

## Autoreferat

1. Imiona i nazwisko: **Eliza Łucja Jabłońska**

2. Posiadane tytuły i stopnie naukowe:

- 18.04.2002 – dyplom magistra matematyki uzyskany na Wydziale Matematyczno-Fizycznym Uniwersytetu Szczecińskiego; tytuł pracy magisterskiej: *Funkcje I klasy Baire'a*; promotor: dr Franciszek Prus-Wiśniowski,
- 25.04.2007 – dyplom doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany na Wydziale Matematyczno-Fizyczno-Technicznym Akademii Pedagogicznej w Krakowie; tytuł rozprawy doktorskiej: *O rozwiązaniach pewnego uogólnienia równania funkcyjnego Gołąba-Schinzla*; promotor: dr hab. Janusz Brzdęk, prof. AP.

3. Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- 01.10.2002 – 30.06.2007 – asystent w Katedrze Matematyki Politechniki Rzeszowskiej,
- 01.07.2007 – 30.06.2016 – adiunkt w Katedrze Matematyki Politechniki Rzeszowskiej,
- 01.07.2016 – – adiunkt w Zakładzie Matematyki Dyskretnej Politechniki Rzeszowskiej.

4. Osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16 ust. 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 r. o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki stanowi cykl sześciu publikacji powiązanych tematycznie pod tytułem:

**„Wybrane analogie między zbiorami zerowymi Haara  
a zbiorami pierwszej kategorii Haara  
oraz pewne zastosowania do równań funkcyjnych”**

składający się z prac:

- [J1] E. Jabłońska, *Jensen convex functions bounded above on nonzero Christensen measurable sets*, Ann. Math. Sil. 23 (2009), 53-55.
- [J2] E. Jabłońska, *Christensen measurability and some functional equation*, Aequationes Math. 81 (2011), 155-165.
- [J3] E. Jabłońska, *Some analogies between Haar meager sets and Haar null sets in abelian Polish groups*, J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), 1479-1486.
- [J4] E. Jabłońska, *D-measurability and t-Wright convex functions*, J. Math. Inequal. 10 (2016), 213-217.

- [J5] E. Jabłońska, *A theorem of Piccard's type in abelian Polish groups*, Anal. Math. 42 (2016), 159-164.
- [J6] E. Jabłońska, *A theorem of Piccard's type and its applications to polynomial functions and convex functions of higher orders*, Topology Appl. 209 (2016), 46-55.

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników.

## WPROWADZENIE

W 1934 roku W. Sierpiński [93] wykazał, że przy założeniu hipotezy continuum istnieje „dualność” pomiędzy pojęciami „zbiór miary zero” a „zbiór pierwszej kategorii”, tzn. istnieje taka funkcja wzajemnie jednoznaczna  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dla której  $f(A)$  jest zbiorem miary Lebesgue’a zero wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest zbiorem pierwszej kategorii Baire’a. P. Erdős [34] zmodyfikował dowód W. Sierpińskiego, otrzymując tym samym silniejszy rezultat, a mianowicie udowodnił on, że przy założeniu hipotezy continuum istnieje taka funkcja wzajemnie jednoznaczna  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $f = f^{-1}$  oraz  $f(A)$  jest zbiorem miary Lebesgue’a zero wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest zbiorem pierwszej kategorii Baire’a; w konsekwencji  $A$  jest zbiorem miary Lebesgue’a zero wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(A)$  jest zbiorem pierwszej kategorii Baire’a<sup>1)</sup>. Z kolei E. Szpilrajn [97] udowodnił, że nie istnieje taka funkcja wzajemnie jednoznaczna  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $f = f^{-1}$  oraz  $f(A)$  jest zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue’a wtedy i tylko wtedy, gdy  $A$  jest zbiorem o własności Baire’a, co oznacza, że „zasady dualności” Erdösa-Sierpińskiego nie można rozszerzyć na pojęcia „zbioru mierzalnego w sensie Lebesgue’a” oraz „zbioru o własności Baire’a”. Mimo to w literaturze istnieje wiele twierdzeń, które powstawały w ten sposób, że w twierdzeniach dotyczących miary Lebesgue’a pojęcia „zbiór miary zero”, „zbiór dodatniej miary zewnętrznej”, „zbiór mierzalny”, „funkcja mierzalna” zastępowano pojęciami „zbiór pierwszej kategorii Baire’a”, „zbiór drugiej kategorii Baire’a”, „zbiór o własności Baire’a”, „funkcja mierzalna w sensie Baire’a”, chociaż ich dowody często znacznie różniły się od siebie.

Najważniejsze wyniki dotyczące analogii pomiędzy miarą Lebesgue’a a kategorią Baire’a na prostej rzeczywistej zostały opublikowane przez J.C. Oxtoby’ego [76] w 1971 roku. Istotny wkład w teorię miary i kategorii Baire’a w aspekcie analogii pomiędzy zbiorami „małymi” w obu znaczeniach wniósł również J.C. Morgan II [64]-[67], który sformułował aksjomatycznie rodziny zbiorów, co pozwoliło na jednolite podejście do miary i kategorii. W. Sander w swoich pracach [83]-[86] wykorzystał ideę J.C. Morgana II, aby ujednolicić pewne analogiczne twierdzenia (wraz z dowodami) z zakresu miary i kategorii. W ostatnim czasie N.H. Bingham wraz z A. Ostaszewskim [11]-[13], [74] zainteresowali się analogiami pomiędzy miarą a kategorią, a zwłaszcza ujednoliceniem twierdzeń Steinhausa oraz Pettisa-Piccard.

Przypomnijmy, w 1920 roku H. Steinhaus [96] udowodnił następujące twierdzenia.

**Twierdzenie 1.** [96] *Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem dodatniej miary Lebesgue’a, to  $0 \in \text{int}(A - A)$ .*

**Twierdzenie 2.** [96] *Jeśli  $A, B \subset \mathbb{R}$  są zbiorami dodatniej miary Lebesgue’a, to  $\text{int}(A + B) \neq \emptyset$ .*

Topologiczne odpowiedniki powyższych twierdzeń zawdzięczamy B.J. Pettisowi [78] oraz S. Piccard [79].

---

<sup>1)</sup> Rezultat Erdösa-Sierpińskiego pozostaje prawdziwy również przy słabszym założeniu niż hipoteza continuum, o czym pisze L. Bukovský w swojej monografii [20, str. 264].

**Twierdzenie 3.** [78] *Jeśli  $A \subset \mathbb{R}$  jest zbiorem drugiej kategorii o własności Baire'a, to  $0 \in \text{int}(A - A)$ .*

**Twierdzenie 4.** [79] *Jeśli  $A, B \subset \mathbb{R}$  są zbiorami drugiej kategorii o własności Baire'a, to  $\text{int}(A + B) \neq \emptyset$ .*

W późniejszym czasie pojawiło się tak wiele uogólnień twierdzeń Steinhausa-Pettisa-Piccard, że nie sposób wszystkich wymienić. Najważniejsze z nich można znaleźć między innymi w następujących pracach: S. Kurepa [58], J.H.B. Kemperman [51], W. Orlicz - Z. Ciesielski [72], Z. Kominek [52], M.E. Kuczma - M. Kuczma [57], M.E. Kuczma [55]-[56], L. Paganoni [77], W. Sander [88], [90]-[92], J. Smítal - L. Snoha [94], J. Brzdęk [16], R. Rałowski - P. Szczepaniak - S. Żebrowski [82], A. Bartoszewicz - M. Filipczak - T. Natkaniec [8].

Rozszerzeniem miary Lebesgue'a na przypadek abelowych grup topologicznych lokalnie zwartych jest miara Haara. A. Weil [99] i A. Beck - H.H. Corson - A.B. Simon [9] wykazali, że twierdzenia Steinhausa pozostają prawdziwe w dowolnej lokalnie zwartej polskiej grupie abelowej.

**Twierdzenie 5.** [99] *Jeśli  $X$  jest polską grupą abelową lokalnie zwartą, zaś  $A \subset X$  zbiorem dodatniej miary Haara, to  $0 \in \text{int}(A - A)$ .*

**Twierdzenie 6.** [9] *Jeśli  $X$  jest polską grupą abelową lokalnie zwartą, zaś  $A, B \subset X$  zbiorami dodatniej miary Haara, to  $\text{int}(A + B) \neq \emptyset$ .*

Topologicznym odpowiednikiem powyższych twierdzeń jest rezultat L. Dubikajtisa - C. Ferensa - R. Gera - M. Kuczmy [32].

**Twierdzenie 7.** [32] *Jeśli  $X$  jest grupą topologiczną, zaś  $A, B \subset X$  są zbiorami drugiej kategorii o własności Baire'a, to  $\text{int}(A + B) \neq \emptyset$  oraz  $0 \in \text{int}(A - A)$ .*

W 1972 roku J.P.R. Christensen [22] zdefiniował zbiory zerowe Haara w polskich grupach abelowych, które niekoniecznie są lokalnie zwarte. W takich grupach miara Haara nie istnieje, dlatego J.P.R. Christensen w swojej definicji posłużył się  $\sigma$ -ciałem zbiorów uniwersalnie mierzalnych<sup>2)</sup>.

**Definicja 1.** Podzbiór  $A$  polskiej grupy abelowej  $X$  nazywany jest *zbiorem zerowym Haara* (ang. *Haar null set*), jeśli istnieje taki uniwersalnie mierzalny zbiór  $B \subset X$  zawierający  $A$  oraz taka probabilistyczna miara borelowska  $\mu$  na  $X$ , że  $\mu(x + B) = 0$  dla wszystkich  $x \in X$ .

Definicję tę rozszerzył później J. Mycielski [69] na przypadek grup nieprzemiennych. Ponadto G.R. Hunt - T. Sauer - J.A. Yorke [44]-[45] niezależnie od J.P.R. Christensena wprowadzili pojęcie zbiorów zerowych Haara, ale w abelowych grupach topologicznych metryzowalnych w sposób zupełny (niekoniecznie ośrodkowych).

W pracy [22] J.P.R. Christensen wykazał, że rodzina zbiorów zerowych Haara w polskiej grupie abelowej  $X$  (ozn.  $\mathcal{HN}_X$ ) tworzy  $\sigma$ -ideał oraz, przy dodatkowym założeniu lokalnej zwartości grupy  $X$ , pojęcie zbioru zerowego Haara jest równoważne pojęciu zbioru miary Haara zero. Ponadto udowodnił jedno z twierdzeń typu Steinhausa w przypadku dowolnej polskiej grupy abelowej.

---

<sup>2)</sup> Podzbiór grupy topologicznej  $X$  nazywamy uniwersalnie mierzalnym, jeśli jest mierzalny względem każdej zupełnej probabilistycznej miary borelowskiej w  $X$ .

**Twierdzenie 8.** [22] *Niech  $X$  będzie polską grupą abelową, zaś  $A \subset X$  uniwersalnie mierzalnym zbiorem niezerowym Haara. Wtedy zbiór*

$$F(A) := \{x \in X : (A + x) \cap A \notin \mathcal{HN}_X\}$$

*jest otoczeniem zera w  $X$ ; w konsekwencji  $0 \in \text{int}(A - A)$ .*

Okazało się, że drugiego twierdzenia Steinhausa (Twierdzenia 2) nie można przenieść na przypadek polskiej grupy abelowej, która nie jest lokalnie zwarta. Kontrprzykład w rzeczywistej przestrzeni ciągów zbieżnych do zera podali E. Matoušková i L. Zajíček [61] wykazując, że nieujemny stożek, tzn. zbiór

$$A := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0 : x_n \geq 0 \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}\},$$

jest domkniętym zbiorem niezerowym Haara spełniającym warunek  $\text{int}(A + A) = \emptyset$ . Później E. Matoušková i L. Zelený [62] podali konstrukcję domkniętych zbiorów niezerowych Haara  $A, B$  spełniających warunek  $\text{int}(A + B) = \emptyset$  w dowolnej polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta.

Na podstawie tej obserwacji można stwierdzić, że w polskich grupach abelowych, które nie są lokalnie zwarte, zbiory pierwszej kategorii Baire’a nie są „dobrym” odpowiednikiem topologicznym zbiorów zerowych Haara. Pojawia się więc pytanie: czy istnieje inna rodzina zbiorów „małych” w polskich grupach abelowych, która byłaby topologicznym odpowiednikiem zbiorów zerowych Haara?

U.B. Darji [26] zdefiniował rodzinę zbiorów topologicznie „małych” w polskiej grupie abelowej w następujący sposób.

**Definicja 2.** Niech  $X$  będzie polską grupą abelową. Zbiór  $A \subset X$  nazywamy zbiorem *pierwszej kategorii Haara* (ang. *Haar meager set*), jeśli istnieje taki zbiór borelowski  $B \subset X$  zawierający  $A$ , przestrzeń metryczna zwarta  $K$  oraz ciągła funkcja  $f : K \rightarrow X$ , że

$$(1) \quad f^{-1}(B + x) \text{ jest pierwszej kategorii Baire’a w } K \text{ dla każdego } x \in X.$$

Jednocześnie U.B. Darji wykazał, że rodzina zbiorów pierwszej kategorii Haara w polskiej grupie abelowej  $X$  (ozn.  $\mathcal{HM}_X$ ) tworzy  $\sigma$ -ideał zawarty w  $\sigma$ -ideale zbiorów pierwszej kategorii Baire’a. Ponadto udowodnił, że przy dodatkowym założeniu lokalnej zwartości grupy  $X$ , pojęcia zbioru pierwszej kategorii Haara oraz zbioru pierwszej kategorii Baire’a są równoważne, podczas gdy w przypadku grup, które nie są lokalnie zwarte, rodzina zbiorów pierwszej kategorii Baire’a jest istotnie większa (tzn. istnieje zbiór pierwszej kategorii Baire’a niebędący zbiorem pierwszej kategorii Haara).

