



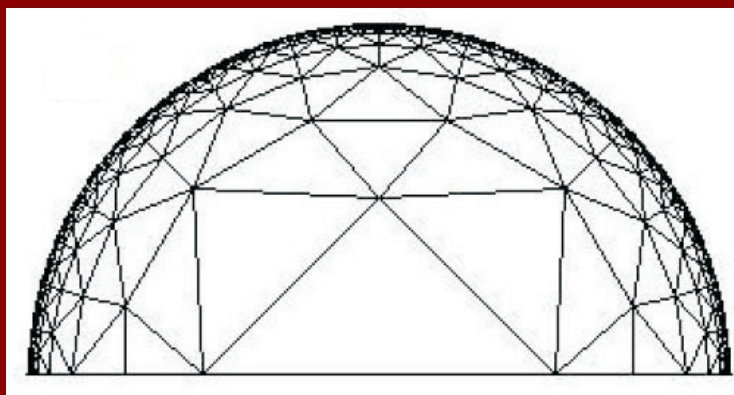
KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



Grzegorz Andrzejczak

Wybrane zagadnienia topologii algebraicznej



Publikacja współfinansowana
ze środków Unii Europejskiej
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Publikacja dystrybuowana bezpłatnie

Politechnika Łódzka



Politechnika Łódzka

Grzegorz Andrzejczak

**Wybrane zagadnienia
topologii algebraicznej**

Łódź 2013

Opiniodawca:
dr Jerzy Kalina

Redaktor Naukowy Wydziału Fizyki Technicznej
Informatyki i Matematyki Stosowanej:
dr inż. Aneta Poniszewska-Marańda

© Copyright by Politechnika Łódzka 2013

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223

tel./fax 42 684-07-93

e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl

www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-560-4

DOI: 10.34658/9788372835604

<https://doi.org/10.34658/9788372835604>

Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11
Nr 2065

Spis treści

Spis treści	i
Wstęp	1
1 Nieco zaawansowane podstawy	2
1.1 Homotopie	3
1.2 Grupa podstawowa	6
1.3 Przestrzenie nakrywające	12
1.4 Konstrukcje przestrzeni topologicznych	18
1.5 Podstawowe konstrukcje algebraiczne	22
2 Sympleksy i kompleksy	27
2.1 Sympleksy	27
2.2 Kompleksy symplecjalne	30
2.3 Odwzorowania symplecjalne	36
2.4 CW -kompleksy	41
3 Homologie singularne	49
3.1 Kompleksy łańcuchowe	49
3.2 Homologie relatywne	56
3.3 Homotopie i naturalne odwzorowania łańcuchowe	60
3.4 Grupy homologii sfer	69
3.5 Twierdzenie Eilenberga–Zilbera	77
4 Homologie symplecjalne	84
4.1 Grupy homologii kompleksów symplecjalnych	84
4.2 Twierdzenie o izomorfizmie	95
4.3 Charakterystyka Eulera i liczba Lefschetza	106
4.4 Produkty	112
5 Ciągi dokładne	116
5.1 Konstrukcje uniwersalne	116

5.2	Ciągi Mayera–Vietorisa	120
5.3	Homologie CW –kompleksów	125
5.4	Produkty w kategorii CW –kompleksów	134
6	W stronę zaawansowanej teorii	137
6.1	Zmiana współczynników i kohomologie	137
6.2	Bogaty asortyment produktów	143
6.3	Co dalej?	151
	Spis symboli i skrótów	152
	Skorowidz	157
	Bibliografia	162

Wstęp

Topologia algebraiczna rozwijała się bardzo intensywnie w II połowie XX wieku i ma dziś status teorii w pełni dojrzałej, o ugruntowanych podstawach i ważnych zastosowaniach – np. w analizie globalnej. Podstawy teorii o różnym stopniu zaawansowania ujęte są w wielu podręcznikach i monografiach, spośród których autor niniejszego skryptu wybrał 7 (tzn. [8], [11], [4] i [9] oraz [3], [7] i [10]) jako rekomendowany materiał uzupełniający.

Skrypt przewidziany jest na roczny kurs podstaw topologii algebraicznej (wykład plus ćwiczenia). Ze względu na własne zainteresowania, autor wychodzi od pojęć grupy podstawowej i nakrycia, ale główny ciężar wykładu dotyczy teorii singularnej (homologie i kohomologie). Wymagania wstępne w zakresie topologii i teorii grup nie wykraczają poza podstawowy materiał kursowy – por. [6] i [2].

Główny cel skryptu jest dwojaki – przy zachowaniu precyzji sformułowań i kompletności dowodów – chodzi o możliwie szybkie dotarcie do kolejnych twierdzeń uważanych za zwieńczenie teorii i stanowiących jej zastosowanie. Przykłady takich *wielkich* twierdzeń obejmują twierdzenia Brouwera i Lefschetza o punkcie stałym, twierdzenie Jordana–Brouwera o wycinaniu, o niezmienniczości obszaru – aż do twierdzenia Borsuka–Ulama o antypodach.

Metoda użyta przez autora dla realizacji zaplanowanego celu polega na konsekwentnej prezentacji i konstruktywnych dowodach równoważności trzech klasycznych podejść. Są to kolejno: podejście singularne, przyjęte za podstawowe, symplecticzne – elementarne obliczeniowo i komórkowe – należące do zaawansowanych, ale umożliwiające największą redukcję modeli algebraicznych opisujących badane przestrzenie topologiczne. Prezentowane teorie wspierają się, co pozwala uniknąć w konstrukcji skryptu odwołań do zaawansowanych twierdzeń algebry homologicznej.

Autor skryptu zajmował się intensywnie topologią algebraiczną – w odniesieniu do tzw. klas charakterystycznych – w latach 1980–1990. Aktualnym obszarem zainteresowań autora jest szeroko pojęta analiza – od globalnej po numeryczną, co zapewne wpłynęło na aspekt obliczeniowy rozwijany w ramach wykładu i w proponowanych ćwiczeniach.

Rozdział 1

Nieco zaawansowane podstawy

Dla przestrzeni topologicznych topologia wyróżnia spośród wszystkich funkcji $f: X \rightarrow Y$ funkcje *ciągłe*, czyli spełniające klasyczny warunek

$$f^{-1}U \subset X \text{ jest podzbiorem otwartym, dla wszystkich } U \text{ otwartych w } Y.$$

Funkcje ciągłe będziemy nazywać *odwzorowaniami*.

Spośród rozległej palety problemów dotyczących topologii autor skryptu pozwala sobie – ze względu na prostotę sformułowania i niebanalność – wyróżnić i przyjąć za punkt wyjścia problem istnienia *retrakcji*.

Definicja 1.0.1. *Podzbiór A przestrzeni topologicznej X jest jej retraktem, jeśli istnieje odwzorowanie $r: X \rightarrow A$ (retrakcja) takie, że $r|_A = \text{id}_A$, tzn. takie, które ograniczone do A jest identycznością.*

Problem istnienia retrakcji danej przestrzeni topologicznej X do podprzestrzeni $A \subset X$ może być oczywiście banalny, np. wtedy gdy A składa się z jednego punktu, lub prosty, gdy A zawiera dokładnie dwa punkty.

Ćwiczenie 1.0.1. Wyjaśnić, kiedy *nie* istnieje retrakcja $X \rightarrow \{x_1, x_2\}$, dla $x_1, x_2 \in X$.

Pytanie, czy sfera S^{n-1} jest retraktem kuli domkniętej B^n jest niebanalne. Odpowiedź negatywna wynika dla $n = 2$ z rozwijanej w kolejnym podrozdziale teorii grup podstawowych przestrzeni. Inne algebraiczne metody prezentowane w skrypcie – skupione wokół pojęcia grup homologii – pozwalają uzyskać podobnie negatywną odpowiedź w dowolnych wymiarach i przynoszą w formie wniosku *Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym* udowodnione w rozdziale 3.

Analogiczny problem rozważany w przestrzeniach rzutowych jest ściśle związany z przedstawionym w rozdziale 6 *Twierdzeniem Borsuka–Ulama o punktach antypodycznych*. Warto nadmienić, że twierdzenie to ma istotne konsekwencje praktyczne dotyczące sprawiedliwego, równego podziału kanapki, co znalazło swój precyzyjny matematyczny opis (w n wymiarach) we wniosku 6.2.10.

Niniejszy skrypt zawiera niewiele rysunków, które mogłyby uaktywnić wyobraźnię czytelnika i stanowiłyby wskazówkę dla niektórych dowodów. Przyczyną tego braku jest poczucie estetyki autora połączone z głębokim przeświadczeniem, że każdy matematyk zainteresowany topologią algebraiczną powinien zobaczyć ilustracje zawarte w książce Stillwella [11], a w miarę potrzeby również – spróbować narysować własne.

Przedstawiany tutaj fragment topologii algebraicznej przyporządkowuje przestrzeniom topologicznym (pojedynczym oraz ich układom: parom, ewent. trójkom) obiekty algebraiczne złożone z grup i ich homomorfizmów – w sposób naturalny. Naturalność wykorzystywanych konstrukcji jest precyzyjnie zdefiniowaną własnością, zależną od kontekstu. Za minimalny wymagany aspekt naturalności można uznać postulat, by homeomorficzne przestrzenie topologiczne i ich układy prowadziły do izomorficznych obiektów algebraicznych. Szersze znaczenie naturalności tłumaczy się na gruncie teorii kategorii jako funktorialność, co oznacza także, iż (dopuszczalnym) odwzorowaniom przestrzeni mają odpowiadać homomorfizmy (algebraiczne), a superpozycjom – złożenia homomorfizmów.

1.1 Homotopie

W wielu przypadkach podstawą obliczalności konstrukcji algebraicznych jest możliwość utożsamiania odwzorowań i przestrzeni *homotopijnych*.

Definicja 1.1.1. *Dla dowolnych dwu przestrzeni topologicznych X i Y odwzorowania $f, g: X \rightarrow Y$ są homotopijne – oznaczenie $f \simeq g$, jeśli istnieje ciągła funkcja $F: I \times X \rightarrow Y$ taka, że*

$$F(0, x) = f(x) \quad i \quad F(1, x) = g(x),$$

dla $x \in X$. Funkcja F o powyższej własności jest homotopią f i g (lub: od f do g), co zapisujemy symbolicznie $F: f \simeq g$.

Symbol I użyty w definicji oznacza – i będzie oznaczać w wielu miejscach skryptu (zgodnie z kontekstem) przedział jednostkowy $I = [0, 1]$.

Stwierdzenie 1.1.1. *Relacja homotopii \simeq jest równoważnością w każdym ze zbiorów odwzorowań (ciągłych) $\mathcal{F}(X, Y)$ ustalonych przestrzeni topologicznych X i Y . Relacja \simeq jest zgodna ze składaniem odwzorowań, tzn. dla dowolnych przestrzeni X, Y i Z , jeśli $f, f': X \rightarrow Y$ oraz $g, g': Y \rightarrow Z$ są funkcjami ciągłymi, to prawdziwa jest implikacja*

$$(f \simeq f' \quad i \quad g \simeq g') \implies (g \circ f \simeq g' \circ f').$$

Dowód. Jest to dość łatwe, ale bardzo ważne dla potencjalnego czytelnika tego skryptu ćwiczenie. □

Definicja 1.1.2. *Klasy równoważności relacji homotopii nazywamy po prostu klasami homotopii i oznaczamy $[f]$, a dokładniej $[f]: X \rightarrow Y$ dla odwzorowania*

$f: X \rightarrow Y$. Funkcja $f: X \rightarrow Y$ jest równoważnością homotopijną, jeśli klasa homotopii $[f]$ jest odwracalna, tzn. jeśli istnieje funkcja $g: Y \rightarrow X$ taka, że odpowiednie złożenia f i g są homotopijne z identycznością,

$$f \circ g \simeq \text{id}_Y, \quad g \circ f \simeq \text{id}_X.$$

Przestrzenie X i Y nazywamy homotopijnie równoważnymi – oznaczenie $X \simeq Y$, jeśli istnieje równoważność homotopijna jednej w drugą. Przestrzeń X jest ściągającą, jeśli jest homotopijnie równoważna z przestrzenią jednopunktową.

Przy uwzględnieniu homotopii, pojęcie retrakcji przyjmuje bardziej subtelne (choć mocniejsze) formy.

Definicja 1.1.3. Podzbiór A jest retraktem deformacyjnym przestrzeni X , jeśli istnieje retrakcja $r: X \rightarrow A$, która wraz z włożeniem $i_A: A \hookrightarrow X$ spełnia dodatkowy warunek

$$\text{id}_X \simeq i_A \circ r.$$

A jest mocnym retraktem deformacyjnym X , jeśli istnieje homotopia $F: I \times X \rightarrow X$ taka, że $F(0, \cdot) = \text{id}_X$, $F(t, a) = a$, dla $(t, a) \in (I \times A)$ oraz $F(1, \cdot)$ przeprowadza X w A .

Ćwiczenie 1.1.1. Sfera S^{n-1} jest mocnym retraktem deformacyjnym kuli B^n pozabawionej punktu wewnętrznego.

Dodatkowy warunek narzucony na homotopię w definicji mocnego retraktu deformacyjnego pojawia się w wielu sytuacjach i jest nazywany homotopią *relatywną*.

Definicja 1.1.4. Odwzorowania $f, g: X \rightarrow Y$ takie, że $f|_A = g|_A$, dla pewnego podzbioru $A \subset X$, nazywamy homotopijnymi względem A , co zapisujemy symbolicznie

$$f \simeq g \text{ rel } A, \tag{1.1}$$

jeśli istnieje homotopia $F: f \simeq g$ spełniająca dodatkowy warunek

$$F(t, a) = f(a) = g(a), \quad \text{dla } (t, a) \in I \times A.$$

Istotną część problemów w obrębie topologii dotyczy położenia podzbioru w otaczającej przestrzeni. Stąd

Definicja 1.1.5. Parę uporządkowaną (X, A) nazywamy parą topologiczną lub po prostu parą, jeśli A jest podprzestrzenią przestrzeni X , czyli podzbiorem z topologią indukowaną. Odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ spełniające warunek $f(A) \subset B$, dla danych podprzestrzeni $A \subset X$ i $B \subset Y$, uważamy za odwzorowanie par, co zapisujemy symbolicznie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Odwzorowania par $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ są homotopijne, jeśli istnieje homotopia $F: f \simeq g$, czyli odwzorowanie par $F: (I \times X, I \times A) \rightarrow (Y, B)$ takie, że $F(0, \cdot) = f$, $F(1, \cdot) = g$.

Produkt kartezjański par (X, A) i (Y, B) definiujemy jako parę

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y). \tag{1.2}$$

Dla wygody będziemy korzystać z oznaczenia $I \times (X, Y) = (I \times X, I \times A)$. Jest to zgodne z (1.2) oraz z konwencją, by przestrzeń topologiczną X utożsamiać z parą (X, \emptyset) .

Przestrzenie topologiczne (także – pary) wraz z klasami homotopii odwzorowań stanowią przykład *kategorii*.

Definicja 1.1.6. *Kategoria \mathcal{C} obejmuje następujące pojęcia:*

- (i) *Klasa obiektów – oznaczana zazwyczaj tak samo, jak kategoria.*
- (ii) *Dla każdej pary obiektów $X, Y \in \mathcal{C}$ dany jest zbiór morfizmów $\mathcal{C}(X, Y)$ – z X do Y .*
- (iii) *Dla każdej trójki $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ określone jest złożenie*

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \ni (f, g) \mapsto g \circ f \in \mathcal{C}(X, Z)$$

spełniające naturalny warunek łączności i posiadające jedności, czyli morfizmy $1_Y \in \mathcal{C}(Y, Y)$, dla $Y \in \mathcal{C}$, takie, że $1_Y \circ f = f$, dla $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ i $g \circ 1_Y = g$, dla $g \in \mathcal{C}(Y, Z)$.

W ramach ustalonej kategorii, morfizmy $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ oznacza się tak jak funkcje, $f: X \rightarrow Y$ lub $X \xrightarrow{f} Y$. Pozostawiamy czytelnikowi wyróżnienie *równoważności* jako odwracalnych morfizmów i sprawdzenie, że otrzymana w ten sposób relacja wśród obiektów jest *równoważnością*.

Patrząc na kategorie jako na „obiekty”, spodziewamy się odpowiedniej do kontekstu definicji „morfizmu”.

Definicja 1.1.7. *Dla danych dwu kategorii \mathcal{C}_1 i \mathcal{C}_2 , functor kowariantny $F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ (z \mathcal{C}_1 do \mathcal{C}_2) składa się z:*

- (i) *przyporządkowania obiektowego $\mathcal{C}_1 \ni X \rightsquigarrow F(X) \in \mathcal{C}_2$ oraz*
- (ii) *funkcji $\mathcal{C}_1(X, Y) \xrightarrow{F} \mathcal{C}_2(F(X), F(Y))$, dla $X, Y \in \mathcal{C}_1$, spełniającej warunki*

$$F(1_X) = 1_{F(X)}, \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

$F: \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_2$ jest funktorem kontrawariantnym, gdy funkcje działające na morfizmach odwracają kierunek morfizmów, $\mathcal{C}_1(X, Y) \xrightarrow{F} \mathcal{C}_2(F(Y), F(X))$, przy czym $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Będziemy uważać kategorie i funktory raczej jako sposób opisu, zespół precyzyjnych oznaczeń i własności, niż cel sam w sobie.

Przykład 1.1.1. W bieżącym rozdziale wyszliśmy od kategorii \mathcal{T} przestrzeni topologicznych z odwzorowaniami, a poprzez homotopie skonstruowaliśmy kategorię HT , w której obiektami są również przestrzenie topologiczne, natomiast morfizmami – klasy homotopii odwzorowań. Niejako przy okazji otrzymaliśmy także functor kowariantny przypisujący odwzorowaniom klasy homotopii. Funktorialność (nazywana też *naturalnością*) mieści w sobie własności ujęte w stwierdzeniu 1.1.1.

Ćwiczenie 1.1.2. Rozpoznać kategorie i funktory występujące niejawnie w niniejszym podrozdziale. W szczególności sprawdzić, że przyporządkowania obiektowe $X \rightsquigarrow (X, \emptyset)$ i $X \rightsquigarrow I \times X$ wyznaczają funktory.

1.2 Grupa podstawowa

Pojęcie grupy podstawowej przestrzeni topologicznej będzie dla nas pierwszą topologiczno-algebraiczną konstrukcją, wychodzącą od obiektów i własności topologicznych, a prowadzącą w stronę nietrywialnych, obliczalnych obiektów algebraicznych – w tym przypadku grup (na ogół nieabelowych). Punktem wyjścia są zbiory (przestrzenie) pętli i ogólniej dróg w danej przestrzeni topologicznej.

Definicja 1.2.1. Drogą w przestrzeni topologicznej X nazywamy każde odwzorowanie (funkcję ciągłą) $\omega: I \rightarrow X$, gdzie $I = [0, 1]$ jest odcinkiem jednostkowym. Punkty $\omega(0), \omega(1) \in X$ nazywamy odpowiednio początkiem i końcem drogi ω . Droga jest pętlą (pętlą w $x_0 \in X$), jeśli jej początek i koniec pokrywają się (z x_0).

Zbiór wszystkich dróg w przestrzeni X będziemy oznaczać $\Pi(X)$; dla dowolnego $x_0 \in X$, podzbiór $\Omega(X, x_0) = \{\omega \in \Pi(X); \omega(0) = \omega(1) = x_0\}$ jest przestrzenią pętli w X w punkcie x_0 .

Dla dowolnego odwzorowania $f: X \rightarrow Y$, odwzorowaniem indukowanym w przestrzeni dróg nazywamy funkcję $f_{\#}: \Pi(X) \ni \omega \mapsto f \circ \omega \in \Pi(Y)$.

Definicja 1.2.2. Dla dowolnych punktów $x, y \in X$, drogi $\omega_0, \omega_1 \in \Pi(X)$ o początkach w x i końcach w y są homotopijne, jeśli istnieje dla nich homotopia

$$\omega_0 \simeq \omega_1 \text{ rel } \dot{I},$$

gdzie $\dot{I} = \{0, 1\}$. Zbiór klas homotopii dróg oznaczamy $\mathcal{P}(X)$; wyróżniamy podzbiory klas dróg o ustalonych końcach (dokładniej: początku x i końcu y) i oznaczamy $\pi(X; x, y) = \{[\omega] \in \mathcal{P}(X); \omega(0) = x, \omega(1) = y\}$.

Każde odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ wyznacza funkcje $f_*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, $\pi(X; x_0, x_1) \rightarrow \pi(Y; f(x_0), f(x_1))$, które będziemy nazywać indukowanymi przez f .

Użycie określenia przestrzeni dla zbiorów dróg i pętli jest uzasadnione naturalną topologią (tzw. topologią zwarto-otwartą), jaką oba te zbiory posiadają. Pozostawiamy czytelnikowi – jako ćwiczenie – sprawdzenie, że klasy homotopii dróg odpowiadają składowym łukowej spójności przestrzeni $\Pi(X)$ (z odpowiednio zdefiniowaną topologią). To podejście nie będzie wykorzystywane w niniejszym skrypcie. Klasy homotopii dróg i pętli będą nas interesować jako zbiory posiadające ważną strukturę algebraiczną.

Definicja 1.2.3. Dla dowolnych dwu dróg $\omega, \omega' \in \Pi(X)$ takich, że koniec jednej jest początkiem drugiej, $\omega(1) = \omega'(0)$, produktem nazwiemy drogę $\omega \cdot \omega' \in \Pi(X)$ zdefiniowaną wzorem

$$\omega \cdot \omega'(s) = \begin{cases} \omega(2s) & \text{dla } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2s - 1) & \text{dla } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Zauważmy, że produkty wzajemnie homotopijnych dróg są drogami homotopijnymi, a zatem definicja produktu rozszerza się na klasy homotopii, $[\omega] \cdot [\omega'] = [\omega \cdot \omega']$.

Ćwiczenie 1.2.1. Sprawdzić, że dowolne dwie homotopie dróg $F: \omega \simeq \omega_1 \text{ rel } \dot{I}$ i $F': \omega' \simeq \omega'_1 \text{ rel } \dot{I}$ wyznaczają homotopię $\omega \cdot \omega' \simeq \omega_1 \cdot \omega'_1 \text{ rel } \dot{I}$. Zdefiniować homotopię $F \cdot F'$ zgodnie ze wzorem (1.3) – osobno na $I \times [0, \frac{1}{2}]$ i $I \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Uwaga 1.2.1. Niektórzy autorzy definiują produkt, odwracając kolejność dróg. Prowadzi to do subtelnych różnic w opisie dalszych konstrukcji, ale nie wpływa na ich wynik z dokładnością do izomorfizmu.

Twierdzenie 1.2.1. Własności produktu klas homotopii dróg w dowolnej przestrzeni topologicznej X :

(i) $([\omega] \cdot [\omega']) \cdot [\omega''] = [\omega] \cdot ([\omega'] \cdot [\omega''])$ – o ile $\omega(1) = \omega'(0)$ i $\omega'(1) = \omega''(0)$ (łączność),

(ii) Dla każdego $x \in X$, klasa $1_x = [e_x]$ drogi stałej $e_x(s) \equiv x$ jest jednością mnożenia,

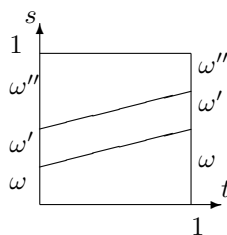
$$1_{\omega(0)} \cdot [\omega] = [\omega] = [\omega] \cdot 1_{\omega(1)}.$$

(iii) Dla każdej klasy $[\omega]$, droga $\bar{\omega}(s) \equiv \omega(1-s)$ wyznacza klasę homotopii taką, że

$$[\omega] \cdot [\bar{\omega}] = 1_{\omega(0)}, \quad [\bar{\omega}] \cdot [\omega] = 1_{\omega(1)}$$

tzn. element odwrotny do $[\omega]$.

Ze względu na wymienione w twierdzeniu własności zbiór $\mathcal{P}(X)$ nosi nazwę *gru-poidu podstawowego* przestrzeni topologicznej X . Każde odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ indukuje *homomorfizm grupoidów* $f_*: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ – tzn. odwzorowanie zgodne z opisaną wyżej operacją mnożenia klas homotopii dróg.

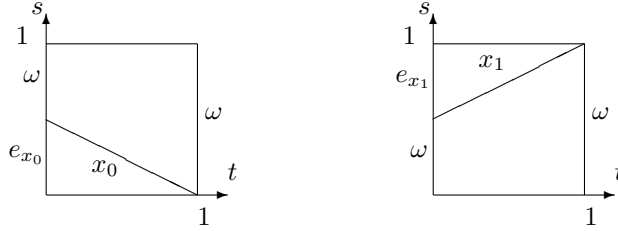


Rysunek 1.1: Homotopia $(\omega \cdot \omega') \cdot \omega'' \simeq \omega \cdot (\omega' \cdot \omega'')$

Dowód. Dla dowodu łączności (i) rozważmy dowolne trzy drogi ω, ω' i ω'' w X o odpowiednio zgodnych końcach. Wzór

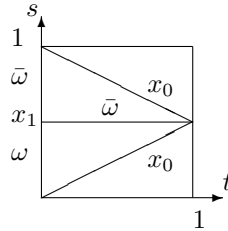
$$G(t, s) = \begin{cases} \omega\left(\frac{4s}{t+1}\right), & \text{dla } 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \omega'(4s - t - 1), & \text{dla } \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4}, \\ \omega''\left(\frac{4s-2-t}{2-t}\right), & \text{dla } \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

opisuje poszukiwaną homotopię, zgodnie z rysunkiem 1.1. Istnienie jedności (prawo- i lewostronnych) wykazujemy, biorąc dowolną drogę $\omega \in \Pi(X)$ o początku x_0 i końcu x_1 i budując stosowne homotopie w oparciu o rysunek 1.2. Szczegóły pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.



Rysunek 1.2: Homotopie $e_{x_0} \cdot \omega \simeq \omega$, $\omega \cdot e_{x_1} \simeq \omega$

Ostatnią z własności – istnienie elementów odwrotnych – sprawdzamy, wychodząc od dowolnej drogi $\omega \in \Pi(X)$ (od x_0 do x_1) i rozważając odwzorowanie $H: I^2 \rightarrow X$ takie, że



Rysunek 1.3: Homotopia $\omega \cdot \bar{\omega} \simeq e_{x_0}$

$$H(t, s) = \begin{cases} \omega(0), & \text{dla } 0 \leq s \leq t/2, \\ \omega(2s - t), & \text{dla } t/2 \leq s \leq 1/2, \\ \omega(2 - 2s - t), & \text{dla } 1/2 \leq s \leq 1 - t/2, \\ \omega(0), & \text{dla } 1 - t/2 \leq s \leq 1, \end{cases}$$

co ilustruje rysunek 1.3. Odwzorowanie H jest homotopią $\omega \cdot \bar{\omega} \simeq e_{x_0}$ rel \dot{I} . \square

Wniosek 1.2.2. Dla każdego punktu $x_0 \in X$, zbiór $\pi_1(X, x_0) = \pi(X; x_0, x_0)$ klas homotopii pętli w punkcie x_0 z działaniem \cdot jest grupą. Jeśli $y_0 \in X$ jest w tej samej składowej łukowej spójności przestrzeni, to każda klasa homotopii $[\gamma]$ drogi w X od x_0 do y_0 wyznacza izomorfizm grup

$$h_{[\gamma]}: \pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, y_0), \quad [\omega] \mapsto [\bar{\gamma} \cdot \omega \cdot \gamma].$$

Dowód. Ćwiczenie. \square

Definicja 1.2.4. Grupę $\pi_1(X, x_0)$ nazywamy grupą podstawową przestrzeni topologicznej X w punkcie x_0 .

Wiemy już, że grupa podstawowa z dokładnością do izomorfizmu nie zależy od wyboru punktu odniesienia, jeśli ograniczamy się do wybranej składowej łukowej spójności \tilde{X} przestrzeni X . W istocie, $\pi_1(X, x_0) = \pi_1(\tilde{X}, x_0)$ jest grupą podstawową wybranej składowej i nie ma związku z grupami podstawowymi innych składowych – rozważane pojęcie ma zatem sens jedynie dla przestrzeni łukowo spójnych. Nawet w takim przypadku wyróżnienie punktu odniesienia jest istotne, a izomorfizmy $\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{\cong} \pi_1(X, y_0)$ zależą w ogólności od drogi łączącej x_0 z y_0 , a nie od samych punktów. Natomiast w kategorii par złożonych z przestrzeni i punktu odniesienia grupa podstawowa jest funktorem.

Stwierdzenie 1.2.3. *Każda klasa homotopii odwzorowań par $f: (X, \{x_0\}) \rightarrow (Y, \{y_0\})$ wyznacza naturalny homomorfizm grup $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$, $f_*[\omega] = [f \circ \omega]$. Naturalność rozumiana jest w sensie funktorialnym, tzn. zachodzi równość $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, dla homomorfizmu indukowanego przez złożenie odwzorowań par.*

Dowód. Dowód sprowadza się do sprawdzenia, że homotopijne odwzorowania par przeprowadzają dowolną pętlę w x_0 na homotopijne pętle w y_0 . □

Kolejne twierdzenie wyjaśnia, w jakim stopniu functor grupy podstawowej wyznaczony jest przez klasy dowolnych homotopii przestrzeni topologicznych.

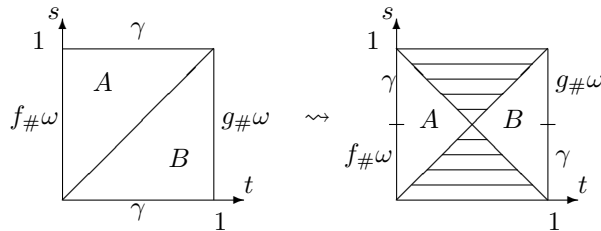
Twierdzenie 1.2.4. *Dla dowolnego punktu $x_0 \in X$ i dowolnej homotopii $F: I \times X \rightarrow Y$ pomiędzy odwzorowaniami $f = F(0, \cdot)$ i $g = F(1, \cdot)$ przestrzeni X w Y , niech $\gamma = F(\cdot, x_0) \in \Pi(Y)$ będzie drogą od $f(x_0)$ do $g(x_0)$. Wówczas homomorfizmy indukowane grup podstawowych $f_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$ i $g_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, g(x_0))$ wiążą zależność*

$$g_* = h_{[\gamma]} \circ f_*$$

Dowód. Dla dowolnej pętli $\omega: (I, \dot{I}) \rightarrow (X, \{x_0\})$, odwzorowanie

$$F_\omega: I^2 \ni (t, s) \mapsto F(t, \omega(s)) \in Y$$

wyznacza na brzegu kwadratu jednostkowego pętle $f \circ \omega$ i $g \circ \omega$ połączone drogą γ – zgodnie z rysunkiem 1.4. Pokazana na rysunku deformacja kwadratu pozwala



Rysunek 1.4: Schemat homotopii dróg od $(0, 0)$ do $(1, 1)$ wzdłuż brzegu I^2

w oparciu o F_ω zbudować homotopię $G_\omega: I^2 \rightarrow Y$, $(f_{\#\omega}) \cdot \gamma \simeq \gamma \cdot (g_{\#\omega})$. □

Ćwiczenie 1.2.2. Podać jawny wzór opisujący ciągłą funkcję λ przekształcającą prawy z kwadratów rysunku 1.4 na lewy i odwzorowującą na siebie odpowiednie trójkąty oznaczone A i B – obrazem obszaru zakreskowanego powinna być główna przekątna lewego kwadratu. Sprawdzić, że $G_\omega = F_\omega \circ \lambda$ jest homotopią $(f_{\#}\omega) \cdot \gamma \simeq \gamma \cdot (g_{\#}\omega)$ rel \dot{I} .

Wniosek 1.2.5. *Dowolne dwie homotopijnie równoważne, łukowo spójne przestrzenie topologiczne mają izomorficzne grupy podstawowe.*

Dowód. Ćwiczenie. □

Definicja 1.2.5. *Przestrzeń łukowo spójną X nazywamy jednospójną, gdy grupa podstawowa X (względem dowolnego punktu) jest trywialna.*

Ćwiczenie 1.2.3. Skoro przestrzeń jednopunktowa jest jednospójna, wniosek 1.2.5 gwarantuje jednospójność przestrzeni ściągalnych, tzn. homotopijnie równoważnych przestrzeni jednopunktowej. Wychodząc od danej równoważności homotopijnej $F: X \simeq \{x_0\}$, $x_0 \in X$, zbudować – dla dowolnej pętli $\omega \in \Omega(X, x_0)$ – homotopię $\omega \simeq e_{x_0}$ rel \dot{I} .

Ćwiczenie 1.2.4. Niech $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$ będzie odwzorowaniem wykładniczym $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(2\pi it) \in S^1$. Dla dowolnej pętli $\omega \in \Omega(S^1, 1)$ zbudować jednoznaczne podniesienie $\tilde{\omega}: (I, \{0\}) \rightarrow (\mathbb{R}, \{0\})$, czyli drogę spełniającą warunek $p \circ \tilde{\omega} = \omega$. Sprawdzić, że w przypadku homotopii $F: \omega_0 \simeq \omega_1$ rel \dot{I} , podniesienia pętli $\omega_t = F(t, \cdot)$, $t \in I$, wyznaczają ciągłą funkcję $\tilde{F}: I^2 \ni (t, s) \mapsto \tilde{\omega}_t(s) \in \mathbb{R}$. Wywnioskować stąd, że koniec drogi $\tilde{\omega}$ jest taki sam dla wszystkich pętli homotopijnych. Zatem – grupa podstawowa okręgu $\pi_1(S^1, 1)$ jest nietrywialna.

Wniosek 1.2.6. *Okrąg S^1 nie jest retraktem koła jednostkowego B^2 . Każde odwzorowanie koła w siebie ma punkt stały.*

Dowód. Ewentualna retrakcja $r: B^2 \rightarrow S^1$ wraz z włożeniem $i: S^1 \hookrightarrow B^2$ spełniałyby warunek $r \circ i = \text{id}_{S^1}$. Dla grup podstawowych oznaczałoby to przedstawienie identyczności $\text{id}: \pi_1(S^1, 1) \rightarrow \pi_1(S^1, 1)$ jako złożenie

$$\pi_1(S^1, 1) \xrightarrow{r_{\#}} \pi_1(B^2, 1) \xrightarrow{i_{\#}} \pi_1(S^1, 1). \quad (1.4)$$

Nie jest to możliwe, gdyż grupa $\pi_1(B^2, 1)$, jest trywialna, co oznacza że homomorfizm (1.4) jest stały. Pozostaje to w sprzeczności z wykazaną w ćwiczeniu 1.2.4 nietrywialnością grupy podstawowej okręgu. Sprawdzenie, że znajomość odwzorowania $B^2 \rightarrow B^2$ bez punktów stałych pozwalałoby skonstruować retrakcję, pozostawiamy czytelnikowi. Odpowiednią konstrukcję można też znaleźć w dalszej części skryptu. □

Przypominamy klasyczne pojęcie z topologii metrycznej:

Definicja 1.2.6. Dla dowolnego otwartego pokrycia \mathfrak{U} zbioru zwartej X w przestrzeni metrycznej, wielkość

$$\varepsilon = \min_{x \in X} \max_{U \in \mathfrak{U}} \text{dist}(x, X \setminus U)$$

nazywamy liczbą Lebesgue'a pokrycia.

Liczba Lebesgue'a jest dodatnia i ma tę własność, że każdy podzbiór o średnicy mniejszej niż ε jest zawarty w którymś ze zbiorów pokrycia.

Przykład 1.2.1. Wykażemy, że sfera S^n wymiaru $n \geq 2$ jest jednospójna. W tym celu przedstawiamy sferę jako sumę dwu otwartych półsfery, np.

$$U = \{(t_0, \dots, t_n) \in S^n; t_n > -1/2\}, \quad V = \{(t_0, \dots, t_n) \in S^n; t_n < 1/2\}.$$

Dla dowolnej pętli $\omega \in \Omega(S^n, x_0)$, $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$, ustalając podział $0 = a_0 < \dots < a_k = 1$ odcinka I na tyle drobny, by jego średnica była mniejsza niż liczba Lebesgue'a pokrycia $\{\omega^{-1}(U), \omega^{-1}(V)\}$, zauważamy, że każdy ze zbiorów $\omega([a_{i-1}, a_i])$, $i \leq k$, jest zawarty w U lub w V . Wybór podciągu $0 = b_0 < \dots < b_m = 1$ złożonego ze wszystkich wyrazów a_i , dla których $\omega(a_i) \in U \cap V$, tworzy nowy podział odcinka – również wpisany w pokrycie $\{\omega^{-1}(U), \omega^{-1}(V)\}$. Ponieważ zbiór V jest ściągalny, a przekrój $U \cap V$ łukowo spójny, dla każdego $j \leq m$ takiego, że $\omega([b_{j-1}, b_j]) \subset V$, możemy w $U \cap V$ wskazać drogę γ_j od $\omega(b_{j-1})$ do $\omega(b_j)$ oraz skonstruować w V deformację (homotopię) $\omega|_{[b_{j-1}, b_j]} \simeq \gamma_j$ zachowującą końce. Otrzymana w ten sposób pętla jest homotopijna z ω , a ponieważ przebiega w całości w zbiorze U , można ją zdeformować do pętli stałej e_{x_0} .

Rozumowanie przedstawione w powyższym przykładzie można rozwinąć i wykorzystać w ogólniejszej sytuacji – uzyskując klasyczne twierdzenie, pozwalające na efektywne wyznaczanie grup podstawowych.

Twierdzenie 1.2.7 (Van Kampena). *Jeśli przestrzeń topologiczna X jest sumą wewnątrz swoich dwu podzbiorów $X_1, X_2 \subset X$, przy czym iloczyn $X_1 \cap X_2$ jest łukowo spójny, to dla dowolnego punktu odniesienia $x_0 \in X_1 \cap X_2$ grupa podstawowa $\pi_1(X, x_0)$ jest amalgamatem grup $\pi_1(X_i, x_0)$, $i = 0, 1$, względem $\pi_1(X_1 \cap X_2, x_0)$, to znaczy jest najmniejszą grupą generowaną przez $\pi_1(X_i, x_0)$, $i = 0, 1$, w której zachodzą relacje*

$$\iota_{1*}(g) = \iota_{2*}(g), \quad \text{dla } g \in \pi_1(X_1 \cap X_2, x_0),$$

gdzie $\iota_i: X_1 \cap X_2 \hookrightarrow X_i$, $i = 1, 2$, oznaczają włożenia.

Dowód. Patrz np. [7, Tw. 7.12] □

Ćwiczenie 1.2.5. Sformułować pełną, poprawną definicję amalgamatu $G_1 *_G G_2$ grup G_1, G_2 względem G . Podać jawną konstrukcję amalgamatu jako grupy ilorazowej.

Uwaga 1.2.2. Cyfra 1 użyta w oznaczeniu grupy podstawowej sugeruje, że znane, a przynajmniej badane są także grupy $\pi_n(X, x_0)$ – tzw. *wyższe grupy homotopii* – dla $n > 1$. Czytelnik może zdefiniować np. grupę $\pi_2(X, x_0)$ w dwojaki sposób: jako zbiór klas homotopii odwzorowań $(S^2, \{1\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ z naturalnym(?) działaniem, albo – jako grupę $\pi_1(\Omega(X, x_0), 1_{x_0})$. Autor skryptu gorąco zachęca czytelników – przynajmniej tych, którzy potrafią wykazać, że wyższe grupy homotopii są abelowe – do dalszej aktywności, tym bardziej, że nawet dla sfer $S^n, n \geq 2$, nie są znane wszystkie ich wyższe grupy homotopii. Przykłady i metody można znaleźć np. w [7] i [10].

1.3 Przestrzenie nakrywające

Rozwijając ideę zasygnalizowaną w ćwiczeniu 1.2.4, zaczniemy od wyróżnienia ważnej klasy przestrzeni topologicznych, a właściwie odwzorowań.

Definicja 1.3.1. Dla danej przestrzeni topologicznej X nakryciem lub przestrzenią nakrywającą nazywamy przestrzeń E wraz z odwzorowaniem $p: E \rightarrow X$ takie, że:

- (i) $p(E) = X$,
- (ii) każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie prawidłowo nakryte $V \subset X$, którego przeciwwobraz $p^{-1}(V)$ jest sumą rozłączną podzbiorów otwartych przeprowadzanych przez p homeomorficznie na V .

Opisane w punkcie (ii) definicji podzbiory otwarte homeomorficzne z V będziemy nazywać *płatami* nakrywającymi V . Przeciwwobrazy punktów $p^{-1}(x), x \in X$, nazywamy *włóknami nakrycia*.

Ćwiczenie 1.3.1. Sprawdzić, że włókna nakrycia są podprzestrzeniami dyskretnymi. Jeśli prawidłowo nakryty zbiór $V \subset X$ jest spójny, to rozkład przeciwwobrazu $p^{-1}(V)$ na płaty jest jednoznaczny i pokrywa się z rozkładem na składowe spójności.

Przykład 1.3.1. Odwzorowanie $p: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ z ćwiczenia 1.2.4 oraz odwzorowania $S^1 \ni z \mapsto z^n \in S^1$ dla $n \neq 0$ i $p \times p: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ są nakryciami.

Przykład 1.3.2. Grupę G nazywamy *grupą topologiczną* jeśli jest przestrzenią topologiczną i działania grupowe są ciągłe. Jeśli H jest dyskretnym dzielnikiem normalnym grupy topologicznej G , to homomorfizm ilorazowy $p: G \ni g \mapsto g \cdot H \in G/H$ indukuje w G/H topologię – największą, przy której p jest ciągłe. Wykażemy, że $p: G \rightarrow G/H$ jest nakryciem.

