

SYNCHRONIZACJA SYSTEMÓW ZAWIESZONYCH NA ELASTYCZNEJ STRUKTURZE

Streszczenie: W pracy przedstawiono zjawisko wystąpienia synchronizacji mechanicznych oscylatorów zamocowanych na elastycznej strukturze. Wykazano, że dla danych warunków wzbudzenia [1] początkowo nieliniowe, chaotyczne oscylacje struktury stają się okresowe i synchroniczne. W warunkach, kiedy częstości wzbudzenia różnią się, zjawiska powyższe nie występują. Obliczenia przeprowadzono MES, wykorzystując profesjonalny pakiet programu ANSYS.

DYNAMICS OF SYSTEM COUPLED BY ELASTIC STRUCTURE

Abstract: This article presents the result of numerical analysis of the structure with consist of two identical chaotic oscillators suspended on an elastic structure. The numerical calculations have been achieved with the use of the professional ANSYS programme (User's Guide ANSYS 10 [7]). The finding show that for the given conditions of excitations initially uncollerated chaotic oscillations of the structure become periodic and synchronous in clusters. Cluster means a group metronoms which behave identically. When the excitation frequencies vary, the phenomena described above have not been observed at all.

1. WPROWADZENIE

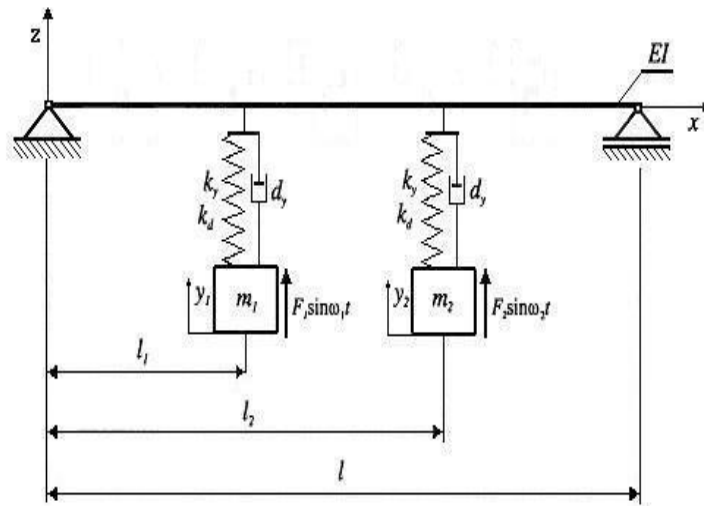
Zjawisko synchronizacji było prawdopodobnie pierwszym spośród badanych zjawisk nieliniowych. Jednym z ważniejszych problemów do rozwiązania przez naukę i technikę był precyzyjny pomiar długości geograficznej – przede wszystkim na morzu, jako że podróże statkiem stanowiły podstawowy środek komunikacji między kontynentami. W związku z tym już od XVI wieku głowy państw oferowały znaczne nagrody za wynalezienie sposobu dokładnego określania długości geograficznej.

Holenderski uczony Christian Huygens (XVII w.), wspierany finansami francuskiej Królewskiej Akademii Nauk, podjął próby zbudowania precyzyjnych i odpornych na trudne warunki morskie zegarów wahadłowych. Jeden ze zbudowanych przez Huygensa morskich chronometrów był podwójny i miał dwa wahadła. Chodziło o to, żeby w razie zatrzymania się jednego mechanizmu lub konieczności poddania go konserwacji, czas mógł być mierzony dalej. Uważnie obserwując zegar z dwoma wahadłami odkrył, że ich wahania się są zsynchronizowane w antyfazie: jednocześnie zbiegają się ku sobie i jednocześnie od siebie się oddalają. Chcąc wyjaśnić to zjawisko, uczony zaczął uruchamiać wahadła w różny sposób i przekonał się, że niezależnie od tego, jak to zrobi, po jakimś czasie, nie dłuższym niż pół godziny, synchronizacja wahań powraca bez względu na początkowe położenia wahadeł. Zagadka podwójnego zegara Huygensa pozostawała nierozwiązana przez 336 lat, kiedy to wielu uczonych [1, 2, 3, 4, 5, 6] z różnych specjalizacji próbowało powtórzyć i wyjaśnić eksperyment Huygensa.

