NOŚNOŚĆ CIENKOŚCIENNYCH KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH

T. KUBIAK, Z. KOŁAKOWSKI

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy zaprezentowano podstawowe idee w podejściu do stateczności, stanów pokrytycznych i nośności cienkościennych belek – słupów z kompozytów warstwowych o przekrojach otwartych i zamkniętych. Przedstawiono oszacowanie nośności takich konstrukcji na podstawie liniowej modalnej analizy stanów krytycznych. Porównano ją z wynikami otrzymanymi przy wykorzystaniu profesjonalnego pakiet metody elementów skończonych ANSYS 5.7.

1. WSTĘP

Nowoczesne materiały kompozytowe już od chwili ich pojawienia się w latach sześćdziesiątych zapowiadały trwałą i niezawodną ich przyszłość. Impulsem rozwoju były nowe technologie produkcji, rozwój teoretycznych podstaw anizotropowych warstwowych konstrukcji kompozytowych oraz rozwój nowych technologii informatycznych. To określa pozycję kompozytów w nowych zastosowaniach techniki.

Większość materiałów kompozytowych zbudowana jest z włókien syntetycznych lub organicznych o wysokiej wytrzymałości Zadaniem matrycy jest zachowanie geometrii włókien i zapobieganie ich uszkodzeniom. Tworzywa wzmocnione włóknem węglowym mają bardzo wysoki moduł sprężystości, bardzo wysoką wytrzymałość, mały współczynnik rozszerzalności liniowej, a ponadto są kilka razy lżejsze od stali.

Dalszy postęp w stosowaniu kompozytów wymusza głębsze zrozumienie zjawisk zachodzących podczas i po utracie stateczności konieczne do właściwego projektowania nowych konstrukcji ze względu na wzrastające parametry i wymagania użytkownika.

2. WYBOCZENIE SPRZĘŻONE

W liniowej teorii stateczności energia potencjalna układu jest formą kwadratową przemieszczeń uogólnionych, zaś w nieliniowej teorii zawiera także człony trzeciego i czwartego stopnia względem przemieszczeń. W ogólnym przypadku nie można rozdzielić członów odpowiadających poszczególnym postaciom wyboczenia w wyrażeniu na energię. Składniki zawierające mieszane iloczyny tych przemieszczeń odpowiadają za interakcję postaci wyboczenia. Rola tych członów jest bardzo istotna dla wartości obciążeń bliskich wartościom krytycznym tych postaci.

W najnowszej literaturze dotyczącej stateczności konstrukcji cienkościennych oprócz tradycyjnie rozpatrywanych globalnych postaci wyboczenia (takich jak: giętne, skrętne, giętno-skrętne, zwichrzenie) i lokalnych postaci wyboczenia, rozpatruje się wyboczenie dystorsyjne oraz wyboczenie mieszane będące dowolną kombinacją wcześniej wymienionych postaci. Najczęściej przyjmuje się, że wyboczenie globalne jest wyboczeniem powodującym zniszczenie konstrukcji cienkościennej, a odpowiadające jemu obciążenie obciążeniem granicznym lub nośnością graniczną. Niektóre konstrukcje cienkościenne zbudowane z elementów płytowych mogą pracować po lokalnej utracie stateczności. Na skutek lokalnego wyboczenia następuje zmniejszenie wzdłużnej sztywności konstrukcji. Wzajemne oddziaływanie różnych postaci utraty stateczności, dla konstrukcji rzeczywistych obarczonych niedokładnościami wstępnymi, jest często decydującym czynnikiem określającym ich nośność graniczną.

Kiedy minimalnej wartości krytycznej odpowiada pojedyncza postać i w pobliżu nie ma innych bliskich wartości własnych, takie wyboczenie nazywa się jednomodalne lub niezależne. Jeżeli natomiast wartości krytyczne (własne) są identyczne lub bliskie sobie, pokrytyczne zachowanie się można rozpatrywać jako wzajemne oddziaływanie postaci wyboczenia tzw. wyboczenie sprzężone lub interakcję postaci wyboczenia. Nieuwzględnienie interakcyjnego wyboczenia może prowadzić do błędnej oceny nośności granicznej konstrukcji. Szczególnie jest to widoczne w konstrukcjach bliskich optymalnym, w których obciążenia krytyczne dla różnych postaci są prawie jednakowe.