Zauważmy najpierw, że p jest odwzorowaniem otwartym. Wynika to z tożsamości $p^{-1}(p(W)) = W \cdot H = \bigcup_{h \in H} W \cdot h$, co dla otwartych podzbiorów $W \subset G$ daje zawsze zbiór otwarty w G . Niech $U \subset G$ będzie otoczeniem jedności e takim, że $U \cap H = \{e\}$; ciągłość działania $(g_1, g_2) \mapsto g_1^{-1} \cdot g_2$ w grupie pozwala wskazać otoczenie $V \ni e$ takie, że $V^{-1} \cdot V \subset U$, a więc $(V^{-1} \cdot V) \cap H = \{e\}$. Wynika stąd własność *jednoznaczności*

$$\forall_{v_1, v_2 \in V} \forall_{h_1, h_2 \in H} (v_1 \cdot h_1 = v_2 \cdot h_2) \implies (v_1 = v_2 \text{ i } h_1 = h_2). \quad (1.5)$$

Wykażemy, że podzbiory otwarte $p(V \cdot g) \subset G/H$ są, dla wszystkich $g \in G$, prawidłowo nakryte. Istotnie, dla przeciwobrazów mamy rozkład

$$p^{-1}(p(V \cdot g)) = \bigcup_{h \in H} V \cdot g \cdot h = \bigcup_{h \in H} V \cdot h \cdot g,$$

gdzie ostatnia równość wynika z faktu, że H jest dzielnikiem normalnym. Homomorfizm p przeprowadza każdy ze składników na zbiór $p(V \cdot g)$, natomiast z własności (1.5) wynika zarówno to, że płaty $Vhg, h \in H$, są wzajemnie rozłączne, jak i to, że p na każdym z nich jest bijekcją – ciągłą i otwartą, a więc obcięcia p do płatów są homeomorfizmami.

Przykład 1.3.3. W teorii funkcji holomorficzych (jednej zmiennej) rozważa się powierzchnie Riemanna, otrzymane jako przestrzeń wszystkich lokalnych rozszerzeń danej funkcji $\mathbb{C} \subset U \rightarrow \mathbb{C}$. Wraz z rzutowaniem na (otwarty podzbiór) \mathbb{C} , każda powierzchnia Riemanna jest przestrzenią nakrywającą. Konstrukcja ta obejmuje funkcje wielowartościowe, takie jak $\log(z)$ czy \sqrt{z} i pozwala je traktować jako klasyczne, jednowartościowe, określone na stosownym nakryciu. Dla pierwiastka $z \mapsto \sqrt{z}$ powierzchnia Riemanna jest dwukrotnym nakryciem płaszczyzny zespolonej bez punktu 0, dla logarytmu – jednospójnym, nieskończonym nakryciem tego samego zbioru. Każda *gałąź* logarytmu, czy pierwiastka, jest wyborem zawartego w nakryciu płata, na którym rzutowanie jest homeomorfizmem.

Związek pomiędzy nakryciami przestrzeni X i grupą podstawową $\pi_1(X, x_0)$ opiera się na przedstawionych niżej dwu twierdzeniach.

Twierdzenie 1.3.1 (O jednoznaczności podnoszenia). *Niech $p: (E, \{e_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ będzie dowolnym nakryciem zachowującym punkty bazowe. Jeśli Y jest przestrzenią spójną, zaś $f: (Y, \{y_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ – dowolnym odwzorowaniem, to istnieje co najwyżej jedno odwzorowanie $\tilde{f}: (Y, \{y_0\}) \rightarrow (E, \{e_0\})$, dla którego następujący diagram*

$$\begin{array}{ccc} & (E, \{e_0\}) & \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ (Y, \{y_0\}) & \xrightarrow{f} & (X, \{x_0\}) \end{array} \quad (1.6)$$

jest przemienny, czyli $p \circ \tilde{f} = f$.

Odwzorowanie \tilde{f} – jeśli istnieje – będziemy nazywać *podniesieniem* f (do punktu $e_0 \in E$).

Dowód. Dopuszczając istnienie dwu podniesień $\tilde{f}, \hat{f}: (Y, \{y_0\}) \rightarrow (E, \{e_0\})$ odwzorowania f , rozważmy zbiory

$$A = \{y \in Y; \tilde{f}(y) = \hat{f}(y)\} \quad \text{i} \quad B = \{y \in Y; \tilde{f}(y) \neq \hat{f}(y)\}.$$

Zauważmy, że oba zbiory są otwarte, przy czym zbiór A jest niepusty (zawiera y_0). Istotnie, dla $y_1 \in Y$, niech $V \subset X$ będzie prawidłowo nakrytym otoczeniem punktu

$f(y_1)$. Jeśli $y_1 \in A$, a $S \subset p^{-1}(V)$ jest płatem zawierającym $\tilde{f}(y_1) = \hat{f}(y_1)$, to na wspólnej części przeciwobrazów $W = \tilde{f}^{-1}(S) \cap \hat{f}^{-1}(S)$ oba podniesienia pokrywają się ze złożeniem $(p|_S)^{-1} \circ f$; zatem W jest (otwartym) otoczeniem y_1 zawartym w A . Jeśli natomiast $y_1 \in B$, punkty $\tilde{f}(y_1), \hat{f}(y_1) \in p^{-1}(V)$ leżą w różnych (a więc rozłącznych) płatach S_1, S_2 nakrywających V i przekrój $\tilde{f}^{-1}(S_1) \cap \hat{f}^{-1}(S_2)$ jest (otwartym) otoczeniem y_1 zawartym w B . Ponieważ para A, B stanowi rozkład przestrzeni Y , spójność Y implikuje równość $A = Y$. \square

Warunek konieczny i dostateczny istnienia podniesienia, wyrażony poprzez zależności grup podstawowych, pojawi się na koniec bieżącego podrozdziału. Na razie zajmujemy się przypadkami $Y = I, I^2$.

Twierdzenie 1.3.2 (Własność podnoszenia dróg i homotopii). *Niech $p: (E, \{e_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ będzie nakryciem zachowującym ustalone punkty bazowe. Dla dowolnej drogi $\omega: (I, \{0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ istnieje (dokładnie jedno) podniesienie $\tilde{\omega}: (I, \{0\}) \rightarrow (E, \{e_0\})$, tzn. droga spełniająca warunek $p \circ \tilde{\omega} = \omega$.*

Dla dowolnej homotopii $G: \omega_0 \simeq \omega_1$ rel \dot{I} pomiędzy drogami w X istnieje homotopia podniesień $\tilde{G}: \tilde{\omega}_0 \simeq \tilde{\omega}_1$ rel \dot{I} spełniająca warunek $p \circ \tilde{G} = G$. W szczególności, podniesienia dróg do punktu e_0 kończą się w tym samym punkcie $\tilde{\omega}_0(1) = \tilde{\omega}_1(1)$.

Dowód. Rodzina zbiorów $\{\omega^{-1}(V); V \subset X \text{ jest prawidłowo nakryte}\}$ stanowi otwarte pokrycie przedziału I . Wybierając $n > 0$ takie, by podział odcinka $I = [0, 1]$ punktami $t_k = k/n, k \leq n$, był wpisany w pokrycie – wystarczy, by liczba $1/n$ była mniejsza niż liczba Lebesgue’a pokrycia – wyróżniamy prawidłowo nakryte zbiory V_k takie, że $\omega([t_{k-1}, t_k]) \subset V_k$, dla $k = 1, \dots, n$.

Korzystamy z indukcji i definiujemy jedyną drogę $\tilde{\omega}_i: ([0, t_i], \{0\}) \rightarrow (E, \{e\})$ będącą podniesieniem $\omega|_{[0, t_i]}$ dla $i \leq n$; dla $i = 0$ jest to oczywiste. Załóżmy zatem, że mamy już poprawnie zdefiniowaną drogę $\tilde{\omega}_k$ dla pewnego $k < n$. Niech $W \subset p^{-1}(V_{k+1})$ będzie zawierającym punkt $\tilde{\omega}_k(t_k)$ płatem, na którym $p|_W: W \rightarrow V_{k+1}$ jest homeomorfizmem. Jakikolwiek rozszerzenie $\tilde{\omega}_{k+1}$ musi przeprowadzać spójny zbiór $[t_k, t_{k+1}]$ w W . Warunek $p \circ \tilde{\omega}_{k+1} = \omega$ na $[t_k, t_{k+1}]$ oznacza zatem równość

$$\tilde{\omega}_{k+1}|_{[t_k, t_{k+1}]} = (p|_W)^{-1} \circ \omega|_{[t_k, t_{k+1}]},$$

co potwierdza jednoznaczność i gwarantuje ciągłość. Indukcja kończy konstrukcję i dowód pierwszej części twierdzenia.

Idea podnoszenia homotopii $G: (I^2, I \times \{0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ jest analogiczna. Wychodzimy od doboru liczby $n > 0$ takiej, by zbiory

$$G([t_{i-1}, t_i] \times [t_{j-1}, t_j]) \subset V_{ij}$$

zawierały się w ustalonych zbiorach dobrze nakrytych V_{ij} , dla $i, j = 1, \dots, n$. Postępując zgodnie z opisaną w pierwszej części dowodu konstrukcją, budujemy odwzorowania

$$\tilde{G}: ([t_{i-1}, t_i] \times I, [t_{i-1}, t_i] \times \{0\}) \rightarrow (E, \{e_0\}),$$

będące podniesieniem fragmentu G i złożone z podniesień dróg $G(t, \cdot), t \in [t_{i-1}, t_i]$, dla $i \leq n$. Otrzymane porcje skleamy, korzystając z jednoznaczności podniesień

dróg $G(t_i, \cdot)$, $i \leq n$. Dla dowodu, że otrzymane w ten sposób odwzorowanie jest homotopią dróg w E , pozostaje zbadać krzywą, jaką opisują końce $\tilde{G}(t, 1)$, $t \in I$. Jeśli G jest homotopią dróg o początku x_0 i końcu x_1 , to zależność $p(\tilde{G}(t, 1)) = G(t, 1) = x_1$, dla $t \in I$. Droga $\tilde{G}(t, 1)$, $t \in I$, przebiega zatem w całości we włóknie $p^{-1}(x_1)$, a ponieważ jest to zbiór dyskretny, musi być stała. \square

Przykład 1.3.4. Kontynuując przykład 1.3.2 konstruujemy, w przypadku jednospójnej grupy topologicznej G i dyskretnej podgrupy normalnej H , kanoniczny izomorfizm $\phi: H \xrightarrow{\cong} \pi_1(G/H, e)$. W tym celu dla każdego $h \in H$ wybierzmy drogę $\gamma_h \in \Pi(G; e, h)$ i przyjmijmy $\phi(h) = [p\gamma_h]$, na co pozwala jednospójność G . Zauważmy, że dla dowolnych $h_1, h_2 \in H$, droga $h_1\gamma_{h_2}$ jest podniesieniem – do h_1 – pętli $p\gamma_{h_2}$, a zatem produkt pętli $p\gamma_{h_1} \cdot p\gamma_{h_2}$ podnosi się do drogi $\gamma_{h_1} \cdot (h_1\gamma_{h_2}) \in \Pi(G; e, h_1h_2)$. Oznacza to, że ϕ jest homomorfizmem grup. To, że jest izomorfizmem wynika z własności podnoszenia dróg i ich homotopii.

Wniosek 1.3.3. $\pi_1(S^1, 1) = \mathbb{Z}$. \square

Kolejne twierdzenie wykorzystuje udowodnione własności podnoszenia dróg i stanowi pełne rozwiązanie problemu istnienia podniesienia odwzorowania f w diagramie (1.6) – przy dodatkowym założeniu dotyczącym spójności.

Definicja 1.3.2. *Przestrzeń topologiczną Y nazywamy lokalnie łukowo spójną, gdy dla każdego $y \in Y$ i jego otoczenia U istnieje takie otoczenie $U' \subset U$ punktu y , że dowolne dwa punkty z U' można połączyć drogą zawartą w U .*

Powyższą własność mają np. przestrzenie lokalnie homeomorficzne z \mathbb{R}^n , a więc też wszystkie rozmaitości.

Ćwiczenie 1.3.2. Sprawdzić, że spójna, lokalnie łukowo spójna przestrzeń jest łukowo spójna.

Twierdzenie 1.3.4. *Niech $p: (E, \{e_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ będzie nakryciem, a Y spójną, lokalnie łukowo spójną przestrzenią topologiczną. Dla dowolnego odwzorowania $f: (Y, \{y_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$, podniesienie \tilde{f} (tzn. odwzorowanie spełniające warunek $p \circ \tilde{f} = f$ – por. (1.6)) istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi inkluzja*

$$f_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(E, e_0). \quad (1.7)$$

Ćwiczenie 1.3.3. Sprawdzić równoważność warunku (1.7) i własności mówiącej, że f przeprowadza pętle z $\Omega(Y, y_0)$ na takie, których podniesienie (jako dróg) do E jest również pętlą.

Dowód twierdzenia 1.3.4. Istnienie podniesienia \tilde{f} implikuje relacje

$$f_*\pi_1(Y, y_0) = p_*\tilde{f}_*\pi_1(Y, y_0) \subset p_*\pi_1(E, e_0),$$

co daje warunek konieczny. Zakładając zatem własność (1.7), zbudujemy stosowne odwzorowanie $(Y, \{y_0\}) \rightarrow (E, \{e_0\})$. Dla dowolnego $y \in Y$, niech γ będzie drogą w Y od y_0 do y . Podniesienie drogi $f\gamma$ do $(f\gamma)^\sim: (I, \{0\}) \rightarrow (E, \{e_0\})$ pozwala

przyjąć $\tilde{f}(y) = (f\gamma)^\sim(1)$. Jeśli γ' jest inną drogą od y_0 do y , to – z założenia – obraz $f \circ (\gamma \cdot \bar{\gamma}')$ ma w E podniesienie będące pętlą w $\Omega(E, e_0)$. Oznacza to, że odwrócenie drugiej *połówki* pętli $(f\gamma \cdot f\bar{\gamma}')^\sim$ ma początek w e_0 i jest podniesieniem pętli $f\gamma'$. Uzyskaliśmy zatem równość końców $(f\gamma)^\sim(1) = (f\gamma')^\sim(1)$ i tożsamość

$$(f\gamma \cdot f\bar{\gamma}')^\sim = (f\gamma)^\sim \cdot \overline{(f\bar{\gamma}')^\sim}.$$

Tym samym stwierdzamy, że $\tilde{f}: (Y, \{y_0\}) \rightarrow (E, \{e_0\})$ jest poprawnie zdefiniowaną funkcją o nieokreślonej jeszcze ciągłości. Jeśli teraz dla ustalonego $y \in Y$ istnieje otoczenie U , którego punkty można połączyć z y drogami ω , *małymi* w tym sensie, że obrazy $f\omega$ leżą we wspólnym dobrze nakrytym otoczeniu V obrazu $f(y) \in X$, to z przedstawionej wyżej konstrukcji wynika równość

$$\tilde{f}|_U = (p|_S)^{-1} \circ f|_U,$$

gdzie $S \subset p^{-1}(V)$ jest płatem nakrywającym V zawierającym $\tilde{f}(y)$. Uzyskany alternatywny opis funkcji \tilde{f} w otoczeniu dowolnego $y \in Y$ oznacza ciągłość i kończy dowód. \square

Wniosek 1.3.5. *Jeśli przestrzeń Y jest dodatkowo jednorodna, to każde odwzorowanie f ma jednoznaczne (jedyne) podniesienie \tilde{f} .* \square

W dalszej, końcowej części bieżącego podrozdziału przyjmujemy założenie, że *wszystkie* rozważane przestrzenie są spójne i lokalnie lukowo spójne. Zastosowanie twierdzenia 1.3.4 do *jednorodnych przestrzeni nakrywających* ukazuje uniwersalny charakter odpowiednich nakryć.

Wniosek 1.3.6 (Twierdzenie o nakryciu uniwersalnym). *Załóżmy, że $p: (E, \{e_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ jest nakryciem takim, że przestrzeń E jest jednorodna.*

(i) *Dla dowolnego nakrycia $q: (\tilde{X}, \{\tilde{x}_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ istnieje dokładnie jedno odwzorowanie $\tilde{p}: (E, \{e_0\}) \rightarrow (\tilde{X}, \{\tilde{x}_0\})$ takie, że diagram*

$$\begin{array}{ccc} & & (\tilde{X}, \{\tilde{x}_0\}) \\ & \nearrow \tilde{p} & \downarrow q \\ (E, \{e_0\}) & \xrightarrow{p} & (X, \{x_0\}) \end{array} \quad (1.8)$$

jest przemienny, czyli $q \circ \tilde{p} = p$. Odwzorowanie \tilde{p} jest nakryciem.

(ii) *Nakrycie p jest jedyne z dokładnością do izomorfizmu, tzn. jeśli $p': (E', \{e'_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ jest również nakryciem jednorodnym, istnieje (jedyne) homeomorfizm $h: (E, \{e_0\}) \rightarrow (E', \{e'_0\})$ spełniający warunek $p' \circ h = p$.*

Dowód. Ćwiczenie. \square

Ćwiczenie 1.3.4. Sprawdzić, że homomorfizm $p_* : \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ jest monomorfizmem. Korzystając z twierdzenia o nakryciu uniwersalnym, zbudować nakrycie, dla którego grupa $p_*\pi_1(E, e_0)$ jest zadaną podgrupą grupy $\pi_1(X, x_0)$.

Homeomorfizmy przestrzeni nakrywających, które pojawiły się w twierdzeniu o nakryciu uniwersalnym, pozwalają na naturalną interpretację grupy podstawowej jako grupy przekształceń.

Twierdzenie 1.3.7. *Dla dowolnego nakrycia $p: (E, \{e_0\}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ o jedno-spójnej przestrzeni nakrywającej E , automorfizmy nakrycia $p: E \rightarrow X$ bez wyróżnionych punktów odniesienia stanowią grupę kanonicznie izomorficzną z $\pi_1(X, x_0)$. Dokładniej, każdemu punktowi $e \in p^{-1}(x_0)$ włókna nad punktem bazowym odpowiadają (wzajemnie jednoznacznie) dokładnie jeden homeomorfizm $h_e: (E, \{e_0\}) \rightarrow (E, \{e\})$, spełniający warunek $p \circ h_e = p$, oraz dokładnie jedna klasa homotopii $[\omega]$ pętli $\omega \in \Omega(X, x_0)$, której podniesieniem jest droga w E od e_0 do e . W szczególności, grupa podstawowa jest równoliczna z włóknem $p^{-1}(x_0)$.*

Dla dowodu, że wskazane w twierdzeniu przyporządkowanie jest izomorfizmem grup, skorzystamy z jawnej konstrukcji jedno-spójnego nakrycia przestrzeni X opisanej poniżej. Czytelników zachęcamy natomiast do wykorzystania twierdzeń o podnoszeniu i jednoznaczności – i samodzielnego zdefiniowania działania grupy podstawowej na jedno-spójnej (lokalnie łukowo spójnej) przestrzeni nakrywającej.

Przykład 1.3.5. Konstrukcja jedno-spójnej przestrzeni nakrywającej. Niech X będzie, zgodnie z wcześniejszymi założeniami, spójną przestrzenią lokalnie łukowo spójną. Zakładamy także, że X jest *póllokalnie jedno-spójna*, co oznacza po prostu, że każdy punkt $x \in X$ ma otoczenie takie, że pętle w nim zawarte są ściągalne w X . Ustalmy punkt odniesienia $x_0 \in X$. Kandydatem na nakrycie uniwersalne (jedno-spójne) jest podzbiór $\mathcal{P}(X, x_0) = \{[\gamma] \in \mathcal{P}(X); \gamma(0) = x_0\}$ grupoidu podstawowego, z naturalnym rzutowaniem $p: [\gamma] \mapsto \gamma(1)$ i wyróżnionym punktem 1_{x_0} . Jako bazę topologii w $\mathcal{P}(X, x_0)$ przyjmujemy rodzinę zbiorów V_α zależnych od klasy $\alpha \in \mathcal{P}(X, x_0)$ i łukowo spójnego otoczenia $V \subset X$ punktu $p(\alpha)$, postaci

$$V_\alpha = \{\alpha \cdot [\omega] \in \mathcal{P}(X, x_0); \omega: (I, \{0\}) \rightarrow (V, \{p(\alpha)\})\}.$$

Jeśli dla $x \in X$ wybrać otoczenie V takie, by wszystkie pętle w nim zawarte były ściągalne w X , to przeciwobraz otoczenia ma rozkład $p^{-1}(V) = \bigcup \{V_\alpha; p(\alpha) = x\}$. Sprawdzenie, że zbiory postaci V_α istotnie stanowią bazę topologii w $\mathcal{P}(X, x_0)$ oraz, że wskazane zbiory otwarte w X są prawidłowo nakryte, pozostawiamy czytelnikowi.

Wiedząc już, że mamy do czynienia z nakryciem, jedno-spójność przestrzeni nakrywającej wykażemy, korzystając z następującej obserwacji. Dla dowolnej drogi $\gamma \in \Pi(X; x_0, x)$, funkcja

$$\tilde{\gamma}: I \ni t \mapsto [s \mapsto \gamma(ts)] \in \mathcal{P}(X, x_0), \quad \text{w szczególności } \tilde{\gamma}(1) = [\gamma], \quad (1.9)$$

jest jawnie określonym podniesieniem γ . W związku z tym, podniesienie $\tilde{\omega}$ dowolnej pętli $\omega \in \Omega(X, x_0)$ jest pętlą (w 1_{x_0}) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$[\omega] = \tilde{\omega}(1) = 1_{x_0},$$

co oznacza istnienie homotopii $\omega \simeq e_{x_0}$ rel \dot{I} . Twierdzenie o podnoszeniu homotopii implikuje homotopijność podniesień, a więc ściągłość każdej pętli $\tilde{\omega} \in \Omega(\mathcal{P}(X, x_0), 1_{x_0})$.

Ćwiczenie 1.3.5. Sprawdzić, że podane w przykładzie 1.3.5 założenie półlokalnej jednospójności jest warunkiem koniecznym istnienia jednospójnego nakrycia.

Dowód twierdzenia 1.3.7. Dla jednospójnego nakrycia $(E, e_0) = (\mathcal{P}(X, x_0), 1_{x_0}) \rightarrow (X, x_0)$, włókno $p^{-1}(1_{x_0})$ składa się dokładnie z klas homotopii pętli $\omega \in \Omega(X, x_0)$, a więc jako zbiór jest identyczne z $\pi_1(X, x_0)$. Wobec (1.9) odpowiada to przyporządkowaniu wskazanemu w twierdzeniu. Z drugiej strony, dla każdej klasy $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$, lewostronne mnożenie $[\gamma] \mapsto \alpha \cdot [\gamma]$ jest automorfizmem nakrycia $\mathcal{P}(X, x_0)$ przeprowadzającym 1_{x_0} na α i oznaczanym w twierdzeniu jako h_α . Pozostaje zauważyć, że łączność mnożenia

$$\alpha \cdot (\alpha' \cdot [\gamma]) = (\alpha \cdot \alpha') \cdot [\gamma],$$

oznacza tożsamość $h_\alpha \circ h_{\alpha'} = h_{\alpha \cdot \alpha'}$ dla $\alpha, \alpha' \in \pi_1(X, x_0)$. \square

Przykład 1.3.6. Dla $n \geq 2$, na sferze S^n (przestrzeni jednospójnej) działa automorfizm antypodyczny $x \rightarrow -x$. Utożsamienie (sklejenie) każdej pary punktów przeciwnych sfery prowadzi do uzyskania n -wymiarowej (rzeczywistej) przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^n$ (por. przykład 2.4.2) i rzutowania $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ będącego 2-krotnym nakryciem. Zatem $\pi_1(\mathbb{R}P^n, 1) = \mathbb{Z}_2$ jest jedyną grupą dwuelementową. Grupa automorfizmów nakrycia składa się z identyczności i automorfizmu antypodycznego. Niezerowy element grupy $\pi_1(\mathbb{R}P^n, 1)$ jest klasą homotopii dowolnej pętli, np. $\omega: I \ni t \mapsto [\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}P^n$, której podniesienie $\tilde{\omega}$ spełnia warunek $\tilde{\omega}(1) = -\tilde{\omega}(0)$.

Ćwiczenie 1.3.6. Skonstruować jednospójne nakrycie *ósemki*, czyli przestrzeni $S^1 \vee S^1 = (S^1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times S^1) \subset S^1 \times S^1$, lub odszukać odpowiedni rysunek w [11]. Sprawdzić, że grupa podstawowa $\pi_1(S^1 \vee S^1, (1, 1))$ jest nieabelowa.

1.4 Konstrukcje przestrzeni topologicznych

Niektóre sposoby wprowadzania topologii w mniej lub bardziej abstrakcyjnych zbiorach pojawiły się już w poprzednim podrozdziale. Pora je uporządkować i rozszerzyć.

Definicja 1.4.1. Dla dowolnej rodziny przestrzeni topologicznych $\{X_a; a \in \mathcal{A}\}$, dowolnego zbioru X i funkcji $f_a: X_a \rightarrow X, a \in \mathcal{A}$, słabą topologią lub topologią indukowaną w X przez rodzinę funkcji $\{f_a\}$ nazywamy najsilniejszą topologię w X , dla której wszystkie funkcje $f_a, a \in \mathcal{A}$, są ciągłe.

Ćwiczenie 1.4.1. Sprawdzić, że słaba topologia składa się dokładnie z tych podzbiorów $U \subset X$, dla których wszystkie przeciwobrazy $f_a^{-1}(U) \subset X_a, a \in \mathcal{A}$, są otwarte. Scharakteryzować ciągłość dowolnej funkcji $g: X \rightarrow Y$ poprzez ciągłość złożeń $g \circ f_a, a \in \mathcal{A}$.

Definicja 1.4.2. Dla dowolnej rodziny przestrzeni topologicznych $\{X_a; a \in \mathcal{A}\}$ sumą rozłączną nazywamy zbiór

$$\coprod_{a \in \mathcal{A}} X_a = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \{a\} \times X_a \quad (1.10)$$

z topologią indukowaną przez rodzinę włożeń

$$\iota_\alpha : X_\alpha \equiv \{\alpha\} \times X_\alpha \subset \coprod_{a \in \mathcal{A}} X_a, \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

czyli najmocniejszą topologią, dla której wszystkie odwzorowania ι_α są ciągle.

Zbiorami otwartymi (domkniętymi) w sumie rozłącznej (1.10) są rozłączne sumy rodzin dowolnych podzbiorów otwartych (odp. domkniętych) $A_a \subset X_a, a \in \mathcal{A}$.

Definicja 1.4.3. Topologiczną filtracją zbioru X nazywamy ciąg topologii na wstępującej rodzinie podzbiorów $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$, zgodny w tym sensie, że X_n jest podprzestrzenią X_{n+1} , dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Filtracja jest domknięta, jeżeli X_n jest domkniętym podzbiorem X_m , dla $m > n$.

Ćwiczenie 1.4.2. Zgodnie z definicją 1.4.1, włożenia $X_n \hookrightarrow X, n \in \mathbb{N}$, indukują w X słabą topologię. Sprawdzić, że przestrzenie X_n są podprzestrzeniami w X .

Twierdzenie 1.4.1. Słaba topologia wyznaczona w zbiorze X przez dowolną filtrację domkniętą $\{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ T_1 -przestrzeni jest T_1 . Przestrzeń X jest normalna, jeśli wszystkie X_n są normalne.

Dowód. Sprawdzenie faktu, że T_1 -filtracja indukuje w X T_1 -topologię, pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. Załóżmy zatem, że filtracja składa się z przestrzeni normalnych i rozważmy dowolne dwa zbiory domknięte i rozłączne $K, L \subset X$. Dla każdego n zbiory $K_n = K \cap X_n$ i $L_n = L \cap X_n$ są domknięte i rozłączne (choć, być może, puste). Zaczynając od funkcji $\rho_0 : X_0 \rightarrow [0, 1]$ takiej, że $\rho_0|_{K_0} = 0$ i $\rho_0|_{L_0} = 1$ i korzystając z twierdzenia Tietzego-Urysohna konstruujemy indukcyjnie ciąg funkcji $\rho_n : X_n \rightarrow [0, 1]$ takich, że

$$\rho_n|_{X_{n-1}} = \rho_{n-1}, \quad \rho_n|_{K_n} = 0 \quad \text{ i } \quad \rho_n|_{L_n} = 1,$$

dla $n > 0$. Funkcja $\rho : X \rightarrow [0, 1]$, będąca wspólnym rozszerzeniem wszystkich ρ_n , jest ciągła i oddziela zbiory K i L . \square

Definicja 1.4.4. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X i dowolnej relacji równoważności $R \subset X \times X$ w zbiorze X , przestrzenną ilorazową X/R nazywamy zbiór klas abstrakcji z najsilniejszą topologią zapewniającą ciągłość rzutowania $X \rightarrow X/R$.

Ćwiczenie 1.4.3. Sprawdzić, że każda funkcja ciągła $X \rightarrow Y$ zgodna z relacją równoważności w X wyznacza funkcję ciągłą z przestrzeni ilorazowej do Y .

Definicja 1.4.5. Dla dowolnej pary (X, A) i dowolnego odwzorowania $f: A \rightarrow Y$, niech

$$X \cup_f Y = (X \sqcup Y)/(a \sim f(a)) \quad (1.11)$$

będzie przestrzenią ilorazową, efektem utożsamienia w sumie rozłącznej punktów $a \sim f(a), a \in A$. O przestrzeni $X \cup_f Y$ z topologią ilorazową wyznaczoną przez rzutowanie

$$\pi: X \sqcup Y \rightarrow X \cup_f Y \quad (1.12)$$

mówimy, że powstała przez dołączenie przestrzeni X do Y za pomocą f .

Wprawdzie powyższa definicja ma ogólny charakter, jednak będziemy ją stosować głównie dla par domkniętych (X, A) , czyli takich par topologicznych, w których wyróżniony podzbiór A jest domknięty.

Przykład 1.4.1. Przestrzeń ilorazowa X/A , w której utożsamiono ze sobą wszystkie punkty podzbioru $A \subset X$, powstaje z X przez dołączenie punktu (za pomocą odwzorowania stałego).

Stwierdzenie 1.4.2. Niech (X, A) będzie parą domkniętą. Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: A \rightarrow Y$ w przestrzeni topologicznej $X \cup_f Y$ ograniczenia $\pi|_{X \setminus A}$ i $\pi|_Y$ są homeomorfizmami. Rzutowanie (1.12) charakteryzuje zbiory otwarte w $W \subset X \cup_f Y$ poprzez pary podzbiorów otwartych $U \subset X, V \subset Y$ takich, że $f^{-1}W = U \sqcup V$ i $U \cap A = f^{-1}V$.

Jeśli X i Y są T_1 -przestrzeniami, to $X \cup_f Y$ również.

Dowód. Ćwiczenie. □

Zwyczajowo utożsamiamy Y z podzbiorem domkniętym utworzonej przestrzeni. W tym sensie odwzorowanie $\bar{f} = \pi|_X$ stanowi kanoniczne rozszerzenie funkcji f i wyznacza odwzorowanie par

$$\bar{f}: (X, A) \rightarrow (X \cup_f Y, Y). \quad (1.13)$$

Twierdzenie 1.4.3. Jeśli przestrzenie X i Y są normalne, to dla dowolnego podzbioru domkniętego $A \subset X$ i odwzorowania $f: A \rightarrow Y$, przestrzeń $X \cup_f Y$ jest również normalna.

Dowód. Dla dowolnych rozłącznych podzbiorów domkniętych $K, L \subset X \cup_f Y$ zachodzą równości

$$\pi^{-1}K = K_X \sqcup (K \cap Y), \quad \pi^{-1}L = L_X \sqcup (L \cap Y),$$

gdzie K_X i L_X są rozłącznymi domkniętymi podzbiarami X spełniającymi warunki $A \cap K_X = f^{-1}K, A \cap L_X = f^{-1}L$. Z założenia istnieje funkcja ciągła $\rho_Y: Y \rightarrow [0, 1]$ oddzielająca zawarte w Y części K i L , tzn. taka, że $\rho_Y|_{A \cap K} = 0$ i $\rho_Y|_{A \cap L} = 1$. Poszukując analogicznej funkcji $\rho_X: X \rightarrow [0, 1]$, przyjmiemy

$$\rho_X|_A = \rho_Y \circ f, \quad \rho_X|_{K_X} = 0 \quad \text{i} \quad \rho_X|_{L_X} = 1.$$

Zdefiniowana w ten sposób na zbiorze $A \cup K_X \cup L_X \subset X$ funkcja jest ciągła, a więc – zgodnie z twierdzeniem Tietzego-Urysohna – posiada ciągle rozszerzenie na X . Pozostaje zauważyć, że połączenie obu funkcji, $(\rho_X, \rho_Y): X \sqcup Y \rightarrow [0, 1]$, wyznacza na przestrzeni ilorazowej $X \cup_f Y$ funkcję ciągłą oddzielającą K i L . \square

Wniosek 1.4.4. *Dla dowolnej pary domkniętej (X, A) przestrzeń ilorazowa X/A jest T_1 -przestrzenią, jeśli X jest T_1 -przestrzenią. Jeśli ponadto przestrzeń X jest normalna, to X/A jest również przestrzenią normalną.* \square

Kolejna definicja wprowadza dodatkową ważną własność par przenoszoną na kolejne przestrzenie powstałe w wyniku operacji doklejania (1.11).

Definicja 1.4.6. *Parę domkniętą (X, A) nazywamy parą kołnierzykową, jeśli istnieje zbiór otwarty U taki, że $A \subset U \subset X$ i A jest mocnym retraktem deformacyjnym U . Zbiór U nazywamy w tej sytuacji kołnierzykiem zbioru A .*

Przykład 1.4.2. Kula domknięta i sfera tworzą parę kołnierzykową (B^n, S^{n-1}) . Ogólnie – każda rozmaitość topologiczna X z brzegiem ∂X stanowią parę kołnierzykową.

Twierdzenie 1.4.5. *Dla dowolnej pary kołnierzykowej (X, A) i odwzorowania $f: A \rightarrow Y$, para $(X \cup_f Y, Y)$ jest również parą kołnierzykową. Jeśli $U \subset X$ jest kołnierzykiem zbioru A , to suma $V = \bar{f}(U) \cup Y$ jest kołnierzykiem zbioru Y*

Dowód. Jeśli $U \subset X$ jest kołnierzykiem zbioru A , to zbiór $V = \bar{f}(U) \cup Y$, będący obrazem w rzutowaniu π zbioru otwartego i nasyconego $U \sqcup Y$, jest zbiorem otwartym. Dowolną homotopię $D: I \times U \rightarrow U$, definiującą U jako mocny rerakt deformacyjny zbioru A , rozszerzamy do $\tilde{D}: I \times (U \sqcup Y) \rightarrow \bar{f}(U) \cup Y$,

$$\tilde{D}(t, u) = \bar{f}(D(t, u)), \quad \text{dla } u \in U, \quad \tilde{D}(t, y) = y, \quad \text{dla } y \in Y.$$

Otrzymane odwzorowanie jest zgodne z relacją sklejącą, a więc wyznacza funkcję $\bar{D}: I \times (\bar{f}(U) \cup Y) \rightarrow \bar{f}(U) \cup Y$. Sprawdzenie ciągłości \bar{D} pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. Odwzorowanie \bar{D} opisuje podprzestrzeń $Y \subset \bar{f}(U) \cup Y$ jako mocny rerakt deformacyjny. \square

Ćwiczenie 1.4.4. Sprawdzić, że dla dowolnego otwartego podzbioru $U \subset X$, nasyconego względem relacji równoważności \sim w X , tj. będącego sumą klas abstrakcji, włożenie indukuje homeomorfizm przestrzeni ilorazowej U/\sim na otwarty podzbiór X/\sim . Homeomorfizmem jest również bijekcja $(I \times X)/\sim \rightarrow I \times (X/\sim)$, jeśli w $I \times X$ przyjąć trywialne rozszerzenie relacji:

$$(t, x) \sim (t', x') \iff (t = t') \text{ i } (x \sim x').$$

Drugi z homeomorfizmów jest niebanalny i daje się rozszerzyć na sytuację, w której przedział I zamieniony jest na dowolną lokalnie zwartą przestrzeń Hausdorffa.

Dla potrzeb bardziej zaawansowanej konstrukcji opisanej w podrozdziale 2.4, przedstawimy teraz jawny opis kołnierzyka, retrakcji i homotopii w przypadku, który okaże się w rozdziale 2 wzorcem dla budowy CW–kompleksów. Opis ma charakter techniczny i dotyczy szczegółów dowodu twierdzenia 1.4.5 w przypadku, gdy doklejana przestrzeń X składa się z kul B^n , mających ustaloną retrakcję $B^n \setminus \{0\} \ni \xi \mapsto \frac{\xi}{\|\xi\|} \in S^{n-1}$ i homotopię

$$I \times (B^n \setminus \{0\}) \ni (t, \xi) \mapsto (1-t)\xi + t \frac{\xi}{\|\xi\|} \in B^n \setminus \{0\}. \quad (1.14)$$

Wniosek 1.4.6. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej Y i dowolnej rodziny odwzorowań $\phi_a: S^{n-1} \rightarrow Y, a \in \mathcal{A}$, niech*

$$Z = \coprod_{a \in \mathcal{A}} B^n \cup_{(\phi_a)} Y$$

oznacza wynik doklejania rodziny kul do Y , zaś $M = \{\Phi_a(0); a \in \mathcal{A}\}$ – zbiór środków kul, przeniesionych do Z za pomocą kanonicznych rozszerzeń $\Phi_a: B^n \rightarrow Z$ funkcji $\phi_a, a \in \mathcal{A}$. Wówczas: zbiór $Z \setminus M$ jest kołnierzykiem podzbioru Y , retrakcją jest odwzorowanie

$$r: Z \setminus M \rightarrow Y, \quad \begin{cases} \Phi_a(\xi) \mapsto \phi_a\left(\frac{\xi}{\|\xi\|}\right), & \text{dla } \xi \in B^n \setminus \{0\}, a \in \mathcal{A} \\ y \mapsto y, & \text{dla } y \in Y, \end{cases} \quad (1.15)$$

a homotopią deformującą $Z \setminus M$ – odwzorowanie $D: I \times (Z \setminus M) \rightarrow Z \setminus M$, opisane wzorami

$$\begin{aligned} (t, \Phi_a(\xi)) &\mapsto \Phi_a\left((1-t)\xi + t \frac{\xi}{\|\xi\|}\right), & \text{dla } \xi \in B^n \setminus \{0\}, a \in \mathcal{A} \\ (t, y) &\mapsto y, & \text{dla } y \in Y. \end{aligned} \quad (1.16)$$

□

Niektórzy autorzy zakładają dodatkowo, że przestrzeń X w parze kołnierzykowej jest przestrzenią Hausdorffa.

Ćwiczenie 1.4.5. Sprawdzić, jaki dodatkowy warunek nałożony na A zapewnia, że doklejanie pary (X, A) do przestrzeni Hausdorffa Y daje w wyniku przestrzeń Hausdorffa. Czy podzbiór $Y \subset X \cup_f Y$ spełnia analogiczny warunek?

1.5 Podstawowe konstrukcje algebraiczne

Topologia algebraiczna wykorzystuje obiekty algebraiczne do badania obiektów topologicznych. Grupy podstawowe, opisane w podrozdziale 1.2, pojawiły się w sposób naturalny – poprzez wprowadzenie działania grupowego w zbiorze „dostarczonym” przez topologię. Inną konstrukcją jest związany z twierdzeniem van Kampena (tw. 1.2.7) amalgamat, będący opisem *istniejącej* grupy poprzez jej podgrupy. W kolejnych rozdziałach skryptu będą nam również potrzebne konstrukcje grup *nowych* – wprowadzające nowe obiekty, które następnie posłużą do opisu wybranych własności obiektów topologicznych.

We wszystkich przedstawionych poniżej konstrukcjach pojęcie grupa oznacza grupę abelową.

Definicja 1.5.1. Sumą prostą rodziny grup $\{G_a; a \in \mathcal{A}\}$ nazywany grupę G wraz z rodziną homomorfizmów $i_a: G_a \rightarrow G, a \in \mathcal{A}$, o następującej własności:

- Dla dowolnej grupy H i homomorfizmów $h_a: G_a \rightarrow H$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h: G \rightarrow H$ taki, że każdy z homomorfizmów h_a jest złożeniem $h_a = h \circ i_a$.

Oznaczenie: $\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a$; dla sum skończonych: $G_{a_1} \oplus \dots \oplus G_{a_n}$.

Konstrukcja: $G = \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a$ jest zbiorem funkcji $c: \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \{G_a; a \in \mathcal{A}\}$ spełniających warunki:

- (i) $f(a) \in G_a$, dla $a \in \mathcal{A}$;
- (ii) zbiór $\{a \in \mathcal{A}; f(a) \neq 0\}$ jest skończony.

Dla $b \in \mathcal{A}$ homomorfizm $i_b: G_b \rightarrow \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a$ jest określony wzorem

$$i_b(g)(a) = \begin{cases} g, & \text{dla } a = b, \\ 0, & \text{dla } a \neq b. \end{cases}$$

Ćwiczenie 1.5.1. Sprawdzić poprawność konstrukcji (i definicji) sumy prostej.

Szczególnym przypadkiem sumy prostej jest grupa $\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}$ nazywana grupą wolną nad zbiorem \mathcal{A} lub – generowaną przez \mathcal{A} (por. definicja 3.0.5).

Stwierdzenie 1.5.1. Grupa G wraz z rodziną homomorfizmów $i_a: G_a \rightarrow G, a \in \mathcal{A}$, jest sumą prostą $\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rodzina projekcji $p_a: G \rightarrow G_a, a \in \mathcal{A}$ taka, że

$$\forall a \in \mathcal{A} \quad p_a \circ i_a = \text{id}_{G_a}, \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} i_a \circ p_a = \text{id}_G.$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Definicja 1.5.2. Produktem rodziny grup $\{G_a; a \in \mathcal{A}\}$ nazywany grupę G wraz z rodziną homomorfizmów $p_a: G \rightarrow G_a, a \in \mathcal{A}$, o następującej własności:

- Dla dowolnej grupy H i homomorfizmów $h_a: H \rightarrow G_a$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm $h: H \rightarrow G$ taki, że każdy z homomorfizmów h_a jest złożeniem $h_a = p_a \circ h$.

Oznaczenie: $\prod_{a \in \mathcal{A}} G_a$.

Ćwiczenie 1.5.2. Podać konstrukcję produktu grup.

Jak wynika np. ze stwierdzenia 1.5.1, produkt skończonej rodziny grup nie różni się od sumy prostej.

Homomorfizmy $h: G \rightarrow H$ dwu dowolnych grup tworzą (z dodawaniem) grupę oznaczaną $\text{Hom}(G, H)$.