Skoro w polskich grupach abelowych lokalnie zwartych zbiory pierwszej kategorii Baire’a są topologicznym odpowiednikiem zbiorów miary Haara zero, zaś rodziny zbiorów pierwszej kategorii Haara oraz zbiorów zerowych Haara są przeniesieniem tych pojęć na przypadek polskich grup abelowych (niekoniecznie lokalnie zwartych), to nasuwa się naturalna refleksja, że być może w dowolnej polskiej grupie abelowej rodzina zbiorów pierwszej kategorii Haara jest topologicznym odpowiednikiem rodziny zbiorów zerowych Haara.

Cykl prac [J1]-[J6] potwierdza intuicyjną sugestię. W pracach tych przedstawiłam wybrane analogie pomiędzy zbiorami zerowymi Haara a zbiorami pierwszej kategorii Haara.

Omówię teraz wyniki zawarte w pracach wchodzących w skład osiągnięcia. Zrezygnuję z kolejności chronologicznej.

# ZBIORY ZEROWE HAARA A ZBIORY PIERWSZEJ KATEGORII HAARA (PRACE [J3], [J6], [J5])

Zacznę od najważniejszych wyników z pracy [J3].

Głównym rezultatem tej pracy jest twierdzenie analogiczne do twierdzenia Christensena (Twierdzenia 8).

**Twierdzenie 9.** *Jeśli  $X$  jest polską grupą abelową, to  $0 \in \text{int}(A - A)$  dla każdego zbioru borelowskiego  $A \subset X$  niebędącego zbiorem pierwszej kategorii Haara.*

Jednocześnie w pracy zauważyłam, że nieujemny stożek w rzeczywistej przestrzeni  $c_0$  jest przykładem zbioru domkniętego, niebędącego zbiorem pierwszej kategorii Haara, spełniającego warunek  $\text{int}(A + A) = \emptyset$ . To potwierdza, że nie można przenieść twierdzenia Piccard (Twierdzenia 4) na przypadek zbiorów borelowskich  $A, B$  niebędących pierwszej kategorii Haara w polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta (podobnie jak Twierdzenia 2 nie można przenieść na przypadek uniwersalnie mierzalnych zbiorów niezerowych Haara). Ponadto, analizując dowód Twierdzenia 4 z pracy E. Matoušková'ej - M. Zelený'ego [62] zaobserwowałam, że skonstruowane przez autorów domknięte zbiory  $A, B$  spełniające warunek  $\text{int}(A + B) = \emptyset$  w dowolnej polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta mają tę własność, że zawierają pewne przesunięcie każdego zbioru zwartego, a więc nie są pierwszej kategorii Haara. Oznacza to, że Twierdzenie 4 nie jest prawdziwe dla zbiorów borelowskich niebędących zbiorami pierwszej kategorii Haara w żadnej polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta.

Jako konsekwencję z Twierdzenia 9 otrzymałam fakt, że w polskich grupach abelowych, które nie są lokalnie zwarte, każdy zbiór  $\sigma$ -zwarty jest zbiorem pierwszej kategorii Haara, co wraz z rezultatem J.P.R. Christensena pokazuje, że w takich grupach zbiory  $\sigma$ -zwarte są „małe” w obu znaczeniach (Darji'ego i Christensena). Z drugiej strony w polskiej grupie abelowej zbiór borelowski zawierający pewne przesunięcie każdego zbioru zwartego jest „duży” w obu znaczeniach (tzn. nie jest ani zbiorem zerowym Haara, ani zbiorem pierwszej kategorii Haara). W ten sposób pojawiło się naturalne pytanie o istnienie zbioru pierwszej kategorii Haara, który jednocześnie nie jest zbiorem zerowym Haara, lub odwrotnie - zbioru zerowego Haara, który nie jest pierwszej kategorii Haara.

Aby odpowiedzieć na to pytanie w szczególnym przypadku przestrzeni ciągłych  $c_0$ ,  $c$  lub  $l_p$  (gdzie  $p \geq 1$ ), udowodniłam najpierw, że:

- produkt kartezjański zbiorów pierwszej kategorii Haara w polskich grupach abelowych  $X$  i  $Y$  jest zbiorem pierwszej kategorii Haara w  $X \times Y$ ;
- produkt kartezjański borelowskiego zbioru zawierającego pewne przesunięcie każdego zbioru zwartego w polskiej grupie abelowej  $X$  oraz borelowskiego zbioru niebędącego pierwszej kategorii Haara w polskiej grupie abelowej  $Y$  nie jest zbiorem pierwszej kategorii Haara w  $X \times Y$ .

Następnie wykorzystałam powyższe rezultaty, aby w przestrzeniach  $c_0$ ,  $c$  lub  $l_p$  ( $p \geq 1$ ) skonstruować przykłady:

- zbioru zerowego Haara niebędącego zbiorem pierwszej kategorii Haara, który jest jednocześnie pierwszej kategorii Baire;

- zbioru pierwszej kategorii Haara, który nie jest zbiorem zerowym Haara,

co nawiązywało do problemów sformułowanych przez Darji'ego (zob. [26, Problems 4,5]).

Praca [J6] poświęcona jest rezultatom analogicznym do wyników otrzymanych przez Z. Gajdę w [37]. Aby wykazać, że mierzalność w sensie Christensena<sup>3)</sup> funkcji  $n$ -wypukłych lub funkcji wielomianowych  $n$ -tego rzędu<sup>4)</sup> implikuje ich ciągłość, udowodnił on pewne twierdzenie typu Steinhausa. Dokładniej, wykazał, że w polskiej grupie abelowej  $X$  zbiór

$$(2) \quad \{x \in X : \bigcap_{k \in \{-n, \dots, n\}} (A + kx) \notin \mathcal{HN}_X\}$$

jest otwarty (niekoniecznie niepusty) dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  oraz każdego zbioru uniwersalnie mierzalnego  $A \subset X$ . Jeśli ponadto  $A \notin \mathcal{HN}_X$ , to zbiór (2) jest otoczeniem zera w  $X$ ; w konsekwencji

$$(3) \quad 0 \in \text{int} \left\{ x \in X : \bigcap_{j=1}^n \left[ \left( A - \frac{x}{j} \right) \cap \left( A + \frac{x}{j} \right) \right] \neq \emptyset \right\}.$$

Głównym wynikiem pracy [J6] jest rezultat typu Pettisa-Piccard analogiczny do powyższego twierdzenia.

**Twierdzenie 10.** *W polskiej grupie abelowej  $X$  zbiór*

$$F_n(A) := \{x \in X : \bigcap_{k \in \{-n, \dots, n\}} (A + kx) \notin \mathcal{HM}_X\}$$

*jest otwarty (niekoniecznie niepusty) dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  oraz każdego zbioru borelowskiego  $A \subset X$ . Jeśli ponadto  $A \notin \mathcal{HM}_X$ , to zbiór  $F_n(A)$  jest otoczeniem zera w  $X$  oraz warunek (3) jest spełniony.*

J.P.R. Christensen i P. Fischer w [23] udowodnili twierdzenie typu Christensena wykazując, że w przypadku polskiej grupy abelowej  $X$ , zbiór

$$\{(x_1, \dots, x_N) \in X^N : A \cap \bigcap_{i=1}^N (A + x_i) \notin \mathcal{HN}_X\}$$

jest otoczeniem zera w  $X^N$  dla każdego  $N \in \mathbb{N}$  oraz zbioru uniwersalnie mierzalnego  $A \notin \mathcal{HN}_X$ . W pracy [J5] przeprowadziłam dowód twierdzenia analogicznego.

**Twierdzenie 11.** *Dla każdego  $N \in \mathbb{N}$  oraz zbioru borelowskiego  $A \notin \mathcal{HM}_X$  zbiór*

$$\{(x_1, \dots, x_N) \in X^N : A \cap \bigcap_{i=1}^N (A + x_i) \notin \mathcal{HM}_X\}$$

*jest otoczeniem zera w  $X^N$ .*

---

<sup>3)</sup> Szczegółowy opis mierzalności w sensie Christensena znajduje się na str. 8 niniejszego autoreferatu.

<sup>4)</sup> Funkcję  $f : D \rightarrow Y$  odwzorowującą niepusty, wypukły, otwarty podzbiór  $D$  rzeczywistej polskiej przestrzeni liniowej w częściowo uporządkowaną przestrzeń unormowaną  $Y$  nazywamy  $n$ -wypukłą (z ustalonym  $n \in \mathbb{N}$ ) względem właściwego stożka  $S$ , jeśli

$$\Delta_h^{n+1} f(x) := \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x + jh) \geq 0$$

dla wszystkich  $x \in D$  oraz  $h \in S$  spełniających warunek  $x + ih \in D$  dla  $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ . Jeśli  $Y$  jest przestrzenią liniowo-topologiczną (niekoniecznie unormowaną i uporządkowaną), zaś  $\Delta_h^{n+1} f(x) = 0$  dla  $x \in D$  i  $h \in X$  spełniających warunek  $x + ih \in D$  dla  $i \in \{0, 1, \dots, n+1\}$ , to  $f$  nazywamy funkcją wielomianową  $n$ -tego rzędu.

Ponadto sformułowałam twierdzenie analogiczne do rezultatu P. Dodosa z pracy [28]. Dokładniej, P. Dodos udowodnił, że jeśli  $G$  jest  $\sigma$ -zwartą podgrupą polskiej grupy abelowej  $X$ , która nie jest lokalnie zwarta, to istnieje taki  $G$ -niezmienniczy zbiór  $F$  typu  $F_\sigma$  w  $X$ , że ani zbiór  $F$ , ani zbiór  $X \setminus F$  nie jest zbiorem zerowym Haara. Twierdzenie z pracy [J5] głosi, że przy tych samych założeniach o  $G$  i  $X$  istnieje taki  $G$ -niezmienniczy zbiór  $F$  typu  $F_\sigma$  w  $X$ , że żaden ze zbiorów  $F$  i  $X \setminus F$  nie jest zbiorem pierwszej kategorii Haara.

Omawiając własności zbiorów zerowych Haara nie można nie wspomnieć o pracach [59], [60], w których E. Matoušková i C. Stegall udowodnili, że:

- każda nierefleksywna ośrodkowa przestrzeń Banacha<sup>5)</sup> zawiera pewien domknięty wypukły podzbiór o pustym wnętrzu, który zawiera pewne przesunięcie każdego zbioru zwartego, a w konsekwencji nie jest zerowy Haara;
- w każdej superrefleksywnej ośrodkowej przestrzeni Banacha<sup>6)</sup> sytuacja jest odmienna, a mianowicie wszystkie domknięte wypukłe zbiory nigdziegęste są zbiorami zerowymi Haara.

Do tej pory nie wiadomo, co się dzieje z domkniętymi zbiorami wypukłymi o pustym wnętrzu w refleksyjnych ośrodkowych przestrzeniach Banacha.

Ponieważ zbiór zawierający pewne przesunięcie każdego zbioru zwartego nie jest pierwszej kategorii Haara, zaś T. Banach [4] udowodnił, że każdy domknięty zbiór zerowy Haara jest zbiorem pierwszej kategorii Haara, więc z rezultatu E. Matoušková'ej i C. Stegalla otrzymujemy natychmiast fakt do niego analogiczny, a więc:

- każda nierefleksywna ośrodkowa przestrzeń Banacha zawiera domknięty wypukły podzbiór o pustym wnętrzu, który nie jest pierwszej kategorii Haara;
- w każdej superrefleksywnej ośrodkowej przestrzeni Banacha wszystkie domknięte wypukłe zbiory nigdziegęste są pierwszej kategorii Haara.

## MIERZALNOŚĆ W SENSIE CHRISTENSENA A $\mathcal{D}$ -MIERZALNOŚĆ I ICH ZASTOSOWANIE W RÓWNANIACH FUNKCYJNYCH (PRACE [J1], [J2], [J4])

W 1980 roku P. Fischer i Z. Słodkowski [35] wprowadzili pojęcie mierzalności w sensie Christensena.

**Definicja 3.** Niech  $X$  będzie polską grupą abelową. Zbiór  $A \subset X$  nazywany jest *zbiorem mierzalnym w sensie Christensena*, jeśli jest sumą mnogościową pewnego zbioru uniwersalnie mierzalnego w  $X$  oraz zbioru zerowego Haara w  $X$ .

Ponadto P. Fischer i Z. Słodkowski wykazali, że rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Christensena w polskiej grupie abelowej jest  $\sigma$ -ciałem. Dzięki temu w naturalny sposób wprowadzili pojęcie funkcji mierzalnej w sensie Christensena.

<sup>5)</sup> np.  $c_0$ ,  $c$ ,  $l^1$ ,  $l^\infty$ ,  $L^1([0, 1])$ ,  $L^\infty([0, 1])$ ,  $C([a, b])$

<sup>6)</sup> np.  $l^p$ ,  $L^p([0, 1])$  dla  $p \in (1, \infty)$

**Definicja 4.** Niech  $X$  będzie polską grupą abelową, zaś  $Y$  przestrzenią topologiczną. Funkcja  $f : X \rightarrow Y$  nazywamy *funkcją mierzalną w sensie Christensena*, jeśli  $f^{-1}(U)$  jest zbiorem mierzalnym w sensie Christensena dla każdego zbioru otwartego  $U \subset Y$ .

Autorzy wykazali też, że jeśli  $X$  jest rzeczywistą polską przestrzenią liniową, zaś  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest mierzalną w sensie Christensena funkcją addytywną lub mierzalną w sensie Christensena funkcją wypukłą w sensie Jensena<sup>7)</sup>, to  $f$  jest ciągła. Rezultaty te stanowiły inspirację dla wielu autorów prac z teorii równań i nierówności funkcyjnych, w których analizowano rozwiązania pewnych problemów w klasie funkcji mierzalnych w sensie Christensena. Badania te zainicjowali między innymi: Z. Gajda [37]-[38], J.P.R. Christensen - P. Fischer [23], R. Ger [39]-[40], K. Nikodem [70, str. 39], Z. Kominek [53], K. Baron - PL. Kannappan [6]-[7], J. Brzdęk [15].

