

WPLYW DOBORU WARSTW NA STATECZNOŚĆ I NOŚNOŚĆ ORTOTROPOWYCH PŁYT PIĘCIOWARSTWOWYCH

R. GRĄDZKI

Zakład Podstawowych Problemów Techniki, Instytut Zarządzania Politechniki Łódzkiej,
ul. Piotrkowska 316, 90-924 Łódź

K. KOWAL-MICHALSKA

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej,
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy przedstawiono analizę wpływu parametrów geometrycznych i materiałowych na masę, stateczność i nośność płyt prostokątnych, zbudowanych z pięciu warstw o różnej grubości i wykonanych z różnych materiałów. Analiza nośności prowadzona jest w zakresie sprężysto-plastycznym, w oparciu o równania Prandtla-Reussa i kryterium plastyczności Tsai-Wu. Wyniki wstępnych obliczeń przedstawiono na wykresach.

1. WSTĘP

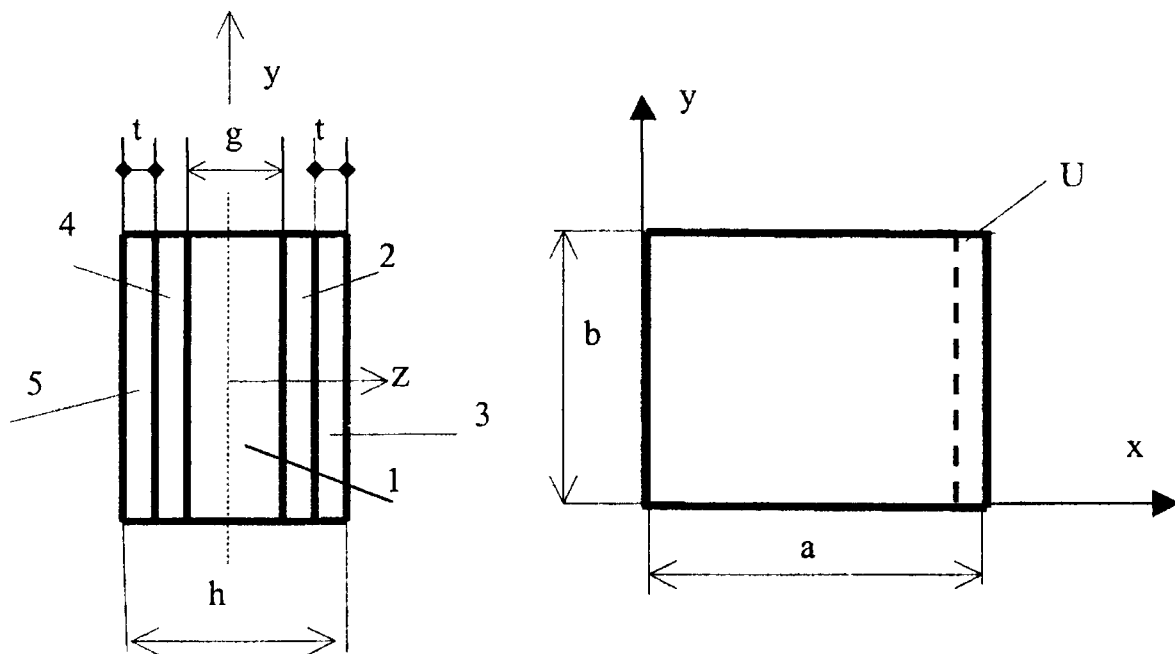
Wielowarstwowe płyty zwane też laminatami są postrzegane jako konstrukcje korzystne ze względu na możliwość kształtowania ich zgodnie z rosnącymi żądaniami dotyczącymi lekkości i wysokiej nośności. Płyty takie są szeroko stosowane nie tylko w lotnictwie, ale także w budownictwie i przemyśle motoryzacyjnym. Warstwy płyty są najczęściej wykonane z kompozytów, które w dalszych rozważaniach będziemy traktować jako materiał ortotropowy. Aby otrzymać pełną informację o pracy płyt, poddanych obciążeniom działającym w ich płaszczyźnie, należy w rozważaniach uwzględnić nie tylko stan krytyczny i zakrytyczny w zakresie sprężystym (w oparciu o nieliniową teorię płyt laminowanych) ale również zastosować odpowiednie kryterium uplastycznienia i dalej związku opisujące zależności fizyczne w obszarach sprężysto-plastycznych. Taka analiza możliwa jest jedynie na drodze numerycznej, gdyż związki naprężenie-odkształcenie (równania Prandtla-Reussa) mają charakter przyrostowy. Bez wątplenia metody czysto numeryczne (np. MES) są najbardziej ogólnym narzędziem i pakiety profesjonalne pozwalają na znalezienie odpowiedzi dla szerokiej gamy płyt wielowarstwowych, ale nie należy zapominać o długim czasie obliczeń i wysokich kosztach. Należy również pamiętać, że warunkiem uzyskania prawidłowych wyników jest zbudowanie odpowiedniego modelu, wybór odpowiedniego elementu, wprowadzenie adekwatnego kryterium plastyczności i prawidłowe przyjęcie warunków brzegowych. Metody analityczno-numeryczne, w których analityczne zależności w zakresie sprężystym są wykorzystywane do zbudowania iteracyjnej procedury numerycznej muszą z natury być mniej ogólne ale dają szybkie i wystarczająco dokładne wyniki, szczególnie jeśli zależy nam na wyznaczeniu maksymalnego obciążenia przenoszonego przez płytę