Ćwiczenie 1.5.3. Skonstruować naturalny izomorfizm

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a, H\right) \cong \prod_{a \in \mathcal{A}} \mathrm{Hom}(G_a, H).$$

W przypadku, gdy zbiór \mathcal{A} jest skończony, izomorfizm produktu z sumą prostą daje

$$\mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a, H\right) \cong \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \mathrm{Hom}(G_a, H),$$

gdzie każdy z homomorfizmów $G_b \rightarrow H, b \in \mathcal{A}$, rozszerza się na sumę prostą $\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a$, do homomorfizmu znikającego na pozostałych składnikach.

Definicja 1.5.3. Dla dowolnych grup abelowych G, G' i G'' funkcję $h: G \times G' \rightarrow G''$ nazwiemy biaddytywną, gdy spełnione są warunki

$$\begin{aligned} h(g_1 + g_2, g') &= h(g_1, g') + h(g_2, g'), \quad \text{dla } g_1, g_2 \in G, g' \in G', \\ h(g, g'_1 + g'_2) &= h(g, g'_1) + h(g, g'_2), \quad \text{dla } g \in G, g'_1, g'_2 \in G'. \end{aligned}$$

Definicja 1.5.4. Iloczynem tensorowym grup abelowych G, G' nazwiemy grupę G'' wraz z funkcją biaddytywną $\gamma: G \times G' \rightarrow G''$ o następującej własności:

- Dla dowolnej grupy H i funkcji biaddytywnej $h: G \times G' \rightarrow H$ istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup $\tilde{h}: G'' \rightarrow H$ taki, że funkcja h jest złożeniem $h = \tilde{h} \circ \gamma$.

Oznaczenie: $G \otimes G'$; funkcja biaddytywna: $(g, g') \mapsto g \otimes g'$, dla $g \in G, g' \in G'$.

Konstrukcja: $G'' = G \otimes G'$ jest grupą ilorazową grupy wolnej nad zbiorem $G \times G'$, przez podgrupę generowaną przez kombinacje $(g_1 + g_2, g') - (g_1, g') - (g_2, g')$, $(g, g'_1 + g'_2) - (g, g'_1) - (g, g'_2)$, charakteryzujące biaddytywność.

Analogiczne pojęcie iloczynu tensorowego funkcjonuje w algebrze liniowej i powinno być znane czytelnikowi. Zamiast twierdzeń proponujemy zatem serię ćwiczeń.

Ćwiczenie 1.5.4. Sprawdzić poprawność konstrukcji (i definicji) iloczynu tensorowego.

Ćwiczenie 1.5.5. Wykazać – odwołując się bezpośrednio do definicji 1.5.4 – tożsamość $\mathbb{Z} \otimes G = G \otimes \mathbb{Z} = G$, dla dowolnej grupy G .

Ćwiczenie 1.5.6. Dla operacji iloczynu tensorowego grup sprawdzić przemienność i łączność oraz rozdzielność względem sumy prostej.

Ćwiczenie 1.5.7. Homomorfizmy grup $f: G \rightarrow H, f': G' \rightarrow H'$ wyznaczają naturalny homomorfizm

$$f \otimes f': G \otimes G' \rightarrow H \otimes H', \quad g \otimes g' \mapsto f(g) \otimes f'(g') \quad (1.17)$$

Sformułować własność uniwersalną, nawiązującą do definicji 1.5.4, charakteryzującą jednoznacznie homomorfizm $f \otimes f'$.

Ćwiczenie 1.5.8. Uzasadnić poprawność definicji naturalnych homomorfizmów

$$\mathrm{Hom}(A, G) \otimes (A \otimes G') \xrightarrow{\alpha} G \otimes G', \quad \phi \otimes (a \otimes g') \mapsto \phi(a) \otimes g', \quad (1.18)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(A, G) \otimes \mathrm{Hom}(B, G') &\xrightarrow{\mu} \mathrm{Hom}(A \otimes B, G \otimes G') \\ \mu(\phi \otimes \psi)(a \otimes b) &= \phi(a) \otimes \psi(b), \end{aligned} \quad (1.19)$$

dla dowolnych grup A, B, G i G' .

Rozważania dotyczące produktu tensorowego kończy twierdzenie opisujące produkt dwu grup ilorazowych.

Stwierdzenie 1.5.2. Dla dowolnych grup G, G' i ich podgrup $H \subset G, H' \subset G'$ ma miejsce kanoniczny izomorfizm

$$(G/H) \otimes (G'/H') \cong (G \otimes G') / (H \otimes G' + G \otimes H'). \quad (1.20)$$

Dowód. Funkcja $G \times G' \rightarrow (G \otimes G') / (H \otimes G' + G \otimes H')$, będąca złożeniem iloczynu tensorowego i projekcji, znika na parach $(h, g'), (g, h')$, a więc indukuje odwzorowanie $G/H \times G'/H' \rightarrow (G \otimes G') / (H \otimes G' + G \otimes H')$, które – jako biaddytywne – prowadzi do homomorfizmu "→" w (1.20).

Z kolei projekcje $\pi^1: G \rightarrow G/H, \pi^2: G' \rightarrow G'/H'$ indukują homomorfizm iloczynów tensorowych $\pi^1 \otimes \pi^2: G \otimes G' \rightarrow G/H \otimes G'/H'$, znikający na elementach postaci $h \otimes g', g \otimes h' \in G \otimes G'$, dla $h \in H, g \in G$ i $h' \in H', g' \in G'$. Stąd homomorfizm odwrotny "←". \square

O ile iloczyn tensorowy $(\cdot) \otimes \mathbb{Z}$ jest tożsamością, analogiczna operacja (funktor)

$$G \rightsquigarrow G^{\mathbb{Q}} = G \otimes \mathbb{Q} \quad (1.21)$$

wydobywa z dowolnej grupy składnik beztorsyjny, dając w efekcie przestrzeń wektorową nad ciałem liczb wymiernych \mathbb{Q} .

Ćwiczenie 1.5.9. Wykazać izomorfizmy grup $\mathbb{Q} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}, \mathbb{R} \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{R}$ Czy grupa $\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}$ jest izomorficzna z \mathbb{R} ?

Alternatywny opis przestrzeni $G^{\mathbb{Q}}$ umożliwia

Stwierdzenie 1.5.3. Dla dowolnej grupy (abelowej) G , relacja \sim określona w produkcie $G \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ wzorem

$$(g, m) \sim (g', m') \iff \exists r \in \mathbb{N} \ r(m'g - mg') = 0 \quad (1.22)$$

jest relacją równoważności. Przy oznaczeniu $\frac{g}{m}$ dla klasy abstrakcji pary (g, m) , niech \tilde{G} oznacza zbiór klas abstrakcji. Wraz z działaniami

$$\begin{aligned} \frac{g}{m} + \frac{g'}{m} &= \frac{g + g'}{m} \\ \frac{p}{q} \cdot \frac{g}{m} &= \frac{pg}{qm}, \end{aligned}$$

grupa \tilde{G} jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb wymiernych izomorficzną z $G^{\mathbb{Q}}$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Definicja 1.5.5. Przestrzeń $G^{\mathbb{Q}}$ będziemy nazywać \mathbb{Q} –przestrzenią wektorową rozpiętą na grupie G . Jeśli grupa G jest skończenie generowana, wymiar przestrzeni $G^{\mathbb{Q}}$ jest rangą grupy G , oznaczaną

$$\rho(G) = \dim(G^{\mathbb{Q}}).$$

Bazę w $G^{\mathbb{Q}}$ stanowią np. wolne generatory grupy G , natomiast elementy $g \in G$ skończonego rzędu są przez naturalny homomorfizm

$$G \ni g \mapsto g \otimes 1 \in G^{\mathbb{Q}}$$

anihilowane. Dowolny homomorfizm $\phi: G \rightarrow H$ indukuje odwzorowanie \mathbb{Q} –liniowe $\phi^{\mathbb{Q}}: G^{\mathbb{Q}} \rightarrow H^{\mathbb{Q}}$.

Definicja 1.5.6. Jeśli grupa G ma skończoną rangę, to dla każdego automorfizmu $h: G \rightarrow G$ określony jest ślad $\text{tr}(h) = \text{tr}(h^{\mathbb{Q}})$.

Ćwiczenie 1.5.10. Wykazać, że ślad automorfizmu $h: G \rightarrow G$ jest liczną całkowitą – jeśli grupa G jest skończenie generowana.

Zdefiniowane tu pojęcie śladu wykorzystamy dopiero w rozdziale 4 – dla sformułowania i dowodu twierdzenia Lefschetza, podającego warunek dostateczny istnienia punktów stałych odwzorowania.

Rozdział 2

Sympleksy i kompleksy

Sympleksy są elementarnymi obiektami *afinicznymi* w przestrzeni euklidesowej (liniowej). Afiniczność jest pojęciem intuicyjnie bliskim liniowości, ale matematycznie odrębnym. Na potrzeby skryptu przyjmujemy definicję ograniczającą afiniczność do podzbiorów przestrzeni wektorowych.

2.1 Sympleksy

Definicja 2.1.1. *Podzbiór E przestrzeni liniowej W nad \mathbb{R} jest przestrzenią afiniczną, gdy jest postaci $E = p + V$, dla pewnej podprzestrzeni liniowej $V \subset W$, $p \in E$. Podprzestrzeń $V_E = V$ nazywamy przestrzenią liniową (wektorową) przestrzeni afinicznej E . Elementy zbioru E nazywa się punktami – dla odróżnienia od wektorów, należących do przestrzeni V . Wymiarem $\dim E$ przestrzeni afinicznej E nazywamy wymiar jej przestrzeni wektorowej.*

Oznacza to, że przestrzenie afiniczne są *warstwami* podprzestrzeni liniowych. Aby usunąć z definicji konieczność odwoływania się do otaczającej, większej przestrzeni wektorowej, przestrzeń afiniczną E i jej przestrzeń wektorową rozważa się wraz z działaniami:

- (i) $E \times V \ni (p, v) \mapsto p + v \in E$ – dodawanie punktu i wektora;
- (ii) $E \times E \ni (p, q) \mapsto \vec{pq} \in V$ – wektor od p do q ; w otaczającej E i V przestrzeni wektorowej W , $\vec{pq} = q - p$.

Ćwiczenie 2.1.1. Uzupełnić działania (i)–(ii) o stosowne własności. Zdefiniować pojęcie *podprzestrzeni afinicznej*. Porównać efekty z dostępną aksjomatyką przestrzeni afinicznych.

Głównym celem wprowadzenia przestrzeni afinicznych jest odejście od *układu heliocentrycznego*, albowiem w ogarniającej nas przestrzeni nie ma wyróżnionego, wspólnego dla wszystkich punktu odniesienia, miejsca, które odpowiadałoby wektorowi

zerowemu. Co pozostaje? – Np. wypukłość i współliniowość (ogólnie – afiniczna zależność punktów) oraz wymiar. Zmianie ulega także pojęcie przekształcenia (odwzorowania) *liniowego*.

Definicja 2.1.2. Odwzorowanie $\lambda: E \rightarrow E'$ dwu przestrzeni afinicznych nazywamy afinicznym, jeśli istnieje przekształcenie liniowe $L: V_E \rightarrow V_{E'}$ związanych z E i E' przestrzeni wektorowych takie, że zachodzi równość

$$\lambda(q) = \lambda(p) + L(\overrightarrow{pq}),$$

dla dowolnych punktów $p, q \in E$.

Definicja 2.1.3. Dla $n \geq 0$, standardowym n -sympleksem nazywamy zbiór $\Delta^n = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n; \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \dots + \lambda_n \leq 1\}$. Jest to najmniejszy zbiór wypukły w \mathbb{R}^n zawierający wektor $E_0 = 0$ i wersory osi: $E_i = (\delta_i^j)_{j \leq n}, i = 1, \dots, n$. Przyjmuje się, że $\Delta^0 = \{E_0\}$ jest zbiorem jednopunktowym, identycznym z 0 -wymiarową przestrzenią \mathbb{R}^0 .

Standardowy 1-sympleks Δ^1 jest przedziałem jednostkowym $I = [0, 1]$.

Definicja 2.1.4. Skończony zbiór punktów $\{v_0, \dots, v_n\}$ jest (afinicznie) niezależny, jeśli wektory $\overrightarrow{v_0 v_i}, i \leq n$, są liniowo niezależne.

Ćwiczenie 2.1.2. Sprawdzić poprawność definicji: pojęcie niezależności zbioru punktów nie zależy od kolejności punktów.

Definicja 2.1.5. Dla dowolnego skończonego, niezależnego zbioru punktów $\{v_0, \dots, v_n\}$ przestrzeni afinicznej E , zbiór $\sigma = (v_0 \dots v_n) \subset E$ będący obrazem odwzorowania

$$\langle v_0 \dots v_n \rangle: \Delta^n \ni (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto v_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{v_0 v_i}, \quad (2.1)$$

nazywamy n -wymiarowym sympleksem geometrycznym o wierzchołkach v_0, \dots, v_n . Liczbę $\dim \sigma := n$ nazywamy wymiarem sympleksu.

Sumę występującą w (2.1) oznacza się

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i = v_0 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{v_0 v_i},$$

gdzie $\lambda_0 := 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$, i nazywa kombinacją wypukłą punktów v_i o współczynnikach $\lambda_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Wzór (2.1) definiuje afiniczne odwzorowanie $\langle v_0 \dots v_n \rangle$ również bez założenia afinicznej niezależności punktów. W ogólności obraz nie jest sympleksem, ale samo odwzorowanie będzie w dalszych rozdziałach uważane za przykład sympleksu *singularnego* (def. 3.1.1).

Ćwiczenie 2.1.3. Sympleks jest jednoznacznie wyznaczony przez swoje wierzchołki, ale nie zależy od ich kolejności – mimo iż odwzorowanie (2.1) zależy. Sympleks wyznacza jednoznacznie zbiór swoich wierzchołków.

Ćwiczenie 2.1.4. Dla niezależnego układu punktów, odwzorowanie $\langle v_0 \dots v_n \rangle: \Delta^n \rightarrow (v_0 \dots v_n)$ jest homeomorfizmem.

Definicja 2.1.6. Dla dowolnego ustalonego porządku wierzchołków układ funkcji

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \langle v_0 \dots v_n \rangle^{-1}: (v_0 \dots v_n) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

rozszerzony o $\lambda_0 := 1 - \lambda_1 - \dots - \lambda_n$, stanowi współrzędne barycentryczne w sympleksie o wierzchołkach v_0, \dots, v_n .

Współrzędne barycentryczne sumują się do jedności, co oznacza, że dowolna spośród nich jest wyznaczona przez pozostałe. To charakterystyczne dla przestrzeni afinicznych odstępstwo od przyjmowanego w przestrzeniach liniowych wymagania *niezależności* współrzędnych zapewnia jednak symetrię opisu – zgodnie z (2.1). Zmiana wybranej kolejności wierzchołków sympleksu odpowiada permutacji współrzędnych barycentrycznych, a nie zmienia ich wartości.

Definicja 2.1.7. Niepusty podzbiór $\tau \subset (v_0 \dots v_n)$ jest k -wymiarową ścianą sympleksu $(v_0 \dots v_n)$, $0 \leq k \leq n$, jeżeli jest postaci $\tau = (v_{i_0} \dots v_{i_k})$, dla pewnego $(k+1)$ -elementowego podzbioru wierzchołków $\{v_{i_0}, \dots, v_{i_k}\} \subset \{v_0, \dots, v_n\}$. Ściany 1-wymiarowe są krawędziami sympleksu. Suma mnogościowa

$$\partial(v_0 \dots v_n) := \bigcup_{i \leq n} (v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n) \quad (2.3)$$

wszystkich $(n-1)$ -wymiarowych ścian n -wymiarowego sympleksu jest jego brzegiem. Wnętrze dowolnego sympleksu σ nazywany zbiór

$$\text{int } \sigma = \sigma - \partial\sigma. \quad (2.4)$$

Dla $i = 0, \dots, n$, i -ta ściana wymiaru $n-1$ wchodząca w skład sumy (2.3) jest obrazem odwzorowania $\langle v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_n \rangle = \langle v_0 \dots v_n \rangle \circ \varepsilon_i$, gdzie

$$\varepsilon_i := \langle E_0 \dots \hat{E}_i \dots E_n \rangle: \Delta^{n-1} \hookrightarrow \Delta^n \quad (2.5)$$

definiuje i -tą ścianę $(E_0 \dots \hat{E}_i \dots E_n)$ standardowego sympleksu Δ^n . We współrzędnych barycentrycznych,

$$\varepsilon_i(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) = (\lambda_0, \dots, \lambda_{i-1}, 0, \lambda_i, \dots, \lambda_{n-1}) \quad (2.6)$$

dla $i \leq n$, przy czym dla skrajnych wartości $i = 0$ i $i = n$ odpowiednie fragmenty ciągu uznajemy za puste.

Ćwiczenie 2.1.5. Wykazać, że w dowolnej przestrzeni euklidesowej średnica sympleksu jest równa maksymalnej długości jego krawędzi,

$$\text{diam}(\sigma) := \sup\{\|q - p\|; p, q \in \sigma\} = \max\{\|v_j - v_i\|; i, j \leq n\}, \quad (2.7)$$

dla $\sigma = (v_0 \dots v_n)$, $n > 0$.

2.2 Kompleksy symplecjalne

Definicja 2.2.1. Zbiór K sympleksów geometrycznych w przestrzeni afinicznej E jest geometrycznym kompleksem symplecjalnym – g.k.s., jeżeli spełnione są następujące warunki

$$\text{rc}l \forall \sigma \in K \forall \tau \subset \sigma \tau \in K \iff \tau \text{ jest ścianą sympleksu } \sigma \quad (2.8)$$

$$\forall \sigma, \sigma' \in K \sigma \cap \sigma' \neq \emptyset \implies \sigma \cap \sigma' \in K. \quad (2.9)$$

Zbiór $K_0 = \{v \in E; (v) \in K\}$ nazywamy zbiorem wierzchołków kompleksu K .

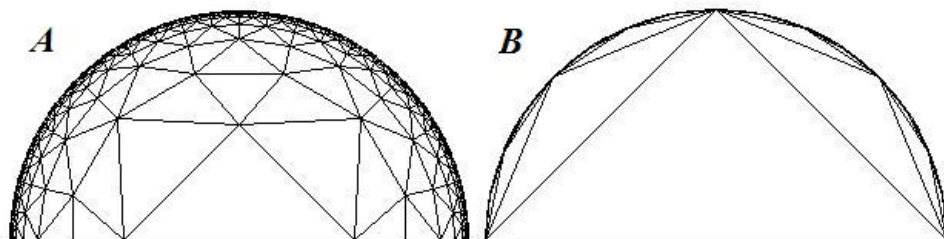
Ćwiczenie 2.2.1. Warunki (2.8–2.9) są równoważne parze warunków:

- (i) Jeśli K zawiera sympleks σ , to zawiera także każdą jego ścianę.
- (ii) Jeśli sympleksy $\sigma, \sigma' \in K$ mają niepusty przekrój, to zbiór $\sigma \cap \sigma'$ jest sympleksem – wspólną ścianą każdego z nich.

Definicja 2.2.2. Jeśli wymiary sympleksów w g.k.s. K są ograniczone, największy z wymiarów nazywamy wymiarem kompleksu i oznaczamy $\dim K$ – w przeciwnym wypadku przyjmujemy $\dim K = \infty$. Dla $n \leq \dim K$ zbiór $K^n := \{\sigma \in K; \dim \sigma \leq n\}$ jest n -wymiarowym szkieletem kompleksu K .

Definicja 2.2.3. Przestrzeń geometrycznego kompleksu symplecjalnego K nazywamy zbiór $|K| := \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ z największą topologią gwarantującą ciągłość wszystkich włożeń $\sigma \hookrightarrow |K|$, dla $\sigma \in K$, tzn.

$$A \subset |K| \text{ jest domknięty} \iff \forall \sigma \in K A \cap \sigma \text{ jest domknięty}. \quad (2.10)$$



Rysunek 2.1: Próba rozkładu na sympleksy – półkola otwartego i domkniętego.

Przykład 2.2.1. Rysunek 2.1A pokazuje półkole otwarte (bez łuku okręgu), jako przestrzeń nieskończonego kompleksu symplecjalnego. Próba triangulacji półkola domkniętego jest nieudana mimo tego, iż rysunek B przedstawia skończone przybliżenie prawidłowego (nieskończonego) kompleksu symplecjalnego. Przestrzeń otrzymanego w ten sposób kompleksu zawiera tylko przeliczalnie wiele punktów półokręgu i nie jest przestrzenią lokalnie zwartą.

Przykład 2.2.2. Sympleks n -wymiarowy σ jest przestrzenią kompleksu $\text{sd}^0 \sigma := \{\tau \subset \sigma; \tau \text{ jest ścianą } \sigma\}$. Brzeg $\partial\sigma$ jest przestrzenią $(n-1)$ -wymiarowego szkieletu $(\text{sd}^0 \sigma)^{n-1}$.

Przykład 2.2.3. Dla $n > 0$, niech $\sigma = (v_0 \dots v_n)$ będzie dowolnym geometrycznym n -wymiarowym sympleksem. W każdej ze ścian $(v_{i_0} \dots v_{i_k}) \subseteq \sigma$ wyróżniamy jej środek

$$v_{(i_0 \dots i_k)} = \sum_{j \leq k} \frac{1}{k+1} v_{i_j}. \quad (2.11)$$

Podział barycentryczny $\text{sd}^1 \sigma$ sympleksu σ jest geometrycznym kompleksem symplijalnym, którego wierzchołki są opisanymi wyżej środkami ścian, zaś n -wymiarowe ściany

$$(v_{(\alpha_0 \dots \alpha_n)} v_{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} \dots v_{(\alpha_{n-1} \alpha_n)} v_{\alpha_n}) \in \text{sd}^1 \sigma \quad (2.12)$$

odpowiadają wszystkim permutacjom $(\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ ciągu $(0, \dots, n)$. Środki ścian $\tau_0, \dots, \tau_k \subset \sigma$ są wierzchołkami sympleksu w $\text{sd}^1 \sigma$ wtedy, gdy – po uporządkowaniu względem relacji zawierania – ściany tworzą ciąg monotoniczny, np. zstępujący – jak w (2.12). Z konstrukcji wynika, że sympleksy podziału zawarte w dowolnej ze ścian $\tau \subset \sigma$ tworzą podział symplijalny ściany $\text{sd}^1 \tau$.

Przestrzenią kompleksu $\text{sd}^1 \sigma$ jest σ . Dokładniej, punkt $\sum_{i \leq n} \lambda_i v_i \in \sigma$ należy do sympleksu (2.12) odpowiadającego permutacji α wtedy i tylko wtedy, gdy jego współrzędne barycentryczne spełniają nierówności $\lambda_{\alpha_0} \leq \lambda_{\alpha_1} \leq \dots \leq \lambda_{\alpha_n}$. Jest to prosta konsekwencja tożsamości

$$\begin{aligned} \lambda'_0 v_{(\alpha_0 \dots \alpha_n)} + \lambda'_1 v_{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} + \dots + \lambda'_n v_{\alpha_n} \\ = \frac{\lambda'_0}{n+1} v_{\alpha_0} + \left(\frac{\lambda'_0}{n+1} + \frac{\lambda'_1}{n} \right) v_{\alpha_1} + \dots + \left(\frac{\lambda'_0}{n+1} + \dots + \frac{\lambda'_n}{1} \right) v_{\alpha_n}. \end{aligned}$$

Koncepcja podziału barycentrycznego sympleksu jest podstawą wielu topologicznych i algebraicznych konstrukcji wprowadzanych w dalszych rozdziałach niniejszego skryptu. W tym miejscu wykażemy, że w wyniku podziału sympleksy „zmniejszają się” w ustalony, zależny od wymiaru sposób. Potrzebną do takiej oceny miarę możemy uzyskać zanurzając sympleks w przestrzeni euklidesowej lub wprowadzając metrykę euklidesową w otaczającej sympleks przestrzeni afinicznej.

Stwierdzenie 2.2.1. *Dla dowolnego n -wymiarowego sympleksu σ położonego w przestrzeni euklidesowej zachodzi nierówność*

$$\max\{\text{diam}(\tau); \tau \in \text{sd}^1 \sigma\} \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma). \quad (2.13)$$

Dowód. Wobec równości (2.7), wystarczy oszacować długość dowolnej krawędzi $(v'v'') \in \text{sd}^1 \sigma$. Możemy przyjąć, że $v' = \sum_{i \leq q} \frac{1}{q+1} v_i$ oraz $v'' = \sum_{i \leq r} \frac{1}{r+1} v_i$ są środkami pewnych ścian $(v_0 \dots v_q) \subset (v_0 \dots v_r) \subset \sigma$ wymiaru q i r , $q < r \leq n$. Tożsamość

$$v' - v'' = \frac{r-q}{r+1} \left(\sum_{i=0}^q \frac{1}{q+1} v_i - \sum_{i=q+1}^r \frac{1}{r-q} v_i \right)$$

daje nierówności

$$\|v' - v''\| \leq \frac{r-q}{r+1} \text{diam}(\sigma) \leq \frac{n}{n+1} \text{diam}(\sigma).$$

□

Jeśli g.k.s. K jest skończony, to $|K|$ jest zwartym podzbiorem skończenie wymiarowej przestrzeni afinicznej rozpiętej na wierzchołkach kompleksu. W ogólnej sytuacji topologia przestrzeni $|K|$ nie musi być identyczna z topologią indukowaną z otaczającej przestrzeni – por. rysunek 2.1.

Definicja 2.2.4. *Zwarty podzbiór W skończenie-wymiarowej przestrzeni afinicznej nazywamy wielościanem, jeżeli istnieje skończony geometryczny kompleks symplijalny K taki, że $W = |K|$. Kompleks K jest wówczas triangulacją wielościanu W .*

Przykład 2.2.4. Dla każdego n naturalnego pryzma $I \times \Delta^n$ jest wielościanem. Przyjmując oznaczenia $A_i = (0, E_i), B_i = (1, E_i)$, dla $i = 0, \dots, n$, możemy opisać przykładową triangulację pryzmy poprzez rozkład

$$I \times \Delta^n = \bigcup_{i \leq n} (A_0 \dots A_i B_i \dots B_n). \quad (2.14)$$

Ćwiczenie 2.2.2. Dla dowolnych naturalnych m, n wskazać triangulację produktu $\Delta^m \times \Delta^n$, w której zbiorem wierzchołków jest $\{(E_i, E_j) \in \mathbb{R}^{m+n}; i \leq m, j \leq n\}$.

U podstaw topologii algebraicznej leży koncepcja badania przestrzeni topologicznych poprzez geometryczne i w dalszej kolejności algebraiczne konstrukcje mające swój początek we właściwym opisie samej przestrzeni. Stąd kompleksy symplijalne będziemy rozważać dla tych przestrzeni, których topologia może być w pełni opisana poprzez wzajemną konfigurację sympleksów.

W tym kontekście można odwrócić relację między przestrzenią topologiczną i kompleksem symplijalnym opisującym tę przestrzeń – i potraktować kompleks jako obiekt geometryczny, a właściwie kombinatoryczny, definiujący przestrzeń. Zauważmy, że sympleksy danego geometrycznego kompleksu symplijalnego K – jako zawarte we wspólnej przestrzeni afinicznej – są jednoznacznie wyznaczone przez zbiory swych wierzchołków.

Definicja 2.2.5. *Dowolną rodzinę K zbiorów skończonych spełniającą warunek*

$$\forall \sigma \in K \forall \tau \tau \subset \sigma \implies \tau \in K, \quad (2.15)$$

będziemy nazywać abstrakcyjnym kompleksem symplijalnym – a.k.s. Wierzchołkami kompleksu są elementy zbioru $K_0 := \{v; \{v\} \in K\}$. Dla każdego $n \geq 0$, n -szkieletem kompleksu K nazywamy a.k.s.

$$K^n = \{\sigma \in K; \#\sigma \leq n+1\}$$

utworzony ze zbiorów licznosci $n+1$ i mniejszej.

Elementy $\sigma \in K$ kompleksu K są *abstrakcyjnymi sympleksami* – za wymiar sympleksu σ przyjmujemy liczbę $\dim \sigma = \#\sigma - 1$, czyli pomniejszoną o 1 liczbę wierzchołków składających się na σ . W porównaniu do kompleksów geometrycznych, każdy kompleks abstrakcyjny zawiera jako element zbiór pusty – sympleks wymiaru -1 , z reguły pomijany w definicji a.k.g.

Przykład 2.2.5. Dowolne pokrycie otwarte $\mathfrak{U} = \{U_\alpha; \alpha \in A\}$ przestrzeni topologicznej X jest źródłem specyficznego a.k.s $\mathcal{N}\mathfrak{U}$ zwanego *nerwem pokrycia*, zdefiniowanego w sposób następujący:

$$\{U_{\alpha_0}, \dots, U_{\alpha_n}\} \in \mathcal{N}\mathfrak{U} \iff U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_n} \neq \emptyset.$$

Nerw pokrycia stanowi przybliżony, symplecjalny opis przestrzeni X .

Abstrakcyjny kompleks symplecjalny może być wykorzystany do zdefiniowania przestrzeni topologicznej o pożądaney strukturze. Dla dowolnego a.k.s. K , niech

$$E_K = \left\{ w \in \bigoplus_{v \in K_0} \mathbb{R}; \sum_{v \in K_0} w(v) = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{K_0} \quad (2.16)$$

będzie przestrzenią afiniczną rozpiętą na zbiorze wierzchołków. Każdemu wierzchołkowi $v \in K_0$ możemy przyporządkować punkt $v^g \in E_K$ taki, że

$$v^g(v') = \begin{cases} 0 & \text{dla } v' \in K_0 \setminus \{v\} \\ 1 & \text{gdy } v' = v, \end{cases} \quad (2.17)$$

natomiast każdemu niepustemu abstrakcyjnemu sympleksowi $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ – sympleks geometryczny $\sigma^g := (v_0^g \dots v_n^g) \subset E_K$. Otrzymany w ten sposób zbiór K^g geometrycznych sympleksów w E_K jest g.k.s. Dla $n \geq 0$, n -szkielety obu kompleksów odpowiadają sobie nawzajem. Bezpośrednio z definicji widać, że

$$|K^g| = \{w \in E_K; w^{-1}((0, 1]) \in K\}. \quad (2.18)$$

Dla uproszczenia notacji będziemy utożsamiać wierzchołki v^g kompleksu geometrycznego K^g z odpowiadającymi im wierzchołkami $v \in K_0$ kompleksu abstrakcyjnego K . Tym samym przyjmujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość

$$\sigma^g = (v_0 \dots v_n) \in K^g, \quad \text{dla } \sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K,$$

przy czym elementy $w \in |K^g|$ będziemy traktować jako sumy

$$w = \sum_{v \in K_0} w(v)v \in \bigoplus_{v \in K_0} \mathbb{R}.$$

Współczynniki w takiej sumie są zarówno wartościami funkcji $w: K_0 \rightarrow \mathbb{R}$, jak i barycentrycznymi współrzędnymi punktu w w każdym sympleksie zawierającym $w^{-1}((0, 1])$.

Ćwiczenie 2.2.3. Dowolny g.k.s. K wyznacza jednoznacznie a.k.s. K^a złożony ze zbiorów wierzchołków wszystkich sympleksów z K i zbioru pustego. Wykazać, że przestrzenie $|K|$ i $|K^a| = |(K^a)^g|$ są homeomorficzne – wskazać homeomorfizm będący ograniczeniem odwzorowania afinicznego otaczających przestrzeni.

Definicja 2.2.6. Przestrzeń $|K| := |K^g|$ geometrycznego kompleksu symplecjajnego K^g jest geometryczną realizacją a.k.s. K .

Ze względu na równoważność pojęć a.k.s. i g.k.s., przestrzeń $|K|$ będziemy nazywać też przestrzenią topologiczną kompleksu symplecjajnego K .

Wychodząc od dowolnego a.k.s., możemy w prosty sposób zdefiniować ważne dla zastosowań pokrycie otwarte przestrzeni $|K|$.

Definicja 2.2.7. Dla dowolnego a.k.s. K i dowolnego wierzchołka $v \in K_0$, gwiazdą wierzchołka nazywamy zbiór otwarty

$$\text{st } v = \{w \in |K|; w(v) > 0\}. \quad (2.19)$$

Ćwiczenie 2.2.4. Sprawdzić otwartość gwiazdy $\text{st } v$, odwołując się do definicji topologii w przestrzeni kompleksu symplecjajnego. Wykazać, że w przypadku geometrycznego kompleksu symplecjajnego alternatywnym, równoważnym opisem gwiazdy wierzchołka jest

$$\text{st } v = \bigcup \{\text{int } \sigma; v \in \sigma \in K\}. \quad (2.20)$$

Stwierdzenie 2.2.2. Rodzina gwiazd $\{\text{st } v; v \in K_0\}$ wierzchołków kompleksu symplecjajnego K stanowi otwarte pokrycie przestrzeni $|K|$. Dla dowolnych wierzchołków $v_0, \dots, v_n \in K_0, n \geq 0$, prawdziwa jest równoważność

$$\text{zbiór } \{v_0, \dots, v_n\} \text{ wyznacza sympleks w } K \iff \bigcap_{i \leq n} \text{st } v_i \neq \emptyset. \quad (2.21)$$

Dowód. Oczywisty – wobec (2.18). \square

Definicja 2.2.8. Rodzinę $\mathfrak{U}_K = \{\text{st } v; v \in K_0\}$ nazywać będziemy gwiazdzistym pokryciem przestrzeni $|K|$ kompleksu symplecjajnego K .

Ćwiczenie 2.2.5. Sprawdzić, że dla każdego sympleksu $\sigma = (v_0 \dots v_n) \in K$, zbiór otwarty $\bigcap_{i \leq n} \text{st } v_i$ jest gwiazdzisty względem środka sympleksu σ .

Znaczenie pokrycia gwiazdzistego \mathfrak{U}_K wyjaśnia także opisana w przykładzie 2.2.5 konstrukcja nerwu pokrycia.

Ćwiczenie 2.2.6. Sprawdzić, że nerw $\mathcal{N}\mathfrak{U}_K$ gwiazdzistego pokrycia jest abstrakcyjnym kompleksem symplecjajnym identycznym (izomorficznym) z wyjściowym kompleksem symplecjajnym K .

Pojęcia abstrakcyjnych i geometrycznych kompleksów symplecjajnych, jako równoważne, mogą być zamiennie stosowane do opisu i badania *prostych* przestrzeni topologicznych. Przedstawiona wyżej elementarna koncepcja geometrycznej realizacji kompleksu nie jest jednak szczególnie efektywna i wymaga przenoszenia rozważań w przestrzenie o bardzo dużym wymiarze. W praktyce, do definiowania triangulacji wielościanu i w ten sposób samego wielościanu, często stosowana jest metoda sklejanania, tzn. utożsamiania wybranych ścian i wierzchołków prostszej przestrzeni – z reguły wielościanu ulokowanego w przestrzeni afinicznej o niższym wymiarze.

Definicja 2.2.9. Dla dowolnego a.k.s K , funkcja f określona na zbiorze wierzchołków K_0 jest odwzorowaniem sklejającym, jeżeli

$$\forall \sigma \in K \text{ obcięcie } f|_{\sigma} \text{ jest funkcją różnowartościową.}$$

Kompleksem ilorazowym nazywamy a.k.s.

$$K/f := \{f(\sigma); \sigma \in K\}$$

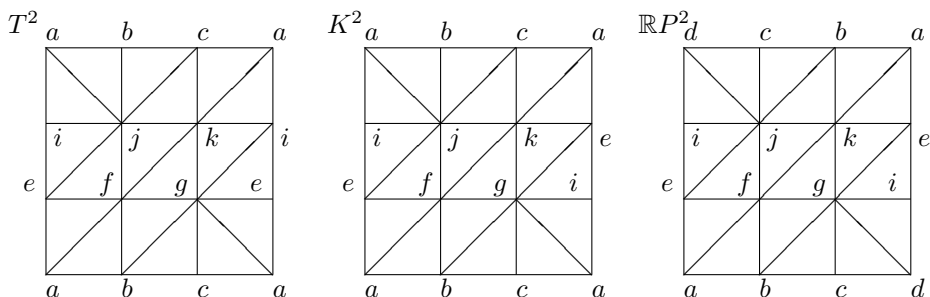
o zbiorze wierzchołków $f(K_0)$.

Zauważmy, że dla każdego $\sigma \in K$, obraz $f(\sigma)$ jest zbiorem o tej samej liczbie elementów. Dowolny podzbiór $\tau' \subset f(\sigma)$ jest postaci $\tau' = f(\tau)$ dla $\tau = \sigma \cap f^{-1}(\tau') \in K$. Z opisanej tu konstrukcji korzysta się zazwyczaj w sytuacji, gdy wyjściowym kompleksem jest a.k.s. K^a wyznaczony przez ustaloną triangulację K wielościanu $|K|$, zaś odwzorowanie sklejające wskazuje, które wierzchołki triangulacji oraz ściany należy utożsamiać.

Ćwiczenie 2.2.7. Dla dowolnego a.k.s. K i odwzorowania sklejającego f sprawdzić, że funkcja afiniczna

$$|f|: E_K \ni \sum_{v \in K_0} \lambda_v v \mapsto \sum_{v \in K_0} \lambda_v f(v) \in E_{K/f}$$

przeprowadza $|K|$ na $|K/f|$ i wyznacza homeomorfizm $|K/f|$ i przestrzeni ilorazowej $|K|/\sim$, gdzie $w \sim w' \iff |f|(w) = |f|(w')$ dla $w, w' \in |K|$.



Rysunek 2.2: Triangulacja torusa, butelki Kleina i płaszczyzny rzutowej

Przykład 2.2.6. Triangulacja kwadratu może stanowić punkt wyjścia do otrzymania – w wyniku utożsamienia wybranych wierzchołków przeciwległych krawędzi, zgodnie z rys. 2.2 – torusa $T^2 = S^1 \times S^1$ oraz butelki Kleina K^2 i płaszczyzny rzutowej $\mathbb{R}P^2$.

Ze względu na wymiar sympleksów tworzących kompleks symplecjalny rozważa się także alternatywny, indukcyjny sposób konstrukcji przestrzeni (realizacji) kompleksu, wykorzystujący ciąg n -szkieletów kompleksu i operację doklejania sympleksów.

Ćwiczenie 2.2.8. Dla dowolnego a.k.s. K zachodzi równość $|K| = \bigcup_{n \geq 0} |K^n|$, przy czym geometryczne realizacje $|K^n|$ n -szkieletów kompleksu tworzą wstępującą rodzinę podzbiorów domkniętych.

Ustalmy dowolny liniowy porządek w zbiorze wierzchołków a.k.s. K . Porządek implikuje jednoznaczny wybór izomorfizmów $\langle \sigma \rangle: \Delta^n \rightarrow \sigma^g \subset E_K$ dla $\sigma \in K$, $n = \dim \sigma$, opisujących sympleksy składające się na geometryczną realizację $|K|$. Ponieważ $\langle \sigma \rangle$ przeprowadza parę $(\Delta^n, \partial \Delta^n)$ w $(|K^n|, |K^{n-1}|)$, łącząc te włożenia otrzymujemy rodzinę odwzorowań par

$$\iota_{K,n}: \coprod_{\substack{\sigma \in K \\ \dim \sigma = n}} (\Delta^n, \partial \Delta^n) \rightarrow (|K^n|, |K^{n-1}|), \quad (2.22)$$

dla $n \geq 0$. Dla $n = 0$ przyjmujemy, że wyróżnione w powyższych parach podzbiory są puste.

Twierdzenie 2.2.3. *Niech K będzie dowolnym a.k.s.*

(i) $|K^0|$ jest przestrzenią wierzchołków kompleksu z topologią dyskretną. Dla każdego $n > 0$, odwzorowanie (2.22) indukuje homeomorfizm

$$\left(\coprod_{\substack{\sigma \in K \\ \dim \sigma = n}} \Delta^n \right) \cup_{\iota_{K,n}} |K^{n-1}| \xrightarrow{\cong} |K^n|.$$

(ii) Jeśli $\dim K = \infty$, to przestrzeń $|K| = \bigcup_{n \geq 0} |K^n|$ ma topologię indukowaną, tzn. najmniejszą topologię, dla której wszystkie włożenia $|K^n| \hookrightarrow |K|$ są ciągle.

Dowód. Jest to szczególny przypadek twierdzenia 2.4.4 opisującego ogólną konstrukcję CW-kompleksów. \square

2.3 Odwzorowania symplecjalne

W poprzednim podrozdziale wykazaliśmy równoważność dwu pojęć – geometrycznego i abstrakcyjnego kompleksu symplecjalnego – dla opisu i konstrukcji rodziny przestrzeni topologicznych obejmującej wielościany. Wprowadzając nowe pojęcia, będziemy konsekwentnie wybierać ten rodzaj kompleksów symplecjalnych, w których konstrukcja czy definicja jest prostsza. Alternatywne rozwiązania będą z reguły umieszczane w ćwiczeniach.

Mając wyróżnioną rodzinę przestrzeni topologicznych opisywalnych jako realizacje lub przestrzenie kompleksów symplecjalnych, uzupełnimy teraz ten obraz o stosowne odwzorowania.

Definicja 2.3.1. Odwzorowaniem symplecjalnym $\phi: K \rightarrow L$ (abstrakcyjnego) kompleksu symplecjalnego K w (abstrakcyjny) kompleks symplecjalny L nazywamy każdą

funkcję przypisującą wierzchołkom z K wierzchołki z L i jednoznacznie wyznaczoną przez odwzorowanie wierzchołków $\phi_0: K_0 \rightarrow L_0$, zgodnie z warunkiem

$$\phi(\sigma) = \phi_0(\sigma) = \{\phi_0(v_0), \dots, \phi_0(v_n)\} \quad (2.23)$$

dla $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$.

W praktyce odwzorowanie wierzchołków oznacza się tym samym symbolem, co odwzorowanie symplecjalne, o ile nie prowadzi to do nieporozumień.

Innymi słowy, obraz zbioru wierzchołków dowolnego sympleksu z K jest zbiorem wierzchołków sympleksu w L – być może niższego wymiaru, jeśli odwzorowanie symplecjalne nie jest różnowartościowe.

