

NOŚNOŚĆ CIENKOŚCIENNYCH PŁYT O ZMIENNEJ ORTOTROPII

T. KUBIAK, Z. KOŁAKOWSKI

*Katedra Wytrzymałości Materiałów Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, Poland*

W pracy analizowano zachowanie się sprężystych cienkościennych płyt ortotropowych po utracie stateczności w ramach drugiego rzędu asymptotycznej teorii stateczności układów zachowawczych Koitera [1]. Badano płyty ortotropowe o głównych kierunkach ortotropii równoległych do krawędzi ścian charakteryzujące się zmiennym wzdłuż szerokości współczynnikiem ortotropii $\beta_i = E_{xi}/E_{yi}$. Analizowano płyty przegubowo podparte na obciążonych brzegach, a na nie obciążonych wzdłużnych brzegach uwzględniono różne rodzaje podparcia (utwierdzenie, podparcie przegubowe, swobodny brzeg). Płyty poddano obciążeniom powodującym równomierne i liniowo zmienne zbliżenie brzegów.

1. Wprowadzenie

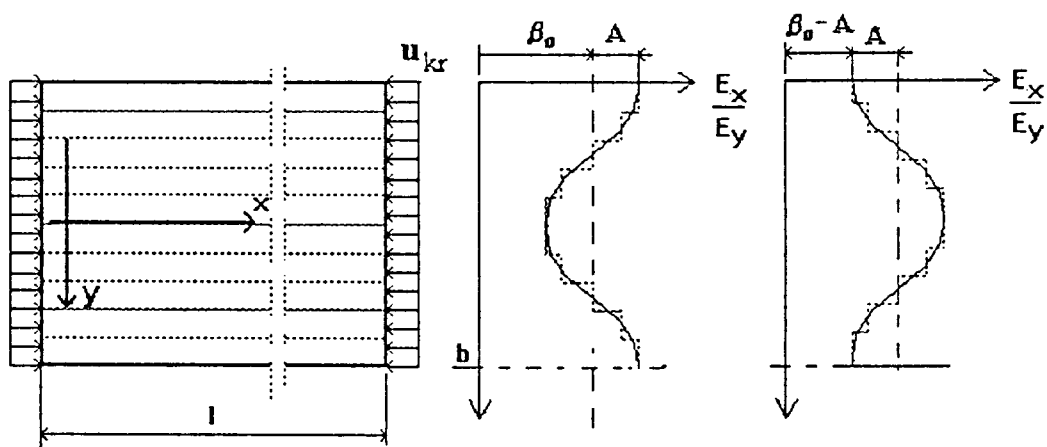
Sprężyste wyboczenie izotropowych i ortotropowych płyt oraz dźwigarów było przedmiotem wielu prac (np. [2÷6]). Wyniki tych badań pokazują możliwość tworzenia konstrukcji lekkich, bezpiecznych i niezawodnych.

W materiałach kompozytowych istnieje duża swoboda kształtowania ich własności materiałowych w wybranych kierunkach lub obszarach, tak więc możliwe jest wykonanie płyt o zmiennym własnościach wytrzymałościowych. Przykładem materiałów o takich własnościach mogą być kompozyty włókniste z odpowiednio rozmieszczonymi (zagęszczonymi lub rozrzedzonymi) włóknami. Materiały kompozytowe modeluje się najczęściej jako materiały ortotropowe. W bogatej literaturze dotyczącej zagadnień stateczności brak jest analizy wpływu zmiennej w kierunku szerokości płyty ortotropii na wartości obciążeń krytycznych, na ich postacię wyboczenia oraz nośność płyt w zakresie zakrytycznym.

W niniejszej pracy przedstawiono problem utraty stateczności w zakresie sprężystym i zachowania się konstrukcji w zakresie zakrytycznym homogenicznych płyt ortotropowych o zmieniającej się wzdłuż szerokości ortotropii.

2. Postawienie zagadnienia

Do rozważań przyjęto płytę o zmiennej ortotropii wzdłuż szerokości płyty (rys.2.1). Przyjęto model zbudowany z wąskich podłużnych płyt ortotropowych, przy czym każda z nich może mieć inny współczynnik ortotropii. Przyjęty model obliczeniowy precyzyjnie opisuje rzeczywiste materiały konstrukcyjne.