Przedmiotem badań są płyty prostokątne zbudowane z pięciu warstw ortotropowych, o głównych osiach ortotropii równoległych do brzegów płyty. Płyty poddane są jednokierunkowemu ścisnaniu, ale ponieważ nieobciążone brzegi muszą pozostać nieruchome w rzeczywistości mamy do czynienia z dwukierunkowym ścisnaniem. Dla konstruktorów interesujące może być określenie jak zmieniają się: masa, sztywność płytowa, naprężenie krytyczne i naprężenie graniczne (nośność) w zależności od przyjętych parametrów geometrycznych (grubości poszczególnych warstw) i materiałowych (różne materiały oraz różne ułożenie warstw).

2. POSTAWIENIE PROBLEMU

Rozpatrywane są płyty prostokątne poddane obciążeniu ścisnącemu w ten sposób, że badana jest odpowiedź płyty na przyrost przemieszczenia ΔU jej brzegów. Płyty są płaskie i wolne od naprężeń. Założono, że wszystkie brzegi płyty są przegubowo podparte i pozostają proste podczas obciążania. Brzegi nieobciążone pozostają nieruchome.

Płyty zbudowane są z 5-ciu warstw symetrycznie położonych względem powierzchni środkowej (rys.1). Jeśli własności wytrzymałościowe materiałów warstw są tego samego rzędu to przyjmuje się, że hipoteza Kirchhoffa pozostaje słuszna w całym przekroju poprzecznym.



Rys. 1. Geometria i obciążenie płyty

Własności materiałowe poszczególnych warstw są określone przez następujące stałe sprężyste: moduły Younga E_x^k, E_y^k ; liczby Poissona ν_{xy}^k, ν_{yx}^k ; i moduł sprężystości postaciowej G^k ($k=1,2,3$). Jak wiadomo, słuszna jest zależność $E_x^k / E_y^k = \nu_{xy}^k / \nu_{yx}^k$.

Przedwyboczeniowe wyrażenia dla pól przemieszczeń i naprężeń są następujące:

$$u^0 = U \frac{x}{a}; \quad v^0 = 0; \quad \sigma_x^0 = \text{const.}, \quad \sigma_y^0 = \text{const.}, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (1)$$

W zakresie sprężystym analiza stateczności prowadzona jest w oparciu o nieliniową teorię płyt laminowanych [4].

