Dr inż. Andrzej Polka
Katedra Dynamiki Maszyn Politechniki Łódzkiej

MODELOWANIE PRZESTRZENI ZA POMOCĄ MULTIILOCZYNÓW WEKTORÓW

Praca zawiera opis kształtowania przestrzeni n-wymiarowej, definiowania orientacji tej przestrzeni oraz sposoby zapisu leżących w niej wektorów. Jako formę zapisu wektorów, ich iloczynów i multiiloczynów oraz sposobu dokonywania transformacji wektorów między różnymi układami odniesienia wykorzystano diady, które zdefiniowane jako macierze iloczynu zewnętrznego dwóch wektorów.
Słowa kluczowe: modelowanie przestrzeni, diada, macierz transformacji

SPACE MODELLING BY MEANS OF THE MULTI- PRODUCTS OF VECTORS

This work contains the description of the methodology of shaping of an n-dimensional space and defining its orientation as well as the description of possible notations of vectors lying within that space. Dyads, defined as matrices of an external product of two vectors, are used as the form of notation of vectors, their products and multiproducts as well as a way of transforming vectors between different coordinate systems.
Keywords: modelling of n-space, dyads, matrix of transformation of vector

1 . KSZTAŁTOWANIE PRZESTRZENI

Przestrzeń kartezjańska n-wymiarowa K^n określona jest iloczynem wektorowym n-1 wersorów ortogonalnego układu osi $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}}$ (i=1, …n-1) [1] postaci

$$\vec{\boldsymbol{e}}_1 \times \vec{\boldsymbol{e}}_2 \times \ldots..\times \vec{\boldsymbol{e}}_{n-1} = \vec{\boldsymbol{e}}_n \tag{1}$$

W tak zdefiniowanym układzie osi przyjęta kolejność indeksów osi definiuje przyjętą wzorcową (dodatnią) orientację przestrzeni – jest nią tzw. najniższa permutacja wskaźników osi. Dokonując w iloczynie (1) transpozycji (przestawienia) dwóch dowolnych wskaźników osi zmieniamy znak i zwrot wersora $\vec{\boldsymbol{e}}_n$ na przeciwny, tym samym zmieniamy orientację przestrzeni na przeciwną (ujemną). Następna transpozycja przywraca dodatni znak iloczynu i dodatnią orientację osi. Wynika z tego, że dowolna przestrzeń n-wymiarowa przy permutowaniu jej wskaźników osi generuje parzystą ilość $n!$ przestrzeni o tym samym wymiarze, różniących się orientacją, w połowie o orientacji dodatniej i w połowie o orientacji ujemnej. Orientację każdej z nich określa znak wyrażenia $(-1)^t$, gdzie t – ilość transpozycji (parzystą lub nieparzystą) dokonanych w stosunku do przestrzeni wzorcowej o najniższej permutacji wskaźników. Znak ten jest miarą pozwalającą orientację przestrzeni jednoznacznie określić. Miara ta wynika również z budowy macierzy $\boldsymbol{E}$, utworzonej z wersorów osi układu $\vec{\boldsymbol{e}}_i = (0,0, \ldots i = 1, .. n)$ w kolejności przyjętej dla rozważanej przestrzeni. Dla przestrzeni wzorcowej macierz $\boldsymbol{E}_{\mathrm{w}}$ (2) ma postać diagonalną i jej wyznacznik ma wartość +1.

$$\boldsymbol{E}_w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \det \boldsymbol{E}_w = +1 \tag{2}$$

Dla dowolnej przestrzeni kolejność wersorów w kolejnych wierszach macierzy wynika z dokonanych transpozycji wersorów w iloczynie (1) i jest określona przez uzyskaną permutacją wskaźników osi [1]. Wówczas znak wyznacznika tej macierzy można określić przez porównanie jej z macierzą $\boldsymbol{E}_w$, określając ilość transpozycji t , potrzebnych do przekształcenia macierzy $\boldsymbol{E}$ do macierzy $\boldsymbol{E}_w$.

$$det\, \boldsymbol{E} = (-1)^t \, det\, \boldsymbol{E}_e = (-1)^t \quad . \tag{3}$$