Rys.2.1. Model pasmowy płyty o zmiennej ortotropii

Fig.2.1. Band model of variable orthotropy plates

Założono, że główne osie ortotropii płyt są równoległe do ich brzegów. Dla i-tego pasma ortotropowego założono dokładne zależności na odkształcenia względne dla cienkich płyt

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ix} &= u_{i,x} + \frac{1}{2}(w_{i,x}^2 + u_{i,x}^2 + v_{i,x}^2), & \varepsilon_{iy} &= v_{i,y} + \frac{1}{2}(w_{i,y}^2 + u_{i,y}^2 + v_{i,y}^2) \\
 2\varepsilon_{ixy} &= u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y} + u_{i,x}u_{i,y} + v_{i,x}v_{i,y} \\
 \kappa_{ix} &= -w_{i,xx} & \kappa_{iy} &= -w_{i,yy} & \kappa_{ixy} &= -w_{i,xy}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Dla rozpatrywanego przypadku ortotropii równania fizyczne mają następującą postać:

$$\varepsilon_{xi} = \frac{N_{xi} - \nu_{xyi} N_{yi}}{E_{xi} h_i}; \quad \varepsilon_{yi} = \frac{N_{yi} - \nu_{yxi} N_{xi}}{E_{yi} h_i}; \quad \varepsilon_{xyi} = \frac{N_{xyi}}{2G_i h_i} \quad (2)$$

Występujące w równaniach (2) moduły Younga i współczynniki Poissona zgodnie z twierdzeniem Betty'ego-Maxwella muszą spełniać związek:

$$E_{xi} \nu_{yxi} = E_{yi} \nu_{xyi} \quad (3)$$

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczego pasma płytowego wynikają różniczkowe równania równowagi, kinematyczne i statyczne warunki ciągłości na połączeniach stykających się pasm oraz warunki brzegowe na obciążonych końcach ($x=0$, $x=1$) [6].

Nieliniowe zagadnienie stateczności rozwiązano asymptotyczną metodą Koitera [1]. Pola przemieszczeń \bar{U}_i i sił przekrojowych \bar{N}_i rozwinięto w szeregi potęgowe względem parametru ξ - amplitudy liniowej postaci własnej wyboczenia (normalizowanej warunkiem równości maksymalnego ugięcia równego grubości pierwszej płyty h_1)

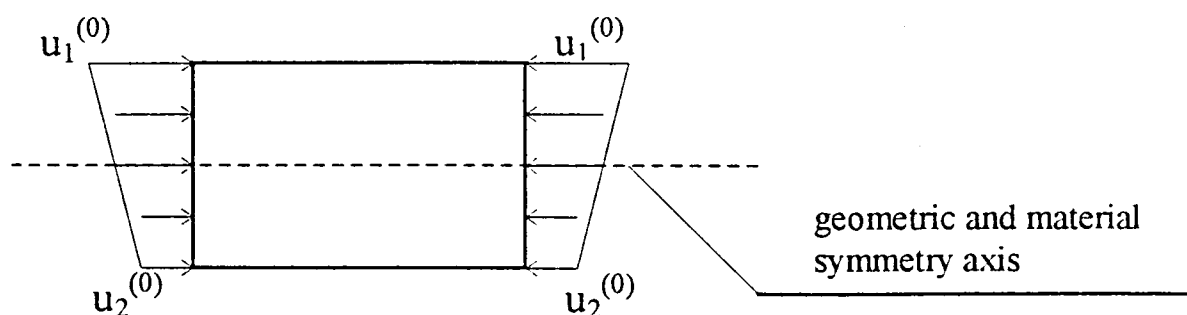
$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= \lambda \bar{U}_i^{(0)} + \xi \bar{U}_i^{(1)} + \xi^2 \bar{U}_i^{(2)} + \dots \\ \bar{N}_i &= \lambda \bar{N}_i^{(0)} + \xi \bar{N}_i^{(1)} + \xi^2 \bar{N}_i^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Po podstawieniu rozwinięć (4) do równań równowagi, warunków ciągłości i warunków brzegowych otrzymano zagadnienie brzegowe zerowego, pierwszego i drugiego rzędu [3,4]. Aproksymacja zerowa opisuje stan przedwyboczeniowy, podczas gdy pierwszy rząd przybliżenia pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne i odpowiadające jemu postacie wyboczenia, przy uwzględnieniu minimalizacji względem liczby półfal m w kierunku wzdłużnym. Drugi rząd przybliżenia redukuje się do liniowego układu równań różniczkowych niejednorodnych, którego prawe strony zależą jedynie od pola sił i przemieszczeń pierwszego rzędu. Rozwiązanie tego układu równań przewidziano w postaci szeregów trygonometrycznych w kierunku wzdłużnym oraz wyznaczając funkcje drugiego rzędu w kierunku poprzecznym metodą macierzy przeniesienia identycznie jak dla pierwszego rzędu [3,6]. Po wyznaczeniu rozwiązania pierwszego i drugiego rzędu zagadnienia brzegowego wyznaczono współczynniki a_0 , a_1 , a_{111} , a_{1111} oraz współczynnik redukcji sztywności wzdłużnej według znanych wzorów (np. [4]).

