

IZABELA KRAUZE

Zakład Konstrukcji Stalowych

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

Politechniki Łódzkiej

MARCIN KAMIŃSKI

Zakład Konstrukcji Stalowych

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska

Politechniki Łódzkiej

**ZAGADNIENIA NIEZAWODNOŚCI BELEK
STALOWYCH PODDANYCH ZGINANIU**Opiniodawca: **prof. dr hab. inż. Paweł Śniady**

Celem niniejszego opracowania było przedstawienie algorytmu wyznaczania współczynnika niezawodności dla zginanych belek stalowych modelowanych przy użyciu Metody Elementów Skończonych. W pracy porównano modele jedno-, dwu- i trójwymiarowe tej samej jednoprzęsłowej równomiernie obciążonej belki swobodnie podpartej, dla której współczynniki niezawodności wyznaczono niezależnie metodą symulacji Monte-Carlo oraz uogólnioną metodą perturbacji stochastycznej. Moduł Younga tej belki został przyjęty jako wejściowa zmienna losowa o rozkładzie Gaussa, dla której zweryfikowano statystyczną zbieżność metody symulacyjnej za pomocą obliczeń symbolicznych przeprowadzonych w programie MAPLE. Modelowanie niezawodności przeprowadzono dla całego zestawu dwuteowników ekonomicznych w celu znalezienia najbardziej optymalnego profilu stalowego dla belki o danej rozpiętości i obciążeniu.

1. Wstęp

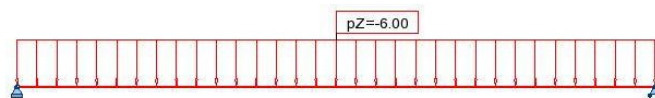
Określanie niezawodności elementów konstrukcyjnych przeprowadza się, zgodnie z obowiązującą normą Eurocode 0 [11], poprzez określenie współczynnika niezawodności, który jest ściśle uzależniony od sposobu określenia i wartości funkcji granicznej [4, 5, 9]. Funkcja ta (lub najczęściej zbiór niezależnych funkcji) opisuje zależność pomiędzy wielkościami dopuszczalnymi

i maksymalnymi dla danej konstrukcji budowlanej lub rozpatrywanego jej fragmentu. W kontekście analizy niezawodności dla inżynierów istotna jest kwestia wyznaczenia wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego dla obydwu tych wielkości, w odniesieniu do naprężeń oraz przemieszczeń maksymalnych dla danej konstrukcji. Zgodnie ze współczesnymi badaniami niezbędne momenty losowe, jak i parametry możemy określać (a) metodami statystycznymi (za pomocą odpowiedniej symulacji komputerowej), (b) metodami analitycznymi (gdy dysponujemy odpowiednimi funkcjami analitycznymi), (c) metodami spektralnymi (szczególnie popularnymi w dynamice konstrukcji) [8], a także we wszystkich tych przypadkach (d) metodami perturbacyjnymi. Oczywiście zastosowanie jednej z tych metod najczęściej wiąże się z wykorzystaniem odpowiedniego programu Metody Elementów Skończonych [10], bądź też istniejących modeli teoretycznych.

Zagadnienie to jest przeanalizowane na przykładzie zginanych belek stalowych wykonanych z dwuteowników walcowanych na gorąco. Dodatkowo bierze się pod uwagę różne modele tej samej belki prostej wolnopodpartej, obciążonej równomiernie na całej długości (model jednowymiarowy ciągłej belki pryzmatycznej, dwuwymiarowy, a także pełny – trójwymiarowy). Obliczenia statyczne są przeprowadzone za pomocą programu Metody Elementów Skończonych (MES) ROBOT, natomiast część symulacyjna i losowa są wykonane przy pomocy programu do obliczeń symbolicznych MAPLE. Porównujemy momenty i charakterystyki losowe dla przemieszczeń i naprężeń, kolejno określamy wartości oczekiwane oraz odchylenia standardowe dla przemieszczeń i naprężeń dopuszczalnych i ostatecznie – wskaźniki niezawodności. Głównym celem opracowania jest przedstawienie ogólnego algorytmu obliczeń, weryfikacja różnic pomiędzy wartościami wskaźnika niezawodności otrzymanymi metodami statystycznymi oraz porównanie ich z wartościami przedstawionymi w normie [11]. W dalszej kolejności przewiduje się rozwiązanie zagadnienia optymalizacji [7] wyboru profilu stalowego dla danych warunków statycznych i kinematycznych.