Przykład 2.3.1. Każde odwzorowanie sklejające (2.2.9) jest odwzorowaniem symplecjalnym – por. ćwiczenie 2.2.7.

Definicja 2.3.2. *Odwzorowanie symplecjalne* $\phi: K \rightarrow L$ wyznacza (ciągłe) odwzorowanie symplecjalne przestrzeni kompleksów

$$|\phi|: |K| \ni \sum_{v \in K_0} w(v)v \mapsto \sum_{v' \in L_0} \left(\sum_{v \in \phi^{-1}v'} w(v) \right) v' \in |L|. \quad (2.24)$$

Każdą funkcję ciągłą $f: |K| \rightarrow |L|$ opisaną wyżej postaci będziemy nazywać odwzorowaniem symplecjalnym względem kompleksów K i L .

Ćwiczenie 2.3.1. Sprawdzić, że dla dowolnych g.k.s. K i L alternatywnym do (2.23–2.24), równoważnym opisem odwzorowań symplecjalnych są warunki

$$\forall_{\sigma \in K} \sigma = (v_0 \dots v_n) \implies \exists_{\sigma' \in L} \{\phi(v_0), \dots, \phi(v_n)\} \subset \sigma',$$

oraz dla każdego sympleksu $\sigma = (v_0 \dots v_n) \in K$

$$\phi(\sigma) = |\phi|(\sigma) \quad (2.25)$$

jest obrazem w odwzorowaniu afinicznym

$$|\phi|: \sigma \ni \sum_{i \leq n} \lambda_i v_i \mapsto \sum_{i \leq n} \lambda_i \phi(v_i) \in |L|.$$

Stwierdzenie 2.3.1. *Dla dowolnych dwu geometrycznych kompleksów symplecjalnych K i L , własności (2.24–2.25) ustalają wzajemnie jednoznaczność odpowiedniość pomiędzy odwzorowaniami symplecjalnymi $\phi: K \rightarrow L$ a odwzorowaniami $|\phi|: |K| \rightarrow |L|$ takimi, że dla każdego sympleksu $\sigma \in K$ ograniczenie $|\phi|$ do σ jest afiniczne, przy czym obraz $|\phi|(\sigma)$ jest sympleksem w L . \square*

Odwzorowania symplecjalne nie są celem samym w sobie – mają służyć jako przybliżony, uproszczony opis dostatecznie ogólnej rodziny odwzorowań pomiędzy przestrzeniami kompleksów symplecjalnych. Dla zdefiniowania takiej rodziny wykorzystamy pokrycia gwiazdziste.

Definicja 2.3.3. Dla dowolnych dwu (geometrycznych) kompleksów symplecjialnych K i L , odwzorowanie $f: |K| \rightarrow |L|$ będziemy uważać za zgodne ze strukturą symplecjialną kompleksów, jeżeli pokrycie gwiazdziste \mathfrak{A}_K jest wpisane w przeciwobraz $f^{-1}\mathfrak{A}_L$, tzn., jeżeli spełniony jest warunek

$$\forall v \in K_0 \exists w \in L_0 f(\text{st } v) \subset \text{st } w. \quad (2.26)$$

Łatwo zauważyć, że superpozycja funkcji zachowuje własność zgodności odwzorowań ze strukturą symplecjialną kompleksów.

Stwierdzenie 2.3.2. Jeżeli funkcja $f: |K| \rightarrow |L|$ jest zgodną ze strukturą symplecjialną kompleksów K i L , to:

- (i) każda funkcja $\phi: K_0 \rightarrow L_0$ taka, że $f(\text{st } v) \subset \text{st } \phi(v)$ dla $v \in K_0$, jest odwzorowaniem symplecjialnym $K \rightarrow L$; ponadto
- (ii) dla każdego punktu $x \in |K|$ i dowolnego sympleksu $\sigma \in L$ prawdziwa jest implikacja

$$f(x) \in \sigma \implies |\phi|(x) \in \sigma. \quad (2.27)$$

Dowód. Jeżeli funkcja $\phi: K_0 \rightarrow L_0$ spełnia warunek $f(\text{st } v) \subset \text{st } \phi(v)$ dla $v \in K_0$, to biorąc za v kolejne wierzchołki v_0, \dots, v_n dowolnego sympleksu w K , stwierdzamy zawieranie zbiorów

$$\bigcap_{i \leq n} \text{st } \phi(v_i) \supset \bigcap_{i \leq n} f(\text{st } v_i) \supset f\left(\bigcap_{i \leq n} \text{st } v_i\right) \neq \emptyset.$$

Wobec (2.21) oznacza to, że wierzchołki $\phi(v_i), i \leq n$, wyznaczają sympleks w L . Zatem ϕ jest odwzorowaniem symplecjialnym.

Dla $x \in |K|$ niech $\sigma_1 = (v_0 \dots v_{n_1}) \in K$ i $\sigma_2 = (w_0 \dots w_{n_2}) \in L$ będą najmniejszymi sympleksami zawierającymi odpowiednio x i $f(x)$. W szczególności oznacza to, że wszystkie współrzędne barycentryczne x w σ_1 są dodatnie. Dla każdego $i \leq n_1$ mamy zatem $x \in \text{st } v_i$, a więc też

$$f(x) \in f(\text{st } v_i) \subset \text{st } \phi(v_i),$$

co implikuje przynależność $\phi(v_i) \in \{w_0, \dots, w_{n_2}\}$. Z afiniczności $|\phi|$ wynika, że obraz $|\phi|(\sigma_1)$ w całości leży w σ_2 , co kończy dowód własności (ii). \square

Ćwiczenie 2.3.2. Wykazać, że zależność (2.27) pomiędzy funkcją ciągłą $f: |K| \rightarrow |L|$ i odwzorowaniem symplecjialnym ϕ jest równoważna własności $f(\text{st } v) \subset \text{st } \phi(v)$, dla $v \in K_0$.

Definicja 2.3.4. Dla dowolnego odwzorowania $f: |K| \rightarrow |L|$ zgodnego ze strukturą symplecjialną, odwzorowanie symplecjialne $\phi: K \rightarrow L$ związane z f własnościami opisanymi w twierdzeniu 2.3.2 nazywać będziemy aproksymacją symplecjialną funkcji f .

Wniosek 2.3.3. Dla każdej aproksymacji symplecjoidalnej $\phi: K \rightarrow L$ funkcji $f: |K| \rightarrow |L|$ kombinacja wypukła

$$I \times |K| \ni (t, x) \mapsto tf(x) + (1-t)|\phi|(x) \in |L|$$

jest homotopią $|\phi| \simeq f$. □

Jak widać, zgodność odwzorowania $f: |K| \rightarrow |L|$ ze strukturą symplecjoidalną jest własnością na tyle silną, że implikującą możliwość homotopijnej deformacji do funkcji kawałkami liniowej na sympleksach. Z definicji widać jednak, że o ile dopuścimy do rozważań coraz drobniejsze triangulacje dziedziny, wówczas każda funkcja ciągła $|K| \rightarrow |L|$ staje się zgodna z „dostatecznie drobną” strukturą symplecjoidalną.

Definicja 2.3.5. Dla dowolnego g.k.s K , podziałem barycentrycznym nazywamy g.k.s. $\text{sd } K$, określony w sposób następujący:

(i) Wierzchołkami podziału barycentrycznego są środki ciężkości

$$w_\sigma = \sum_{i \leq n} \frac{1}{n+1} v_i \in \sigma, \quad \text{dla } \sigma = (v_0 \dots v_n) \in K, n \geq 0,$$

wszystkich sympleksów tworzących K .

(ii) Dla $k > 0$, sympleksami k -wymiarowymi kompleksu $\text{sd } K$ są zbiory

$$(w_{\sigma_0} w_{\sigma_1} \dots w_{\sigma_k}) \subset |K|, \quad \text{dla } \sigma_0 \supseteq \sigma_1 \supseteq \dots \supseteq \sigma_k,$$

wyznaczone przez wszystkie $(k+1)$ -elementowe zstępujące ciągi sympleksów kompleksu K .

Poprawność powyższej definicji wymaga dowodu.

Stwierdzenie 2.3.4. Podział barycentryczny dowolnego g.k.s K jest geometrycznym kompleksem symplecjoidalnym o przestrzeni $|\text{sd } K| = |K|$. Dowolne odwzorowanie symplecjoidalne $\phi: K \rightarrow L$ wyznacza odwzorowanie symplecjoidalne odpowiednich podziałów barycentrycznych, $\text{sd } \phi: \text{sd } K \rightarrow \text{sd } L$, takie, że $|\text{sd } \phi| = |\phi|$.

Dowód. Dla ustalonego sympleksu $\sigma \in K$, warunek $\sigma \supseteq \sigma_0 \supseteq \sigma_1 \supseteq \dots \supseteq \sigma_k$ wyróżnia rodzinę sympleksów $(w_{\sigma_0} w_{\sigma_1} \dots w_{\sigma_k}) \subset \sigma$, stanowiących opisany w (2.12) podział barycentryczny $\text{sd}^1 \sigma$. Dla dowolnych dwu sympleksów $\sigma, \tau \in K$, równość

$$\text{sd}^1 \sigma \cap \text{sd}^1 \tau = \text{sd}^1 (\sigma \cap \tau)$$

oznacza zgodność podziałów barycentrycznych poszczególnych sympleksów z K i sprowadza całość problemu do szczególnego przypadku ujętego w przykładzie 2.12.

Własność przenoszenia odwzorowań symplecjoidalnych na kompleksy podziałów barycentrycznych jest prostym wnioskiem z twierdzenia 2.3.1. Istotnie, $\phi: K \rightarrow L$ wyznacza $|\phi|: |K| = |\text{sd } K| \rightarrow |L| = |\text{sd } L|$, a to z kolei $\text{sd } \phi: \text{sd } K \rightarrow \text{sd } L$. □

i promieniu równym średnicy wchodzących w skład gwiazdy sympleksów. Ponieważ $\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \rightarrow 0$ dla $m \rightarrow \infty$, możemy zatem dobrać m na tyle duże, by

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \max\{\text{diam}(\sigma); \sigma \in K\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

gdzie ε jest liczbą Lebesgue'a danego pokrycia \mathcal{U} . \square

2.4 CW-kompleksy

O ile kompleksy symplcjalne są dostatecznie regularnymi obiektami, by w kolejnych rozdziałach były wykorzystywane do badania przestrzeni topologicznych i pomiaru ich *osobliwości – nietrywialności*, nie są jednak dostatecznie elastyczne, by efektywnie *opisywać* przestrzenie inne niż kawałkami liniowe. W roku 1949 J.G.K. Whitehead wprowadził pojęcie CW-rozkładu przestrzeni topologicznej i zdefiniował tym samym kategorię CW-kompleksów (zob. [3], [7]). Wiele argumentów przemawia za tym, by ten rodzaj przestrzeni topologicznych uważać za najbardziej przydatny do zastosowań i rozwoju topologii algebraicznej.

Definicja 2.4.1. *Rodzinę wzajemnie rozłącznych podzbiorów \mathcal{G} przestrzeni Hausdorfa X nazywamy CW-rozkładem, jeśli spełnione są następujące warunki:*

- (i) $X = \bigcup \mathcal{G}$.
- (ii) *Każdy zbiór $e \in \mathcal{G}$ jest n -komórką, tzn. jest homeomorficzny z przestrzenią euklidesową \mathbb{R}^n , $n \geq 0$; liczbę $\dim e = n$ będziemy nazywać wymiarem komórki. Sumy $X^n = \bigcup_{\dim e \leq n} e$, dla $n \geq 0$, są kolejnymi szkieletami rozkładu.*
- (iii) *Dla każdej n -komórki $e \in \mathcal{G}$ istnieje odwzorowanie $\Phi_e: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$ przekształcające kulę otwartą $\text{int } B^n$ homeomorficznie na e . Każde Φ_e o tej własności jest odwzorowaniem charakterystycznym komórki e .*
- (iv) *Domknięcie \bar{e} (równoważnie – brzeg $\partial e = \bar{e} \setminus e$) każdej komórki zawiera się w skończonej sumie komórek.*
- (v) *Topologia w X jest wyznaczona przez rodzinę $\{\bar{e}; e \in \mathcal{G}\}$ domkniętych komórek, tzn. dla dowolnego podzbioru $A \subset X$,*

$$A \text{ jest domknięty w } X \iff \forall e \in \mathcal{G} A \cap \bar{e} \text{ jest domknięty w } \bar{e}.$$

Przestrzeń X z wyróżnionym CW-rozkładem jest CW-kompleksem. Wymiarem $\dim X$ nazywamy największy z wymiarów komórek rozkładu – równość $\dim X = \infty$ oznacza, że X zawiera komórki dowolnie dużych wymiarów.

Rozwijane w dalszych rozdziałach metody topologii algebraicznej pozwalają stwierdzić (por. wniosek 3.4.5), że wymiary komórek są jednoznacznie określone, a wymiar całego CW-kompleksu nie zależy od CW-rozkładu. Każdy CW-rozkład

\mathcal{G} jest zatem sumą rozłącznych zbiorów $\mathcal{G}^n, n \geq 0$, zawierających komórki ustalonego wymiaru. Będziemy używać także oznaczeń $\mathcal{G}_X, \mathcal{G}_X^n$, dla jawnego wskazania przestrzeni $X = \bigcup \mathcal{G}_X$, której dotyczy CW -rozkład.

Przyjęty w definicji skrót CW pochodzi od warunków (iv)–(v) i oznacza *Closure finiteness* i *Weak topology*. Oba warunki są istotne tylko w przypadku nieskończonej liczby komórek, tzn. dla nieskończonych CW -kompleksów. Przekonamy się wkrótce, że warunki te są automatycznie spełnione, jeśli budować CW -kompleks wychodząc od danej rodziny odwzorowań charakterystycznych – por. twierdzenie 2.4.4.

Ćwiczenie 2.4.1. Sprawdzić, że domknięcie każdej komórki $e \in \mathcal{G}$ jest identyczne z obrazem dowolnego odwzorowania charakterystycznego Φ_e .

Stwierdzenie 2.4.1. *Zwarty podzbiór $K \subset X$ zawiera się w skończonym zbiorze komórek. CW -kompleks jest przestrzenią zwartą wtedy i tylko wtedy, gdy jest skończony.*

Dowód. Ćwiczenie: Wykazać, że biorąc po jednym punkcie z każdego niepustego przekroju $K \cap e$ otrzymujemy domknięty podzbiór dyskretny. \square

Definicja 2.4.2. *Podzbiór $X' \subset X$ jest CW -podkompleksem, jeśli rodzina $\mathcal{G}_{X'} = \{e \in \mathcal{G}_X; e \subset X'\}$ jest jego CW -rozkładem. Parę przestrzeni topologicznych (X, X') nazywamy w tym przypadku CW -parą.*

Twierdzenie 2.4.2. *Zbiór komórek $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ wyznacza CW -podkompleks $X' = \bigcup \mathcal{G}'$ wtedy i tylko wtedy, gdy:*

- (i) *zbiór X' jest domknięty lub, równoważnie,*
- (ii) *wraz z każdą komórką e , X' zawiera też jej domknięcie \bar{e} .*

Wniosek 2.4.3. *Każdy n -szkielet X^n CW -kompleksu X jest zbiorem domkniętym i podkompleksem. Komórki n -wymiarowe są otwartymi podzbiórami w X^n – składowymi spójności różnicy $X^n \setminus X^{n-1}$. \square*

Dowód. Zakładając, że zbiór $X' = \bigcup \mathcal{G}'$ będący dowolną sumą komórek spełnia warunek (ii), wykażemy pomocniczą własność:

(iii) *dla dowolnego podzbioru $A \subset X'$,*

$$\forall e \in \mathcal{G}' A \cap \bar{e} \text{ jest domknięty w } \bar{e} \implies A \text{ jest domknięty w } X.$$

Zauważmy, że dla komórek wymiaru 0 – domkniętych w przestrzeni Hausdorffa – przekrój z dowolnym zbiorem jest domknięty. Stosując indukcję założymy, że zbiór A ma domknięte przekroje z domknięciami komórek z \mathcal{G}' oraz ze wszystkimi zbiorami \bar{e} , dla komórek $e \notin \mathcal{G}'$ wymiaru mniejszego niż $n > 0$. Biorąc dowolną komórkę $e \notin \mathcal{G}'$ wymiaru n , znajdujemy – zgodnie z definicją 2.4.1(iv) – komórki niższego wymiaru e_1, \dots, e_k takie, że $\partial e \subset \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_k$, a zatem

$$A \cap \bar{e} = \bigcup_{i \leq k} (A \cap \bar{e}_i) \cap \partial e$$

jest zbiorem zwartym, domkniętym w przestrzeni Hausdorffa \bar{e} . Indukcja dowodzi, że zbiór A spełnia podany w definicji warunek domkniętości w CW -kompleksie.

Stosując teraz własność (iii) do $A = X'$ wnioskujemy, że z warunku (ii) wynika domkniętość X' . To z kolei oznacza, że warunek podany w implikacji (iii) pociąga za sobą domkniętość zbioru A w X' . Wykazaliśmy zatem, że X' spełnia także ostatni warunek definicji CW -kompleksu. \square

Ćwiczenie 2.4.2. Wykazać, że każda komórka (nieskończonego) CW -kompleksu zawiera się w pewnym skończonym CW -podkompleksie.

Przykładem CW -kompleksów są oczywiście przestrzenie dowolnych kompleksów symplecjalnych. W ogólnym przypadku CW -rozkład przestrzeni wymaga istotnie mniejszej liczby komórek niż triangulacja homeomorficznych wielościanów.

Przykład 2.4.1. Minimalny CW -rozkład sfery S^n składa się z dwu komórek e^0 i e^n – ze wskazaniem wymiaru. e^0 jest zbiorem 1-punktowym, a e^n – jego dopełnieniem. CW -rozkład kuli domkniętej B^n składa się z e^0, e^{n-1} i e^n .

Przykład 2.4.2. Jeśli $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ jest jednym z ciał liczbowych (\mathbb{H} – ciało kwaternionów), to n -wymiarową *przestrzeń rzutową nad ciałem F* , $n \geq 0$, definiujemy jako zbiór 1-wymiarowych podprzestrzeni liniowych w przestrzeni F^{n+1} , tzn. zbiór orbit

$$FP^n = (F^{n+1} \setminus \{0\})/F^*$$

grupy $F^* = F \setminus \{0\}$ działającej w standardowy sposób (lewostronnie) na $F^{n+1} \setminus \{0\}$, z topologią ilorazową czyli największą, zapewniającą ciągłość rzutowania

$$\pi: F^{n+1} \setminus \{0\} \ni (\xi_0, \dots, \xi_n) \mapsto [\xi_0, \dots, \xi_n] \in FP^n. \quad (2.29)$$

CW -rozkład przestrzeni rzutowej tworzy n komórek

$$e^{dk} = \{[\xi_0, \dots, \xi_n] \in FP^n; \xi_k \neq 0, \xi_i = 0 \text{ dla } i > k\}$$

wymiaru $dk, k = 0, 1, \dots, n$, przy czym $d \in \{1, 2, 4\}$ zależy od przypadku $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Odwzorowaniem charakterystycznym dla k -tej komórki rozkładu jest np.

$$\Phi^k: B^{dk} \ni (z_0, \dots, z_{k-1}) \mapsto [z_0, \dots, z_{k-1}, \sqrt{1 - \|z\|^2}, 0, \dots, 0] \in FP^n, \quad (2.30)$$

gdzie kulę B^{dk} utożsamiamy z podzbiorem $\{z \in F^k; \|z\| \leq 1\}$.

Ćwiczenie 2.4.3. Sprawdzić, że wskazany w przykładzie zbiór komórek spełnia warunki (i)–(iii) definicji 2.4.1, a zatem $\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n$ i $\mathbb{H}P^n$ są CW -kompleksami. Podkompleksy $\widehat{FP}^k = e^0 \cup e^d \cup \dots \cup e^{dk} \subset FP^n, k \leq n$, są homeomorficzne z przestrzeniami rzutowymi FP^k .

Ćwiczenie 2.4.4. Ostatnie z odwzorowań charakterystycznych, $\Phi^n: B^{dn} \rightarrow FP^n$, opisuje przestrzeń rzutową jako efekt utożsamienia w kuli B^{dn} punktów sfery S^{dn-1} różniących się o czynnik $\lambda \in S^{d-1} \subset F^*$. Również obcięcie rzutowania (2.29) do sfery $S^{d(n+1)-1} \subset F^{n+1} \setminus \{0\}$ wyznacza homeomorfizm przestrzeni rzutowej i przestrzeni orbit $S^{d(n+1)-1}/S^{d-1}$ naturalnego działania grupy S^{d-1} na sferze wymiaru $d(n+1) - 1$.

Definicja 2.4.3. Rzutowanie $S^{d(n+1)-1} \rightarrow FP^n$, czyli $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$, $S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^n$ i $S^{4n+3} \rightarrow \mathbb{H}P^n$ nazywane jest odwzorowaniem Hopfa odpowiedniej przestrzeni rzutowej.

Przykład 2.4.3. Miotelka, czyli podzbiór płaszczyzny \mathbb{R}^2 ,

$$M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{(x, x/i); x \in \mathbb{R}, x \in [0, 1]\}$$

z topologią indukowaną, nie jest CW -kompleksem. W topologii CW -kompleksu nadanej zbiorowi M zgodnie z lematem 2.4.6 (poniżej) ciąg $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ nie zbiega do punktu $(0, 0)$.

Opiszemy teraz strukturę dowolnego CW -kompleksu jako efekt zdefiniowanej indukcyjnie konstrukcji, polegającej na doklejaniu do istniejącej przestrzeni X^{n-1} rodziny kul – komórek domkniętych wymiaru n – oraz systematycznym powtarzaniu operacji dla otrzymanych kolejnych przestrzeni X^n , $n \geq 0$. Wychodząc od dowolnego CW -kompleksu X i jego CW -rozkładu \mathcal{G} zauważmy, że każdy układ odwzorowań charakterystycznych $\Phi_e: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$, $e \in \mathcal{G}$, wyznacza odwzorowanie par

$$\Phi^n: \prod_{e \in \mathcal{G}^n} (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1}), \quad (2.31)$$

dla $n \geq 0$; przyjmujemy $X^{-1} = \emptyset$. Ograniczenie Φ^n do sumy rozłącznej sfer oznaczać będziemy przez ϕ^n .

Twierdzenie 2.4.4 (Struktura CW -kompleksu). *Dla dowolnego CW -kompleksu X , kolejne podprzestrzenie filtracji $\{X^n; n \geq 0\}$ (n -szkielety) powiązane są następującymi zależnościami:*

- (i) X^0 jest przestrzenią dyskretną identyczną ze zbiorem 0-wymiarowych komórek \mathcal{G}_X^0 . Dla każdego $n > 0$, odwzorowanie (2.31) indukuje homeomorfizm

$$\left(\prod_{e \in \mathcal{G}_X^n} B^n \right) \cup_{\phi^n} X^{n-1} \cong X^n. \quad (2.32)$$

- (ii) Jeśli $\dim X = \infty$, to przestrzeń $X = \bigcup_{n \geq 0} X^n$ ma topologię indukowaną, tzn. najmniejszą topologię, dla której wszystkie włożenia $X^n \hookrightarrow X$ są ciągłe.

CW -kompleks X jest przestrzenią normalną.

Uwaga 2.4.1. Powyższe twierdzenie bywa często interpretowane jako alternatywna definicja CW -kompleksu, w której podstawową strukturą nałożoną na przestrzeń topologiczną X jest niemalejąca filtracja złożona z domkniętych podzbiorów $X^n \subset X$, $n \geq 0$, spełniających warunki (i)–(ii). Komórki są w tym podejściu identyfikowane ze składowymi spójności dopełnień $X^n \setminus X^{n-1}$, gdzie przyjmuje się $X^{-1} = \emptyset$.

Ten sposób postrzegania CW-kompleksów uzasadnia następującą definicję morfizmu w opisywanej kategorii.

Definicja 2.4.4. *Odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ dwu CW-kompleksów nazywamy komórkowym, jeśli zachowuje filtracje w obu przestrzeniach, tzn. jeśli spełniony jest warunek $f(X^n) \subset Y^n$, dla wszystkich $n \geq 0$.*

Twierdzenie 2.4.5. *Dla każdego odwzorowania CW-kompleksów $f: X \rightarrow Y$ istnieje odwzorowanie komórkowe $g: X \rightarrow Y$ homotopijne z f .*

Dowód twierdzenia o CW-aproksymacji wykracza poza ramy skryptu. Zainteresowanego szczegółami czytelnika odsyłamy np. do [7].

W dowodzie twierdzenia strukturalnego wykorzystamy następujący lemat mający także samodzielną wartość.

Lemat 2.4.6. *Załóżmy, że dla pewnego $n > 0$ przestrzeń normalna Y jest CW-kompleksem wymiaru mniejszego niż n . Dla dowolnego zbioru \mathcal{A} i rodziny funkcji ciągłych $\phi_a: S^{n-1} \rightarrow Y, a \in \mathcal{A}$, przestrzeń*

$$Z = \left(\coprod_{a \in \mathcal{A}} B^n \right) \cup_{(\phi_a)} Y \quad (2.33)$$

jest CW-kompleksem i przestrzenią normalną.

Dowód. Zbiór n -komórek w Z tworzą składniki rozkładu

$$Z \setminus Y = \coprod_{a \in \mathcal{A}} \text{int } B^n = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} e_a,$$

gdzie zgodnie z formalną definicją (1.10) sumy rozłącznej $e_\alpha = \{\alpha\} \times \text{int } B^n$, dla $\alpha \in \mathcal{A}$. Funkcjami charakterystycznymi są złożenia

$$\Phi_{e_\alpha}: B^n \equiv \{\alpha\} \times B^n \subset \left(\coprod_{a \in \mathcal{A}} B^n \right) \sqcup Y \xrightarrow{\pi} Z, \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

inkluzji oraz kanonicznego rzutowania π . Przestrzeń Z powstała w wyniku doklejenia do Y rodziny kul domkniętych jest normalna na mocy twierdzenia 1.4.3, a więc jest też przestrzenią Hausdorffa. Każdy z brzegów $\partial e_\alpha = \phi_\alpha(S^{n-1}), \alpha \in \mathcal{A}$, – zbiorów zwartych – przecina skończoną liczbę komórek CW-kompleksu Y . Dla sprawdzenia warunków domkniętości dowolnego podzbioru $A \subset Z$, oznaczmy $\pi_a := \pi|_{\{a\} \times B^n}, a \in \mathcal{A}$. Zgodnie z konstrukcją Z , zbiór A jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy:

- (i) $A \cap Y$ jest domkniętym podzbiorem Y oraz
- (ii) $\forall_{a \in \mathcal{A}} \pi_a^{-1} A$ jest domknięty w $\{a\} \times B^n$ – czyli zwarty.

Pierwszy z warunków opisuje się poprzez przekroje z domknięciami komórek wchodzących w skład Y , natomiast w drugim wystarczy zauważyć, że domknięciem komórki e_a jest zwarty obraz π_a , a więc każdy ze zbiorów $\pi_a^{-1} A = \pi_a^{-1}(A \cap \bar{e}_a)$ jest domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy domknięty jest jego obraz $A \cap \bar{e}_a$. Tym samym wykazaliśmy, że topologia indukowana w Z jest topologią CW-kompleksu. \square

Dowód Twierdzenia 2.4.4. Wychodząc od przestrzeni dyskretnej X^0 , założymy, że dla pewnego $n > 0$ szkielety $X^m, m < n$, CW –kompleksu X są przestrzeniami normalnymi spełniającymi warunek (i). Dla dowodu izomorficzności kolejnego X^n z przestrzenią otrzymaną z X^{n-1} przez doklejenie odpowiedniej rodziny kul wymiaru n , skorzystamy z lematu 2.4.6. W tym celu weźmy za zbiór indeksów $\mathcal{A} = \mathcal{G}_X^n$ – komórki wymiaru n – i przyjmijmy $\phi_e = \Phi_e|_{S^{n-1}}$, dla dowolnej rodziny odwzorowań charakterystycznych $\Phi_e, e \in \mathcal{A}$. Odwzorowania charakterystyczne wyznaczają zgodny z rzutowaniem π epimorfizm

$$\coprod_{e \in \mathcal{A}} B^n \sqcup X^{n-1} \rightarrow X^n,$$

a więc indukują ciągłą bijekcję CW –kompleksów $\iota: Z \xrightarrow{\cong} X^n$, gdzie Z powstaje z X^{n-1} przez doklejenie komórek wymiaru n . Odwzorowanie ι przeprowadza wzajemnie na siebie komórki i ich domknięcia, a więc jest homeomorfizmem. Indukcja po n kończy dowód części (i) twierdzenia oraz potwierdza normalność wszystkich podkompleksów X^n . Własność (ii) wynika z twierdzenia 1.4.1. \square

Elastyczność pojęcia CW –kompleksu podkreśla także następujący, nieco zaskakujący, fakt.

Twierdzenie 2.4.7. *Jeśli X jest CW –kompleksem, to dla dowolnego CW –podkompleksu $A \subset X$, przestrzeń ilorazowa X/A jest CW –kompleksem z CW –rozkładem $\mathcal{G}_{X/A} = \{*\} \cup (\mathcal{G}_X \setminus \mathcal{G}_A)$, gdzie $* = \{A\}$ jest komórką 0–wymiarową powstałą z utożsamienia wszystkich punktów zbioru A .*

Dowód. Wniosek 1.4.4 zapewnia, że X/A jest przestrzenią Hausdorffa. Odwzorowanie ilorazowe $\pi: X \rightarrow X/A$ jest homeomorfizmem na zbiorze otwartym $X \setminus A = \bigcup \mathcal{G}_{X/A} \setminus \{*\}$, co daje rozkład X/A na komórki – pozostałe komórki π sprowadza do punktu wyróżnionego $\{A\}$. Dokładniej, dla każdego odwzorowania charakterystycznego $\Phi_e, e \in X \setminus A$, złożenie $\pi \circ \Phi_e$ jest odwzorowaniem charakterystycznym komórki $\pi(e)$, oraz $\pi(\bar{e}) = \overline{\pi(e)}$. Wynikająca stąd równość

$$W \cap \overline{\pi(e)} = \pi(\pi^{-1}W \cap \bar{e}) \quad \text{dla } W \subset X/A$$

dowodzi, że podzbiór W jest domknięty w X/A wtedy i tylko wtedy, gdy jego przekrój z domknięciem każdej komórki jest domknięty (zwarty). \square

Twierdzenie 2.4.8. *Dla dowolnych dwu CW –kompleksów X i Y , produkt kartezjański $X \times Y$ z filtracją*

$$(X \times Y)^n = \bigcup_{p+q=n} X^p \times Y^q, \quad \text{dla } n \geq 0, \quad (2.34)$$

i topologią wyznaczoną przez rodzinę zwartych podzbiorów $\{\bar{e} \times \bar{e}'\}; e \in \mathcal{G}_X, e' \in \mathcal{G}_Y$ jest CW –kompleksem.

Produkt kartezjański dowolnych dwu CW –par,

$$(X, A) \times (Y, B) = (X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$$

jest również CW-parą, tzn. wskazana podprzestrzeń produktu $X \times Y$ jest podkompleksem.

Dowód. Rozkład na wzajemnie rozłączne podzbiory

$$(X \times Y)^n \setminus (X \times Y)^{n-1} = \bigcup_{p+q=n} (X^p \setminus X^{p-1}) \times (Y^q \setminus Y^{q-1})$$

pozwala przyjąć

$$\mathcal{G}_{X \times Y} = \{e \times e'; e \in \mathcal{G}_X, e' \in \mathcal{G}_Y\}, \quad (2.35)$$

co zapewnia spełnienie warunków (i)–(ii) definicji 2.4.1. Odwzorowania charakterystyczne $\Phi_e, e \in \mathcal{G}_X$, i $\Phi_{e'}, e' \in \mathcal{G}_Y$, wyznaczają rodzinę odwzorowań

$$\Phi_{e \times e'} = \Phi_e \times \Phi_{e'} : (B^p \times B^q, \partial(B^p \times B^q)) \rightarrow ((X \times Y)^n, (X \times Y)^{n-1}) \quad (2.36)$$

dla $e \in \mathcal{G}_X^p, e' \in \mathcal{G}_Y^q, p, q \geq 0$ i $n = p + q$, spełniającą warunek (iii) definicji CW-kompleksu. Sprawdzenie pozostałych warunków (iv)–(v) wymaga wymaga pewnej precyzji w tworzeniu topologii w produkcie $X \times Y$ – być może mocniejszej niż topologia produktowa. Dla każdej pary komórek $e \in \mathcal{G}_X, e' \in \mathcal{G}_Y$, obrazem odwzorowania $\Phi_{e \times e'}$ jest produkt $\bar{e} \times \bar{e}'$. Zaopatrzony w topologię produktową jest to zbiór zwarty równy domknięciu komórki $e \times e'$. Daje to postulowaną własność (iv) i pozwala przyjąć (v) za *definicję topologii* w zbiorze $X \times Y$ i wszystkich podzbiórach. Pozostaje zauważyć, że nowa topologia jest zgodna z ustaloną już topologią podzbiorów $\bar{e} \times \bar{e}'$ i zapewnia ciągłość funkcji charakterystycznych $\Phi_{e \times e'}$.

W przypadku produktu dwu CW-par, twierdzenie 2.4.2 zapewnia, że podzbiór $X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$ jest podkompleksem. \square

W sprawie wyboru *właściwej* topologii w produkcie kartezjańskim odsyłamy czytelnika do [7]. Temat ten wraca także w uwadze 4.4.1.

Indukcyjną zasadę budowy CW-kompleksów wykorzystamy teraz do dowodu własności określającej regularność położenia w CW-kompleksie dowolnego podkompleksu. Pomoże nam w tym techniczny wniosek 1.4.6.

Twierdzenie 2.4.9. *Każda CW-para jest parą kołnierzykową.*

Dowód. Niech (X, A) będzie dowolną CW-parą. Zgodnie z wnioskiem 1.4.6, dla każdego $n > 0$ istnieją:

- (i) podzbiór dyskretny $M_n \subset X_A^n \setminus X_A^{n-1}$,
- (ii) retrakcja $r_n : X_A^n \setminus M_n \rightarrow X_A^{n-1}$ i
- (iii) homotopia $D_n : I \times (X_A^n \setminus M_n) \rightarrow X_A^n \setminus M_n$,

zdefiniowane poprzez (1.15–1.16). Aby wskazać kołnierzyk $V \subset X$ dla A , położmy $V_0 = A$ i $V_n = r_n^{-1}V_{n-1}$ dla $n > 0$, po czym definiujemy $V := \bigcup_n V_n$. Zbiór A jest otwartym podzbiorem X_A^0 , a więc kolejne przeciwobrazy V_n stanowią wstępującą

rodzinę zbiorów otwartych w $X_A^n, n > 0$. Równości $V \cap X_A^n = V_n$ oznaczają zatem, że V jest zbiorem otwartym. Jako retrakcję $r: V \rightarrow A$ przyjmujemy funkcję taką, że

$$r|_{V_n} = \prod_{i=1}^n r_i = r_1 r_2 \dots r_n, \quad \text{dla } n > 0,$$

gdzie produkt rozumiany jest jako superpozycja. Odwzorowanie r jest poprawnie zdefiniowane, gdyż $r_n|_{V_{n-1}} = \text{id}_{V_{n-1}}$, dla wszystkich n . Z kolei jawny opis (1.16) homotopii D_n pozwala na obserwację, że ograniczenia $D_n: I \times V_n \rightarrow V_n, n > 0$, stanowią ciąg deformacji o własnościach $D_n(0, \cdot) = \text{id}_{V_n}, D_n(1, \cdot) = r_n$, a zatem, dla dowolnego ustalonego n , ciąg odwzorowań

$$I \times V_k \ni (t, v) \xrightarrow{\tilde{D}_k} D_k(t, r_{k+1} \dots r_n(v)) \in V_k \subset V_n, \quad k = n, \dots, 1, \quad (2.37)$$

wyznaczają homotopie

$$\text{id}_{V_n} \simeq r_n \simeq r_{n-1} r_n \simeq \dots \simeq r_1 \dots r_n \quad \text{rel } A.$$

Naturalne rozszerzenia $\tilde{D}_k(t, v) := D_k(t, \prod_{i>k} r_i)$ dla $(t, v) \in I \times V$ nie zależą od n , ale pokrywają się z odwzorowaniami (2.37) na $V_n, n \leq k$. Pozwala to wskazać homotopię $D: \text{id}_V \simeq r \text{ rel } A$, np. w następujący sposób

$$D(t, v) = \begin{cases} v, & \text{dla } t = 0, \\ \tilde{D}_k(k(t(k+1) - 1), v), & \text{dla } t \in [\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}], k > 0. \end{cases}$$

Ciągłość D wynika z faktu, iż $D(t, v) = v$ dla $(t, v) \in [0, \frac{1}{n+1}] \times V_n, n > 0$. □

Rozdział 3

Homologie singularne

Niech \mathbb{Z} oznacza grupę abelową liczb całkowitych (z dodawaniem).

Definicja 3.0.5. Dla dowolnego zbioru \mathcal{A} rodzina $\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$ wszystkich funkcji $c: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ prawie wszędzie równych 0, czyli takich, że różnica $\mathcal{A} \setminus c^{-1}(0)$ jest zbiorem skończonym, stanowi grupę względem dodawania, nazywaną grupą wolną generowaną przez \mathcal{A} .

Każdy element $a \in \mathcal{A}$ zbioru generatorów utożsamia się ze swoim *indykatorem*, tzn. funkcją niezerową i równą 1 tylko na a . Konwencja ta pozwala na notację addytywną, w której funkcje $c: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$ należące do grupy są (skończonymi) sumami

$$c = \sum_{a \in \mathcal{A}} c_a \cdot a, \quad c(a) = c_a, \quad \text{dla } a \in \mathcal{A}.$$

3.1 Kompleksy łańcuchowe

Grupy homologii singularnych definiuje się dla dowolnych przestrzeni topologicznych. Formalna definicja nie zakłada rozkładu przestrzeni na bardziej elementarne, prostsze składniki, lecz bada te aspekty przestrzeni topologicznej X , które dają się opisać poprzez ciągi odwzorowania sympleksów (wielościánów) w X .

Definicja 3.1.1. Sympleksem singularnym w przestrzeni topologicznej X nazywamy dowolne odwzorowanie $\sigma: \Delta^n \rightarrow X, n \geq 0$. Liczba n jest wymiarem sympleksu; σ nazywamy także n -sympleksem singularnym w X .

Sympleksy 0-wymiarowe w X mogą być utożsamiane z punktami przestrzeni, 1-sympleksy, to drogi $[0, 1] \rightarrow X$. Dla każdego n naturalnego zbiór wszystkich n -sympleksów singularnych w X będziemy oznaczać przez $S_n X$.

Definicja 3.1.2. Grupę wolną abelową $C_n(X) = \bigoplus_{\sigma \in S_n X} \mathbb{Z}$ o zbiorze generatorów $S_n X$ nazywamy grupą n -łańcuchów singularnych w X , dla $n \geq 0$. Przyjmujemy $C_{-1}(X) = 0$.

Zgodnie z definicją, łańcuch sigularny $c \in C_n(X)$ to dowolna funkcja $c: S_n X \rightarrow \mathbb{Z}$, prawie wszędzie równa zeru. W notacji addytywnej c jest skończoną sumą $c = \sum_i c_i \sigma_i$, gdzie $\sigma_i \in S_n X$ i $c_i = c(\sigma_i)$, dla każdego indeksu i . W tej konwencji każdy n -sympleks sigularny σ jest utożsamiany ze swoim indykatozem, tzn. funkcją $S_n X \rightarrow \mathbb{Z}$ przyjmującą wartość 1 na σ i równą 0 na $S_n X \setminus \{\sigma\}$.

Definicja 3.1.3. Nośnikiem n -łańcucha sigularnego $c = \sum_i c_i \sigma_i$ jest zbiór

$$\text{supp}(c) = \bigcup \{\sigma_i(\Delta^n); c_i \neq 0\}.$$

Dla dowolnego podzbioru $A \subset X$, grupy n -sympleksów sigularnych w A utożsamia się z podgrupami

$$C_n(A) = \{c \in C_n(X); \text{supp}(c) \subset A\},$$

dla $n \geq 0$. Brak innych niż ciągłość ograniczeń na sympleksy sigularne sprawia, że każde ciągle odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ dwu przestrzeni topologicznych przeprowadza sympleksy w X na sympleksy w Y , wg reguły $S_n X \ni \sigma \mapsto f \circ \sigma \in S_n Y$, a więc jednoznacznie rozszerza się do homomorfizmu grup $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, $n \geq 0$.

Definicja 3.1.4. Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: X \rightarrow Y$, rodzinę homomorfizmów $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$, $n \geq 0$, nazywamy homomorfizmem indukowanym.

Dla $f: X \rightarrow Y$, homomorfizm indukowany $f_\#: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$ działa wg wzoru $f_\#(\sum_i c_i \sigma_i) = \sum_i c_i f \circ \sigma_i$. Następujące własności homomorfizmu indukowanego noszą nazwę *funktorialności*.

Stwierdzenie 3.1.1. *Identyzacja $\text{id}_X: X \rightarrow X$ na dowolnej przestrzeni X indukuje homomorfizm tożsamościowy grup łańcuchów. Dla dowolnych trzech przestrzeni topologicznych X, Y, Z i ciągłych odwzorowań $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$, zachodzi równość*

$$(g \circ f)_\# = g_\# \circ f_\#.$$

□

Podjęcie algebraiczne pozwala na niezwykle ważne, bardziej precyzyjne niż (2.3), określenie brzegu – wykorzystujące (2.5) i uzasadniające koncepcję orientacji sympleksów.

Definicja 3.1.5. Dla każdego $n > 0$ operatorem brzegu nazywamy homomorfizm grup $\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ określony na sympleksach wzorem

$$\begin{aligned} \partial_n \sigma &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i \\ &= \sigma_\#(\sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon_i), \end{aligned} \tag{3.1}$$

dla $\sigma \in S_n X$. Dla $n = 0$ przyjmujemy $\partial_0 = 0$, natomiast operator $\tilde{\partial}_0: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$, który każdemu 0-łańcuchowi przypisuje sumę współczynników nazywamy rozszerzonym operatorem brzegu.

