

MODEL ANALITYCZNY DLA DUŻYCH UGIĘĆ PŁASKIEJ STRUKTURY TEKSTYLNEJ O ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI ZGINANIA I JEGO WERYFIKACJA Z WYKORZYSTANIEM SYMULACJI MES

Piotr Szablewski

*Katedra Inżynierii Mechanicznej, Informatyki Technicznej i Chemii Materiałów
Polimerowych
Politechnika Łódzka*

DOI 10.34658/9788366741805.10

1. Wstęp

Badanie ugięć elementów wspornikowych wykonanych z różnych materiałów było dotychczas przedmiotem wielu analiz. Przykłady belki wspornikowej poddanej pionowej sile skupionej działającej na swobodnym końcu można znaleźć m. in. w pracy [1], a także w wielu innych podręcznikach z zakresu fizyki i mechaniki. Jednak w wyżej wymienionym podręczniku dyskusja dotyczy tylko elementów poddanych niewielkim ugięciom. Gdy ugięcia są duże, i założenie małego kąta przestaje być aktualne, problem staje się bardziej skomplikowany, a rozwiązanie analityczne staje się niemożliwe do uzyskania.

Lee [2] badał duże ugięcia liniowej sprężystej belki wspornikowej o zmiennym przekroju pod obciążeniem za pomocą metody Runge-Kutta-Falsi. Baker [3] uzyskał duże profile ugięcia liniowych sprężystych belek wspornikowych przy dowolnych rozkładach obciążeń za pomocą ważonego rozwiązania resztkowego równania momentu zginającego Bernoulliego-Eulera. Dado i AL-Sadder [4] przedstawili nową technikę analizy dużych ugięć niepryzmatycznych belek wspornikowych w oparciu o zintegrowany błąd najmniejszych kwadratów nieliniowego równania różniczkowego, w którym kąt obrotu jest reprezentowany poprzez wielomian. Shvartsman [5] zbadał duże ugięcia belki wspornikowej poddanej obciążeniu śledzącemu, redukując dwupunktowy nieliniowy problem brzegowy do zagadnienia początkowego poprzez zamianę zmiennych, a następnie rozwiązując go bez iteracji. Badane były również belki wspornikowe wykonane z materiałów nieliniowych. Lewis i Monasa [6] zbadali numerycznie duże ugięcia belek wspornikowych wykonanych z materiałów nieliniowych poddanych pionowemu skupionemu obciążeniu na swobodnym końcu, stosując metodę Runge-Kutty czwartego rzędu. Lee [7] zbadał duże ugięcia belek wspornikowych wykonanych z nieliniowego sprężystego materiału, poddanych obciążeniu złożonemu, stosując metodę Runge-Kutt'a piątego rzędu wg Butchera.

Antman [8] badał duże wyboczenia nieliniowo-sprężystych belek poddanych zginaniu, skręcaniu, rozciąganiu i ścinaniu. Seames i Conway [9] przedstawili

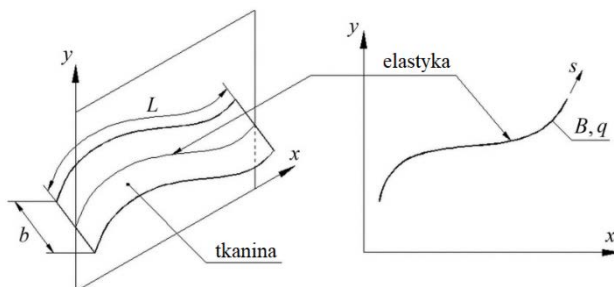
numeryczną metodę obliczania dużych ugięć belek wspornikowych poddanych równomiernemu obciążeniu. W tej metodzie numerycznej założono, że sprężysta oś belki może być aproksymowana przez pewną liczbę łuków okręgu, stycznych do siebie. Do określenia promienia każdego łuku kołowego wykorzystano równanie Bernoulliego-Eulera. Frisch-Fay [10] podał rozwiązanie dla dużego ugięcia belki wspornikowej za pomocą całek eliptycznych. Bisshopp i Drucker [11] rozwiązali problem dużego ugięcia belki wspornikowej poddanej pojedynczemu obciążeniu skupionemu, działającemu pionowo w dół na swobodny koniec belki, wykorzystując również całki eliptyczne. Prace [10] i [11] opierają się na podstawowym twierdzeniu Bernoulliego-Eulera, które stwierdza, że krzywizna jest proporcjonalna do momentu zginającego.