Po przyjęciu funkcji ugięcia w postaci:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \text{gdzie } f \text{ jest swobodnym parametrem,} \quad (2)$$

wyznaczono (w sposób dokładnie opisany we wcześniejszych publikacjach [2]) przemieszczenia powierzchni środkowej płyty:

$$u = u^0 + f^2 \left(C_1 \sin \frac{2\pi x}{a} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (3)$$

$$v = v^0 + f^2 \left(C_2 \sin \frac{2\pi y}{b} + B_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \cos \frac{2\pi x}{a} \right). \quad (4)$$

Stałe C_1 , C_2 , B_1 , B_2 zależą od geometrycznych i materiałowych własności warstw:

$$C_1 = \frac{\pi}{16a} \left(\frac{A_{12}}{A_{11}} \lambda^2 - 1 \right); \quad C_2 = \frac{\pi \lambda}{16a} \left(\frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right);$$

$$B_1 = \frac{\hat{e}\hat{b} - \hat{c}\hat{d}}{\hat{a}\hat{d} - \hat{b}^2}, \quad B_2 = \frac{\hat{c}\hat{b} - \hat{e}\hat{a}}{\hat{a}\hat{d} - \hat{b}^2},$$

$$\hat{a} = \frac{1}{a^2} (A_{11} + A_{33} \lambda^2); \quad \hat{b} = (A_{12} + A_{33}) \frac{\lambda}{a^2}; \quad \hat{c} = \frac{-\pi}{16a^3} [-A_{11} + (A_{12} + 2A_{33}) \lambda^2];$$

$$\hat{d} = \frac{1}{a^2} (A_{22} \lambda^2 + A_{33}); \quad \hat{e} = \frac{-\pi \lambda}{16a^3} [-A_{22} \lambda^2 + (A_{12} + 2A_{33})]; \quad \lambda = a/b;$$

$$A_{11} = \sum_{k=1}^5 \frac{E_x^k}{1 - (v_{xy} v_{yx})^k} (z_k - z_{k-1}); \quad A_{22} = \sum_{k=1}^5 \frac{E_y^k}{1 - (v_{xy} v_{yx})^k} (z_k - z_{k-1});$$

$$A_{12} = \sum_{k=1}^5 \frac{v_{yx}^k E_y^k}{1 - (v_{xy} v_{yx})^k} (z_k - z_{k-1}); \quad A_{33} = \sum_{k=1}^5 G_{xy}^k (z_k - z_{k-1}).$$

Naprężenia krytyczne dla płyt prostokątnych zbudowanych z 5 warstw ortotropowych poddanych temu szczególnemu przypadkowi ściskania znaleziono w oparciu o rozwiązanie przedstawione w fundamentalnej pracy Timoszenko i Gere [6] dla płyty izotropowej.

Stosując znane nieliniowe związki geometryczne pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami oraz prawo Hooke'a dla materiału ortotropowego, możemy określić sprężyste pole naprężeń w każdym punkcie rozpatrywanej płyty.

Aby wyznaczyć wartość maksymalnego obciążenia przenoszonego przez płytę należy prowadzić analizę w obszarach sprężysto-plastycznych. W stanie plastycznym poczyniono następujące założenia:

- charakterystyki materiałowe warstw są znane w całym zakresie obciążenia ;
- materiały podlegają kryterium Tsai-Wu;
- wszystkie założenia nieliniowej teorii płyt pozostają nadal słuszne;
- postaci funkcji przemieszczeń są takie same ale amplituda „f” pozostaje parametrem swobodnym,
- zgodnie z teorią plastycznego płynięcia przyrosty naprężeń są związane z przyrostami odkształceń poprzez równania Prandtla-Reussa.