Gdy lokalna i globalna postać wyboczenia zachodzą równocześnie, to wyboczenie jest niestateczne i bardzo czułe na imperfekcje. Gdy zaś globalne wyboczenie zachodzi najpierw, a lokalne wyboczenie jest konsekwencją pierwszego, to zjawisko wyboczenia dąży do niestatecznego.

Najbardziej znane podejście dzięki ogólności i zastosowaniu do nieliniowej teorii stateczności konstrukcji cienkościennych przedstawił Koiter [3], zaś Budiansky i Hutchinson [1] nadali tej teorii wygodną do zastosowania formę. Teoria ta wykorzystuje metodę zakłóceń do analizy stanów równowagi. Wyrażenie na energię rozwija się w szereg potęgowy względem amplitud liniowych postaci wyboczenia w pobliżu punktów bifurkacji. Metoda to prowadzi do iteracyjnej metody określania współczynników tego rozkładu, przy czym w każdym przybliżeniu rozwiązuje się liniowe zagadnienie brzegowe [5].

W ogólnej asymptotycznej teorii rozróżnia się proste (jednomodalne) i sprzężone wyboczenie. Określenie współczynników dla pierwszego nieliniowego rzędu przybliżenia wymaga jedynie znajomości pól przemieszczeń i naprężeń pierwszego rzędu, które wyznaczane są na podstawie wartości obciążeń krytycznych (własnych) i odpowiadających im zagadnieniom własnym.

W zagadnieniach liniowych najbardziej niebezpieczne postacie wyboczenia określa się wielkościami obciążeń krytycznych, zaś w nieliniowych należy uwzględnić wielkości współczynników w ramach pierwszego rzędu przybliżenia określających wrażliwość na imperfekcje.

Wyznaczenie współczynników drugiego rzędu nieliniowego przybliżenia wymaga określenia pól przemieszczeń i naprężeń drugiego rzędu, które są poprawkami do pól pierwszego rzędu. Teoria sprzężonego wyboczenia umożliwia pełną analizę pobifurkacyjnych ścieżek równowagi wraz z punktami osobliwymi (tzn. punktów wtórnej bifurkacji lub punktów granicznych). Wyjaśnia też zaobserwowane w badaniach doświadczalnych postacie wyboczenia i znaczne w wielu przypadkach rozbieżności pomiędzy uzyskanymi metodą teoretyczną i eksperymentalną wartościami nośności granicznej konstrukcji.

2.1. SŁUPY Z BLISKIMI SOBIE WARTOŚCI OBCIĄŻEŃ KRYTYCZNYCH

W omawianym przypadku uwzględnienie w analizie członów do trzeciego stopnia w wyrażeniu na energię potencjalną układu poprawnie opisuje pracę konstrukcji i pozwala wyznaczyć nośność (obciążenie graniczne). Pozwala to ograniczyć rozwiązanie do pierwszego asymptotycznego przybliżenia oraz uniknąć rozwiązywania złożonych zagadnień określenia pól drugiego rzędu oraz dużych problemów typu merytorycznego i numerycznego.

W przypadku konstrukcji cienkościennych z jedną osią symetrii przekroju poprzecznego (np. cienkościenny ceownik) ważnym uproszczeniem jest możliwość rozpatrywania wzajemnego oddziaływania globalnej postaci z każda z lokalnych postaci wyboczenia i wybranie w ten sposób najbardziej niebezpiecznej postaci lokalnej. W przypadku konstrukcji kompozytowej wykonanej z materiału o wysokiej granicy określenie nośności granicznej plastyczności często wymaga uwzględnienia wzajemnego oddziaływania postaci wyboczenia (interakcji postaci). Metody obliczeń normatywnych stosowane do materiałów z niską granicą plastyczności mogą okazać się niedostatecznymi przy przejściu do materiałów z wysoką granicą plastyczności, albowiem nie zawsze wygaszą efekty sprzężonego wyboczenia.