W przyjętej przestrzeni K^n można wyodrębnić dowolną podprzestrzeń k wymiarową K_k^n ($k<n$), w której indeksy osi są k elementowymi wariacjami bez powtórzeń utworzonymi z n elementowego zbioru wskaźników. Orientacja podprzestrzeni K_k^n określa się tak samo, jak w przypadku przestrzeni K^n, przyjmując przy tym tę samą orientację dodatnią, odpowiadającą najniższej permutacji wskaźników.
Z powyższego wynika, że przy modelowaniu zagadnienia można dowolnie określać zarówno wymiar przestrzeni ortogonalnej - tym samym ilość zmiennych niezależnych w problemie - jak i orientację przyjętej przestrzeni, definiując w dowolny sposób iloczyn wektorowy (1). Daje to również możliwość – w trakcie procesu obliczeń – zmiany wymiaru przestrzeni, przez rozszerzenie lub redukcję ilości wersorów w iloczynie (1).

Wektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ w zapisie klasycznym ma postać $\vec{\boldsymbol{x}} = x_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + x_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \dots + x_n\vec{\boldsymbol{e}}_n$.

Po zdefiniowaniu kolumnowej macierzy $\boldsymbol{x}$ współrzędnych wektora, $\boldsymbol{x} = [x_1\; x_2\; \dots\; x_n]^T$ oraz kolumnowej macierzy $\breve{\boldsymbol{e}}$ zawierającej wersory osi układu współrzędnych, takiej, że $\breve{\boldsymbol{e}} = [\vec{\boldsymbol{e}}_1\; \vec{\boldsymbol{e}}_2 \dots\; \vec{\boldsymbol{e}}_n]^T$, można zapis klasyczny wektora wyrazić jako iloczyn tych macierzy

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T\breve{\boldsymbol{e}} = \breve{\boldsymbol{e}}^T\boldsymbol{x}\,. \tag{4}$$

Wektor $\vec{\boldsymbol{x}}$ leży na kierunku określonym wersorem $\vec{\boldsymbol{e}}_x$ i można go zapisać w przestrzeni jednowymiarowej jako $\vec{\boldsymbol{x}} = x\vec{\boldsymbol{e}}_x$. Rzut $\vec{\boldsymbol{x}}_u$ wektora $\vec{\boldsymbol{x}}$ na kierunek dowolnej osi (przestrzeni jednowymiarowej), określonej wersorem $\vec{\boldsymbol{e}}_u$ jest multiiloczynem drugiego rodzaju [4] postaci

$$\vec{\boldsymbol{x}}_u = (\,\vec{\boldsymbol{x}}\,\vec{\boldsymbol{e}}_u)\,\vec{\boldsymbol{e}}_u \tag{5}$$

gdzie iloczyn skalarny $\vec{\boldsymbol{x}}\,\vec{\boldsymbol{e}}_u$ jest współrzędną wektora $\vec{\boldsymbol{x}}$ na kierunku $\vec{\boldsymbol{e}}_u$.

2 . DIADA CZYLI ILOCZYN ZEWNĘTRZNY

2.1. Definicja diady

Diada lub inaczej iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$ jest macierzą prostokątną o wymiarach $n{\times}m$, postaci $\boldsymbol{P}_{ab}$, zawierającą iloczyny współrzędnych dwóch wektorów $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$ (w postaci macierzowej $\boldsymbol{a} = [a_1\; a_2\; \dots\; a_n]^T$ i $\boldsymbol{b} = [b_1\; b_2\; \dots\; b_n]^T$), w ogólnym przypadku wektorów zdefiniowanych w przestrzeniach różnowymiarowych $n \neq m$ [4,5].

Wyrazami diady są iloczyny współrzędnych wektorów równe odpowiednio:

$$\boldsymbol{P}_{ab} = [p_{ij}] \quad , \quad p_{ij} = a_i b_j \qquad (i = 1,2, \dots n; j = 1,2, \dots m) . \tag{6}$$

Z zapisu (6) wynika, że diada jest wrażliwa na kolejność jej elementów - tworzących ją wektorów. Zmiana kolejności elementów prowadzi do macierzy transponowanej. Ponadto

$$\boldsymbol{P}_{ab} = \boldsymbol{P}_{ba}^T \quad \text{i} \quad \boldsymbol{P}_{ab}\boldsymbol{P}_{ab}^T = b^2 \boldsymbol{P}_{aa} \ . \tag{7}$$

iloczyn diady $\boldsymbol{P}_{ab}$ i jej macierzy transponowanej $\boldsymbol{P}_{ab}{}^T$ wyraża własność (7).