W tej pracy przyjęto, że wszystkie charakterystyki materiałowe warstw są liniowo sprężyste, bez wzmocnienia w zakresie plastycznym. W takim razie dla każdego z trzech rozważanych materiałów muszą być znane granice plastyczności w kierunkach głównych ortotropii (dla jednokierunkowego ściskania C_x^k, C_y^k oraz dla jednokierunkowego rozciągania T_x^k, T_y^k) i granica plastyczności wyznaczana w próbie czystego ścinania S.

W przypadku gdy granice plastyczności odpowiadające próbie jednokierunkowego ściskania i rozciągania nie są tożsame, Tsai i Wu [7] zaproponowali – dla płaskiego stanu naprężenia - kryterium w następującej postaci:

$$f = k_1 \sigma_x + k_2 \sigma_y + k_{11} \sigma_x^2 + k_{22} \sigma_y^2 - k_{12} \sigma_x \sigma_y + 3k_{33} \tau_{xy}^2 = 1; \quad (5)$$

gdzie parametry k_1, k_2 , oraz k_{11}, k_{22} i k_{33} zależą od granic plastyczności omówionych wcześniej, a parametr k_{12} może być wyznaczony na podstawie przybliżonych zależności, bądź na drodze doświadczalnej (patrz [7] i [5]).

W analizie stanu zakrytycznego w obszarze sprężysto-plastycznym równania Prandtla-Reussa [3] przyjęto w postaci:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x &= \frac{E_x}{(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} [\Delta \varepsilon_x + \nu_{xy} \Delta \varepsilon_y - \Lambda (S_{xx} + \nu_{xy} S_{yy})], \\ \Delta \sigma_y &= \frac{E_y}{(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} [\Delta \varepsilon_y + \nu_{yx} \Delta \varepsilon_x - \Lambda (S_{yy} + \nu_{yx} S_{xx})], \\ \Delta \tau_{xy} &= G_{xy} (\Delta \gamma_{xy} - \Lambda S_{xy}), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{TC}{3} (k_1 + 2k_{11} \sigma_x - k_{12} \sigma_y), & S_{yy} &= \frac{TC}{3} (k_2 + 2k_{22} \sigma_y - k_{12} \sigma_x), \\ S_{xy} &= 2TCk_{33} \tau_{xy}. \end{aligned}$$

T i C oznaczają wartości granic plastyczności odpowiednio przy rozciąganiu i ściskaniu, określone dla charakterystyki materiałowej wybranej jako charakterystyka odniesienia (najczęściej charakterystyka w kierunku obciążenia) [5].

Dla materiału ortotropowego o charakterystykach liniowo sprężystych - plastycznych bez wzmocnienia, parametr Λ jest wyrażony jako:

$$\Lambda = \frac{(S_{xx} + \nu_{yx} \eta S_{yy}) \Delta \varepsilon_x + \eta (S_{yy} + \nu_{yx} S_{xx}) \Delta \varepsilon_y + G^* S_{xy} \Delta \gamma_{xy}}{S_{xx}^2 + 2\eta \nu_{yx} S_{yy} S_{xx} + \eta S_{yy}^2 + G^* S_{xy}^2}; \quad (7)$$

gdzie: $\eta = \frac{E_y}{E_x}$; $G^* = G_{xy} (1 - \nu_{yx} \nu_{xy}) / E_x$.

3. METODA ROZWIĄZANIA

Metoda rozwiązania jest kombinacją rozwiązań analitycznego i numerycznego. Była już wielokrotnie stosowana przez autorów w ich pracach np. [1], [2],[5]. Obecnie procedura obliczeń została tak zmodyfikowana aby można było badać płyty wielowarstwowe zbudowane z warstw ortotropowych.