W publikacji [J3] w analogiczny sposób zdefiniowałam zbiory  $\mathcal{D}$ -mieralne.

**Definicja 5.** Niech  $X$  będzie polską grupą abelową. Zbiór  $A \subset X$  nazywamy  $\mathcal{D}$ -mieralnym, jeśli jest sumą mnogościową pewnego zbioru borelowskiego w  $X$  oraz zbioru pierwszej kategorii Haara w  $X$ .

Następnie wykazałam, że rodzina zbiorów  $\mathcal{D}$ -mieralnych jest  $\sigma$ -ciałem. Zatem  $\mathcal{D}$ -mieralność jest pojęciem analogicznym do mierzalności w sensie Christensena w polskich grupach abelowych, które niekoniecznie są lokalnie zwarte.

Oczywiście Twierdzenia 9, 10, 11 (typu Piccard) pozostaną prawdziwe, jeśli  $\sigma$ -ciało zbiorów borelowskich zastąpimy  $\sigma$ -ciałem zbiorów  $\mathcal{D}$ -mieralnych.

Przed omówieniem dalszych wyników przypomnę, że twierdzenia typu Steinhausa-Pettisa-Piccard znalazły istotne zastosowania w teorii równań i nierówności funkcyjnych. Wykorzystując Twierdzenia 2 oraz 4 można udowodnić takie klasyczne rezultaty jak te, że funkcja addytywna, czy funkcja wypukła w sensie Jensena, która jest ograniczona z góry na zbiorze drugiej kategorii o własności Baire'a lub miary dodatniej Lebesgue'a, jest ciągła (zob. M.R. Mehdi [63], A. Ostrowski [75], jak również R. Ger - M. Kuczma [41], M. Kuczma [54, str. 210]). Powszechnie wiadomo też, że aby pokazać ciągłość funkcji addytywnych lub funkcji wypukłych w sensie Jensena, ograniczonych albo na zbiorze drugiej kategorii o własności Baire'a, albo dodatniej miary Lebesgue'a, wystarczy skorzystać z Twierdzeń 1 i 3.

Ponieważ Twierdzenia 2 oraz 4 nie są prawdziwe w przypadku uniwersalnie mierzalnych zbiorów niezerowych Haara czy zbiorów borelowskich, które nie są pierwszej kategorii Haara, więc naturalnym wydaje się być pytanie: *czy funkcja wypukła w sensie Jensena, bądź funkcja addytywna, ograniczona z góry na mierzalnym w sensie Christensena zbiorze niezerowym Haara (lub na zbiorze  $\mathcal{D}$ -mieralnym, który nie jest pierwszej kategorii Haara) musi być ciągła?* Problem ten dla mierzalnego w sensie Christensena zbioru niezerowego Haara sformułowali K. Baron i R. Ger podczas „The 21st International Symposium on Functional Equations” (1983, Konolfingen, Switzerland) (zob. [5]).

W nawiązaniu do powyższego problemu, w pracy [J1] udowodniłam, że jeśli  $X$  jest rzeczywistą polską przestrzenią liniową, to funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  wypukła w sensie Jensena, która jest ograniczona z góry na pewnym mierzalnym w sensie Christensena zbiorze niezerowym Haara, musi być wypukła, a więc spełniać warunek:

$$(4) \quad f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

---

<sup>7)</sup> tzn. spełniającą nierówność  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$  dla wszystkich  $x, y$  z dziedziny funkcji  $f$

dla wszystkich  $x, y \in X$  i  $t \in [0, 1]$ . Wnioskiem płynącym z tego twierdzenia jest fakt, że funkcja addytywna  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ograniczona z góry na mierzalnym w sensie Christensena zbiorze niezerowym Haara jest funkcją liniową. W dowodach tych wyników pomocny okazał się lemat J. Brzdęka z pracy [18]. I chociaż w pracy [J1] problem K. Barona i R. Gera nie został rozwiązany, to metoda dowodowa została później zmodyfikowana przez A. Olbryśa [71] w taki sposób, że otrzymał on wynik jeszcze bardziej zbliżający nas do rozwiązania problemu. Dokładniej, uogólniając wykorzystany w pracy [J1] lemat J. Brzdęka udowodnił on, że jeśli  $D$  jest niepustym wypukłym i otwartym podzbiorem rzeczywistej polskiej przestrzeni liniowej, to każda wypukła w sensie Jensena funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , dla której zbiór  $f^{-1}((-\infty, M))$  jest niezerowy Haara mierzalny w sensie Christensena z pewnym  $M \in \mathbb{R}$ , jest ciągła<sup>8)</sup>. Wykazał też, że przy tych samych założeniach o zbiorze  $D$  każda funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$   $t$ -wypukła w sensie Wrighta, tzn. spełniająca (4) dla wszystkich  $x, y \in D$  z ustalonym  $t \in (0, 1)$ , która jest ograniczona na mierzalnym w sensie Christensena zbiorze niezerowym Haara, musi być ciągła.

W pracy [J4] otrzymałam rezultaty analogiczne do wyżej wspomnianych wyników A. Olbryśa dla zbiorów  $\mathcal{D}$ -mierzalnych niebędących pierwszej kategorii Haara. Mianowicie udowodniłam, że dla niepustego wypukłego otwartego podzbioru  $D$  rzeczywistej polskiej przestrzeni liniowej, jeśli  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  jest taką funkcją wypukłą w sensie Jensena, że dla pewnego  $M \in \mathbb{R}$  zbiór  $f^{-1}((-\infty, M))$  jest  $\mathcal{D}$ -mierzalny, a jednocześnie nie jest pierwszej kategorii Haara, to  $f$  jest ciągła. Ponadto wykazałam, że każda  $t$ -wypukła w sensie Wrighta funkcja  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ograniczona na zbiorze  $\mathcal{D}$ -mierzalnym, który nie jest pierwszej kategorii Haara, jest ciągła. Aby jednak uzyskać wspomniane wyniki, udowodniłam najpierw lemat analogiczny do lematu Olbryśa.

**Lemat 1.** *Niech  $X$  będzie rzeczywistą polską przestrzenią liniową,  $A \subset X$  będzie zbiorem borelowskim, który nie jest pierwszej kategorii Haara, zaś  $x \in X \setminus \{0\}$ . Wtedy istnieje taki zbiór borelowski  $B \subset A$ , że  $k_x^{-1}(B + z)$  jest zbiorem drugiej kategorii o własności Baire’a w  $\mathbb{R}$  dla każdego  $z \in X$ , gdzie  $k_x : \mathbb{R} \rightarrow X$  jest funkcją określoną wzorem  $k_x(\alpha) := \alpha x$  dla  $\alpha \in \mathbb{R}$ .*

Oczywiście, zastępując Lemat 1 w pracy [J1] przez powyższy lemat, można otrzymać następujący rezultat, analogiczny do wyniku z pracy [J1].

**Twierdzenie 12.** *Jeśli  $X$  jest rzeczywistą polską przestrzenią liniową, to:*

- *każda wypukła w sensie Jensena funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ograniczona z góry na zbiorze  $\mathcal{D}$ -mierzalnym, który nie jest pierwszej kategorii Haara, jest wypukła;*
- *każda funkcja addytywna  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  ograniczona z góry na zbiorze  $\mathcal{D}$ -mierzalnym, który nie jest pierwszej kategorii Haara, jest liniowa.*

Twierdzenia Steinhausa i Piccard (Twierdzenia 2 oraz 4) okazały się również bardzo użyteczne w charakteryzacji rozwiązań równań funkcyjnych typu Gołaba-Schinzla.

Równanie Gołaba-Schinzla

$$(5) \quad f(x + f(x)y) = f(x)f(y)$$

po raz pierwszy rozważane było w 1959 roku w związku z zagadnieniem wyznaczania podgrup grupy przekształceń centroafinicznych płaszczyzny (zob. [42]). W późniejszym czasie okazało się,

<sup>8)</sup> A. Olbryś sformułował to twierdzenie nieco inaczej, jako rozwiązanie problemu K. Barona i R. Gera, jednak z mojej analizy dowodu wynika, że twierdzenie Olbryśa nie jest prawdziwe. Nie umniejsza to jednak wartości całej pracy [71] poświęconej przede wszystkim funkcjom  $t$ -wypukłym w sensie Wrighta.

że równanie to ma również zastosowanie przy badaniu podpółgrup grupy przekształceń afinicznych prostej lub płaszczyzny, w wyznaczaniu podgrup grupy  $L_2^1$ , w klasyfikacji quasi-algebr oraz „prawie”-pierścieni, w charakteryzacji działań łącznych, czy w rozwiązywaniu równań różniczkowych pojawiających się w meteorologii i mechanice płynów (więcej informacji na ten temat zawiera praca przeglądowa J. Brzdęka [17]). W ostatnim czasie N.H. Bingham i A. Ostaszewski [10], [73] wykazali, że równanie Gołąba-Schinza jest ściśle związane z wykorzystywanymi w probabilistyce funkcjami o regularnej zmienności Beurlinga.

Wyznaczanie rozwiązań równania Gołąba-Schinza jest możliwe przy pewnych dodatkowych założeniach regularnościowych o niewiadomej funkcji  $f$ . Jedynym założeniem trywializującym szukanie rzeczywistych rozwiązań równania (5) jest różnowartościowość funkcji  $f$ ; wszystkie inne założenia regularnościowe znacznie komplikują poszukiwanie rozwiązań tego równania. Początkowo scharakteryzowano rozwiązania równania (5) przy założeniu ciągłości czy mierzalności w sensie Lebesgue’a (zob. [42], [81]). W późniejszym czasie J. Brzdęk badał następujące równanie typu Gołąba-Schinza

$$(6) \quad f(x + f(x)^k y) = f(x)f(y)$$

z pewnym  $k \in \mathbb{N}$ , przy założeniu ciągłości, mierzalności w sensie Christensena lub Baire’a, własności Darboux, ograniczoności na zbiorze drugiej kategorii o własności Baire’a, czy innych założeniach regularnościowych (obszerna bibliografia na ten temat znajduje się we wspomnianej już pracy przeglądowej J. Brzdęka [17]). Poszukiwanie możliwie słabych założeń gwarantujących ciągłość rozwiązań pewnych równań funkcyjnych nawiązuje do drugiej części piątego problemu Hilberta (zob. [1], [43]).

W pracy [J2], w odpowiedzi na problem J. Brzdęka z pracy [17], scharakteryzowałam rozwiązania równania typu Gołąba-Schinza

$$(7) \quad f(x + M(f(x))y) = f(x)f(y)$$

w klasie takich niewiadomych funkcji  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  i  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $X$  jest rzeczywistą polską przestrzenią liniową, że  $f$  jest ograniczona na pewnym mierzalnym w sensie Christensena zbiorze niezerowym Haara  $D \subset X$ , dla którego  $0 \notin f(D)$ . Pokazałam, że takie funkcje  $f$  i  $M$  spełniają równanie (7) wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z następujących warunków jest spełniony:

- (i)  $f = 1$ ;
- (ii)  $M|_{(0,\infty)} = 1$  i  $f = \exp h$  dla pewnego nietrywialnego funkcjonału liniowego  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- (iii) istnieje taki nietrywialny funkcjonał liniowy  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz takie  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , że  $f, M$  mają postać:

$$f(x) = \begin{cases} |h(x) + 1|^c \operatorname{sgn}(h(x) + 1), & x \in X, h(x) \neq -1; \\ 0, & x \in X, h(x) = -1, \end{cases}$$

$$M(y) = |y|^{\frac{1}{c}} \operatorname{sgn} y, \quad y \in \mathbb{R}$$

lub

$$f(x) = \begin{cases} (h(x) + 1)^c, & x \in X, h(x) > -1; \\ 0, & x \in X, h(x) \leq -1, \end{cases}$$

$$M(y) = y^{\frac{1}{c}}, \quad y \in [0, \infty).$$

Trudność w scharakteryzowaniu rozwiązań polegała na tym, że analogiczny wynik dla zbioru drugiej kategorii o własności Baire’a i równania (6) został uzyskany przez J. Brzdęka [18] dzięki zastosowaniu Twierdzenia 4, które nie jest prawdziwe dla mierzalnych w sensie Christensena zbiorów niezerowych Haara (o czym wspominałam już wcześniej). Ponadto rozszerzenie (7) równania Gołąba-Schinzla jest znacznie trudniejsze w rozważaniach w związku z występującymi w nim dwiema funkcjami niewiadomymi.

Łatwo zauważyć, że jeśli w metodzie dowodowej z pracy [J2] w miejscu Lematów 6, 7, 8 skorzystamy odpowiednio z Twierdzenia 9, Lematu 1 oraz Twierdzenia 12, to otrzymamy następujący rezultat, analogiczny do tego z pracy [J2].