2.2. Wykorzystanie diady

Macierz $\boldsymbol{P}_{ab}$ odpowiada iloczynowi dwóch wektorów $\vec{\boldsymbol{a}}$ i $\vec{\boldsymbol{b}}$ określonych w postaci kolumnowych macierzy różnowymiarowych , przy czym iloczynowi zapisanemu w takiej formie (w takiej ich kolejności), że wymnożenie macierzy jest niemożliwe . Jeśli więc

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \boldsymbol{b}^T = [b_1 \ b_2 \ .. \ b_m]$$

to obliczenie iloczynu tych macierzy zapisanych w kolejności $\boldsymbol{ab}^T$ jest działaniem niewykonalnym, lecz może być odpowiednikiem diady $\boldsymbol{P}_{ab}$ użytej w multiiloczynie.

Tak więc iloczynowi macierzy postaci $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ .. \\ a_n \end{bmatrix} [b_1 \ b_2 \ .. \ b_m]$ odpowiada diada P_{ab} ,

$$P_{ab} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ & \dots\dots\dots & & \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & a_n b_n \end{bmatrix} . \tag{8}$$

Macierz $\boldsymbol{P}_{ab}$ może być wykorzystana przy zapisie multiiloczynów [4,5] wektorów dowolnego rzędu, z wykorzystaniem dowolnych par iloczynów skalarnych.

Dobrą ilustracją możliwości, jakie daje wykorzystanie diady w zapisie dowolnych multiiloczynów są najprostsze iloczyny nieparzyste i parzyste, które można – po wprowadzeniu diady – tożsamościowo zapisywać na wiele sposobów, stosując przy tym różne możliwe przestawienia kolejności wektorów w iloczynach skalarnych. Poprawność przytoczonych tożsamości można sprawdzić, dokonując samodzielnie odpowiednich przekształceń.

Na przykład w iloczynie nieparzystym trzeciego rzędu $(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}})\vec{\boldsymbol{c}}$

$$(\boldsymbol{a}^T \underbrace{\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}^T} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{P}_{bc} \qquad \text{lub} \qquad (\boldsymbol{b}^T \underbrace{\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}^T} = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{P}_{ac} \ ,$$

$$\underbrace{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}^T} \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{P}_{ca}\, \boldsymbol{b} \qquad \text{lub} \qquad \underbrace{\boldsymbol{c}(\boldsymbol{b}^T} \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{P}_{cb}\, \boldsymbol{a} \qquad (9)$$

oraz w iloczynie parzystym czwartego rzędu $(\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}})(\vec{\boldsymbol{c}}\vec{\boldsymbol{d}})$

$$(\boldsymbol{a}^T \underbrace{\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{P}_{bc}\, \boldsymbol{d} \qquad \text{lub} \qquad (\boldsymbol{b}^T \underbrace{\boldsymbol{a})(\boldsymbol{c}^T} \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{P}_{ac}\, \boldsymbol{d}$$

$$(\boldsymbol{a}^T \underbrace{\boldsymbol{b})(\boldsymbol{d}^T} \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{P}_{bd}\, \boldsymbol{c} \qquad \text{lub} \qquad (\boldsymbol{b}^T \underbrace{\boldsymbol{a})(\boldsymbol{d}^T} \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}^T \boldsymbol{P}_{ad}\, \boldsymbol{c} \qquad (10)$$

Tożsamości (9) i (10) pokazują sposób wpisania diady w multiiloczyn oraz wyjaśniają też, przy okazji, inną jej nazwę - iloczynu zewnętrznego dwóch wektorów.