Do zagadnienia stanu zakrytycznego w obszarze sprężysto-plastycznym stosowana jest metoda wariacyjna Rayleigha-Ritza z uwzględnieniem plastyczności. Badana jest odpowiedź płyty na przyrost skrócenia ΔU . Aby wyznaczyć przyrosty energii w obszarach plastycznych i sprężystych przeprowadzono dyskretyzację każdej warstwy na elementy prostopadłościenne. W kolejnym kroku obliczeń wyznaczany jest przyrost energii w poszczególnym elemencie 3-wymiarowym. Przyrosty te są sumowane dla pojedynczej warstwy, a następnie dla całej płyty. Po numerycznym przeprowadzeniu minimalizacji energii względem niezależnego parametru „f” funkcji ugięcia wyznaczane są (również na drodze numerycznej) naprężenia średnie ściskające płytę. Naprężenia te odpowiadają wprost obciążeniu przyłożonemu do płyty.

Należy zauważyć, że w każdym kroku obliczeń uwzględniono możliwość wystąpienia procesów aktywnych, neutralnych i biernych (związanych z odciążeniem). W procedurze obliczeń przewidziano redukcję naprężeń do powierzchni plastyczności.

4. WSTĘPNE WYNIKI OBLICZEŃ

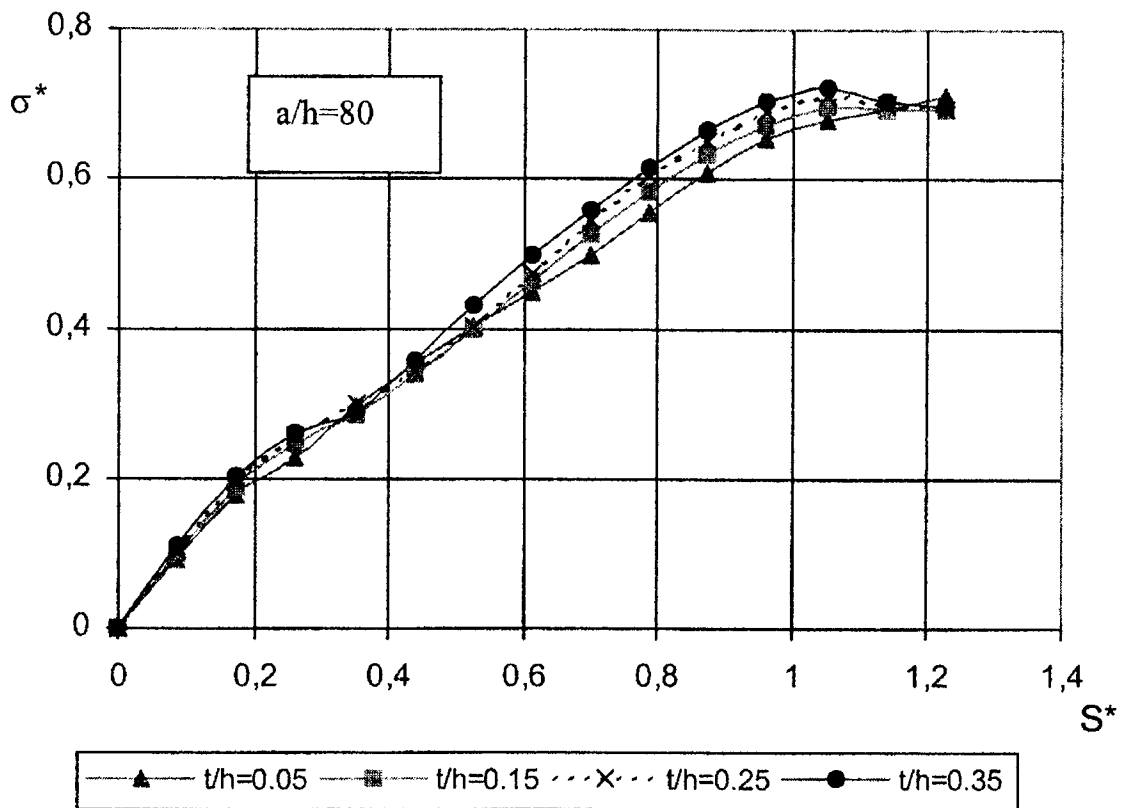
Pierwsze obliczenia przeprowadzono dla płyt wykonanych z warstw izotropowych o następujących własnościach materiałowych:

