0$, jeśli

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

Do obliczenia residuum funkcji zespolonej w punkcie osobliwym odosobnionym $z_0 \in \mathbb{C}$ można wykorzystać następujące trzy twierdzenia.

Związek między residuum a biegunem jednokrotnym (1)

Twierdzenie 5.9. *Jeżeli z_0 jest biegunem jednokrotnym funkcji f , to*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)f(z)).$$

Dowód. Niech punkt z_0 będzie biegunem jednokrotnym funkcji f , wówczas rozwinięcie funkcji f w sąsiedztwie punktu z_0 w szereg Laurenta jest postaci

$$f(z) = a_{-1} \frac{1}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Zatem

$$\lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)f(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(a_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+1} \right) = a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

□

Przykład 5.12. Niech $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$. Punkt $z_1 = 3i$ jest biegunem jednokrotnym funkcji f , bo jest zerem jednokrotnym funkcji $\frac{1}{f}$, więc z twierdzenia 5.9.

$$\operatorname{res}_{3i} f(z) = \lim_{z \rightarrow 3i} \left((z - 3i) \frac{1}{(z + 3i)(z - 3i)} \right) = \lim_{z \rightarrow 3i} \frac{1}{z + 3i} = \frac{1}{6i} = -\frac{1}{6}i.$$

Biegunem jednokrotnym funkcji f jest również punkt $z_2 = -3i$. Postępując analogicznie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-3i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -3i} \left((z + 3i) \frac{1}{(z + 3i)(z - 3i)} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -3i} \frac{1}{z - 3i} = -\frac{1}{6i} = \frac{1}{6}i. \end{aligned}$$

Związek między residuum a biegunem jednokrotnym (2)

Twierdzenie 5.10. *Jeżeli funkcja $f = \frac{g}{h}$, gdzie funkcje g, h są holomorficzne w pewnym otoczeniu punktu z_0 będącego biegunem jednokrotnym funkcji f , przy czym $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ oraz $h'(z_0) \neq 0$, to*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Przykład 5.13. Obliczmy residua funkcji $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$ w jej punktach osobliwych odosobnionych. Punkt $z_1 = i$ jest biegunem jednokrotnym funkcji f . Niech

$$g(z) = \cos z, \quad h(z) = z^2 + 1.$$

Funkcje g, h są holomorficzne na \mathbb{C} , a więc na dowolnym otoczeniu punktu $z_1 = i$, oraz

$$g(i) = \cos i = \frac{e^{-1} + e^1}{2} \neq 0,$$

$$h(i) = 0 \quad \text{oraz} \quad h'(i) = 2i \neq 0.$$

Zatem z twierdzenia 5.10.

$$\operatorname{res}_i \frac{\cos z}{z^2 + 1} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} \cdot \frac{1}{2i} = \frac{e^{-1} + e}{4i} = \frac{1 + e^2}{4ei} = \frac{-1 - e^2}{4e} i.$$

Biegunem jednokrotnym funkcji f jest również punkt $z_2 = -i$. Postępując analogicznie otrzymujemy

$$\operatorname{res}_{-i} \frac{\cos z}{z^2 + 1} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} \cdot \frac{1}{-2i} = \frac{e^{-1} + e}{-4i} = \frac{1 + e^2}{-4ei} = \frac{1 + e^2}{4e} i.$$

Związek między residuum a biegunem k -krotnym (3)

Twierdzenie 5.11. *Jeżeli z_0 jest biegunem k -krotnym funkcji f , to*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)).$$

Przykład 5.14. Niech $f(z) = \frac{2z^2}{(z-1)^3}$. Punkt $z_0 = 1$ jest biegunem trzykrotnym funkcji $f(z)$, bo jest zerem trzykrotnym funkcji w mianowniku i nie jest

zerem funkcji w liczniku, a więc

$$\operatorname{res}_1 f(z) = \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \left((z-1)^3 \frac{2z^2}{(z-1)^3} \right)'' = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} (2z^2)'' = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} 4 = 2.$$

Ćwiczenie 5.9. Obliczyć residua funkcji f w jej punktach osobliwych odosobnionych, jeśli

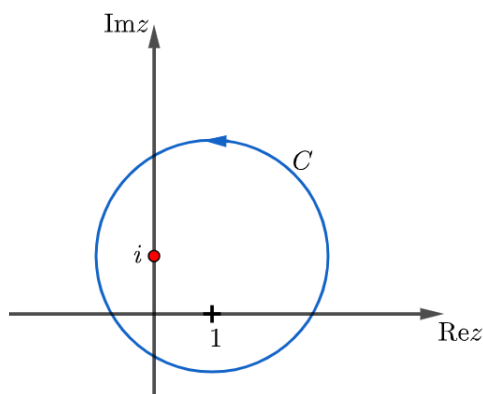
$$f(z) = \frac{2i(z-1)}{(z+i)(z^2-1)^3}.$$

Korzystając bezpośrednio z definicji residuum mamy, że jeżeli krzywa C jest konturem zawierającym w swoim wnętrzu punkt osobliwy odosobniony $z_0 \in \mathbb{C}$ funkcji zespolonej f i leżącym w sąsiedztwie punktu z_0 , w którym funkcja f jest holomorphyzna, to

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Możemy więc wykorzystać rachunek residuów do obliczania całek po konturach.

Przykład 5.15. Niech $f(z) = \frac{3z}{z-i}$ oraz niech C będzie dodatnio skierowanym okręgiem o środku w punkcie $1+i$ i promieniu 2. Funkcja f ma jeden punkt osobliwy $z_0 = i$, będący biegunem jednokrotnym, który leży wewnątrz konturu C . (patrz rysunek 5.2)



Rysunek 5.2

Residuum w punkcie $z_0 = i$ jest równe

$$\operatorname{res}_i f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \left((z-i) \frac{3z}{z-i} \right) = \lim_{z \rightarrow i} (3z) = 3i.$$

Zatem

$$\int_C \frac{3z}{z-i} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_i \frac{3z}{z-i} = -6\pi.$$

Ćwiczenie 5.10. Obliczyć, korzystając z definicji residuum, całkę

$$\int_C \frac{iz^3}{(z-4)^2} dz,$$

gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem o równaniu $|z-3|=2$.

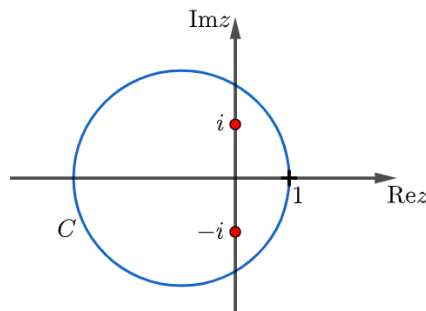
Jeżeli wewnątrz konturu wzdłuż którego przebiega całkowanie znajduje się więcej niż jeden punkt osobliwy, to wówczas do dyspozycji mamy następujące twierdzenie, nazywane twierdzeniem całkowym o residuach.

Twierdzenie całkowite o residuach

Twierdzenie 5.12. *Jeżeli funkcja f jest holomorphyzna w obszarze jednospójnym $D \subset \mathbb{C}$ z wyjątkiem co najwyżej skończonej liczby punktów z_1, z_2, \dots, z_n , a krzywa C jest zawartym w obszarze D konturem zawierającym w swoim wnętrzu punkty z_1, z_2, \dots, z_n , to*

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z_k).$$

Przykład 5.16. Niech $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, a C niech będzie dodatnio skierowanym okręgiem określonym równaniem $|z+1|=2$. Funkcja f jest holomorphyzna w zbiorze $D = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$. Punkty $z_1 = i$ oraz $z_2 = -i$ będące biegunami jednokrotnymi funkcji f leżą wewnątrz konturu C . (patrz rysunek 5.3)



Rysunek 5.3

Zatem z twierdzenia 5.9. dotyczącego obliczania residuum w przypadku biegunu jednokrotnego mamy

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \left((z - i) \frac{z}{(z - i)(z + i)} \right) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z}{z + i} = \frac{1}{2}, \\ \operatorname{res}_{-i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -i} \left((z + i) \frac{z}{(z - i)(z + i)} \right) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{z}{z - i} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Stosując twierdzenie całkowe o residuach otrzymujemy

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \cdot (\operatorname{res}_i f(z) + \operatorname{res}_{-i} f(z)) = 2\pi i \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = 2\pi i.$$

Ćwiczenie 5.11. Obliczyć, korzystając z twierdzenia całkowego o residuach, całkę

$$\int_C \frac{z - i}{(z + i)z} dz,$$

gdzie C jest dodatnio zorientowanym okręgiem o równaniu $|z| = 5$.

Rachunek residuów znajduje również zastosowanie przy obliczaniu niektórych typów całek niewłaściwych funkcji rzeczywistych zmiennej rzeczywistej.

