

# IDENTYFIKACJA WSPÓLCZYNNIKÓW SPRĘŻYSTOŚCI W PROBLEMIE ZGINANIA PŁASKICH WYROBÓW WŁÓKIENNICZYCH

*Elżbieta Radaszewska, Piotr Szablewski*

*Katedra Inżynierii Mechanicznej, Informatyki Technicznej i Chemii Materiałów  
Polimerowych  
Politechnika Łódzka*

DOI 10.34658/9788366741805.12

## 1. Wstęp

Sztywność zginania tkanin jest właściwością istotną z punktu widzenia walorów estetycznych. Same włókna są ciałami elastoplastycznymi. W tkaninach występują one w postaci zespolonej – w pierwszym rzędzie w przędzy, następnie wskutek związania splotem. Ugięcia tkanin są stosunkowo duże, przeto przekroczone jest w wielu przypadkach granica proporcjonalności. Z tego powodu uzyskanie ścisłych zależności między geometrią ugięcia a wielkościami mechanicznymi jest bardzo trudne i wymaga skomplikowanych rozważań teoretycznych popartych materiałem doświadczalnym.

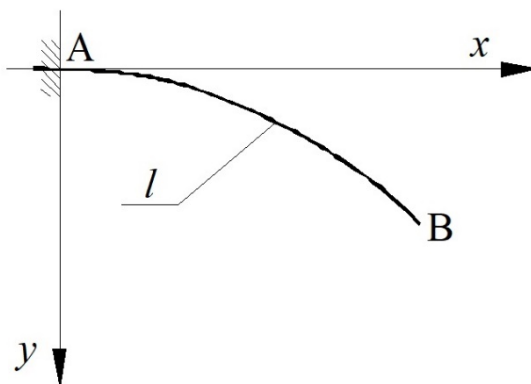
Analiza sztywności zginania tkanin nawiązuje zawsze do wyników otrzymywanych w czasie doświadczenia. Metody badania sztywności zginania można podzielić na dwie grupy: grawitacyjne i rotacyjne. Wspólną cechą większości tych metod jest to, że w ich wyniku uzyskuje się doświadczalne zależności pomiędzy geometrią ugięcia (promień krzywizny) a momentem gnącym, wywołującym zginanie. Metody te wymagają przeprowadzenia szeregu pomiarów dla różnych wartości momentu gnącego i odpowiedniego opracowania wyników.

Praca ma na celu zidentyfikowanie zjawiska zginania wyrobów włókienniczych. Identyfikacja ta dotyczy będzie związku fizycznego pomiędzy momentem gnącym  $M$  a krzywizną  $1/\rho$ . Jak pokazują wyniki doświadczalne związek ten w ogólności nie jest liniowy i może przedstawiać się bardziej złożoną zależnością. W pracy założono, że badania eksperymentalne dotyczą klasycznego testu wspornikowego Peirce'a (rys.1), wykorzystywanego do określania sztywności zginania wyrobów włókienniczych, a opisanego m.in. w pracach [1], [2] i [3].

Główną ideą pracy jest to, że w celu określenia związku pomiędzy geometrią a momentem gnącym wystarczy przeprowadzić tylko jedno doświadczenie, w wyniku którego uzyska się ugięty kształt wyrobu, a co za tym idzie wartości współrzędnych

$(x,y)$  odpowiednich punktów osi ugiętej próbki o długości  $l$  dla kolejnych wartości współrzędnej łukowej  $s$  mierzonej wzdłuż osi począwszy od punktu A.

Oczywiście w celu weryfikacji można przeprowadzić kilka eksperymentów, porównując otrzymane wyniki. Dla celów niniejszej pracy został opracowany program komputerowy, który na podstawie obrazu ugiętego wyrobu, zapisanego w formacie pliku bmp (mapa bitowa), dokonuje analizy i oblicza z zadanyim krokiem poszczególne współrzędne  $(x,y)$  osi ugiętej próbki.



Rys.1. Test Peirce'a

Źródło: opracowanie własne.

## 2. Numeryczne rozwiązanie problemu

Przed rozpoczęciem właściwej analizy należy się zastanowić nad tym, która z metod matematycznych będzie w tym przypadku najodpowiedniejsza. Należy mieć na uwadze fakt, iż wartości współrzędnych  $(x,y)$  otrzymane na drodze eksperymentalnej obarczone są błędem. Błąd ten wynika zarówno z samej metody pomiaru, jak również z procesu uzyskiwania na podstawie eksperymentu wartości współrzędnych. Współrzędne te mogą być otrzymane przykładowo na podstawie analizy obrazu uzyskanego poprzez wykonanie zdjęcia ugiętej próbki.