- warstwa stalowa: $E_s = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\nu_s = 0.3$; $T_s = C_s = 384$ MPa;
 $\rho_s = 7.95 \cdot 10^{-3}$ kg/m³
- warstwa kompozytowa: $E_k = 0.55 \cdot 10^5$ MPa; $\nu_k = 0.07$; $T_s = 384$ MPa;
 $C_s = 825$ MPa; $\rho_k = 1.45 \cdot 10^{-3}$ kg/m³
- warstwa aluminiowa: $E_{al} = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\nu_{al} = 0.3$; $T_{al} = C_{al} = 160$ MPa;
 $\rho_{al} = 2.95 \cdot 10^{-3}$ kg/m³

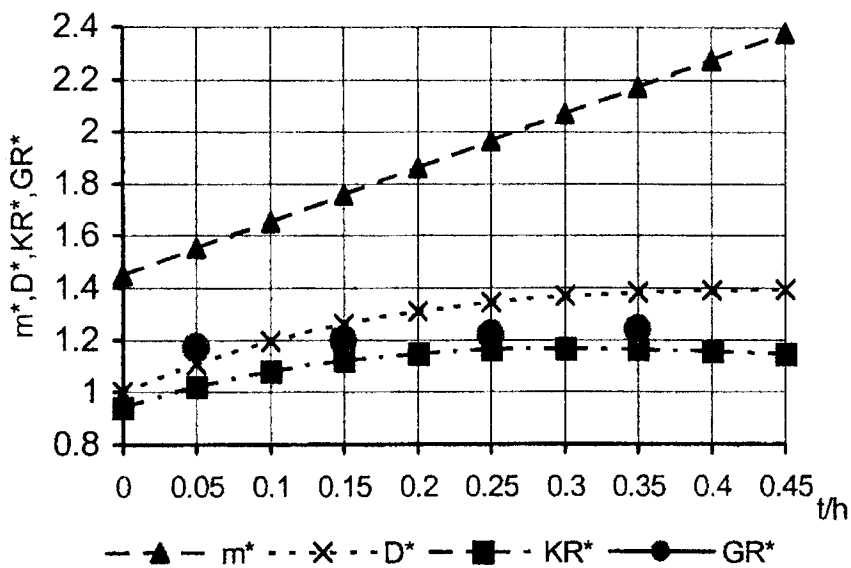
Przyjęto, że rozważane płyty (rys.1) są zbudowane w ten sposób iż warstwa środkowa ma ustaloną grubość $g = 0.1h$, zmienna jest grubość pozostałych warstw. Warstwy „3” i „5” oraz warstwa „1” są metalowe, zaś warstwy „2” i „4” kompozytowe.

Rozpatrzono dwa typy płyt kwadratowych, oznaczone jako: „S-A” (warstwy skrajne stalowe, warstwa środkowa aluminium) oraz „A-S” (odwrotny układ).