Związek residuów z całką niewłaściwą funkcji rzeczywistej

Twierdzenie 5.13. Niech $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ będzie funkcją wymierną zmiennej $x \in \mathbb{R}$, gdzie Q jest wielomianem stopnia wyższego o przynajmniej dwa stopnie od stopnia wielomianu P . Jeżeli wielomian Q nie ma pierwiastków rzeczywistych, to istnieje całka niewłaściwa zmiennej rzeczywistej postaci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$$

i jest ona równa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} R(z), \quad \operatorname{Im}(z_k) > 0.$$

Przykład 5.17. Obliczmy całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 16} dx.$$

Położmy

$$P(x) = 1, \quad Q(x) = x^2 + 16$$

oraz niech

$$R(z) = \frac{1}{z^2 + 16}.$$

Wielomian Q nie ma pierwiastków rzeczywistych oraz jest on wielomianem stopnia wyższego o dwa stopnie od wielomianu P . Zatem do obliczenia danej całki możemy zastosować twierdzenie 5.13. Punktami osobliwymi funkcji R są punkty $z_1 = 4i$ oraz $z_2 = -4i$. W górnej półpłaszczyźnie zespolonej leży tylko pierwiastek $z_1 = 4i$ ($\text{Im}z_k > 0$), który jest biegunem jednokrotnym funkcji f , a więc

$$\text{res}_{4i} R(z) = \lim_{z \rightarrow 4i} (z - 4i) \frac{1}{z^2 + 16} = \lim_{z \rightarrow 4i} \frac{1}{z + 4i} = \frac{1}{8i} = -\frac{1}{8}i.$$

Zatem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 16} dx = 2\pi i \left(-\frac{1}{8}i \right) = \frac{\pi}{4}.$$

Wykorzystując metody z analizy rzeczywistej mamy

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 16} dx &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 16} dx = 2 \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_0^{\beta} \frac{1}{x^2 + 16} dx \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\text{arctg} \left(\frac{\beta}{4} \right) - \text{arctg}(0) \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5.12. Obliczyć całkę

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Wyznaczyć zera podanych funkcji oraz obliczyć ich krotności:

a) $f(z) = z^2 + 2z + 5,$

b) $f(z) = (z - i)(z^2 + 1)^3,$

c) $f(z) = (z + i)^2(z^2 + 3iz + 4),$

d) $f(z) = z \sin z,$

e) $f(z) = 1 - \cos z,$

f) $f(z) = (z - \pi)^2(e^{2iz} - 1),$

g) $f(z) = \frac{z}{\sin z},$

h) $f(z) = \frac{z(z^2 + 4)^2}{\cos 2z - 1}.$

Zadanie 2. Wyznaczyć punkty osobliwe podanych funkcji. Określić i uzasadnić ich rodzaj. W przypadku biegunów podać ich krotność.

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+2)^2}, & \text{b) } f(z) = \frac{z+i}{z^2+1}, \\
 \text{c) } f(z) = \frac{z-3i}{z(z^2+9)^3}, & \text{d) } f(z) = \frac{1}{(iz+1+i)(z^2-2iz-2)}, \\
 \text{e) } f(z) = \frac{3}{z^4(\cos z-1)}, & \text{f) } f(z) = \frac{z}{\sin z}, \\
 \text{g) } f(z) = 2z \operatorname{tg}^3 z, & \text{h) } f(z) = \frac{z+2i}{z^2-(1-i)z+2-2i}, \\
 \text{i) } f(z) = 1 - e^{\frac{i}{z}}, & \text{j) } f(z) = e^{\frac{1}{z+1}}.
 \end{array}$$

Zadanie 3. Obliczyć residua podanych funkcji we wskazanych punktach osobliwych:

$$\begin{array}{ll}
 \text{a) } f(z) = \frac{2z}{z^2+1}, & z_0 = -i, \\
 \text{b) } f(z) = \frac{z^2-4}{(z-2)^2(z+2i)}, & z_0 = 2, \\
 \text{c) } f(z) = \frac{2-i}{z^2-(4-i)z-(2i-4)}, & z_0 = 2, \\
 \text{d) } f(z) = \frac{3}{z^2(z-i)}, & z_0 = 0, \\
 \text{e) } f(z) = \frac{z^3-2z^2}{(z-2i)^3}, & z_0 = 2i \\
 \text{f) } f(z) = \frac{\cos z}{z(2z+i)}, & z_0 = 0 \\
 \text{g) } f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z-i)^3}, & z_0 = i, \\
 \text{h) } f(z) = \frac{3z}{\sin z}, & z_0 = \pi, \\
 \text{i) } f(z) = e^{\frac{i}{z}} - 1, & z_0 = 0, \\
 \text{j) } f(z) = z^3 e^{\frac{2}{z}}, & z_0 = 0.
 \end{array}$$

Zadanie 4. Obliczyć podane całki korzystając z twierdzenia całkowego o residuach:

$$\text{a) } \int_C \frac{z+1}{z^2(z-i)} dz, \quad C - \text{ dodatnio zorientowany okrąg } |z| = 2,$$

$$\text{b) } \int_C \frac{dz}{z(z^2+4)}, \quad C - \text{ łamana zamknięta o wierzchołkach} \\ 1-i, -1-i, 3i,$$

$$\text{c) } \int_C \frac{2iz}{z^2-iz+2} dz, \quad C - \text{ dodatnio zorientowany okrąg } |z| = 3,$$

$$\text{d) } \int_C \frac{9dz}{(iz^2+z+2i)^2}, \quad C - \text{ łamana zamknięta o wierzchołkach} \\ 2, -2, -2i,$$

$$\text{e) } \int_C \frac{\sin z}{z^2(2z-\pi)} dz, \quad C - \text{ dodatnio zorientowany okrąg } |z| = 2,$$

$$\text{f) } \int_C \frac{z}{e^{2z}-1} dz, \quad C - \text{ dodatnio zorientowany okrąg } |z+2i| = 3,$$

$$\text{g) } \int_C z^2 e^{\frac{i}{z}} dz, \quad C - \text{ dodatnio zorientowany okrąg } |z| = 1,$$

$$\text{h) } \int_C \left(6z^3 + \frac{2}{z}\right) e^{\frac{1}{z}} dz, \quad C - \text{ łamana zamknięta o wierzchołkach} \\ 1+i, 1-i, -1-i, -1+i.$$

Zadanie 5. Obliczyć podane całki niewłaściwe korzystając z residuów:

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{5}{x^2+4} dx,$$

$$\text{b) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+5x^2+4} dx,$$

$$\text{c) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6}{(3+x^2)^3} dx,$$

$$\text{d) } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{9}{(x^2+1)^2(x^2+4)} dx.$$

Rozdział 6

Transformata Laplace'a

W rozdziale tym zajmiemy się transformatą Laplace'a, omówimy jej własności. Transformata Laplace'a jest jednym z narzędzi służących do rozwiązywania równań oraz układów równań różniczkowych zwyczajnych. Zastosowanie metody operatorowej do rozwiązania równania różniczkowego powoduje przekształcenie problemu wyjściowego w równanie algebraiczne. Mając równanie różniczkowe dla oryginału i wykorzystując własności transformaty Laplace'a dostajemy równanie algebraiczne dla obrazu. Z otrzymanego równania wyznaczamy obraz, a następnie na podstawie obrazu wyznaczamy oryginał.

6.1. Przekształcenie Laplace'a

Transformata Laplace'a

- Transformatą Laplace'a funkcji zespolonej f określonej na \mathbb{R} nazywamy taką funkcję zespoloną Φ określoną na \mathbb{C} , że

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (6.1)$$

określoną dla tych s , dla których całka występująca po prawej stronie wzoru jest zbieżna.

- Funkcję Φ nazywamy obrazem funkcji f , a całkę występującą po prawej stronie wzoru 6.1 nazywamy całką Laplace'a.

Transformatę Laplace'a funkcji f oznacza się także przez $\mathcal{L}\{f\}$ lub $L[f]$.

Przekształcenie Laplace'a

Niech X oznacza przestrzeń, w której całka Laplace'a jest zbieżna. Wówczas odwzorowanie

$$X \ni f \rightarrow \mathcal{L}\{f\}$$

nazywamy przekształceniem Laplace'a.

Warto zwrócić uwagę, że przekształcenie Laplace'a jest przekształceniem zbioru funkcji zespolonych f określonych na \mathbb{R} , dla których całka Laplace'a jest zbieżna, w zbiór funkcji zespolonych określonych na \mathbb{C} , a transformata Laplace'a jest obrazem pewnej funkcji f przez przekształcenie Laplace'a.

Omówimy teraz pewną istotną klasę funkcji, nazywanych oryginałami, a następnie wskażemy ich związek z transformatą Laplace'a.

Oryginał

Oryginałem nazywamy funkcję zespoloną f określoną na \mathbb{R} spełniającą następujące warunki:

- $f(t) = 0$ dla $t < 0$,
- funkcja f ma na każdym przedziale $[0, T]$, gdzie $T > 0$, skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju,
- funkcja f jest funkcją rzędu wykładniczego o wskaźniku λ_0 , tj. istnieją takie dwie stałe $\lambda_0 \geq 0$ oraz $M > 0$, że dla każdego $t \geq 0$ spełniona jest nierówność

$$|f(t)| \leq M e^{\lambda_0 t}.$$

Wiele funkcji staje się oryginałami po przemnożeniu jej przez funkcję jednostkową

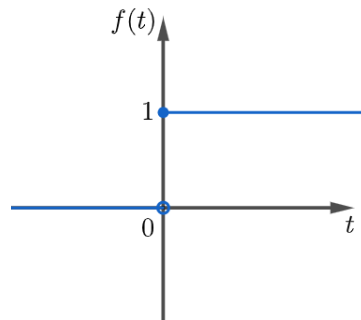
$$\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t \geq 0, \end{cases}$$

która jest oryginałem, (rysunek 6.1). Jest to funkcja rzędu wykładniczego o

wskaźniku $\lambda_0 = 1$. Jedynym punktem nieciągłości tej funkcji jest punkt $t = 0$ i jest to punkt nieciągłości pierwszego rodzaju, bowiem

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \eta(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \eta(t) = 1.$$

Funkcja jednostkowa η nazywana jest też funkcją Heaviside'a.

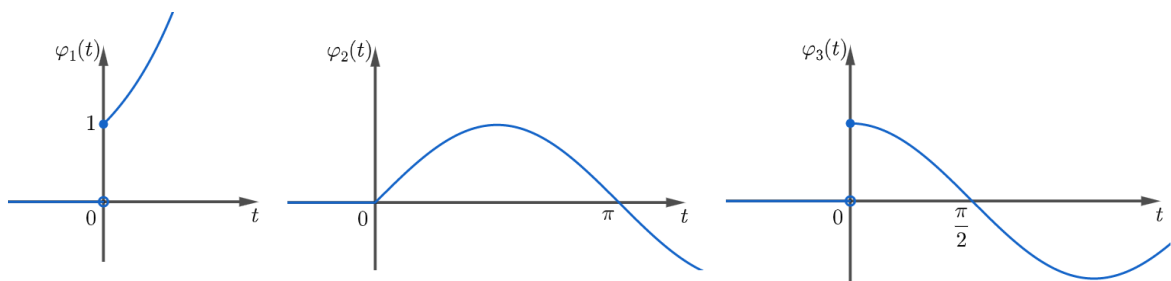


Rysunek 6.1: Funkcja jednostkowa (Heaviside'a)

Przykład 6.1. Funkcja $f_1(t) = e^t$ staje się oryginałem po przemnożeniu przez funkcję jednostkową. Mamy wówczas

$$\varphi_1(t) = f_1(t)\eta(t) = e^t\eta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ e^t & \text{dla } t \geq 0. \end{cases}$$

Funkcja φ_1 jest rzędu wykładniczego o wskaźniku $\lambda_0 = 1$ przy $M = 1$. Oryginałem, po przemnożeniu przez funkcję jednostkową η , stają się również funkcje $f_2(t) = \sin t$ oraz $f_3(t) = \cos t$, a więc oryginałami są funkcje $\varphi_2(t) = f_2(t)\eta(t)$, $\varphi_3(t) = f_3(t)\eta(t)$. Warunek (3) spełniają z $M = 1$ oraz $\lambda_0 = 0$.