Druga z koncepcji brzegu w wymiarze 0 odpowiada sytuacji, w której zbiór pusty uznajemy za geometryczny sympleks wymiaru -1 , zaś odwzorowanie zbioru pustego w X – za analogiczny, jedyny (-1) –sympleks singularny w X .

Brzeg (algebraiczny) sympleksu singularnego $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ jest zdefiniowany dla wzorcowego n –sympleksu singularnego, czyli identyczności

$$\iota_n = \langle E_0 \dots E_n \rangle \in S_n \Delta^n \hookrightarrow C_n(\Delta^n), \quad (3.2)$$

wzorem

$$\partial_n \iota_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varepsilon_i,$$

a następnie przeniesiony do $C_n(X)$ jako obraz w homomorfizmie indukowanym. Wiele istotnych konstrukcji teorii homologii (i kohomologii) singularnych jest faktycznie wykonywane w obrębie wielościanów stanowiących wzorce – a następnie rozprzestrzeniane na dowolne przestrzenie topologiczne. Zauważmy przy tym, że każdy sympleks singularny można przedstawić w postaci

$$\sigma = \sigma_{\#}(\iota_n), \quad (3.3)$$

dla $\sigma \in S_n X$, co dodatkowo uzasadnia traktowanie sympleksów $\iota_n, n \geq 0$, jako wzorcowych – modelowych. W bieżącym skrypcie autor stara się korzystać ze wzorców, unikając formalnej, abstrakcyjnej koncepcji modeli.

1–Sympleksy singularne są drogami, czyli odwzorowaniami $[0, 1] \rightarrow X$. Opisany wyżej algebraiczny brzeg sympleksu $\sigma \in S_1 X$ jest równy

$$\partial_1 \sigma = (+1)\sigma \circ \varepsilon_0 + (-1)\sigma \circ \varepsilon_1 = \sigma \circ \langle E_1 \rangle - \sigma \circ \langle E_0 \rangle,$$

a więc rozróżnia początek i koniec drogi – jako elementy $S_0 X$.

Dla $\sigma \in S_2 X$, brzeg algebraiczny

$$\partial_2 \sigma = \sigma \circ \langle E_1 E_2 \rangle - \sigma \circ \langle E_0 E_2 \rangle + \sigma \circ \langle E_0 E_1 \rangle$$

wyróżnia jeden z kierunków obiegu brzegu topologicznego. Na drogę w $C_1(X)$ opisującą brzeg składają się zatem 3 sympleksy wymiaru 1, przy czym jeden z nich powinien mieć zmienioną orientację. „Odwrócenie” drogi $\sigma \circ \langle E_0 E_2 \rangle$ nie odbywa się jednak poprzez zmianę odwzorowania (np. parametryzacji), lecz przez wykorzystanie elementu przeciwnego w grupie. Tak pojmowany brzeg $\partial_2 \sigma \in C_1(X)$ jest drogą zamkniętą, co precyzuje następujący ogólna własność.

Stwierdzenie 3.1.2. *Własności operatorów brzegu:*

(i) *W dowolnej przestrzeni topologicznej X zachodzą równości*

$$\begin{aligned} \partial_{n-1} \circ \partial_n &= 0, \text{ dla } n > 0, \\ \tilde{\partial}_0 \circ \partial_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

(ii) Brzeg jest naturalny, tzn. dla dowolnego ciągłego odwzorowania $f: X \rightarrow Y$

$$\begin{aligned}\partial_n \circ f_{\#} &= f_{\#} \circ \partial_n, \text{ dla } n > 0, \\ \tilde{\partial}_0 \circ f_{\#} &= \tilde{\partial}_0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Dowód. Ćwiczenie. Sprawdzenia wymaga jedynie własność (3.4). Skoro naturalność (3.5) implikuje równość

$$\partial_{n-1} \partial_n \sigma = \sigma_{\#} \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{i+j} \varepsilon_i \circ \varepsilon_j \right),$$

wystarczy sprawdzić, że wyrażenie w nawiasie znika, czyli $\partial_{n-1} \partial_n \iota_n = 0$. \square

Definicja 3.1.6. Para $C(X) = (\{C_n(X)\}_{n \geq 0}, \{\partial_n\}_{n \geq 0})$ złożona z grup łańcuchów singularnych i operatorów brzegu jest singularnym kompleksem łańcuchowym przestrzeni topologicznej X .

Definicja 3.1.7. Rozszerzonym singularnym kompleksem łańcuchowym przestrzeni topologicznej X nazywamy parę $\tilde{C}(X) = (\{\tilde{C}_n(X)\}_{n \geq -1}, \{\tilde{\partial}_n\}_{n \geq -1})$, w której $\tilde{C}_n(X) = C_n(X)$ i $\tilde{\partial}_{n+1} = \partial_{n+1}$ dla $n \geq 0$, natomiast $\tilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ i $\tilde{\partial}_0 \sigma = 1$ dla $\sigma \in S_0 X$, zaś $\tilde{\partial}_{-1} = 0$.

Oba singularne kompleksy łańcuchowe – uzupełnione o grupy zerowe w wymiarach ujemnych – są przykładami ogólniejszego pojęcia, często wykorzystywanego w topologii algebraicznej.

Definicja 3.1.8. Kompleksem łańcuchowym nazywamy dowolny ciąg C grup przemiennej $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i homomorfizmów (operatorów brzegu) $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$, spełniających warunek $\partial_{n-1} \partial_n = 0$, dla $n \in \mathbb{Z}$. Homomorfizmem lub odwzorowaniem łańcuchowym $F: C \rightarrow C'$ dwu kompleksów łańcuchowych $C = (\{C_n\}, \{\partial_n\})$ i $C' = (\{C'_n\}, \{\partial'_n\})$ jest każdy ciąg homomorfizmów grup $\{F_n: C_n \rightarrow C'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, przemiennej z operatorami brzegu, tzn. taki, że

$$\partial'_n \circ F_n = F_{n-1} \circ \partial_n,$$

dla wszystkich n całkowitych.

Kompleksy łańcuchowe, ich homomorfizmy i zależności przedstawia się zazwyczaj w postaci diagramów, czyli grafów skierowanych, w których węzłami są poszczególne grupy łańcuchów, zaś krawędziami wyróżnione homomorfizmy, np.

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots$$

Diagram (niebędący drzewem) jest uważany za *przemiennej*, gdy złożenia homomorfizmów wzdłuż dowolnych dróg w grafie zależą jedynie od końcowych wierzchołków, a nie od przebiegu samych dróg. W tym sensie naturalność (3.5) oznacza

przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \longrightarrow & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(X) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} & \mathbb{Z} & \\
 & f_{\#} \downarrow & & f_{\#} \downarrow & & & & f_{\#} \downarrow & & & \parallel \\
 \longrightarrow & C_n(Y) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \dots & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(Y) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} & \mathbb{Z} &
 \end{array} \quad (3.6)$$

dla dowolnych przestrzeni topologicznych X, Y i funkcji ciągłej $f: X \rightarrow Y$.

Singularne kompleksy łańcuchowe są obiektami zbyt dużymi do bezpośrednich badań. Opisane poniżej pojęcie grup homologii pozwala wydobyć istotne, łatwiejsze do wyznaczenia, związki pomiędzy łańcuchami.

Definicja 3.1.9. W dowolnym kompleksie łańcuchowym C , dla $n \in \mathbb{Z}$:

- grupą n -cykli nazywamy jądro $Z_n C := \ker \partial_n$ operatora brzegu $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$,
- grupą n -brzegów nazywamy obraz $B_n C := \operatorname{im} \partial_{n+1}$ operatora brzegu $\partial_{n+1}: C_{n+1} \rightarrow C_n$.

Dla $n \in \mathbb{Z}$, grupę ilorazową $H_n C := Z_n C / B_n C$ nazywamy n -tą grupą homologii kompleksu łańcuchowego C . Elementy grupy homologii to klasy homologii w C .

Klasami homologii są warstwy $c + B_n C$, dla $c \in Z_n C, n \in \mathbb{Z}$. O ile nie prowadzi to do niejednoznaczności, będziemy używać też oznaczenia

$$[c] := c + B_n C \in H_n C, \text{ dla } c \in Z_n C. \quad (3.7)$$

Rodzinę $HC := \{H_n C\}_{n \in \mathbb{Z}}$ wszystkich grup homologii kompleksu C uważa się za grupę z gradacją, czyli kompleks łańcuchowy z trywialnymi (zerowymi) operatorami brzegu. W tym sensie homomorfizm grup z gradacją jest dowolną indeksowaną rodziną homomorfizmów poszczególnych grup.

Dla dowolnego homomorfizmu $F: C \rightarrow C'$ dwu kompleksów łańcuchowych, odwzorowania

$$F_*: H_n C \ni [c] \mapsto [F_n(c)] \in H_n C', n \in \mathbb{Z},$$

są poprawnie zdefiniowanymi homomorfizmami grup indukowanymi przez F w homologiach.

Ćwiczenie 3.1.1. Sprawdzić poprawność powyższej definicji. Wykazać, że grupy homologii wyznaczają funktor z kategorii kompleksów łańcuchowych w grupy z gradacją. Zdefiniować odpowiednie kategorie.

Opisaną wyżej konstrukcję abstrakcyjnych grup homologii możemy zastosować do zdefiniowanych wcześniej singularnych kompleksów łańcuchowych.

Definicja 3.1.10. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X , grupy $Z_n(X) := \ker \partial_n$ i $B_n(X) := \operatorname{im} \partial_{n+1}$, zawarte w $C_n(X)$, dla $n \geq 0$, nazywamy odpowiednio

grupami n -cykli i n -brzegów singularnych w X . Dla $n \geq 0$, n -tą grupą homologii przestrzeni X nazywamy grupę ilorazową

$$H_n(X) := Z_n(X)/B_n(X).$$

Dla $n \geq 0$, n -tą zredukowaną grupą homologii przestrzeni X nazywamy grupę $\tilde{H}_n(X)$ homologii rozszerzonego kompleksu łańcuchowego $\tilde{C}(X)$. Dla zupełności, zredukowaną grupą cykli w wymiarze 0 nazywamy jądro $\tilde{Z}_0(X) := \ker \tilde{\partial}_0 \subset Z_0(X)$.

Redukcja grup homologii dotyczy w istocie tylko wymiaru 0, albowiem zachodzą równości

$$\tilde{H}_n(X) = H_n(X), \text{ dla } n > 0$$

$$\tilde{H}_0(X) = \tilde{Z}_0(X)/B_0(X) \subset H_0(X).$$

Stwierdzenie 3.1.3. Każde ciągle przekształcenie dowolnych dwu przestrzeni topologicznych $f: X \rightarrow Y$ wyznacza homomorfizmy grup homologii

$$f_*: H_n(X) \ni [c] \mapsto [f\#c] \in H_n(Y) \quad \text{oraz} \quad \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y),$$

dla $n \geq 0$. Przyporządkowanie

$$(f: X \rightarrow Y) \rightsquigarrow (f_*: H(X) \rightarrow H(Y))$$

jest funktorem, tzn. spełnia warunki

$$(\text{id}_X)_* = \text{id}_{H(X)}$$

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

dla dowolnych przestrzeni X, Y, Z oraz dowolnych ciągłych przekształceń $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$. \square

Wynika stąd prosty wniosek, że homeomorficzne przestrzenie topologiczne mają izomorficzne grupy homologii.

Grupy homologii mogą być interpretowane jako narzędzia do lokalizacji „dziur” w przestrzeni topologicznej X . Niezerowa klasa $[c] \in H_n(X)$ reprezentowana jest przez kombinację n -sympleksów, zamkniętą w tym sensie, że brzegi poszczególnych składników przylegają do siebie – z uwzględnieniem orientacji i krotności, skoro $\partial_n c = 0$. Łańcuch c nie jest jednak brzegiem, a więc przestrzeni objętej przez składające się na c sympleksy nie można zapełnić sympleksami wymiaru $n + 1$.

Przykład 3.1.1. Grupy homologii przestrzeni jednopunktowej $X = \{x_0\}$. Zbiory $S_n X, n \geq 0$, zawierają jedynie odwzorowanie stałe $\omega_n: \Delta^n \rightarrow \{x_0\}$, a zatem grupy łańcuchów $C_n = \mathbb{Z}\omega_n$ są izomorficzne z \mathbb{Z} . Z definicji operatora brzegu wynika, że

$$\partial_n \omega_n = \begin{cases} \omega_{n-1}, & \text{gdy } n > 0 \text{ jest parzyste} \\ 0, & \text{dla } n \text{ nieparzystych i dla } n = 0. \end{cases}$$

Zatem

$$H_n(\{x_0\}) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{dla } n = 0 \\ 0, & \text{dla } n > 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

natomiast $\tilde{H}_n(\{x_0\}) = 0$ dla wszystkich n .

Wniosek 3.1.4. *Homologie zredukowane $\tilde{H}(X)$ są tożsame z jądrem homomorfizmu indukowanego przez dowolne rzutowanie $X \rightarrow \{x_0\}$ na przestrzeń jednopunktową.* \square

Niech $(\mathbb{Z}, 0)$ oznacza grupę z gradacją homologii przestrzeni jednopunktowej, tzn. trywialny (z zerowymi operatorami brzegu) kompleks łańcuchowy C taki, że $C_0 = \mathbb{Z}, C_n = 0$, dla $n \neq 0$.

Definicja 3.1.11. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X , rozszerzony operator brzegu $\tilde{\partial}_0: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ wyznacza naturalne odwzorowanie łańcuchowe $\eta: C(X) \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$, nazywane augmentacją.*

Naturalność augmentacji oznacza własność $\eta \circ f_{\#} = \eta$, dla dowolnej funkcji ciągłej f – por. (3.6).

Ćwiczenie 3.1.2. Homomorfizm indukowany η_* jest złożeniem $H(X) \rightarrow H(\{x_0\}) \cong (\mathbb{Z}, 0)$ homomorfizmu wyznaczonego przez rzutowanie na przestrzeń jednopunktową i kanonicznego izomorfizmu (3.8). Zredukowane grupy homologii $\tilde{H}_n(X)$ pokrywają się z jądrem $\ker \eta_*$.

Przykład 3.1.2. Grupy homologii przestrzeni ściąganej X . Niech $F: I \times X \rightarrow X$ będzie homotopią ściągającą X do ustalonego punktu $x_0 \in X$, tzn. $F(0, x) = x, F(1, x) = x_0$, dla $x \in X$. Dla $n \geq 0$ definiujemy homomorfizm grup $D_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$, który każdemu sympleksowi singularnemu $\sigma \in S_n X$ przyporządkuje sympleks $D\sigma \in S_{n+1} X$ taki, że

$$D\sigma(\lambda_0 E_0 + \cdots + \lambda_{n+1} E_{n+1}) = F(\lambda_0, \sigma(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_0} E_0 + \cdots + \frac{\lambda_{n+1}}{1-\lambda_0} E_n)), \quad (3.9)$$

dla dowolnego punktu w Δ^{n+1} opisanego we współrzędnych barycentrycznych. Dla $\sigma \in S_0 X$, brzegiem drogi $D\sigma$ jest $F(0, \sigma) - F(1, \sigma) = \sigma - x_0$. Dla $\sigma \in S_n X, n > 0$, otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} D\sigma &= D\sigma \circ \varepsilon_0 + \sum_{i=0}^n (-1)^{i+1} D\sigma \circ \varepsilon_{i+1} \\ &= \sigma - \sum_{i=0}^n (-1)^i D(\sigma \circ \varepsilon_i) \\ &= \sigma - D_{n-1} \partial_n(\sigma). \end{aligned}$$

Zatem dla dowolnego łańcucha $c \in C_n(X)$ zachodzi tożsamość

$$\partial_{n+1} D_n(c) + D_{n-1} \partial_n(c) = \begin{cases} c - \tilde{\partial}_0(c)x_0, & \text{dla } n = 0, \\ c, & \text{gdzie } n > 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

W szczególności wynika stąd, że dla $n > 0$ każdy cykl $c \in Z_n(X)$ jest postaci $c = \partial_{n+1}D_n(c)$, a więc jest brzegiem i wyznacza zerową klasę homologii. To samo dotyczy cykli zredukowanych $c \in \tilde{Z}_0(X)$ – w wymiarze 0. Augmentacja wyznacza zatem izomorfizm

$$\eta_*: H(X) \xrightarrow{\cong} (\mathbb{Z}, 0).$$

Ćwiczenie 3.1.3. Sprawdzić poprawność definicji (3.9). Uzasadnić ciągłość odwzorowania $D\sigma$.

Poszukując własności odwzorowań łańcuchowych $F, G: C \rightarrow C'$ pomiędzy dowolnymi kompleksami łańcuchowymi, które zapewniałyby równość homomorfizmów indukowanych w homologiach, tzn. $F_* = G_*: HC \rightarrow HC'$, z łatwością stwierdzamy, że taką równość gwarantuje łańcuchowa homotopijność $F \simeq G$, czyli opisany poniżej warunek wzorowany na (3.10).

Definicja 3.1.12. Homotopią łańcuchową $D: F \simeq G$, pomiędzy dwoma homomorfizmami kompleksów łańcuchowych $C = (\{C_n\}, \{\partial_n\})$ i $C' = (\{C'_n\}, \{\partial'_n\})$, nazywamy dowolną rodzinę homomorfizmów grup $D_n: C_n \rightarrow C'_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, związaną z F i G zależnością

$$F_n - G_n = \partial'_{n+1} \circ D_n + D_{n-1} \circ \partial_n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z}. \quad (3.11)$$

Homomorfizmy F i G są homotopijne, jeśli istnieje pomiędzy nimi homotopia łańcuchowa (3.11), co potwierdzamy pisząc $D: F \simeq G$.

Ćwiczenie 3.1.4. Sprawdzić, że relacja homotopii \simeq pomiędzy odwzorowaniami łańcuchowymi dowolnych dwu kompleksów łańcuchowych jest równoważnością oraz że pociąga za sobą równość homomorfizmów indukowanych. Wykazać, że złożenia $F' \circ F$ i $G' \circ G$ homotopijnych odwzorowań łańcuchowych $F, G: C \rightarrow C'$ i $F', G': C' \rightarrow C''$ są łańcuchowo homotopijne.

Definicja 3.1.13. Dwa kompleksy łańcuchowe C i C' są (homotopijnie) równoważne, ozn. $C \simeq C'$, jeśli istnieją homomorfizmy $i: C \rightarrow C'$, $j: C' \rightarrow C$ takie, że $i \circ j \simeq \text{id}_{C'}$ oraz $j \circ i \simeq \text{id}_C$.

Oczywiście, wskazane w definicji homomorfizmy i oraz j indukują izomorfizmy grup homologii kompleksów równoważnych. Rozumowanie przedstawione w przykładzie 3.1.2 można zatem podsumować w postaci twierdzenia:

Stwierdzenie 3.1.5. Dla dowolnej ściąganej przestrzeni topologicznej X , augmentacja określa równoważność kompleksów $C(X)$ i $(\mathbb{Z}, 0)$. Równoważnością jest także każdy z homomorfizmów łańcuchowych indukowanych przez funkcje $\{x_0\} \hookrightarrow X, X \rightarrow \{x_0\}$, dla $x_0 \in X$. \square

3.2 Homologie relatywne

Zdefiniowaliśmy dotąd kompleksy łańcuchowe i grupy homologii poszczególnych przestrzeni topologicznych. Ponieważ wiele naturalnych problemów topologicznych

dotyczy wzajemnego położenia zbiorów względem siebie i w stosunku do przestrzeni otaczającej (np. twierdzenia 5.2.6 i 5.2.7 o wycinaniu i o niezmienniczości obszaru), pora rozszerzyć wcześniejsze definicje.

Przyjmując za obiekty szczególnie interesujące pary zbiorów (X, A) , tzn. przestrzenie topologiczne X i ich podzbiory $A \subset X$ z topologią indukowaną, będziemy rozważać jako morfizmy $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ stosownej *kategorii par* odwzorowania ciągle $f: X \rightarrow Y$ takie, że $f(A) \subset B$ – z naturalną definicją złożenia. Obiekty kategorii będziemy dla uproszczenia nazywać po prostu parami, a morfizmy – *odwzorowaniami par*. Pojedyncze przestrzenie topologiczne możemy uważać za pary postaci (X, \emptyset) .

Definicja 3.2.1. *Dla dowolnej pary (X, A) , grupami relatywnych łańcuchów singularnych w X względem A będziemy nazywać grupy ilorazowe*

$$C_n(X, A) := C_n(X)/C_n(A) \cong \bigoplus_{\sigma \in S_n X \setminus S_n A} \mathbb{Z}, \quad (3.12)$$

dla $n \geq 0$. Wraz z homomorfizmami brzegu $\bar{\partial}_n$ indukowanymi z $C(X)$, grupy relatywnych łańcuchów tworzą singularny relatywny kompleks łańcuchowy $C(X, A)$. Dla $n \geq 0$, grupę ilorazową

$$H_n(X, A) := \ker \bar{\partial}_n / \text{im } \bar{\partial}_{n+1}$$

nazywamy n -tą grupą homologii relatywnych lub homologią pary (X, A) .

Stwierdzenie 3.2.1. *Przyjmując oznaczenia:*

$$Z_n(X, A) = \{c \in C_n(X); \partial_n c \in C_{n-1}(A)\} \quad (3.13)$$

$$B_n(X, A) = B_n(X) + C_n(A) \subset C_n(X), \quad (3.14)$$

odpowiednio – dla grup relatywnych cykli i relatywnych brzegów – otrzymujemy kanoniczny izomorfizm

$$H_n(X, A) \cong Z_n(X, A)/B_n(X, A), \quad (3.15)$$

w którym klasie homologii reprezentowanej przez cykl $c + C_n(A) \in \ker \bar{\partial}_n = Z_n(X, A)/C_n(A)$ odpowiada warstwa $c + B_n(X, A)$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Ćwiczenie 3.2.1. Sformułować i udowodnić analogiczną do podanej w stwierdzeniu 3.1.3 własność naturalności relatywnych grup homologii.

Precyzując oznaczenia klas homologii (3.7), przyjmijmy następujące rozróżnienie

$$[c]_X := c + B_n(X) \in H_n(X), \text{ dla } c \in Z_n(X), \quad (3.16)$$

$$[c]_{(X,A)} := c + B_n(X, A) \in H_n(X, A), \text{ dla } c \in Z_n(X, A), \quad (3.17)$$

dla $n \geq 0$.

Podstawowa dla całej teorii homologii relatywnej konstrukcja homomorfizmu łączącego sprowadza się do następującej obserwacji. Jeśli zbiór A jest niepusty, dla dowolnej klasy homologii $[c]_{(X,A)} \in H_n(X, A)$, relatywny cykl c spełnia warunek $\partial_n c \in C_{n-1}(A)$, a więc wyznacza klasę homologii (zredukowanych) $[\partial_n c]_A \in \tilde{H}_{n-1}(A)$, o ile $n > 0$. Co więcej, klasa ta nie zależy od wyboru reprezentanta c rozważanej relatywnej klasy homologii.

Definicja 3.2.2. Rodzinę homomorfizmów $\partial_* : H_n(X, A) \ni [c]_{(X,A)} \mapsto [\partial_n c]_A \in \tilde{H}_{n-1}(A)$, $n > 0$, nazywamy homomorfizmem łączącym pary (X, A) .

Przyjmijmy standardowe oznaczenia $i : C(A) \hookrightarrow C(X)$ dla włożenia i $j : C(X) \rightarrow C(X, A)$ dla homomorfizmu ilorazowego. Uzasadnieniem dla nazwy *homomorfizm łączący* jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2.2. Dla dowolnej pary (X, A) , $A \neq \emptyset$, w następującym ciągu homomorfizmów

$$\begin{aligned} \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} \\ \dots \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_0(A) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X, A) \longrightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

jądro każdego homomorfizmu jest tożsame z obrazem homomorfizmu poprzedzającego, tzn.

$$\operatorname{im} \partial_* = \ker i_*, \quad \operatorname{im} i_* = \ker j_*, \quad \operatorname{im} j_* = \ker \partial_*, \quad (3.19)$$

natomiast ostatni z homomorfizmów j_* jest epimorfizmem.

Dla dowolnego odwzorowania par $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$, następujący diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\partial_*} & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A) & \xrightarrow{i_*} \\ & (f|_A)_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & (f|_A)_* \downarrow & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_n(B) & \xrightarrow{i_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B) & \xrightarrow{i_*} \end{array} \quad (3.20)$$

jest przemienny.

Ciąg (3.18) nazywamy *ciągą dokładnym pary* (X, A) . Ogólnie, ciągi homomorfizmów o analogicznej własności są nazywane ciągami dokładnymi. Ciągom dokładnym poświęcony jest jeden z kolejnych rozdziałów skryptu.

Dowód. Warunkiem koniecznym dokładności ciągu (3.18) jest znikanie złożień kolejnych homomorfizmów – sprawdzenie tej własności pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. Wykażemy, że w poszczególnych węzłach ciągu (w każdej z grup homologii) jądro homomorfizmu wychodzącego jest zawarte w obrazie homomorfizmu poprzedzającego.

$H_n(\mathbf{A})$: Dla $c \in Z_n(A)$, niech $i_*[c]_A = [c]_X = 0$. Wówczas $c = \partial_{n+1} c'$, dla pewnego $c' \in C_{n+1}(X)$ i wobec tego

$$\partial_*[c']_{(X,A)} = [c]_A.$$

$H_n(\mathbf{X})$: Dla $c \in Z_n(X)$, niech $j_*[c]_X = [c]_{(X,A)} = 0$. Jako relatywny brzeg łańcuch c jest postaci $c = \partial_{n+1}c' + c''$, dla pewnych $c' \in C_{n+1}(X)$, $c'' \in C_n(A)$. Jeśli $n = 0$ i $c \in \tilde{Z}_0(X)$, to wówczas $c'' \in \tilde{Z}_0(A)$. Zatem

$$i_*[c'']_A = [c]_X.$$

$H_n(\mathbf{X}, A)$: W przypadku $n > 0$, dla $c \in Z_n(X, A)$ niech $\partial_*[c]_{(X,A)} = [\partial_n c]_A = 0$. Wówczas łańcuch $\partial_n c$ jest brzegiem w A , a więc $\partial_n c = \partial_n c'$, dla pewnego $c' \in C_n(A)$. Stąd

$$j_*[c - c']_X = [c]_{(X,A)}.$$

Jeśli $n = 0$, wybierzmy dowolny sympleks $a \in S_0 A$. Dla $c \in Z_0(X, A) = C_0(X)$ mamy $c - \tilde{\partial}_0(c)a \in \tilde{Z}_0(X)$, a więc

$$j_*[c - \tilde{\partial}_0(c)a]_X = [c]_{(X,A)}.$$

Przemienność diagramu (3.20) wynika natychmiast z definicji homomorfizmów indukowanych. □

Wniosek 3.2.3. $j_*: \tilde{H}(X) \cong H(X, \{x_0\})$. □

Podstawową konsekwencją istnienia ciągu dokładnego pary będzie dla nas na razie (do czasu rozbudowy stosownej algebraicznej maszyny – w rozdziale 5) następujący

Wniosek 3.2.4. *Jedna z grup homologii z gradacją $\tilde{H}(A)$, $\tilde{H}(X)$ lub $H(X, A)$ jest trywialna (tzn. zerowa w każdym wymiarze) wtedy i tylko wtedy, gdy dla pozostałych dwu naturalny homomorfizm i_* , j_* lub odpowiednio ∂_* jest izomorfizmem.* □

Czytelnik zainteresowany faktycznym, efektywnym algorytmem obliczania grup homologii jest w tym miejscu zachęcany do ćwiczenia cierpliwości. Istotnie nietrywialne wyniki pojawią się już w następnym podrozdziale. Samodzielne wykonywanie obliczeń umożliwi jednak dopiero materiał zawarty w rozdziale 4 i (lub) podrozdziale 5.3. W tym momencie, jedyną łatwą do obliczenia grupą homologii okazuje się H_0 .

Ćwiczenie 3.2.2. Sprawdzić, że jeśli przestrzeń topologiczna $X \neq \emptyset$ jest łukowo spójna, to $\tilde{H}_0(X) = 0$. Zatem augmentacja $\eta_X: C(X) \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$ wyznacza w tym przypadku izomorfizm w wymiarze 0, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

W przypadku ogólnym, niech $X = \bigcup_{\kappa \in K} X_\kappa$ będzie rozkładem przestrzeni X na składowe łukowej spójności. Ma wówczas miejsce rozkład grup łańcuchów

$$C_n(X) = \bigoplus_{\kappa \in K} C_n(X_\kappa), \quad \text{dla } n \geq 0, \quad (3.21)$$

zachowywany przez operatory brzegu – istotnie, każdy z sympleksów singularnych jest wówczas zawarty w dokładnie jednej ze składowych.

Wniosek 3.2.5. Dla rozkładu $X = \bigcup_{\kappa \in K} X_\kappa$ przestrzeni topologicznej X na składowe łukowej spójności włożenia $X_\kappa \hookrightarrow X$, $\kappa \in K$, wyznaczają izomorfizm grup homologii

$$\bigoplus_{\kappa \in K} H_n(X_\kappa) \xrightarrow{\cong} H_n(X), \quad \text{dla } n \geq 0,$$

a zatem augmentacje składowych $\bar{\eta} = \bigoplus_{\kappa \in K} \eta_{X_\kappa} : C(X) \rightarrow (\bigoplus_{\kappa \in K} \mathbb{Z}, 0)$ ustalają izomorfizm

$$\bar{\eta}_* : H_0(X) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\kappa \in K} \mathbb{Z}. \quad (3.22)$$

Dla dowolnego punktu $x_0 \in X$, włożenie $i : \{x_0\} \rightarrow X$ i rzutowanie $p : X \rightarrow \{x_0\}$ wyznaczają rozkład $H_0(X)$ na sumę prostą

$$H_0(X) = \text{im } i_* \oplus \ker p_* \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(X), \quad (3.23)$$

zależny od składowej łukowej spójności zawierającej x_0 . □

Stwierdzenie 3.2.6. Jeśli $\{X_\kappa\}$ jest zbiorem składowych łukowych przestrzeni X , to dla każdego $n \geq 0$ włożenia indukują izomorfizm

$$H_n(X, A) \cong \bigoplus_{\kappa} H_n(X_\kappa, X_\kappa \cap A), \quad (3.24)$$

przy czym

$$H_0(X, A) \cong \bigoplus_{X_\kappa \cap A = \emptyset} \mathbb{Z}.$$

Dowód. Ćwiczenie. □

3.3 Homotopie i naturalne odwzorowania łańcuchowe

Nieskończenie wymiarowe kompleksy łańcuchowe $C(X)$ i $C(X, A)$ trudno uznać za obiekty możliwe do efektywnego obliczenia. Naszym celem będzie wielokierunkowa redukcja – w obrębie zdefiniowanych w podrozdziale 3.1 klas równoważności kompleksów łańcuchowych.

- Od strony topologii – wykażemy, że badane obiekty zależą tylko od klas homotopii (przestrzeni i odwzorowań ciągłych).
- Dla wielościanów i ogólniej CW -kompleksów – kompleksy łańcuchowe mogą być silnie zredukowane i obliczalne (np. skończenie generowane).

W bieżącym paragrafie zajmiemy się kilkoma konstrukcjami uniwersalnej natury, tzn. dającymi się przeprowadzić dla dowolnych przestrzeni topologicznych. Głównym narzędziem będzie tu postulowana w tytule podrozdziału własność naturalności. W uproszczeniu możemy przyjąć, że zależny od przestrzeni topologicznej

X homomorfizm grup $h = h^{(X)}: C_m(X) \rightarrow C_n(X)$ jest *naturalny*, jeśli dla dowolnego ciągłego odwzorowania $f: X \rightarrow Y$ następujący diagram

$$\begin{array}{ccc} C_m(X) & \xrightarrow{h^{(X)}} & C_n(X) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ C_m(Y) & \xrightarrow{h^{(Y)}} & C_n(Y) \end{array} \quad (3.25)$$

jest przemienny. W przypadku konstruowanych naturalnych odwzorowań łańcuchowych będziemy wyróżniać te homomorfizmy $h: C(X) \rightarrow C(Y)$, które *zachowują augmentację*, tzn. spełniają równoważne warunki $\eta \circ h = \eta$, $\tilde{\partial}_0 \circ h_0 = \tilde{\partial}_0$.

Rezygnując z ogólnej definicji naturalności (zwanej też *funktorialnością*), będziemy w konkretnych przypadkach odmiennych od powyższego schematu precyzować jej znaczenie – jak np. w (3.30). Wbrew możliwym przewidywaniom, konstrukcje naturalne są relatywnie proste, a cała trudność redukuje się do precyzyjnego badania standardowych n -sympleksów.

Pierwsza z prezentowanych naturalnych konstrukcji ma oczywiste zastosowanie do dowodu jednej z podstawowych własności grup homologii – homotopijnej niezmienniczości, czyli zależności $H(X)$ nie tyle od samej przestrzeni, co od jej klasy homotopii. Zauważmy najpierw, że dla dowolnych dwu przestrzeni topologicznych X, Y i homotopijnych odwzorowań $f, g: X \rightarrow Y$, odwzorowanie będące homotopią $f \simeq g$, $F: I \times X \rightarrow Y$ spełnia warunki $F(0, \cdot) = f$, $F(1, \cdot) = g$, czyli

$$F \circ i_0 = f, \quad F \circ i_1 = g, \quad (3.26)$$

gdzie włożenia $i_t: X \ni x \mapsto (t, x) \in I \times X$, dla $t = 0, 1$, są w naturalny sposób homotopijne. Rozkład (3.26) pozwala zatem istotnie ograniczyć zmienność rozważanych przestrzeni i homotopijnych odwzorowań.

Twierdzenie 3.3.1. *Dla każdego n naturalnego niech $A_i = (0, E_i), B_i = (1, E_i)$, $i = 0, \dots, n$, oznaczają wierzchołki wielościanu $I \times \Delta^n$ (por. przykład 2.2.4); przyjmijmy*

$$P_{t_n} := \sum_{i=0}^n (-1)^i \langle A_0 \dots A_i B_i \dots B_n \rangle \in C_{n+1}(I \times \Delta^n). \quad (3.27)$$

Wówczas wzór

$$P_n(\sigma) := (\text{id}_I \times \sigma)_{\#}(P_{t_n}) \in C_{n+1}(I \times X), \quad \text{dla } \sigma \in S_n X, \quad (3.28)$$

gdzie X jest dowolną przestrzenią topologiczną, wyznacza rodzinę homomorfizmów $P_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(I \times X)$, dla $n \geq 0$, składającą się na naturalną homotopię łańcuchową $P: i_{1\#} \simeq i_{0\#}$. Oznacza to spełnienie następującej pary warunków:

(i) Dla $c \in C_n(X)$ i $n \geq 0$,

$$\partial_{n+1} P_n(c) + P_{n-1} \partial_n(c) = i_{1\#} c - i_{0\#} c, \quad (3.29)$$

gdzie przyjmujemy $P_{-1} \equiv 0$.

(ii) Dla dowolnego ciągłego odwzorowania przestrzeni topologicznych $f: X' \rightarrow X$, diagram

$$\begin{array}{ccc} C_n(X') & \xrightarrow{P_n} & C_{n+1}(I \times X') \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow (\text{id}_I \times f)_{\#} \\ C_n(X) & \xrightarrow{P_n} & C_{n+1}(I \times X) \end{array} \quad (3.30)$$

jest przemienny.

Dowód. Naturalność, czyli przemiennosc diagramu (3.30), wynika bezpośrednio z definicji (3.28). Ponieważ, zgodnie z przyjętą definicją, zachodzi równość $P_n(\iota_n) = P\iota_n$, dla wzorcowego n -sympleksu $\iota_n \equiv \text{id}_n \in S_n\Delta^n$, wzór (3.28) jest także warunkiem koniecznym naturalności homomorfizmu P .

Pozostała do wykazania własność homotopii (3.29), co wymaga sprawdzenia postulowanej równości dla dowolnego sympleksu $\sigma \in S_n X, n \geq 0$. Skoro jednak sympleks σ jest obrazem $\sigma_{\#}(\iota_n)$, wykazemy najpierw, że równość (3.29) zachodzi dla $c = \iota_n$ oraz $X = \Delta^n$. Wyliczamy lewą stronę

$$\begin{aligned} \partial_{n+1}(P\iota_n) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \langle A_0 \dots A_i B_i \dots B_n \rangle \circ \varepsilon_j \\ &= \sum_{j < i=0}^{i=n} (-1)^{i+j} \langle A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_i B_i \dots B_n \rangle \\ &\quad + \sum_{j=i=0}^{i=n} \langle A_0 \dots A_{i-1} B_i \dots B_n \rangle + \sum_{i=j=0}^{j=n} -\langle A_0 \dots A_i B_{i+1} \dots B_n \rangle \\ &\quad + \sum_{i < j=1}^{j=n} (-1)^{i+j+1} \langle A_0 \dots A_i B_i \dots \hat{B}_j \dots B_n \rangle. \end{aligned}$$

Zauważmy, że składniki w środkowym wierszu redukują się wzajemnie – za wyjątkiem dwu skrajnych, natomiast pozostałe dwie sumy odnajdujemy (ze zmienionym znakiem) w wyrażeniu

$$\begin{aligned} P_{n-1}(\sum_{j=0}^n (-1)^j \varepsilon_j) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j (\text{id}_I \times \varepsilon_j)_{\#} \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \langle A_0 \dots A_i B_i \dots B_{n-1} \rangle \\ &= \sum_{j \leq i} (-1)^{i+j} \langle A_0 \dots \hat{A}_j \dots A_{i+1} B_{i+1} \dots B_n \rangle \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \langle A_0 \dots A_i B_i \dots \hat{B}_j \dots B_n \rangle. \end{aligned}$$

Otrzymana równość

$$\partial_{n+1}P\iota_n + P_{n-1}\partial_n\iota_n = \langle B_0 \dots B_n \rangle - \langle A_0 \dots A_n \rangle$$

oznacza (3.29) dla $c = \iota_n$. Pełną wersję, dla $c = \sigma$, otrzymujemy z wykorzystaniem naturalności – po przyłożeniu do obu stron homomorfizmu $(\text{id}_I \times \sigma)_{\#}$. \square

Wprawdzie powyższe twierdzenie dotyczy *tylko* homotopii włożeń $X \ni x \mapsto (t, x) \in I \times X$, równości (3.26) implikują natychmiast ogólny wniosek, prawdziwy także dla homotopii odwzorowań par – p. definicja 1.1.5.

Wniosek 3.3.2. Dla dowolnych dwu par przestrzeni topologicznych (X, A) i (Y, B) i homotopijnych odwzorowań $f, g: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ zachodzi równość indukowanych homomorfizmów grup homologii

$$f_* = g_*: H(X, A) \rightarrow H(Y, B).$$

Jeśli $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ jest homotopijną równoważnością par, to $f_{\#}: C(X, A) \xrightarrow{\cong} C(Y, B)$ jest równoważnością kompleksów łańcuchowych.

Dowód. Naturalność (3.30) skonstruowanej w twierdzeniu homotopii łańcuchowej oznacza w szczególności, że dla dowolnej pary (X, A) homomorfizmy $P_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(I \times X)$ przeprowadzają podgrupy $C_n(A) \subset C_n(X)$ w $C_{n+1}(I \times A)$, dla $n \geq 0$, a więc indukują homotopię łańcuchową

$$\bar{P}_n: C_n(X, A) \rightarrow C_{n+1}(I \times X, I \times A), n \geq 0,$$

po między homomorfizmami indukowanymi przez włożenia $i_{t\#}: C(X, A) \rightarrow C(I \times X, I \times A)$, $t = 0, 1$. Homotopia ta, po złożeniu z homomorfizmem indukowanym przez odwzorowanie par $F: (I \times X, I \times A) \rightarrow (Y, B)$, daje szukaną homotopię łańcuchową $g_{\#} \simeq f_{\#}$. \square

Opisana wyżej w sposób jawny naturalna homotopia łańcuchowa P nie jest jedyna.

Ćwiczenie 3.3.1. Każdy ciąg łańcuchów singularnych $\hat{P}_n \in C_{n+1}(I \times \Delta^n)$, $n \geq 0$, spełniający warunek rekurencyjny

$$\partial_{n+1} \hat{P}_n = \langle B_0 \dots B_n \rangle - \langle A_0 \dots A_n \rangle - \sum_{j=0}^n (-1)^j (\text{id}_I \times \varepsilon_j)_{\#} \hat{P}_{n-1} \quad (3.31)$$

i zaczynający się od $\hat{P}_{-1} = 0$, wyznacza naturalną homotopię \hat{P} spełniającą (3.29–3.30). Wyrażenie stojące po prawej stronie równości (3.31) jest cyklem w ściąganej przestrzeni $I \times \Delta^n$, a zatem jest brzegiem.

Przykład 3.3.1. Związek pomiędzy H_1 i π_1 . Dla przestrzeni topologicznej X z wyróżnionym punktem x_0 , ustalimy teraz zależność pomiędzy grupą podstawową $\pi_1(X, x_0)$ – zdefiniowaną w podrozdziale 1.2 – oraz grupą homologii $H_1(X)$. Jeśli każdą pętlę $\omega \in \Omega(X, x_0)$ potraktować jako bazowy łańcuch (cykl) $\omega \in S_1 X \subset C_1(X)$, to otrzymujemy odwzorowanie zbiorów $\Omega(X, x_0) \ni \omega \mapsto [\omega]_X \in H_1(X)$, stanowiące podstawę do budowy kanonicznego homomorfizmu

$$\chi: \pi_1(X, x_0) \ni [\omega] \mapsto [\omega]_X \in H_1(X). \quad (3.32)$$

Aby stwierdzić poprawność powyższej formuły, potraktujmy dowolną pętlę $\omega \in \Omega(X, x_0)$, zgodnie z jej definicją, jako odwzorowanie $\omega: (I, \dot{I}) \rightarrow (X, \{x_0\})$ indukujące w homologiach homomorfizm

$$\omega_*: H_1(I, \dot{I}) \rightarrow H_1(X, \{x_0\}) \cong H_1(X),$$

zależny – zgodnie z wnioskiem 3.3.2 – od klasy homotopii $[\omega] \in \pi_1(X, x_0)$. W szczególności, χ jest poprawnie zdefiniowane i zachodzi równość

$$\chi([\omega]) = \omega_*[\iota_1],$$

gdzie $\iota_1 = \text{id}_I \in Z_1(I, \dot{I})$ jest wzorcowym 1-sympleksem.