W konstrukcjach z dwoma osiami symetrii przekroju poprzecznego (kwadrat, dwuteownik) wszystkie człony w trzeciej potędze w energii potencjalnej są równe zero. Dlatego też przy uwzględnieniu tylko jednej globalnej i jednej najbardziej niebezpiecznej postaci lokalnej należy uwzględnić człony w czwartej potędze w wyrażeniu na energię potencjalną układu związane z mieszanymi polami drugiego rzędu. Wyznaczenie mieszanej postaci drugiego rzędu jest nie tylko bardzo złożone, ale także nie w pełni poprawne z powodu złego uwarunkowania zagadnienia. Trudności tych można uniknąć uwzględniając w analizie, oprócz najbardziej niebezpiecznej podstawowej postaci lokalnej, wtórną postać lokalną mającą taką samą długość wyboczenia, ale inny charakter symetrii. Nałożenie dwóch postaci prowadzi do niesymetrycznego sumowania lokalnych ugięć, a w wyrażeniu na energię potencjalną pojawia się człon w trzeciej potędze opisujący wyboczenie sprzężone trzech postaci. Przy uwzględnieniu w analizie teoretycznej podstawowej i wtórnej postaci lokalnej wyboczenie może być opisane w ramach pierwszego rzędu asymptotycznego przybliżenia. Wtórna lokalna postać jest praktycznie identyczna jak mieszana postać drugiego rzędu, a dodatkowe lokalne zginanie cienkościennego słupa wywołane globalnym zginaniem ma postać podobną do wtórnej lokalnej postaci.

Ogólnie sprzężone wyboczenie w przypadku słupów z dwoma osiami symetrii przekroju poprzecznego jest mniej niebezpieczne niż słupów z jedną osią symetrii.

2.2. WYBOCZENIE GLOBALNE POPRZEDZONE LOKALNYM

Szeroko stosowane są konstrukcje, dla których lokalne wyboczenie poprzedza globalne tzn. wartość obciążenia krytycznego lokalnej postaci wyboczenia jest niższa niż wartość krytyczna obciążenia globalnego. Konstrukcje takie mogą przenieść obciążenie znacznie przewyższające obciążenie odpowiadające krytycznej wartości wyboczenia lokalnego. Analiza takich konstrukcji nie może być otrzymana w ramach pierwszego nieliniowego przybliżenia. Konieczne jest zatem uwzględnienie w analizie członów czwartego stopnia w energii potencjalnej konstrukcji. W ogólnym przypadku do analizy stateczności przy uwzględnieniu drugiego nieliniowego przybliżenia należy rozwiązać zagadnienie dla lokalnych, globalnych i mieszanych postaci drugiego rzędu. Jednakże w przypadku gdy lokalne wyboczenie poprzedza globalne główną rolę odgrywają lokalne postacie drugiego rzędu. Globalne postacie drugiego rzędu dla belkowego modelu słupa są równe zero, a w przypadku dokładnego rozwiązania są

mało istotne. Pominięcie mieszanych postaci drugiego rzędu jest możliwe dzięki uwzględnieniu już odpowiednich członów w ramach pierwszego rzędu przybliżenia.

Wyznaczenie nieliniowych współczynników pokrytycznych oraz współczynników redukcji sztywności wzdłużnej w ramach nieliniowego drugiego rzędu przybliżenia pozwala opisać pełne zachowanie się konstrukcji cienkościennej w zakresie sprężystym oraz uwzględnić także globalne dokrytyczne zginanie.

Należy zwrócić uwagę na imperfekcje konstrukcji cienkościennych, a szczególnie lokalne. W celu prawidłowej oceny nośności należy określić pola przemieszczeń i sił zadanych w obliczeniach teoretycznych i rzeczywiste niedokładności.

3. WYBOCZENIE JEDNOMODALNE

W przypadku, gdy wyboczenie możemy rozpatrywać jako nie sprzężone (jednomodalne) tzn. gdy wartości krytyczne wyboczenia lokalnego są znacznie niższe niż wyboczenia globalnego, to najbardziej niebezpiecznymi lokalnymi postaciami wyboczenia w zależności od tego, czy rozpatrywana konstrukcja:

- ma grodzie lub przepony poprzeczne są: lokalna postać wyboczenia odpowiadająca najniższej wartości obciążenia krytycznego mająca jedną półfalę "m=1" postaci wyboczenia w kierunku wzdłużnym oraz postać mająca "3m=3" półfale wyboczenia;
- nie ma wzmocnień poprzecznych są: identycznie jak wyżej lokalne postacie oraz postacie wyboczenia dla $(m \pm 2)$, $(m \pm 4)$.