Rysunek 6.2

Dla uproszczenia, jeśli funkcja f po przemnożeniu przez funkcję jednostkową η staje się oryginałem, będziemy pisać tylko f .

Transformatę Laplace'a z oryginałami łączy następujące twierdzenie

Związek transformaty Laplace'a z oryginałami

Twierdzenie 6.1. *Niech f będzie oryginałem ze wskaźnikiem wzrostu równym λ_0 . Wówczas w półpłaszczyźnie zespolonej $D = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \lambda_0\}$ całka Laplace'a jest zbieżna, transformata Φ jest określona, holomorphyzna oraz $\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \Phi(s) = 0$.*

Przykład 6.2. Wyznaczymy, korzystając bezpośrednio z definicji transformaty Laplace'a, obraz funkcji jednostkowej η . Przykładając przekształcenie Laplace'a do funkcji jednostkowej η mamy

$$\begin{aligned} L[\eta(t)] = L[1] = \Phi(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (e^{-st}) \Big|_0^{\alpha} = -\frac{1}{s} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (e^{-\alpha s} - 1). \end{aligned}$$

Niech $s = \lambda + i\omega$, gdzie $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$. Wówczas

$$|e^{-\alpha s}| = |e^{-\alpha(\lambda + i\omega)}| = |e^{-\alpha\lambda} e^{-i\alpha\omega}| = |e^{-\alpha\lambda}| \cdot |e^{-i\alpha\omega}| = e^{-\alpha\lambda}.$$

Dla funkcji jednostkowej η wskaźnik wzrostu wykładniczego $\lambda_0 = 0$, stąd dla tych s , dla których $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$ mamy

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha\lambda} = 0.$$

Zatem

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} e^{-\alpha s} = 0.$$

Ostatecznie otrzymaliśmy, że obraz funkcji jednostkowej jest określony wzorem

$$L[1] = \Phi(s) = \frac{1}{s}.$$

Przykład 6.3. Dla funkcji $f(t) = e^{at}$, która po przemnożeniu przez funkcję jednostkową staje się oryginałem, postępując analogicznie jak powyżej, mamy

$$\begin{aligned} L[e^{at}] = \Phi(s) &= \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha} e^{(a-s)t} dt \\ &= \frac{1}{a-s} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (e^{(a-s)t}) \Big|_0^{\alpha} = \frac{1}{s-a}. \end{aligned}$$

Przykład 6.4. Funkcja $f(t) = \sin(bt)$ po przemnożeniu przez funkcję jednostkową staje się oryginałem ze wskaźnikiem wzrostu $\lambda_0 = 0$. Przykładając do niej przekształcenie Laplace'a, korzystając ze wzoru na całkowanie przez części, oraz uwzględniając, że $\text{Res} = \lambda > \lambda_0 = 0$ otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} L[\sin(bt)] &= \Phi(s) = \int_0^{\infty} \sin(bt) \cdot e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^2 + b^2} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left[e^{-st} (-s \sin(bt) - b \cos(bt)) \right]_0^{\alpha} = \frac{b}{s^2 + b^2}. \end{aligned}$$

6.2. Własności przekształcenia Laplace'a

Podamy teraz, wraz z przykładami zastosowań, kilka bardzo ważnych własności przekształcenia Laplace'a. Korzystając z definicji oraz wymienionych własności możemy uzyskać transformaty wielu ważnych funkcji. Transformaty najważniejszych funkcji zostały zebrane w tabeli na końcu tego rozdziału.

Niech $t \rightarrow f(t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, będzie oryginałem, $L[f(t)] = \Phi(s)$, gdzie $s \in \mathbb{C}$. Wówczas:

(1) liniowość

Jeśli $t \rightarrow g(t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, jest oryginałem, to

$$L(c_1 f + c_2 g) = c_1 L(f) + c_2 L(g), \text{ gdzie } c_1, c_2 \in \mathbb{C}.$$

Przykład 6.5. Niech $f(t) = e^{3t}$, $g(t) = \sin t$. Wówczas z liniowości przekształcenia Laplace'a oraz wzorów z przykładów 6.3., 6.4., mamy

$$L[2e^{3t} + 5 \sin t] = 2L[e^{3t}] + 5L[\sin t] = \frac{2}{s-3} + \frac{5}{s^2+1}.$$

(2) różniczkowanie oryginału

Jeżeli funkcja $t \rightarrow f'(t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, jest oryginałem, to

$$L[f'(t)] = sL[f(t)] - f(0^+),$$

gdzie $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$.

W szczególności, jeżeli $f(0^+) = 0$, to $L[f'(t)] = sL[f(t)]$.

Przykład 6.6. Niech $f(t) = \frac{1}{b} \sin(bt)$. Wówczas $f'(t) = \cos(bt)$. Znając transformatę funkcji $f(t) = \sin(bt)$, przykład 6.4., ze wzoru na różniczkowanie oryginału oraz liniowości przekształcenia Laplace'a mamy

$$L[\cos(bt)] = L\left[\left(\frac{1}{b} \sin bt\right)'\right] = sL\left[\frac{1}{b} \sin bt\right] = \frac{s}{b}L[\sin bt] = \frac{s}{s^2 + b^2}.$$

(3) całkowanie oryginału

$$L\left[\int_0^t f(u)du\right] = \frac{1}{s}L(f).$$

Przykład 6.7. Niech $f(u) = 1$. Znając transformatę funkcji $f(u) = 1$, przykład 6.2., ze wzoru na całkowanie oryginału mamy

$$L\left[\int_0^t du\right] = \frac{1}{s}L[1] = \frac{1}{s^2}.$$

Z rachunku całkowego mamy, że

$$\int_0^t du = t.$$

A zatem

$$L[t] = \frac{1}{s^2}.$$

(4) różniczkowanie obrazu

$$L[-tf(t)] = \Phi'(s).$$

Przykład 6.8. Z liniowości przekształcenia Laplace'a

$$L[-tf(t)] = -L[tf(t)] = -\Phi'(s).$$

Niech $f(t) = t$. Wówczas znając transformatę funkcji $f(t) = t$, przykład 6.7., ze wzoru na różniczkowanie obrazu mamy

$$L[t^2] = -\left(\frac{1}{s^2}\right)' = \frac{2}{s^3}.$$

Stosując ponownie wzór na różniczkowanie obrazu otrzymamy

$$L[t^3] = - \left(\frac{2}{s^3} \right)' = \frac{2 \cdot 3}{s^4}.$$

Ogólnie

$$L[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Przykład 6.9. Niech $f(t) = \sin t$. Znając transformatę funkcji $f(t) = \sin t$, przykład 6.4., ze wzoru na różniczkowanie obrazu mamy

$$L[t \sin t] = - \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)' = \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}.$$

Ogólnie

$$L[t \sin(bt)] = - \left(\frac{b}{s^2 + b^2} \right)' = \frac{2bs}{(s^2 + b^2)^2}.$$

Przykład 6.10. Niech $f(t) = e^t$. Znając transformatę funkcji $f(t) = e^t$, przykład 6.3., ze wzoru na różniczkowanie obrazu mamy

$$L[te^t] = - \left(\frac{1}{s-1} \right)' = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Ogólnie

$$L[te^{at}] = - \left(\frac{1}{s-a} \right)' = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

(5) n -krotne różniczkowanie oryginału

Jeżeli funkcja $f \rightarrow f^{(n)}(t)$, gdzie $t \in \mathbb{R}$, jest oryginałem, to

$$L[f^{(n)}(t)] = s^n L[f(t)] - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+),$$

gdzie $f^{(k)}(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k)}(t)$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Przykład 6.11. Niech $f(t) = te^t$. Wówczas $f''(t) = (2+t)e^t$. Znając transformatę funkcji $f(t) = te^t$, przykład 6.10., ze wzoru na n -krotne różniczkowanie oryginału mamy

$$L[(2+t)e^t] = L[(te^t)'] = s^2 L[te^t] - 1 = \frac{s^2}{(s-1)^2} - 1 = \frac{2s-1}{(s-1)^2}.$$

(6) n -krotne różniczkowanie obrazu

$$L[(-1)^n t^n f(t)] = \Phi^{(n)}(s).$$

Przykład 6.12. Niech $f(t) = e^t$. Znając transformatę funkcji $f(t) = e^t$, przykład 6.3., ze wzoru na n -krotne różniczkowanie obrazu mamy

$$L[t^2 e^t] = \left(\frac{1}{s-1}\right)'' = \frac{2}{(s-1)^3}.$$

Ogólnie

$$L[t^n e^{at}] = \left(\frac{1}{s-a}\right)^{(n)} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

(7) całkowanie obrazu

Jeżeli funkcja $f \rightarrow \frac{f(t)}{t}$, gdzie $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jest oryginałem, to

$$L\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty \Phi(s) ds,$$

gdzie $\int_s^\infty = \lim_{\text{Re } p \rightarrow \infty} \int_s^p$.

