

Prof. dr hab. Dariusz Zagrodny
Katedra Algorytmów i Baz Danych
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu Łódzkiego

Recenzja dorobku naukowego dr. Mirosława Adamka

Dr Mirosław Adamek przedstawił do oceny cykl siedmiu prac, który zatytułował: *Uogólnione funkcje wypukłe w kontekście funkcji silnie wypukłych*. Do recenzji otrzymałem prace oznaczone symbolami od H1 do H7. Zawierają one rozważania Autora na temat klas funkcji, które można uzyskać poprzez modyfikację klasycznej nierówności charakteryzującej funkcje z wypukłym nadwykresem, zobacz na przykład [9, 1, 2]. Uważam, że zaproponowany tytuł cyklu jest niepoprawny, ponieważ funkcje silnie wypukłe tworzą podklasę funkcji wypukłych, patrz Definicja 1 z pracy H1.

Badania nad tego typu funkcjami były prowadzone głównie w ubiegłym stuleciu. Na przykład w pracach i monografiach [2, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 17] znajdziemy wiele rezultatów dotyczących funkcji wypukłych i ich uogólnień, a także uwag historycznych na temat rozwoju tego kierunku badań. Przedstawiony do oceny cykl prac zawiera w dużej mierze nieznaczne modyfikacje lub powielenia już istniejących pojęć dotyczących uogólnień funkcji wypukłych. Nie znalazłem w nim żadnych oryginalnych, twórczych pomysłów. Habilitant uzyskał swoje rezultaty przy pomocy prostych i znanych rozumowań, bez potrzeby angażowania zaawansowanych metod analizy wariacyjnej. Skupia się na marginalnych zagadnieniach, głównie dotyczących prostych rozumowań związanych z klasą funkcji zdefiniowaną warunkiem

$$(1) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - t(1-t)F(x-y),$$

gdzie $t \in [0, 1]$, $x, y \in X$ i funkcja $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest ustalona w celu wydzielenia klasy funkcji f . Poza trywialnymi obserwacjami Habilitant nie trudzi się analizą związków między już istniejącymi uogólnieniami funkcji wypukłych a klasami funkcji, które definiuje. Nie przedstawia żadnych rezultatów, które pozwalają stwierdzić czy mamy do czynienia z nową klasą funkcji, nowymi rezultatami, czy też wszystko co zostało przedstawione do oceny było już dawno odkryte i opublikowane przez innych badaczy w znacznie ogólniejszych przypadkach. Na przykład

funkcje Φ -wypukłe, patrz [15], zostały zbadane kilkadziesiąt lat temu. Bez trudu można stwierdzić, że przy założeniach z pracy H4 rozważane tam funkcje F -wypukłe są Φ -wypukłe, dla odpowiednio dobranej rodziny subgradientów; przykładowo $\Phi := \{f'(x_0)(\cdot - x_0) + \hat{F}(\cdot - x_0) \mid x_0 \in I\}$. Z prac Habilitanta nie dowiemy się czy są jakieś powiązania tych ogólnych klas z funkcjami F -wypukłymi, które rozważa. Gdyby Habilitant uzyskał nietrywialne powiązania klasy funkcji F -wypukłych z Φ -wypukłymi funkcjami lub je wykluczył w istotnych dla zastosowań przypadkach, to byłoby to uzasadnienie dla Jego działań.

Dr Mirosław Adamek napisał w autoreferacie, że Jego wyniki mogą mieć zastosowanie w analizie nieliniowej, w zastosowaniach ekonomicznych lub inżynierskich. Stwierdzam, że nie znalazłem żadnych sensownych zastosowań przedstawionych rezultatów. W przedstawionym do oceny cyklu prac nie ma osiągnięć, które wniosłyby wkład w rozwój badań związanych z wypukłością i jej uogólnieniami.