2. Obliczenia statyczne belek dwuteowych

Zagadnienie jest rozpatrywane na przykładzie zestawu zginanych belek stalowych w postaci dwuteowników ekonomicznych IPE walcowanych na gorąco. Dla uproszczenia założono schemat belki wolnopodpartej jednoprzęsłowej obciążonej obciążeniem równomiernie rozłożonym, stałym na całej długości belki, pominięto ciężar własny belki. Zastosowano stal niskostopową S235JRG2 (St3S) o współczynniku Poissona równym $\mu = 0,30$ i współczynniku sprężystości poprzecznej przyjętym jako $G = 80$ GPa. Dodatkowo przyjęto różne modele obliczeniowe wybranej belki, a mianowicie model jednowymiarowy (rys. 1), dwu- (rys. 2) oraz trójwymiarowy (rys. 3).



Rys. 1. Schemat obliczeniowy belki
Fig. 1. Static scheme of the beam

Model dwuwymiarowy podzielono na czterowzłowe elementy skończone płaskiego stanu naprężenia o wymiarach 10x10cm (w wyniku podziału otrzymano 60 elementów skończonych, rys. 4), natomiast w modelu trójwymiarowym zastosowano 6600 sześciowzłowych elementów skończonych (rys. 5).



Rys. 2. Siatka elementów skończonych dla modelu 2D (60 elementów 10x10cm)
Fig. 2. Finite element discretization in 2D model (60 finite elements)



Rys. 3. Siatka elementów skończonych dla modelu 3D (6600 elementów 10x10x10cm)
Fig. 3. Finite element discretization in 3D model (6600 finite elements)

Wyniki analizy statycznej dla modelu trójwymiarowego przedstawiono poniżej w postaci przemieszczeń pionowych (rys. 4), naprężeń podłużnych σ_{yy} (rys. 5) i naprężeń zredukowanych wyznaczonych zgodnie z hipotezą Hubera-Mises'a σ_{red} (rys. 6). Wykorzystując program Metody Elementów Skończonych ROBOT, dla każdego z trzech modeli wykonano serię obliczeń wpływu zmiany wartości modułu Younga E na wartość strzałki ugięcia u belki.



Rys. 4. Wartości przemieszczeń pionowych belki
Fig. 4. Vertical displacements for the beam