Przykład 6.13. Jeśli $f(t) = \sin t$, to $L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$, przykład 6.4. Wówczas ze wzoru na całkowanie obrazu mamy

$$L\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{1}{s^2+1} ds = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \int_s^\gamma \frac{1}{s^2+1} ds = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} [\text{arctg } s]_s^\gamma = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } s = \text{arcctg } s = \text{arctg } \frac{1}{s}.$$

(8) podobieństwo

Dla dowolnego $a > 0$ mamy

$$L[f(at)] = \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{s}{a}\right).$$

Przykład 6.14. Niech $f(t) = \sin t$, wówczas $L[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$. Stąd i ze wzoru na podobieństwo mamy

$$L[\sin 2t] = \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{s^2 + 4}.$$

Ogólnie

$$L[\sin at] = \frac{1}{a} \Phi\left(\frac{s}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2 + 1} = \frac{a}{s^2 + a^2}.$$

(9) przesunięcie oryginału

Dla dowolnego $b > 0$ mamy

$$L[f(t - b)] = e^{-bs} \Phi(s).$$

Przykład 6.15. Niech $f(t) = \sin t$, wówczas $L[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$. Stąd i ze wzoru na przesunięcie oryginału mamy

$$L[\sin(t - 3)] = e^{-3s} \frac{1}{s^2 + 1}.$$

(10) przesunięcie obrazu

Dla dowolnego $b \in \mathbb{C}$ mamy

$$L[e^{bt} f(t)] = \Phi(s - b).$$

Przykład 6.16. Niech $f(t) = \sin t$, wówczas $L[\sin t] = \frac{1}{s^2 + 1}$. Stąd i ze wzoru na przesunięcie oryginału mamy

$$L[e^t \sin t] = \Phi(s - 1) = \frac{1}{(s - 1)^2 + 1}.$$

Ogólnie, uwzględniając, że $L[\sin(bt)] = \frac{b}{s^2 + b^2}$, mamy

$$L[e^{at} \sin(bt)] = \Phi(s - a) = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}.$$

Ćwiczenie 6.1. Korzystając z powyższych własności oraz tablicy transformat wybranych funkcji (strona 131), wyznaczyć transformaty Laplace'a następujących funkcji:

$$\text{a) } f(t) = 3e^{2t} - \cos 4t, \quad \text{b) } f(t) = t^4 + te^{-t}, \quad \text{c) } f(t) = 7 - e^{-3t} \cos t.$$

6.3. Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a

Wzór Riemanna-Mellina

Twierdzenie 6.2. *Jeżeli Φ jest transformatą Laplace'a oryginału f o wskaźniku wzrostu λ_0 , to w każdym punkcie ciągłości funkcji f*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \Phi(s)e^{st} ds,$$

dla $\operatorname{Re} s = \lambda > \lambda_0$, gdzie

$$\int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \Phi(s)e^{st} ds = \lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \int_{\lambda-i\omega_0}^{\lambda+i\omega_0} \Phi(s)e^{st} ds.$$

Przekształcenie odwrotne do przekształcenia Laplace'a

Odwzorowanie

$$\Phi = L[f] \rightarrow f$$

określone wzorem Riemanna-Mellina nazywamy przekształceniem odwrotnym do przekształcenia Laplace'a i oznaczamy przez \mathcal{L}^{-1} lub L^{-1} .

6.4. Własności przekształcenia odwrotnego względem przekształcenia Laplace'a

(1) liniowość

Niech Φ_1, Φ_2 będą transformatami Laplace'a pewnych funkcji będących oryginałami. Wówczas dla dowolnego $s \in \mathbb{C}$ mamy

$$L^{-1}(c_1\Phi_1(s) + c_2\Phi_2(s)) = c_1L^{-1}(\Phi_1(s)) + c_2L^{-1}(\Phi_2(s)),$$

gdzie $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Przykład 6.17. Wyznamy oryginal f , którego transformata jest równa

$$\Phi(s) = \frac{2+s}{s^2}.$$

Mamy

$$f(t) = L^{-1} \left(\frac{2+s}{s^2} \right).$$

Stąd i z liniowości przekształcenia odwrotnego do przekształcenia Laplace'a oraz z faktu, że $\frac{2+s}{s^2} = \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s}$ mamy

$$f(t) = L^{-1} \left(\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s} \right) = 2L^{-1} \left(\frac{1}{s^2} \right) + L^{-1} \left(\frac{1}{s} \right).$$

Z tablicy transformat wybranych funkcji (strona 131) otrzymujemy, że

$$f(t) = 2t + 1.$$

Ćwiczenie 6.2. Wyznaczyć oryginał f , którego transformata jest równa

$$\Phi(s) = \frac{3s + 4}{s^2 + 4}.$$

(2) związek z residuami

Jeżeli funkcja Φ spełnia następujące warunki:

- jest transformatą Laplace'a pewnej funkcji f , która jest oryginałem,
- jest funkcją holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem skończonej liczby punktów s_1, s_2, \dots, s_n , w których ma bieguny,
- $|\Phi(s)|$ dąży jednostajnie do zera, gdy $|s| \rightarrow \infty$,

to

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} \Phi(s) e^{st} ds = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s_k} [\Phi(s) e^{st}] \quad \text{dla } t > 0.$$

(3) związek oryginału z residuami

Oryginał f , którego transformatą jest znana funkcja Φ , można wyrazić wzorem

$$f(t) = L^{-1} [\Phi(s)] = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s_k} [\Phi(s) e^{st}] \quad \text{dla } t > 0.$$

6.5. Splot

Splot

Splotem funkcji f_1 i f_2 całkowalnych w każdym przedziale $[0, a]$, gdzie $a > 0$, nazywamy funkcję

$$h(t) = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau$$

i oznaczamy przez $f_1 * f_2$.

Przykład 6.18. Niech $f_1(t) = e^t$, $f_2(t) = 1$. Splot funkcji f_1 , f_2 jest równy

$$\begin{aligned} e^t * 1 &= \int_0^t e^{t-\tau} \cdot 1 d\tau = e^t \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^t \cdot e^{-\tau} \Big|_0^t \\ &= -e^t(e^{-t} - e^0) = -1 + e^t. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6.3. Wyznaczyć splot funkcji $f_1(t) = t$ oraz $f_2(t) = \sin t$.

Własności splotu

Twierdzenie 6.3. *Jeśli funkcje f_1 , f_2 , f_3 są całkowalne na przedziale $[0, a]$, dla każdego $a > 0$, to*

- (*przemienność*)

$$f_1 * f_2 = f_2 * f_1,$$

- (*łączność*)

$$(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3),$$

- (*rozdzielność względem dodawania*)

$$f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3,$$

- (*jednorodność*)

$$(cf_1) * f_2 = c(f_1 * f_2), \quad \text{dla każdego } c \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie Borela o mnożeniu transformat

Twierdzenie 6.4. *Jeżeli f_1, f_2 są oryginałami, to*

$$L[f_1] \cdot L[f_2] = L[f_1 * f_2].$$

Wzór Borela o splocie

Jeżeli funkcje Φ_1, Φ_2 są transformatami Laplace'a funkcji odpowiednio f_1, f_2 , tzn. $L[f_1] = \Phi_1, L[f_2] = \Phi_2$, to

$$L^{-1}[\Phi_1 \cdot \Phi_2] = f_1 * f_2 = L^{-1}[\Phi_1] * L^{-1}[\Phi_2].$$

6.6. Wyznaczanie oryginału, gdy znana jest transformata

Do wyznaczenia oryginału f , gdy dana jest transformata Laplace'a $\Phi = L[f]$ można zastosować trzy metody:

- rozkład na ułamki proste,
- metodę residuów (własność (3) przekształcenia odwrotnego do przekształcenia Laplace'a),
- wzór Borela o splocie.

Przykład 6.19. Wyznamy oryginał $f(t) = L^{-1}(\Phi(s))$, jeśli

$$\Phi(s) = \frac{1}{s^2 - s}.$$

a) Stosując rozkład na ułamki proste mamy

$$\frac{1}{s^2 - s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s - 1} = \frac{A(s - 1) + Bs}{s^2 - s}.$$

Stąd po porównaniu liczników $A = -1, B = 1$. Otrzymaliśmy

$$\frac{1}{s^2 - s} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s - 1}.$$

Przykładając do obu stron powyższej równości odwrotne przekształcenie Laplace'a, jednocześnie korzystając z liniowości tego przekształcenia mamy

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - s}\right) = -L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s - 1}\right).$$

Z tablicy transformat wybranych funkcji (strona 131) odczytujemy, że

$$L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1, \quad L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^t.$$

Ostatecznie szukany oryginał wyraża się wzorem

$$f(t) = -1 + e^t.$$

b) Zastosujemy teraz do wyznaczania oryginału podanej funkcji metodę residuów. Zauważmy, że punktami osobliwymi funkcji Φ są punkty $s_1 = 0$ oraz $s_2 = 1$, które są biegunami jednokrotnymi. Mamy zatem

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{s_1}(\Phi(s)e^{st}) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(s \frac{1}{s(s-1)} e^{st} \right) = -1, \\ \operatorname{res}_{s_2}(\Phi(s)e^{st}) &= \lim_{s \rightarrow 1} \left((s-1) \frac{1}{s(s-1)} e^{st} \right) = e^t. \end{aligned}$$

A więc z własności (3) przekształcenia odwrotnego względem przekształcenia Laplace'a

$$f(t) = \operatorname{res}_{s_1}(\Phi(s)e^{st}) + \operatorname{res}_{s_2}(\Phi(s)e^{st}) = -1 + e^t.$$

c) Stosując teraz wzór Borela o splocie oraz korzystając z obliczeń z przykładu 6.18. otrzymujemy

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 - s}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s-1}\right) \\ &= L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = 1 * e^t = -1 + e^t. \end{aligned}$$

Ćwiczenie 6.4. Wyznaczyć oryginał, którego transformata jest równa

$$\Phi(s) = \frac{2}{s^3 + s},$$

stosując kolejno rozkład na ułamki proste, metodę residuów oraz wzór Borela o splocie.

6.7. Metoda operatorowa

Transformata Laplace'a znajduje zastosowanie w wyznaczaniu rozwiązań szczególnych liniowych równań różniczkowych zwyczajnych, spełniających

zadane warunki początkowe. W porównaniu do klasycznych metod, metoda transformaty Laplace'a (nazywana też metodą operatorową) przekształca równanie różniczkowe w równanie algebraiczne, którego niewiadomą jest transformata Laplace'a funkcji będącej niewiadomą równania różniczkowego. Po wyznaczeniu tej transformaty i zastosowaniu do niej przekształcenia odwrotnego do przekształcenia Laplace'a, otrzymamy rozwiązanie wyjściowego równania. Metodę operatorową możemy też zastosować do układów równań różniczkowych.