W niniejszym opracowaniu przeanalizowano duże ugięcia struktury tekstylnej o zmiennej sztywności na zginanie poddanej stałemu obciążeniu skupionemu, przyłożonemu na swobodnym końcu. Zagadnienie rozwiązano numerycznie z wykorzystaniem metody Eulera oraz metody strzału (*ang.* shooting method) do rozwiązania brzegowego. Wykorzystano oprogramowanie Mathematica w celu znalezienia kształtu ugiętej struktury. Charakterystycznym dla tej pracy jest to, że ta analiza obejmuje obciążenie struktury stałą, skupioną siłą przyłożoną na swobodnym końcu pod określonym kątem oraz ciężarem własnym badanego obiektu, nie ograniczając w ten sposób analizy tylko do siły skupionej, działającej pionowo do dołu. Ze względu na występowanie w analizie zależności nieliniowych, dokładne rozwiązanie analityczne nie istnieje. Konieczne zatem było opracowanie programu komputerowego, wykorzystującego metodę numeryczną Eulera w celu rozwiązania kształtu ugiętej struktury i przeprowadzenie serii eksperymentów numerycznych. Uzyskane wyniki zostały następnie zweryfikowane przy użyciu oprogramowania wykorzystującego metodę elementów skończonych (MES).

2. Numeryczne rozwiązanie problemu

2.1. Model numeryczny badanego obiektu

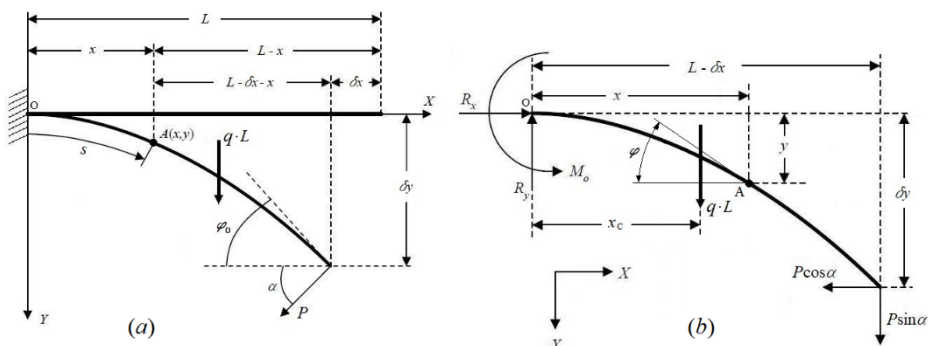
W pracy założono, że podczas przebiegu zginania płaski pas tkaniny będzie reprezentowany poprzez jego przekrój podłużny. Płaski wyrób tekstylny o określonej długości L i szerokości b poddany został zginaniu. Warunki zginania są takie same w całym wyrobie. W ten sposób problem przestrzenny zredukowano do odpowiedniego problemu płaskiego. Zamiast badania paska tkaniny, analiza numeryczna dotyczyć będzie ugięć ciężkiej elastyki o zadanej sztywności zginania B i odpowiednim ciężarze liniowym q , jak pokazano na rysunku 1. Każdy punkt o współrzędnej łukowej s , mierzonej wzdłuż elastyki, zdefiniowany jest poprzez współrzędne kartezjańskie $x(s)$, $y(s)$. Współrzędne x i y są funkcjami zmiennej s .



Rys.1. Model płaskiego wyrobu tekstylnego aproksymowanego elastyką

Źródło: opracowanie własne

Ponadto założono, że elastyka jest nierozciągliwa. Należy zauważyć, że założenie nierozciągliwości jest w pewnym stopniu ograniczające. Jednak takie założenie często pojawia się w analizie dużych ugięć. Oprócz ciężaru liniowego elastyka obciążona jest siłą skupioną. Następnie założono, że obowiązuje twierdzenie Bernoulliego-Eulera, które stwierdza, że krzywizna elastyki jest proporcjonalna do momentu zginającego.