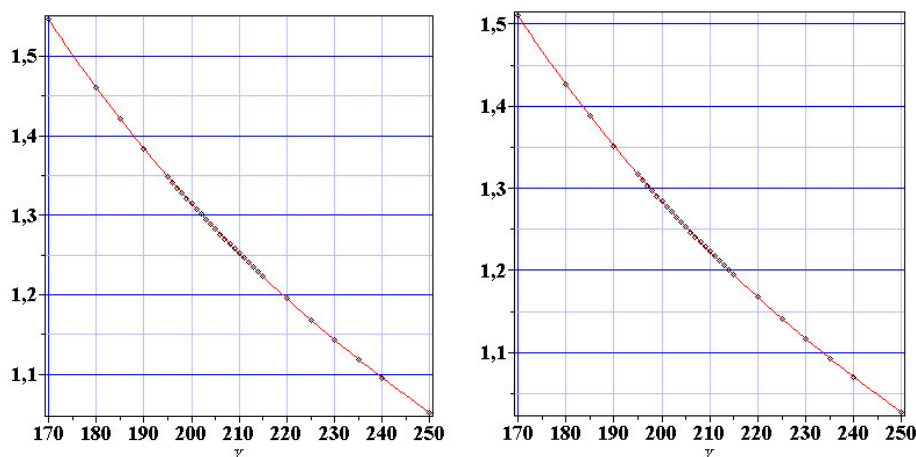


Rys. 5. Wartości naprężeń normalnych σ_{yy}
 Fig. 5. Normal stresses σ_{yy}



Rys. 6. Wartości naprężeń zredukowanych σ_{red}
 Fig. 6. Reduced stresses map

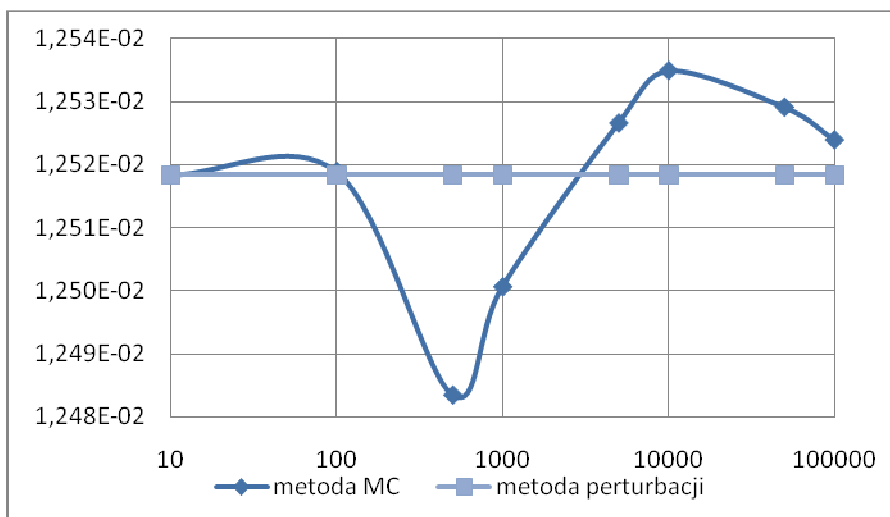
Ze względu na wykorzystanie stworzonego modelu na potrzeby analizy losowej z wykorzystaniem metody perturbacji stochastycznej niezbędne było numeryczne znalezienie funkcji odpowiedzi przemieszczeń [2], której parametrem niezależnym był moduł Younga. Zastosowano w tym celu metodę najmniejszych kwadratów zaimplementowaną w systemie MAPLE [3], która dla serii testów numerycznych wykonanych w programie ROBOT [1] znajduje wielomianowe przybliżenie pomiędzy strzałką ugięcia i modułem sprężystości. Procedurę tę można stosować z regularnym podziałem wybranego przedziału zmienności modułu Younga, wyróżniając bezpośrednio sąsiedztwo wartości średniej modułu odpowiednio dobranymi większymi wagami. W niniejszej pracy zastosowano nierównomierny podział, symetryczny względem wartości średniej modułu, zdecydowanie zagęszczony wokół tej wartości, dla którego zastosowano wagi jednostkowe. Wyniki pokazane na rysunku 7 dokumentują jednoznacznie, że dobrany wielomian trzeciego stopnia bardzo dokładnie przybliża wyniki MES zarówno w przypadku dwu, jak i trójwymiarowym.



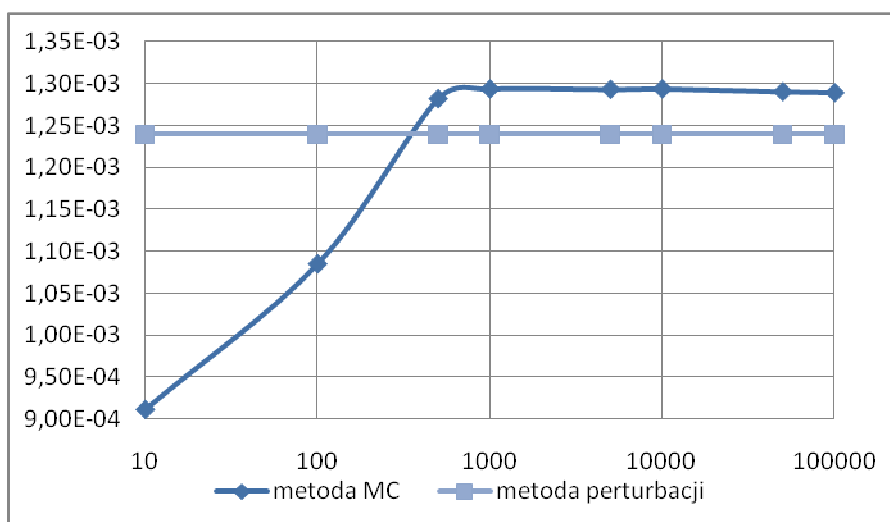
Rys. 7. Funkcje odpowiedzi dla modeli 2 i 3D
Fig. 7. Response functions for 2 and 3D models