Przykład 6.20. Niech dane będzie następujące równanie różniczkowe

$$(*) \quad y'' - 2y' + 2y = 2e^t \sin t.$$

Wyznamy, korzystając z metody operatorowej, rozwiązanie powyższego równania spełniające następujące warunki początkowe

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do obu stron równania (*) mamy

$$L[y'' - 2y' + 2y] = L[2e^t \sin t].$$

Z liniowości przekształcenia Laplace'a

$$L[y''] - 2L[y'] + 2L[y] = 2L[e^t \sin t].$$

Stosując do prawej strony wzór 9. z tablicy transformat Laplace'a (strona 131) otrzymujemy

$$L[e^t \sin t] = \frac{1}{(s-1)^2 + 1}.$$

Do lewej strony stosujemy wzór (5) z własności przekształcenia Laplace'a o n -krotnym różniczkowaniu oryginału

$$\begin{aligned} L[y''(t)] &= s^2 L[y(t)] - s^1 y(0) - s^0 y'(0), \\ L[y'(t)] &= s^1 L[y(t)] - s^0 y(0). \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu powyższych równości i warunków początkowych mamy

$$s^2 L[y] - 2s L[y] + 2L[y] = 2 \frac{1}{(s-1)^2 + 1}.$$

Stąd

$$L[y](s^2 - 2s + 2) = \frac{2}{(s-1)^2 + 1},$$

a więc

$$L[y] = \frac{2}{((s-1)^2 + 1)^2}.$$

Przykładając do obu stron powyższego równania odwrotne przekształcenie Laplace'a otrzymujemy

$$y = 2L^{-1} \left[\frac{2}{((s-1)^2 + 1)^2} \right].$$

Stosując wzór 12. z tablicy transformat wybranych funkcji, otrzymujemy

$$y = 2 \frac{e^t}{2 \cdot 1} (\sin t - t \cos t).$$

Ostatecznie

$$y = e^t (\sin t - t \cos t).$$

Przykład 6.21. Niech dany będzie układ równań różniczkowych

$$(**) \begin{cases} y' + 3z = -e^{2t}, \\ z' + 2y = 5e^{-t}. \end{cases}$$

Wyznamy, korzystając z metody operatorowej, rozwiązanie powyższego układu spełniające następujące warunki początkowe

$$y(0) = 4, \quad z(0) = 0.$$

Stosując przekształcenie Laplace'a do obu stron obu równań układu (**) mamy

$$\begin{cases} L[y'] + 3L[z] = L[-e^{2t}], \\ L[z'] + 2L[y] = L[5e^{-t}]. \end{cases}$$

Stosując do obu równań liniowość przekształcenia Laplace'a oraz wzór 3. z tablic transformat Laplace'a (strona 131) otrzymujemy

$$\begin{cases} L[y'] + 3L[z] = -\frac{1}{s-2}, \\ L[z'] + 2L[y] = \frac{5}{s+1}. \end{cases}$$

Do lewych stron obu równań zastosujemy teraz wzór (3) z własności przekształcenia Laplace'a o n -krotnym różniczkowaniu oryginału

$$\begin{cases} sL[y] - 4 + 3L[z] = -\frac{1}{s-2}, \\ sL[z] + 2L[y] = \frac{5}{s+1}. \end{cases}$$

Otrzymaliśmy układ równań, w którym niewiadomymi są transformaty Laplace'a szukanych funkcji y oraz z . Wyznaczając z drugiego równania $L[y]$

$$L[y] = \frac{5}{2(s+1)} - \frac{1}{2}sL[z].$$

Wstawiamy teraz wyznaczone $L[y]$ do pierwszego z równań. Po przekształceniach otrzymujemy

$$\left(3 - \frac{1}{2}s^2\right)L[z] = 4 - \frac{1}{s-2} - \frac{5s}{2(s+1)},$$

czyli

$$\left(3 - \frac{1}{2}s^2\right)L[z] = \frac{3s^2 - 18}{2(s+1)(s-2)},$$

a więc

$$L[z] = \frac{-3}{(s+1)(s-2)}. \quad (6.2)$$

Podstawiając wyznaczoną transformatę funkcji z do wzoru na $L[y]$, dostajemy

$$L[y] = \frac{5}{2(s+1)} + \frac{3s}{2(s+1)(s-2)} = \frac{4s-5}{(s+1)(s-2)}. \quad (6.3)$$

Rozkładając ułamki po prawych stronach równań (6.2) oraz (6.3) na sumę ułamków prostych otrzymujemy

$$\begin{aligned} L[y] &= \frac{3}{s+1} + \frac{1}{s-2}, \\ L[z] &= \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2}. \end{aligned}$$

Stąd oraz ze wzoru 3. z tablic transformat Laplace'a (strona 131), dostajemy ostatecznie

$$\begin{cases} y = 3e^{-t} + e^{2t}, \\ z = e^{-t} - e^{2t}. \end{cases}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Określić, czy funkcja f jest oryginałem, jeśli:

$$\text{a) } f(t) = \eta(t)e^{-3t+1}, \quad \text{b) } f(t) = \eta(t)\frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \text{c) } f(t) = \eta(t)\ln(t+1).$$

Zadanie 2. Naszkicować wykres funkcji f oraz korzystając z definicji wyznaczyć jest transformatę Laplace'a, jeśli:

$$\text{a) } f(t) = \eta(t), \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} \sin(\omega t), & t \in [0, \frac{\pi}{\omega}], \\ 0, & t \notin [0, \frac{\pi}{\omega}], \end{cases} \quad \text{c) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \in [0, 1], \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

Zadanie 3. Korzystając z własności przekształcenia Laplace'a (podać określoną własność) wyznaczyć obraz funkcji f , wiedząc że $L[\sin \beta t] = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$:

$$\text{a) } f(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t, \quad \text{b) } f(t) = t \sin \beta t, \quad \text{c) } f(t) = \cos \beta t.$$

Zadanie 4. Korzystając z własności oraz tablic wyznaczyć transformatę Laplace'a następujących funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(t) &= 4 + e^{3t}, & \text{b) } f(t) &= \sin 3t + 5, & \text{c) } f(t) &= e^{-t} + \cos t, \\ \text{d) } f(t) &= t \sin 2t - 1, & \text{e) } f(t) &= e^{2t} \sin t, & \text{f) } f(t) &= te^{-3t} + t^2. \end{aligned}$$

Zadanie 5. Stosując metodę rozkładu na ułamki proste wyznaczyć oryginały, których transformatami są podane funkcje:

$$\begin{aligned} \text{a) } \Phi(s) &= \frac{s^2 + s + 1}{s^3 + s}, & \text{b) } \Phi(s) &= \frac{1}{s(s-2)^2}, \\ \text{c) } \Phi(s) &= \frac{13s + 26}{s(s^2 + 4s + 13)}, & \text{d) } \Phi(s) &= \frac{s}{(s^2 + 9)(s-2)}, \\ \text{e) } \Phi(s) &= \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}, & \text{f) } \Phi(s) &= \frac{s + 6}{s(s^2 + 5s + 6)}. \end{aligned}$$

Zadanie 6. Stosując metodę residuów wyznaczyć oryginały, których transformatami są podane funkcje:

$$\text{a) } \Phi(s) = \frac{s-1}{s^2+3s}, \quad \text{b) } \Phi(s) = \frac{4}{s^2-s},$$

$$\begin{array}{ll} \text{c) } \Phi(s) = \frac{1}{s^2(s^2 - 1)}, & \text{d) } \Phi(s) = \frac{s + 6}{s(s^2 + 5s + 6)}, \\ \text{e) } \Phi(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}, & \text{f) } \Phi(s) = \frac{3}{s^3(s + 1)} \end{array}$$

Zadanie 7. Wyznaczyć spłot $f_1 * f_2$, jeżeli:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \begin{array}{l} f_1(t) = t^2, \\ f_2(t) = e^t, \end{array} & \text{b) } \begin{array}{l} f_1(t) = t, \\ f_2(t) = \cos 2t, \end{array} & \text{c) } \begin{array}{l} f_1(t) = t, \\ f_2(t) = t^2. \end{array} \end{array}$$

Zadanie 8. Korzystając ze wzoru Borela o splocie wyznaczyć oryginały, których transformatami są podane funkcje:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \Phi(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}, & \text{b) } \Phi(s) = \frac{1}{s^2(s + 2)}, \\ \text{c) } \Phi(s) = \frac{s}{(s^2 + 9)(s - 2)}, & \text{d) } \Phi(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4)}, \\ \text{e) } \Phi(s) = \frac{1}{s^2 - 16}, & \text{f) } \Phi(s) = \frac{s - 1}{s(s^2 - 2s + 2)}. \end{array}$$

Zadanie 9. Stosując metodę operatorową wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego przy podanych warunkach początkowych:

$$\begin{array}{l} \text{a) } y'' - y' - 2y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \\ \text{b) } y'' - 3y' + 2y = te^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \\ \text{c) } y'' - y' - 6y = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \\ \text{d) } y'' + y' = \sin(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \\ \text{e) } y''' + y' = e^{2t}, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0. \end{array}$$

Zadanie 10. Stosując metodę operatorową wyznaczyć rozwiązanie układu równań różniczkowych przy podanych warunkach początkowych:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} y' + y - z = e^t, \\ z' + 3y - 2z = 2e^t, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1, \\ \text{b) } \begin{cases} y' + z = 0, \\ z' - 2y - 2z = 0, \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad z(0) = 1, \\ \text{c) } \begin{cases} y' - y + z = \frac{3}{2}t^2, \\ z' + 4y + 2z = 4t + 1, \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \end{array}$$

Tablica transformat Laplace'a wybranych funkcji

	Oryginał $f(t)$	Obraz $\Phi(s)$
1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
4.	$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
5.	$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
6.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
7.	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
8.	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
9.	$t \sin(bt)$	$\frac{2sb}{(s^2+b^2)^2}$
10.	$t \cos(bt)$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
11.	$\frac{1}{b} \sin(bt) - t \cos(bt)$	$\frac{2b^2}{(s^2+b^2)^2}$
12.	$e^{at} \left(\frac{1}{b} \sin(bt) - t \cos(bt) \right)$	$\frac{2b^2}{((s-a)^2+b^2)^2}$
13.	$e^{at} (a \sin(bt) + b \cos(bt))$	$\frac{bs}{(s-a)^2+b^2}$
14.	$e^{at} \left[\left(\frac{a}{b} + bt \right) \sin(bt) - at \cos(bt) \right]$	$\frac{2b^2 s}{((s-a)^2+b^2)^2}$

Rozdział 7

Dodatek

7.1. Rozkład wyrażen wymiernych na sumę ułamków prostych

Rozważmy wyrażenie wymierne postaci

$$\frac{P}{Q}, \quad (7.1)$$

gdzie P i Q są takimi wielomianami, że $\text{st}(P) = m$, $\text{st}(Q) = n$ oraz $m < n$.