**Twierdzenie 13.** *Niech  $X$  będzie rzeczywistą polską przestrzenią liniową,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  oraz niech  $f$  będzie ograniczona na takim zbiorze  $\mathcal{D}$ -mierzalnym niebędącym pierwszej kategorii Haara  $D \subset X$ , że  $0 \notin f(D)$ . Wówczas funkcje  $f, M$  spełniają równanie (7) wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z powyższych warunków (i)-(iii) jest spełniony.*

## DALsze BADANIA INNYCH AUTORÓW

Poszukiwanie analogii pomiędzy zbiorami zerowymi Haara a zbiorami pierwszej kategorii Haara w polskich grupach abelowych, zapoczątkowane w 2013 roku przez U.B. Darji’ego i kontynuowane w pracach [J3]-[J6], okazało się bardzo interesujące również dla innych matematyków. M. Doleżal - M. Rmoutil - B. Vejnar - V. Vlasák [30] udowodnili między innymi, że każdą przestrzeń Banacha, jak również przestrzeń  $\mathbb{R}^\omega$ , można przedstawić w postaci rozłącznej sumy zbioru pierwszej kategorii Haara i zbioru zerowego Haara, co jest uogólnieniem dobrze znanego twierdzenia o rozkładzie prostej na dwa zbiory „małe”: zbiór miary Lebesgue’a zero i zbiór pierwszej kategorii Baire’a (zob. [76, str. 4]). W tej samej pracy autorzy wykazali, że istnieje taki zbiór niezerowy Haara  $C \subset \mathbb{Z}^\omega \times \mathbb{Z}^\omega$ , niebędący zbiorem pierwszej kategorii Haara, że wszystkie cięcia tego zbioru  $C[t] := \{s \in \mathbb{Z}^\omega : (s, t) \in C\}$  dla  $t \in \mathbb{Z}^\omega$  są zbiorami pierwszej kategorii Haara i zerowymi Haara w  $\mathbb{Z}^\omega$ . Oznacza to, że dobrze znane twierdzenie Fubini’ego oraz jego topologiczny odpowiednik - twierdzenie Kuratowskiego-Ulana (zob. [76, str. 52-57]), nie mogą być przeniesione na przypadek grup, które nie są lokalnie zwarte. Ponadto takie dobrze znane fakty jak te, że każdy zbiór pierwszej kategorii Baire’a jest zawarty w pewnym zbiorze  $F_\sigma$  pierwszej kategorii Baire’a oraz każdy zbiór miary Lebesgue’a zero jest zawarty w pewnym zbiorze  $G_\delta$  miary Lebesgue zero, nie mogą być przeniesione na przypadek grup, które nie są lokalnie zwarte. Dokładniej, M. Elekes - Z. Vindyánszky [33] udowodnili, że w każdej polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta, istnieje zbiór zerowy Haara, który nie jest zawarty w żadnym zbiorze zerowym Haara typu  $G_\delta$ , natomiast M. Doleżal - V. Vlászak [31] wykazali, że w takiej grupie istnieje zbiór pierwszej kategorii Haara, który nie zawiera się w żadnym zbiorze pierwszej kategorii Haara typu  $F_\sigma$ .

Kontynuując swoje badania zauważyłam też, że w definicji Darji’ego można zredukować jeden parametr poświadczający, a mianowicie przestrzeń metryczną zwartą.

**Proposition 1.** *Zbiór borelowski  $B \subset G$  jest pierwszej kategorii Haara wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka funkcja ciągła  $f : 2^\omega \rightarrow G$ , że  $f^{-1}(B + g)$  jest pierwszej kategorii Baire’a w  $2^\omega$  dla każdego  $g \in G$ .*

*Dowód.* Załóżmy, że istnieje przestrzeń metryczna zwarta  $M$  i ciągła funkcja  $h : M \rightarrow G$ , dla których zbiór  $h^{-1}(B + g)$  jest pierwszej kategorii Baire’a w  $M$  dla dowolnego  $g \in G$ . Z [26,

Lemat 2.10] wynika, że istnieje taka ciągła funkcja  $f$  odwzorowująca zbiór Cantora  $C$  na zbiór  $M$ , że  $f^{-1}(T)$  jest pierwszej kategorii Baire'a w  $C$  dla każdego zbioru pierwszej kategorii Baire'a  $T \subset M$ . Stąd funkcja  $h \circ f : C \rightarrow G$  jest ciągła i zbiór  $(h \circ f)^{-1}(B + g)$  jest pierwszej kategorii Baire'a w  $C$  dla każdego  $g \in G$ . Ponieważ  $2^\omega$  jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora  $C$ , otrzymujemy tezę. Implikacja przeciwna jest oczywista.  $\square$

Rezultat ten pozwolił mi na naturalną modyfikację definicji T. Banakha [4] zbiorów rezydualnie pierwszej kategorii Haara (ang. *generically Haar meager set*), która jest analogiczna do wprowadzonej przez P. Dodosa [27]–[29] definicji zbiorów rezydualnie zerowych Haara (ang. *generically Haar null set*). Następnie, wspólnie z T. Banakhem wykazaliśmy równoważność obu definicji zbiorów rezydualnie pierwszej kategorii Haara (mojej i T. Banakha) oraz udowodniliśmy pewne własności zbiorów rezydualnie pierwszej kategorii Haara, które są analogiczne do otrzymanych przez P. Dodosa własności zbiorów rezydualnie zerowych Haara. Wszystkie wspomniane rezultaty zostaną zawarte w publikacji przygotowywanej wspólnie z T. Banakhem.

## 5. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze.

Lista publikacji nie wchodzących w skład osiągnięcia wymienionego w punkcie 4.:

- [J7] E. Jabłońska, *On solutions of a generalization of the Gołqb–Schinzel equation*, Aequationes Math. 71 (2006), 269–279.
- [J8] E. Jabłońska, *Continuity of Lebesgue measurable solutions of a generalized Gołqb–Schinzel equation*, Demonstratio Math. 39 (2006), 91–96.
- [J9] E. Jabłońska, *A short note concerning solutions of a generalization of the Gołqb–Schinzel equation*, Aequationes Math. 74 (2007), 318–320.
- [J10] E. Jabłońska, *One-to-one solutions of a generalized Gołqb–Schinzel functional equation*, Demonstratio Math. 41 (2008), 583–588.
- [J11] E. Jabłońska, *Solutions of some functional equation bounded on nonzero Christensen measurable sets*, Acta Math. Hungar. 125 (2009), 113–119.
- [J12] E. Jabłońska, *Functions having the Darboux property and satisfying some functional equation*, Colloq. Math. 114 (2009), 113–118.
- [J13] E. Jabłońska, *Bounded solutions of a generalization of the Gołqb–Schinzel equation*, Demonstratio Math. 42 (2009), 533–547.
- [J14] E. Jabłońska, *Baire measurable solutions of a generalized Gołqb–Schinzel equation*, Comment. Math. 50 (2010), 69–72.
- [J15] E. Jabłońska, *Christensen measurable solutions of some functional equation*, Nonlinear Anal. 72 (2010), 2465–2473.
- [J16] E. Jabłońska, *Solutions of a Gołqb–Schinzel type functional equation bounded on "big" sets in an abstract sense*, Bull. Aust. Math. Soc. 81 (2010), 430–441.
- [J17] E. Jabłońska, *Continuous on rays solutions of an equation of the Gołqb–Schinzel type*, J. Math. Anal. Appl. 375 (2011), 223–229.

- [J18] E. Jabłońska, *The periderized Gółqb-Schinzel functional equation*, J. Math. Anal. Appl. 381 (2011), 565-572.
- [J19] E. Jabłońska, *Remarks concerning the periderized Gółqb-Schinzel functional equation*, J. Math. Appl. 35 (2012), 33-38.
- [J20] E. Jabłońska, *On solutions of some generalizations of the Gółqb-Schinzel equation*, rozdział w monografii „Functional Equations in Mathematical Analysis” pod redakcją J. Brzdęka i Th.M. Rassiasa, Springer Optimization and its Applications vol. 52, Springer, New York-Dordrecht-Heidelberg-London 2012, 509-521.
- [J21] E. Jabłońska, *On continuous solutions of an equation of the Gółqb-Schinzel type*, Bull. Aust. Math. Soc. 87 (2013), 10-17.
- [J22] E. Jabłońska, *On locally bounded above solutions of an equation of the Gółqb-Schinzel type*, Aequationes Math. 87 (2014), 125-133.
- [J23] E. Jabłońska, *On continuous on rays solutions of a composite-type equation*, Aequationes Math. 89 (2015), 583-590.
- [J24] E. Jabłońska, *On solutions of a composite type functional inequality*, Math. Inequal. Appl. 18 (2015), 207-215.
- [J25] A. Bahyrycz, J. Brzdęk, E. Jabłońska, J. Olko, *On functions that are approximate fixed points almost everywhere and Ulam’s type stability*, J. Fixed Point Theory Appl. 17 (2015), 659-668.
- [J26] J. Brzdęk, E. Jabłońska, M.S. Moslehian, P. Pacho, *On stability of a functional equation of quadratic type*, Acta Math. Hungar. 149 (2016), 160-169.
- [J27] A. Bahyrycz, J. Brzdęk, E. Jabłońska, R. Malejki, *Ulam’s stability of a generalization of the Fréchet functional equation*, J. Math. Anal. Appl. 442 (2) (2016), 537-553.
- [J28] A. Bahyrycz, J. Brzdęk, E. Jabłońska, *On extensions of the generalized cosine functions from some large sets*, Publ. Math. Debrecen 89/3 (2016), 263-275.
- [J29] J. Brzdęk, E. Jabłońska, *On extensions of the generalised Jensen functions on semigroups*, Bull. Aust. Math. Soc. doi:10.1017/S0004972716001337 (w druku).

Przejdę teraz do omówienia najważniejszych wyników opublikowanych w wyżej wymienionych pracach.

## PRACE OPUBLIKOWANE PRZED DOKTORATEM

Prace [J7]-[J9] zostały opublikowane przed uzyskaniem stopnia doktora.

W pracy [J8] podałam pełny opis rozwiązań równania funkcyjnego

$$(8) \quad f(x + f(x)^k y) = f(x)f(y)$$

z ustalonym  $k \in \mathbb{N}$ , w klasie funkcji  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ograniczonych na takim zbiorze miary dodatniej Lebesgue’a  $D \subset \mathbb{R}^n$ , że  $0 \notin f(D)$ .

Natomiast prace [J7], [J9] dotyczą rozwiązań równania funkcyjnego

$$(9) \quad f(x + M(f(x)y)) = f(x)f(y)$$

przy założeniu, że  $X$  jest rzeczywistą przestrzenią liniową,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M \circ f \neq M(1)$  oraz zbiór  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  zawiera punkt algebraicznie wewnętrzny<sup>9)</sup>. Dokładniej, podałam warunek konieczny i wystarczający na to, aby takie funkcje  $f, M$  spełniały równanie (9).

Pozostałe prace (opublikowane po uzyskaniu stopnia doktora) można podzielić na trzy grupy. Pierwszą, najliczniejszą z nich, tworzą prace dotyczące rozwiązań równań i nierówności typu Gołaba-Schinzla, drugą - prace na temat stabilności wybranych równań funkcyjnych, zaś trzecią - prace na temat rozszerzalności rozwiązań warunkowych równań funkcyjnych.

## ROZWIĄZANIA RÓWNANIA TYPU GOŁABA-SCHINZLA

$$F(x + F(x)^k y) = F(x)F(y)$$

Prace [J11], [J14] dotyczą w dalszym ciągu rozwiązań równania (8) (z pewnym  $k \in \mathbb{N}$ ), które, jak już wcześniej wspominałam, intensywnie było badane przez J. Brzdęka.

W pracy [J11] rozwiązałam problem sformułowany przez J. Brzdęka w [17], jednak tylko w przypadku rzeczywistej przestrzeni liniowej  $X$  (problem ten w przypadku zespolonym pozostał nierozwiązany do dziś). Dokładniej, udowodniłam, że jeśli  $X$  jest rzeczywistą polską przestrzenią liniową, zaś funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest ograniczona na takim mierzalnym w sensie Christensena zbiorze niezerowym Haara  $D \subset X$ , że  $0 \notin f(D)$  i  $f$  spełnia równanie (8), to istnieje ciągły funkcjonal liniowy  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ , dla którego:

- w przypadku  $k$  nieparzystego  $f$  jest funkcją określoną jednym ze wzorów:

$$(10) \quad f(x) = \sqrt[k]{g(x) + 1}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

lub

$$(11) \quad f(x) = \sqrt[k]{\max\{0, g(x) + 1\}}, \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

- w przypadku parzystego  $k$  funkcja  $f$  ma postać (11).

Rezultat ten jest szczególnym przypadkiem omówionego wcześniej wyniku z pracy [J2].

Z kolei w pracy [J14] uogólniłam twierdzenia z pracy [18], w której J. Brzdęk rozważał rozwiązania  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  równania (8) mierzalne w sensie Baire'a lub ograniczone na zbiorze drugiej kategorii o własności Baire'a przy założeniu, że  $X$  jest polską przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Aby wykazać, że założenia zupełności i metryzowalności przestrzeni  $X$  nie są potrzebne, w pracy [J14] udowodniłam, że użyte przez J. Brzdęka twierdzenie o odwzorowaniu otwartym można ominąć, wykazując następujący rezultat.

**Twierdzenie 14.** *Niech  $X$  będzie przestrzenią liniowo-topologiczną nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , zaś  $V \subset \mathbb{K}$ . Jeśli  $g : X \rightarrow \mathbb{K}$  jest nietrywialnym ciągłym funkcjonalem liniowym i  $g^{-1}(V)$  zawiera pewien podzbiór drugiej kategorii o własności Baire'a, to zbiór  $V$  również zawiera pewien podzbiór drugiej kategorii o własności Baire'a.*

---

<sup>9)</sup> Punkt  $x \in B$  jest punktem algebraicznie wewnętrznym zbioru  $B \subset X$ , gdy dla każdego  $y \in X$  istnieje takie  $c > 0$ , że  $x + ay \in B$  dla  $a \in (-c, c)$ .

W dowodzie tego twierdzenia użytecznym narzędziem okazały się przede wszystkim ciągi i podciągi uogólnione.

## ROZWIĄZANIA RÓWNANIA TYPU GOŁĄBA-SCHINZLA

$$F(x + M(F(x))y) = F(x)F(y)$$

Przejdę teraz do omówienia prac [J10], [J12], [J13], [J15], [J16], poświęconych rozwiązaniom równania (9) przy różnych założeniach regularnościowych o niewiadomych funkcjach  $f$  i  $M$ . Większość z otrzymanych w tych pracach wyników rozszerza rezultaty J. Brzdęka dla równania (8), jednak złożoność dowodów tych twierdzeń jest znacznie większa ze względu na występujące w równaniu (9) dwie funkcje niewiadome.