Stan wiedzy Habilitanta w zakresie prowadzonych badań jest ubogi. Wskazują na to liczne błędy, które popełnił. Na przykład: w pracach znajdują się fałszywe stwierdzenia, niektóre definicje są niepoprawnie podane, nawet w prostych rozumowaniach znalazłem luki. Habilitant nie zna literatury dotyczącej zagadnień związanych z klasami funkcji będących uogólnieniami funkcji wypukłych. Przypisuje osiągnięcia nie tym badaczom, którym powinien. Przypomnę, że prof. S. Rolewicz poświęcił część swojej aktywności naukowej badaniu klas funkcji uogólniających funkcje wypukłe. Rezultaty prof. S. Rolewicza, osiągnięte w tym i ubiegłym stuleciu, są znane i cytowane przez specjalistów, ale nie są znane Habilitantowi. W Jego pracach nie ma żadnych odniesień do współczesnych i istotnych problemów dotyczących uogólnień wypukłości. Badania nad takimi problemami są jeszcze obecnie prowadzone. Na przykład w pracy [3] jest zawarta subrózniczkowa charakteryzacja aproksymatywnej wypukłości. Pojawiają się też pytania dotyczące zależności między funkcjami wypukłymi a tymi z klas je uogólniających, zobacz na przykład [10, Remark 4.2]. Habilitant zupełnie ignoruje ten nurt badań.

Poniżej omówione zostały publikacje wchodząc w skład cyklu.

Oznaczenia: $(X, \|\cdot\|)$ przestrzeń unormowana (w niektórych pracach X jest tylko przestrzenią wektorową lub przedziałem), $f : X \rightarrow R$, funkcja o wartościach w zbiorze rzeczywistym, $\text{conv} f$ oznacza uwypuklenie funkcji; informacje na temat tej funkcji można znaleźć w [2].

Omówienie pracy **H1**. Ponad pół wieku temu w B. Polyak w pracy [16] opublikował wyniki dotyczące zbieżności ciągu elementów minimalizujących półciągły z dołu funkcjonal quasi-wypukły, który był określony na przestrzeni Banacha $(X, \|\cdot\|)$. Żeby zapewnić silną zbieżność (zbieżność względem topologii generowanej przez normę przestrzeni), wyróżnił klasę funkcji jednostajnie quasi-wypukłych, to znaczy takich, że dla pewnej funkcji $\sigma : [0, \infty) \rightarrow R$ zachodzi, $\sigma(0) = 0$, $\sigma(t) > 0$ dla $t \in (0, \infty)$ i

$$(2) \quad \forall x, y \in X, f(2^{-1}(x+y)) \leq \max\{f(x), f(y)\} - \sigma(\|x-y\|).$$

Przy założeniu ograniczoności z dołu funkcji f pokazał, że żądana zbieżność jest zapewniona. Następnie wydzielił podklasę funkcji wypukłych, to znaczy funkcji spełniających poniższy warunek

$$\exists \gamma > 0 : \forall x, y \in X, f(2^{-1}(x+y)) \leq 2^{-1}(f(x) + f(y)) - \frac{\gamma \|x-y\|^2}{4},$$

które nazywał silnie wypukłymi i podał szereg ich własności.

Habilitant w powyższej nierówności wstawił $F(x-y)$ zamiast wyrażenia $\|x-y\|^2$, gdzie F jest funkcją określoną na X o wartościach w $[0, \infty)$. Ponadto, zdefiniował klasę funkcji F -silnie wypukłych biorąc dowolne $t \in [0, 1]$, zamiast 2^{-1} w zmodyfikowanej nierówności Jensena przez wyrażenie $t(1-t)F(x-y)$, zobacz Definicja 1 z H1. Porównując Definicję 2 z pracy H1 z (2) widać, że poprzez niewielką modyfikację pomysłu B. Polyaka wydzieli podklasę funkcji jednostajnie quasi-wypukłych, jeżeli założenie o półciągłości z dołu zostanie zachowane. Niestety niektóre, nawet proste spostrzeżenia opublikowane w pracy H1 są nieprawdziwe. Żeby się o tym przekonać proponuję rozważyć w Twierdzeniach 1 i 2 przestrzeń $X = R$ i zbiór $D = \{0\}$, i dla $t \in R$ położyć

$$F(t) := \begin{cases} 0 & \text{dla } t = 0; \\ 1 & \text{dla } t \neq 0. \end{cases}$$

Jest oczywiste, że jest to funkcja parzysta ($F = F^*$), a nie jest to funkcja kwadratowa, czyli stwierdzenie 1, 3. nie zachodzi, za to stwierdzenie 1, 1. zachodzi. Habilitant postuluje, że te dwa stwierdzenia zachodzą jednocześnie, patrz Twierdzenie 1 (to samo dotyczy Twierdzenia 2). Wydaje się, że są dwa sposoby naprawienia błędu. Ograniczyć rozważania do zbioru D (rozważać tylko obcięta do D) lub założyć, że $D = X$. Pierwszy sposób naprawy błędu spowoduje sprzeczność ze stwierdzeniem 3. w Twierdzeniu 2. Zostaje zatem przyjąć, że $D = X$. Po korekcie otrzymujemy trywialne równoważności w Twierdzeniach 1 i 2, które stanowią główne osiągnięcie tej pracy. Zamierzeniem Habilitanta Wniosek 1, następujący po Twierdzeniu 1, ma nas przekonać,

