Recenzja dorobku dr Michała Boczek

Rozpocznę recenzję od uwag dotyczących mojego sposobu recenzowania dorobku dr Boczek. Sam tytuł *Agregowanie danych za pomocą pseudomiary* w zasadzie nie pozwala znaleźć klucza, czyli sposobu recenzowania. Słowo agregacja występuje prawie 50 razy na stronach opisu dorobku. Według słownika języka polskiego PWN agregacja, to *łączenie się elementów w całość; też: stan skupienia tych elementów.* Sprowadzenia tak dużej ilości zjawisk opisanych w dorobku do pojęcia agregacja zdaje się wyolbrzymieniem. Być może kluczem jest *Aggregation problem*, Wikipedia. Ale to mylny trop. Dorobek autora nie można zrecenzować z punktu widzenia ekonometrii, co daje możliwość spojrzenia ze strony statystyki. Przegląd przedstawionych wyników do oceny oraz najnowsze współbieżne wyniki okazują się by blisko *Teorii przestrzeni funkcyjnych* i uogólnień *Teorii miary.* Nie wyczerpuje to jednak możliwości interpretacyjnych. Mamy w dorobku struktury typowe dla matematyki dyskretnej z niemal algorytmicznymi strukturami.

Metodologia oceny

Wyniki zostały podzielone na dwie grupy . W pierwszej grupie uwzględniono publikacje [O1.1]-[O1.3]. Grupa ta koncentruje się wokół problemów z całką Sugeno. W drugiej grupie prac są pozostałe publikacje. Pozycja [O1.7] nie została uwzględniona gdyż cytuję *In this short communication, we have introduced an extended version of the Choquet-Sugeno-like operator defined in* [O1.6]. Recenzję drugiej grupy rozpoczyna się od [O1.4]. Szczególnie przyciąga uwagę Definition 3.1[O1.4], czyli Definicja 15 z autoreferatu, *Conditional aggregation operators.* Problem polega na tym, czy rzeczywiście tak ogólna definicja wraz z Definicją 4.1 jest uzasadniona, to drugi ważny kierunek sprawdzania dorobku.

Wokół całki Choquet-Sugeno

Definicja całki Sugeno i w pewnym stopniu całki Choqueta są związane z przestrzeniami Lorentza. Potwierdzają to wyniki Jun Kawabe *The completeness and separability of the Lorentz spaces defined by the Sugeno and Shilkret integrals* (2021) *Topological and topological linear properties of the Sugeno-Lorentz spaces* (2023). Wyniki Kawabe przybliżają nam klasyczne wyniki z N. Dunford, J. Schwartz, Linear Operators, Part I a przez ich spójność z klasycznymi wynikami czytanie ich sprawia przyjemność. Ponieważ dr Boczek i autorzy prac uogólniają podejście do całki Sugeno rodzi się pytanie czy właściwą strukturą nie są przestrzenie Orlicza Sugeno-Lorentza. Taką możliwość daje funkcja f^* *decreasing rearrangement*, gdzie

$$f^*(x) = \sup\{t : d_f(t) \geqslant x\}$$

oraz

$$d_f(t) := \mu\{|f| \geqslant t\}.$$

Warto przynajmniej rozważyć takie podejście. Definicja Pana dra eksploruje nieco w inny sposób funkcję d_f. Takie pytanie prowokuje i częściowo uzasadnia

Twierdzenie 4.1 [O1.1] dla mnie najciekawszy wynik, choć dowód jest techniczny. Twierdzenie które umieszcza badania w zbiorze funkcji komonotonicznych. Dowód krok 3 pokazuje, że można jeszcze coś „ugrać" i podać postać subaddytywności ze stałą. Ostatnia uwaga ogólna, wydaje się także, że wybór funkcji $r(x, a)$ z klasy $\mathcal{B}_2$ może jednak byłby właściwy od początku.