Definicja 7.1.

- **Ułamkiem prostym pierwszego rodzaju** nazywamy każde wyrażenie wymierne postaci

$$\frac{A}{(ax + b)^k},$$

gdzie $b \in \mathbb{R}$, $A, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

- **Ułamkiem prostym drugiego rodzaju** nazywamy każde wyrażenie wymierne postaci

$$\frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^k},$$

gdzie $A, B, b, c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ oraz $A^2 + B^2 > 0$, $b^2 - 4ac < 0$.

Twierdzenie 7.1. *Każde wyrażenie wymierne postaci (7.1) można w jednoznaczny sposób zapisać jako sumę skończonej ilości ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju.*

Sposób rozkładu wyrażen wymiernych na sumę ułamków prostych przedstawimy w kolejnych przykładach.

Przykład 7.1. Rozłóżmy na sumę ułamków prostych wyrażenie

$$\frac{4x + 5}{(x + 3)(2x - 1)}.$$

Dane wyrażenie wymierne możemy zapisać w postaci sumy ułamków prostych pierwszego rodzaju w następujący sposób

$$\frac{4x + 5}{(x + 3)(2x - 1)} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{2x - 1}.$$

Sprowadzając prawą stronę powyższej równości do wspólnego mianownika, dostaniemy

$$\frac{4x + 5}{(x + 3)(2x - 1)} = \frac{A(2x - 1) + B(x + 3)}{(x + 3)(2x - 1)}.$$

Wynika stąd, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest równość

$$A(2x - 1) + B(x + 3) = 4x + 5.$$

Stąd, w szczególności, dla $x = -3$

$$-7A = -7 \quad \Rightarrow \quad A = 1,$$

natomiast dla $x = \frac{1}{2}$

$$\frac{7}{2}B = 7 \quad \Rightarrow \quad B = 2.$$

Ostatecznie

$$\frac{4x + 5}{(x + 3)(2x - 1)} = \frac{1}{x + 3} + \frac{2}{2x - 1}.$$

Przykład 7.2. Rozłóżmy na sumę ułamków prostych wyrażenie

$$\frac{6x^2 + 2x}{(3 - x)(x^2 + 1)}.$$

Dane wyrażenie wymierne możemy zapisać w postaci sumy ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju w następujący sposób

$$\frac{6x^2 + 2x}{(3 - x)(x^2 + 1)} = \frac{A}{3 - x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Sprowadzając prawą stronę powyższej równości do wspólnego mianownika, dostaniemy

$$\frac{6x^2 + 2x}{(3 - x)(x^2 + 1)} = \frac{A(x^2 + 1) + (Bx + C)(3 - x)}{(3 - x)(x^2 + 1)}.$$

Stąd

$$A(x^2 + 1) + (Bx + C)(3 - x) = 6x^2 + 2x$$

dla każdego $x \in \mathbb{R}$. W szczególności dla $x = 3$ dostaniemy

$$10A = 60 \quad \Rightarrow \quad A = 6.$$

Ponadto dla np. $x = 1$ i $x = 2$, uwzględniając $A = 6$, mamy odpowiednio

$$\begin{cases} 12 + 2(B + C) = 8 \\ 30 + (2B + C) = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B + C = -2 \\ 2B + C = -2 \end{cases}$$

Stąd $B = 0$ oraz $C = -2$. Ostatecznie

$$\frac{6x^2 + 2x}{(3 - x)(x^2 + 1)} = \frac{6}{3 - x} - \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Przykład 7.3. Rozłożymy na sumę ułamków prostych wyrażenie

$$\frac{x^3 + 4x - 8}{x^4 - 2x^3}.$$

Dane wyrażenie wymierne możemy zapisać w postaci sumy ułamków prostych pierwszego rodzaju w następujący sposób

$$\frac{x^3 + 4x - 8}{x^4 - 2x^3} = \frac{x^3 + 4x - 8}{x^3(x - 2)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{x - 2}.$$

Sprowadzając prawą stronę powyższej równości do wspólnego mianownika, dostaniemy

$$\frac{x^3 + 4x - 8}{x^4 - 2x^3} = \frac{A(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx^2(x - 2) + Dx^3}{x^4 - 2x^3}.$$

Stąd dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$A(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx^2(x - 2) + Dx^3 = x^3 + 4x - 8.$$

W szczególności:

- (1) dla $x = 0$ mamy $-2A = -8$, czyli $A = 4$;
- (2) dla $x = 2$ mamy $8D = 8$, czyli $D = 1$;
- (3) dla $x = 1$ mamy $-A - B - C + D = -3$, czyli $B + C = 0$;

(4) dla $x = 3$ mamy $A + 3B + 9C + 27D = 31$, czyli $3B + 9C = 0$.

Z równań (3) i (4) wynika, że $B = C = 0$. Ostatecznie

$$\frac{x^3 + 4x - 8}{x^4 - 2x^3} = \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x - 2}.$$

Przykład 7.4. Rozłóżmy na sumę ułamków prostych wyrażenie

$$\frac{6}{x^5 + 6x^3 + 9x}.$$

Zauważmy, że $x^5 + 6x^3 + 9x = x(x^4 + 6x^2 + 9) = x(x^2 + 3)^2$. Zatem dane wyrażenie wymierne możemy zapisać w postaci sumy ułamków prostych pierwszego oraz drugiego rodzaju w następujący sposób

$$\frac{6}{x^5 + 6x^3 + 9x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 3} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 3)^2}.$$

Sprowadzając prawą stronę powyższej równości do wspólnego mianownika, dostaniemy

$$\frac{6}{x^5 + 6x^3 + 9x} = \frac{A(x^2 + 3)^2 + x(Bx + C)(x^2 + 3) + x(Dx + E)}{x^5 + 6x^3 + 9x}.$$

Stąd dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$A(x^2 + 3)^2 + (Bx^2 + Cx)(x^2 + 3) + Dx^2 + Ex = 6.$$

W szczególności dla $x = 0$ dostaniemy $9A = 6$, czyli $A = \frac{2}{3}$. Ponadto:

(1) dla $x = 1$ mamy $16A + 4(B + C) + D + E = 6$;

(2) dla $x = -1$ mamy $16A + 4(B - C) + D - E = 6$;

(3) dla $x = 2$ mamy $49A + 7(4B + 2C) + 4D + 2E = 6$;

(4) dla $x = -2$ mamy $49A + 7(4B - 2C) + 4D - 2E = 6$.

Dodając do siebie równania (1) i (2) oraz (3) i (4) dostaniemy układ równań

$$\begin{cases} 4B + D = -\frac{14}{3}, \\ 7B + D = -\frac{20}{3}, \end{cases}$$

którego rozwiązaniami są $B = -\frac{2}{3}$ oraz $D = -2$. Odejmując teraz równanie (2) od równania (1) oraz równanie (4) od równania (3) dostaniemy układ

$$\begin{cases} 2C + 2E = 0, \\ 4C + 4E = 0, \end{cases}$$

którego rozwiązaniami są $C = 0$ oraz $E = 0$. Podsumowując, rozkład na sumę ułamków prostych danego wyrażenia wymiernego jest postaci

$$\frac{6}{x^5 + 6x^3 + 9x} = \frac{2}{3x} - \frac{2x}{3(x^2 + 3)} - \frac{2x}{(x^2 + 3)^2}.$$

Odpowiedzi do ćwiczeń i zadań

1. Algebra liczb zespolonych

Ćwiczenia

- 1.1. $z_1 + z_2 = (-1, 0)$; $z_1 \cdot z_2 = (-11, 7)$.
- 1.2. a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$; b) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$.
- 1.3. okrąg o środku $z_0 = 2 - 3i$ oraz promieniu $r = 4$.
- 1.4. a) $1 + 3i$; b) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.
- 1.5. $|z| = 5$, $\varphi = \pi + 2k\pi$, $\text{Arg}z = \pi$.
- 1.6. a) $\text{Arg}z = \frac{3}{2}\pi$; b) $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Arg}z \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{7}{4}\pi \leq \text{Arg}z < 2\pi\}$.
- 1.7. $z = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))$.
- 1.8. a) $-11\sqrt{2} + i$; b) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- 1.9. a) $\{4 - i, -4 + i\}$; b) $\{-3, \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i, \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$.
- 1.10. $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = -1$.

Zadania

1. a) i ; b) $3 + i$; c) $2 - 2i$; d) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$; e) $\frac{2}{5} - \frac{7}{10}i$; f) i .
2. a) $\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$; b) $2\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i \sin(\frac{5\pi}{4}))$; c) $2(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$;
d) $\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{5\pi}{3})$; e) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$; f) $\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.
3. a) $2^{28}(i - \sqrt{3})$; b) i ; c) -1 .
4. a) $2 - i, -2 + i$;
b) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1$;
c) $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$;
d) $2 - 2i, 2 + 2i, -2 + 2i, -2 - 2i$.
5. a) $1 - \frac{3}{2}i$; b) $2 - i$; c) $-2 + 3i, -2 - 3i$; d) $(\sqrt{2} + 1)i, -(\sqrt{2} - 1)i$;
e) $i, -1 + i$; f) $-1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$; g) $-2i, 2i, 3, -i$; h) $-1, 1, -i, i, \frac{4}{5} + \frac{8}{5}i$.