że jednak jest tam coś istotnego. Habilitant nie zauważył jednak, że z założenia prawdziwości zdania

$$\forall x, y \in X, 2\|x + y\|^s + 2^{s-1}\|x - y\|^s \leq (2\|x\|)^s + (2\|y\|)^s$$

po łatwych rachunkach otrzymujemy $s = 2$ (wskazówka: $y = 3x$, $x = -y$, $x = a + b$, $y = a - b$) oraz

$$\forall x, y \in X, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

co oznacza, że mamy do czynienia w tym przypadku z przestrzenią prehilbertowską. Widać, że aby uzyskać strukturę unitarną nie są tu potrzebne żadne dodatkowe założenia, w przeciwieństwie do założeń Wniosku 1 z pracy H1.

Można zapytać jak się Habilitant odniósł do tego co jest istotne? To znaczy, co lepszego uzyskał od B. Polyaka w zakresie zbieżności ciągów minimalizujących? W pracy nie podano żadnych informacji na temat zastosowania uzyskanych rezultatów do badania ciągów minimalizujących funkcję silnie wypukłą. Nie ma też żadnych informacji w jakim celu klasa tych funkcji została wydzielona. Pracę można podsumować następująco: jest to nieudana modyfikacja wyników B. Polyaka za pomocą prostych rozumowań przeprowadzonych z błędami.

Omówienie pracy **H2**. Niech $f, g : I \rightarrow R$, $I \subset R$ będzie przedziałem otwartym. Oczywiście jest, że jeżeli wewnątrz nadwykresu funkcji $\text{conv } g$ nie zawiera punktów z wykresu funkcji f , to $f(t) \leq \text{conv } g(t) \leq g(t)$ dla każdego $t \in I$. Ta prosta obserwacja nie wymaga uzasadnienia. Zamierzeniem Habilitanta było uzyskanie odpowiednika tego „wyniku” w ogólniejszej klasie funkcji. W tym celu rozpatruje klasę funkcji charakteryzowaną przez nierówność Jensena z dodatkowym składnikiem z prawej strony nierówności, to znaczy dla ustalonego $G : [0, 1] \times I \times I \rightarrow R$ wydziela funkcje spełniające warunek

$$\forall t \in [0, 1], x, y \in I, f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) + G(t, x, y).$$

Zakładając, że istnieje funkcja $\phi : I \rightarrow R$ taka, że

$$\forall t \in [0, 1], x, y \in I, \phi(tx + (1 - t)y) = t\phi(x) + (1 - t)\phi(y) + G(t, x, y)$$

i wewnątrz nadwykresu funkcji $\text{conv } (g - \phi)$ nie zawiera punktów z wykresu funkcji $f - \phi$ stwierdza, że $(f - \phi)(t) + \phi(t) \leq \text{conv } (g - \phi)(t) + \phi(t) \leq (g - \phi)(t) + \phi(t)$ dla każdego $t \in I$; zobacz Twierdzenie 2. Twierdzenia 3 i 4 wnoszą podobny wkład w rozwój naszej wiedzy na temat funkcji wypukłych i ich uogólnień określonych na odcinku zawartym w zbiorze liczb rzeczywistych.

W literaturze znane są twierdzenia dotyczące rozdzielania podwykresów i nadwykresów funkcji; zobacz na przykład [2, Theorem 4.1.18

(Sandwich theorem)]. Są to wyniki, które znajdują zastosowanie w rachunku subrózniczkowym. Na przykład zapewniają addytywność operatora subrózniczki w większości rozważanych zagadnień. Jeżeli chodzi o obserwacje dr. Mirosława Adamka na temat rozdzielania, to, pomijając ich trywialność, nie wiadomo czemu mają one służyć.