Zagadka zegara Huygensa ma ogólniejsze znaczenie. Mamy tutaj do czynienia z modelem spontanicznej synchronizacji układu – zjawiska, które występuje w przyrodzie powszechnie,

a którego opis matematyczny, ze względu na jego nieliniowość i chaotyczność, nie jest rzeczą łatwą.

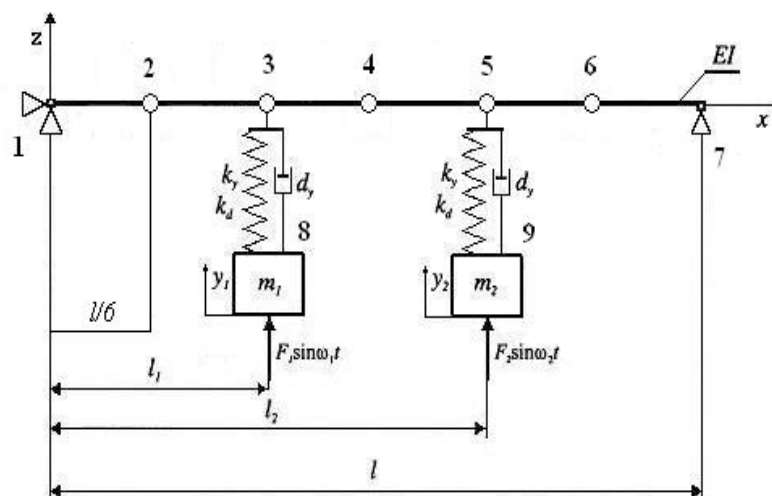
W artykule zbadano dynamikę dwóch nieliniowych chaotycznych oscylatorów połączonych za pośrednictwem elastycznej struktury – sprężystej belki (rys. 1). Nieliniowe oscylatory Duffinga wzbudzone są przez okresowy sygnał z częstotliwością ω . Pokazano, że dla danych warunków początkowych w wyniku współdziałania ze sprężystą belką, nieskorelowany chaotyczny oscylator staje się okresowy i synchroniczny. Pokazano także odpowiedzi sprężystej belki i oscylatorów na wzbudzenie, któremu nie towarzyszy synchronizacja ich oscylacji.



Rys. 1. Model analizowanej struktury

2. MODEL NUMERYCZNY

Do obliczeń numerycznych zbudowano rzeczywisty model (rys. 2) dwóch nieliniowych identycznych oscylatorów Duffinga zawieszonych na sprężystej belce. Obliczenia numeryczne wykonano metodą elementów skończonych z wykorzystaniem programu ANSYS [7].



Rys. 2. Model numeryczny badanej struktury

Zastosowane oscylatory opisane są następującym równaniem:

$$m_i \cdot \frac{d^2 y_i}{dt^2} + d_y \cdot \frac{dy_i}{dt} - k_y \cdot y_i + k_d \cdot y_i^3 = f \cdot \sin \omega_i \cdot t,$$

gdzie: $d_y, k_y, k_d, f, \omega_i$ są stałymi, a $i = 1, 2$. Założono, że belka jest podparta na obu końcach, tak, jak pokazano na rys. nr 2.

Belka o długości l została podzielona na 6 równych części. Do obliczeń numerycznych wykorzystano elementy modelujące:

- sprężynę nieliniową – COMBIN 39
- tłumik wiskotyczny – COMBIN 14
- belkę – BEAM
- masy podwieszono – MASS.

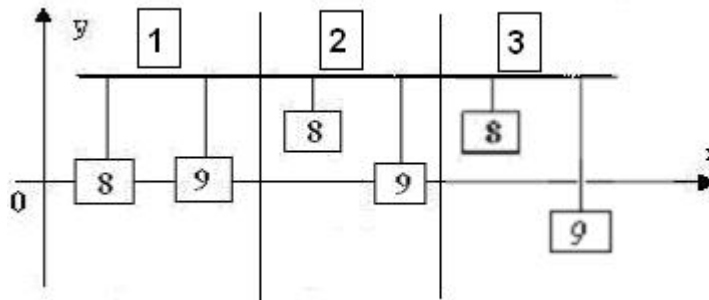
Do analizy numerycznej przyjęto następujące parametry oscylatora Duffinga:

$$d_y = 0,168 \frac{N \cdot \text{sec}}{m}; \quad k_y = 0,5 \frac{N}{mm}; \quad k_d = 0,5 \frac{N}{mm}; \quad f = 1 \text{ Hz}; \quad \omega = 1 \frac{1}{\text{sec}}; \quad g = 1.$$

Parametry belki:

- Moduł Younga $E = 2 \cdot 10^5 \frac{N}{mm^2}$
- współczynnik Poissona $\nu = 0,3$
- gęstość $\rho = 7,65 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{mm^3}$
- współczynnik tłumienia $g = 1$
- masa $m_1 = m_2 = 1$ [kg].