Ze względu na to, że różniczkowanie w niektórych przypadkach może być obarczone dużym błędem i wręcz uniemożliwiać uzyskanie poprawnych wyników, w pracy postanowiono wykorzystać metodę opartą na całkowaniu momentu gnącego  $M$ .

### 2.1. Identyfikacja związku fizycznego między momentem gnącym a krzywizną

Opisany zostanie obecnie sposób podejścia do analizy związku fizycznego pomiędzy krzywizną ugiętej próbki  $1/\rho=d\varphi/ds$  a momentem gnącym  $M$ , który to

związek opisuje zjawisko zginania płaskiego wyrobu włókienniczego. Jak pokazują wyniki doświadczalne związek ten w ogólności nie jest liniowy.

Poszukiwana jest zatem ogólna zależność w postaci:

$$\frac{d\varphi}{ds} = a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 + \dots, \quad (1)$$

gdzie  $M$  - moment gnący,  $\varphi$  - kąt nachylenia stycznej do osi próbki.

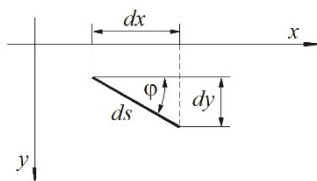
Występujące we wzorze (1) nieznanne chwilowo współczynniki  $a_1, a_2, a_3, \dots$  są współczynnikami sprężystości dla problemu zginania. Dla potrzeb niniejszego opracowania analiza ograniczona będzie do wielomianu najwyżej drugiego stopnia, czyli zgodnie ze wzorem (1) do wyrażenia zawierającego moment gnący w kwadracie.

$$\frac{d\varphi}{ds} = a_1 M + a_2 M^2. \quad (2)$$

Stąd

$$\varphi = \int (a_1 M + a_2 M^2) ds. \quad (3)$$

Kąt  $\varphi$  nachylenia stycznej do osi próbki w dowolnym punkcie określonym współrzędną  $s$  jest w tym przypadku funkcją trzech zmiennych  $\varphi(s, a_1, a_2)$ .



Rys.2. Elementarny wycinek  $ds$

Źródło: opracowanie własne.

Zgodnie z rys.2 otrzymuje się:  $dx = \cos(\varphi)ds$ ,  $dy = \sin(\varphi)ds$ .

Zatem współrzędne  $x$  i  $y$  uzyskać można poprzez całkowanie

$$x = \int \cos(\varphi)ds, \quad y = \int \sin(\varphi)ds. \quad (4)$$

Podobnie jak kąt  $\varphi$  współrzędne  $x$  i  $y$  są również funkcjami trzech zmiennych.

$$x(s, a_1, a_2), \quad y(s, a_1, a_2). \quad (5)$$

Mając zatem otrzymaną na podstawie współrzędnych  $x$  i  $y$ , które uzyskano doświadczalnie na podstawie testu Peirce'a, zależność na moment gnący, można wychodząc z zależności (2) uzyskać teoretyczne współrzędne  $x$  i  $y$ , które są jej rozwiązaniem analitycznym.

Na etapie identyfikacji chodzi o to, aby różnica pomiędzy współrzędnymi doświadczalnymi, które niech będą oznaczone przez  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ , a współrzędnymi uzyskanymi analitycznie  $(x, y)$ , była możliwie najmniejsza dla całej długości próbki  $l$ . Zależy to oczywiście od odpowiedniego doboru współczynników sprężystości  $a_1, a_2$  występujących we wzorze (2). Miarą takiego dopasowania parametrów może być na przykład funkcja

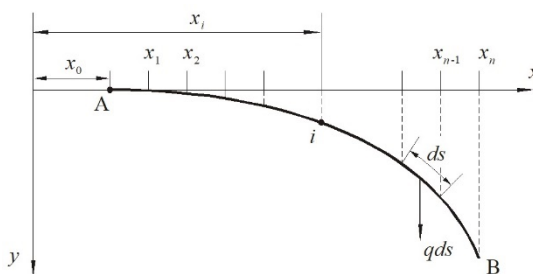
$$H = \int_0^l [(x - \tilde{x})^2 + (y - \tilde{y})^2] ds. \quad (6)$$

Poszukiwane są zatem takie parametry  $a_1, a_2$ , dla których funkcja (6) osiąga minimum  $H = \min$ .

Po znalezieniu tych parametrów można twierdzić, że zależność (2) w miarę dokładnie opisuje zjawisko zginania badanej próbki. Ze względu na to, że problem rozwiązywany jest numerycznie poprzez podział próbki na  $n$  punktów, występujące we wzorach całki zastąpić należy sumami w odpowiednich granicach.