Jedną z motywacji [O1.1] jest pozycja] G.J. Woeginger, An axiomatic characterization of the Hirsch-index opublikwoana w Mathematical Social Sciences. Publikacje Woegingera mają adnotację zarówno w MSC jak i w ACM Class, czyli Association for Computing Machinery. Opis haseł z ACM Classification Codes przynajmniej częściowo tłumaczy sposób prezentacji zarówno wyników dr Boczka jak i Woegingera. Prace G.J. Woeginger to kombinatoryka, algorytmy, grafy zadania optymalizacyjne w matematyce dyskretnej. To tłumaczy spsób prezentacji wyników w [O1.1] czyli dlaczego jest tyle przykładów dyskretnych i mają często strukturę kodu. Te dwa punkty widzenia przeszkadzają w odbiorze osiągnięć i stwarzają wrażenie prac niedokończonych.

Teraz przejdę do analitycznych wyników. Z opisu osiągnięć dr Boczka: *Nierówność Jensena znalazła* **zastosowanie w porównywaniu indeksów naukometrycznych** *(patrz Ex. 5.1 w (O1.1)). Z niej uzyskaliśmy nierówność Lapunowa [Prop. 3.10, (O1.1)] i nierówóność Hardy'ego [Prop. 3.11, (O1.1)]. W pracy (O1.1) wykazaliśmy również przeciwną nierówność Jensena [Thm. 3.9, (O1.1)], nierówności Markowa oraz typu Paleya-Zygmunda.* Przy podejściu analityczno-funkcyjnym próbuję zrozumieć wyniki w kategorii włożeń przestrzeni, czyli Twierdzenie 3.1 i 3.9. Mam trochę pretensji o nazwanie wyniku *Nierówność Jensena*. Może w sensie wizualnym ma to uzasadnienie. Dowód i założenia nie pozostawiają złudzeń. Nie ma tutaj własności funkcji wypukłej ale sama monotoniczność ma znaczenie. Nierówność Lapunowa to w zasadzie trywialny wniosek. Proposition 3.11, czyli nierówność Hardiego jest jednak dla specjalnej sytuacji, między innymi dla klasy funkcji $r(t, a) := \phi(t/a)a$. Nierówność typu Markowa w podrozdziale 3.2 ma rzeczywiście postać klasyczną. Jednak elementarna i jednocześnie głęboka nierówność mogłaby być lepiej wyeksponowana i zrozumiana. Zdanie pokazujące jej ważność *Such inequalities are used in functional analysis to derive some integral inequalities (see [31])* jest mało informatywne ... trochę szkoda. Jeśli chodzi o podrozdział 3.3. Paley-Zygmund type inequality to oczywiście z dużą radością zaglądam do książki [25] O. Kallenberg, Foundations of Modern Probability, 2nd ed. Kallenberg z dużą dokładnością oddaje referencje, bardzo rzadko spotykana uczciwość. Sama klasyczna nierówność Paley-Zygmund jak i w [O1.1] należy do klasy: elementarna i głęboka.

Praca [O1.2]. Muszę poświęcić dużo czasu na zrozumienie definicji Su_n^+. Nie podoba mi się ten sposób wyjaśniania definicji. Próba ustalenia matematyki prowadzi mnie do International Journal of Approximate Reasoning i pracy *Discrete pseudo -integrals* R. Mesiar , J. Li, E. Pap (2013). W autoreferacie są podane inne mniej dostępne książki. Powyżej wspomniana praca liczy 8 stron z czego 6 strony to opis, bibliografia i 8 definicji. Ponadto przykłady. Cytat z abstraktu *Different kinds of decomposition and subdecomposition of simple functions into basic functions sums, as well as different kinds of pseudo-operations exploited for integration and summation result into several types of integrals, including among others, Lebesgue, Choquet, Sugeno, pseudo-additive, Shilkret, PAN, Benvenuti and concave integrals. Some basic properties of introduced discrete pseudoconcave integrals are discussed, and several examples of new integrals are given* w zasadzie tłumaczy wszystko. Trudno w tej chwili nazwać te rozważania mate-

matycznie głębokimi... Nie twierdzę, może na poziomie idei języka coś ważnego jest tam zawarte. Jeśli chodzi o funkcjonały sub-addytywne trudno nie zacytować świetnych wyników Hans Föllmer, Alexander Schied *Stochastic Finance An Introduction in Discrete Time* Second Revised and Extended Edition Walter de Gruyter Berlin New York 2004, zobacz np. 2.85, 4.14, 4.88 i wiele innych charakteryzacji.