Wektor rzutu $\vec{\boldsymbol{x}}_u$ dowolnego wektora $\vec{\boldsymbol{x}}$ na kierunek dowolnej osi utworzonej przez wersor $\vec{\boldsymbol{e}}_u$ określony jest zapisem (5) w postaci klasycznej. W zapisie macierzowym jego współrzędne tworzą macierz kolumnową $\boldsymbol{x}_u$. Tak więc, jeżeli macierz $\boldsymbol{e}_u = [e_{u1}\ \ e_{u2}\ \dots\ e_{un}]^T$ jest macierzą współrzędnych wersora $\vec{\boldsymbol{e}}_u$ w przestrzeni $K^{\boldsymbol{n}}$, z zapisu

$$\vec{\boldsymbol{x}}_u = (\,\vec{\boldsymbol{x}}\,\vec{\boldsymbol{e}}_u)\,\vec{\boldsymbol{e}}_u \qquad \text{wynika} \qquad \boldsymbol{x}_u = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{e}_u)\boldsymbol{e}_u. \qquad (11)$$

Z tożsamości (9) natomiast wynika możliwość zapisania macierzy $\boldsymbol{x}_u$ za pomocą diady.

$$\boldsymbol{x}_u^T = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}_{e_u e_u} \qquad \text{lub} \qquad \boldsymbol{x}_u = \boldsymbol{P}_{e_u e_u} \boldsymbol{x}\ . \qquad (12)$$

Wyrazami macierzy iloczynu zewnętrznego dwóch wektorów mogą być zarówno skalarne wartości współrzędnych wektorów jak i wersory osi układu [4,5]. Wówczas diada zawiera iloczyny skalarne wersorów osi układu.

2.3. Diada iloczynów skalarnych wersorów osi tej samej bazy

Dla diady zawierającej iloczyny skalarne wersorów osi możliwe są dwie sytuacje. W ogólnym przypadku są to iloczyny wersorów osi dwóch różnych układów współrzędnych, w szczególnym - jak pokazano niżej - diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e$ zawiera iloczyny wersorów tego samego układu współrzędnych.

$$\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e = [p_{ij}] \qquad p_{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}_i \vec{\boldsymbol{e}}_j \qquad (i, j = 1,2, \dots n) \qquad (13)$$

$$\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_2 \ \dots & \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 \ \dots & \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ & \dots\dots\dots & \\ \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_2 \ \dots & \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_2 \ \dots & \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_1 & 1 \ \dots & \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ & \dots\dots\dots & \\ \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_2 \ \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e$ jest macierzą kwadratową , n wymiarową i symetryczną.

Łatwo stwierdzić, że - jeśli układ osi jest układem ortogonalnym - to iloczyny skalarne różnoimiennych wersorów osi równe są zero $\left(i \neq j \;\rightarrow \vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_j = 0\right)$ i wyrazami macierzy (13) są wartości delty Kroneckera δ_{ij}.

$$\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} = \left[\delta_{ij}\right] = \boldsymbol{I}_n \tag{15}$$

Diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^{e}$ staje się macierzą jednostkową o wymiarze n, czyli macierzą $\boldsymbol{I}_n$.

Ta postać diady – macierz jednostkowa $\boldsymbol{I}_n$ – występuje przy iloczynie skalarnym dwóch wektorów $\vec{\boldsymbol{a}}\,\vec{\boldsymbol{b}}$, zapisanych w tej samej przestrzeni w postaci klasycznej ,

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ \ldots + a_n\vec{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{a}^T\breve{\boldsymbol{e}} \quad ,$$

$$\vec{\boldsymbol{b}} = b_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ \ldots + b_n\vec{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{b}^T\breve{\boldsymbol{e}} \quad ,$$

[gdzie macierze $\boldsymbol{a} = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n]^T$, $\boldsymbol{b} = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_n]^T$], kiedy tę postać iloczynu sprowadzamy do iloczynu macierzy

$$\vec{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{b}} = (\boldsymbol{a}^T\,\breve{\boldsymbol{e}})(\boldsymbol{b}^T\,\breve{\boldsymbol{e}}) = (\boldsymbol{a}^T\,\underbrace{\breve{\boldsymbol{e}})(\breve{\boldsymbol{e}}^T}\,\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^T\ \boldsymbol{I_n}\ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}\,. \tag{16}$$

Macierz $\breve{\boldsymbol{e}} = [\vec{\boldsymbol{e}}_1\ \vec{\boldsymbol{e}}_2 \ldots\ \vec{\boldsymbol{e}}_n]^T$ jest macierzą wersorów osi układu współrzędnych (wersorów bazy).