3. Analiza losowa belek dwuteowych

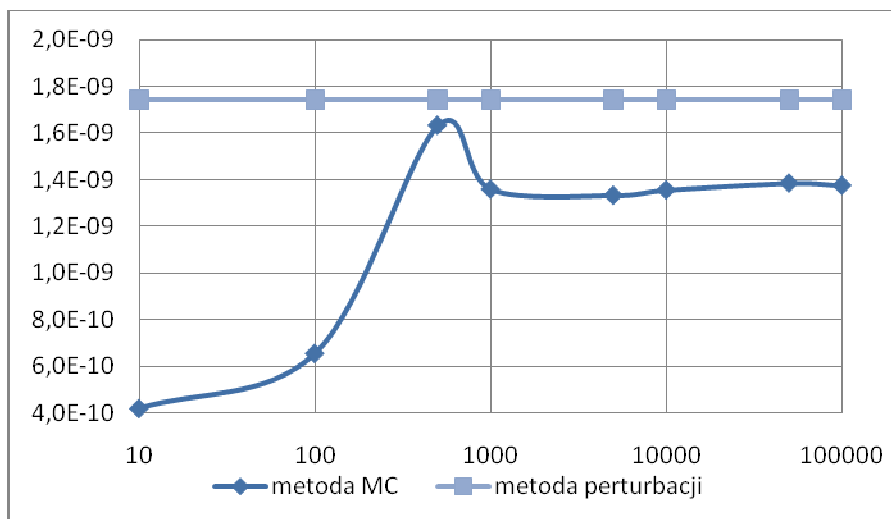
W celu porównania uogólnionej metody perturbacji stochastycznej z metodą statystyczną przeprowadzono symulacje metodą Monte-Carlo dla ośmiu różnych ilości prób: 10, 100, 500, 1000, 5000, 10000, 50000 oraz 100000. Wykorzystano odpowiednie wzory analityczne wynikające z ogólnie znanego wzoru na strzałkę ugięcia belki wolnopodpartej obciążonej obciążeniem ciągłym. Wyniki obliczeń zestawiono na rysunku 8 (wartości oczekiwane), rysunku 9 (odchylenia standardowe), rysunkach 10 i 11 (trzecie i czwarte momenty centralne). Analizując poszczególne wyniki, należy pamiętać, że poziome osie tych wykresów są pokazane w skali logarytmicznej, aby możliwa była precyzyjna analiza charakteru zbieżności estymatorów przy zwiększającej się liczbie prób. Zbieżność estymatora wartości oczekiwanej ma charakter wyraźnie asymptotyczny, jednakże różnice pomiędzy poszczególnymi wartościami, a rezultatem zastosowania metody perturbacji są praktycznie znikome. Oczywiście metoda perturbacji daje wyniki niezależne od ilości prób losowych, stąd też dla wszystkich momentów mamy funkcje stałe. Zbieżność odchylenia standardowego ma nieco inny charakter, gdyż z dość dobrym przybliżeniem wartość graniczna zostaje osiągnięta dla $N = 1000$ i jest nieco wyższa, niż odchylenie wyznaczone metodą perturbacji. Różnica między tymi wynikami jest większa, niż dla wartości oczekiwanych, tak więc w kolejnych modelach należy zastosować rozwinięcie perturbacyjne nieco wyższego rzędu. Zbieżność momentów trzeciego i czwartego jest również asymptotyczna; metoda perturbacji daje większe wartości dla momentu trzeciego, a mniejsze – dla momentu czwartego. Należy jednak zwrócić uwagę na fakt, iż wartości obydwu momentów są prawie równe 0, tak więc rozbieżności nie wpływają zasadniczo na charakter otrzymanego wyniku.