## 2.2. Wyznaczenie momentu gnącego

Na etapie identyfikacji zjawiska zginania dużą rolę odgrywa poprawne i w miarę dokładne określenie wartości momentu gnącego  $M$  w każdym punkcie pomiarowym. Moment ten należy określić na podstawie wartości współrzędnych, czyli na podstawie geometrii kształtu ugiętej próbki. Oczywiście trzeba dysponować jeszcze jedną daną jaką jest ciężar liniowy próbki  $q$ , który jest z założenia stały dla całej jej długości. Współrzędne  $(x, y)$  punktów, na które podzielono próbkę będą w tym przypadku funkcjami zmiennej łukowej  $s$ , która mierzona jest wzdłuż osi próbki począwszy od punktu A ( $s=0$ ).



Rys.3. Dyskretyzacja próbki

Źródło: opracowanie własne.

Na rys.3 przedstawiono sposób podziału próbki na  $n$  punktów począwszy od punktu A, dla którego przyjęto indeks „0”.

Po przeprowadzonej analizie geometrii kształtu próbki dysponujemy wartościami współrzędnych:

$$x_i(s), y_i(s) \text{ dla } i=0,1,2,\dots,n.$$

Moment gnący w dowolnym punkcie  $i$  liczony jest jako algebraiczna suma momentów względem tego punktu wszystkich sił ciężkości poszczególnych odcinków elementarnych  $ds$ , działających po jednej stronie rozpatrywanego punktu (licząc od punktu B do  $i$ ). Poszczególne siły ciężkości  $q \cdot ds$  przyłożone są w środku odcinka  $ds$ . Zgodnie z powyższym wzór na moment gnący w dowolnym punkcie  $i$  przedstawia się następująco

$$M_i = q ds \left[ \left( \sum_{j=i+1}^n \frac{x_j + x_{j-1}}{2} \right) - (n-i)x_i \right]. \quad (7)$$

Wzór (7) wyprowadzono przy założeniu stałego podziału próbki na elementarne odcinki  $ds = \text{const}$ .

Na ogół jednak podział próbki nie będzie równomierny. Poszczególne odcinki  $ds$  będą różne, a ich długość zależec będzie od współrzędnych punktów podziału. W tym przypadku moment gnący wyraża się zależnością

$$M_i = q \sum_{j=i+1}^n \left[ \left( \frac{x_j + x_{j-1}}{2} - x_i \right) \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} \right]. \quad (8)$$

### 3. Przykłady liczbowe

Dla ilustracji powyższych rozważań rozpatrzono kilka przykładów liczbowych, dla których znana była postać zależności pomiędzy krzywizną a momentem gnącym. Chodziło o to, czy uzyskana na podstawie analizy postać związku fizycznego będzie możliwie dokładnie przedstawiać jego postać właściwą. Aby przetestować poprawność analizy bez wykonywania czasochłonnego eksperymentu zginania próbki, jej fotografowania i w końcu analizy obrazu dla uzyskania współrzędnych ugiętej osi, postanowiono przeprowadzić eksperyment wirtualny według następującego schematu.

Znając postać związku pomiędzy krzywizną a momentem gnącym, rozwiązano równanie zginania (2). Ponieważ jest to typowy problem brzegowy, do jego rozwiązania wykorzystano metodę strzału, opisaną m.in. w pracy [2]. Uzyskano w ten

sposób zbiór dokładnych wartości współrzędnych  $(x,y)$ . Aby mieć do czynienia z wartościami eksperymentalnymi, które obciążone są zwykle błędami pomiarowymi, dokładne wartości współrzędnych zaburzono błędem, poprzez dodanie do nich losowych wartości odchyłek. Tak uzyskane wartości współrzędnych potraktowano jako wartości doświadczalne  $(\tilde{x}, \tilde{y})$ .

### **Przykład 1**

Niech dana będzie próbka płaskiego wyrobu włókienniczego, dla której związek pomiędzy krzywizną a momentem gnącym jest dokładnie liniowy  $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{M}{C}$ .

Dla tej próbki przyjęto następujące dane:

- długość próbki  $l=0,1\text{m}$ ,
- stała sztywność zginania  $C=10^{-5}\text{ Nm}^2$  (długość gięcia  $D=0,046\text{ m}$ ),
- ciężar liniowy  $q=0,1\text{ N/m}$ .

Dokładna zależność pomiędzy krzywizną a momentem gnącym po uwzględnieniu danych liczbowych jest  $\frac{d\varphi}{ds} = a_1 M$ , gdzie  $a_1=10^5\text{ (Nm}^2\text{)}^{-1}$ .