Jeżeli układ osi nie jest układem ortogonalnym, to iloczyn skalarny dwóch różnoimiennych wersorów tej samej bazy jest różny od zera. Wówczas dla każdej pary wskaźników $i \neq j$ iloczyn $\vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_j = c_{ij}$. Definicje (13-14) przybierają wtedy postać

$$\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^{e} = \left[p_{ij}\right] \qquad p_{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}_i\vec{\boldsymbol{e}}_j = c_{ij} \qquad (i,j = 1,2,\ldots n) \tag{17}$$

$$\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^{e} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_2 & \ldots & \vec{\boldsymbol{e}}_1\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 & \ldots & \vec{\boldsymbol{e}}_2\vec{\boldsymbol{e}}_n \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_1 & \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_2 & \ldots & \vec{\boldsymbol{e}}_n\vec{\boldsymbol{e}}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & 1 & \ldots & c_{2n} \\ & \ldots\ldots\ldots & & \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^{e}$ jest macierzą kwadratową, o wyrazach symetrycznych, bo z własności iloczynu skalarnego wersorów wynika, że $c_{ij} = c_{ji}$.

2.4. Diada jako macierz transformacji układów ortogonalnych

Jeżeli diada jest macierzą zawierającą iloczyny wersorów osi dwóch różnych ortogonalnych układów odniesienia jej wyrazami są wówczas iloczyny skalarne c_{ij} postaci

$$\breve{\boldsymbol{P}}_{ab}^{e} = \left[p_{ij}\right]\ , \qquad p_{ij} = \vec{\boldsymbol{e}}_{ai}\vec{\boldsymbol{e}}_{bj} = c_{ij} \ \ , \qquad (i = 1,2,\ldots n; j = 1,2,\ldots m) \tag{19}$$

gdzie:

$\vec{\boldsymbol{e}}_{ai}$ - wersory osi pierwszego (a) układu współrzędnych, tworzącego bazę ortogonalnej przestrzeni n - wymiarowej ; macierz $\breve{\boldsymbol{e}}_a$ ($\breve{\boldsymbol{e}}_a = [\,\vec{\boldsymbol{e}}_{a1}\ \vec{\boldsymbol{e}}_{a2}\ ...\ \vec{\boldsymbol{e}}_{an}]^T$) jest macierzą wersorów $\vec{\boldsymbol{e}}_{ai}$ – bazy wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ w przestrzeni *n* wymiarowej ,

$\vec{\boldsymbol{e}}_{bj}$ - wersory osi drugiego (b) układu współrzędnych, tworzącego bazę ortogonalnej przestrzeni m – wymiarowej ; macierz $\breve{\boldsymbol{e}}_b$ ($\breve{\boldsymbol{e}}_b = [\,\vec{\boldsymbol{e}}_{b1}\ \vec{\boldsymbol{e}}_{b2}\ ...\ \vec{\boldsymbol{e}}_{bm}]^T$) jest macierzą wersorów $\vec{\boldsymbol{e}}_{bj}$ - bazy wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ w przestrzeni *m* wymiarowej.

Postać diady wygląda wtedy następująco

$$\breve{\boldsymbol{P}}^e_{ab} = \begin{bmatrix} \vec{\boldsymbol{e}}_{a1}\vec{\boldsymbol{e}}_{b1} & \vec{\boldsymbol{e}}_{a1}\vec{\boldsymbol{e}}_{b2} & ... & \vec{\boldsymbol{e}}_{a1}\vec{\boldsymbol{e}}_{bm} \\ \vec{\boldsymbol{e}}_{a2}\vec{\boldsymbol{e}}_{b1} & \vec{\boldsymbol{e}}_{a2}\vec{\boldsymbol{e}}_{b2} & ... & \vec{\boldsymbol{e}}_{a2}\vec{\boldsymbol{e}}_{bm} \\ & ...\,...\,... & & \\ \vec{\boldsymbol{e}}_{an}\vec{\boldsymbol{e}}_{b1} & \vec{\boldsymbol{e}}_{an}\vec{\boldsymbol{e}}_{b2} & ... & \vec{\boldsymbol{e}}_{an}\vec{\boldsymbol{e}}_{bm} \end{bmatrix} . \tag{20}$$

Diada $\breve{\boldsymbol{P}}^e_{ab}$ jest macierzą transformacji dowolnego wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ z przestrzeni *n* -wymiarowej do wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ w przestrzeni *m*- wymiarowej.