4. STATECZNOŚĆ I NOŚNOŚĆ W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Do analizy stateczności i pracy konstrukcji po jej utracie użyto pakietu ANSYS. Oprogramowanie pozwala analizować problem stateczności na dwa sposoby:

- liniowa analiza stateczności (zagadnienie wartości własnych), która pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne (punkty bifurkacji) i odpowiadające im postacie wyboczenia,
- nieliniowa analiza stateczności pozwalająca analizować pokrytyczne zachowanie się konstrukcji.

Przeanalizowane przykładowe konstrukcje cienkościenne zdyskretyzowano używając ośmiowęzłowego, wielowarstwowego elementu powłokowego o sześciu stopniach swobody w każdym węźle [2]. Użyty element pozwala zamodelować cienkościenną konstrukcję wielowarstwową o różnych grubościach i różnych własnościach materiałowych warstw.

W celu analizy pokrytycznego zachowania się konstrukcji należy najpierw, korzystając z liniowej analizy stateczności, wyznaczyć postacie wyboczenia i odpowiadające im wartości obciążeń krytycznych zarówno dla postaci lokalnych, jak i globalnych. Następnie przeprowadza się nieliniową analizę stateczności na modelu, w którym przyjęto wstępne imperfekcje kształtu odpowiadające najniższym postaciom wyboczenia. Dla postaci lokalnych przyjmuje się imperfekcje kształtu w granicach 0.1 do 0.02 grubości ścian analizowanej konstrukcji cienkościennej, natomiast dla postaci globalnych od 0.005 do 0.01 długości dźwigara lub belki-słupa. W przypadku nieliniowej analizy wyboczenia interakcyjnego zakłada się imperfekcje kształtu odpowiadające różnym postaciom wyboczenia. Dużym problemem jest ustalenie wielkości imperfekcji dla różnych postaci w taki sposób, aby zależność pomiędzy imperfekcjami odzwierciedlała wpływ jednej postaci wyboczenia na drugą. Większą wartość imperfekcji należy przyjąć dla postaci, która ma większy wpływ na utratę stateczności, w czym bardzo pomocna jest modalna analiza liniowa.

Bardzo dużą rolę w otrzymaniu poprawnych wyników jest prawidłowe (najbardziej zbliżone do rzeczywistości) zamodelowanie warunków brzegowych. Szczególnie trudne jest modelowanie warunków brzegowych odpowiadających warunkom przyjętym w innych metodach obliczeniowych. Bardzo często wykorzystuje się metodę elementów skończonych jako eksperyment numeryczny dla potwierdzenia wyników otrzymanych na drodze analitycznej lub analityczno - numerycznej. Takie podejście wydaje się nieprawidłowe, ponieważ tworzony jest jak gdyby model modelu. Powinno się raczej porównywać wyniki eksperymentalne z wynikami obliczeniowymi lub wyniki różnych metod obliczeniowych modelujących konkretny obiekt rzeczywisty.

5. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Poniżej przedstawiono porównanie wyników stateczności oraz pokrytycznego zachowania się konstrukcji cienkościennych uzyskanych na drodze analityczno – numerycznej oraz przy wykorzystaniu metody elementów skończonych. Wyniki przedstawiono dla wielowarstwowych kompozytowych konstrukcji cienkościennych, w których każda z warstw o grubości $h_{warst}=0.125$ mm ma następujące własności mechaniczne: $E_1 = 140$ GPa, $E_2 = 10.3$ GPa, $\nu_{12} = 0.021$, G = 5.15 GPa.