Omówienie pracy **H3**. W Twierdzeniu 1 dowiadujemy się, że jeżeli warunek (1) zachodzi dla $t = \frac{1}{2}$, to przy założeniu $F(tx) \geq t^2 F(x)$ nierówność (1) też zachodzi dla t postaci $\frac{k}{2^m} \in [0, 1]$, $k, m \in N$, gdzie N oznacza zbiór liczb naturalnych. W Twierdzeniu 2 stwierdzono że, funkcja f jest ciągła przy założeniach lokalnej ograniczoności f oraz przy dodatkowym założeniu, że $F \geq 0$ i $F(tx) \geq t^2 F(x)$, dla t jak wyżej. Przypominam, że założenie $F \geq 0$ wymusza przynależność funkcji f do dobrze znanej klasy funkcji "midconvex". Porównując Twierdzenia 2, 3 z pracy H3, gdzie jest ono eksploatowane, z ćwiczeniami 2.1.17, i 4.1.6, 4.1.7 z monografii [2] zadałem sobie pytanie: co tu jest nowego? Własności podane w tych ćwiczeniach pokazują, że w przestrzeniach skończone wymiarowych Habilitant powielił znane i proste rezultaty. Dowód w przestrzeni unormowanej o nieskończonym wymiarze przeprowadzony jest błędnie. Żeby był poprawny trzeba skorzystać z odpowiednika [2, Proposition 4.1.4] dla przestrzeni unormowanych. Mam wątpliwość czy Twierdzenie 2 zachodzi w przestrzeniach liniowo-topologicznych. Rozumowanie przeprowadzone przez Autora byłoby uzasadnione, gdyby powołał się na odpowiednik [2, Proposition 4.1.4] w przestrzeniach liniowo-topologicznych, a tak nie zrobił. Nie znam odpowiednika [2, Proposition 4.1.4] w przestrzeniach liniowo-topologicznych, które nie są lokalnie wypukłe. Z Twierdzenia 4 po prostych rachunkach dowiadujemy się, że jeżeli (1) zachodzi dla ustalonego $t \in (0, 1)$ i F spełniającego warunek $F(2^{-1}x) \geq 4^{-1}F(x)$ (o argumencie x nic nie założono - powinno być dla każdego $x \in X$), to nierówność (1) zachodzi dla $t = 2^{-1}$.

Błąd popełniony przez dr. Mirosława Adamka w dowodzie Twierdzenia 2 jest poważny. Budzi to moje obawy czy Habilitant jest świadomy tego, że nie można stosować rozumowania jednowymiarowego w strukturze nieskończeniewymiarowej, bez narażenia się na podanie fałszywego rezultatu. Niestety, żeby uzasadnić swoje rozumowanie w przestrzeni liniowo-topologicznej dr Mirosław Adamek korzysta z Twierdzenia Bersteina-Doetscha, zobacz [1], które było oryginalnie uzyskane dla funkcji określonych na przedziale zawartym w zbiorze liczb rzeczywistych. To co zrobił można w skrócie zapisać jako implikację: jeżeli funkcja jest ciągłą na każdej podprzestrzeni o skończonym wymiarze,

to jest ciągła na całej przestrzeni. Już proste przykłady pokazują, że tak być nie musi.

Omówienie pracy **H4**. W tej pracy X jest odcinkiem otwartym w zbiorze liczb rzeczywistych i f jest funkcja różniczkowalna. W Twierdzeniu 1, po dokonaniu prostych przekształceń nierówności (1), otrzymano nierówność

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x) + F(y - x)$$

dla $x, y \in X$. Proste obserwacje i założenia poczynione w pracy H4, pozwalają prowadzić rozważania dla parzystych funkcji F . Zakładając, że teza Twierdzenia 1 zachodzi, po wykonaniu prostych rachunków otrzymamy Twierdzenia 2, 3 i 4. W Twierdzeniu 3 brakuje założenia. Żeby Twierdzenie 3 było prawdziwe, trzeba dodatkowo założyć całkowalność złożenia $f \circ \varphi$.

Omówienie pracy **H5**. Czytając pracę H5 zastanawiam się czy poza Autorem ktoś jeszcze ją czytał. Praca zawiera błędy, które powinny być wyeliminowane w procesie recenzji. Na przykład wstęp do pracy zaczyna się od całki $[\int_a^b x^2 dx]$, która w żaden sposób nie jest związana z treścią tego rozdziału, w dowodzie Twierdzenia 1 znajduje się wyrażenie

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{f(x) + (y)}{2}\right) - \frac{1}{4}F(x-y),$$

które nie jest poprawne.

Celem Autora jest zbadanie warunków kiedy w (1) zachodzi równość dla $t = \frac{1}{2}$ i choć jednej funkcji f . Warunki podane w Twierdzeniu 1 są trywialne. Twierdzenie 2 jest prostą konsekwencją Twierdzenia 1.