Pozycję [O1.3] można w zasadzie traktować oddzielnie choć naturalnie związana jest z z pracą [O1.2]. Ich jednak uniwersalna natura wydaje się silniejsza niż sama motywacja. *W pracy [O1.3] znaleźliśmy wszystkie funkcje spełniające równanie funkcyjne*, czyli cytując za autorem *szczególny przypadek równania rozdzielczego (ang. distributive equation).* Konstrukcja tej pracy przypomina kod programu w szczególności dowód Twierdzenia 2.1. Z dowodu *We have to consider 24 cases. We discuss the first case in detail, since the others can be treated in a similar way.* Do poprawności dowodu przekonuje mnie fakt, że można w zasadzie przetestować tezę „komputerowo".

Wokół pojęcia Conditional aggregation operators

Postawione wyżej pytanie o sens tak ogólnej definicji w zasadzie znajduje rozwiązanie. To, że definicja 3.1 [O1.4] jest ogólna przekonują przykłady. Próbuję definicję umieścić w kontekście analizy. Otrzymuję funkcjonał superaddytywny ze stałą co najwyżej dwa. Ze stałą dokładnie 2 taki funkcjonał znajduję w Examples 3.6 (b). Nie dziwi mnie również rola takiego funkcjonału w Proposition 3.10 i Uwaga 3.11. Wraz z Definicją 4.1 czyli *generalized survival function* oraz Definicją 5.4 *the Choquet-Stieltjes functional* to w zasadzie trzon całej pracy w tym sensie, że obie definicje znajdują swoje umocowanie w licznych własnościach i przykładach. Własności nie wykraczają poza elementarne. Po kolei: Proposition 4.3 ma też taki komentarz(dowód) *Use Definitions 4.1 or 3.1 and the equality (1) to prove (a)–(f).* Podobnie Proposition 4.4 i dalek Wniosek. Bardzo pomocny jest tutaj autoreferat (również od strony historycznej) gdyż gubię się w strukturze wyników. Przytoczę fragment: *Zastępując funkcję przeżycia we wzorze (8) pewnym innym ogólniejszym funkcjonałem, otrzymujemy nową całkę typu Choqueta. I tak na przykład Greco i inni [70] zastosowali uogólnioną pojemność (ang. generalized capacity) uzyskując funkcjonał, który wyjaśnia preferencje dziekana w znanym problemie wyboru najlepszego studenta (zob. [66, 166]). Z kolei, Do i Thiele [48] wprowadzili pojęcie miary superpoziomu (ang. super level measure) i zastosowali ją w teorii zewnętrznych przestrzeni miarowych w kontekście analizy harmonicznej i czasowo częstotliwościowej (patrz też [73]). Miara superpoziomu, zdefiniowana dla nieujemnych rzeczywistych funkcji oparta na pojęciu rozmiaru (ang. size), określa „jak duża" jest funkcja na zbiorze. Rozmiar jest dowolną quasi-normą, tj. operatorem nieujemnym, niemalejącym, jednorodnym i quasi-subaddytywnym. Założenia te są niezbędne, aby uznać miarę superpoziomu za narzędzie używane do kodowania funkcji w klasycznej teorii miary i całki Lebesgue'a, a także do budowania teorii przestrzeni zewnętrznej miary L^p [48]. W pracy [O1.4] sformułowaliśmy nowe uogólnienie funkcji przeżycia...* Zwraca moją uwagę, dodawanie kolejnych założeń. Przykłady: Proposition 4.6. (cf. [23, Proposition 5.4]) Let $f \in \mathbf{F}$ and $\mu \in \mathbf{M}$ be continuous from below i mamy w zasadzie teorio miarowy dowód. Zgadzam się z dr Boczkiem *Na szczególną uwagę zasługuje własność subaddytywności.* Proposition 4.13. Tutaj mamy ko-