Rys.2. Model płaskiego wyrobu tekstylnego aproksymowanego elastyką

Źródło: opracowanie własne.

Rys.2a pokazuje badany obiekt o długości L obciążony siłą skupioną P przyłożoną na swobodnym końcu. Na tym rysunku δx i δy oznaczają odpowiednio przemieszczenia poziome i pionowe swobodnego końca, a φ_0 maksymalny kąt nachylenia elastyki. Kąt przyłożenia siły skupionej reprezentowany jest przez α . Współrzędna łukowa s mierzona jest od utwierdzonego końca O do punktu A .

Rys.2b przedstawia obiekt uwolniony z więzów i uwzględnia siły działające na ugięty obiekt. W opisie przyjęta, że $x(s)$ i $y(s)$ będą reprezentowane jako x i y . Na utwierdzonym końcu, oznaczonym jako O , M_0 jest momentem reakcji, a R_x i R_y są siłami reakcji. Siłę P rozłożono na składową 0 poziomą i pionową (P_x , P_y).

Należy zauważyć, że współrzędna środka ciężkości x ugiętej krzywej o długości L wynosi $x_c = \left(\int_0^L x ds\right) \cdot L^{-1}$. Momentem reakcji M_O wynosi

$$M_O = P \sin \alpha (L - \delta x) + P \cos \alpha \delta y + qL \cdot \left(\int_0^L x ds\right) \cdot L^{-1}. \quad (1)$$

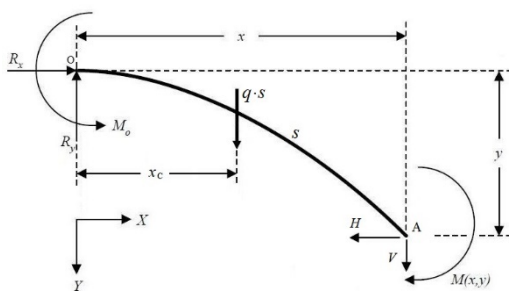
Warunki równowagi są następujące

$$\begin{aligned} R_x &= P \cos \alpha, \quad R_y = P \sin \alpha + qL, \\ M_O &= P \sin \alpha (L - \delta x) + P \cos \alpha \delta y + q \int_0^L x ds. \end{aligned} \quad (2)$$

Równanie Bernoulliego-Eulera dla jednorodnego przekroju prostokątnej belki ma postać $EI \cdot (d\varphi/ds) = M(x, y)$, gdzie $M(x, y)$ jest momentem zginającym w funkcji x i y , φ reprezentuje kąt nachylenia stycznej do elastyki, E to sprężystości, a I jest momentem bezwładności przekroju elastiki wokół osi zginania. Oznaczmy sztywność zginania jako B .

$$B \frac{d\varphi}{ds} = M(x, y). \quad (3)$$

$B=B(s)$ to zmienna sztywność zginania jako funkcja zmiennej s . Należy znaleźć moment M jako funkcję x i y , aby uzyskać moment w dowolnym punkcie na długości elastyki. Można to zrobić, analizując przekrój w dowolnym punkcie A na osi elastyki.



Rys.3. Elastyka uwolniona z więzów

Źródło: opracowanie własne.

Rys.3 pokazuje wycinek elastyki wraz z działającymi na nią siłami reakcji i momentami. Długość łuku elastyki, mierzona między utwierdzonym końcem O i punktem A , jest reprezentowana przez s .

W punkcie A $M(x,y)$ to moment zginający jako funkcja x i y , natomiast V i H reprezentują siły wewnętrzne. Współrzędna środka ciężkości x ugiętej krzywej o długości s wynosi $x_C = [\int_0^s x(\tau)d\tau] \cdot s^{-1}$. Po zsumowaniu momentów względem punktu A otrzymujemy

$$M_O - R_x y - R_y x + qs \{x - [\int_0^s x(\tau)d\tau] \cdot s^{-1}\} - M(x, y) = 0. \quad (4)$$

Wykorzystując równania (2) i (3) otrzymujemy

$$B \frac{d\varphi}{ds} = P \sin \alpha (L - \delta x - x) + P \cos \alpha (\delta y - y) - qLx + \\ + q \int_0^L x ds + qsx - q \int_0^s x(\tau) d\tau. \quad (5)$$