Omówienie pracy **H6**. Jeżeli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest wypukła, to znana jest nierówność

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2},$$

zobacz ćwiczenie 2.2.16 z monografii [2] lub [13, 1.10]. Habilitant modyfikuje powyższą nierówność, tak by działała w klasie funkcji określonych przez warunek (1).

Po przeczytaniu uwag Autora na stronie 868 z pracy H6 dochodzę do wniosku, że Habilitantowi nie są znane rezultaty prof. S. Rolewicza z lat siedemdziesiątych ubiegłego stulecia na temat funkcji $\alpha(\cdot)$ -parawypukłych. Habilitant powinien się też zapoznać z uwagami historycznymi dotyczącymi klas funkcji z funkcją $F(\cdot) := -\|\cdot\|^\gamma$, $\gamma > 0$,

które można znaleźć w pracy [17]. Zalecam też uważne przeczytanie definicji [11, Rozdział 3] charakteryzującej klasę funkcji "approximate convex". Definicja podana w pracy H6 jest błędna. Zastanawiam się też, która z uwag z pracy H6 jest prawdziwa.

Brak wiedzy dr. Mirosława Adamka na temat badań dotyczących podstaw analizy wypukłej i jej uogólnień staje się oczywisty po przeczytaniu prac H6 i H7, i po zapoznaniu się z komentarzami z autoreferatu. Jest dla mnie całkowicie niezrozumiałe dlaczego dr Mirosław Adamek podaje nieprawdziwe informacje w pracy H6; patrz strona 868, w uwadze dotyczącej pracy [11]. Jest to bardzo zła praktyka. Znam zawartość pracy [11] od dawna. Wielokrotnie korzystałem z rezultatów tam podanych. Nie mam żadnych wątpliwości, że są one zarówno ciekawe jak i prawdziwe. Klasa funkcji, którą Autorzy tej pracy wydzielili, jest istotna w zagadnieniach całkowania operatora subrózniczki. Powinna być znana każdemu, kto się zajmuje zagadnieniami związanymi z uogólnieniem wypukłości.

Omówienie pracy H7. Wyniki zawarte w pracy H7 dotyczą klasy funkcji zdefiniowanej w (1), w przypadku gdy X jest przedziałem w zbiorze liczb rzeczywistych. Zawarte są tam proste obserwacje na temat ciągłości i różniczkowalności tych funkcji.

Ocenę innych działań Habilitanta dokonuję na podstawie informacji przekazanych w dokumentacji przez zainteresowanego. Dr M. Adamek prowadził różne zajęcia dla studentów. Przedstawiona lista prowadzonych wykładów i ćwiczeń jest typowa dla osoby pracującej przez wiele lat w uczelni. Załączony wykaz konferencji, w których brał udział, czy Jego naukowych wyjazdów zagranicznych, w zupełności wystarczy do pozytywnej oceny tego typu działalności. W autoreferacie Habilitant podał, że opublikował dodatkowo dziesięć prac. Prace te nie zostały załączone do dokumentacji, którą otrzymałem. Po analizie tych, do których mam dostęp przez bibliotekę uniwersytecką, stwierdzam, że nie potrafię doszukać się w nich osiągnięć, o których warto by tu wspomnieć.

W swojej ocenie odniosę się też do autoreferatu załączonego do dokumentacji. Rada Doskonałości Naukowej zaleca dołączenie tego dokumentu do wniosku w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego, patrz : <https://www.rdn.gov.pl/postepowanie-habilitacyjne.wymagania-dokumentacyjne-wnioskow-w-sprawie-nadania-stopnia-doktora-habilitowanego.html> . Uważam, że taki dokument powinien być

napisany starannie oraz zawierać sprawdzone i rzetelne informacje. Tak niestety nie jest.

Autor powinien dokonać korekty drobnych błędów. Na przykład definicja podparcia jest podana z błędem - patrz str. 7, skutkiem tego Twierdzenia 1, 2, 3, 4 stają się nieprawdziwe. Tytuły cytowanych prac powinny być podawane poprawnie, patrz na przykład [34].