6. a) $2i$; b) $i, -1 + i$; d) $1, i$.

2. Funkcje zespolone zmiennej zespolonej

Ćwiczenia

2.1. a) $D_1 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1 \wedge \operatorname{Re} z = 0\}$;

b) $D_2 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2 \wedge \operatorname{Im} z = 0\}$;

c) $D_3 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \wedge \operatorname{Im} z = 1\}$.

2.2. Okrąg o środku w punkcie $w_0 = 0$ i promieniu $r = 2$.

2.3. $\operatorname{Ln}(i) = \frac{\pi}{2}i$.

2.4. $u(x, y) = \frac{1}{2} \sin x (e^y + e^{-y})$, $v(x, y) = \frac{1}{2} \cos x (e^y - e^{-y})$.

2.7. $z_0 = ie^2$.

2.13. $f(z) = z^2 + 4z + 2i$.

Zadania

1. a) zbieżny, $z_0 = 3$; b) rozbieżny; c) zbieżny, $z_0 = -5i$; d) zbieżny, $z_0 = 0$;
e) rozbieżny; f) rozbieżny.

2. a) $u(x, y) = 2x - 3x^2 - 3y^2$, $v(x, y) = -2y$;

b) $u(x, y) = \frac{xy+x}{x^2+y^2}$, $v(x, y) = -\frac{y^2+y}{x^2+y^2}$;

c) $u(x, y) = 1 + x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$;

d) $u(x, y) = \frac{1+x^2-y^2}{(1+x^2+y^2)^2+4x^2y^2}$, $v(x, y) = \frac{-2xy}{(1+x^2+y^2)^2+4x^2y^2}$;

e) $u(x, y) = x^2 + (y+1)^2$, $v(x, y) = 2x(y+1)$;

f) $u(x, y) = \frac{-1+x^2+y^2}{(x^2-1)^2+y^2}$, $v(x, y) = \frac{-2y}{(x^2-1)^2+y^2}$.

3. a) $\frac{e\sqrt{2}}{2} + i\frac{e\sqrt{2}}{2}$; b) $-ei$; c) -2 ; d) $-i(\frac{1}{2e} - \frac{e}{2})$; e) $\frac{1}{2}(e^{-1} + e)$;

f) $\frac{\cos 1}{2}(e + e^{-1}) + i\frac{\sin 1}{2}(e - e^{-1})$.

5. a) f jest holomorficzną na całej płaszczyźnie zespolonej; b) f nigdzie nie jest holomorficzną; c) f jest holomorficzną wszędzie poza $z = 0$;
d) f nigdzie nie jest holomorficzną.

6. a) $f(z) = -iz + 3z - 3 + 2i$; b) $f(z) = z^3 - 1 + i$; c) $f(z) = z^2 + 2z - 3 + i$;

d) $f(z) = z^2 + 3iz - 1 - 2i$; e) $f(z) = -\frac{1}{z} + 1 + i$; f) $f(z) = 2iz^2 + zi - 2i$.

7. a) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x, y) = 3x^2 - y^3$;

b) $u(x, y) = e^{-x} \cos y$, $v(x, y) = -e^{-x} \sin y$;

$$c) u(x, y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x, v(x, y) = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \cos x.$$

3. Całki funkcji zespolonych

Ćwiczenia

3.1. $z'(t) = 2ite^{t^2}$.

3.2. $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}i$.

3.3. a) $z(t) = 1 + 2t + (t-1)i, t \in [0, 1]$; b) $z(t) = 1 - i + e^{it}, t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

c) $z(t) = t + i(t-1)^2, t \in [0, 3]$.

3.4. $1 - \frac{1}{3}i$.

3.5. $\frac{i}{2}$.

3.6. a) jest jednospójny; b) nie jest jednospójny; c) nie jest jednospójny.

3.8. a) $\frac{\pi}{3}$; b) $-\frac{\pi}{3}$; c) 0.

3.9. a) $-4\pi i$; b) $-12\pi i$.

Zadania

1. a) $20 - 8i$; b) $\frac{14}{3} - \frac{8}{3}i$; c) 1; d) $2i$; e) $-4 - \frac{1}{2}i$; f) πi .

2. a) $z(t) = it, t \in [0, 1]$; b) $z(t) = 1 + t - (1 - 2t)i, t \in [0, 1]$;

c) $z(t) = 2e^{it}, t \in [0, 2\pi]$; d) $z(t) = 1 - 2i + 3e^{it}, t \in [0, 2\pi]$;

e) $z(t) = e^{it}, t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$; f) $z(t) = t + it^2, t \in [1, 2]$.

3. a) $2 + i$; b) $-\frac{3}{2} + 3i$; c) 1; d) $81i$; e) $3 + 4i$; f) $1 + i(e - 1)$.

4. a) 12; b) $-2 - 6i$; c) $2 - \pi i$; d) $-\frac{e^2+1}{2e}$; e) $3 \ln 2 + \frac{\pi}{2}i$.

5. a) 2π ; b) -2 ; c) $2\pi + 11\pi i$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $-\frac{\pi}{2}$; f) $2\pi i$; g) $2\pi + \pi^2 i$.

4. Szeregi zespolone

Ćwiczenia

4.1. a) zbieżny; b) rozbieżny; c) zbieżny.

4.2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{5}\}, r = \sqrt{5}$.

4.3. $f(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{3z}{1+3z}$, gdzie $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$.

4.4. $f(z) = \frac{5}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} z^n$.

Zadania

1. a) rozbieżny; b) bezwzględnie zbieżny; c) bezwzględnie zbieżny;
 d) rozbieżny; e) zbieżny; f) bezwzględnie zbieżny; g) rozbieżny;
 h) bezwzględnie zbieżny; i) rozbieżny; j) bezwzględnie zbieżny;
 k) bezwzględnie zbieżny; l) zbieżny.
2. a) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, r = 1$; b) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}, r = 2$;
 c) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{\sqrt{2}}{2}\}, r = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < e\}, r = e$;
 e) $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < \sqrt{2}\}, r = \sqrt{2}$; f) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}, r = 1$;
 g) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, r = 1$; h) $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \sqrt{2}\}, r = \sqrt{2}$;
 i) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < \frac{\sqrt{2}}{3}\}, r = \frac{\sqrt{2}}{3}$.
3. a) $f(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{1}{4z-2} - \frac{1}{z-1}$, gdzie $1 < |z| < 2$;
 b) $f(z) = \frac{1}{z-2}$, gdzie $|z| > 2$;
 c) $f(z) = \frac{2}{2-z} + \frac{1}{z-1}$, gdzie $1 < |z| < 2$;
 d) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)}$, gdzie $2 < |z| < \infty$.
4. a) $\frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2^{-(n+1)}) z^n$; b) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 + 2^{-(n+1)}) z^n$;
 c) $\frac{-2}{z} - \frac{2}{z^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{-1-2^{n-1}}{z^n}$; d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{-1}{z^n}$;
 e) $\frac{-1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}-1}{z^n}$;
 g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(z-1)^n}$; h) $\frac{1}{3(z-2)} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}} (z-2)^n$.

5. Punkty osobliwe. Residua**Ćwiczenia**

- 5.1. $2, 1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}$.
- 5.2. zero 4-krotne.
- 5.3. a) $2i$ - zero dwukrotne, $-2i$ - zero jednokrotne;
 b) $\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ - zera dwukrotne.
- 5.4. $z_k = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- 5.5. a) pozornie osobliwy, b) biegun 2-krotny, c) istotnie osobliwy.
- 5.6. a) 0 - punkt pozornie osobliwy, $-i, i$ - bieguny 1-krotne;
 b) $-i$ - punkt pozornie osobliwy, -2 - biegun 2-krotny, 2 - biegun 3-krotny.

5.7. 1.

5.8. $-\frac{1}{6}$.

5.9. $\operatorname{res}_{-i}f(z) = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$, $\operatorname{res}_1f(z) = -\frac{3i}{8}$, $\operatorname{res}_{-1}f(z) = -\frac{3i}{4}$.

5.10. -96π .

5.11. 2π .

5.12. $\frac{\pi}{2}$.

Zadania

1. a) $-1 + 2i$, $-1 - 2i$ - zera jednokrotne;
 b) i - zero czterokrotne, $-i$ - zero trzykrotne;
 c) i , $-4i$ - zera jednokrotne, $-i$ - zero dwukrotne;
 d) 0 - zero dwukrotne, $k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - zera jednokrotne;
 e) $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ - zera dwukrotne;
 f) π - zero trzykrotne, $k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ - zera jednokrotne;
 g) brak zer;
 h) $-2i$, $2i$ - zera dwukrotne.
2. a) i - biegun jednokrotny, -2 - biegun dwukrotny;
 b) i - biegun jednokrotny, $-i$ - punkt pozornie osobliwy;
 c) 0 - biegun jednokrotny, $-3i$ - biegun trzykrotny;
 $3i$ - biegun dwukrotny;
 d) $-1 + i$ - biegun dwukrotny, $1 + i$ - biegun jednokrotny;
 e) 0 - biegun sześciokrotny, $2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - bieguny dwukrotne;
 f) $k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ - bieguny jednokrotne,
 0 - punkt pozornie osobliwy;
 g) $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ - bieguny trzykrotne;
 h) $1 + i$ - biegun jednokrotny, $-2i$ - punkt pozornie osobliwy;
 i) 0 - punkt istotnie osobliwy;
 j) -1 - punkt istotnie osobliwy.
3. a) $\operatorname{res}_{-i}f(z) = 1$; b) $\operatorname{res}_2f(z) = 1 - i$; c) $\operatorname{res}_2f(z) = -1 - 2i$;
 d) $\operatorname{res}_0f(z) = 3$; e) $\operatorname{res}_{2i}f(z) = -2 + 6i$; f) $\operatorname{res}_0f(z) = -i$;
 g) $\operatorname{res}_if(z) = \frac{i}{2e}$; h) $\operatorname{res}_0f(z) = -3\pi$; i) $\operatorname{res}_0f(z) = i$; j) $\operatorname{res}_0f(z) = \frac{2}{3}$.
4. a) 0 ; b) $\frac{\pi i}{4}$; c) -4π ; d) $\frac{4\pi}{3}$; e) $\frac{4-2\pi}{\pi}i$; f) $-i$; g) $\frac{\pi}{3}$; h) $\frac{9\pi}{2}i$.