Różniczkując równanie (5) względem s i uwzględniając, że L , δx i δy są stałymi, otrzymujemy następującą zależność

$$\frac{dB}{ds} \frac{d\varphi}{ds} + B \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -P \sin \alpha \frac{dx}{ds} - P \cos \alpha \frac{dy}{ds} - qL \frac{dx}{ds} + q[x + \frac{dx}{ds} s] - qx. \quad (6)$$

W równaniu (6) wykorzystano to, że jeżeli $F(s) = \int_a^s f(t)dt$, to $\frac{dF(s)}{ds} = f(s)$ (podstawowe twierdzenie rachunku całkowego). Wykorzystując trygonometrię można ustalić następujące zależności

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi. \quad (7)$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$B \frac{d^2\varphi}{ds^2} = -P \sin \alpha \cos \varphi - P \cos \alpha \sin \varphi - qL \cos \varphi + qs \cos \varphi - \frac{dB}{ds} \frac{d\varphi}{ds}. \quad (8)$$

Równanie (8) jest nieliniowym równaniem różniczkowym opisującym krzywą ugięcia elastyki obciążonej siłą skupioną i ciężarem własnym, jak pokazano na rys. 2. Ponieważ dokładne rozwiązanie analityczne nie istnieje, opracowane zostanie rozwiązanie numeryczne zadanego problemu.

2.2. Numeryczne rozwiązanie problemu

Metodą Eulera nieliniowe równanie różniczkowe rzędu drugiego (8) można zredukować do dwóch równań różniczkowych nieliniowych pierwszego rzędu. Krzywiznę elastyki, oznaczoną jako κ , można zapisać jako

$$\kappa(s) = \frac{d\varphi}{ds}. \quad (9)$$

Podstawiając równanie (9) do równania (8) otrzymujemy

$$\frac{d\kappa}{ds} = -\frac{P}{B} \sin \alpha \cos \varphi - \frac{P}{B} \cos \alpha \sin \varphi - \frac{qL}{B} \cos \varphi + \frac{q}{B} s \cos \varphi - \frac{dB(s)/ds}{B} \kappa. \quad (10)$$

Aby rozwiązać ten problem numerycznie, zastosowany zostanie układ czterech równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu z czterema niewiadomymi. Układ równań jest następujący

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varphi}{ds} = \kappa, \\ \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \\ \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \\ \frac{d\kappa}{ds} = -\frac{P}{B} \sin \alpha \cos \varphi - \frac{P}{B} \cos \alpha \sin \varphi - \frac{qL}{B} \cos \varphi + \frac{q}{B} s \cos \varphi - \frac{dB/ds}{B} \kappa. \end{array} \right. \quad (11)$$

Z uwagi na fakt, że mamy do czynienia z typowym zagadnieniem brzegowym (nie wszystkie wartości początkowe badanych zmiennych są znane), w celu uzyskania prawidłowej krzywizny na utwierdzonym końcu zostanie wykorzystana metoda strzału (*ang.* shooting method).

W celu rozwiązania problemu, wykorzystano program Mathematica z odpowiednią funkcją do rozwiązania zagadnienia brzegowego z wykorzystaniem metody strzału. Na utwierdzonym końcu znane są $x=0$, $y=0$ i $\varphi=0$. Krzywizna κ jest nieznana. Na wolnym końcu krzywizna κ jest znana ($\kappa=0$), a x , y i φ są nieznane. Ideą metody strzału jest zastosowanie metody Newtona-Raphsona do znalezienia takiej początkowej wartości krzywizny, aby na swobodnym końcu krzywizna miała wartość $\kappa=0$.