W pracy [J10] udowodniłam, że jeśli  $X$  jest nietrywialną przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  jest różnowartościowa,  $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , zaś  $M \circ f$  nie jest funkcją stałą, to  $f, M$  spełniają równanie (9) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie  $x_0 \in \mathbb{K}$ , że  $X = \mathbb{K}x_0$ ,  $M|_{f(X)}$  jest różnowartościowa i multiplikatywna oraz

$$M(f(\alpha x_0)) = \alpha + 1, \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Z kolei w pracy [J12] wykazałam, że w przypadku rzeczywistej przestrzeni liniowo-topologicznej  $X$  oraz funkcji  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mających własność Darboux, funkcje  $f, M$  są rozwiązaniami równania (9) wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z następujących warunków:

- (i)  $f = 0$  lub  $f = 1$ ;
- (ii)  $M|_{(0, \infty)} = 1$  i  $f = \exp h$  dla pewnej addytywnej i surjektywnej funkcji  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- (iii) istnieje taki nietrywialny ciągły funkcjonał liniowy  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz takie  $c > 0$ , że

$$(12) \quad \begin{aligned} f(x) &= |h(x) + 1|^{\frac{1}{c}} \operatorname{sgn}(h(x) + 1), & x \in X; \\ M(y) &= |y|^c \operatorname{sgn} y, & y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

lub

$$(13) \quad \begin{aligned} f(x) &= (\max\{0, h(x) + 1\})^{\frac{1}{c}}, & x \in X; \\ M(y) &= y^c, & y \in [0, \infty). \end{aligned}$$

W konsekwencji można zauważyć, że w przypadku, gdy funkcja  $M \circ f$  nie jest stałą, odwzorowania  $f, M$  mające własność Darboux i spełniające równanie (9) muszą być ciągłe.

W pierwszej części pracy [J13] uzupełniłam wyniki z pracy [J9] o przypadek zespolny. Tym samym podałam pełny opis rozwiązań równania (9) w przypadku przestrzeni liniowej  $X$  nad ciałem  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  przy założeniach, że  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  oraz zbiór  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  ma punkt algebraicznie wewnętrzny. Okazało się, że funkcje  $f, M$  są rozwiązaniami równania (9) wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z następujących warunków jest spełniony:

- (i)  $f = 1$  z dowolną funkcją  $M$ ;
- (ii) nietrywialna funkcja wykładnicza  $f : X \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$ <sup>10)</sup> z funkcją  $M$  spełniającą warunek  $M \circ f = 1$ ;

---

<sup>10)</sup> tzn. funkcja  $f \neq 1$  spełniająca równanie  $f(x + y) = f(x)f(y)$  dla  $x, y \in X$

(iii) w przypadku, gdy  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,

$$(14) \quad \begin{aligned} f(x) &= G(g(x) + 1), & x \in X, \\ M(z) &= G^{-1}(z), & z \in G(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

lub

$$(15) \quad \begin{aligned} f(x) &= G(\max\{0, g(x) + 1\}), & x \in X, \\ M(z) &= G^{-1}(z), & z \in G([0, \infty)), \end{aligned}$$

gdzie  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jest pewną różnowartościową funkcją multiplikatywną, zaś  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest nietrywialnym funkcjonałem  $\mathbb{R}$ -liniowym;

(iv) w przypadku, gdy  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , jeden z następujących warunków jest spełniony:

- dla pewnej multiplikatywnej funkcji różnowartościowej  $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  oraz nietrywialnego funkcjonału  $\mathbb{C}$ -liniowego  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$

$$(16) \quad \begin{aligned} f(x) &= G(g(x) + 1), & x \in X, \\ M(y) &= G^{-1}(y), & y \in G(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

- dla pewnej multiplikatywnej funkcji  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  oraz nietrywialnego funkcjonału  $\mathbb{R}$ -liniowego  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  albo  $f, M$  spełniają (14) i  $G$  jest różnowartościowa, albo  $f, M$  spełniają (15) i  $G|_{[0, \infty)}$  jest różnowartościowa.

Następnie w drugiej części tej pracy scharakteryzowałam rozwiązania równania (9) zakładając, że  $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , zaś funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  jest ograniczona na pewnym takim zbiorze  $B \subset X$  posiadającym punkt algebraicznie wewnętrzny, że  $0 \notin f(B)$ , a dodatkowo w przypadku, gdy  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,

$$\left| \arg \frac{f(z_1)}{f(z_2)} \right| < \frac{2\pi}{3}, \quad z_1, z_2 \in B.$$

Otrzymałam pełny opis rozwiązań równania (9), który nieznacznie różni się od tego podanego w pierwszej części pracy; główną różnicą jest fakt, że w tym przypadku dodatkowo uzyskałam też ciągłość występujących w opisie funkcji  $G$  na całej dziedzinie oprócz zera.

Praca [J15] również jest poświęcona rozwiązaniom równania (9). Zakładając, że  $X$  jest polską przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  jest mierzalna w sensie Christensena,  $M \circ f$  nie jest stała oraz  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  nie jest zbiorem zerowym Haara udowodniłam, że funkcje  $f$  i  $M$  spełniają równanie (9) wtedy i tylko wtedy, gdy  $M|_{f(X)}$  jest różnowartościowa i multiplikatywna oraz:

- (i) w przypadku gdy  $M(f(X)) \subset \mathbb{R}$ , istnieje taki nietrywialny funkcjonał  $\mathbb{R}$ -liniowy  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ , że  $M \circ f$  jest zdefiniowana jednym ze wzorów:

$$(17) \quad M(f(x)) = h(x) + 1, \quad x \in X$$

lub

$$(18) \quad M(f(x)) = \max\{0, h(x) + 1\}, \quad x \in X;$$

- (ii) w przypadku gdy  $M(f(X)) \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset$ , istnieje taki nietrywialny funkcjonał  $\mathbb{C}$ -liniowy  $h : X \rightarrow \mathbb{C}$ , że  $M \circ f$  spełnia (17).

W konsekwencji okazało się, że jeśli mierzalna w sensie Christensena funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  spełnia (9) wraz z borelowską funkcją  $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ , to albo  $M \circ f$  jest ciągła, albo zbiór  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  jest zbiorem zerowym Haara.

W pracy [J16] scharakteryzowałam rozwiązania równania (9) ograniczone na zbiorach „dużych” w abstrakcyjnym sensie. Zbiór „duży” rozumiem tutaj jako zbiór należący do  $\sigma$ -ciała  $\mathfrak{M}$  w przestrzeni liniowo-topologicznej  $X$  nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , a jednocześnie nienależący do nietrywialnego, właściwego, liniowo-niezmienniczego  $\sigma$ -ideału  $\mathcal{I}$  w  $X$ , spełniającego warunki:

$$(H1) \text{ int}(A + B) \neq \emptyset \text{ dla wszystkich } A \in \mathfrak{M} \setminus \mathcal{I} \text{ i } B \in 2^X \setminus \mathcal{I},$$

$$(H2) \text{ int}[(g(A) + 1) \cdot (g(A) + 1)] \neq \emptyset \text{ dla wszystkich } A \in \mathfrak{M} \setminus \mathcal{I} \text{ i } g \in X^* \setminus \{0\},$$

przy czym  $X^*$  jest przestrzenią wszystkich ciągłych funkcjonałów liniowych na  $X$ . Przykładami takich zbiorów „dużych” są zbiory drugiej kategorii o własności Baire’a w przestrzeni liniowo-topologicznej, czy zbiory miary dodatniej Lebesgue’a w  $\mathbb{R}^k$ . Wykazałam, że jeśli  $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  jest ciągła,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  jest ograniczona na takim zbiorze „dużym”  $D \in \mathfrak{M} \setminus \mathcal{I}$ , że  $0 \notin f(D)$ , a ponadto, w przypadku gdy  $f(X) \setminus \{0\} \subset S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ,  $\text{int}(S \setminus f(D)) \neq \emptyset$  (w odniesieniu do zwykłej topologii w  $S$ ), to funkcje  $f, M$  spełniają (9) wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z następujących warunków jest spełniony:

- (i)  $f = 1$ ;
- (ii)  $M \circ f = 1$  i  $f : X \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\}$  jest funkcją wykładniczą;
- (iii) istnieje taki nietrywialny ciągły funkcjonał liniowy  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz takie  $c > 0$ , że  $f, M$  mają jedną z postaci (12), (13),
- (iv) istnieje taki nietrywialny ciągły funkcjonał  $\mathbb{C}$ -liniowy  $g : X \rightarrow \mathbb{C}$  oraz taka ciągła multiplikatywna bijekcja  $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , że

$$\begin{aligned} f(x) &= H^{-1}(g(x) + 1) \text{ dla } x \in X, \\ M(y) &= H(y) \text{ dla } y \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

W konsekwencji okazało się, że jeśli funkcje  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  i  $M : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  spełniają (9), przy czym  $f$  jest  $\mathfrak{M}$ -mierzalna<sup>11)</sup>, zaś  $M$  jest ciągła na  $\mathbb{K}$ , to  $M \circ f$  jest ciągła lub  $\{x \in X : f(x) \neq 0\} \in \mathcal{I}$ .

Praca [J20] jest pracą przeglądową, zamykającą cykl prac na temat równania (9).

## ROZWIĄZANIA SPEXIDERYZOWANEGO RÓWNIANIA GOŁĄBA-SCHINZLA

$$F(x+G(x)y)=H(x)K(y)$$

W pracach [J18], [J19] wprowadziłam po raz pierwszy spexideryzowane równanie Gołaba-Schinzla

$$(19) \quad f(x + g(x)y) = h(x)k(y)$$

---

<sup>11)</sup> tzn. mierzalna względem  $\sigma$ -ciała  $\mathfrak{M}$

z czterema funkcjami niewiadomymi  $f, g, h, k : X \rightarrow \mathbb{R}$ , gdzie  $X$  jest przestrzenią liniową nad ciałem  $\mathbb{K}$ <sup>12)</sup>. Najważniejszym rezultatem z pracy [J19], który powstał w efekcie skorygowania i wzmocnienia rezultatów z [J18], jest twierdzenie, w wyniku którego poszukiwania rozwiązań równania (19) z czterema niewiadomymi funkcjami można zredukować do wyznaczania rozwiązań równania

$$(20) \quad f(x + g(x)y) = f(x)f(y)$$

(z jedynie dwiema funkcjami niewiadomymi). Tym samym otrzymałam pełny opis rozwiązań równania (19) za pomocą rozwiązań równania (20) (bez żadnych dodatkowych założeń regularnościowych o funkcjach  $f, g, h, k$ ). Okazało się, że funkcje  $f, g, h, k : X \rightarrow \mathbb{K}$  spełniają równanie (19) wtedy i tylko wtedy, gdy mają jedną z następujących postaci:

- (i)  $\begin{cases} f = 0, \\ h = 0, \\ g, k - \text{dowolne}, \end{cases} \quad \begin{cases} f = 0, \\ k = 0, \\ g, h - \text{dowolne}; \end{cases}$
- (ii)  $\begin{cases} f = bh, \\ g = 0, \\ h - \text{dowolna, niestała}, \\ k = b, \end{cases} \quad \text{dla pewnej stałej } b \in \mathbb{K} \setminus \{0\};$
- (iii)  $\begin{cases} f = ab, \\ g - \text{dowolna}, \\ h = a, \\ k = b, \end{cases} \quad \text{dla pewnych stałych } a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\};$
- (iv) dla pewnych stałych  $a, b, c \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  oraz takich funkcji  $F, G : X \rightarrow \mathbb{K}$  spełniających równanie (20), że  $F \neq 1$  i  $F(0) = G(0) = 1$ ,
$$\begin{cases} f = abF, \\ g = cG, \\ h = aF, \\ k(x) = bF(cx), \quad x \in X; \end{cases}$$
- (v) dla pewnego  $x_0 \in X \setminus \{0\}$ , stałych  $a, b \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  oraz takich funkcji  $F, G : X \rightarrow \mathbb{K}$  spełniających równanie (20), że  $F(0) = G(0) = 1$  oraz  $F(-x_0) = G(-x_0) = 0$ ,
$$\begin{cases} f(x) = abF(x - x_0), & x \in X, \\ g(x) = g(x_0)G(x - x_0), & x \in X, \\ h(x) = aF(x - x_0), & x \in X, \\ k(x) = bF(g(x_0)x), & x \in X. \end{cases}$$

Powyższy rezultat uzasadnia poszukiwanie rozwiązań równania typu Gołąba-Schinzla postaci (20).

---

<sup>12)</sup> Słowo „pexideryzacja” pochodzi od nazwiska J.V. Pexidera, który po raz pierwszy rozważał uogólnione równania Cauchy’ego postaci  $f(x + y) = g(x) \cdot h(y)$  z trzema funkcjami niewiadomymi odwzorowującymi grupę  $(G_1, +)$  w grupę  $(G_2, \cdot)$  (zob. M. Kuczma [54, str. 316-323]).

# ROZWIĄZANIA RÓWNANIA TYPU GOŁĄBA-SCHINZLA

$$F(x+G(x)y)=F(x)F(y)$$

J. Chudziak [24] scharakteryzował rozwiązania równania (20) przy założeniu ciągłości funkcji wewnętrznej  $g$ . Prace [J17], [J21]-[J23] również dotyczą rozwiązań tego równania, jednak przy innych założeniach regularnościowych natury analitycznej. Warto też wspomnieć, że rozważania równania (20) wymagają zupełnie innych metod dowodowych w stosunku do równania (9).

W pracy [J21] scharakteryzowałam rzeczywiste rozwiązania równania (20) przy założeniu ciągłości funkcji zewnętrznej  $f$ . Okazało się, że funkcje  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają równanie (20) wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z następujących warunków jest spełniony:

- (i)  $f = 1$  lub  $f = 0$ ;
- (ii)  $f(x) = \exp(cx)$  dla  $x \in \mathbb{R}$  z pewnym  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  oraz  $g = 1$ ;
- (iii)  $f$  i  $g$  mają jedną z postaci:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} g(x) = cx + 1, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = |cx + 1|^r, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ & \begin{cases} g(x) = cx + 1, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = |cx + 1|^r \operatorname{sgn}(cx + 1), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ & \begin{cases} g(x) = \max\{0, cx + 1\}, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = (\max\{0, cx + 1\})^r, & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \end{aligned}$$

z pewnymi  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  i  $r > 0$ .