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla następujących warunków początkowych wzbudzenia oscylatorów (rys. 3).

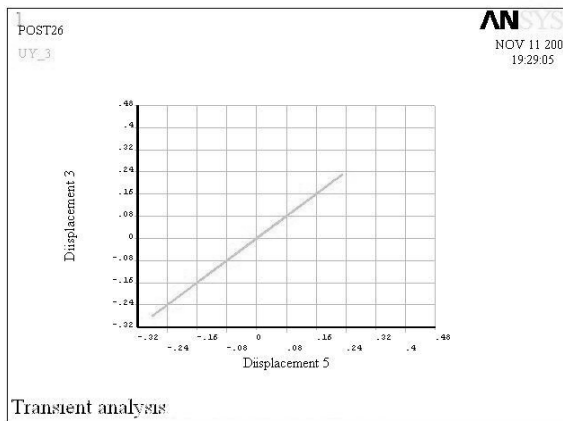


Rys. 3.

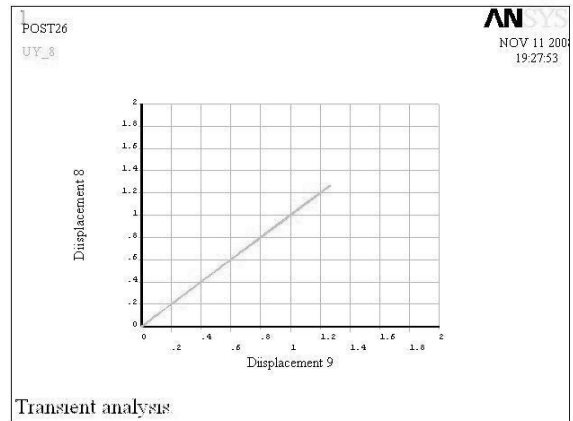
3. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono za pomocą wykresów przemieszczeń poszczególnych węzłów. Dla przypadku 1 pokazano wykres zależności przemieszczenia węzła nr 8 w zależności od przemieszczenia węzła nr 9 na rys. 4(a), na rys. 4(b) zależność węzła nr 3 od węzła nr 5. Wykres przemieszczeń węzłów 3, 5, 8, 9 otrzymany podczas odpowiadającym 4000 iteracji pokazano na rys. 4(c).

Przebieg pokazanych zależności wskazuje, że zachowanie oscylatorów, początkowo chaotyczne, staje się okresowe i synchroniczne.



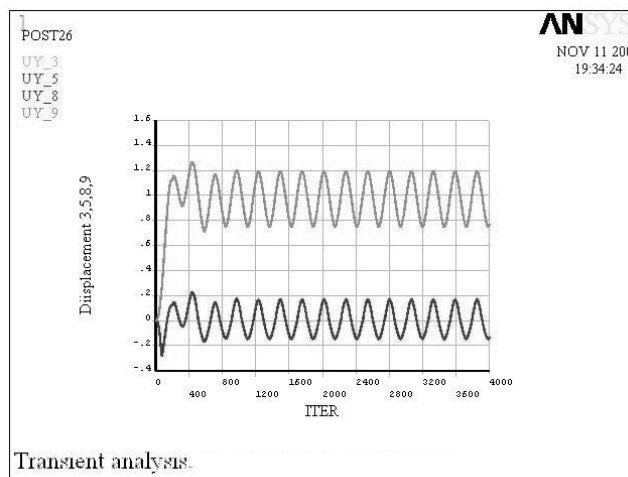
Rys. 4(a)



Rys. 4(b)