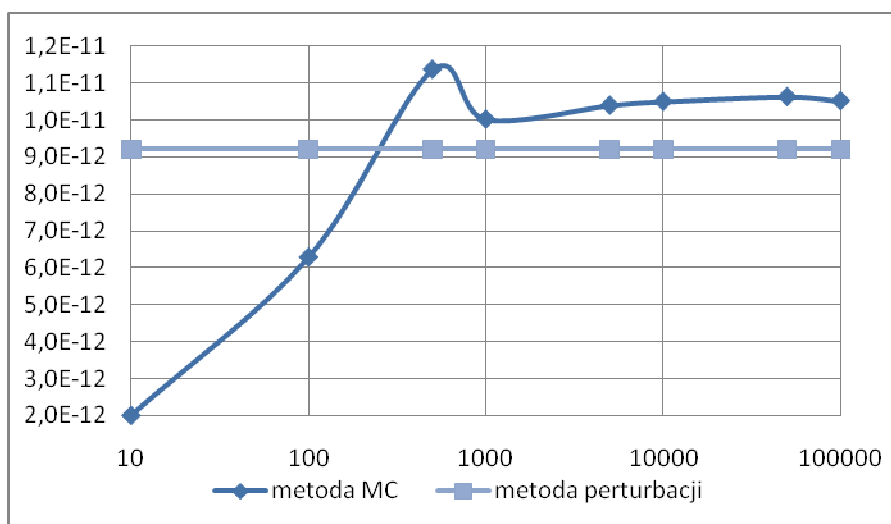
Rys. 8. Wartość oczekiwana strzałki ugięcia
 Fig. 8. Expected value of the maximum deflection



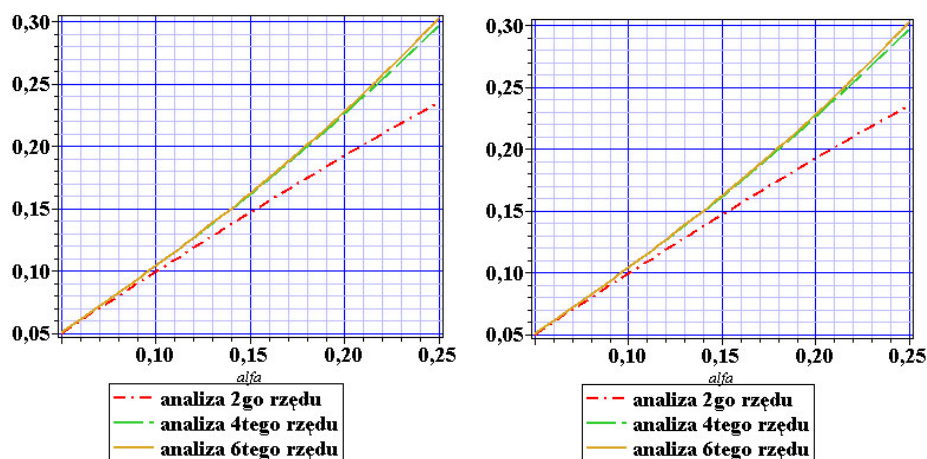
Rys. 9. Odchylenie standardowe strzałki ugięcia
 Fig. 9. Standard deviation of the maximum deflection



Rys. 10. Trzeci moment centralny strzałki ugięcia
Fig. 10. Third central probabilistic moment of the maximum deflection



Rys. 11. Czwarty moment centralny strzałki ugięcia
Fig. 11. Fourth central probabilistic moment of the maximum deflection