3. Wyniki i dyskusja

3.1. Modelowanie zmiennej sztywności zginania

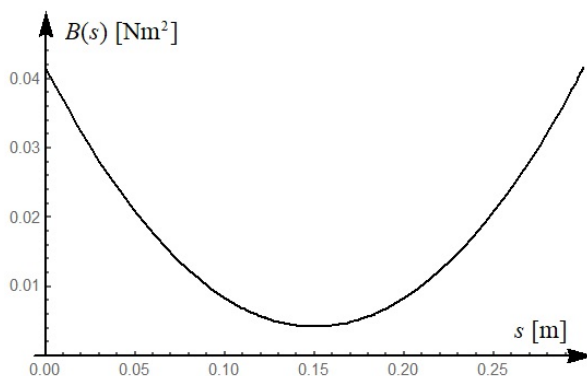
Do analizy numerycznej przyjęto następujące dane opisujące badany obiekt. Długość obiektu $L=0,3\text{m}$. Wymiary przekroju w punkcie utwierdzenia i na swobodnym końcu: szerokość $b=0,02\text{m}$, wysokość $h_0=0,005\text{m}$. Moment bezwładności przekroju: $I_0 = (bh_0^3)/12$. Moduł Younga $E=2 \cdot 10^8\text{N/m}^2$. Ciężar liniowy $q=1\text{N/m}$. Ważnym elementem analizy jest uwzględnienie zmiennej sztywności zginania B badanej struktury tekstylnej na całej jej długości, co często występuje w elementach kompozytowych. Funkcję zmiennej sztywności zginania założono z góry. Przyjęto rozkład sztywności zginania według wielomianu drugiego stopnia. Funkcję $B(s)$ założono następująco:

$$B(s) = \frac{B_0}{L^2} [L^2 + 4Ls(\xi - 1) - 4s^2(\xi - 1)] . \quad (12)$$

Funkcja $B(s)$ jest paraboliczna. Zgodnie z równaniem (12) w punkcie utwierdzenia i w punkcie swobodnym sztywność zginania ma maksymalną wartość $B_0=E \cdot I_0$. W środkowym punkcie elastyki sztywność zginania ma wartość minimalną $\xi \cdot B_0$, gdzie $\xi < 1$. Dla powyższych danych i $\xi=0,1$ mamy, że $B_0=0,0416667\text{Nm}^2$ i wtedy

$$B(s) = 0,462963 \cdot (0,09 - 1,08 \cdot s + 3,6 \cdot s^2), \quad [\text{Nm}^2]. \quad (13)$$

Wykres $B(s)$ przedstawiono na rys.4.



Rys.4. Wykres zmian sztywności zginania wzdłuż badanego obiektu

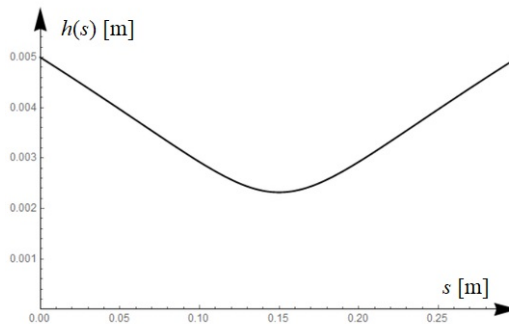
Źródło: opracowanie własne.

W odniesieniu do długości gięcia (zgodnie z testem Peirce'a) mamy:

- maksymalna długość gięcia dla B_0 : $D_{\max}=0,346681$ m,
- minimalna długość gięcia dla $\xi \cdot B_0$: $D_{\min}=0,160915$ m, gdzie $D = \sqrt[3]{B/q}$

Ważnym elementem przeprowadzonej analizy było potwierdzenie poprawności uzyskanych wyników. W celu weryfikacji został utworzony model obiektu do analizy MES za pomocą oprogramowania SolidWorks. Zmienną sztywność zginania uzyskano poprzez zmianę wysokość przekroju $h(s)$ wzdłuż długości obiektu jak niżej.

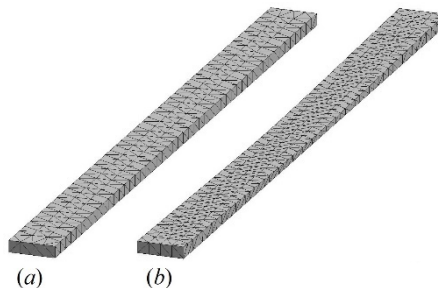
$$h(s) = \sqrt[3]{\frac{12B(s)}{Eb}} = \sqrt[3]{\frac{12B_0[L^2 + 4Ls(\xi - 1) - 4s^2(\xi - 1)]}{EbL^2}} \quad (14)$$



Rys.5. Wykres zmian wysokości przekroju wzdłuż badanego obiektu

Źródło: opracowanie własne.