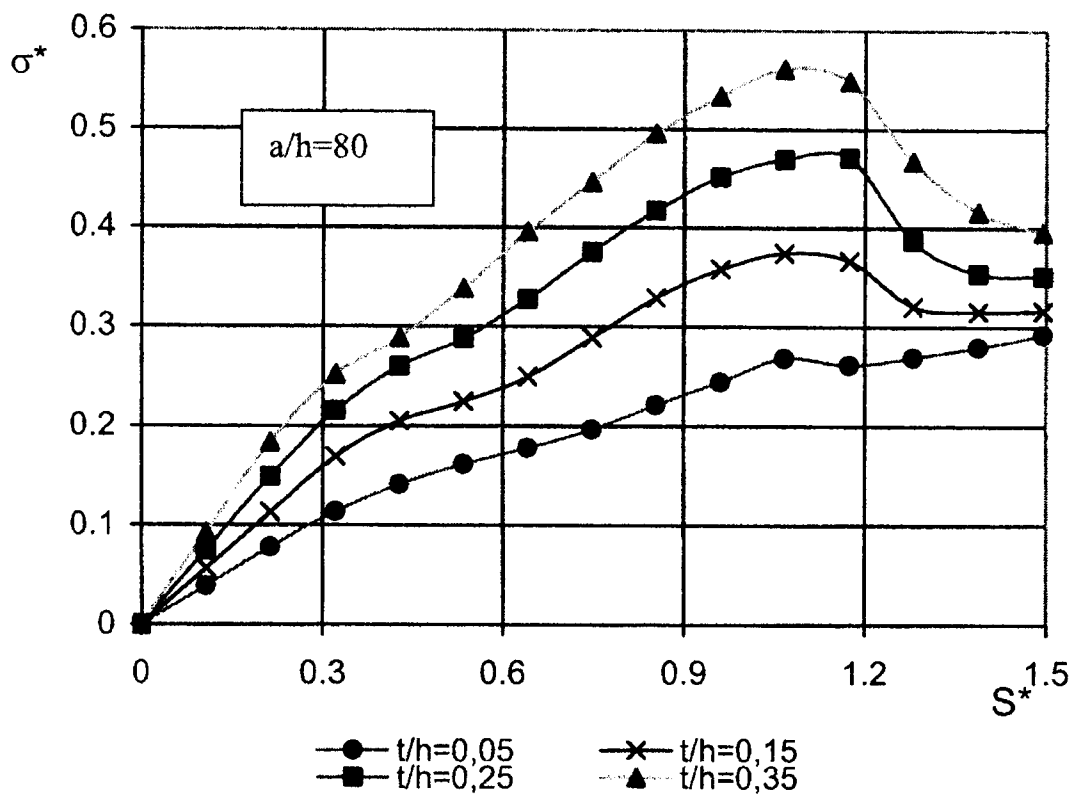
Na rysunkach 2 i 4 przedstawiono krzywe pracy płyt dla różnych grubości warstw i na ich podstawie, dla każdego rozpatrywanego przypadku, wyznaczono wartość maksymalnego obciążenia.



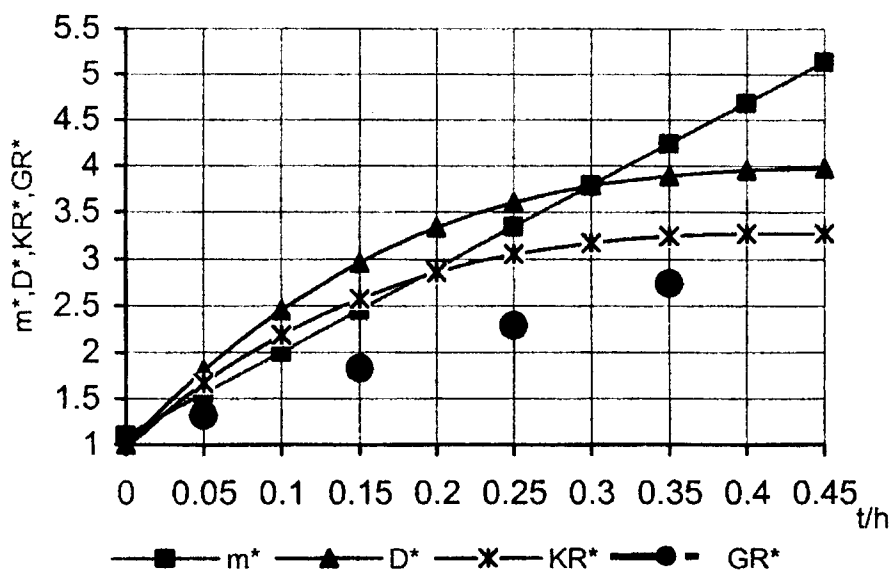
Rys. 2. Krzywe pracy dla płyt typu „A-S” ($\sigma^* = \sigma_{sr}/C_{al}$; $S^* = U \cdot E_{al}/a \cdot C_{al}$)