Rys. 12. Współczynniki wariacji w modelach 2D i 3D

Fig. 12. Coefficients of variation for 2 and 3D models

Kolejnym poddano analizie modele 2D oraz 3D przedstawione w poprzednim paragrafie, dla których poprzednio numerycznie wyznaczono funkcje odpowiedzi. Obecnie moduł Younga jest traktowany jako gaussowska zmienna losowa o wartości oczekiwanej równej $E [E] = 210 \text{ GPa}$, natomiast współczynnik wariacji tej zmiennej α należy do przedziału $[0.05, 0.20]$. W praktyce maksymalna wartość tego współczynnika rzadko przekracza wartość 0.10, ale dotyczy to głównie belek lub elementów stalowych na początku okresu eksploatacji, natomiast po pięćdziesięciu latach przewidywanych przez normę [11] wartość rozrzutu losowego tego modułu może być znacznie większa. Na rysunku 12 przedstawiono współczynniki wariacji maksymalnych przemieszczeń pionowych belki otrzymane kolejno w analizie rzędu drugiego, czwartego i szóstego; porównanie tych wyników miało na celu wykazanie zbieżności uogólnionej metody perturbacji stochastycznej. Jak widać na przykładzie obydwu modeli, różnice pomiędzy podejściem drugiego i czwartego rzędu są wielokrotnie większe niż pomiędzy analizą rzędu czwartego i szóstego. Te ostatnie, w porównaniu z całkowitą wartością tego współczynnika są pomijalnie małe. Z analizy tej wynika również, że zastosowanie podejścia drugiego rzędu może powodować błędny wniosek, iż rozrzut losowy badanej strzałki ugięcia jest mniejszy, niż rozrzut wejściowy modułu Younga. W rzeczywistości jest odwrotnie, jak dokumentuje to rysunek 12 – różnica wynosi prawie 20% na korzyść współczynnika dla przemieszczeń. Podkreślić również należy, że zależność pomiędzy wyjściowym a wejściowym współczynnikiem wariacji nie jest liniowa – w metodzie rzędu drugiego funkcja ta jest wklęsła, a dla kolejnych dwóch rzędów jest wypukła.

4. Wyznaczanie wskaźnika niezawodności

W dalszej części wykorzystujemy wcześniej uzyskane wyniki do obliczenia wskaźników niezawodności dla badanych stalowych belek dwuteowych. Wykorzystując wzór ogólny podany w normie [11], analizujemy przebieg zmienności funkcji granicznej zdefiniowanej jako

$$g = R - E \quad (1)$$

gdzie R charakteryzuje parametr nośności konstrukcji lub jej elementu, natomiast E – odpowiedni efekt oddziaływania (obie wartości R i E są zmiennymi losowymi). Przyjmując, że g ma rozkład normalny, otrzymano zależność określającą wartość wskaźnika niezawodności:

$$\beta = \frac{E[g]}{\sigma[g]} \quad (2)$$

gdzie: β – wskaźnik niezawodności; $E[g]$ – wartość oczekiwana losowej funkcji g , natomiast $\sigma(g)$ jest jej odchyleniem standardowym. Kolejno, uwzględniając postać funkcji stanu granicznego g dla rozpatrywanej strzałki ugięcia:

$$\beta = \frac{E[f_{dop} - f_{max}]}{\sigma(f_{dop} - f_{max})} = \frac{E[f_{dop}] - E[f_{max}]}{\sqrt{Var(f_{dop}) + Var(f_{max})}} = \frac{E[f_{dop}] - E[f_{max}]}{\sigma(f_{dop})} \quad (3)$$

gdzie f_{dop} , f_{max} przyjmują postać:

$$f_{dop} = \frac{l}{300} \quad (4)$$

$$f_{max} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot J} \quad (5)$$

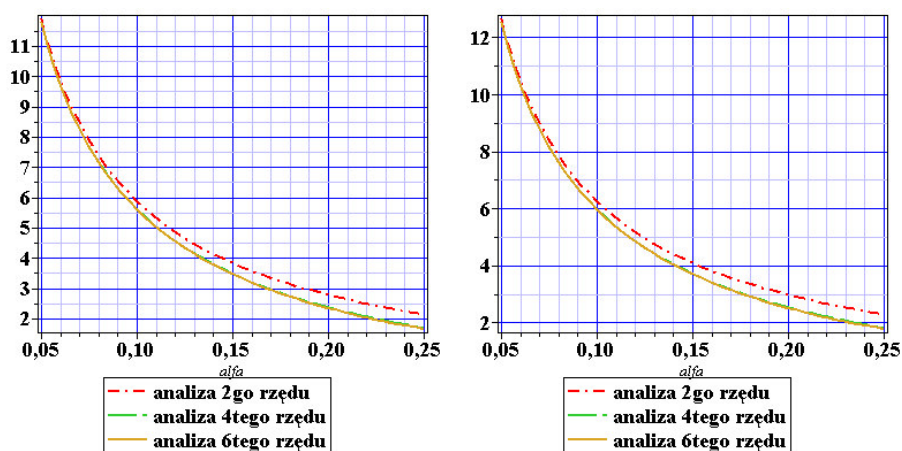
Dla modelu jednowymiarowego przeprowadzono obliczenia metodą Monte-Carlo (dla 100.000 prób losowych) oraz metodą perturbacji; wykorzystano w tym celu ponownie program MAPLE. Wyniki obliczeń metodą symulacji i techniką perturbacji zestawiono w tabeli 2, porównując wskaźniki niezawodności dla czterech różnych dwuteowników: IPE 200, IPE 220, IPE 240 oraz IPE 270. Zestawienie czterech różnych profili pozwala na optymalny dobór kształtownika ze względu na niezawodność belki – profil IPE 200 jest całkowicie niewystarczający ze względu na ujemne wskaźniki, natomiast profil IPE 220