Konfrontując to twierdzenie z rezultatem J. Chudziaka z pracy [24] można zauważyć, że założenie ciągłości funkcji zewnętrznej  $f$  jest silniejsze niż założenie ciągłości funkcji wewnętrznej  $g$ , gdyż przy założeniu ciągłości funkcji  $f$  w konsekwencji otrzymujemy ciągłość funkcji  $g$ <sup>13)</sup>.

W kolejnej pracy [J23] scharakteryzowałam rozwiązania równania (20) przy słabszym założeniu niż w pracy [J21], a mianowicie założeniu ciągłości na promieniach funkcji zewnętrznej  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  określonej na rzeczywistej przestrzeni liniowej  $X$ <sup>14)</sup>. Wykorzystując wspomniany rezultat z pracy [J21] udowodniłam, że funkcje  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  spełniają (20) i  $f$  jest ciągła na promieniach wtedy i tylko wtedy, gdy jeden z następujących warunków jest spełniony:

- (i)  $f = 1$  lub  $f = 0$  z dowolną funkcją  $g$ ;
- (ii)  $g = 1$  oraz  $f = \exp L$  dla pewnego nietrywialnego funkcjonału liniowego  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$ ;
- (iii)  $f, g$  mają jedną z następujących postaci dla pewnego nietrywialnego funkcjonału liniowego  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  oraz  $r > 0$ :

$$(21) \quad \begin{cases} g(x) = L(x) + 1, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = |L(x) + 1|^r, & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

<sup>13)</sup> Ciekawym wydaje się fakt, że nie jesteśmy w stanie najpierw wykazać, że z ciągłości funkcji  $f$  wynika ciągłość  $g$ , aby wówczas zastosować wynik J. Chudziaka z pracy [24]; dopiero, gdy otrzymamy postać rozwiązań  $f, g$ , widzimy wspomnianą zależność.

<sup>14)</sup> Funkcja  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na promieniach, jeśli funkcje  $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  określone wzorem  $f_x(a) := f(ax)$  dla  $a \in \mathbb{R}$  są ciągłe dla każdego  $x \in X$ .

$$(22) \quad \begin{cases} g(x) = L(x) + 1, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = |L(x) + 1|^r \operatorname{sgn}(L(x) + 1), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$(23) \quad \begin{cases} g(x) = \max\{0, L(x) + 1\}, & x \in \mathbb{R}, \\ f(x) = (\max\{0, L(x) + 1\})^r, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Wynik ten jest rozszerzeniem otrzymanego wcześniej rezultatu z pracy [J17], w której, wykorzystując rezultat J. Chudziaka z pracy [24] wykazałam, że ciągle na promieniach funkcje  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  określone na rzeczywistej przestrzeni liniowej  $X$  spełniające równanie (20) mają jedną z wyżej wymienionych postaci (i)-(iii).

Natomiast w ostatniej pracy [J22] na temat równania (20) scharakteryzowałam rzeczywiste rozwiązania tego równania przy znacznie słabszych założeniach. Mianowicie wykazałam, że jeśli  $f(\mathbb{R}) \setminus \{0, 1, -1\} \neq \emptyset$ ,  $g(\mathbb{R}) \setminus \{0, 1\} \neq \emptyset$ , zaś  $f$  jest lokalnie ograniczona z góry w każdym punkcie zbioru  $\mathbb{R}$ , to funkcje  $f, g$  spełniają (20) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , nieskończona podgrupa  $G$  grupy  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  oraz niestała funkcja multiplikatywna  $\phi : G \rightarrow \mathbb{R}$ , dla których

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \phi(cx + 1), & cx + 1 \in G; \\ 0, & cx + 1 \in \mathbb{R} \setminus G, \end{cases} \\ g(x) &= \begin{cases} cx + 1, & cx + 1 \in G; \\ 0, & cx + 1 \in \mathbb{R} \setminus G. \end{cases} \end{aligned}$$

## ROZWIĄZANIA NIERÓWNOŚCI GOŁĄBA-SCHINZLA $F(x+F(x)y) \leq F(x)F(y)$

W pracy [J24] po raz pierwszy rozważałam nierówność Gołąba-Schinzla

$$(24) \quad f(x + f(x)y) \leq f(x)f(y)$$

w klasie ciągłych funkcji rzeczywistych. Nierówność ta jest szczególnym przypadkiem nierówności

$$(25) \quad f(F(x, y)) \leq H(g(x), h(y)),$$

która pojawia się nie tylko w związku z funkcjami wypukłymi czy podaddytywnymi (zob. M. Kuczma [54, str. 400-421]), ale również ma zastosowanie w teorii półgrup operatorów liniowych (C. Ionescu Tulcea [48], W. Sander [87], [89]). Do tej pory jednak rozwiązania nierówności (25) zostały scharakteryzowane przy takich założeniach o funkcjach  $F, H$ , które wykluczają przypadek nierówności (24). Głównym rezultatem z pracy [J24] jest fakt, że ciągle rozwiązanie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nierówności (24), dla którego  $0 \in f(\mathbb{R})$ , musi spełniać jeden z następujących warunków:

- (i)  $f \leq 0$ ;
- (ii)  $f(x) = 0$  dla  $x \in [\frac{1}{c}, \infty)$ ,  $f(x) \geq -cx + 1$  dla  $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$ ;
- (iii)  $f(x) = -cx + 1$  dla  $x \in [\frac{1}{c}, \infty)$ ,  $f(x) \geq -cx + 1$  dla  $x \in (-\infty, \frac{1}{c})$  oraz  $f(0) = 1$ ;
- (iv)  $f(x) = 0$  dla  $x \in (-\infty, -\frac{1}{c}]$ ,  $f(x) \geq cx + 1$  dla  $x \in (-\frac{1}{c}, \infty)$ ;

(v)  $f(x) = cx + 1$  dla  $x \in (-\infty, -\frac{1}{c}]$ ,  $f(x) \geq cx + 1$  dla  $x \in (-\frac{1}{c}, \infty)$  oraz  $f(0) = 1$

z pewnym  $c > 0$ . Jednocześnie wykazałam, że warunki (ii)-(v) (w odróżnieniu od warunku (i)) nie są wystarczające na to, aby funkcja  $f$  spełniała nierówność (24); jako kontrprzykład podałam ciągłą funkcję  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  spełniającą warunki:

- $f(0) = 1$ ,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$ ,  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{5}$ ,  $f\left(\frac{9}{10}\right) = \frac{7}{25}$ ,
- $f(x) \geq -x + 1$  dla  $x \in (-\infty, 1]$ ,
- $f|_{[1, \infty)} = 0$  lub  $f(x) = -x + 1$  dla  $x \in [1, \infty)$ .

Ponadto podałam przykład funkcji ciągłej spełniającej nierówność (24) oraz niespełniającej równania Gołąba-Schinza:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & x < 0; \\ -x^2 + 1, & x \in [0, 1]; \\ g(x), & x \geq 1, \end{cases}$$

gdzie albo  $g|_{[1, \infty)} = 0$ , albo  $g(x) = -x + 1$  dla  $x \in [1, \infty)$ .

## STABILNOŚĆ WYBRANYCH RÓWNAŃ FUNKCYJNYCH

W 1940 roku S.M. Ulam [98] sformułował problem stabilności równania homomorfizmu, tzn. równania postaci

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y),$$

w klasie funkcji odwzorowujących grupę  $(G_1, +)$  w grupę metryczną  $(G_2, \cdot, d)$ :

*Czy prawdą jest, że dla każdego  $\varepsilon > 0$  istnieje taka  $\delta > 0$ , że dla dowolnej funkcji  $f : G_1 \rightarrow G_2$  spełniającej warunek*

$$d(f(x + y), f(x) \cdot f(y)) < \delta \quad \text{dla } x, y \in G_1,$$

*istnieje homomorfizm  $T : G_1 \rightarrow G_2$ , dla którego  $d(f(x), T(x)) < \varepsilon$  dla  $x \in G_1$ ?*

Częściowej odpowiedzi na to pytanie udzielił D.H. Hyers [46] w 1941 roku. Udowodnił on, że jeśli  $X$  i  $Y$  są przestrzeniami Banacha oraz  $\varepsilon > 0$ , to dla każdej funkcji  $g : X \rightarrow Y$  spełniającej warunek

$$\sup_{x, y \in X} \|g(x + y) - g(x) - g(y)\| \leq \varepsilon$$

istnieje dokładnie jedno takie rozwiązanie  $f : X \rightarrow Y$  równania funkcyjnego Cauchy'ego

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

że

$$\sup_{x \in E} \|g(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

W późniejszym czasie rezultat D.H. Hyersa nazywano po prostu stabilnością Hyersa-Ulama równania Cauchy'ego.

D.H. Hyers i S.M. Ulam zbadali również stabilność funkcji wielomianowych, izometrii, czy funkcji wypukłych, co dało początek rozwijanej później przez ponad siedemdziesiąt lat teorii stabilności równań funkcyjnych (więcej informacji na ten temat można znaleźć przykładowo w pracach przeglądowych S. Czerwika [25], G.L. Forti'ego [36], D.H. Hyersa - G. Isaca - T.M. Rassiasa [47], S.M. Junga [49], czy Z. Moszniera [68]).

Przejdę teraz do omówienia prac [J25]-[J27] dotyczących stabilności wybranych równań funkcyjnych.

W pracy [J25] (wraz z J. Brzdękiem, A. Bahyrycz i J. Olko) udowodniliśmy pewne twierdzenie o punkcie stałym. Dokładniej, rozważaliśmy funkcje, które „prawie wszędzie” (w sensie  $\sigma$ -ideału)<sup>15)</sup> aproksymują punkty stałe pewnych operatorów. Wykazaliśmy, że przy pewnych dodatkowych założeniach istnieją punkty stałe operatorów leżące „blisko” tych funkcji.

**Twierdzenie 15.** *Niech  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ . Załóżmy, że  $\mathcal{I}$  jest  $\sigma$ -ideałem w  $X$ ,  $(Y, d)$  jest zupełną przestrzenią metryczną, zaś  $\Lambda : \mathbb{R}_+^X \rightarrow \mathbb{R}_+^X$  jest operatorem, który dla każdego ciągu  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^X$  spełnia warunek*

$$\delta_n(x) \rightarrow 0 \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X \implies \Lambda \delta_n(x) \rightarrow 0 \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X.$$

*Niech  $T : Y^X \rightarrow Y^X$  będzie takim operatorem, że dla wszystkich  $u, v \in Y^X$ ,  $\delta \in \mathbb{R}_+^X$*

$$d(u(x), v(x)) \leq \delta(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X \implies d(Tu(x), Tv(x)) \leq \Lambda \delta(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X.$$

*Niech ponadto istnieją funkcje  $\varepsilon, \varepsilon^* \in \mathbb{R}_+^X$ ,  $f \in Y^X$ , dla których*

$$d(Tf(x), f(x)) \leq \varepsilon \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X,$$

$$\varepsilon^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n \varepsilon(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X.$$

*Wtedy istnieje taka funkcja  $g : X \rightarrow Y$ , że*

$$(26) \quad \begin{aligned} T^n f(x) &\rightarrow g(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X, \\ Tg(x) &= g(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X, \end{aligned}$$

$$(27) \quad d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon^*(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X.$$

*Jeśli ponadto  $\Lambda^n \varepsilon^*(x) \rightarrow 0 \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X$ , to  $g$  jest jedyną funkcją (z dokładnością do ideału  $\mathcal{I}$ ) spełniającą (26), (27).*

Otrzymane twierdzenie uogólnia rezultat z pracy L. Cădariu - L. Găvruta - P. Găvruta [21]. Ponadto w pracy tej wykazaliśmy, że powyższe twierdzenie można wykorzystać, aby przy pewnych założeniach udowodnić stabilność równania

$$\Phi(x, g(h_1(x)), \dots, g(h_k(x))) = g(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X,$$

jak również stabilność wielomianowego równania funkcyjnego

$$g(\mu(x)) + \sum_{j=1}^m a_j(x) g(\xi_j(x))^{p(j)} = G(x) \quad \mathcal{I} - \text{p.w. na } X,$$

uzupełniając tym samym wynik J. Brzdęka i S. Stević'a z pracy [19].

Z kolei w pracy [J26] (wraz z J. Brzdękiem, M.S. Moslehianem i P. Pacho) badaliśmy stabilność równania

$$(28) \quad Af(p(x) * r(y)) + Bf(q(x) * s(y)) = Cf(x) + Df(y)$$

---

<sup>15)</sup> Mówimy, że własność  $p(x)$  jest spełniona  $\mathcal{I}$ -prawie wszędzie na  $X$  (w skrócie piszemy  $\mathcal{I}$ -p.w. na  $X$ ), jeśli istnieje taki zbiór  $A \in \mathcal{I}$ , że własność  $p(x)$  jest spełniona dla wszystkich  $x \in X \setminus A$ .

w klasie funkcji  $f : X \rightarrow Y$  odwzorowujących grupoid  $(X, *)$ <sup>16)</sup> w przestrzeń Banacha  $Y$ , gdzie  $p, q, r, s : X \rightarrow X$  są ustalonymi endomorfizmami, zaś  $A, B, C, D$  stałymi. Motywacją do podjęcia takich rozważań były rezultaty stabilnościowe otrzymane wcześniej w pracach [3], [14], [80] dla funkcji  $t$ -afinicznej w sensie Wrighta<sup>17)</sup>, jak również dla funkcji liniowej dwóch zmiennych<sup>18)</sup>, gdzie  $f$  odwzorowuje przestrzeń unormowaną w przestrzeń Banacha. Główny rezultat z pracy [J26] nawiązuje do rezultatów uzyskanych przez A. Bahyrycz [14] oraz M. Piszczek [80].