Rys.6 pokazuje badaną strukturę tekstylną modelowaną w programie SolidWorks.



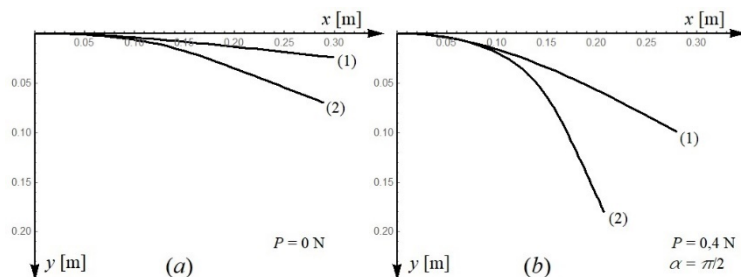
Rys.6. Badana struktura tekstylna modelowana w programie SolidWorks:

(a) stała sztywność zginania, (b) zmienna sztywność zginania

Źródło: opracowanie własne.

3.2. Wyniki obliczeń

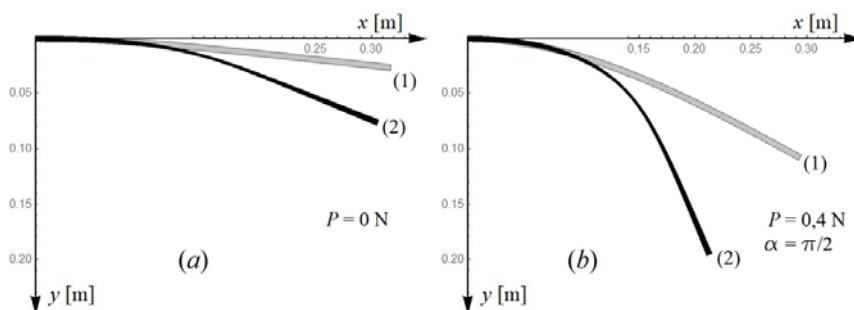
Obliczenia przeprowadzono najpierw dla obciążenia tylko ciężarem własnym q ($P=0$), a następnie razem z siłą działającą na swobodny koniec obiektu ($P \neq 0$). Wyniki obliczeń dla opisanego modelu analitycznego przedstawiono na rys.7. Wartość siły skupionej P przyłożonej do swobodnego końca przyjęto jako $P=0,4\text{N}$. Stały kąt, pod którym przyłożono siłę skupioną wynosił $\alpha=\pi/2$.



Rys.7. Wyniki obliczeń dla modelu analitycznego:
 (a) obciążenie tylko ciężarem własnym ($P=0\text{N}$),
 (b) obciążenie ciężarem własnym i siłą skupioną ($P=0,4\text{N}$),
 (1) stała sztywność zginania B_0 , (2) zmienna sztywność zginania $B(s)$

Źródło: opracowanie własne.

Wyniki dla modelu MES przedstawiono na rys.8. Obliczenia przeprowadzono dla tych samych danych, co dla modelu analitycznego. W celu utrzymania tych samych warunków obciążenia, model MES musi być poddany oddziaływaniu pionowej siły powierzchniowej o wartości: $Q=q/b=50\text{Nm}^{-2}$.



Rys.8. Wyniki obliczeń dla modelu MES:
 (a) obciążenie tylko ciężarem własnym ($P=0\text{N}$),
 (b) obciążenie ciężarem własnym i siłą skupioną ($P=0,4\text{N}$),
 (1) stała sztywność zginania B_0 , (2) zmienna sztywność zginania $B(s)$

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie analizy wykresów (rys.8 i 9) można stwierdzić, że kształty ugiętej struktury zarówno dla modelu analitycznego, jak i modelu MES są identyczne. Potwierdza to również analiza wartości przemieszczeń swobodnego końca dla obu modeli. Wartości przemieszczeń poziomych i pionowych δx i δy przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości przemieszczeń poziomych i pionowych swobodnego końca dla modelu analitycznego i modelu MES dla wybranych warunków obciążenia