znacznie przekracza wymagania normowe. Ze względu na brak profilu pośredniego należy rozważyć zastosowanie innego kształtownika, zestawu dwóch kształtowników lub blachownicy o bardziej optymalnych parametrach geometrycznych. Porównanie to pozwala również na stwierdzenie, iż wskaźniki niezawodności wyznaczone metodą Monte-Carlo dają ogólnie nieco mniejsze wartości, ale różnice są mniejsze od 1%, są więc pomijalnie małe.

Tabela 1. Wskaźnik niezawodności w modelu jednowymiarowym, metoda Monte-Carlo

Table 1. Reliability indices for 1D model, Monte-Carlo simulation

metoda	β	Kształtowniki			
		IPE200	IPE220	IPE240	IPE270
symulacja Monte-Carlo	-19,59	14,93	61,51	140,53	
metoda perturbacji	-19,54	14,89	61,35	140,68	



Rys. 13. Wskaźniki niezawodności dla modeli 2 i 3D

Fig. 13. Reliability indices for 2 and 3D models

Ostatecznie analizowane są wskaźniki niezawodności belki w modelu dwu- i trójwymiarowym, z wykorzystaniem analizy rzędu drugiego, czwartego i szóstego. Wyniki przedstawiono na rysunku 13, gdzie wskaźniki pokazano w funkcji wejściowego współczynnika wariancji modułu Younga przyjmującego wartości z przedziału $[0.05, 0.25]$. Różnice pomiędzy modelami drugiego i czwartego rzędu są niewielkie i wzrastają wraz ze wzrostem losowego rozrzutu wejściowej zmiennej losowej, natomiast różnice pomiędzy podejściem rzędu czwartego i szóstego są na wykresach niewidoczne. Okazuje się również, że wskaźniki niezawodności w modelu trójwymiarowym (rys. 13, po prawej) są nieco większe, niż dla modelu dwuwymiarowego (rys. 13, po lewej). Ogólnie przebieg zmienności jest zgodny z inżynierską intuicją w tym zakresie – im większy jest rozrzut losowy wejściowej zmiennej losowej tym niepewność co do jej wartości średniej wzrasta, a więc konstrukcja jest, mówiąc potocznie, „mniej

przewidywalna”, a zatem liczbowo jej wskaźnik niezawodności maleje. Ta tendencja jest dobrze widoczna na rys. 13; co więcej można zauważyć graniczne wartości współczynnika wariancji modułu Younga stali, powyżej których belka nie może być zakwalifikowana jako bezpieczna w klasie pierwszej, drugiej i trzeciej wprowadzonej przez normę [11].

5. Podsumowanie

Wyniki zgromadzone i przedstawione w niniejszej pracy pozwalają stwierdzić, że metoda perturbacji jest efektywnym narzędziem inżynierskim w modelowaniu niezawodności belek stalowych. Dla małych wartości wejściowego współczynnika wariancji można stosować z dobrym przybliżeniem metodę rzędu drugiego, ale dla jego wartości powyżej 0.10 niezbędne jest zaangażowanie modeli zdecydowanie wyższego rzędu. Zasadniczą wadą konkurencyjnej metody symulacji Monte-Carlo jest jej nie do końca przewidywalna zbieżność, studiowanie której dla każdego zagadnienia inżynierskiego jest dość kosztowne pod względem mocy obliczeniowej i czasu symulacji, nawet dla modeli analitycznych.