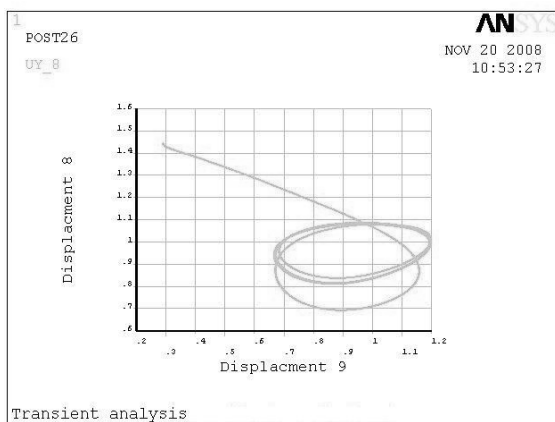
Wyniki analizy numerycznej dla przypadku 2 przedstawiono w postaci wykresu zależności przemieszczeń:

- węzła nr 8 w funkcji przemieszczeń węzła nr 9 na rys. 5(a),
- węzła nr 3 w funkcji przemieszczeń węzła nr 5 na rys. 5(b).

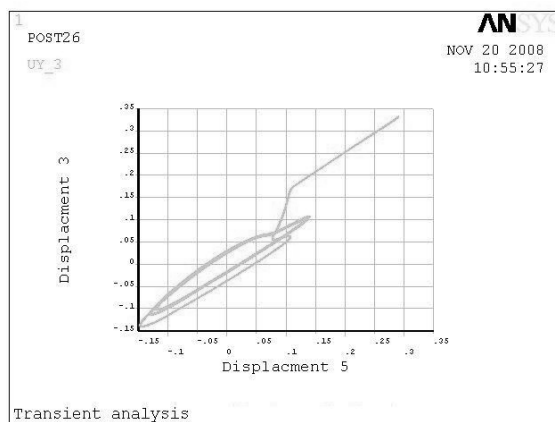


Rys. 4(c)

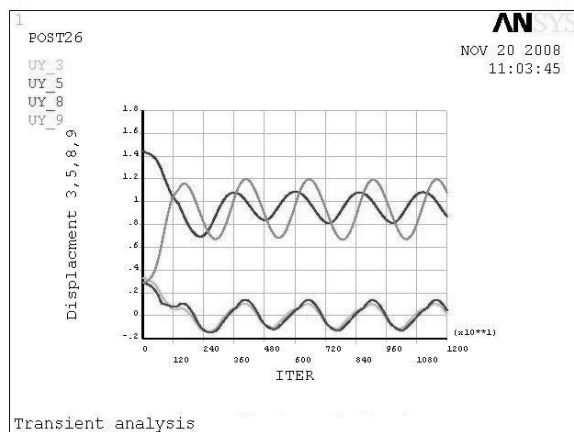
Rys. 5(c). przedstawia przemieszczenia węzłów nr 3, 5, 8, 9 w czasie odpowiadającym 12000 iteracji.



Rys. 5(a)



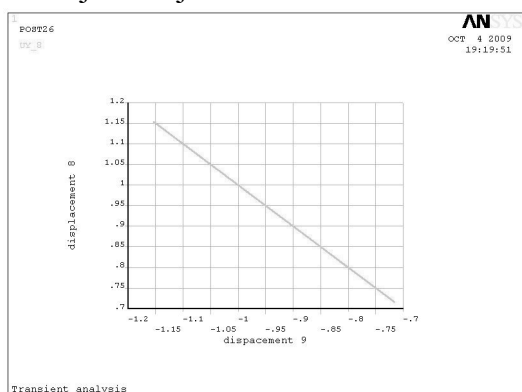
Rys. 5(b)



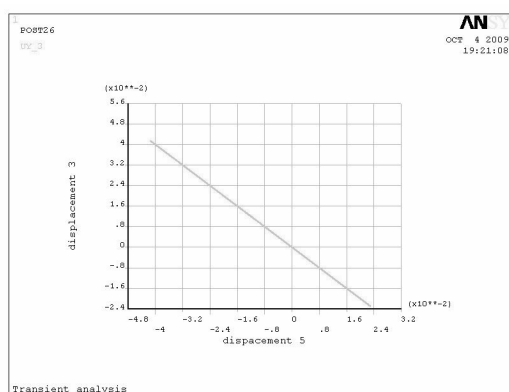
Rys. 5(c)

Przeprowadzona analiza otrzymanych wykresów wykazała, że synchronizacja sprężystej belki i oscylatorów Duffinga nie występuje. Oscylacje belki są okresowe ale, nie są harmoniczne, natomiast przemieszczenia oscylatorów Duffinga wykazują brak synchronizacji. W omawianym przypadku zaobserwowano wiele punktów równowagi przemieszczeń belki $UY_3 = UY_5$ oraz oscylatorów $UY_8 = UY_9$ (rys. 5(a), 5(b), 5(c)). Punkty te występują w różnych miejscach przebiegu czasowego doświadczenia. Świadczą one o braku synchronizacji przemieszczeń belki z przemieszczeniami oscylatorów.