**Twierdzenie 16.** *Niech  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ . Załóżmy, że  $(X, *)$  jest grupoidem z elementem neutralnym  $e$ ,  $Y$  jest przestrzenią Banacha nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $A, B, C, D \in \mathbb{K}$ , zaś  $p, q, r, s \in X^X$  są takimi homomorfizmami przyporządkowującymi elementowi  $e$  element  $e$ , że  $p \circ q = q \circ p$ ,  $p \circ r = r \circ p$ ,  $p \circ s = s \circ p$ ,  $q \circ r = r \circ q$ ,  $q \circ s = s \circ q$ . Niech ponadto  $\phi : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  spełnia warunek  $\phi(e, e) = 0$  oraz*

$$|p|_\phi := \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \phi(p(x), p(y)) \leq \alpha\phi(x, y), \quad x, y \in X\} < \infty, \quad |q|_\phi < \infty.$$

Jeśli  $g : X \rightarrow Y$ ,  $|A||p|_\phi + |B||q|_\phi < |C|$  oraz

$$(29) \quad \|Ag(p(x) * r(y)) + Bg(q(x) * s(y)) - Cg(x) - Dg(y)\| \leq \phi(x, y), \quad x, y \in X,$$

to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $G : X \rightarrow Y$  równania (28) spełniające nierówność

$$(30) \quad \|g(x) - G(x)\| \leq \frac{\phi(x, e)}{|C| - |A||p|_\phi - |B||q|_\phi}, \quad x \in X;$$

rozwiązanie to jest określone wzorem

$$G(x) := g(e) + \lim_{n \rightarrow \infty} (T^n g_0)(x), \quad x \in X,$$

gdzie  $g_0(x) := g(x) - g(e)$  dla  $x \in X$  oraz  $T\xi(x) := \frac{A}{C}\xi(p(x)) + \frac{B}{C}\xi(q(x))$  dla  $x \in X$ ,  $\xi \in Y^X$ .

Następnie powyższe twierdzenie wykorzystaliśmy do wykazania stabilności równania

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + f\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{f(x)}{2} + \frac{f(y)}{2},$$

które w przypadku grupy przemiennej  $(X, +)$  jednoznacznie podzielnej przez 2 jest równoważne dobrze znanemu równaniu Jordana - von Neumanna (kwadratowemu)<sup>19)</sup>, co w konsekwencji umożliwiło podanie nowej charakterystyki przestrzeni unitarnych. Mianowicie, jeśli  $X$  jest przestrzenią unormowaną, zaś  $\phi : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  jest taką funkcją, że  $\phi(e, e) = 0$ ,

$$\inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : \phi(x, y) \leq \alpha\phi(2x, 2y), \quad x, y \in X\} < 1/4$$

oraz

$$\left| \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2 \right| \leq \phi(x, y), \quad x, y \in X,$$

to  $X$  jest przestrzenią unitarną.

W pracy [J27] (wraz z A. Bahyrycz, J. Brzdękem i R. Malejki) zbadaliśmy stabilność równania

$$(31) \quad F(x_1 + \dots + x_s) = \sum_{i=1}^l \Gamma_i(F(p_i(x_1, \dots, x_r))) + D(x_1, \dots, x_r), \quad x_1, \dots, x_r \in X,$$

<sup>16)</sup> Grupoid  $(X, *)$  to niepusty zbiór  $X$  z określonym działaniem  $* : X^2 \rightarrow X$ .

<sup>17)</sup> tzn. funkcji spełniającej równanie  $f(tx + (1-t)y) + f((1-t)x + ty) = f(x) + f(y)$  z ustalonym  $t \in (0, 1)$

<sup>18)</sup> tzn. funkcji spełniającej równanie  $f(px + ry) = Cf(x) + Df(y)$  z ustalonymi stałymi  $p, r$  i  $C, D$

<sup>19)</sup>  $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$

które jest daleko idącym uogólnieniem równań: Cauchy'ego, Jensena<sup>20)</sup>, Jordana-von Neumanna, Drygasa<sup>21)</sup>, czy Fréchet'a<sup>22)</sup>. Założyliśmy, że  $(X, +)$  jest grupą przemienną,  $Y$  jest przestrzenią Banacha nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $l, r, s \in \mathbb{N}$ ,  $s \leq r$ ,  $D : X^r \rightarrow Y$ ,  $p_1, \dots, p_l : X^r \rightarrow X$  oraz  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_l : Y \rightarrow Y$  są addytywne. Ponadto  $\mathcal{M}$  jest niepustą podrodziną rodziny  $\mathcal{E}_X$  endomorfizmów grupy  $X$  oraz istnieją stałe  $A_1, \dots, A_l \in [0, \infty)$ , dla których

$$\|\Gamma_i(z) - \Gamma_i(w)\| \leq A_i \|z - w\|, \quad z, w \in Y, \quad i = 1, \dots, l.$$

Następnie zdefiniowaliśmy  $\hat{p}_i(\mu) : X \rightarrow X$ ,

$$\hat{p}_i(\mu)x := p_i(((s-1)\mu + \text{id})(x), -\mu(x), \dots, -\mu(x)), \quad x \in X,$$

dla  $i = 1, \dots, l$ ,  $\mu \in \mathcal{M}$  oraz założyliśmy, że

$$\mathcal{P} := \{\hat{p}_i(\mu) : \mu \in \mathcal{M}, \quad i = 1, \dots, l\} \subset \mathcal{E}_X.$$

Przy powyższych założeniach wykazaliśmy, że jeśli równanie (31) ma przynajmniej jedno rozwiązanie  $F_0 : X \rightarrow Y$ , to dla funkcji  $f : X \rightarrow Y$ ,  $c : \mathcal{P} \rightarrow [0, \infty)$  i  $L : X^r \rightarrow [0, \infty)$  spełniających warunki

$$\left\| f(x_1 + \dots + x_s) - \sum_{i=1}^l \Gamma_i(f(p_i(x_1, \dots, x_r))) - D(x_1, \dots, x_r) \right\| \leq L(x_1, \dots, x_r), \quad x_1, \dots, x_r \in X,$$

$$\beta_\mu := \sum_{i=1}^l A_i c(\hat{p}_i(\mu)) < 1, \quad \mu \in \mathcal{M},$$

$$\kappa \circ \nu = \nu \circ \kappa, \quad \nu \in \mathcal{P}, \quad \kappa \in \mathcal{M},$$

$$L(p(x_1), \dots, p(x_r)) \leq c(p)L(x_1, \dots, x_r), \quad x_1, \dots, x_r \in X, \quad p \in \mathcal{P},$$

istnieje dokładnie jedno takie rozwiązanie  $F : X \rightarrow Y$  równania (31), że

$$\|f(x) - F(x)\| \leq \inf_{\mu \in \mathcal{M}} \frac{L_\mu(x)}{1 - \beta_\mu}, \quad x \in X.$$

Wykorzystując otrzymaną stabilność równania (31), sformułowaliśmy między innymi dwie nowe charakteryzacje przestrzeni unitarnych, które są ściśle związane z równaniem Fréchet'a oraz równaniem kwadratowym.

**Wniosek 1.** *Założmy, że  $X$  jest przestrzenią unormowaną nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $b_1, \dots, b_6 \in \mathbb{K}$  oraz*

$$\mathcal{F}(x, y, z) := \left| \|x + y + z\|^2 + b_1\|x\|^2 + b_2\|y\|^2 + b_3\|z\|^2 - b_4\|x + y\|^2 - b_5\|x + z\|^2 - b_6\|y + z\|^2 \right|$$

*dla  $x, y, z \in X$ . Jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:*

- (i) *istnieją takie funkcje różnowartościowe  $d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{E}_X$  oraz  $w_0, t_1, t_2, t_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ , że*

$$\sup_{x, y, z \in X} \mathcal{F}(x, y, z) \left( \lambda_1 \|d_1 x\|^{t_1} + \lambda_2 \|d_2 y\|^{t_2} + \lambda_3 \|d_3 z\|^{t_3} \right)^{w_0} < \infty;$$

<sup>20)</sup>  $f(x + y) = \frac{1}{2}(f(2x) + f(2y))$

<sup>21)</sup>  $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y) + f(-y)$

<sup>22)</sup>  $f(x + y + z) + f(x) + f(y) + f(z) = f(x + y) + f(x + z) + f(y + z)$

- (ii) istnieją takie funkcje różnowartościowe  $d_1, d_2, d_3 \in \mathcal{E}_X$  oraz  $p, t, u \geq 0$ , że  $p + t + u > 0$  oraz

$$\sup_{x, y, z \in X} \mathcal{F}(x, y, z) \|d_1 x\|^p \|d_2 y\|^t \|d_3 z\|^u < \infty,$$

to  $X$  jest przestrzenią unitarną i  $b_1 = \dots = b_6 = 1$ .

**Wniosek 2.** Załóżmy, że  $X$  jest przestrzenią unormowaną nad  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ ,  $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{K}$  oraz  $\mathcal{Q}(x, y) := \left| \|x + y\|^2 + b_1 \|x - y\|^2 - b_2 \|x\|^2 - b_3 \|y\|^2 \right|$  dla  $x, y \in X$ . Jeśli spełniony jest jeden z następujących warunków:

- (i) istnieją takie funkcje różnowartościowe  $d_1, d_2 \in \mathcal{E}_X$  i  $\lambda_1, \lambda_2, w_0, t_1, t_2 > 0$ , że

$$\sup_{x, y \in X} \mathcal{Q}(x, y) \left( \lambda_1 \|d_1 x\|^{t_1} + \lambda_2 \|d_2 y\|^{t_2} \right)^{w_0} < \infty;$$

- (ii) istnieją takie funkcje różnowartościowe  $d_1, d_2 \in \mathcal{E}_X$  i  $p, t \geq 0$ , że  $p + t > 0$  oraz

$$\sup_{x, y \in X} \mathcal{Q}(x, y) \|d_1 x\|^p \|d_2 y\|^t < \infty,$$

to  $X$  jest przestrzenią unitarną i  $b_3 = b_2 = 2$ ,  $b_1 = 1$ .

## ROZSZERZALNOŚĆ WARUNKOWYCH RÓWNAŃ FUNKCYJNYCH

Problem rozszerzalności warunkowych równań funkcyjnych został sformułowany podczas „The 42nd International Symposium on Functional Equations” (2004, Opava, Republika Czeska) przez J. Aczela [2]. W istocie jest przeniesieniem problemu rozszerzalności homomorfizmów na inne równania funkcyjne niż równania Cauchy’ego.

W pracy [J28] (wraz z J. Brzdękem i A. Bahyrycz) rozważaliśmy problem rozszerzalności funkcji określonych na pewnym niepustym podzbiorze  $D$  przemiennej półgrupy  $(G, +)$ , spełniających równanie typu d’Alemberta

$$(32) \quad f(x + y) + f(x + \tau(y)) = 2f(x)f(y),$$

do funkcji określonych na całej półgrupie  $G$  i spełniających to równanie. Dokładniej, zakładając, że  $\tau$  jest endomorfizmem półgrupy  $G$  i involucją<sup>23)</sup>, zaś  $P$  jest ciałem kwadratowo domkniętym<sup>24)</sup> o charakterystyce różnej od 2 wykazaliśmy, że jeśli  $D$  jest zbiorem należącym do nietrywialnego filtra właściwego  $\mathcal{L} \subset 2^G$  spełniającego dodatkowo warunek

$$(33) \quad \tau(B), B + x, \{g \in G : g + x \in B\} \in \mathcal{L} \text{ dla } B \in \mathcal{L}, x \in G$$

oraz  $g : D \rightarrow P$  spełnia równanie warunkowe

$$g(x + y) + g(x + \tau(y)) = 2g(x)g(y), \quad x, y \in D, \quad x + y, x + \tau(y) \in D,$$

<sup>23)</sup> tzn.  $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y)$  oraz  $\tau(\tau(x)) = x$  dla  $x, y \in G$

<sup>24)</sup> tzn. dla każdego  $x \in P$  istnieje  $y \in P$ , dla którego  $y^2 = x$

przy czym  $g^{-1}(\{0\}) \notin \mathcal{L}$ , to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $f : G \rightarrow P$  równania (32) rozszerzające  $g$  na całą półgrupę  $G$ .

Ponadto wykazaliśmy, że w szczególnym przypadku, gdy  $(G, +)$  jest grupą oraz  $\tau = -\text{id}_G$ , założenie  $g^{-1}(\{0\}) \notin \mathcal{L}$  nie jest konieczne o ile filtr  $\mathcal{L}$  spełnia warunek

$$\{y \in G : 2y \in T\} \in \mathcal{L} \text{ dla każdego } T \in \mathcal{L}.$$

Na koniec, w pracy [J29] (wraz z J. Brzdękem) rozważaliśmy problem rozszerzalności funkcji spełniających równanie typu Jensena

$$(34) \quad f(x+y) + f(x+\tau(y)) = 2f(x)$$

przy założeniu, że  $\tau$  jest endomorfizmem przemiennej półgrupy  $G$  i involucją,  $H$  jest grupą abelową jednoznacznie podzieloną przez 2, zaś  $D$  jest zbiorem należącym do nietrywialnego filtra właściwego  $\mathcal{L} \subset 2^G$  spełniającego (33). Wówczas wykazaliśmy, że jeśli  $g : D \rightarrow H$  spełnia równanie warunkowe

$$g(x+y) + g(x+\tau(y)) = 2g(x), \quad x, y \in D, \quad x+y, x+\tau(y) \in D,$$

to istnieje dokładnie jedno rozwiązanie  $f : G \rightarrow H$  równania (34) rozszerzające  $g$  na całą półgrupę  $G$ .