Sposób wyznaczania wskaźników niezawodności zaproponowany w normie [11] jest relatywnie łatwy do przeprowadzenia przy zastosowaniu metody perturbacji i klasycznych programów Metody Elementów Skończonych, takich jak np. ROBOT; szczególnie efektywnym narzędziem dodatkowym okazuje się program do obliczeń symbolicznych (jak np. system MAPLE). Jak należało oczekiwać, im większy jest wejściowy rozrzut losowy badanych zmiennych, tym mniejsza jest ostateczna wartość wskaźnika niezawodności, nie jest to jednak prosta zależność liniowa, gdyż odpowiednie funkcje są tutaj wyraźnie wypukłe. Należy podkreślić, iż przedstawiony i zastosowany w pracy algorytm obliczeń ułatwia optymalizację przekroju belek w ujęciu probabilistycznym, tj. przy zapewnieniu odpowiedniego wskaźnika niezawodności.

W dalszej kolejności planuje się opracowanie ogólnego algorytmu optymalizacji przekroju belek stalowych dla zadanych statycznych i kinematycznych warunków brzegowych oraz dla wybranego zbioru wejściowych zmiennych losowych; szczególnie istotne jest tutaj uwzględnienie losowego charakteru obciążeń i charakterystyk geometrycznych. Za niezbędne uważa się także rozszerzenie modelu teoretycznego i numerycznego o pracę konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym, gdzie eksperymentalnie ustalana granica plastyczności będzie również parametrem losowym. Ciekawe i wartościowe byłoby przestudiowanie w tym aspekcie zmienności wskaźników niezawodności dla innych konstrukcji stalowych [6].

Literatura

- [1] Autodesk Robot Structural Analysis 2009. Podręcznik Użytkownika. Autodesk 2008.
- [2] **Kamiński M.:** Perturbation-based stochastic finite element method using polynomial response function for the elastic beams. *Mech. Res. Comm.* No. 36(3), 2009, s. 107-116.
- [3] MAPLE v.13, User Manual, Maplesoft, 1996-2009.
- [4] **Melchers R.E.:** Structural Reliability. Analysis and Prediction. Ellis Horwood Ltd. 1987.
- [5] **Murzewski J.:** Niezawodność konstrukcji inżynierskich. Warszawa, Arkady 1989.
- [6] **Rykaluk K.:** Konstrukcje stalowe. Kominy, wieże, maszty. Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej 2004.
- [7] **Stocki R., Kolanek K., Jendo S., Kleiber M.:** Study on discrete optimization techniques in reliability-based optimization of truss structures. *Comput. & Struct.* No. 79(22-25), 2001, s. 2235-2247.
- [8] **Śniady P., Adamowski R., Kogut G., Zielichowski-Haber W.:** Spectral stochastic analysis of structures with uncertain parameters. *Prob. Engrg. Mech.* No. 23(1), 2007, s. 76-83.
- [9] **Woliński S., Wróbel K.:** Niezawodność konstrukcji budowlanych. Rzeszów, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej 2001.
- [10] **Zienkiewicz O.C.:** Metoda elementów skończonych. Warszawa, Arkady 1971.
- [11] PN-EN 1990:2004: Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji. Polski Komitet Normalizacyjny 2004.

RELIABILITY VERIFICATION OF THE STEEL BEAMS UNDER BENDING

Summary

The main purpose of this elaboration was a presentation and application of the reliability index algorithm for the set of simple steel beams under bending using the Finite Element Method. A comparison of 1, 2 and 3-dimensional models of the simply supported and uniformly loaded beam was provided, where the reliability index was determined independently using the Monte-Carlo simulation and the generalized stochastic perturbation technique. Young modulus of the beams is taken as the Gaussian input random variable and statistical convergence of basic probabilistic moments and coefficients for the simulation method is verified using symbolic computer system MAPLE. Reliability modeling has been performed for the entire set of economical I beams to find the most optimal shape for the given span and external load magnitude.