Przyjmijmy, że ten sam wektor $\vec{\boldsymbol{v}}$, leżący w przestrzeni jednowymiarowej, określonej wersorem $\vec{\boldsymbol{e}}_v$, jest w ortogonalnej przestrzeni *n*-wymiarowej wektorem $\vec{\boldsymbol{a}}$, natomiast w innej ortogonalnej przestrzeni *m*-wymiarowej jest wektorem $\vec{\boldsymbol{b}}$. Mamy wówczas $\vec{\boldsymbol{v}} = v\vec{\boldsymbol{e}}_v$ (macierzowo zapisujemy to $\vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}\breve{\boldsymbol{e}}_v$, gdzie $\boldsymbol{v} = [v]$, $\breve{\boldsymbol{e}}_v = [\,\vec{\boldsymbol{e}}_v]$ są macierzami jednowyrazowymi), oraz

$$\vec{\boldsymbol{a}} = a_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + a_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ ...\ + a_n\vec{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{a}^T\breve{\boldsymbol{e}}_n\ ,$$

$$\vec{\boldsymbol{b}} = b_1\vec{\boldsymbol{e}}_1 + b_2\vec{\boldsymbol{e}}_2 + \ ...\ + b_m\vec{\boldsymbol{e}}_m = \boldsymbol{b}^T\breve{\boldsymbol{e}}_m\ ,$$

Jest to ten sam wektor, więc – zapisując tę równość w postaci macierzowej – otrzymuje się

$$\boldsymbol{v}\breve{\boldsymbol{e}}_v = \boldsymbol{a}^T\breve{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{b}^T\breve{\boldsymbol{e}}_m\ . \tag{21}$$

Wykorzystano własność, że każde równanie wektorowe (również macierzowe) po pomnożeniu stronami razy dowolny wektor (macierz) pozostanie prawdziwe. Mnożenie prawostronne pierwszego z równań (21) przez jednowyrazową macierz $\breve{\boldsymbol{e}}_v = \breve{\boldsymbol{e}}_v^T$ prowadzi do równania Chasles’a w postaci macierzy transponowanych.

Z wyrażenia $\boldsymbol{v}\,\underbrace{\breve{\boldsymbol{e}}_v\breve{\boldsymbol{e}}_v^T} = \boldsymbol{a}^T\,\underbrace{\breve{\boldsymbol{e}}_n\breve{\boldsymbol{e}}_v^T}$ po uwzględnieniu $\breve{\boldsymbol{e}}_v\breve{\boldsymbol{e}}_v^T = 1$ otrzymuje się

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}^T\breve{\boldsymbol{P}}^e_{av} \tag{22}$$

gdzie diada $\breve{\boldsymbol{P}}^e_{av}$ jest kolumnową (jednorzędową) macierzą transformacji współrzędnych wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ z przestrzeni *n*-wymiarowej do jednowyrazowej macierzy $\boldsymbol{v}$, zawierającej współrzędną v wektora $\vec{\boldsymbol{v}}$ w przestrzeni jednowymiarowej.

Natomiast po pomnożeniu drugiego z równań (21) prawostronnie razy macierz $\breve{\boldsymbol{e}}_n^T$ otrzymuje się wyrażenie

$$\boldsymbol{a}^T \underbrace{\breve{\boldsymbol{e}}_n \breve{\boldsymbol{e}}_n^T} = \boldsymbol{b}^T \underbrace{\breve{\boldsymbol{e}}_m \breve{\boldsymbol{e}}_n^T} \quad , \tag{23}$$

z którego, po uwzględnieniu (15) $\breve{\boldsymbol{e}}_n \breve{\boldsymbol{e}}_n^T = \boldsymbol{I}_n$, wynika

$$\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{b}^T \breve{\boldsymbol{P}}_{ba}^e \,. \tag{24}$$

W równaniu (24) diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{ba}^e$ jest macierzą transformacji współrzędnych wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ z przestrzeni m wymiarowej do współrzędnych wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ w przestrzeni n wymiarowej. Diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{ba}^e$ jest macierzą prostokątną, o wymiarach n (kolumn) x m (wierszy). Aby z macierzy wierszowej (24) otrzymać macierz $\boldsymbol{a}$, jako macierz kolumnową, należy transponować równanie (24) w następujący sposób

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}^T)^T = \left(\boldsymbol{b}^T \breve{\boldsymbol{P}}_{ba}^e\right)^T = \breve{\boldsymbol{P}}_{ab}^e \boldsymbol{b}. \tag{25}$$

Przy transponowaniu równania (24) korzystamy z własności (7) diady.