Na miejscu Autora skorygowałbym autoreferat zarówno pod względem językowym jak i merytorycznym. Na przykład na stronnice 1 w punkcie c mamy „szeroką teorię funkcji wypukłych” - bez komentarza. Dalej znajdziemy sformułowanie „wyniki uogólniają i poprawiają”. Rozumiem, że Autor znalazł jakieś błędy w pracach innych i je skorygował. Nie znalazłem w autoreferacie żadnej informacji na temat błędnych wyników innych autorów. Dr Mirosław Adamek napisał, że „stosowane techniki dowodowe są kompilacją znanych technik z analizy wypukłej oraz oryginalnych pomysłów”. Nie znalazłem żadnych oryginalnych pomysłów dowodowych w tym co Autor przedstawił do oceny. Stwierdził też, że Jego rezultaty mogą być zastosowane w „zagadnieniach związanych z podparciem, zagadnieniach kanapkowych, analizie nieliniowej oraz zastosowaniach inżynierskich i ekonomicznych” - zostawiam ocenę tego fragmentu zdania czytelnikowi. Habilitant nie powinien wprowadzać swoich nazw na pojęcia, które już od dawna są w powszechnym użyciu w języku polskim, np. „zagadnienia związane z podparciem” lub „zagadnienia kanapkowe”.

Czytając wstęp odnosi się wrażenie, że Autor prowadzi badania w obszarze nowoczesnej i dynamicznie rozwijająca się gałęzi analizy wypukłej. W rzeczywistości tak nie jest. Mam też dużo zastrzeżeń co do doboru cytowań i przypisania poszczególnych osiągnięć konkretnym autorom przez Habilitanta, patrz strona 5 autoreferatu. Zalecałbym skonfrontowanie podanych faktów przez Habilitanta z informacjami zawartymi w [5, 7, 11, 12, 15].

Konkluzja.

Przedstawiony cykl prac nie zawiera wyników naukowych, które można by uznać za wartościowe. W większości są to przyczynki do istniejących rezultatów z wąskiej tematyki badawczej. Rozumowania, które Habilitant używa w celu ich uzyskania, są powieleniem znanych, prostych schematów dowodowych. Uważam, że Habilitant nie ma w swoim dorobku naukowym osiągnięć, które spełniają wymagania Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, Art. 219 ust. 1. pkt 2.

LITERATURA

- [1] F. Bernstein and G. Doetsch, Zur Theorie der konvexen Funktionen, Math. Annalen 76 (1915), 514–526.
- [2] J. Borwein, J. Vanderweff, Convex functions: constructions, characterizations and conterexamples, Cambridge University Press (2010).
- [3] A. Daniilidis, F. Jules, M. Lassonde, Subdifferential characterization of approximate convexity: the lower semicontinuous case, Math. Program., Ser B (2009) 116, 115–127.
- [4] R. Ger, Almost approximately convex function, Mathematica Slovaca, Vol. 38 (1988), No. 1, 61–78
- [5] J. W. Green, Approximately convex functions, Duke. Math. J. 19 (1952), 499–504.
- [6] A. Háy and Z. Páles, On approximately t -convex functions, Publicationes Mathematicae (2005) 66(3):489–501.
- [7] D. Hyers, S. Ulam, Approximately convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 821–828
- [8] D. Hyers, G. Isac, Th. Rassias, Stability of functional equations in several variables, Springer Sciences+Business Media, LLC (1998).
- [9] J. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta Math. 30, 175–193, (1906) DOI: 10.1007/BF02418571
- [10] A. Jourani i inni, $C^{1,\omega(\cdot)}$ -regularity and Lipschitz-like properties of subdifferential, Proc. London. Math. Soc. (3) 105(2012) 189–223.
- [11] H. Ngai, D. Luc, M. Théra, Approximate convex functions, J. Nonlinear Convex Anal, 1(2000), 155–176.
- [12] C. T. Ng and K. Nikodem, On approximately convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), no. 1, 103–108.
- [13] C. Niculescu, L-E. Person, Convex functions and their applications, Contemporary approach, Second Edition, Springer (2018).
- [14] Z. Pálas, On approximately convex functions, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003) 243–252 .
- [15] D. Pallaschke, S. Rolewicz, Foundations of mathematical optimization, Convex Analysis without linearity, Springer-Scinces+Busines Media, B.V (1997).
- [16] B. Polyak, Existence theorems and convergence of minimizing sequences in extremum problems with restrictions, Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 72–75.
- [17] S. Rolewicz, On $\alpha(\cdot)$ -paraconvex and strongly $\alpha(\cdot)$ -paraconvex functions, Control and Cybernetics, 29 (2000) 367–377.

27 IV 2021 Zeynalov