Szczegółowa analiza obciążeń krytycznych rozpatrywanych płyt przy uwzględnieniu pełnego tensora odkształcenia (1) dla pierwszego rzędu przybliżenia oraz przy pominięciu dwóch ostatnich członów w każdym z równań (1) pozwoliła pominąć w analizie drugiego rzędu te składniki, co znacznie uprościło analizę i jest powszechnie stosowanym przybliżeniem [6].

Płyty, których końce były podparte przegubowo, a wzdłużne brzegi podparte przegubowo, utwierdzone bądź swobodne, obciążano w sposób powodujący równomierne bądź liniowo zmienne zbliżenie brzegów (rys.2.2).

Dla scharakteryzowania sposobu obciążenia wprowadzono współczynnik zbliżenia brzegów $\kappa = u_1^{(0)} / u_2^{(0)}$, gdzie $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$ (rys.2.2) są wartościami przemieszczeń na końcach płyty. Wszystkie badane płyty miały geometryczną i materiałową oś symetrii, ale nie obciążeń i warunków brzegowych na nieobciążonych brzegach.



Rys. 2.2. Sposoby obciążenia płyty
Fig.2.2. Loading modes of plates

W związku z powyższym wielkością krytyczną dla równomiernego zbliżenia brzegów jest siła krytyczna $F_{kr}[N]$, zaś dla liniowego zmiennego zbliżenia odpowiadającego $\kappa = -1$ jest moment krytyczny $M_{kr}[Nm]$, a dla pozostałych przypadków siła krytyczna $F_{kr}[N]$ i moment krytyczny $M_{kr}[Nm]$. Należy zauważyć, że w przypadku gdyby nie założono materiałowej osi symetrii dla równomiernemu zbliżeniu brzegów wielkościami krytycznymi byłyby siła i moment.

3. Wyniki obliczeń

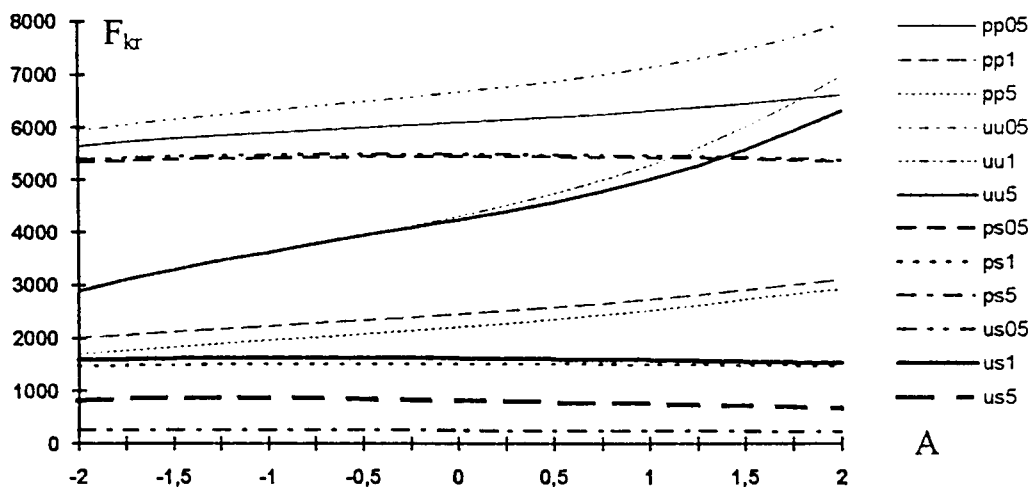
Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w postaci wykresów opisujących zależność wielkości krytycznych (siły F_{kr} , momentu M_{kr} lub siły i momentu jednocześnie) w funkcji parametru opisującego zmienność ortotropii (parametrem tym jest wielkości amplitudy A sinusoidy opisującej zmianę ortotropii rys.2.1).