Najpierw rozpatrzono ściskany słup o przekroju ceowym wykonany z ośmiowarstwowego kompozytu o następujących wymiarach geometrycznych: szerokość środnika $b_1 = 50$ mm, szerokość półki $b_2 = 25$ mm, długość L = 650 mm, grubość $h = 8 h_{warst} = 1.0$ mm

Na rys. 1 przedstawiono wyniki MES otrzymane dla ceownika o następującym ułożeniu warstw [45/-45/45/-45/45/-45/45]. Z analizy analityczno-numerycznej [6] otrzymano następujące wartości obciążenia krytycznego: P_{gl} =2.77 kN dla globalnej postaci giętnej oraz P_{lok} =6.91 kN dla postaci lokalnej.

Krytyczne obciążenie globalne jest obciążeniem niszczącym, jak to łatwo zauważyć z przebiegu krzywej 2 na rys. 1 we współrzędnych siła ściskająca w funkcji skrócenia konstrukcji. Dla porównania na tym rysunku przedstawiono pierwotne "nieprawidłowe" zamodelowanie zachowania się ściskanego ceownika (krzywa 1) dla przyjętej imperfekcji odpowiadającej wyboczeniu lokalnemu i globalnemu. Zbyt mała wartość ugięcia wstępnego odpowiadającego wyboczeniu globalnemu spowodowała, że podczas obliczeń MES postać globalna nie miała wpływu, a jedynie o wyboczeniu zadecydowała postać lokalna, co potwierdza maksymalna wartość siły (krzywa 1). Osiągnięcie obciążenia ściskającego równego praktycznie lokalnemu obciążeniu krytycznemu spowodowało "uwidocznienie się" globalnej postaci wyboczenia, której odpowiada opadający fragment krzywej 1.

Na rys. 2 przedstawiono wyniki otrzymane na drodze MES dla ściskanego ceownika o następującym ułożeniu warstw $[45/-45/90/0]_s$. Z modalnej analizy teoretycznej otrzymano następujące wartości obciążeń krytycznych: P_{gl}=8.08 kN dla postaci globalnej giętnej i P_{lok}=6.74 kN dla postaci lokalnej.

I w tym przypadku analiza modalna "podpowiada poprawne" zamodelowanie wielkości imperfekcji globalnych dla ceownika (krzywa 3). Praca konstrukcji w stanie zakrytycznym przedstawiona krzywymi 1 i 2 dotyczy przypadków dla zbyt małych wartości imperfekcji globalnych.



Rys. 1. Zależność siła ściskająca w funkcji skrócenia dla ściskanego ceownika o ułożeniu warstw 45/-45/45/-45/45/-45/45/



Rys. 2. Zależność siła ściskająca w funkcji skrócenia dla ściskanego ceownika o ułożeniu warstw [45/-45/90/0]_s

To krótkie porównanie pozwala stwierdzić oczywisty fakt, że obliczanie konstrukcji metodą elementów skończonych nie gwarantuje zawsze poprawnych wyników. Metoda ta jest bardzo czuła na zamodelowane warunki brzegowe, przyjęte elementy skończone, siatkę podziału itd.

W dalszej części pracy przedstawiono wyniki dla cienkościennego kompozytowego dźwigara skrzynkowego o przekroju kwadratowym i następujących wymiarach geometrycznych: szerokości płyt b = 100 mm, długości L = 700 mm, grubości h = 10 h_{warst} = 1.25 mm.

Każda ze ścian dźwigara zbudowana jest z dziesięciowarstwowego kompozytu. Ze względu na przyjętą długość możemy mówić o wyboczeniu jednomodalnym (niesprzężonym).

Na rys. 3 przedstawiono wyniki dla kompozytu o ułożeniu warstw [15/-15/15/-15/15]_s. Teoretyczna lokalna wartości obciążenia krytycznego wynosi $P_{lok}=9.06$ kN (rys. 3). Zakres zakrytyczny w metodzie analityczno-numerycznej [4,6] modelowano dwoma lokalnymi postaciami wyboczenia tzw. pierwotną i drugą lokalną o trzy razy większej liczbie półfal w kierunku wzdłużnym. W całym analizowanym zakresie silnie nadkrytycznym osiągnięto bardzo dobrą zgodność wyników.