2.5. Diada jako macierz transformacji układów nieortogonalnych

Przejęto podobne założenia jak w z rozdziale 2.4. - że ten sam wektor $\vec{\boldsymbol{v}}$, leżący w przestrzeni jednowymiarowej, określonej wersorem $\vec{\boldsymbol{e}}_v$, jest w przestrzeni n-wymiarowej wektorem $\vec{\boldsymbol{a}}$, natomiast w innej przestrzeni m-wymiarowej jest wektorem $\vec{\boldsymbol{b}}$ - z tą różnicą, że przestrzenie te nie są przestrzeniami ortogonalnymi. Oznacza to, że iloczyn skalarny wersorów dwóch różnych osi tej samej bazy jest różny od zera, zarówno dla bazy wektora $\vec{\boldsymbol{a}}$ $\left(\vec{\boldsymbol{e}}_{ai}\vec{\boldsymbol{e}}_{aj} \neq 0\right)$, jak i dla bazy wektora $\vec{\boldsymbol{b}}$ $\left(\vec{\boldsymbol{e}}_{bi}\vec{\boldsymbol{e}}_{bj} \neq 0\right)$.

Podobnie, jak w rozdziale 2.4, pomnożono równanie (21) $\boldsymbol{a}^T \breve{\boldsymbol{e}}_n = \boldsymbol{b}^T \breve{\boldsymbol{e}}_m$ prawostronnie razy macierz $\breve{\boldsymbol{e}}_n^T$ i otrzymano wyrażenie (23) postaci

$$\boldsymbol{a}^T \underbrace{\breve{\boldsymbol{e}}_n \breve{\boldsymbol{e}}_n^T} = \boldsymbol{b}^T \underbrace{\breve{\boldsymbol{e}}_m \breve{\boldsymbol{e}}_n^T} \quad .$$

W powyższym równaniu po lewej stronie występuje diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e$ (18), natomiast po prawej stronie diada $\breve{\boldsymbol{P}}_{ab}^e$ (20) . Wynika stąd równanie

$$\boldsymbol{a}^T \breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e = \boldsymbol{b}^T \breve{\boldsymbol{P}}_{ba}^e \tag{26}$$

z którego można obliczyć macierz $\boldsymbol{a}^T$ po pomnożeniu obu jego stron prawostronnie razy macierz $\left(\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e\right)^{-1}$, odwrotną do macierzy $\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e$ w postaci

$$\boldsymbol{a}^T = \boldsymbol{b}^T \breve{\boldsymbol{P}}_{ba}^e \left(\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e\right)^{-1}, \tag{27}$$

lub w postaci

$$\boldsymbol{a} = \left(\breve{\boldsymbol{P}}_{nn}^e\right)^{-1} \breve{\boldsymbol{P}}_{ab}^e \boldsymbol{b} \quad . \tag{28}$$

Postać kolumnową $\boldsymbol{a}$ (28) macierzy $\boldsymbol{a}^T$ uzyskano przez transponowanie równania (27).

3. PODSUMOWANIE

W pracy pokazano możliwości wykorzystania zapisu wektorów, wersorów osi, ich iloczynów skalarnych – w tym również multiiloczynów – w *n*-wymiarowej przestrzeni, zarówno ortokartezjańskiej K^n jak i nieortogonalnej, euklidesowej E^n, za pomocą diady, czyli macierzy, określanej też jako iloczyn zewnętrzny dwóch wektorów. Zdefiniowano też różne rodzaje diad, różniące się między sobą rodzajem elementów, stanowiących wyrazy macierzy.

LITERATURA

[1] Borsuk K.: *Geometria analityczna wielowymiarowa*. PWN, Warszawa, 1977.

[2] Karaśkiewicz E. : *Zarys teorii wektorów i wersorów.* PWN, Warszawa, 1971.

[3] *Matematyka, Poradnik Inżyniera. tom.1-2.* Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1986.

[4] Polka A.: *Multi-Products of Unit Vectors and Vectors.Basic Notions.* Mechanics and Mechanical Engineering, 12,No.2, 2008, str. 103-110.

[5] Polka A.: *General Case of Multi-products of Axis Vectors and Vector in an n-dimensional Space.* Mechanics and Mechanical Engineering, 12, No.3, 2008, s. 201-209.