Niezbędne zależności pomiędzy współczynnikiem ortotropii a wielkościami E_x , E_y , G , ν_{xy} dla sinusoidalnie zmiennego współczynnika ortotropii β otrzymano na drodze aproksymacji danych materiałowych [2] i mają one następującą postać:

$$E_{xi} = \beta_i E_{yi}, \quad E_{yi} = 34807 - \frac{11629}{\beta_i} - \frac{16821}{\beta_i^2}, \quad G_i = 14605 - \frac{7812}{\beta_i} - \frac{3464}{\beta_i^2},$$

$$v_{xyi} = 0.3 \quad \text{dla } i=1, \dots, n,$$

Współczynniki ortotropii dla poszczególnych pasm modelu przyjmowane były wg. wzoru: $\beta_i = \beta_0 + A \cdot \cos \frac{2\pi y}{b}$, gdzie $\beta_0 = 3.2292$, $A \in \langle -2, 2 \rangle$ - amplituda sinusoidy, y - współrzędna określająca położenie pasma od jednej ze wzdłużnych krawędzi, b - szerokość płyty.



Rys. 3.1. Wykres prezentujący zależność siły krytycznej od parametru A opisującego zmienność ortotropii dla płyt o stosunku $b/h = 60$

Fig.3.1. Critical force as a function of A parameter defining the orthotropy variation for plates whose $b/h=60$

Na rys. 3.1 przedstawiono wyniki dla płaskich prostokątnych płyt o zmiennym sinusoidalnie współczynniku ortotropii. Na prezentowanym wykresie legenda opisana jest skrótami, które mają następujące oznaczenie: litery - warunki na wzdłużnych brzegach (p-podparcie przegubowe, u - utwierdzenie, s - swobodny brzeg), cyfry - wielkości geometryczne (wartość stosunku l/b , gdzie 05=0.5)

Dla badanych konstrukcji wyższy współczynnik ortotropii na brzegach płyt powoduje wzrost naprężeń krytycznych w płytach obciążonych w sposób powodujący równomierne ($\kappa=1$) lub liniowo zmienne ($\kappa=0$) zbliżenie brzegów. W przypadku gdy płyta poddana jest obciążeniu powodującemu liniowo zmienne zbliżenie brzegów obciążonych ($\kappa=-1$) to ortotropowe wzmocnienie środka płyty praktycznie nie powoduje wzrostu naprężeń krytycznych.

Pełna analiza stanu sprężystego musi uwzględnić drugi rząd przybliżenia, który pozwala wyznaczyć pokrytyczne ścieżki równowagi.

Wyniki obliczeń dla drugiego rzędu przybliżenia zostaną przedstawione na sympozjum.

Literatura

1. Koiter W.T., *Elastic stability and post-buckling behaviour*, *Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems*, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin (1963), 257-275.
2. Chandra R. Raju B., *Postbuckling analysis for rectangular orthotropic plates*. *Int. J. Mech. Sci.* **Vol.16** (1973), 81-97.
3. Kołakowski Z., *Interactive buckling of thin-walled beam-columns with open and close cross sections*. *Thin-Walled Structures* **Vol.15** (1993), 159-183.
4. Królak M. (red.), *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN Warszawa-Łódź (1990)
5. Królak M. (red.), *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Politechnika Łódzka Monografie Łódź (1995).
6. Królak M. Kołakowski Z., *Interactiv elastic buckling of thin-walled closed orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction* **Vol.4** (1995), 571-590.
7. Królak M. Kołakowski Z., *Interactiv elastic buckling of thin-walled open orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction* **Vol.4** (1995), 591-602.

Summary

CARRYING CAPACITY OF THIN-WALLED PLATES WITH ORTHOTROPY VARYING WIDTHWISE

The present papers deals with an analysis of the elastic thin-walled orthotropic plates after stability loss. The problem was solved using Koiter's second-order asymptotic theory of stability of conservative system. Numerical test were made on plates with orthotropy ratio, $\beta = E_x/E_y$, varying widthwise, which principal directions of orthotropy being parallel to wall edges. The analysis carried out on thin plates with loaded edges simply supported; unloaded edges were tested with different kinds of support (clamped, simply supported, free-edge). Plates were subject to loads causing uniform and linearly variable displacement of edges to each other.

Praca wykonana w ramach grantu KBN nr PB-138/T07/97/12