Aby wykazać, że χ jest homomorfizmem grup, rozważmy w S_1I dwa sympleksy singularne: $\sigma_i: I \ni t \mapsto (t+i)/2 \in I$, dla $i = 0, 1$. Wówczas łańcuch $\sigma_0 + \sigma_1$ reprezentuje tę samą klasę homologii, co ι_1 . Dla dowolnych dwu pętli $\omega, \omega' \in \Omega(X, x_0)$ otrzymujemy zatem

$$(\omega \cdot \omega')_{\#}(\sigma_0 + \sigma_1) = \omega + \omega' = \omega_{\#}\iota_1 + \omega'_{\#}\iota_1,$$

co oznacza tożsamość $\chi([\omega \cdot \omega']) = \chi([\omega]) + \chi([\omega'])$.

Łatwo sprawdzić, że otrzymany wyżej kanoniczny homomorfizm grupy podstawowej w pierwszą grupę homologii jest naturalny, tzn. dowolne odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$ prowadzi do przemiennego diagramu

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\chi} & H_1(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \pi_1(Y, f(x_0)) & \xrightarrow{\chi} & H_1(Y). \end{array} \quad (3.33)$$

Twierdzenie 3.3.3. *W przestrzeni łukowo spójnej X , dla dowolnego punktu referencyjnego, homomorfizm kanoniczny (3.32) indukuje izomorfizm grup*

$$\pi_1(X)/[\pi_1(X)] \xrightarrow{\cong} H_1(X),$$

gdzie $[G] \subset G, G = \pi_1(X)$, oznacza komutant, czyli podgrupę generowaną przez elementy postaci $aba^{-1}b^{-1}, a, b \in G$.

Dowód. Elementarny dowód pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. Szczegóły można znaleźć np. w [8]. \square

Homotopia łańcuchowa zbudowana w przykładzie 3.1.2 stanowi podstawę do kolejnej ważnej naturalnej konstrukcji będącej łańcuchowym odpowiednikiem podziału barycentrycznego kompleksu sympleksyjnego (definicja 2.3.5). Będziemy w tym celu stosować opisaną w przykładzie konstrukcję do dowolnego zbioru wypukłego $X \subset \mathbb{R}^m$, np. do sympleksu geometrycznego $\Delta^m, m > 0$, oraz do liniowej kontrakcji $F(t, x) = tB + (1-t)x$, ściągającej X do ustalonego punktu $B \in X$.

Definicja 3.3.1. *Dla X wypukłego i dowolnego punktu $B \in X$, operatorem stożkowym o środku w B będziemy nazywać rodzinę homomorfizmów*

$$B*: C_n(X) \ni c \mapsto B*c \in C_{n+1}(X), n \geq 0,$$

gdzie przyjmujemy $B*\sigma \in S_{n+1}X$ dla $\sigma \in S_nX$ i

$$B*\sigma(\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}) = \lambda_0 B + (1-\lambda_0)\sigma\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_0}, \dots, \frac{\lambda_{n+1}}{1-\lambda_0}\right), \quad (3.34)$$

we współrzędnych barycentrycznych. Przyjmujemy, że w wymiarze -1 , w rozszerzonym kompleksie $\tilde{C}(X)$, operatorem stożkowym jest homomorfizm $\mathbb{Z} \ni c \mapsto c\langle B \rangle \in C_0X$.

W szczególności, jeśli sympleks $\sigma = \langle P_0 \dots P_n \rangle$ jest odwzorowaniem afinicznym postaci (2.1), tzn. opisuje kombinacją wypukłą wierzchołków $P_0, \dots, P_n \in X$, to

$$B * \langle P_0 \dots P_n \rangle = \langle BP_0 \dots P_n \rangle. \quad (3.35)$$

Zgodnie z (3.10), każdy operator stożkowy jest homotopią łańcuchową, ograniczoną do ustalonego zbioru wypukłego. Okazuje się jednak, że połączenie operatorów stożkowych działających w standardowych sympleksach pozwala na naturalną, uniwersalną konstrukcję w dowolnej przestrzeni topologicznej.

Lemat 3.3.4. *Dla $n \geq 1$, niech $B_n \in \Delta_n$ oznacza środek ciężkości sympleksu, czyli punkt o współrzędnych $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$. W grupie łańcuchów singularnych standardowego sympleksu Δ^n zachodzą tożsamości*

$$c = \partial_{k+1}(B_n * c), \text{ jeśli } c \in \tilde{Z}_k(\Delta^n), \quad (3.36)$$

$$\partial_{k+2}(B_n * B_n * c) = B_n * B_n * \tilde{\partial}_k c, \text{ dla } c \in C_k(\Delta^n). \quad (3.37)$$

dla dowolnego wymiaru $k \geq 0$. □

Dowód. Równość (3.36) wynika bezpośrednio ze wzoru (3.10). Dwukrotne zastosowanie tego samego wzoru,

$$\begin{aligned} \partial_{k+2}(B_n * (B_n * c)) &= B_n * c - B_n * (\partial_{k+1}(B_n * c)) \\ &= B_n * c - B_n * (c - B_n * \tilde{\partial}_k c) \end{aligned}$$

da je (3.37). □

Twierdzenie 3.3.5. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X , niech $sd_n: C_n(X) \rightarrow C_n(X)$ i $D_n: C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$, $n \geq 0$, będą homomorfizmami naturalnymi spełniającymi następujące warunki:*

- (i) $sd_0 = \text{id}_{C_0(X)}$, $D_0 = 0$,
- (ii) $sd_n(\iota_n) = B_n * sd_{n-1}(\partial_n \iota_n)$ dla $n > 0$,
- (iii) $D_n(\iota_n) = B_n * (\iota_n - D_{n-1}(\partial_n \iota_n))$ dla $n > 0$.

Wówczas rodzina $sd = \{sd_n\}$ jest zachowującym augmentację odwzorowaniem łańcuchowym $C(X) \rightarrow C(X)$ homotopijnym z identycznością, zaś $D = \{D_n\}$ jest homotopią łańcuchową $D: \text{id}_{C(X)} \simeq sd$.

Definicja 3.3.2. *Odwzorowanie łańcuchowe $sd: C(X) \rightarrow C(X)$ będziemy nazywać homomorfizmem podziału barycentrycznego lub podziałem barycentrycznym w $C(X)$.*

Wniosek 3.3.6. Dla dowolnej pary (X, A) podział barycentryczny $\text{sd}: C(X) \rightarrow C(X)$ wyznacza naturalne odwzorowanie łańcuchowe $\text{sd}: C(X, A) \rightarrow C(X, A)$, będące również równoważnością homotopijną. \square

Dowód. Naturalność (3.25) opisywanych homomorfizmów oznacza równości

$$\text{sd}_n(\sigma) = \sigma_{\#} \text{sd}_n(\iota_n), \quad D_n(\sigma) = \sigma_{\#} D_n(\iota_n), \quad (3.38)$$

dla $\sigma \in S_n X$. Razem z warunkami (ii)–(iii) daje to jednoznaczną definicję homomorfizmów i zapewnia ich naturalność. Rekurencyjność definicji uzasadnia indukcyjny dowód pozostałych własności, zaś głównym narzędziem będzie tu wzór (3.36). Dla $c = \text{sd}_0 \partial_1(\iota_1) \in \tilde{Z}_0(\Delta^1)$ mamy zatem równości

$$\text{sd}_0 \partial_1(\iota_1) = \partial_1(B_1 * \text{sd}_0 \partial_1(\iota_1)) = \partial_1 \text{sd}_1(\iota_1),$$

o ile przyjąć $(ii)_{n=1}$ za definicję $\text{sd}_1(\iota_1)$. Ponieważ ogólna przemienność z operatorem brzegu $\text{sd}_0 \partial_1(\sigma) = \partial_1 \text{sd}_1(\sigma)$, dla $\sigma \in S_1 X$, wynika z naturalności, możemy teraz przyjąć, iż dla pewnego $k > 0$ i dowolnej przestrzeni topologicznej X zachodzi warunek

$$\text{sd}_{k-1} \partial_k(\sigma) = \partial_k \text{sd}_k(\sigma), \quad \text{dla } \sigma \in S_k X.$$

Łańcuch $c = \text{sd}_k \partial_{k+1}(\iota_{k+1})$ jest wówczas cyklem w $C_k(\Delta^{k+1})$, a zatem wzór (3.36) daje równości

$$\text{sd}_k \partial_{k+1}(\iota_{k+1}) = \partial_{k+1}(B_{k+1} * \text{sd}_k \partial_{k+1}(\iota_{k+1})) = \partial_{k+1} \text{sd}_{k+1}(\iota_{k+1}),$$

gdzie $\text{sd}_{k+1}(\iota_{k+1})$ jest zdefiniowane poprzez $(ii)_{n=k+1}$.

W przypadku homomorfizmów $D_n, n \geq 0$, możemy na początek zastosować (3.36) do cyklu $c = \iota_1 - \text{sd}_1(\iota_1) \in C_1(\Delta^1)$. Otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \iota_1 - \text{sd}_1(\iota_1) &= \partial_2(B_1 * (\iota_1 - \text{sd}_1(\iota_1))) \\ &= \partial_2(B_1 * \iota_1) - \partial_2(B_1 * B_1 * \partial_1 \iota_1) \\ &= \partial_2(B_1 * \iota_1) + 0 \\ &= \partial_2 D_1(\iota_1) + D_0 \partial_1(\iota_1), \end{aligned}$$

gdzie drugi składnik znika wobec (3.37). Naturalność obu stron zapewnia analogiczną równość dla dowolnego 1-sympleksu singularnego $\sigma = \sigma_{\#}(\iota_1)$. Możemy teraz przyjąć, iż dla pewnego $k > 0$ i dowolnej przestrzeni topologicznej X zachodzi warunek

$$\sigma - \text{sd}_k(\sigma) = \partial_{k+1} D_k(\sigma) + D_{k-1} \partial_k(\sigma), \quad \text{dla } \sigma \in S_k X.$$

Łańcuch $\iota_{k+1} - \text{sd}_{k+1} \iota_{k+1} - D_k \partial_{k+1} \iota_{k+1} \in C_{k+1}(\Delta^{k+1})$ jest wówczas cyklem, a zatem wzory (3.36–3.37) dają równości

$$\begin{aligned} \iota_{k+1} - \text{sd}_{k+1} \iota_{k+1} - D_k \partial_{k+1} \iota_{k+1} &= \partial_{k+2}(B_{k+1} * (\iota_{k+1} - \text{sd}_{k+1} \iota_{k+1} - D_k \partial_{k+1} \iota_{k+1})) \\ &= \partial_{k+2}(B_{k+1} * (\iota_{k+1} - D_k \partial_{k+1} \iota_{k+1}) \\ &\quad - B_{k+1} * B_{k+1} * \text{sd}_k \partial_{k+1} \iota_{k+1}) \\ &= \partial_{k+2} D_{k+1} \iota_{k+1}. \end{aligned}$$

Własność naturalności i indukcja kończą dowód. \square

Ćwiczenie 3.3.2. Sprawdzić poprawność jawnego wzoru opisującego podział barycentryczny:

$$\text{sd}_n(\iota_n) = \sum_{\alpha} \text{sign}(\alpha) \langle E_{(\alpha_0 \dots \alpha_n)} E_{(\alpha_1 \dots \alpha_n)} \dots E_{(\alpha_{n-1} \alpha_n)} E_{\alpha_n} \rangle, \quad (3.39)$$

gdzie sumowanie jest po wszystkich permutacjach $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ zbioru $\{0, \dots, n\}$. Oznaczenia środków ścian jako wierzchołków triangulacji $\text{sd} \Delta^n$ są zgodne z (2.11–2.12).

Twierdzenie 3.3.5 zawiera podstawowe konstrukcje umożliwiające *lokalizację* klas homologii, tzn. reprezentację klas przez łańcuchy (cykle) złożone z dowolnie małych sympleksów singularnych.

Definicja 3.3.3. Dla dowolnej rodziny podzbiorów \mathfrak{U} przestrzeni topologicznej X i dowolnego $n \geq 0$, rozważamy zbiór $S_n \mathfrak{U} = \{\sigma \in S_n X; \exists V \in \mathfrak{U} \sigma(\Delta^n) \subset V\}$ sympleksów wpisanych w \mathfrak{U} . Podgrupy $C_n(\mathfrak{U}) \subset C_n(X)$ generowane przez $S_n \mathfrak{U}$ składają się z n -łańcuchów wpisanych w \mathfrak{U} i tworzą kompleks łańcuchowy $C(\mathfrak{U})$ wpisany w pokrycie \mathfrak{U} lub inaczej kompleks łańcuchów singularnych \mathfrak{U} -małych.

Ćwiczenie 3.3.3. Sprawdzić, że dla dowolnej rodziny podzbiorów \mathfrak{U} grupy n -łańcuchów wpisanych w \mathfrak{U} , $n \geq 0$, tworzą kompleks łańcuchowy. Wywnioskować z naturalności podziału barycentrycznego sd i homomorfizmu D prawdziwość inkluzji

$$\text{sd}_n(C_n(\mathfrak{U})) \subset C_n(\mathfrak{U}), \quad D_n(C_n(\mathfrak{U})) \subset C_{n+1}(\mathfrak{U}),$$

dla $n \geq 0$.

Dla dowolnego pokrycia \mathfrak{U} przestrzeni topologicznej X i dowolnego podzbioru $A \subset X$, zachodzą równości $C_n(\mathfrak{U}) \cap C_n(A) = C_n(\mathfrak{U}|_A)$, $n \geq 0$, gdzie $\mathfrak{U}|_A := \{V \cap A; V \in \mathfrak{U}\}$ oznacza *ograniczenie pokrycia* do A . Niech $C(\mathfrak{U}, A)$ oznacza kompleks ilorazowy $\{C_n(\mathfrak{U})/C_n(\mathfrak{U}|_A)\}$

Twierdzenie 3.3.7 (O lokalizacji). Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X , niech \mathfrak{U} będzie pokryciem takim, że wewnątrz zbiorów rodziny \mathfrak{U} również stanowią pokrycie X . Wówczas homomorfizm włożenia $\iota_{\mathfrak{U}}: C(\mathfrak{U}) \rightarrow C(X)$ jest homotopijną równoważnością kompleksów łańcuchowych. Ponadto, dla dowolnej podprzestrzeni $A \subset X$, homomorfizm $\iota_{\mathfrak{U}}$ wyznacza równoważność łańcuchową $\iota_{\mathfrak{U}, A}: C(\mathfrak{U}, A) \hookrightarrow C(X, A)$.

W dowodzie twierdzenia skorzystamy z podziału barycentrycznego – na razie iterując operator dla pojedynczego sympleksu.

Lemat 3.3.8. Jeśli $X = \bigcup \{\text{int } W; W \in \mathfrak{U}\}$ i $n > 0$, to dla każdego n -sympleksu singularnego $\sigma \in S_n X$ istnieje liczba całkowita $m \geq 0$ taka, że $\text{sd}_n^m(\sigma) \in C_n(\mathfrak{U})$.

Dowód. Zbiory $\sigma^{-1}(\text{int } W)$, $W \in \mathfrak{U}$, stanowią pokrycie otwarte sympleksu Δ^n – niech $\lambda > 0$ będzie liczbą Lebesgue’a tego pokrycia. Jeśli za $m \geq 0$ wybrać liczbę taką, że

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \text{diam } \Delta^n \leq \lambda,$$

to zgodnie z twierdzeniem 2.3.5 każdy z sympleksów singularnych łańcucha $\text{sd}_n^m(\iota_n) \in C_n(\Delta^n)$ ma obraz w którymś ze zbiorów pokrycia. Zatem $\text{sd}_n^m(\sigma) = \sigma_\# \text{sd}_n^m(\iota_n)$ jest łańcuchem w $C_n(\mathfrak{U})$. \square

Dowód twierdzenia 3.3.7. [10] Dla każdego sympleksu singularnego $\sigma \in S_n X$, niech $m(\sigma)$ oznacza najmniejszą liczbę nieujemną taką, że $\text{sd}_n^{m(\sigma)}(\sigma) \in C_n(\mathfrak{U})$. Zachodzą nierówności $m(\sigma\varepsilon_i) \leq m(\sigma)$, dla $0 \leq i \leq n$, natomiast $m(\sigma) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma \in S_n \mathfrak{U}$, a więc np. dla $n = 0$. Położmy

$$D_n^+(\sigma) := \sum_{0 \leq j < m(\sigma)} D_n \text{sd}_n^j(\sigma), \quad (3.40)$$

po czym rozszerzamy D_n^+ do homomorfizmu $C_n(X) \rightarrow C_{n+1}(X)$. Z własności homotopii $D = \{D_n\}$ otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} \partial_{n+1} D_n^+(\sigma) &= \sum_{0 \leq j < m(\sigma)} (\text{sd}_n^j(\sigma) - \text{sd}_n^{j+1}(\sigma) - D_{n-1} \partial_n \text{sd}_n^j(\sigma)) \\ &= \sigma - \text{sd}_n^{m(\sigma)}(\sigma) - \sum_{0 \leq j < m(\sigma)} \sum_{i=0}^n (-1)^i D_{n-1} \text{sd}_{n-1}^j(\sigma\varepsilon_i); \\ D_{n-1}^+ \partial_n(\sigma) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{0 \leq j < m(\sigma\varepsilon_i)} D_{n-1} \text{sd}_{n-1}^j(\sigma\varepsilon_i). \end{aligned}$$

Zatem wzory $\text{sd}_0^+ := \text{id}_{C_0(X)}$ i

$$\begin{aligned} \text{sd}_n^+(\sigma) &:= \sigma - \partial_{n+1} D_n^+(\sigma) - D_{n-1}^+ \partial_n(\sigma) \\ &= \text{sd}_n^{m(\sigma)}(\sigma) + \sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{m(\sigma\varepsilon_i) \leq j < m(\sigma)} D_{n-1} \text{sd}_{n-1}^j(\sigma\varepsilon_i) \in C_n(\mathfrak{U}) \end{aligned} \quad (3.41)$$

dla $n > 0$, definiują homomorfizm łańcuchowy $\text{sd}^+ : C(X) \rightarrow C(\mathfrak{U})$ lewostronnie odwrotny do włożenia $\iota_{\mathfrak{U}} : C(\mathfrak{U}) \rightarrow C(X)$ i taki, że $D^+ = \{D_n^+\}$ jest homotopią łańcuchową $D^+ : \text{id}_{C(X)} \simeq \iota_{\mathfrak{U}} \circ \text{sd}^+$.

Przechodząc do przypadku relatywnego zauważamy, że równość $C_n(\mathfrak{U}) \cap C_n(A) = C_n(\mathfrak{U}|_A)$ i naturalność podziału barycentrycznego sprawiają, iż w przypadku $\sigma \in S_n A$ minimalna wartość $m(\sigma)$ jest dokładnie taka sama dla pokrycia $\mathfrak{U}|_A$ jak dla \mathfrak{U} . Dzięki temu zdefiniowane w (3.41) homomorfizmy łańcuchowe $\text{sd}^+ : C(X) \rightarrow C(\mathfrak{U}), C(A) \rightarrow C(\mathfrak{U}|_A)$, tworzą przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} C(A) & \xrightarrow{\subset} & C(X) \\ \text{sd}^+ \downarrow \downarrow D^+ & & \text{sd}^+ \downarrow \downarrow D^+ \\ C(\mathfrak{U}|_A) & \xrightarrow{\subset} & C(\mathfrak{U}). \end{array}$$

Stąd natychmiast wynika, że sd^+ indukuje homomorfizm łańcuchowy $C(X, A) \rightarrow C(\mathfrak{U}, A)$ homotopijnie odwrotny do $\iota_{\mathfrak{U}, A}$, natomiast D^+ – homotopię łańcuchową $\text{id}_{C(X, A)} \simeq \iota_{\mathfrak{U}, A} \circ \text{sd}^+$. \square

Bardzo ważną (m.in. dla efektywności obliczeń grup homologii) konsekwencją twierdzenia o lokalizacji jest następujący

Wniosek 3.3.9 (Twierdzenie o wycinaniu). *Dla dowolnej pary (X, A) , jeżeli domknięcie podzbioru $W \subset A$ jest zawarte we wnętrzu $\text{int } A$, to włożenie par $(X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow (X, A)$ indukuje równoważność homotopijną $C(X \setminus W, A \setminus W) \rightarrow C(X, A)$, a więc także izomorfizm*

$$H(X \setminus W, A \setminus W) \cong H(X, A). \quad (3.42)$$

Dowód. Dla zbiorów $W \subset A \subset X$ takich, że $\bar{W} \subset \text{int } A$, pokrycie $\mathfrak{U} = \{X \setminus W, A\}$ spełnia założenia twierdzenia 3.3.7 – mamy zatem równoważność homotopijną $C(\mathfrak{U}, A) \simeq C(X, A)$, przy czym ograniczenie pokrycia do A jest trywialne, $\mathfrak{U}|_A = \{A\}$. Pozostaje wskazać kanoniczny izomorfizm grup ilorazowych

$$C_n(\mathfrak{U}, A) = (C_n(X \setminus W) + C_n(A))/C_n(A)$$

$$C_n(X \setminus W, A \setminus W) = C_n(X \setminus W)/(C_n(X \setminus W) \cap C_n(A)),$$

dla $n \geq 0$, czyli skorzystać ze znanego izomorfizmu grup abelowych

$$(G_1 + G_2)/G_2 \cong G_1/(G_1 \cap G_2)$$

– i sprawdzić łańcuchowość (przemienność z operatorami brzegu) otrzymanego ciągu izomorfizmów. \square

3.4 Grupy homologii sfer

Niezwykle prosty i precyzyjny sposób wyznaczenia grup homologii pierwszej nietrywialnej rodziny przestrzeni, czyli sfer S^n , $n \geq 0$, przypomina nieco sposób barona Münhausena na wyciągnięcie siebie wraz z koniem z bagna – za włosy. Istotny jest tu punkt oparcia, przypadek $n = 0$, czyli sfera, która jeszcze niezupełnie jest sferą.

Twierdzenie 3.4.1. *Dla każdego n naturalnego, zredukowane grupy homologii sfery S^n opisują się wzorem*

$$\tilde{H}_m(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{dla } m = n. \end{cases} \quad (3.43)$$

Symetria $\lambda: S^n \ni (x_0, x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_0, x_1, \dots, x_n) \in S^n$ jest odwzorowaniem indukującym w homologiach (zredukowanych) automorfizm $z \mapsto -z$.

Dowód. W sferze $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_i x_i^2 = 1\}$ wyróżniamy podzbiory (półsfery domknięte)

$$E_+^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n; x_n \geq -\varepsilon\}, \quad E_-^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n; x_n \leq \varepsilon\},$$

dla ustalonego $\varepsilon \in (0, 1)$; dla $n > 0$, przekrój

$$S_\varepsilon^{n-1} = E_+^n \cap E_-^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n; |x_n| \leq \varepsilon\}$$

jest zatem homeomorficzny z produktem $S^{n-1} \times [-\varepsilon, \varepsilon] \simeq S^{n-1}$. Korzystając z własności wycinania (3.42), ciągów dokładnych par (S^n, E_+^n) i $(E_-^n, S_\varepsilon^{n-1})$ oraz wniosku 3.2.4, otrzymujemy ciąg izomorfizmów

$$\tilde{H}_m(S^n) \xrightarrow{\cong} H_m(S^n, E_+^n) \xleftarrow{\cong} H_m(E_-^n, S_\varepsilon^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{m-1}(S_\varepsilon^{n-1}) \xleftarrow{\cong} \tilde{H}_{m-1}(S^{n-1}) \quad (3.44)$$

dla $n > 0$ i dowolnego całkowitego m . W ten sposób w pełni znane grupy homologii dwupunktowej przestrzeni $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ stają się szablonem do opisu grup homologii wszystkich sfer.

Biorąc za generator grupy $\tilde{H}_0(S^0)$ klasę 0-cyklu $c_0 = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle \in \tilde{Z}_0(S^0)$, na którym symetria λ działa jako zmiana znaku:

$$\lambda_{\#}(c_0) = \langle -1 \rangle - \langle 1 \rangle = -c_0,$$

potwierdzamy drugą część tezy – w przypadku $n = 0$. Przypadek ogólny wynika z faktu, że $\lambda: S^n \rightarrow S^n$ zachowuje opisany wyżej i decydujący o izomorfizmie (3.44) rozkład sfery, co daje przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \\ \lambda_* \downarrow & & \downarrow (\lambda|_{S^{n-1}})_* \\ \tilde{H}_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array} \quad (3.45)$$

dla $n > 0$, gdzie obcięcie λ do sfery niższego wymiaru jest symetrią o poznanym wcześniej działaniu w grupie homologii. \square

Ćwiczenie 3.4.1. Sprawdzić, że wszystkie symetrie $\lambda_k: S^n \ni (x_0, \dots, x_n) \mapsto (x_0, \dots, -x_k, \dots, x_n) \in S^n, k \leq n$, są wzajemnie homotopijne. Wykazać, że izomorfizm $\tilde{H}_n(S^n) \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$, w którym – inaczej niż w (3.44) – człon oznaczający wycinanie zostaje zastąpiony izomorfizmem $H_m(S^n, E_-^n) \xleftarrow{\cong} H_m(E_+^n, S_\varepsilon^{n-1})$, różni się od (3.44) znakiem.

Obliczenie grup homologii sfer przenosi się na podane niżej relatywne grupy homologii

Wniosek 3.4.2. (i) Dla $n > 0$, para (B^n, S^{n-1}) złożona z kuli domkniętej i sfery ma nietrywialne grupy homologii

$$H_m(B^n, S^{n-1}) \cong \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{dla } m = n. \end{cases} \quad (3.46)$$

(ii) Dla dowolnego punktu $P \in \mathbb{R}^n, n > 0$,

$$H_m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\}) \cong \begin{cases} 0 & \text{dla } m \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{dla } m = n. \end{cases} \quad (3.47)$$

Translacja o wektor $\overrightarrow{PP'}$ wyznacza kanoniczny izomorfizm

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P'\}), \quad (3.48)$$

dla wszystkich $P, P' \in \mathbb{R}^n$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Definicja 3.4.1. Za orientację przestrzeni \mathbb{R}^n będziemy uważać zgodną rodzinę \mathcal{O} generatorów $\vartheta_P \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\})$, $P \in \mathbb{R}^n$, przeprowadzanych wzajemnie na siebie przez izomorfizmy (3.48). Każdy z generatorów ϑ_P jest orientacją przestrzeni w punkcie P .

Ćwiczenie 3.4.2. Przestrzeń \mathbb{R}^n ma dokładnie dwie orientacje. Sprawdzić, że symetria $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ w \mathbb{R}^n indukuje automorfizm $w \mapsto -w$ grupy $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$.

Uwaga 3.4.1. Narzuca się pytanie o możliwość ustalenia „naturalnego” izomorfizmu pomiędzy grupami $\tilde{H}_n(S^n)$, $H_n(B^n, S^{n-1})$ i $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, dla wszystkich $n > 0$. Odpowiedź jest pozytywna i oznacza wybór specyficznego generatora w każdej z wymienionych grup i, przy okazji, wybór orientacji w \mathbb{R}^n . Jeśli za generator grupy $\tilde{H}_0(S^0)$ przyjmą wskazaną wyżej klasę $\theta_0 = [c_0]$ cyklu $c_0 = \langle 1 \rangle - \langle -1 \rangle$, to oznacza to także wybór generatora $\vartheta_1 = \partial_*^{-1}[c_0] \in H_1(B^1, S^0)$ i przeniesienie go zgodnie z włożeniem $(B^1, S^0) \hookrightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$. Klasa ϑ_1 jest reprezentowana przez 1-sympleks będący drogą w $B^1 = [-1, 1]$, zgodną z orientacją, czyli od -1 do 1 . Kolejne wyróżnione generatory $\theta_n \in H_n(S^n)$, $n \geq 1$, można wskazać jako przeciwobrazy w izomorfizmie (3.44). Bardziej jawna konstrukcja generatorów zakłada naprzemienne stosowanie homomorfizmu łączącego $\partial_*: H_n(B^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ ciągu dokładnego pary (B^n, S^{n-1}) i jawnie wskazanego rzutu stereograficznego

$$B^n \ni x \xrightarrow{\pi} (2\sqrt{1 - \|x\|^2}x, 2\|x\|^2 - 1) \in S^n, \quad (3.49)$$

indukującego homeomorfizm $B^n/S^{n-1} \cong S^n$, a więc także (por. wniosek 5.3.3) izomorfizm grup homologii

$$\pi_*: H_n(B^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_n(S^n). \quad (3.50)$$

Łącząc (3.49) z homeomorfizmem $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \frac{x}{\sqrt{\|x\|^2 + 1}} \in \text{int } B^n$, otrzymujemy włożenie

$$\mathbb{R}^n \ni x \xrightarrow{\varpi} \left(2 \frac{x}{\|x\|^2 + 1}, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) \in S^n, \quad (3.51)$$

identyfikujące sferę S^n jako uzwarcenie \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \cong S^n$ i będące alternatywnym opisem rzutu stereograficznego. Punktowi w nieskończoności odpowiada biegun północny $(0, \dots, 0, 1) \in S^n$.

Stwierdzenie 3.4.3. Zanurzenie $\mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n$ przeprowadza wszystkie klasy ϑ_P dowolnej orientacji w \mathbb{R}^n na ten sam generator grupy $\tilde{H}_n(S^n)$, tzn. dla dowolnych punktów $P, P' \in \mathbb{R}^n$, istnieje przemienny diagram

$$\begin{array}{ccccc} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n, S^n \setminus \{P\}) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S^n) \\ \downarrow t & & \downarrow & & \parallel \\ H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P'\}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n, S^n \setminus \{P'\}) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S^n) \end{array} \quad (3.52)$$

w którym t jest izomorfizmem indukowanym przez translację.

Dowód. Pierwszy z izomorfizmów w obu wierszach jest efektem wycinania „bieguna północnego”. Przemienność lewego z kwadratów uzyskujemy rozszerzając translację \mathbb{R}^n do homeomorfizmu sfery zachowującego punkt ∞ . Otrzymany homeomorfizm jest homotopijny z identyecznością – stąd przemienność prawego kwadratu. \square

Możliwość porównywania orientacji w poszczególnych punktach \mathbb{R}^n za pomocą translacji jest specyficzną cechą przestrzeni euklidesowej. Szersze zastosowanie ma opisana w poniższym wniosku koncepcja *ciągłej zależności* orientacji od punktu.

Wniosek 3.4.4. *Dla dowolnej kuli otwartej $U \subset \mathbb{R}^n$, izomorfizmy indukowane przez włożenia*

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus U) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\}), \quad P \in U,$$

wyznaczają zgodną rodzinę orientacji w punktach kuli. \square

Ćwiczenie 3.4.3. Zbudować homotopię pomiędzy translacją \mathbb{R}^n o wektor $\overrightarrow{PP'}$, $P, P' \in U$, a odwzorowaniem, które przeprowadza P na P' , ale jest identyecznością na dopełnieniu $\mathbb{R}^n \setminus U$.

W podrozdziale 4.1 ustalimy naturalną, *dodatnią* orientację w \mathbb{R}^n , zgodną w sensie podanym w stwierdzeniu 3.4.3 z dokonanym już wyborem generatora $\theta_n \in H_n(S^n)$, $n \geq 1$, natomiast w podrozdziale 4.4 wskażemy jeszcze jedno uzasadnienie dla dokonanego tu wyboru – związane z pojęciem iloczynu krzyżowego klas homologii. Wszystkie opisane drogi prowadzą do tego samego zbioru wyróżnionych generatorów.

Czas na ważne konsekwencje topologiczne wyliczonych grup homologii.

Wniosek 3.4.5. *Sfery różnych wymiarów nie są homeomorficzne, a nawet nie są homotopijnie równoważne. Przestrzenie euklidesowe różnych wymiarów nie są homeomorficzne (choć wszystkie są ściągalne).*

Dowód. Ewentualny homeomorfizm $h: \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$ implikuje homeomorfizm par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong (\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{h(0)\})$. \square

Wniosek 3.4.6. *Nie istnieje retrakcja kuli B^n na sferę S^{n-1} , czyli ciągle odwzorowanie $r: B^n \rightarrow S^{n-1}$ takie, że $r|_{S^{n-1}} = id$.*

Dowód. Złożenie $S^{n-1} \hookrightarrow B^n \xrightarrow{r} S^{n-1}$ będące identyecznością musiałoby indukować w homologiach homomorfizm tożsamościowy $\tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \rightarrow \tilde{H}_{n-1}(B^n) = 0 \rightarrow \dots$. Sprzeczność. \square

Powyższy wniosek jest jednym z punktów wyjścia do uzyskania klasycznego *Twierdzenia Brouwera o punkcie stałym*.

Twierdzenie 3.4.7. *Dla $n \geq 0$, każde ciągle odwzorowanie kuli B^n w siebie ma punkt stały.*

Dowód. Jeśli odwzorowanie $f: B^n \rightarrow B^n$ nie posiadałoby punktów stałych, to dla każdego $x \in B^n$ półprosta $x + t(x - f(x))$, $t \in \mathbb{R}_+$, przecinałaby sferę $S^{n-1} = \partial B^n$ w jednoznacznie określonym punkcie, $r(x) \in S^{n-1}$, zależnym od x w sposób ciągły. Tak zbudowane r byłoby retrakcją kuli na sferę – sprzeczność z wnioskiem 3.4.6. \square

Twierdzenie 3.4.1 wskazuje dla sfery S^n , $n > 0$, nietrywialną grupę homologii, w której każdy homomorfizm jest postaci $z \mapsto kz$, dla $k \in \mathbb{Z}$. Stąd pomysł na zdefiniowany niżej homologiczny niezmiennik odwzorowań sfer.

Definicja 3.4.2. Dla dowolnego odwzorowania $f: S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$, stopniem odwzorowania nazywamy liczbę $\deg(f) \in \mathbb{Z}$ taką, że homomorfizm indukowany $f_*: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ jest mnożeniem $z \mapsto \deg(f)z$.

Wniosek 3.4.8. Własności stopnia.

- (i) $\deg(f) = 0$, jeśli $S^n \setminus f(S^n) \neq \emptyset$.
- (ii) $\deg(f) = \deg(g)$, jeśli odwzorowania $f, g: S^n \rightarrow S^n$ są homotopijne.
- (iii) $\deg(f \circ g) = \deg(f) \deg(g)$, dla $f, g: S^n \rightarrow S^n$.
- (iv) $\deg(f) = \pm 1$, jeśli $f: S^n \rightarrow S^n$ jest równoważnością homotopijną.
- (v) $\deg(\lambda) = -1$, dla dowolnej symetrii $\lambda: S^n \rightarrow S^n$.
- (vi) $\deg(a) = (-1)^{n+1}$, dla odwzorowania antypodycznego $a: x \mapsto -x$.
- (vii) $\deg(L_A) = \det(A)$, dla dowolnej izometrii $L_A: S^n \rightarrow S^n$ określonej przez macierz ortogonalną A , $\mathbb{R}^{n+1} \ni x \mapsto Ax \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Dowód. Ćwiczenie. \square

Ćwiczenie 3.4.4. Sformułować i udowodnić analogiczne własności dotyczące stopnia $\deg(f)$ odwzorowania $f: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (B^n, S^{n-1})$, czyli liczby całkowitej takiej, że $f_*(z) = \deg(f)z$, dla $z \in H_n(B^n, S^{n-1})$.

Kolejnym ważnym zastosowaniem twierdzenia o wycinaniu jest rozszerzenie pojęcia stopnia na ciągle odwzorowania podzbiorów przestrzeni euklidesowej. Zaczniemy od obserwacji, że wycinanie pozwala w pewnych sytuacjach obliczać zdefiniowany wyżej stopień odwzorowania sfery $f: S^n \rightarrow S^n$ jako własność lokalną – liczbę rozwiązań równania $f(x) = z$, z uwzględnieniem krotności. Dla dowolnego otoczenia $V \subset S^n$ punktu $z \in S^n$, $n > 0$, następujący diagram przemienny

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(z)) & \xleftarrow{\cong} & H_n(f^{-1}V, f^{-1}V \setminus f^{-1}(z)) \\
 f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & (f|_{f^{-1}V})_* \downarrow \\
 H_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n, S^n \setminus \{z\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(V, V \setminus \{z\})
 \end{array} \tag{3.53}$$

opisuje homomorfizm indukowany f_* – lewa kolumna – poprzez homologiczne własności obcięcia $f|_{f^{-1}V}$.

Definicja 3.4.3. Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: S^n \supset U \rightarrow S^n, n > 0$, określonej na podziorze otwartym sfery i punktu $z \in S^n$ takiego, że przeciwobraz $f^{-1}(z)$ jest zwarty, liczbę $\deg_z(f) \in \mathbb{Z}$, dla której złozenie

$$H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(z)) \xleftarrow{\cong} H_n(U, U \setminus f^{-1}(z)) \xrightarrow{f_*} \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n \setminus \{z\}) \xleftarrow{\cong} H_n(S^n) \quad (3.54)$$

jest homomorfizmem $H_n(S^n) \ni u \mapsto \deg_z(f)u \in H_n(S^n)$, nazywamy (lokalnym) stopniem odwzorowania f w punkcie z .

Postulowana w definicji zwartość przeciwobrazu oznacza otwartość dopełnienia $S^n \setminus f^{-1}(z)$ i zapewnia możliwość wycięcia domkniętego podzioru $S^n \setminus U$. Widać także, że lokalny stopień jest poprawnie zdefiniowany dla odwzorowań podziorów otwartych w $\mathbb{R}^n \hookrightarrow S^n$.

Przemienność diagramu (3.53) oznacza

Wniosek 3.4.9. Stopień dowolnego odwzorowania $f: S^n \rightarrow S^n, n > 0$, jest równy lokalnemu stopniowi

$$\deg(f) = \deg_z(f) = \deg_z(f|_V), \quad (3.55)$$

dla każdego punktu $z \in S^n$ i dowolnego otoczenia $V \supset f^{-1}(z)$. \square

Wniosek 3.4.10. Dla dowolnego odwzorowania $f: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (B^n, S^{n-1})$ i dowolnego punktu $z \in B^n$ takiego, że $f^{-1}(z) \subset \text{int } B^n$, zachodzi równość

$$\deg(f) = \deg_z(f|_{\text{int } B^n}). \quad (3.56)$$

Dowód. Rzutowanie (3.49) przeprowadza homeomorficznie kulę o promieniu $\sqrt{1/2}$ wraz z brzegiem na półsferę ujemną E_-^n z brzegiem S^{n-1} . Otrzymany po przeskalowaniu homeomorfizm $\pi': (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (E_-^n, S^{n-1})$ sprowadza f do odwzorowania $F = \pi' \circ f \circ (\pi')^{-1}$, które można dalej jednoznacznie rozszerzyć radialnie do ciągłego odwzorowania F sfery S^n , a dokładniej do $F: (S^n, E_+^n) \rightarrow (S^n, E_+^n)$ takiego, że $F|_{E_-^n}$ jest zgodne z f . Przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(B^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\pi'_*} & H_n(E_-^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n, E_+^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S^n) \\ f_* \downarrow & & \downarrow F_* & & \downarrow F_* & & \downarrow F_* \\ H_n(B^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\pi'_*} & H_n(E_-^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\cong} & H_n(S^n, E_+^n) & \xleftarrow{\cong} & \tilde{H}_n(S^n), \end{array}$$

w którym wiersze są izomorfizmami, implikuje równość stopni $\deg(F) = \deg(f)$. Z kolei dla $z \in B^n \setminus f(S^{n-1})$ i $z' = \pi'(z)$ zwarty przeciwobraz $f^{-1}(z)$ jest zawarty w $B^n \setminus S^{n-1}$, a więc zachodzą równości

$$\deg(F) = \deg_{z'}(F) = \deg_{z'}(F|_{\text{int } E_-^n}) = \deg_z(f|_{\text{int } B^n}).$$

\square

Stwierdzenie 3.4.11. Dla dowolnej funkcji ciągłej $f: S^n \supset U \rightarrow S^n$, punktu $z \in S^n$ o zwartym przeciwobrazie $f^{-1}(z)$ i odwzorowania ciągłego $g: S^n \rightarrow S^n$, $n > 0$, zachodzi równość

$$\deg_z(f \circ g) = \deg_z(f) \deg(g). \quad (3.57)$$

Dowód. Niech $K \subset S^n$ oznacza zwarty przeciwobraz $f^{-1}(z)$. Równość (3.57) wynika z przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n \setminus g^{-1}K) & \xleftarrow{\cong} & H_n(g^{-1}U, g^{-1}(U \setminus K)) & \xrightarrow{fg_*} & H_n(S^n \setminus \{z\}) \\ g_* \downarrow & & g_* \downarrow & & g_* \downarrow & & \parallel \\ H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n \setminus K) & \xleftarrow{\cong} & H_n(U, U \setminus K) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n \setminus \{z\}) \end{array}$$

i definicji stopni $\deg_z(f)$, $\deg_z(f \circ g)$. \square

Najprostszy, nietrywialny przypadek odwzorowania pozwalającego na zdefiniowanie i badanie stopnia odwzorowania, to lokalny homeomorfizm.

Stwierdzenie 3.4.12. Dla dowolnego homeomorfizmu $f: \mathbb{R}^n \supset V \rightarrow \mathbb{R}^n$ otwartego podzbioru przestrzeni euklidesowej w przestrzeń euklidesową tego samego wymiaru i dowolnego punktu $x \in V$, homomorfizm

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \xleftarrow{\cong} H_n(V, V \setminus \{x\}) \xrightarrow{f_*} H_n(fV, fV \setminus \{f(x)\}) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{f(x)\})$$

rozszerzony o kanoniczne izomorfizmy skrajnych wyrazów i grupy $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, jest mnożeniem $w \mapsto \deg_{f(x)}(f)w$ przez lokalny stopień odwzorowania f .