lejną grupę założeń. Czy zatem skracając nieco pracę nie warto było wprowadzić jednolite założenia od początku kosztem ogólności z której nie wynikają jakieś porywające fakty? Tym bardziej, że Proposition 5.13 wymaga takich założeń? W sformułowaniu Propositions 4.13 drażni *map is nondecreasing.* Dopiero z dowodu rozumiem założenie. W autoreferacie jest podobnie. Wracam do wątku założeń. Przykład 6.3 dotyczy nieujemnych zmiennych losowych w przestrzeni probabilistycznej. Rozumiem jak naturalny problem wyboru ubezpieczenia z n propozycji *can be rewritten in the language of the generalized survival function* tylko jaka jest korzyść?

W zasadzie ocena [O1.5] jest dla mnie najbardziej złożona. Wyniki rozpoczyna uogólnienie idei z [O1.4], czyli *parametryczną rodziną warunkowych operatorów agregacji.* Ponieważ jest użyta kolejna warstwa obiektów (miary, rodziny referencyne itd.) trudno bezpośrednio komentować same wyniki. Ich sformułowanie znajdziemy w opisie osiągnięć czy bezpośrednio w pracy. Tutaj kluczem wydaje się właśnie agregacja. Czytając rozdział **4. Applications** dochodzę do wniosku, że wprawdzie bezpośrednio parametryczną rodziną warunkowych operatorów agregacji nie jest totalnie użyta, to wprowadzenie wielu warunkowych operatorów agregacji dało autorom sposobność aby rozpocząć spacer po *4.1. Scientometrics* oraz *4.2. M2M-transformation on hyperset.* Te dwa podrozdziały dzieli właśnie próba użycia wielu miar jednocześnie. Z tym, że drugi podrozdział nie ma cytowań, czyli użycie wielu miar dopiero raczkuje. Poza tym przejście od wzoru (12) do (13) można wykonać na wiele sposobów...

Tak dochodzę do głównego wątku tej części wyników (rozdział 5 [O1.4]) i [O1.6], czyli nowych pomysłów na definicję całki. Autorzy piszą w kolejnej o prawdziwym przełomie *In this paper, we have indicated a way how to look at different operators with respect to a nonadditive measure from a new (in some sense unified) perspective. We have defined an operator generalizing the Sugeno-like operator (Example 3.7), the generalized Lebesgue integral (Example 3.8), the F-decomposition integral with respect to a finite partition decomposition system (Example 3.9), the Lovász extension (Example 3.10), the generalized p-variation (Example 3.12) and chain- - based universal integrals (Section 6).* I ta perspektywa pokazuje najważniejszą część osiągnięć wystarczającą do pozytywnej oceny dorobku. Wprawdzie nie bardzo wiem dlaczego w autoreferacie podkreślona jest rola Humberto Bustince'a, *wybitny specjalista w dziedzinie sztucznej inteligencji oraz nauczaniu maszynowym* bo pewna kategoryzacja podejścia do całkowania jest naturalnym pytaniem. Rozumiem, że to ma podkreślić istotność wyników.

Wokół pojęcia całki

Pojęcie (definicja) funkcjonału typu całkowego zostało rozwarstwione. Pierwszym elementem jest conditional aggregation operators. Troch mnie dziwi, że w Definicji 5.4 [O1.4] nie uwzględniono roli rozdrobnienia $\mathcal{E}_t$. A przecież warunek absolutnej ciągłości rodziny miar $\widehat{\mu}$ względem miary μ ukrywa rolę rozdrobnienia. I właśnie to założenie jest w zasadzie jedynie istotne w dowodzie Proposition 5.6. W pracy [O1.6] rozwarstwienie procesu całkowania idzie w inną stronę, Definicja 3.2 [O1.6]. (Czy nie można połączyć obu podejść?) Tutaj rolę $\mathcal{E}_t$ przejmuje jeden zbiór *a nonempty family $\mathcal{H}$ of collections will be called a decomposition system.* Zanim omówię wyniki chcę podkreślić, że tutaj ogólność ma sens. Jest to jakby w sprzeczności z wcześniejszymi uwagami ale sprzeczność