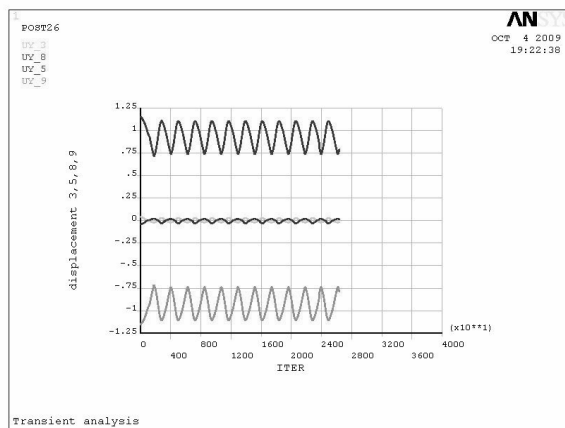
Przypadek 3 – wyniki znajdują się na wykresach poniżej. Wykres 6(a) przedstawia przemieszczenie węzła 8 w funkcji węzła nr 9, rys. 6(b) przedstawia przemieszczenie węzłów należących do belki (3 i 5). Wykres 6(c) obrazuje przemieszczenie węzłów nr 3, 5, 8, 9 w funkcji iteracji.



a)



b)



c)

Rys. 6 (a), (b), (c)

Z wykresów wynika, że dla danych warunków oscylacji sprężystej struktury, początkowo nieskorelowany chaotyczny oscylator staje się okresowy i synchroniczny.

4. PODSUMOWANIE

Zastosowanie programu ANSYS pozwoliło na przeprowadzenie symulacji dynamiki rzeczywistej struktury składającej się ze sprężystej belki, do której dołączono dwa nieliniowe, chaotyczne oscylatory Duffinga. Nieliniowe oscylatory są pobudzane przez okresowy sygnał z częstością ω . Badania wykazały, że dla danych warunków, początkowo chaotyczny oscylator staje się okresowy i synchroniczny (przypadek 1, 3). Zjawisko to zachodzi w wyniku współdziałania oscylatorów ze sprężystą belką. Analiza numeryczna pozwoliła zidentyfikować zjawiska, w których zachowanie oscylatorów współpracujących z elastyczną belką staje się okresowe, ale nie synchroniczne (przypadek 2).

Badania potwierdziły ścisły związek między dynamiczną odpowiedzią belki a dynamiką oscylatorów. Regularne warunki oscylacji belki są odpowiedzią na okresowe zachowanie oscylatorów.

Obliczenia numeryczne wykonane przy użyciu programu ANSYS potwierdziły wnioski i spostrzeżenia sformułowane przez autorów pracy [1].

LITERATURA

- [1] K. Czołczyński, A. Stefański, P. Perlikowski, T. Kapitaniak, *Multistability and chaotic beating of Duffing oscillators suspended on an elastic structure*, Journal Of Sound And Vibration, Volume 322, Issue 3, 8 May 2009, Pages 513-523.
- [2] U. Feudel, C. Grebogi, B.R. Hunt, J.A. Yorke, *A map with more than coexisting low-period periodic attractors*, Physical Review E 54 (1996) 71-81.
- [3] S. Kraut, U. Feudel, *Multistability, noise and attractor hopping: the crucial role of chaotic saddles*, Physical Review E 66 (2002), doi:015207(1-4).
- [4] K. Kaneko, *Dominance of Milnor attractors and noise-induced selection in a multi-attractor system*, Physical Review Letters 78 (1997) 2736-2739.
- [5] L. Pecora, T.S. Carroll, Physical Review Letters 64 (1990) 821-824.
- [6] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D.L. Valladares, C.S. Zhou, *The synchronization of chaotic systems*, Physics Reports 366 (I) (2002).
- [7] User's Guide ANSYS 10.