Dowód. Ćwiczenie. Skorzystać ze stwierdzenia 3.4.3. \square

Wniosek 3.4.13. Niech $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^n$ będzie homeomorfizmem klasy C^1 , z odwracalną pochodną $Df(x_0)$, dla pewnego $x_0 \in U$. Zachodzi równość

$$\deg_{f(x_0)}(f) = \text{sign}(\det Df(x_0)). \quad (3.58)$$

Dowód. Funkcja $F: (t, x) \mapsto (1-t)f(x) + t(f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0))$ jest homotopią sprowadzającą f do odwzorowania liniowego, przy czym, na pewnym mniejszym otoczeniu $V \ni x_0$, wszystkie $F(t, \cdot)$ są homeomorfizmami i stopień $\deg_{f(x_0)}(F(t, \cdot))$ nie zależy od $t \in I$. Dalszą homotopię zachowującą stopień i sprowadzającą macierz $Df(x_0)$ do macierzy jednostkowej albo do symetrii można skonstruować wykorzystując rozkład macierzy na klatki Jordana. \square

Wniosek 3.4.14. Niech $f: S^n \supset U \rightarrow f(U) \subset S^n$ będzie homeomorfizmem zachowującym punkt $z_0 \in U$. Dla dowolnego lokalnego homeomorfizmu $\psi: (B^n, \{0\}) \rightarrow (S^n, \{z_0\})$, jeśli złożenie $\phi = \psi^{-1}f\psi$ spełnia założenia wniosku 3.4.13, to zachodzi równość

$$\deg_{z_0}(f) = \text{sign}(\det D\phi(0)). \quad (3.59)$$

\square

Wraz z równościami (3.57–3.59), podstawą do obliczeń lokalnego stopnia odwzorowania jest

Twierdzenie 3.4.15 (O addytywności stopnia odwzorowania). *Załóżmy, że dla odwzorowania $f: S^n \supset U \rightarrow S^n, n > 0$, przeciwobraz $f^{-1}(z) = \{x_1, \dots, x_r\}$ punktu $z \in S^n$ jest zbiorem skończonym. Jeśli zbiory $U_i \ni x_i, i \leq r$, są wzajemnie rozłącznymi otoczeniami w U punktów przeciwobrazu, to zachodzi równość*

$$\deg_z(f) = \sum_{i \leq r} \deg_z(f|_{U_i}). \quad (3.60)$$

Dowód. Bez zmniejszenia ogólności rozumowania możemy przyjąć, że dziedziną U funkcji f jest sumą rozłącznych otoczeń $U_1 \cup \dots \cup U_r$, co daje kanoniczny rozkład $H_n(U, U \setminus f^{-1}(z)) \cong \bigoplus_{i \leq r} H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\})$ – por. stwierdzenie 3.2.6. Izomorfizm ten jest ogniwem łączącym dwa przedstawione niżej diagramy przemienne:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(S^n) & \longrightarrow & H_n(S^n, S^n \setminus f^{-1}(z)) & \xleftarrow{\cong} & H_n(U, U \setminus f^{-1}(z)) \\ (\text{id})_i \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \cong \\ \bigoplus_i H_n(S^n) & \xrightarrow{\cong} & \bigoplus_i H_n(S^n, S^n \setminus \{x_i\}) & \xleftarrow{\cong} & \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}), \end{array} \quad (3.61)$$

gdzie wszystkie kolumny są wyznaczone przez włożenia, oraz

$$\begin{array}{ccccc} H_n(U, U \setminus f^{-1}(z)) & \xrightarrow{f_*} & H_n(S^n, S^n \setminus \{z\}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(S^n) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \sum_i & & \uparrow \sum_i \\ \bigoplus_i H_n(U_i, U_i \setminus \{x_i\}) & \xrightarrow{\bigoplus_i (f|_{U_i})_*} & \bigoplus_i H_n(S^n, S^n \setminus \{z\}) & \xleftarrow{\cong} & \bigoplus_i H_n(S^n), \end{array} \quad (3.62)$$

gdzie przemienność oznacza, że górny wiersz jest sumą dolnych. Połączenie (3.61–3.62) daje (3.60). \square

Jako zastosowanie rozwijanych tu metod obliczeniowych stopnia odwzorowania wykażemy teraz

Twierdzenie 3.4.16 (Zasadnicze twierdzenie algebry). *Każdy wielomian zespolony $\mathbb{C} \ni z \mapsto f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}$, stopnia $n > 0$ posiada pierwiastek.*

Dowód. Jeśli traktować sferę S^2 jako uzwarcenie $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ i rozszerzyć f do ciągłego odwzorowania $f: S^2 \rightarrow S^2$, to brak pierwiastka oznaczałoby równość $\deg(f) = 0$. Obliczmy zatem stopień funkcji f . Homotopijna niezmienniczość stopnia sprawia, że możemy ograniczyć się do przypadku $f(z) \equiv z^n$ i skorzystać z równości $\deg(f) = \deg_1(f)$. Wokół każdego z pierwiastków n -tego stopnia z jedności f jest homeomorfizmem. Twierdzenie 3.4.15 oraz wzór (3.58) – lub (3.57) – dają równość $\deg(f) = n$. \square

3.5 Twierdzenie Eilenberga–Zilbera

W bieżącym podrozdziale wykażemy naturalną równoważność – w sensie homotopii łańcuchowej – pomiędzy kompleksem symplecjajalnym produktu kartezjańskiego przestrzeni topologicznych a kompleksem otrzymanym jako produkt tensorowy z kompleksów symplecjajalnych wymnażanych przestrzeni. Klasyczne twierdzenie Eilenberga–Zilbera zostało tu wyodrębnione, mimo oczywistych związków z konstrukcjami podrozdziału 3.3, z trzech powodów.

- Wprawdzie dowód istnienia równoważności korzysta z jawnych wzorów m.in. Aleksandera–Whitneya, zgodnie z konwencją realizowaną w pracy, kolejne dowody – jednoznaczności i równoważności homotopijnych odwołują się do bardziej abstrakcyjnych koncepcji modeli acyklicznych.
- Teoria Eilenberga–Zilbera nabiera pełnej mocy w odniesieniu do teorii kohomologii i produktów, czyli w rozdziale 6, gdy prezentowany podręcznik zbliża się nieubłaganie do końca.
- Istotnym wkładem do prezentowanej tu głównie teorii homologii singularnych jest *homomorfizm aproksymacji diagonalnej* $d^{aw}: C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$, otrzymany niejako przy okazji większej konstrukcji i tworzący wraz ze znanym już nam kompleksem $C(X)$ zaczątek algebraicznego modelu badanej przestrzeni topologicznej X , czy też ogólniej – pary (X, A) .

Dla dowolnych dwu grup z gradacją $C = \{C_n\}, C' = \{C'_n\}$, iloczynem tensorowym $C \otimes C'$ nazywamy ciąg grup

$$(C \otimes C')_n = \bigoplus_{p+q=n} C_p \otimes C'_q, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Definicja 3.5.1. Iloczynem tensorowym kompleksów łańcuchowych $C = (\{C_n\}, \{\partial_n\})$, $C' = (\{C'_n\}, \{\partial'_n\})$ nazywamy kompleks łańcuchowy $C \otimes C'$ powstały jako iloczyn tensorowy grup z gradacją wraz z rodziną homomorfizmów brzegu

$$\bar{\partial}_n: C_p \otimes C'_q \ni c \otimes c' \mapsto \partial_p c \otimes c' + (-1)^p c \otimes \partial'_q c' \in (C \otimes C')_{n-1},$$

dla $n \in \mathbb{Z}, p + q = n$. Jeśli oba kompleksy posiadają augmentacje $\eta: C_0, C'_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, to złożenie

$$C_0 \otimes C'_0 \xrightarrow{\eta \otimes \eta} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$$

jest kanoniczną augmentacją w iloczynie tensorowym kompleksów.

Kompleks $(\mathbb{Z}, 0)$ – izomorficzny z grupą homologii punktu – pełni rolę jedności dla iloczynu tensorowego, o czym świadczą kanoniczne izomorfizmy $C \otimes (\mathbb{Z}, 0) \cong C \cong (\mathbb{Z}, 0) \otimes C$, dla dowolnego kompleksu łańcuchowego C .

Ćwiczenie 3.5.1. Sprawdzić, że $C \otimes C'$ jest kompleksem łańcuchowym. Wykazać poprawność definicji *kanonicznego homomorfizmu* grup homologii

$$\alpha: HC \otimes HC' \longrightarrow H(C \otimes C'), \quad [c] \otimes [c'] \mapsto [c \otimes c']. \quad (3.63)$$

Następujące twierdzenie ma charakter techniczny, jest jednak zasadnicze, jeśli zamierzamy konsekwentnie rozwijać tylko te konstrukcje, które zależą od klas homotopijnie równoważnych kompleksów łańcuchowych.

Twierdzenie 3.5.1. *Każda para homomorfizmów $F: C \rightarrow \hat{C}$, $F': C' \rightarrow \hat{C}'$ wyznacza funktorialne odwzorowanie łańcuchowe iloczynów tensorowych*

$$F \otimes F': C \otimes C' \rightarrow \hat{C} \otimes \hat{C}', \quad c \otimes c' \mapsto F(c) \otimes F'(c').$$

Dowolne homotopie łańcuchowe $D: F \simeq G$ oraz $D': F' \simeq G'$ pomiędzy parami odwzorowań łańcuchowych $F, G: C \rightarrow \hat{C}$ oraz $F', G': C' \rightarrow \hat{C}'$ wyznaczają homotopię łańcuchową

$$\begin{aligned} \bar{D}: F \otimes F' &\simeq G \otimes G', \\ C_p \otimes C'_q \ni c \otimes c' &\mapsto D_p c \otimes F'_q(c') + (-1)^p G_p(c) \otimes D'_q c' \in (\hat{C} \otimes \hat{C}')_{n+1}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

dla $n \in \mathbb{Z}$, $p + q = n$.

Dowód. Ćwiczenie. Sprawdzić, że składniki w (3.64) odpowiadają homotopiom $F \otimes F' \simeq G \otimes F'$ i $G \otimes F' \simeq G \otimes G'$. \square

Wniosek 3.5.2. *Jeśli F i F' są równoważnościami, to $F \otimes F'$ również.* \square

W szczególności, stwierdzenie 3.1.5 pozwala na sformułowanie następującego wniosku.

Wniosek 3.5.3. *Dla dowolnych $p, q \geq 0$, homomorfizmy augmentacji kompleksów singularnych $C(\Delta^p)$ i $C(\Delta^q)$ wyznaczają równoważność homotopijną*

$$C(\Delta^p) \otimes C(\Delta^q) \simeq (\mathbb{Z}, 0).$$

\square

Centralnym punktem bieżącego podrozdziału jest *twierdzenie Eilenberga–Zilbera*:

Twierdzenie 3.5.4. *Na kategorii par przestrzeni topologicznych funktory $(X, Y) \rightsquigarrow C(X \times Y)$, oraz $(X, Y) \rightsquigarrow C(X) \otimes C(Y)$ są w naturalny sposób równoważne.*

Oczywiście, tak uproszczone sformułowanie zostanie w dalszym tekście wyjaśnione i doprecyzowane. Zaczniemy od przytoczenia jawnej konstrukcji dwu (wzajemnie odwrotnych) naturalnych równoważności homotopijnych.

Definicja 3.5.2. *Dla dowolnych dwu przestrzeni topologicznych X i Y , homomorfizmem Alexandera–Whitneya nazywamy odwzorowanie łańcuchowe $AW: C(X \times Y) \rightarrow C(X) \otimes C(Y)$, określone wzorem*

$$(AW)(\sigma, \tau) = \sum_{i \leq n} \sigma \circ \langle E_0 \dots E_i \rangle \otimes \tau \circ \langle E_i \dots E_n \rangle, \quad (3.65)$$

dla $(\sigma, \tau): \Delta^n \rightarrow X \times Y$, a więc dla dowolnej pary n -sympleksów singularnych w X i Y , $n \geq 0$.

Ćwiczenie 3.5.2. Sprawdzić łańcuchowość i naturalność odwzorowania Alexandera–Whitneya.

Kolejna konstrukcja wykorzystuje zgodne triangulacje produktów kartezjańskich $\Delta^p \times \Delta^q$, $p, q \geq 0$. Kładąc $n = p + q$, wyróżnimy jako n –sympleksy podzbiory o wierzchołkach

$$(E_{\alpha_0}, E_{\beta_0}), \dots, (E_{\alpha_n}, E_{\beta_n}), \quad \text{gdzie } \alpha_i + \beta_i = i, \quad \text{dla } i = 0, \dots, n, \quad (3.66)$$

przy czym oba ciągi indeksów $(\alpha_i), (\beta_i)$ są niemalejące. Alternatywny opis sympleksu (3.66) dają pary (μ, ν) ciągów rosnących $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_p \leq n$, $1 \leq \nu_1 < \dots < \nu_q \leq n$, informujących o miejscach wzrostu (o +1) w jednym z ciągów indeksów. Każdy taki n –sympleks wyznacza n –sympleks singularny w produkcie $(\alpha^\mu, \beta^\nu): \Delta^n \rightarrow \Delta^p \times \Delta^q$, gdzie przyjęliśmy oznaczenia

$$\alpha^\mu(E_i) = E_{\alpha_i} = E_j, \quad \text{jeśli } \mu_j \leq i < \mu_{j+1},$$

$$\beta^\nu(E_i) = E_{\beta_i} = E_j, \quad \text{jeśli } \nu_j \leq i < \nu_{j+1},$$

i rozszerzyliśmy ciągi μ, ν o $\mu_0 = \nu_0 = 0$.

Definicja 3.5.3. Dla dowolnych dwu przestrzeni topologicznych X i Y , homomorfizmem Eilenberga–Zilbera nazywamy odwzorowanie łańcuchowe $\nabla: C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(X \times Y)$, określone wzorem

$$\nabla(\sigma \otimes \tau) = \sum_{(\mu, \nu)} \text{sign}(\mu, \nu) (\sigma \circ \alpha^\mu, \tau \circ \beta^\nu), \quad (3.67)$$

dla $\sigma \in S_p X, \tau \in S_q Y, p, q \geq 0$, gdzie czynnik $\text{sign}(\mu, \nu)$ oznacza znak odpowiedniej permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$.

Ćwiczenie 3.5.3. Sprawdzić łańcuchowość i naturalność odwzorowania Eilenberga–Zilbera.

Dowód twierdzenia Eilenberga–Zilbera przedstawimy w postaci ciągu lematów.

Lemat 3.5.5. Złożenie $\nabla \circ AW: C(X \times Y) \rightarrow C(X \times Y)$ jest homotopijne z identycznością.

Dowód. W wymiarze $n = 0$ badane złożenie jest identycznością. Pozwala to na przyjęcie $D_0 = 0$ i rozpoczęcie indukcyjnej konstrukcji homotopii łańcuchowej $D: \text{id}_{C(X \times Y)} \simeq \nabla \circ AW$. Załóżmy zatem, że zbudowaliśmy już *naturalne* homomorfizmy $D_i: C_i(X \times Y) \rightarrow C_{i+1}(X \times Y)$ spełniające warunek homotopii

$$\partial_{i+1} D_i + D_{i-1} \partial_i = \text{id}_{C_i(X \times Y)} - \nabla \circ AW,$$

dla $i < n$. Kolejny homomorfizm D_n należy zdefiniować na wzorcowym n –sympleksie $(\iota_n, \iota_n) \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)$ w ten sposób, by zapewnić tożsamość

$$\partial_{n+1} D_n(\iota_n, \iota_n) = (\iota_n, \iota_n) - \nabla \circ AW(\iota_n, \iota_n) - D_{n-1} \partial_n(\iota_n, \iota_n), \quad (3.68)$$

a następnie skorzystać ze wzoru $(\sigma, \tau) = (\sigma \times \tau)_{\#}(\iota_n, \iota_n)$ i przyjąć

$$D_n(\sigma, \tau) = (\sigma \times \tau)_{\#}D_n(\iota_n, \iota_n),$$

dla $(\sigma, \tau) \in S_n(X \times Y)$. Jest to zasadniczy schemat metody wykorzystującej modele acykliczne do konstrukcji homotopii. Modelem (dla każdego n) jest wzorcowy sympleks (ι_n, ι_n) , a acykliczne (tzn. z zerowymi grupami homologii w wymiarach dodatnich) są kompleksy $C_n(\Delta^n \times \Delta^n)$. Aby wskazać właściwą wartość dla $D_n(\iota_n, \iota_n)$, wystarczy sprawdzić, że prawa strona równości (3.68) jest brzegiem w $C_n(\Delta^n \times \Delta^n)$, czyli cyklem. \square

Lemat 3.5.6. *Złożenie $AW \circ \nabla: C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(X) \otimes C(Y)$ jest homotopijne z identycznością.*

Dowód. W wymiarze $n = 0$ badane złożenie jest identycznością. Pozwala to na przyjęcie $D_0 = 0$ i rozpoczęcie indukcyjnej konstrukcji homotopii łańcuchowej $D: \text{id}_{C(X) \otimes C(Y)} \simeq AW \circ \nabla$. Ponieważ bazę produktu $C_p(X) \otimes C_q(Y)$ stanowią iloczyny tensorowe $\sigma \otimes \tau = (\sigma_{\#} \otimes \tau_{\#})(\iota_p \otimes \iota_q)$, za modele możemy w tym przypadku przyjąć $\iota_p \otimes \iota_q$, dla $p, q \geq 0$. Zależność rekurencyjna definiująca $D_n(\iota_p \otimes \iota_q)$,

$$\bar{\partial}_{n+1}D_n(\iota_p \otimes \iota_q) = (\iota_p \otimes \iota_q) - AW \circ \nabla(\iota_p \otimes \iota_q) - D_{n-1}\bar{\partial}_n(\iota_p \otimes \iota_q),$$

dla $p + q = n$, wymaga acykliczności kompleksów $C(\Delta^p) \otimes C(\Delta^q)$ otrzymanej wcześniej we wniosku 3.5.3. \square

Lematy 3.5.5–3.5.6 składają się na twierdzenie Eilenberga–Zilbera 3.5.4 w jego podstawowej wersji. Wersja rozszerzona bierze pod uwagę fakt, iż żaden z lematów nie korzystał z jawnej postaci badanych naturalnych homomorfizmów łańcuchowych. Stąd rozszerzający twierdzenie

Lemat 3.5.7. *Każdy naturalny homomorfizm łańcuchowy $EZ: C(X \times Y) \rightarrow C(X) \otimes C(Y)$ spełniający warunek $(EZ)(\sigma, \tau) = \sigma \otimes \tau$, dla $\sigma \in S_0X, \tau \in S_0Y$, jest homotopijnie równoważny homomorfizmowi AW .*

Każdy naturalny homomorfizm łańcuchowy $EZ: C(X) \otimes C(Y) \rightarrow C(X \times Y)$ spełniający warunek $(EZ)(\sigma \otimes \tau) = (\sigma, \tau)$, dla $\sigma \in S_0X, \tau \in S_0Y$, jest homotopijnie równoważny homomorfizmowi ∇ .

Dowód. Ćwiczenie. Wraz z postulowaną naturalnością, warunki definiujące EZ w wymiarze 0 oznaczają zachowywanie przez EZ augmentacji. \square

Homomorfizm Eilenberga–Zilbera ∇ pozwala zdefiniować w grupach homologii pierwszy z naturalnych iloczynów. Zauważmy najpierw, że dla dowolnych par (X, A) i (Y, B) naturalność homomorfizmu ∇ implikuje inkluzje

$$\nabla(C_p(A) \otimes C_q(Y)) \subset C_{p+q}(A \times Y), \quad \nabla(C_p(X) \otimes C_q(B)) \subset C_{p+q}(X \times B),$$

a więc ∇ indukuje homomorfizm

$$\bar{\nabla}: C_p(X, A) \otimes C_q(Y, B) \rightarrow C_{p+q}(X \times Y) / C_{p+q}(A \times Y) + C_{p+q}(X \times B), \quad (3.69)$$

przy czym ostatnia z grup ilorazowych dopuszcza kanoniczne włożenie w grupę łańcuchów relatywnych $C_{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$, dla $p, q \geq 0$. Przypominamy, że zgodnie z (1.2) parę $(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$ uważamy za produkt $(X, A) \times (Y, B)$.

Definicja 3.5.4. Dla $p, q \geq 0$, naturalny homomorfizm

$$H_p(X, A) \otimes H_q(Y, B) \ni [c] \otimes [c'] \mapsto [\bar{\nabla}(c \otimes c')] \in H_{p+q}((X, A) \times (Y, B)) \quad (3.70)$$

nazywamy iloczynem krzyżowym w homologiach. Wynik oznaczamy $[c] \times [c']$, dla $[c] \in H(X, A)$, $[c'] \in H(Y, B)$.

W powyższej definicji ukryty jest homomorfizm (3.63), pozwalający uważać produkt tensorowy grup homologii za dziedzinę iloczynu krzyżowego.

Zastosowaniami iloczynu krzyżowego i metodami obliczania zajmiemy się w podrozdziałach 4.4 i 5.4 – dla kompleksów symplecjialnych i CW –kompleksów. W tym miejscu poprzestaniemy na sformułowaniu podstawowych własności, będących konsekwencją analogicznych własności homomorfizmu Eilenberga–Zilbera ∇ .

Stwierdzenie 3.5.8. *Iloczyn krzyżowy jest łączny, tzn.*

$$(u \times v) \times w = u \times (v \times w), \quad \text{dla } u \in H(X, A), v \in H(Y, B), w \in H(Z, C), \quad (3.71)$$

przemienny,

$$t_*(u \times v) = (-1)^{pq} v \times u, \quad \text{dla } u \in H_p(X, A), v \in H_q(Y, B), \quad (3.72)$$

gdzie $t: X \times Y \ni (x, y) \mapsto (y, x) \in Y \times X$, i ma jedność – jednością jest generator grupy homologii zbioru jednopunktowego, na którym augmentacja ma wartość 1. \square

Ćwiczenie 3.5.4. Sformułować i wykazać odpowiednie własności homomorfizmu Eilenberga–Zilbera (3.67). Wewnętrzna przemienność homomorfizmu ∇ – z dokładnością do homotopii – wynika z faktu, iż transpozycja tworzy z ∇ inny, homotopijnie równoważny homomorfizm Eilenberga–Zilbera.

Naturalność zdefiniowanych wyżej homomorfizmów pozwala rozważać ich zachowanie na parach przestrzeni topologicznych i prowadzi do następującej obserwacji:

Stwierdzenie 3.5.9. *Dla dowolnych par (X, A) i (Y, B) , homomorfizmy AW i ∇ indukują wzajemnie odwrotne równoważności homotopijne kompleksów łańcuchowych*

$$\overline{AW}: C(X \times Y) / (C(A \times Y) + C(X \times B)) \simeq C(X, A) \otimes C(Y, B) : \bar{\nabla}. \quad (3.73)$$

\square

Powyższe stwierdzenie nie wymaga od par dodatkowych założeń – obie równoważności korzystają z izomorfizmu (1.20). Ewentualną równoważność wymienionych w (3.73) kompleksów z $C((X, A) \times (Y, B))$ daje dopiero zdefiniowana w podrozdziale 5.2 dokładność triady $(X \times Y; A \times Y, X \times B)$.

Homomorfizm Alexandera–Whitneya AW i każdy mu równoważny naturalny homomorfizm $EZ: C(X \times Y) \rightarrow C(X) \otimes C(Y)$ jest ściśle związany z naturalnymi odwzorowaniami łańcuchowymi $C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$ zachowującymi augmentację.

Definicja 3.5.5. *Naturalne odwzorowanie łańcuchowe $d: C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$ spełniające warunek $d(\sigma) = \sigma \otimes \sigma$, dla $\sigma \in S_0 X$, nazywamy homomorfizmem diagonalnym kompleksu $C(X)$. Homomorfizmem diagonalnym Alexandera–Whitneya będziemy nazywać złożenie*

$$d^{aw}: C(X) \xrightarrow{\Delta\#} C(X \times X) \xrightarrow{AW} C(X) \otimes C(X)$$

$$C_n(X) \supset S_n X \ni \sigma \longmapsto \sum_{i \leq n} \sigma \circ \langle E_0 \dots E_i \rangle \otimes \sigma \circ \langle E_i \dots E_n \rangle, \quad \text{dla } n \geq 0, \quad (3.74)$$

gdzie $\Delta: X \ni x \mapsto (x, x) \in X \times X$ jest odwzorowaniem diagonalnym.

Ćwiczenie 3.5.5. Sprawdzić, że dla dowolnego homomorfizmu diagonalnego d złożenie $d: C(X \times Y) \rightarrow C(X \times Y) \otimes C(X \times Y)$ i homomorfizmu $\pi_{\#}^1 \otimes \pi_{\#}^2$ indukowanego przez projekcje $\pi^1: X \times Y \rightarrow X$, $\pi^2: X \times Y \rightarrow Y$, jest naturalną równoważnością Eilenberga–Zilbera $EZ: C(X \times Y) \rightarrow C(X) \otimes C(Y)$.

Zauważmy, że dla dowolnej przestrzeni topologicznej X produkt tensorowy $C(X) \otimes C(X)$ posiada naturalny, nietrywialny automorfizm

$$\lambda: C_p(X) \otimes C_q(X) \ni u \otimes v \mapsto (-1)^{pq} v \otimes u \in C_q(X) \otimes C_p(X),$$

dla $p, q \geq 0$.

Stwierdzenie 3.5.10 (Własności naturalnego homomorfizmu diagonalnego). *Każdy naturalny homomorfizm diagonalny jest homotopijny z d^{aw} . W szczególności, istnieje homotopia łańcuchowa $\lambda \circ d^{aw} \simeq d^{aw}$. Ponadto zachodzą równości:*

$$(i) (\text{id}_X \otimes \eta) \circ d^{aw} = \text{id}_X = (\eta \otimes \text{id}_X) \circ d^{aw}$$

$$(ii) (\text{id}_X \otimes d^{aw}) \circ d^{aw} = (d^{aw} \otimes \text{id}_X) \circ d^{aw}.$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Homomorfizm diagonalny jest wykorzystywany do opisu i dowodu własności iloczynu wewnętrznego w grupach *kohomologii* – por. rozdział 6. Dla łańcuchów i grup homologii d^{aw} stanowi naturalne wzbogacenie struktury algebraicznej odpowiadającej badanym przestrzeniom topologicznym. Własności sformułowane powyżej przedstawiają wyróżniony homomorfizm diagonalny jako działanie dualne do mnożenia, mające *jedność* (ujęta w diagram przemienny):

$$\begin{array}{ccccc} C(X) \otimes (\mathbb{Z}, 0) & \xrightarrow{\cong} & C(X) & \xleftarrow{\cong} & (\mathbb{Z}, 0) \otimes C(X) \\ \text{id}_X \otimes \eta \uparrow & & \parallel & & \uparrow \eta \otimes \text{id}_X \\ C(X) \otimes C(X) & \xleftarrow{d^{aw}} & C(X) & \xrightarrow{d^{aw}} & C(X) \otimes C(X) \end{array}$$

oraz *łącznie*, w sensie przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccccc}
 C(X) \otimes (C(X) \otimes C(X)) & \xlongequal{\quad} & (C(X) \otimes C(X)) \otimes C(X) \\
 \text{id}_X \otimes d^{aw} \uparrow & & \uparrow d^{aw} \otimes \text{id}_X \\
 C(X) \otimes C(X) & \xleftarrow{d^{aw}} & C(X) & \xrightarrow{d^{aw}} & C(X) \otimes C(X)
 \end{array}$$

W kolejnych rozdziałach skryptu zmierzamy w stronę metod silnej redukcji kompleksów łańcuchowych, starając się zastąpić $C(X)$ przez homotopijnie równoważne kompleksy obliczalne, o ile to możliwe – skończenie wymiarowe.

Ćwiczenie 3.5.6. Sprawdzić, że każda równoważność łańcuchowa kompleksów z augmentacją $\zeta: C(X) \simeq C: \zeta$, dla ustalonej przestrzeni topologicznej X , wyznacza specyficzne odwzorowanie łańcuchowe

$$C \xrightarrow{\zeta} C(X) \xrightarrow{d^{aw}} C(X) \otimes C(X) \xrightarrow{\zeta \otimes \zeta} C \otimes C,$$

o własnościach analogicznych do sformułowanych w stwierdzeniu 3.5.10.

Wniosek 3.5.11. *Z dokładnością do równoważności łańcuchowych, para $(C(X), d^{aw})$ złożona z kompleksu łańcuchowego i homomorfizmu diagonalnego $d^{aw}: C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$ jest jednoznacznie wyznaczona przez przestrzeń topologiczną X i zależy tylko od klasy homotopii przestrzeni.* \square

Rozdział 4

Homologie symplecjalne

Dla licznej klasy przestrzeni (obejmującej m.in. wielościany) grupy homologii są skończenie lub przeliczalnie generowane i dają się efektywnie wyznaczać.

4.1 Grupy homologii kompleksów symplecjalnych

Założmy, że K jest dowolnym (geometrycznym) kompleksem symplecjalnym. W zbiorze K_0 wierzchołków ustalmy dowolny liniowy porządek \prec . Dla $n \geq 0$, każdy n -sympleks $\sigma = (v_0 \dots v_n) \in K$ jest obrazem jedyne go afinicznego homeomorfizmu (2.1), w którym wierzchołki mają założoną z góry kolejność, tzn.

$$\langle v_{\alpha(0)} \dots v_{\alpha(n)} \rangle : \Delta^n \rightarrow |K|, \text{ gdzie } v_{\alpha(0)} \prec \dots \prec v_{\alpha(n)}.$$

Przyjmując oznaczenie $\langle \sigma \rangle := \langle v_{\alpha(0)} \dots v_{\alpha(n)} \rangle \in S_n |K|$, możemy utożsamić n -sympleksy geometryczne w K z wyróżnionymi *afinicznymi sympleksami singularnymi* w $|K|$. Niech zatem

$$S_n K := \{ \langle \sigma \rangle \in S_n |K|; \sigma \in K, \dim \sigma = n \}, \quad (4.1)$$

oznacza zbiór wyróżnionych, afinicznych n -sympleksów kompleksu K , dla wszystkich naturalnych n . Z drugiej strony, geometryczny sympleks $\sigma = \langle \sigma \rangle (\Delta^n)$ odpowiadający afinicznemu sympleksowi $\langle \sigma \rangle \in S_n K$ będziemy nazywać jego *nośnikiem*.

Zauważmy, że jeśli σ^i jest i -tą ścianą sympleksu σ , to zachodzi równość

$$\langle \sigma^i \rangle = \langle \sigma \rangle \circ \varepsilon_i,$$

dla $i \leq n$, co oznacza, że brzeg (algebraiczny)

$$\partial_n \langle \sigma \rangle = \sum_{i \leq n} (-1)^i \langle \sigma^i \rangle \in C_{n-1}(|K|)$$

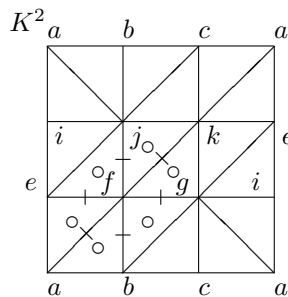
jest kombinacją afinicznych sympleksów, których nośnikami są (geometryczne) ściany sympleksu σ .

Definicja 4.1.1. Symplecjajnym kompleksem łańcuchowym $C(K)$ geometrycznego kompleksu symplecjajnego K nazywamy rodzinę podgrup $C_n(K) \subset C_n(|K|)$ generowanych przez zbiory $S_n K \subset S_n |K|$ afinicznych sympleksów singularnych z K , dla $n \geq 0$, wraz z indukowaną z $C(|K|)$ rodziną operatorów brzegu i augmentacją. Elementy grup $C_n(K)$ są łańcuchami symplecjajnymi.

Definicja 4.1.2. Grupy homologii $H(K)$ kompleksu łańcuchowego $C(K)$ nazywamy grupami homologii symplecjajnych. Elementy grup $Z_n(K) := Z_n(|K|) \cap C_n(K)$ oraz $B_n(K) := B_n(|K|) \cap C_n(K)$ nazywamy odpowiednio symplecjajnymi cyklami i brzegami. W analogiczny sposób, z wykorzystaniem augmentacji, wprowadza się zredukowane symplecjajne grupy homologii $\tilde{H}(K)$ i zredukowane grupy cykli.

Formalna zależność podkompleksu $C(K)$ od ustalonego porządku wierzchołków nie będzie uwzględniana w notacji – jako nieistotna dla własności kompleksu. Wykażemy dalej, że włożenie $\iota_K: C(K) \hookrightarrow C(|K|)$ jest homotopijną równoważnością.

W odróżnieniu od pełnego kompleksu łańcuchów singularnych, symplecjajny podkompleks ma relatywnie niewielką, identyfikowaną przez geometryczne sympleksy, rodzinę generatorów. Dla wielościanów, łańcuchy symplecjajne tworzą grupy skończenie wymiarowe – równe 0 powyżej wymiaru wielościanu, czyli największego z wymiarów sympleksów. Jako równoważne, oba kompleksy łańcuchowe mają te same (izomorficzne) grupy homologii. Dla wielościanów – przestrzeni topologicznych – oznacza to względnie łatwy sposób obliczania homologii w oparciu o dowolną triangulację; dla kompleksów symplecjajnych – zależność grup homologii jedynie od geometrycznej realizacji kompleksu, czyli zależność od topologii, a nie od geometrii.



Rysunek 4.1: Obliczanie grup homologii symplecjajnych butelki Kleina

Przykład 4.1.1. Korzystając z triangulacji podanej na rys. 2.2, obliczymy teraz grupy homologii butelki Kleina K^2 . Zaczniemy od zbadania potencjalnych cykli w $C_2(K^2)$. Korzystając z uporządkowania wierzchołków $a \prec b \prec \dots \prec k$, rozważmy dowolny łańcuch symplecjajny $c_2 = \sum_{\sigma \in S_2 K^2} c_\sigma \sigma$. Porównując współczynniki c_σ dla 2-sympleksów mających wspólną krawędź *wewnętrzną* – na rys. 4.1 – stwierdzamy, że warunkiem koniecznym na to, by łańcuch c_2 był cyklem, jest postać

$$c_2 = c_{\langle abf \rangle} (\langle abf \rangle - \langle bfg \rangle + \langle bcg \rangle \pm \dots + \langle ack \rangle - \langle aek \rangle), \quad (4.2)$$

gdzie znaki zależą od *orientacji* poszczególnych trójkątów. Z (4.2) wynika równość

$$\partial_2 c_2 = 2c_{\langle abf \rangle}(-\langle ae \rangle + \langle ai \rangle - \langle ei \rangle), \quad (4.3)$$

co oznacza brak niezerowych cykli, a więc $H_2(K^2) = 0$.

W wymiarze 1 interesują nas cykle *modulo* brzegi. Wychodząc od dowolnego łańcucha sympleksyjnego $c'_1 \in C_1(K^2)$, możemy, odejmując od niego kolejno brzegi 2-sympleksów mających f za jeden z wierzchołków, tzn. $\partial_2 \langle abf \rangle, \partial_2 \langle bfg \rangle, \partial_2 \langle fgk \rangle, \dots, \partial_2 \langle aef \rangle$ – z odpowiednio dobranymi współczynnikami, otrzymać równoważny z nim łańcuch c''_1 zawierający tylko jedną krawędź o wierzchołku f , np. $\langle af \rangle$. Jeśli łańcuch wyjściowy c'_1 był cyklem, to c''_1 jest nim również, a zerowy współczynnik przy $\langle f \rangle$ w $\partial_1 c''_1$ oznacza zerowy współczynnik przy $\langle af \rangle$ w c''_1 . Rys. 4.1 ilustruje, które krawędzie zostały w ten sposób wyeliminowane i wskazuje trójkąty wykorzystane dla redukcji c'_1 do c''_1 . Stosując taką właśnie redukcję i wykorzystując pozostałe 2-sympleksy możemy stwierdzić, że każda klasa homologii w $H_1(K^2)$ zawiera reprezentujący ją cykl c_1 będący kombinacją krawędzi *sklejanych* w procesie tworzenia przestrzeni K^2 . Warunek cyklu oznacza, że c_1 jest postaci

$$c_1 = c_{\langle ab \rangle}(\langle ab \rangle + \langle bc \rangle - \langle ac \rangle) + c_{\langle ae \rangle}(\langle ae \rangle + \langle ei \rangle - \langle ai \rangle).$$

W połączeniu z otrzymaną wcześniej równością (4.3) opisującą *jedyne* brzegi będące kombinacją wskazanych sześciu krawędzi, otrzymujemy

$$H_1(K^2) = \mathbb{Z}[\langle ab \rangle + \langle bc \rangle - \langle ac \rangle] + \mathbb{Z}_2[\langle ae \rangle + \langle ei \rangle - \langle ai \rangle] \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Ćwiczenie 4.1.1. Wyznaczyć grupy homologii torusa T^2 i płaszczyzny rzutowej $\mathbb{R}P^2$.

Dla dowolnego g.k.s K i jego podkompleksu $L \subset K$, układ (K, L) będziemy nazywać *parą kompleksów sympleksyjnych*, jeśli w zbiorach wierzchołków $K_0 \supset L_0$ ustalimy zgodny liniowy porządek \prec . Za *odwzorowanie sympleksyjne par* $\phi: (K, L) \rightarrow (K', L')$ uważać będziemy $\phi: K \rightarrow K'$ spełniające warunek $\phi(L) \subset L'$.

Definicja 4.1.3. Dla dowolnej pary kompleksów sympleksyjnych (K, L) , grupami relatywnych łańcuchów sympleksyjnych w K względem L będziemy nazywać grupy ilorazowe

$$C_n(K, L) := C_n(K)/C_n(L) \cong \bigoplus_{\sigma \in S_n K \setminus S_n L} \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

dla $n \geq 0$. Wraz z homomorfizmami brzegu $\bar{\partial}_n$ indukowanymi z $C(K)$, grupy relatywnych łańcuchów tworzą sympleksyjny relatywny kompleks łańcuchowy $C(K, L)$. Dla $n \geq 0$, grupę ilorazową

$$H_n(K, L) := \ker \bar{\partial}_n / \text{im } \bar{\partial}_{n+1}$$

nazywamy *n-tą grupą relatywnych homologii sympleksyjnych* lub homologii sympleksyjnej pary (K, L) .

Stwierdzenie 4.1.1. *Przy oznaczeniach*

$$Z_n(K, L) = \{c \in C_n(K); \partial_n c \in C_{n-1}(L)\} \quad (4.5)$$

$$B_n(K, L) = B_n(K) + C_n(L) \subset C_n(K), \quad (4.6)$$

ma miejsce kanoniczny izomorfizm

$$H_n(K, L) \cong Z_n(K, L)/B_n(K, L). \quad (4.7)$$

Grupy homologii symplecjajnych pary tworzą ciąg dokładny

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xrightarrow{j_*} & H_{n+1}(K, L) & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(L) & \xrightarrow{i_*} & H_n(K) & \xrightarrow{j_*} & H_n(K, L) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(L) & \xrightarrow{i_*} \\ & & & & & & & & & & \\ & & & \dots & \xrightarrow{\partial_*} & \tilde{H}_0(L) & \xrightarrow{i_*} & \tilde{H}_0(K) & \xrightarrow{j_*} & H_0(K, L) & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.8)$$

w którym homomorfizm łączący jest określony wzorem $\partial_*[c]_{(K,L)} = [\partial_n c]_L$, dla $n > 0$.

Dowód. Dokładność ciągu (4.8), analogiczna do (3.19), wynika z ogólniejszej konstrukcji (5.2) i twierdzenia 5.1.1. \square

Następujące twierdzenie zapowiada ważną własność – równoważność homologii symplecjajnych i singularnych – dla wielościanów i ogólnie przestrzeni kompleksów symplecjajnych.

Twierdzenie 4.1.2. *Dla dowolnej pary (K, L) kompleksów symplecjajnych istnieje diagram przemienny*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \xrightarrow{\partial_*} & H_n(L) & \xrightarrow{i_*} & H_n(K) & \xrightarrow{j_*} & H_n(K, L) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(L) & \xrightarrow{i_*} & & \\ & \downarrow \iota_* & & \downarrow \iota_* & & \downarrow \iota_* & & \downarrow \iota_* & & & \\ \xrightarrow{\partial_*} & H_n(|K|) & \xrightarrow{i_*} & H_n(|K|) & \xrightarrow{j_*} & H_n(|K|, |L|) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(|L|) & \xrightarrow{i_*} & & \end{array} \quad (4.9)$$

w którym wiersze są dokładne, a homomorfizmy ι_* są izomorfizmami.

Dowód. Istnienie obu ciągów dokładnych i przemienność diagramu wynikają z twierdzeń 3.2.2 i 4.1.1. Dowód tego, że wszystkie homomorfizmy ι_* indukowane przez $\iota_K: C(K) \hookrightarrow C(|K|)$ są izomorfizmami, wymaga skomplikowanej konstrukcji topologiczno-algebraicznej i został w nieco ogólniejszej postaci przeniesiony do podrozdziału 4.2. \square

Definicja kompleksu relatywnego pary przenosi na kompleksy symplecjajne istotną własność algebraiczną – w efekcie dzielenia grup ulegają anihilacji sympleksy wchodzące w skład podkompleksu. Fakt ten formalizuje następujące

Stwierdzenie 4.1.3 (O wycinaniu dla kompleksów symplecjajnych). *Dla dowolnego rozkładu $K = K' \cup L$, kompleksu K na sumę dwu swoich podkompleksów, homomorfizm inkluzji $(K', K' \cap L) \hookrightarrow (K, L)$ indukuje izomorfizm relatywnych grup homologii symplecjajnych $H(K', K' \cap L) \cong H(K, L)$, a zatem także singularnych*

$$H(|K'|, |K' \cap L|) \xrightarrow{\cong} H(|K|, |L|).$$

Przyjmujemy, że relacja porządku wierzchołków w K' jest zgodna z porządkiem w K_0 .

Dowód. Ćwiczenie – sprawdzić, że relatywne symplecjalne kompleksy łańcuchowe $C(K, L)$ i $C(K', K' \cap L)$ są izomorficzne. \square

Powyższe stwierdzenie jest symplecjalną alternatywą dla wniosku 3.3.9. Właściwością wycinania będziemy się jeszcze dokładniej zajmować w podrozdziale 5.2.