Rys. 3. Zmiana badanych bezwymiarowych wielkości w funkcji stosunku grubości t warstw zewnętrznych do grubości płyty h (płyta „A-S”)



Rys. 4. Krzywe pracy dla płyt typu „S-A” ($\sigma^* = \sigma_{sr}/C_S$; $S^* = U \cdot E_S/a \cdot C_S$)



Rys. 5. Zmiana badanych bezwymiarowych wielkości w funkcji stosunku grubości t warstw zewnętrznych do grubości płyty h (płyta „S-A”)

Zmianę badanych wielkości takich jak masa (m^*), sztywność płytowa w kierunku ściskania (D^*), naprężenia krytyczne (KR^*) oraz nośność (GR^*) przedstawiono na rys.3 i 5 w funkcji stosunku t/h (grubości warstw skrajnych do grubości całej płyty).

Wszystkie badane wielkości mają charakter bezwymiarowy - zostały odniesione do odpowiednich wielkości wyznaczonych dla jednowarstwowej płyty kompozytowej o grubości h .

Porównując wyniki dla płyt typu „A-S”(rys.3) i płyt oznaczonych jako „S-A” (rys.5) można łatwo zauważyć, że charakter zmian badanych wielkości wraz ze zmianą t/h jest diametralnie inny. W przypadku płyt o warstwach skrajnych wykonanych z aluminium zarówno sztywność jak i naprężenia krytyczne oraz naprężenie maksymalne (GR^*) zmieniają się nieznacznie (około 20%) a masa wzrasta o ponad 100%. Dla płyt o okładzinach wykonanych ze stali istnieje taki przedział t/h , dla którego przyrost masy jest zrekompensowany poprzez szybszy wzrost sztywności i naprężeń krytycznych. Nośność płyt również rośnie znacząco.

Wyniki obliczeń mające na celu analizę wpływu zmiany ułożenia głównych osi ortotropii w poszczególnych warstwach zostaną przedstawione podczas sympozjum.

LITERATURA

- [1] Grądzki R., Kowal-Michalska K., Post-buckling analysis of elasto-plastic plates basing on the Tsai-Wu criterion, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 4, 37, 1999
- [2] Grądzki R., Kowal-Michalska K., Ultimate load of laminated plates subjected to simultaneous compression and shear, *The Archive of Mechanical Engineering*, Vol.XLVIII, 3, 2001
- [3] Hill R., *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, 1950
- [4] Jones R.M., *Mechanics of composite materials*, International Student Edition, McGraw-Hill, Tokyo, 1975
- [5] *Selected problems of instabilities in composite structures*, complete edition, edited by: Kowal-Michalska K., Kołakowski Z., Technical University of Lodz, A Series of Monographs, Łódź, 1999.
- [6] Timoshenko S., Gere J. *Theory of elastic stability*, Mc-Graw Hill Company, New York, 1961
- [7] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials, *Journal of Composite Materials*, 5, 1971

INFLUENCE OF LAYERS ARRANGEMENT ON STABILITY AND ULTIMATE LOAD OF FIVE-LAYERED ORTHOTROPIC PLATES

In the paper the analysis of influence of material and geometrical parameters of layers on mass, stability and ultimate load of rectangular plates subjected to compression is carried out. The considered plates are built of orthotropic layers symmetrically arranged with respect to the mid-plane. The principal axes of orthotropy are parallel to the plate edges. The analysis is conducted in the elastic and elasto-plastic range, basing on Tsai-Wu Criterion and Prandtl-Reuss equations. The solution is reached in the analytical-numerical way by an iterative procedure. The results of preliminary calculations are shown in figures.