5. a) $\frac{5}{2}\pi$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$; d) π .

6. Transformata Laplace'a

Ćwiczenia

6.1. a) $L[f(t)] = \frac{3}{s-2} - \frac{s}{s^2+16}$; b) $L[f(t)] = \frac{24}{s^5} + \frac{1}{(s+1)^2}$;

c) $L[f(t)] = \frac{7}{s} - \frac{s+3}{(s+3)^2+1}$.

6.2. $f(t) = 3 \cos(2t) + 2 \sin(2t)$.

6.3. $f_1(t) * f_2(t) = t - \sin t$.

6.4. $f(t) = 2 - 2 \cos t$.

Zadania

1. a) tak; b) nie; c) tak.

2. a) $L[f(t)] = \frac{1}{s}$; b) $L[f(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} (1 + e^{-\frac{s\pi}{\omega}})$; c) $L[f(t)] = \frac{1}{s^2} (1 - e^{-s})$.

3. a) $L[f(t)] = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$; b) $L[f(t)] = \frac{2s\beta}{(s^2+\beta^2)^2}$; c) $L[f(t)] = \frac{s}{s^2+\beta^2}$.

4. a) $L[f(t)] = \frac{4}{s} + \frac{1}{s-3}$; b) $L[f(t)] = \frac{3}{s^2+9} + \frac{5}{s}$; c) $L[f(t)] = \frac{1}{s+1} + \frac{s}{s^2+1}$;

d) $L[f(t)] = \frac{4s}{(s^2+4)^2} - \frac{1}{s}$; e) $L[f(t)] = \frac{1}{(s-2)^2+1}$; f) $L[f(t)] = \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{2}{s^3}$.

5. a) $f(t) = 1 + \sin t$;

b) $f(t) = \frac{1}{2}e^{2t}(t - \frac{1}{2}) + \frac{1}{4}$;

c) $f(t) = e^{-2t} (3 \sin 3t - 2 \cos 3t)$;

d) $f(t) = -\frac{2}{13} \cos(3t) + \frac{3}{13} \sin(3t) + \frac{2}{13}e^{2t}$;

e) $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t} - 2t)$;

f) $f(t) = -2e^{-2t} + e^{-3t} + 1$.

6. a) $f(t) = \frac{1}{3}(4e^{-3t} - 1)$; b) $f(t) = 4(e^t - 1)$; c) $f(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t} - 2t)$;

d) $f(t) = -2e^{-2t} + e^{-3t} + 1$; e) $f(t) = t - \sin t$; f) $f(t) = 3e^t + 3t^2 + 6$.

7. a) $2e^t - t^2 - 2t - 2$; b) $\frac{1}{4}(1 - \cos(2t))$; c) $\frac{t^4}{12}$.

8. a) $f(t) = t - \sin t$;

b) $f(t) = \frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$;

c) $f(t) = -\frac{2}{13} \cos(3t) + \frac{3}{13} \sin(3t) + \frac{2}{13}e^{2t}$;

d) $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos(2t))$;

e) $f(t) = \frac{1}{8}(e^{4t} - e^{-4t}) = \frac{1}{4} \sinh(4t)$;

f) $f(t) = \frac{1}{2}e^t(\cos t + \sin t) - \frac{1}{2}$.

9. a) $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t} + e^{-t}$; b) $y = -2e^t - te^t - \frac{1}{2}t^2e^t + 2e^{2t}$;
c) $y = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$; d) $y = \frac{1}{3}(2 \sin t - \sin(2t))$;
e) $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{10}e^{2t} + \frac{2}{5} \cos t - \frac{1}{5} \sin t$.
10. a) $y = e^t$, $z = e^t$; b) $y = e^t(\cos t - 2 \sin t)$, $z = e^t(\cos t + 3 \sin t)$;
c) $y = -\frac{1}{2}t^2$, $z = t + t^2$.

Bibliografia

- [1] Bierski F., *Funkcje zespolone, szeregi i przekształcenia Fouriera, przekształcenie całkowe Laplace'a*, AGH, Kraków 1976.
- [2] Chądzyński J., *Wstęp do analizy zespolonej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź 2004.
- [3] Długosz J., *Funkcje zespolone*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2001.
- [4] Dobrowolska K., Dyczka W., Jakuszenkow H., *Matematyka dla studentów studiów technicznych cz. I*, Wydawnictwo HELPMATH, Łódź 2011.
- [5] Dobrowolska K., Dyczka W., Jakuszenkow H., *Matematyka dla studentów studiów technicznych cz. II*, Wydawnictwo HELPMATH, Łódź 2011.
- [6] Galewski M., *Wykłady z analizy matematycznej 2*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2021.
- [7] Gewert Z., Skoczylas Z., *Analiza Matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012.
- [8] Gewert Z., Skoczylas Z., *Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012.
- [9] Jurlewicz T., Skoczylas Z., *Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2011.
- [10] Jurlewicz T., Skoczylas Z., *Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2011.

- [11] Just A., Walas W., Kondratiuk-Janyska A., Pełczewski J., Małolepszy M., Niedziałkowska A., *Matematyka dla studentów politechnik. Teoria, przykłady, zadania z wykorzystaniem pakietów matematycznych*, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 2019.
- [12] Kącki E., Siewierski L., *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975.
- [13] Krzyż J., *Zbiór zadań z funkcji analitycznych*, Wydawnictwo Naukowe Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2005.
- [14] Leja F., *Funkcje analityczne i harmoniczne*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, Warszawa 1952.
- [15] Rudin W., *Analiza rzeczywista i zespolona*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1986.

Skorowidz

- argument
 - główny liczby zespolonej, 11
 - liczby zespolonej, 11
- całka krzywoliniowa funkcji mającej
 - funkcję pierwotną, 65
- ciąg
 - zespolony, 34
 - zespolony rozbieżny, 37
 - zespolony zbieżny, 34
- ciągłość funkcji, 40
- funkcja
 - analityczna, 84
 - harmoniczna, 50
 - hiperboliczna, 31
 - holomorficzna, 48
 - pierwotna, 65
 - trygonometryczna, 29
 - wykładnicza, 24
 - zespolona
 - zmiennej rzeczywistej, 55
- granica funkcji, 40
- jednostka urojona, 7
- kryterium
 - Cauchy'ego, 80
 - d'Alemberta, 79
 - porównawcze, 79
 - zbieżności szeregu Laurenta, 85
- logarytm
 - główny, 33
 - naturalny, 33
- moduł liczby zespolonej, 9
- obszar, 67
- obszar jednospójny, 67
- oryginał, 113
- otoczenie pierścieniowe, 39
- otoczenie punktu, 39
- płaszczyzna Gaussa, 38
- pierwiastek z liczby zespolonej, 15
- pochodna funkcji, 41
- postać liczby zespolonej
 - kartezjańska, 8
 - trygonometryczna, 13
 - wykładnicza, 27
- przekształcenie
 - Laplace'a, 113
 - liniowe, 22
- punkt osobliwy odosobniony, 95
 - biegun, 96
 - związek z residuum, 104
 - biegun k -krotny, 96

- związek z punktem zerowym, 99
- związek z residuum, 105
- charakteryzacja, 97
- istotnie osobliwy, 96
- pozornie osobliwy, 95
- punkt regularny, 95
- punkt zbioru
 - izolowany, 39
 - skupienia, 39
- punkt zerowy, 92
 - k -krotny, 92
 - charakteryzacja, 93, 94
- równania Cauchy'ego-Riemanna, 43
- równanie Laplace'a, 50
- równanie parametryczne
 - odcinka, 57
 - okręgu, 58
- residuum funkcji, 100
 - związek z całką niewłaściwą, 108
 - związek z szeregiem Laurenta, 102
- rodzaje krzywych
 - łuk
 - gładki, 60
 - kawałkami gładki, 60
 - regularny, 60
 - skierowany, 60
 - zwykły, 60
 - kontur, 60
 - krzywa Jordana, 60
 - skierowana dodatkowo, 60
- splot funkcji, 123
- sprzężenie liczby zespolonej, 9
- szereg
 - harmoniczny, 80
 - Laurenta, 85
 - pierścień zbieżności, 86
 - liczbowy, 78
 - Maclaurina, 84
 - wybrane funkcje, 84
 - potęgowy, 81
 - koło zbieżności, 82
 - promień zbieżności, 82
 - Taylora, 83
- transformata Laplace'a, 112
- twierdzenie
 - Borela, 124
 - całkowe Cauchy'ego, 68
 - uogólnienie na obszary wielospójne, 69
 - całkowe o residuach, 107
 - Cauchy'ego-Hadamarda, 82
 - o istnieniu pochodnych wyższych rzędów, 73
- własności
 - całki krzywoliniowej, 63
 - funkcji hiperbolicznych, 31
 - funkcji trygonometrycznych, 29
 - funkcji wykładniczej, 25
 - modułu, 10
 - przekształcenia Laplace'a, 116
 - przekształcenia liniowego, 22
 - splotu, 123

-
- sprzężenia, 9
 - warunek
 - konieczny bezwzględnej zbieżności szeregu, 79
 - konieczny zbieżności szeregu, 79
 - zbieżności szeregu, 79
 - wielomian zespolony, 17
 - wzór
 - Borela o splocie, 124
 - całkowy Cauchy'ego, 70
 - uogólniony, 73
 - de Moivre'a, 14
 - Eulera, 25
 - Riemanna-Mellina, 121
 - zamiana całki krzywoliniowej na oznaczoną, 62
 - zasadnicze twierdzenie algebry, 18
 - zbiór
 - domknięty, 69
 - liczb zespolonych, 7
 - otwarty, 41

ISBN 978-83-67934-19-0



9 788367 934190