pozorna. Robię przegląd literatury aby zrozumieć źródła Definicji 3.2. Rozpoczynam od Q. Zhang, R. Mesiar, J. Li, P. Struk, Generalized Lebesgue integral (2011). Definicja zrozumiała dalej szukam odnośników do tej pracy, N. Shilkret, Maxitive measure and integration, (1970) i ostatecznie znajduje odnośnik *Maxitive measure on σ -ring terms are defined as in P.R. Halmos,* **Measure Theory**. Wykrywam drobne zamieszanie z cytowaniem pracy *Generalized Lebesgue integral.* Tam definicja jest jednak szersza i dlatego wywodzi się z niej wyniki Shilkreta. W [O1.6] Example 3.8 jest jednak formuła okrojona do znaku $\sum$ w *Generalized Lebesgue integral* mamy *ang. a pseudo-addition.* Trzeba zaznaczyć, że są już podobne struktury zawarte w Definicji 3.2, czyli a set of finite partition. W pracy A. Šeliga, Decomposition integral without alternatives, its equivalence to Lebesgue integral, and computational algorithms już mamy zbiór $\mathcal{H}$, *decomposition system.* Inne operatory jak *generalization of the Lovász extension* są zbliżone do Generalized Lebesgue integral. Lecz dlaczego w Definicji 3.2 mamy relację. Nieco przekonuje mnie do Definicji 3.2 przykład *Generalized p-variation.* Niestety nie ma tutaj odnośników do konkretnych prac.

Nie oczekuję jakiś przełomowych wyników w tak ogólnym przypadku, czyli w przypadku Definicji 3.2. W zasadzie moja intuicja się sprawdza i mamy do czynienia z analizą warunków w przypadku dyskretnym. Ciekawy jest sam proces „porządkowania" wcześniejszych wyników poprzez perspektywę Definicji 3.2. To jest właśnie największa korzyść tej publikacji. Jednoczesny punkt widzenia na około 10 publikacji.

Wnioski końcowe dotyczący dorobku

Wyniki to duża liczba ciekawych definicji i jakby nie dokończonych badań. W zasadzie ta dualność przewija się przez całość prac i w konsekwencji w recenzji. Dorobek od strony matematycznej jest pełen nowych idei. Jak wyjaśniam wyżej, prace bliskie dorobkowi dr Boczka, czyli wyniki Kawabe, Woeginger, podobają mi się bardziej ze względu na ich spójność. Niemniej tak duża ilość nowych idei daje nadzieję, na ich lepsze umocowanie w matematyce.

Miscellaneous

Pozostałe informacje wyczerpują zestaw zobowiązań zwyczajowych i ustawowych do uzyskania habilitacji. Potwierdzam że zapoznałem się z:

1. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze, czyli osiągnięcia nr 2
2. Aktywność naukowa realizowana poza miejsce zatrudnienia (Politechnika Łódzka)
3. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę w tym otrzymane nagrody
4. Wykaz opublikowanych artykułów w czasopismach naukowych (prace niezamieszczone w sekcji I).
5. Wykaz wystąpień na krajowych lub międzynarodowych konferencjach naukowych

6. Wykaz uczestnictwa w pracach zespołów badawczych
7. Wykaz recenzowanych prac naukowych
8. Dane naukometryczne

Wniosek końcowy

Biorąc pod wzgląd zestaw zobowiązań zwyczajowych i ustawowych do uzyskania habilitacji uznaję, że dr Boczek wszystkie je wypełnił.

Karol Dziedziul