## Literatura

- [1] J. Aczél, *The state of the second part of Hilbert's fifth problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 20 (1989), 153-163.
- [2] J. Aczél, „Remark 5” in the report of the meeting of *The 42nd International Symposium on Functional Equations*, June 20-27, 2004, Opava, Czech Republic, Aequationes Math. 69 (2005), 164-200.
- [3] A. Bahyrycz, J. Brzdęk, M. Piszczek, *On approximately  $p$ -Wright affine functions in ultrametric spaces*, J. Function Spaces Appl. 2013 (2013), Article ID 723545, 7 pp.
- [4] T. Banach, *The closed Steinhaus properties of  $\sigma$ -ideals on topological groups*, arXiv:1509.09073v1 [math.GN] 30 Sep 2015.
- [5] K. Baron, R. Ger, „Problem (P239)” in the report of the meeting of *The 21st International Symposium on Functional Equations*, August 6-13, 1983, Konolfingen, Switzerland, Aequationes Math. 26 (1984), 225-294.
- [6] K. Baron, P.L. Kannappan, *On the Pexider difference*, Fund. Math. 134 (1990), 247-254.
- [7] K. Baron, P.L. Kannappan, *On the Cauchy difference*, Aequationes Math. 46 (1993), 112-118.
- [8] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, T. Natkaniec, *On Smítal properties*, Topology Appl. 158 (2011), 2066-2075.
- [9] A. Beck, H.H. Corson, A.B. Simon, *Two subsets of a locally compact group*, Proc. Amer. Math. Soc. 9 (1958), 648-652.

- [10] N.H. Bingham, A. Ostaszewski, *Cauchy's functional equation and extensions: Goldie's equation and inequality, the Gołqb-Schinzel equation and Beurling's equation*, Aequat. Math. 89 (2015), 1293-1310.
- [11] N.H. Bingham, A. Ostaszewski, *Dichotomy and infinite combinatorics: the theorems of Steinhaus and Ostrowski*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 150 (2010), 1-22.
- [12] N.H. Bingham, A. Ostaszewski, *Beyond Lebesgue and Baire II: bitopology and measure-category duality*, Colloq. Math. 121 (2010), 225-238.
- [13] N.H. Bingham, A. Ostaszewski, *Beyond Lebesgue and Baire: generic regular variation*, Colloq. Math. 116 (2009), 119-138.
- [14] J. Brzdęk, *Stability of the equation of the  $p$ -Wright affine functions*, Aequationes Math. 85 (2013), 497-503.
- [15] J. Brzdęk, *On orthogonally exponential and orthogonally additive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 2127-2132.
- [16] J. Brzdęk, *Generalizations of some results concerning microperiodic mappings*, Manuscripta Math. 121 (2006), 265-276.
- [17] J. Brzdęk, *The Gołqb-Schinzel equation and its generalizations*, Aequationes Math. 70 (2005), 14-24.
- [18] J. Brzdęk, *Bounded solutions of the Gołqb-Schinzel equation*, Aequationes Math. 59 (2000), 248-254.
- [19] J. Brzdęk, S. Stević, *A note on stability of polynomial equations*, Aequat. Math. 85 (2013), 519-527.
- [20] L. Bukovský, *The structure of the real line*, Monografie Matematyczne 71, Springer, 2011.
- [21] L. Cădariu, L. Găvruta, P. Găvruta, *Fixed Points and Generalized Hyers-Ulam Stability*, Abstr. Appl. Anal. 2012, Article ID 712743, 10 p.
- [22] J.P.R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Israel J. Math. 13 (1972), 255-260.
- [23] J.P.R. Christensen, P. Fischer, *Small sets and a class of general functional equations*, Aequationes Math. 33 (1987), 18-22.
- [24] J. Chudziak, *Semigroup-Valued Solutions of the Gołqb-Schinzel Functional Equation*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 76, 91-98 (2006).
- [25] S. Czerwik, *Functional Equations and Inequalities in Several Variables*, World Scientific Publishing, River Edge, NJ, USA, 2002.
- [26] U.B. Darji, *On Haar meager sets*, Topology Appl. 160 (2013), 2396-2400.
- [27] P. Dodos, *The Steinhaus property and Haar-null sets*, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), 377-384.
- [28] P. Dodos, *Dichotomies of the set of test measures of a Haar null set*, Israel J. Math. 144 (2004), 15-28.

- [29] P. Dodos, *On certain regularity properties of Haar-null sets*, Fund. Math. 181 (2004), 97-109.
- [30] M. Doležal, M. Rmoutil, B. Vejnar, V. Vlášak, *Haar meager sets revisited*, J. Math. Anal. Appl. 440 (2016), 922-939.
- [31] M. Doležal, V. Vlášak, *Haar meager sets, their hulls, and relationship to compact sets*, J. Math. Anal. Appl. 446 (2017), 852-863.
- [32] L. Dubikajtis, C. Ferens, R. Ger, M. Kuczma, *On Mikusiński's functional equation*, Ann. Polon. Math. 28 (1973), 39-47.
- [33] M. Elekes, Z. Vidnyánszky, *Haar null sets without  $G_\delta$  hulls*, Israel J. Math. 209 (2015), 199-214.
- [34] P. Erdős, *Some remarks on set theory*, Ann. of Math. 44 (1943), 643-646.
- [35] P. Fischer, Z. Słodkowski, *Christensen zero sets and measurable convex functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), 449-453.
- [36] G.L. Forti, *Hyers-Ulam stability of functional equations in several variables*, Aequationes Math. 50 (1995), 143-190.
- [37] Z. Gajda, *Christensen measurability of polynomial functions and convex functions of higher orders*, Ann. Polon. Math. 47 (1986), 25-40.
- [38] Z. Gajda, *Christensen measurable solutions of generalized Cauchy functional equation*, Aequationes Math. 31 (1986), 147-158.
- [39] R. Ger, *Christensen measurability and functional equations*, in "Selected Topics in Functional Equations", Forschungszentrum Graz, Graz, 1988, 285-296.
- [40] R. Ger, *Almost approximately convex functions*, Math. Slovaca 38 (1988), 61-78.
- [41] R. Ger, M. Kuczma, *On the boundedness and continuity of convex functions and additive functions*, Aequationes Math. 4 (1970), 157-162.
- [42] S. Gołąb, A. Schinzel, *Sur l'équation fonctionnelle  $f(x + f(x)y) = f(x)f(y)$* , Publ. Math. Debrecen 6 (1959), 113-125.
- [43] D. Hilbert, *Mathematical problems, Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900*, Bull. Amer. Math. Soc. 8 (1902), 437-479.
- [44] B.R. Hunt, T. Sauer, J.A. Yorke, *Prevalence: an addendum*, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1993), 306-307.
- [45] B.R. Hunt, T. Sauer, J.A. Yorke, *Prevalence: a translation-invariant "almost every" on infinite-dimensional spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 217-238.
- [46] D.H. Hyers, *On the stability of the linear functional equation*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 27 (1941), 222-224.
- [47] D.H. Hyers, G. Isac, T.M. Rassias, *Stability of Functional Equations in Several Variables*, Birkhauser, Boston, Mass, USA, 1998.

- [48] C. Ionescu Tulcea, *Suboperative functions and semigroup of operators*, Ark. Mat. 4 (1960), 55-61.
- [49] S.M. Jung, *Hyers-Ulam-Rassias Stability of Functional Equations in Nonlinear Analysis*, Springer, New York, NY, USA, 2011.
- [50] A.S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics 156, Springer-Verlag, New-York 1995.
- [51] J.H.B. Kemperman, *A general functional equation*, Trans. Amer. Math. Soc. 86 (1957), 28-56.
- [52] Z. Kominek, *On the sum and difference of two sets in topological vector spaces*, Fund. Math. 71 (1971), 165-169.
- [53] Z. Kominek, *Additive and J-convex functions majorized by measurable functions*, Rad. Mat. 6 (1990), 49-53.
- [54] M. Kuczma, *An introduction to the theory of functional equations and inequalities. Cauchy's Equation and Jensen's Inequality*, PWN & Uniwersytet Śląski w Katowicach, Warszawa - Kraków -Ktowice, 1985.
- [55] M.E. Kuczma, *Differentiation of implicit functions and Steinhaus' theorem in topological measure space*, Colloq. Math. 39 (1978), 95-107.
- [56] M.E. Kuczma, *A generalization of Steinhaus' theorem to coordinatewise measure preserving binary transformations*, Colloq. Math. 36 (1976), 241-248.
- [57] M.E. Kuczma, M. Kuczma, *An elementary proof and an extension of a theorem of Steinhaus*, Glasnik Mat. 6(26) (1971), 11-18.
- [58] S. Kurepa, *Convex functions*, Glasnik Mat.-Fiz. Astronom. 11 (1956), 89-93.
- [59] E. Matoušková, *Convexity and Haar null sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 1793-1799.
- [60] E. Matoušková, C. Stegall, *A characterization of reflexive Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 1083-1090.
- [61] E. Matoušková, L. Zajíček, *Second order differentiability and Lipschitz smooth points of convex functionals*, Czechoslovak Math. J. 48 (1998), 617-640.
- [62] E. Matoušková, M. Zelený, *A note on intersections of non-Haar null sets*, Colloq. Math. 96 (2003), 1-4.
- [63] M.R. Mehdi, *On convex function*, J. London Math. Soc. 39 (1964), 321-326.
- [64] J.C. Morgan II, *On the absolute Baire property*, Pacific J. Math. 78 (1978), 415-431.
- [65] J.C. Morgan II, *Baire category from an abstract view-point*, Fund. Math. 94 (1977), 13-23.
- [66] J.C. Morgan II, *The absolute Baire property*, Pacific J. Math. 65 (1976) 421-436.
- [67] J.C. Morgan II, *On translation invariant families of sets*, Colloq. Math. 34 (1975), 63-68.
- [68] Z. Moszner, *On the stability of functional equations*, Aequationes Math. 77 (2009), 33-88.

- [69] J. Mycielski, *Unsolved problems on the prevalence of ergodicity, instability and algebraic independence*, Ulam Quart. 1 (1992), 30–37.
- [70] K. Nikodem, *K-convex and K-concave set-valued functions*, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 559, Rozprawy Naukowe z. 114, Wyd. Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1989.
- [71] A. Olbryś, *On the boundedness, Christensen measurability and continuity of  $t$ -Wright convex functions*, Acta Math. Hungar. 141 (2013), 68–77.
- [72] W. Orlicz, Z. Ciesielski, *Some remarks on the convergence on functionals on bases*, Studia Math. 16 (1958), 335–352.
- [73] A. Ostaszewski, *Beurling regular variation, Bloom dichotomy, and the Gołab-Schinzel functional equation*, Aequat. Math. 89 (2015), 725–744.
- [74] A. Ostaszewski, *Beyond Lebesgue and Baire III: Steinhaus' theorem and its descendants*, Topology Appl. 160 (2013), 1144–1154.
- [75] A. Ostrowski, *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen*, Jber. Deutsch. Math.-Verein 38 (1929), 54–62.
- [76] J.C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1971.
- [77] L. Paganoni, *Una estensione di un teorema di Steinhaus*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A 108 (1974), 262–273.
- [78] B.J. Pettis, *Remarks on a theorem of E. J. McShane*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), 166–171.
- [79] S. Piccard, *Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace Euclidien*, Mem. Univ. Neuchâtel, vol. 13, Secrétariat Univ., Neuchâtel, 1939.
- [80] M. Piszczek, *Remark on hyperstability of the general linear equation*, Aequationes Math. 88 (2014), 163–168.
- [81] C.G. Popa, *Sur l'équation fonctionnelle  $f(x + f(x)y) = f(x)f(y)$* , Ann. Polon. Math. 17 (1965), 193–198.
- [82] R. Rałowski, P. Szczepaniak, S. Żeborski, *A generalization of Steinhaus' theorem and some nonmeasurable sets*, Real Anal. Exchange 35 (2010), 403–411.
- [83] W. Sander, *Applications of certain  $\omega$ -families*, Fund. Math. 122 (1984), 77–84.
- [84] W. Sander, *A duality principle*, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), 609–610.
- [85] W. Sander, *Ein Beitrag zur Baire-Kategorie-Theorie*, Manuscripta Math. 34 (1981), 71–84.
- [86] W. Sander, *A decomposition theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 83 (1981), 553–553.
- [87] W. Sander, *Eine Funktionalgleichung für operatorwertige Funktionen*, Monatsh. Math. 92, (1981), 61–73.
- [88] W. Sander, *A generalization of a theorem of S. Piccard*, Proc. Amer. Math. Soc. 73 (1979), 281–282.

- [89] W. Sander, *Regularitätseigenschaften von Funktionalungleichungen*, Glasnik Mat. 13, 33 (1978), 237-247.
- [90] W. Sander, *Erratum zu: "Verallgemeinerungen eines Satzes von H. Steinhaus"*, Manuscripta Math. 20 (1977), 101-103.
- [91] W. Sander, *Verallgemeinerungen eines Satzes von H. Steinhaus*, (German) Manuscripta Math. 18 (1976), 25-42.
- [92] W. Sander, *Verallgemeinerungen eines Satzes von S. Piccard*, (German) Manuscripta Math. 16 (1975), 11-25.
- [93] W. Sierpiński, *Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle*, Fund. Math. 22 (1934), 276-280.
- [94] J. Smítal, L. Snoha, *Generalization of a theorem of S. Piccard*, Acta Math. Univ. Comen. 37 (1980), 173-181.
- [95] S. Solecki, *On Haar null sets*, Fund. Math. 149 (1996), 205-210.
- [96] H. Steinhaus, *Sur les distances des points des ensembles de mesure positive*, Fund. Math. 1 (1920), 99-104.
- [97] E. Szpilrajn, *Remarques sur les fonctions complètement additives d'ensemble et sur les ensembles jouissant de la propriété de Baire*, Fund. Math. 22 (1934), 303-311.
- [98] S.M. Ulam, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience Publishers, London, UK, 1960.
- [99] A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann et Cie., Paris, 1940.

*Eliza Fabińska*