Numeryczne rozwiązanie problemu przeprowadzono z wykorzystaniem programu Mathematica 12.0 firmy Wolfram Research ([www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)), układając odpowiedni program obliczeniowy. Minimalizacja funkcji  $H$  według zależności (6) przeprowadzona została w oparciu o standardową procedurę minimalizacyjną FindMinimum pakietu Mathematica [4]. Poszukiwano rozwiązania dla współczynnika  $a_1$  występującego w liniowej zależności  $\frac{d\varphi}{ds} = a_1 M$ .

Dodatkowo na uzyskane współrzędne  $(x,y)$  narzucono przypadkowy błąd pomiarowy o wartości maksymalnej 5%.

Po przeprowadzonej minimalizacji funkcji  $H$  uzyskano następujące wyniki:

- $a_1=99501\text{ (Nm}^2\text{)}^{-1}$ ,
- wartość funkcji celu  $H=4,07336 \cdot 10^{-5}\text{ m}^3$ ,

Błąd obliczeniowy niewielki ok.  $\varepsilon=0,5\%$ .

### **Przykład 2**

Rozważono próbkę, dla której związek pomiędzy krzywizną a momentem gnącym jest dokładnie kwadratowy  $\frac{d\varphi}{ds} = a_1 M + a_2 M^2$ . Dla tej próbki przyjęto następujące dane:

- parametry  $a_1=10^5\text{ (Nm}^2\text{)}^{-1}$ ,  $a_2=2 \cdot 10^8\text{ (N}^2\text{m}^3\text{)}^{-1}$ , pozostałe dane jak poprzednio.

Współrzędne  $(x,y)$  obciążono przypadkowym błędem pomiarowym o wartości maksymalnej 5%.

Poszukiwano rozwiązania dla współczynników  $a_1, a_2$  występujących w zależności

$$\frac{d\varphi}{ds} = a_1 M + a_2 M^2.$$

Po przeprowadzonej minimalizacji funkcji  $H$  uzyskano następujące wyniki:

- $a_1 = 99956 \text{ (Nm}^2\text{)}^{-1}$ ,
- $a_2 = 1,99 \cdot 10^8 \text{ (N}^2\text{m}^3\text{)}^{-1}$ ,
- wartość funkcji celu  $H = 3,15646 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3$ ,

W porównaniu z wartościami dokładnymi błędy są minimalne  $\varepsilon_{a1} = 0,044 \%$ ,  $\varepsilon_{a2} = 0,5 \%$ .

#### 4. Podsumowanie

Przeprowadzona w pracy próba identyfikacji zjawiska zginania wyrobów włókienniczych w oparciu o uzyskane na drodze eksperymentalnej wartości współrzędnych  $(x, y)$  osi ugiętej próbki okazała się skuteczna. Identyfikacja ta dotyczyła głównie związku fizycznego pomiędzy momentem gnący  $M$  a krzywizną  $1/\rho$ . Podczas analizy uwzględniono fakt, iż wartości współrzędnych mogą być obciążone błędem pomiarowym i z tego powodu przydatność metody jest bardziej satysfakcjonująca. Wykorzystany w pracy program obliczeniowy Mathematica 12.0 do minimalizacji funkcji celu okazał się dobrym i szybkim narzędziem.

Ze względu na to, że współrzędne pomiarowe obciążone są błędami, stwierdzono, że zastosowanie zależności matematycznych, w których występuje różniczkowanie tych współrzędnych staje się zawodne. Natomiast wykorzystanie całkowania podczas analizy daje wyniki z zadowalającą dokładnością.

W pracy ograniczono się do badania zależności pomiędzy krzywizną a momentem gnącym co najwyżej stopnia drugiego, co nie oznacza, że w praktyce nie można tą metodą badać zależności stopnia wyższego niż drugi.

#### 5. Literatura

- [1] **Peirce F.T.**, *The „Handle” of Cloth as a Measurable Quality*, Journal of the Textile Institute Transactions 1930, Vol. 21, ss. T377-T416.
- [2] **Szablewski P., Kobza W.**, *Numerical analysis of Peirce’s cantilever test for the bending rigidity of textiles*, Fibres & Textiles in Eastern Europe 2003, Vol. 11, nr 4, ss. 54-57.
- [3] **Żyliński T.**, *Metrologia włókiennicza*. Tom 2, WPLiS, Warszawa 1965.
- [4] **Wolfram Research, Inc.**, *Mathematica*, Version 12.0., Wolfram Research, Inc., Champaign Illinois 2019.