Rys. 3. Zależność siła ściskająca w funkcji skrócenia dla ściskanego dźwigara o ułożeniu warstw [15/-15/15/-15/15]_S



Rys. 4. Zależność moment gnący w funkcji skrócenia (a) i odkształcenie zginanego dźwigara (b) o ułożeniu warstw [45/-45/45/-45/0]_s

W przypadku obciążenia analizowanego dźwigara momentem gnącym mamy do czynienia z przekrojem mającym pojedynczą oś symetrii. Dźwigar nie jest wzmocnionym przeponami poprzecznymi. Obliczenia przeprowadzono dla następującego ułożenia dziesięciu warstw $[45/-45/45/-45/0]_s$. Teoretyczna wartość krytyczna momentu zginającego wynosi $M_{lok}=725$ Nm. Na rys. 4a przedstawiono wyniki otrzymane z MES - krzywa 1, zaś przybliżoną metodą analityczno-numeryczną [4,6] -krzywe 2 i 3. Krzywą 2 otrzymano dla lokalnej pierwotnej postaci wyboczenia (o liczbie półfal m =9 w kierunku wzdłużnym) oraz dla lokalnych postaci o liczbie półfal "3m=27" oraz "m-2=7", zaś krzywą 3 otrzymano przy uwzględnieniu jeszcze jednej lokalnej postaci "m-4=5". I w tym przypadku osiągnięto dobrą zgodność wyników obiema metodami (do kilkunastu procent) dla stanów silnie zakrytycznych. Na rysunku

4b przedstawiono postać odkształcenia zginanego dźwigara. Postać ta nie jest identyczna dla każdej z półfal odkształcenia dźwigara, co tłumaczy fakt uwzględnienia w ocenie nośności dźwigara postaci lokalnych dla m<9.

Przedstawione porównanie wyników przeprowadzono dla stanów sprężystych pomijając ewentualny fakt zniszczenia poszczególnych warstw. Przyjęcie jednego z kryteriów zniszczenia umożliwi prawidłową ocenę nośności granicznej konstrukcji [7].

6. WNIOSKI

W pracy zarysowano główne problemy w obliczaniu nośności konstrukcji kompozytowych, przedstawiono porównanie wyników obliczeń otrzymanych metodą elementów skończonych oraz przybliżoną metodą bazującą na liniowej analizie obciążeń krytycznych [4]. Osiągnięto dobrą zgodność obliczeń obiema metodami (do kilkunastu procent). Zwrócono uwagę na korzyści wynikające z wykorzystania modalnej analizy stateczności konstrukcji kompozytowych [6].

LITERATURA

- [1] Budiansky B., Hutchinson J. W. Dynamic buckling of imperfection-sensitive structures. In: Applied Mechanics (Proc. of the XI Int. Cong. App. Mech., Munich, 1964), H. Goertler (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1964, pp.636-651.
- [2] Element References for ANSYS rev. 5.7, Ansys Inc., Houston, USA.
- [3] Koiter, W. T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures. WTHD Report 590, Delft, 1976, p.41.
- [4] Kołakowski Z. A semi-analytical method of interactive buckling of thin-walled elastic structures in the second order approximation; Int. J. Solids Structures, Vol.33, No.25., 1996, pp.3779-3790.
- [5] Królak M., Kołakowski Z., Kotełko M. Modal coupled instabilities of thinwalled composite plate and shell structures, Proceedings of the Third International Conference on Thin-Walled Structures, Elsevier, 2001, pp.293-300.
- [6] Królak, M. (Ed.). Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich. PWN, Warszawa-Łódź, 1990, str.553.
- [7] Kubiak T., Kowal-Michalska K. Zastosowanie programu ANSYS do wyznaczania nośności cienkościennych wielowarstwowych konstrukcji ortotropowych. "Programy MES w Komputerowym Wspomaganiu Analizy, Projektowania i Wytwarzania", Warszawa - Rynia, 2001, str. 149-158.
- [8] Structural Analysis Guide for ANSYS rev. 5.7, Ansys Inc., Houston, USA.

CARRYING CAPACITY OF THIN-WALLED COMPOSITE STRUCTURES

In this paper the basic ideas on buckling, postbucklig behaviour and carrying capacity of thin-walled composite beam-columns with open and closed cross-section have been presented. Carrying capacity estimation based on linear modal analysis for critical state have been carried out. The results of calculations obtained using analytical – numerical method and finite element method (ANSYS 5.7) have been compared.