			Model analityczny	Model MES	Błąd względny modelu analitycznego w porównaniu do modelu MES ϵ [%]
Stała sztywność zginania $B_0 = \text{const.}$	$P=0N$	δx [mm]	1,115	1,113	0,180
		δy [mm]	24,174	24,148	0,108
	$P=0,4N$ $\alpha=\pi/2$	δx [mm]	20,088	20,269	0,893
		δy [mm]	98,906	99,286	0,383
Zmienna sztywność zginania $B(s)$	$P=0N$	δx [mm]	11,210	11,430	1,925
		δy [mm]	69,778	69,910	0,189
	$P=0,4N$ $\alpha=\pi/2$	δx [mm]	93,081	94,900	1,917
		δy [mm]	180,205	180,100	0,058

Źródło: opracowanie własne.

4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono model analityczny do analizy dużych ugięć płaskiej struktury tekstylnej obciążonej ciężarem własnym i siłą skupioną, przyłożoną na swobodnym końcu. Dla takiego obiektu dokładne rozwiązanie analityczne na współrzędne x i y nie istnieje. Przeprowadzono zatem analizę numeryczną w oparciu o zbudowany model obliczeniowy. W tym celu opracowano dedykowany program komputerowy, pracujący w środowisku Mathematica. Program ten w oparciu o metodę Eulera, wspieraną metodą strzału (*ang.* shooting method) i metodą

Newtona-Raphsona, wykorzystano do znalezienia ugiętego kształtu badanego obiektu, dla zadanej geometrii, materiału i warunków obciążenia.

Następnie przeprowadzono analizę deformacji obiektu metodą elementów skończonych (MES). Analiza MES była rodzajem eksperymentu i została wykorzystana do weryfikacji wyników uzyskanych na podstawie modelu analitycznego. Analiza kształtów ugiętego obiektu, przedstawionych na rysunkach 7 i 8, wykazała wysoką zgodność przedstawionego modelu analitycznego z modelem MES. Dodatkowo wskazuje na to analiza wyników przedstawionych w tabeli 1. Przedstawiony w pracy przypadek zginania płaskiej struktury tekstylnej został pomyślnie rozwiązany z wykorzystaniem metod numerycznych. Praca niniejsza może być punktem wyjścia do tak zwanej analizy odwrotnej, w której ustala się sztywność zginania obiektu w celu uzyskania określonego kształtu dla zadanych warunków obciążenia.

Literatura

- [1] **Gere J.M.**, *Mechanics of Materials*, 6th ed., Brooks/Cole Thomson Learning, Belmont 2004.
- [2] **Lee B.K., Wilson J.F., Oh S.J.**, *Elastica of cantilevered beams with variable cross sections*, International Journal of Non-Linear Mechanics 1993, Vol. 28, ss. 579-589.
- [3] **Baker G.**, *On the large deflections of non-prismatic cantilevers with a finite depth*, Computers & Structures 1993, Vol. 46, nr 2, ss.365-370.
- [4] **Dado M., AL-Sadder S.**, *A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams*, Mech. Res. Commun. 2005, vol. 32, nr 6, ss. 692-703.
- [5] **Shvartsman B.S.**, *Large deflections of a cantilever beam subjected to a follower force*, Journal of Sound and Vibration 2007, Vol. 304, nr 3-5, ss. 969-973.
- [6] **Lewis G., Monasa F.**, *Large deflections of cantilever beams of nonlinear materials*, Computers & Structures 1981, vol. 14, nr 5-6, ss. 357-360.
- [7] **Lee K.**, *Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading*, International Journal of Non Linear Mechanics 2002, vol. 37, nr 3, ss. 439-443.
- [8] **Antman S.**, *Large lateral buckling of nonlinearly elastic beams*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 1984, vol. 84, nr 4, ss. 293-305.
- [9] **Seames A.E., Conway H.D.**, *A numerical procedure for calculating the large deflections of straight and curved beams*, Journal of Applied Mechanics 1957, vol. 24, ss. 289-294.

- [10] **Frisch-Fay R.**, *Large deflections of a cantilever beam under two concentrated loads*, Journal of Applied Mechanics 1962, vol. 29, nr 1 ss. 200-201.
- [11] **Bisshopp K.E., Drucker D.C.**, *Large deflections of cantilever beams*, Quarterly of Applied Mathematics 1945, vol. 3, ss. 272-275.