Przykład 4.1.2. Wyznamy ciąg dokładny homologii pary wielościanów $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ o naturalnej triangulacji $K = \text{sd}^0\Delta^n$ i $L = K^{n-1}$. Ponieważ kompleksy K i L różnią się tylko jednym sympleksem – w wymiarze n – z definicji mamy

$$C_k(K, L) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \neq n \\ \mathbb{Z}\iota_n, & \text{dla } k = n. \end{cases}$$

Zatem

$$H_k(\Delta^n, \partial\Delta^n) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \neq n \\ \mathbb{Z}[\iota_n], & \text{dla } k = n. \end{cases} \quad (4.10)$$

Ponieważ zredukowane grupy homologii sympleksu Δ^n są zerowe, ciąg dokładny pary $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ rozpada się na izomorfizmy

$$H_{k+1}(\Delta^n, \partial\Delta^n) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_k(\partial\Delta^n), \quad k \geq 0.$$

Naturalnym generatorem w $\tilde{H}_{n-1}(\partial\Delta^n)$ jest klasa $[\partial_n\iota_n] = \partial_*[\iota_n]$.

Zanim rozwiniemy bardziej zaawansowane aspekty homologii symplecjalnych, przyjmijmy prawdziwość twierdzenia 4.1.2 i wróćmy do podjętej w uwadze 3.4.1 kwestii naturalnego wyboru generatorów w podstawowych grupach homologii izomorficznych z \mathbb{Z} .

Definicja 4.1.4. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n, n > 0$, dowolny afiniczny homeomorfizm $\sigma: \Delta^n \rightarrow |\sigma| \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy dodatnio zorientowanym, gdy lokalny stopień σ jest równy 1,

$$\deg_P(\sigma) = 1,$$

w dowolnym punkcie P wnętrza geometrycznego sympleksu $|\sigma|$, np. w jego środku. Jeśli natomiast $\deg_P(\sigma) = -1$, homeomorfizm σ będziemy nazywać ujemnie zorientowanym. Ze względu na niezależność lokalnego stopnia od punktu odniesienia będziemy w tym przypadku używać oznaczenia $\deg(\sigma)$.

Zgodnie z powyższą definicją, dla dowolnego g.k.s. K zawartego w \mathbb{R}^n afinicznym sympleksom singularnym n -wymiarowym $\sigma \in K$ możemy przypisać ich orientację ± 1 równą lokalnemu indeksowi – zdefiniowaną w terminach homologii singularnych. Wniosek 3.4.13 pozwala obliczać stopień afinicznego homeomorfizmu $x \xrightarrow{\sigma} Ax + b$ jako znak wyznacznika macierzy A .

Stwierdzenie 4.1.4. Dla dowolnego n -sympleksu $(v_0 \dots v_n) \subset \mathbb{R}^n$, stopień odwzorowania $\langle v_0 \dots v_n \rangle$ wyraża się wzorem

$$\deg(\langle v_0 \dots v_n \rangle) = \text{sign}(\det[\overrightarrow{v_0 v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0 v_n}]). \quad (4.11)$$

Dowód. Ćwiczenie. Sprawdzić, że przekształcenie $x \mapsto Ax + b$, przeprowadzające wierzchołki E_i standardowego n -sympleksu na v_i , dla $i = 0, \dots, n$, ma macierz, której kolumny stanowią wektory $\overrightarrow{v_0 v_1}, \dots, \overrightarrow{v_0 v_n}$. \square

Wyróżnienie dodatnio zorientowanych sympleksów w \mathbb{R}^n prowadzi do ustalenia orientacji w przestrzeni – por. definicja 3.4.1.

Definicja 4.1.5. Orientację w $\mathbb{R}^n, n > 0$, nazywamy dodatnią i będziemy oznaczać \mathcal{O}^+ , jeśli dla każdego punktu $P \in \text{int } \Delta^n$ relatywna klasa homologii $\vartheta_P^+ \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\})$ reprezentowana przez identyczność $\iota_n = \text{id}_{\Delta^n}$ należy do \mathcal{O}^+ . Dodatnia orientacja przestrzeni \mathbb{R}^n składa się z dodatnich orientacji ϑ_P^+ w poszczególnych punktach $P \in \mathbb{R}^n$.

Klasę dodatniej orientacji w zerze w $\mathbb{R}^n, n > 0$, będziemy także oznaczać ϑ_n^+ – dla zaznaczenia wymiaru przestrzeni.

Bezpośrednio z definicji mamy zatem

Stwierdzenie 4.1.5. Dla dowolnego afinicznego n -sympleksu σ w \mathbb{R}^n i punktu $P \in \text{int } |\sigma|$, dodatnia orientacja w P wyraża się wzorem

$$\vartheta_P^+ = \deg(\sigma)[\sigma]_{(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\})}, \quad (4.12)$$

czyli $\vartheta_P^+ = \pm[\sigma]$ zgodnie z orientacją sympleksu σ . \square

Stwierdzenie 3.4.3 uzasadnia nazwę *dodatni* dla wyróżnionego generatora $\theta_n \in H_n(S^n)$ będącego wspólnym obrazem wszystkich dodatnich orientacji w punktach \mathbb{R}^n .

Ćwiczenie 4.1.2. Sprawdzić, że dodatnie generatory $\theta_n \in H_n(S^n)$ są identyczne z wyróżnionymi wcześniej – w uwadze 3.4.1.

Pojęcia dodatniej orientacji wprowadzone powyżej wyróżniają klasę $[\iota_n]$ jako naturalny *dodatni* generator w relatywnych homologiach sympleksyjnych $H_n(\text{sd}^0 \Delta^n, \text{sd}^0 \Delta^n \setminus \{\Delta^n\})$. Opiszemy teraz dokładniej związek między orientacją n -sympleksów a homologiami sympleksyjnymi wielościanów w \mathbb{R}^n .

Twierdzenie 4.1.6. Dla dowolnego n -wymiarowego wielościanu w \mathbb{R}^n , o triangulacji K , niech ∂K będzie indukowaną triangulacją brzegu ∂W . Dowolna ustalona kolejność wierzchołków wyznacza łańcuch

$$c_K = \sum_{\sigma \in S_n K} \deg(\sigma) \sigma \in C_n(K) \quad (4.13)$$

będący relatywnym cyklem w $C_n(K, \partial K) \subset C_n(W, \partial W)$. Jeśli wewnątrz $\text{int } W$ jest spójne, to klasa homologii sympleksyjnych $[c_K] \in H_n(K, \partial K)$ jest generatorem, a jej

obraz w $H_n(W, \partial W)$ nie zależy od wyboru kolejności w zbiorze wierzchołków triangulacji.

Dla każdego punktu $P \in \text{int } W$, obraz klasy $[c_K]$ w homomorfizmie indukowanym przez włożenie $(W, \partial W) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\})$ jest dodatnią orientacją w punkcie P .

Definicja 4.1.6. Klasę $[c_K] \in H_n(K, \partial K)$ i jej obraz w $H_n(W, \partial W)$ będziemy nazywać (dodatnią) klasą podstawową wielościanu W .

Pojęcie klasy podstawowej wiąże się z orientacją i definiowane jest ogólnie – dla zwartych rozmaitości z brzegiem – lub relatywnie, dla rozmaitości bez brzegu i dopełnienia zwartego podzbioru (por. [8]).

Dowód twierdzenia 4.1.6. Aby wykazać własność $\partial_n c_K \in C_{n-1}(\partial K)$, weźmy dowolny sympleks afiniczny $\tau = \langle v_1 \dots v_n \rangle \in S_{n-1}K$, którego nośnik $|\tau| = |\sigma| \cap |\sigma'|$ jest ścianą n -sympleksu $\sigma \in S_n K$. Przyjęty liniowy porządek umieszcza dodatkowo wierzchołek $w \in |\sigma| \setminus |\tau|$ pomiędzy wierzchołkami v_k, v_{k+1} , dla pewnego $k \leq n$, przy czym ewentualne skrajne wartości $k = 0, n$, oznaczają położenie w odpowiednio na początkowej lub ostatniej pozycji. Jeśli oznaczyć przez A_σ macierz opisującą σ , to, zgodnie z definicją brzegu $\partial_n(\text{deg}(\sigma)\sigma)$, współczynnik przy składniku τ jest znakiem iloczynu

$$\begin{aligned} (-1)^k \det A_\sigma &= \begin{cases} (-1)^k \det[\dots, \overrightarrow{v_1 v_k}, \overrightarrow{v_1 w}, \overrightarrow{v_1 v_{k+1}}, \dots], & \text{dla } k > 0 \\ + \det[\overrightarrow{w v_1}, \dots, \overrightarrow{w v_n}], & \text{dla } k = 0, \end{cases} \\ &= - \det[\overrightarrow{v_1 w}, \overrightarrow{v_1 v_2}, \dots, \overrightarrow{v_1 v_n}] \\ &= \langle \overrightarrow{w v_1}, n_\tau \rangle, \end{aligned}$$

gdzie n_τ jest wektorem normalnym do hiperpłaszczyzny zawierającej $|\tau|$, utworzonym z dopełnień algebraicznych pierwszej kolumny ostatniej z macierzy. Znak iloczynu skalarnego zależy od zwrotu wektora n_τ – iloczyn jest dodatni wtedy i tylko wtedy, gdy zaczepiony w punkcie ściany $|\tau|$ wektor n_τ jest *normalny zewnętrzny* w stosunku do $|\sigma|$. Jeśli $|\tau|$ jest wspólną ścianą pary sympleksów σ i σ' , to dodatkowo wierzchołki $w \in |\sigma|$ i $w' \in |\sigma'|$ leżą po przeciwnych stronach hiperpłaszczyzny zawierającej $|\tau|$, a więc w wyrażeniu $\partial_n(\text{deg}(\sigma)\sigma + \text{deg}(\sigma')\sigma')$ składniki zawierające τ wzajemnie się redukują.

Jeśli wewnątrz $\text{int } W$ jest zbiorem spójnym, to spójna jest również różnica $\text{int } W \setminus |K^{n-2}|$, a zatem dowolne dwa n -sympleksy w K można połączyć łańcuchem n -sympleksów mających kolejno wspólne $(n-1)$ -wymiarowe ściany. Oznacza to, że współczynniki dowolnego relatywnego cyklu $c = \sum c_\sigma \sigma \in C_n(K, \partial K)$ są jednoznacznie wyznaczone przez dowolny z nich, $c = \pm c_{\sigma_0} c_K$, dla dowolnie wybranego n -sympleksu $\sigma_0 \in S_n K$. Łańcuch c_K jest zatem generatorem grupy $C_n(K, \partial K) = H_n(K, \partial K) \cong H_n(W, \partial W)$. Niezależność otrzymanej klasy od porządku wierzchołków wynika z kolejnej dowodzonej własności – jednoznaczności obrazu klasy $[c_K]$ w $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\})$.

Rezygnując z założenia spójności wnętrza rozważmy teraz dowolny punkt $P \in \text{int } W$. Jeśli P należy do wnętrza n -wymiarowego sympleksu $|\sigma|$, to możemy sko-

rzystać z przemienności diagramu indukowanego przez inkluzje kompleksów łańcuchowych,

$$\begin{array}{ccc} H_n(K, \partial K) & \longrightarrow & H_n(K, K \setminus \{|\sigma|\}) \\ \iota_* \downarrow \cong & & \downarrow \\ H_n(W, \partial W) & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\}), \end{array}$$

który sprowadza obraz klasy $[c_K]$ do obrazu składnika $[\deg(\sigma)\sigma] \in H_n(K, K \setminus \{|\sigma|\})$. Teza wynika w tym przypadku ze wzoru (4.12). Jeśli punkt $P \in \text{int } W$ leży na brzegu jakiegoś n -sympleksu, to w pewnym otoczeniu ma punkty wewnętrzne sympleksu. Pozostając w homologiach singularnych, możemy skorzystać z ciągłości orientacji (wniosek 3.4.4) i sprowadzić tezę do udowodnionego wcześniej przypadku. \square

Wprowadzone wyżej pojęcie klasy podstawowej jako zgodne z orientacjami przestrzeni możemy w naturalny sposób rozszerzyć na kule B^n i ogólniejsze, wypukłe podzbiory $W \subset \mathbb{R}^n$ – korzystając z dowolnego homeomorfizmu $\Delta^n \cong W$ zachowującego orientację, czyli o stopniu równym $+1$.

Definicja 4.1.7. *Dla dowolnego zbioru wypukłego zwarteo $W \subset \mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu, dodatnią klasą podstawową w $H_n(W, \partial W)$ nazywamy generator przechodzący na dodatnią orientację ϑ_P^+ w izomorfizmie grup homologii indukowanym przez włożenia $(W, \partial W) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{P\})$, $P \in W$.*

Wyróżnioną klasę podstawową w grupie $H_n(B^n, S^{n-1})$ będziemy oznaczać ϑ_n , dla $n > 0$.

W poprzednim rozdziale widzieliśmy, że wiele istotnych faktów dotyczących kompleksów łańcuchowych i grup homologii wynika z ich naturalności – względem dowolnych ciągłych odwzorowań przestrzeni topologicznych. W przypadku grup łańcuchów i homologii symplecjajnych, odpowiednie pojęcia nie przenoszą się bezpośrednio z analogicznych operacji na obiektach singularnych, lecz wymagają odrębnych definicji i konstrukcji. Zmiana dotyczy np. pojęcia homomorfizmu łańcuchowego indukowanego przez odwzorowanie symplecjajalne.

Zauważmy najpierw, że dla dowolnych dwu g.k.s K i K' z ustalonym porządkiem wierzchołków w każdym z nich, odwzorowanie symplecjajalne $\phi: K \rightarrow K'$ przeprowadza afiniczne sympleksy singularne $S_n K$ w $S_n K'$,

$$S_n K \ni \langle v_0 \dots v_n \rangle \mapsto \langle \phi(v_0) \dots \phi(v_n) \rangle \in S_n K', \text{ dla } n > 0,$$

jeżeli jest *rosnące*, tzn. $v \prec w \Rightarrow \phi(v) \prec \phi(w)$. W tym przypadku homomorfizm indukowany $\phi_\# : C(K) \rightarrow C(K')$ jest ograniczeniem do $C(K)$ homomorfizmu $|\phi|_\# : C(|K|) \rightarrow C(|K'|)$ indukowanego przez odwzorowanie ciągłe $|\phi|$ – geometryczną realizację ϕ . Przypadek ogólny jest nieco bardziej skomplikowany.

Definicja 4.1.8. *Dla dowolnego odwzorowania symplecjajalnego $\phi: K \rightarrow K'$ geometrycznych kompleksów symplecjajalnych (z ustalonym porządkiem wierzchołków),*

homomorfizmem indukowanym $\phi_{\#}: C(K) \rightarrow C(K')$ nazywamy rodzinę homomorfizmów takich, że dla każdego naturalnego n ,

$$\phi_{\#}\langle v_0 \dots v_n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{gdy } \exists_{i < j} \phi(v_i) = \phi(v_j) \\ \text{sign}(\alpha)\langle w_{\alpha(0)} \dots w_{\alpha(n)} \rangle, & \text{gdy } \forall_{i < j} \phi(v_i) \neq \phi(v_j), \end{cases} \quad (4.14)$$

gdzie $w_i = \phi(v_i)$ dla $i \leq n$, oraz $w_{\alpha(0)} \prec \dots \prec w_{\alpha(n)}$.

Ćwiczenie 4.1.3. Sprawdzić, że znak $\text{sign}(\alpha)$ permutacji indeksów jest równy znakowi permutacji ciągu wierzchołków (w_0, \dots, w_n) .

Twierdzenie 4.1.7. Dla dowolnego odwzorowania sympleksyjnego $\phi: K \rightarrow K'$ geometrycznych kompleksów sympleksyjnych, homomorfizm indukowany $\phi_{\#}: C(K) \rightarrow C(K')$ jest odwzorowaniem łańcuchowym zgodnym z augmentacją. Przyporządkowanie

$$(\phi: K \rightarrow K') \rightsquigarrow (\phi_{\#}: C(K) \rightarrow C(K'))$$

jest funktorem, tzn. spełnia warunki

$$(\text{id}_K)_{\#} = \text{id}_{C(K)}$$

$$(\psi \circ \phi)_{\#} = \psi_{\#} \circ \phi_{\#}$$

dla dowolnych g.k.s K, K', K'' oraz dowolnych sympleksyjnych odwzorowań $\phi: K \rightarrow K'$ i $\psi: K' \rightarrow K''$.

Odwzorowanie sympleksyjne par $\phi: (K, L) \rightarrow (K', L')$ wyznacza (indukuje) odwzorowanie łańcuchowe $\phi_{\#}: C(K, L) \rightarrow C(K', L')$, $c + C_n(L) \mapsto \phi_{\#}(c) + C_n(L')$ dla $n \geq 0$, a więc także funktorialny homomorfizm grup homologii $\phi_{*}: H(K, L) \rightarrow H(K', L')$. Zależności pomiędzy homomorfizmami indukowanymi przez ϕ i $\phi|_L$ obrazuje następujący przemienny diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} \partial_* & \rightarrow & H_n(L) & \xrightarrow{i_*} & H_n(K) & \xrightarrow{j_*} & H_n(K, L) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(L) & \xrightarrow{i_*} & \dots \\ & & (\phi|_L)_* \downarrow & & \phi_* \downarrow & & \phi_* \downarrow & & (\phi|_L)_* \downarrow & & \\ \partial_* & \rightarrow & H_n(L') & \xrightarrow{i_*} & H_n(K') & \xrightarrow{j_*} & H_n(K', L') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(L') & \xrightarrow{i_*} & \dots \end{array} \quad (4.15)$$

Dowód. Zgodność z rozszerzeniem, $\tilde{\partial}_0 \circ \phi_{\#} = \tilde{\partial}_0$, jest oczywista; sprawdźmy łańcuchowość, czyli przemienność z operatorem brzegu w wymiarze $n > 0$. Zgodnie z definicją mamy kolejno

$$\begin{aligned} \partial_n \phi_{\#}\langle v_0 \dots v_n \rangle &= \sum_{i \leq n} (-1)^i \text{sign}(\alpha(0), \dots, \alpha(n)) \langle w_{\alpha(0)} \dots \widehat{w_{\alpha(i)}} \dots w_{\alpha(n)} \rangle \\ &= \sum_{i \leq n} \text{sign}(\alpha(i), \alpha(0), \dots, \widehat{\alpha(i)}, \dots, \alpha(n)) \langle w_{\alpha(0)} \dots \widehat{w_{\alpha(i)}} \dots w_{\alpha(n)} \rangle \\ &= \sum_{i \leq n} (-1)^{\alpha(i)} \text{sign}(\alpha(0), \dots, \widehat{\alpha(i)}, \dots, \alpha(n)) \langle w_{\alpha(0)} \dots \widehat{w_{\alpha(i)}} \dots w_{\alpha(n)} \rangle \\ &= \sum_{j \leq n} (-1)^j \text{sign}(\alpha(0), \dots, \widehat{j}, \dots, \alpha(n)) \langle w_{\alpha(0)} \dots \widehat{w_j} \dots w_{\alpha(n)} \rangle \\ &= \sum_{j \leq n} (-1)^j \phi_{\#}\langle v_0 \dots \widehat{v_j} \dots v_n \rangle = \phi_{\#} \partial_n \langle v_0 \dots v_n \rangle, \end{aligned}$$

jeżeli ϕ jest różnowartościowe na wierzchołkach przekształcanego sympleksu. Jeśli natomiast $\phi(v_{j_1}) = \phi(v_{j_2})$, dla pewnych dwu indeksów $j_1 < j_2$, to po odrzuceniu składników równych 0 z definicji i po uporządkowaniu $w_i := \phi(v_i)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \phi_{\#} \partial_n \langle v_0 \dots v_n \rangle &= \sum_{i=j_1, j_2} (-1)^i \phi_{\#} \langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_n \rangle \\ &= ((-1)^{j_1} \text{sign}(w_0, \dots, w_{j_1}, \dots, \widehat{w}_{j_2}, \dots, w_n) \\ &\quad + (-1)^{j_2} \text{sign}(w_0, \dots, \widehat{w}_{j_1}, \dots, w_{j_2}, \dots, w_n)) \langle w_{\alpha(0)} \dots w_{\alpha(n-1)} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jeśli powtarzają się więcej niż 2 wyrazy w ciągu $(\phi(v_i); i \leq n)$, wszystkie składniki w rozważanej sumie znikają.

Dowód funktorialności i przemienności diagramu (4.15) pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie. \square

Ćwiczenie 4.1.4. Wykazać równość $(\psi \circ \phi)_{\#} = \psi_{\#} \circ \phi_{\#}$.

Aby przenieść na symplecjalne kompleksy łańcuchowe homomorfizm podziału barycentrycznego (3.3.2), zacznijmy od rozszerzenia ustalonego liniowego porządku w g.k.s. K . Rozszerzając definicję 2.3.5 (ii) przyjmijmy w $\text{sd}K$ porządek korzystający z porządku leksykograficznego afinicznych sympleksów singularnych,

$$w_{\sigma} \prec w_{\tau}, \quad \text{gdy} \begin{cases} \dim \sigma > \dim \tau, & \text{albo} \\ \langle \sigma \rangle \prec \langle \tau \rangle, & \text{jeśli } \dim \sigma = \dim \tau \end{cases} \quad (4.16)$$

dla środków sympleksów $\sigma, \tau \in K$.

Twierdzenie 4.1.8. Dla dowolnego geometrycznego kompleksu symplecjального K , homomorfizm podziału barycentrycznego $\text{sd}: C(|K|) \rightarrow C(|K|)$ przeprowadza łańcuchy symplecjalne kompleksu $C(K)$ w łańcuchy symplecjalne kompleksu $C(\text{sd}K)$, co prowadzi do przemiennego diagramu

$$\begin{array}{ccc} C(K) & \xrightarrow{\subset} & C(|K|) \\ \text{sd} \downarrow & & \downarrow \text{sd} \\ C(\text{sd}K) & \xrightarrow{\subset} & C(|K|). \end{array} \quad (4.17)$$

Każde odwzorowanie symplecjalne $\phi: \text{sd}^m K \rightarrow K$ będące symplecjalną aproksymacją identity $\text{id}_{|K|}$ indukuje homomorfizm lewostronnie odwrotny do sd^m , tzn.

$$\phi_{\#} \circ \text{sd}^m = \text{id}_{C(K)}, \quad (4.18)$$

dla $m > 0$.

Dowód. Korzystając z indukcyjnej definicji operatora podziału barycentrycznego sformułowanej w twierdzeniu 3.3.5 załóżmy, że dla $n > 0$ mamy już sprawdzoną inkluzję $\text{sd}_{n-1}(t_{n-1}) \in C_{n-1}(\text{sd}^1 \Delta^{n-1})$. Naturalność operatora sd implikuje własność

$$\text{sd}_{n-1}(\partial_n t_n) = \sum_{i \leq n} (-1)^i \varepsilon_{i\#}(\text{sd}_{n-1}(t_{n-1})) \in C_{n-1}(\text{sd}^1 \partial \Delta^n),$$

gdzie każde $\varepsilon_i: \Delta^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n, i \leq n$, jest także odwzorowaniem symplecjajalnym względem triangulacji $\text{sd}^1\Delta^{n-1}$ i $\text{sd}^1\partial\Delta^n$ (por. twierdzenie 2.3.4) oraz zachowuje wyróżnioną kolejność wierzchołków. Pozostaje zauważyć, że zgodnie z (3.35) operator stożkowy B_n^* przeprowadza $C_{n-1}(\text{sd}^1\partial\Delta^n)$ w $C_n(\text{sd}^1\Delta^n)$, jeśli tylko B_n jest środkiem sympleksu Δ^n . Tym samym wykazaliśmy inkluzję $\text{sd}_n(\iota_n) \in C_n(\text{sd}^1\Delta^n)$, a dla dowolnego afinicznego sympleksu $\sigma \in S_n K$,

$$\text{sd}_n(\sigma) = \sigma_{\#}(\text{sd}_n(\iota_n)) \in C_n(\text{sd} K),$$

co kończy dowód pierwszej części twierdzenia. Korzystamy tu z faktu, że σ jest bijekcją zachowującą porządek wierzchołków i wymiary sympleksów tworzących $\text{sd}^1\Delta^n$.

Jako homeomorfizm, każdy afiniczny sympleks $\sigma \in S_n K$ przeprowadza dowolnie drobny podział barycentryczny $\text{sd}^m\Delta^n$ na analogiczny podział $\text{sd}^m|\sigma|$ sympleksu geometrycznego $|\sigma| := \sigma(\Delta^n)$, w ten sposób, że podgrupy $C_k(\text{sd}^m|\sigma|) \subset C_k(\text{sd}^m K)$ są obrazami $\sigma_{\#}C_k(\text{sd}^m\Delta^n)$, dla $k \leq n$. Z drugiej strony, aproksymacja symplecjajalna identyzacji $\text{id}_{|K|}$ jest także aproksymacją każdej z identyzacji $\text{id}_{|\sigma|}$, dla $\sigma \in S_n K, n \geq 0$. Obserwacje te pozwalają prowadzić dowód tożsamości (4.18) odrębnie dla każdego sympleksu, dla złożenia

$$C(\text{sd}^0|\sigma|) \xrightarrow{\text{sd}^m} C(\text{sd}^m|\sigma|) \xrightarrow{\phi_{\#}} C(\text{sd}^0|\sigma|).$$

W wymiarze 0, dla $\sigma \in S_0 K$, równość (4.18) jest oczywista. Dla dowodu indukcyjnego założymy zatem, że (4.18) zachodzi dla sympleksów wymiaru mniejszego niż $n > 0$ i rozważmy dowolny afiniczny sympleks singularny $\sigma \in S_n K$. Mamy kolejno

$$\begin{aligned} \partial_n \phi_{\#} \text{sd}_n^m(\sigma) &= \phi_{\#} \text{sd}_{n-1}^m(\partial_n \sigma) \\ &= \sum_{i \leq n} (-1)^i \phi_{\#} \text{sd}_{n-1}^m(\sigma \circ \varepsilon_i) \\ &= \sum_{i \leq n} (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i = \partial_n \sigma, \end{aligned}$$

gdzie przedostatnia równość pochodzi z założenia indukcyjnego. Ponieważ grupa homologii $H_n(|\sigma|)$ jest trywialna, zgodność brzegów oznacza równość

$$\phi_{\#} \text{sd}_n^m(\sigma) = \sigma.$$

Indukcja kończy dowód. □

Ćwiczenie 4.1.5. Sprawdzić, że odwzorowanie ϕ , które każdemu wierzchołkowi w_{σ} kompleksu $\text{sd}^1 K$ przypisuje pierwszy (wg przyjętego porządku) wierzchołek sympleksu $\sigma \in K$, jest odwzorowaniem łańcuchowym $\text{sd}^1 K \rightarrow K$ – aproksymacją identyzacji. Skonstruować homotopię łańcuchową $D_K: \text{sd}^1 \circ \phi_{\#} \simeq \text{id}_{C(\text{sd}^1 K)}$.

Wniosek 4.1.9 (Lemat Spernera). *Niech będzie dany dowolnie drobny podział barycentryczny $K = \text{sd}^m \sigma, m > 0$, sympleksu geometrycznego $\sigma = (v_0 \dots v_n)$ i niech odwzorowanie v przypisuje każdemu wierzchołkowi $b \in K_0$ liczbę całkowitą $0, 1, \dots, n$ spełniającą warunek*

$$b \in (v_{i_0} \dots v_{i_k}) \implies v(b) \in \{i_0, \dots, i_k\}.$$

Istnieje wówczas co najmniej jeden n -sympleks $\tau \in K$, na którego wierzchołkach odwzorowanie v przyjmuje wszystkie wartości od 0 do n . \square

Lemat Spenera jest zazwyczaj wykorzystywany do alternatywnego, bardziej bezpośredniego niż w twierdzeniu 3.4.7 dowodu twierdzenia Brouwera o punkcie stałym.

Ćwiczenie 4.1.6. Dla funkcji ciągłej $f: \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ rozważyc zbiory

$$U_i = \{p \in \Delta^n; \lambda_i(p) < \lambda_i(f(p))\},$$

opisane we współrzędnych barycentrycznych, dla $i = 0, 1, \dots, n$. Jeśli f nie ma punktu stałego, to rodzina $\{U_i\}_{i \leq n}$ jest pokryciem sympleksu. Wykazać, że takie przypuszczenie prowadzi do sprzeczności. Wskazówka: zauważyć, że żaden punkt ściany $\tau = (E_{i_0} \dots E_{i_k})$ nie może należeć do wszystkich zbiorów U_{i_0}, \dots, U_{i_k} , a więc każdy wierzchołek podziału barycentrycznego $\text{sd}^m \Delta^n$ leżący w τ jest poza pewnym U_{i_j} .

4.2 Twierdzenie o izomorfizmie

Przygotowując się do dowodu homotopijnej równoważności kompleksów łańcuchowych $C(|K|) \simeq C(K)$ i ogólniej $C(|K|, |L|) \simeq C(K, L)$ dla dowolnej pary kompleksów symplecjalnych (K, L) , wykorzystamy własność (2.21) mówiącą, że nerw $\mathcal{N}\mathfrak{U}_K$ pokrycia gwiazdźistego \mathfrak{U}_K – zdefiniowany w przykładzie 2.2.5 dla dowolnego pokrycia otwartego \mathfrak{U} – jest izomorficznym z K abstrakcyjnym kompleksem symplecjalnym. Ujmując w ramy symplecjalne kombinatoryczny aspekt pokrycia \mathfrak{U} , czyli konfiguracje wszystkich niepustych przekrojów zbiorów z \mathfrak{U} , nerw $\mathcal{N}\mathfrak{U}$ pomija jednak wszelkie topologiczne własności samych przekrojów. Wady tej jest pozbawiony *topologiczny nerw* $\mathfrak{N}\mathfrak{U}$ pokrycia \mathfrak{U} , zdefiniowany jako rodzina przestrzeni topologicznych

$$\mathfrak{N}_p \mathfrak{U} = \coprod_{\substack{\tau \subset \mathfrak{U} \\ \#\tau = p+1}} \bigcap_{V \in \tau} V \quad (4.19)$$

dla $p \leq 0$, wraz z *operatorami symplecjalnymi* (tu: włożeniami) $\varepsilon_i: \mathfrak{N}_p \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{N}_{p-1} \mathfrak{U}$, dla $i = 0, \dots, p$, $p > 0$. Zauważmy, że suma rozłączna występująca w (4.19) jest wzięta dokładnie po p -sympleksach kompleksu $\mathcal{N}\mathfrak{U}$. Definicja operatorów symplecjalnych wymaga ustalenia liniowego porządku w \mathfrak{U} , czyli zgodnego z konwencją przyjętą w niniejszym rozdziale porządku w zbiorze wierzchołków nerwu $\mathcal{N}\mathfrak{U}$. Możemy wówczas przyjąć

$$\varepsilon_i: \{\tau\} \times (V_0 \cap \dots \cap V_p) \ni (\tau, x) \mapsto (\tau_i, x) \in \{\tau_i\} \times (V_0 \cap \dots \cap \widehat{V}_i \cap \dots \cap V_p) \quad (4.20)$$

dla $\tau = \{V_0, \dots, V_p\} \in \mathcal{N}\mathfrak{U}$, $V_0 < \dots < V_p$, gdzie $\tau_i = \tau \setminus \{V_i\}$ jest i -tą ścianą, $i \leq p$.

Uwaga 4.2.1. Topologiczny nerw pokrycia, $\mathfrak{N}\mathfrak{U} = (\{\mathfrak{N}_p \mathfrak{U}\}, \{\varepsilon_i\})$, jest przykładem obiektu semi-symplecjalnego, w tym przypadku semi-symplecjalnej przestrzeni

topologicznej (por. [5]). Pomijając ogólne aspekty tego działu topologii algebraicznej możemy zauważyć, że podobne obiekty pojawiają się w naturalny sposób przy opisie np. rozmaitości lub wiązek, gdy rozważana przestrzeń otrzymuje właściwą strukturę na pokryciu otwartym, wyróżnionym poprzez rodzinę map. Poprawność definicji wymaga zgodności map na przekrojach zbiorów pokrycia.

Dla efektywnego porównania kompleksów łańcuchowych: singularnego $C(|K|)$ i symplecjajalnego $C(K) = C(\mathcal{N}\mathfrak{U}_K)$ wykorzystamy *podwójny* kompleks łańcuchowy

$$C_{pq} := C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K) \quad \text{dla } p, q \geq 0, \quad (4.21)$$

czyli kompleks łańcuchów singularnych na zbiorach topologicznego nerwu $\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K$ pokrycia gwiazdzistego przestrzeni $|K|$. Dla uproszczenia notacji przyjmujemy także rozszerzoną definicję $C_{-1,q} := C_q(\mathfrak{U}_K)$, $C_{p,-1} := C_p(K)$. Drugie z tych oznaczeń będzie uzasadnione za chwilę.

Kompleks podwójny ma 2 niezależne (przemienne) operatory brzegu,

$$\delta_p = \sum (-1)^i \varepsilon_{i\#} : C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K) \rightarrow C_q(\mathfrak{N}_{p-1}\mathfrak{U}_K) \quad \text{i} \quad \partial_q : C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K) \rightarrow C_{q-1}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K),$$

co obrazuje poniższy przemienny diagram.

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K) & \xrightarrow{\delta_p} & C_q(\mathfrak{N}_{p-1}\mathfrak{U}_K) & \dots & C_q(\mathfrak{N}_0\mathfrak{U}_K) & \xrightarrow{\bar{\delta}_0} & C_q(\mathfrak{U}_K) \\ & \partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \partial_q \downarrow \\ \dots & C_{q-1}(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K) & \xrightarrow{\delta_p} & C_{q-1}(\mathfrak{N}_{p-1}\mathfrak{U}_K) & \dots & C_{q-1}(\mathfrak{N}_0\mathfrak{U}_K) & \xrightarrow{\bar{\delta}_0} & C_{q-1}(\mathfrak{U}_K) \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & C_0(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K) & \xrightarrow{\delta_p} & C_0(\mathfrak{N}_{p-1}\mathfrak{U}_K) & \dots & C_0(\mathfrak{N}_0\mathfrak{U}_K) & \xrightarrow{\bar{\delta}_0} & C_0(\mathfrak{U}_K) \\ & \bar{\delta}_0 \downarrow & & \bar{\delta}_0 \downarrow & & \bar{\delta}_0 \downarrow & & \\ \dots & C_p(K) & \xrightarrow{\partial_p} & C_{p-1}(K) & \dots & C_0(K) & & \end{array} \quad (4.22)$$

W wymiarze 0 przyjmujemy, że $\bar{\delta}_0$ jest połączeniem inkluzji $C_p(\text{st}v) \subset C_p(\mathfrak{U})$ dla $v \in K_0$, natomiast

$$\bar{\delta}_0 = \bigoplus \tilde{\delta}_0 : C_0(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K) \longrightarrow \bigoplus_{\tau \in S_p K} \mathbb{Z} = C_p(K)$$

jest na każdej składowej spójności zbioru $\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K$ definiowane odrębnie jako rozszerzony operator brzegu.

Niech $C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K)$ oznacza kompleks łańcuchowy utworzony z kompleksu podwójnego $\{C_{p,q}\}_{p,q \geq 0}$ w ten sposób, że

$$C_n(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K) = \bigoplus_{p+q=n} C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K), \quad \text{dla } n \geq 0, \quad (4.23)$$

natomiast operatorem brzegu d_n jest suma naprzemienna

$$d_n|_{C_{p,q}} = \delta_p + (-1)^p \partial_q, \quad \text{dla } p+q = n, n > 0, \quad (4.24)$$

przy czym dla skrajnych par indeksów $(n, 0)$ i $(0, n)$ przyjmujemy $\delta_0 = 0, \partial_0 = 0$.

Możemy teraz sformułować i udowodnić zapowiadane twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.1 (O izomorfizmie). *Dla dowolnego (geometrycznego) kompleksu symplecjialnego K , operatory brzegowe $\bar{\delta}_0, \bar{\partial}_0$ w diagramie (4.22) wyznaczają odwzorowania łańcuchowe*

$$\alpha: C(\mathfrak{M}_K) \rightarrow C(\mathfrak{M}_K) \quad \text{oraz} \quad \beta: C(\mathfrak{M}_K) \rightarrow C(K), \quad (4.25)$$

$$\alpha|_{C_{p,q}} = \begin{cases} \bar{\delta}_0 & \text{dla } p = 0 \\ 0 & \text{gdym } p > 0, \end{cases} \quad \beta|_{C_{p,q}} = \begin{cases} \bar{\partial}_0 & \text{dla } q = 0 \\ 0 & \text{gdym } q > 0, \end{cases} \quad (4.26)$$

będące homotopijnymi równoważnościami kompleksów łańcuchowych. Homomorfizmy α i β są naturalne w tym sensie, że dla dowolnego g.k.s. K' i dowolnej pary (f, ϕ) złożonej z funkcji ciągłej $f: |K| \rightarrow |K'|$ zgodnej ze strukturą symplecjialną kompleksów i z odwzorowania symplecjialnego $\phi: K \rightarrow K'$ będącego aproksymacją symplecjialną funkcji f , istnieje odwzorowanie łańcuchowe $(f, \phi)_\#: C(\mathfrak{M}_K) \rightarrow C(\mathfrak{M}_{K'})$, dla którego następujący diagram

$$\begin{array}{ccccc} C(\mathfrak{M}_K) & \xleftarrow{\alpha} & C(\mathfrak{M}_K) & \xrightarrow{\beta} & C(K) \\ f_\# \downarrow & & (f, \phi)_\# \downarrow & & \phi_\# \downarrow \\ C(\mathfrak{M}_{K'}) & \xleftarrow{\alpha} & C(\mathfrak{M}_{K'}) & \xrightarrow{\beta} & C(K') \end{array} \quad (4.27)$$

jest przemienny.

Ponadto, dla $\beta: C(\mathfrak{M}_K) \rightarrow C(K)$ istnieje homotopijnie odwrotne odwzorowanie łańcuchowe $P: C(K) \rightarrow C(\mathfrak{M}_K)$ takie, że złożenie $\alpha \circ P: C(K) \rightarrow C(\mathfrak{M}_K) \hookrightarrow C(|K|)$ jest homomorfizmem podziału barycentrycznego $\text{sd} = \{\text{sd}_n\}$.

Dla obniżenia stopnia komplikacji, powyższe twierdzenie zostało tu sformułowane w wariacie bezwzględny – dla pojedynczych kompleksów symplecjialnych. Wariant relatywny oraz odpowiednie wzmocnienie dowodu (konstrukcji) opisane są pod koniec niniejszego podrozdziału.

Ćwiczenie 4.2.1. Sprawdzić, że wzory (4.26) definiują homomorfizmy łańcuchowe (4.25).

Dowód homotopijnej równoważności przebiega niezależnie dla każdego z homomorfizmów α i β i wynika z obserwacji, że – z wyjątkiem ostatnich – zarówno wiersze, jak i kolumny diagramu (4.22) mają trywialne grupy homologii. W kolejnym rozdziale skryptu będziemy szerzej wykorzystywać własności i zastosowania takich ciągów homomorfizmów grup, odwołując się przy tym do powszechnie przyjętej dla nich nazwy – *ciągów dokładnych*.

Skorzystamy z faktu, że twierdzenie 2.2.2 ustala wzajemnie jednoznaczność odpowiedniości między składowymi zbioru $\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}_K$ a afinicznymi sympleksami singularnymi $\tau \in S_p K$. Dokładniej, wprowadzając oznaczenie

$$\text{st } \tau := \text{st } \tau(E_0) \cap \cdots \cap \text{st } \tau(E_p), \quad \text{dla } \tau \in S_p K, p \geq 0,$$

dla gwiazdy sympleksu, uzyskujemy równoważny opis $\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}_K = \coprod_{\tau \in S_p K} \text{st } \tau$, dla wszystkich p . Każda z grup $C_{p,q}$, $p, q \geq 0$, jest zatem izomorficzna z podwójną sumą prostą

$$C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}_K) \cong \bigoplus_{\tau \in S_p K} \bigoplus_{\sigma \in S_q(\text{st } \tau)} \mathbb{Z}.$$

Ponieważ podobne pary (τ, σ) odnajdziemy wśród wolnych generatorów produktu $C_p(K) \otimes C_q(\mathfrak{M}_K)$, będziemy – dla uproszczenia oznaczeń – utożsamiać grupy $C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{M}_K)$ z podgrupami

$$\begin{aligned} C_{p,q} &\subset C_p(K) \otimes C_q(\mathfrak{M}_K) \\ C_{p,q} &= \text{span}\{\tau \otimes \sigma; \tau \in S_p K, \sigma \in S_q(\text{st } \tau)\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

dla $p, q \geq 0$. Jest to tym bardziej uzasadnione, że zgodne ze zdefiniowanymi wcześniej operatorami brzegu, które w nowym opisie przyjmują postać $d_n|_{C_{p,q}} = \delta_p + \partial'_q$, gdzie

$$\delta_p(\tau \otimes \sigma) = (\partial_p \tau) \otimes \sigma, \quad \partial'_q(\tau \otimes \sigma) = (-1)^p \tau \otimes \partial_q \sigma, \quad (4.29)$$

dla $p + q = n$, $n > 0$. Równie prosty jest teraz opis operatorów dołączonych w ostatniej kolumnie i ostatnim wierszu diagramu (4.22),

$$\bar{\delta}_0(\tau \otimes \sigma) = \sigma, \quad \bar{\partial}_0(\tau \otimes \sigma) = \tau, \quad (4.30)$$

w wymiarze odpowiednio $(0, n)$ i $(n, 0)$.

Ćwiczenie 4.2.2. Sprawdzić poprawność wzorów (4.29).

Lemat 4.2.2. Dla każdego sympleksu singularnego $\sigma \in S_q \mathfrak{M}_K$, $q \geq 0$, niech $v^\sigma \in K_0$ oznacza wierzchołek taki, że $\sigma \in S_q(\text{st } v^\sigma)$. Dla $q \geq 0$ rodzina homomorfizmów $s_p: C_{p,q} \rightarrow C_{p+1,q}$, $p \geq -1$, zdefiniowana poniżej

$$s_{-1}(\sigma) = \langle v^\sigma \rangle \otimes \sigma, \quad \text{dla } \sigma \in S_q(\mathfrak{M}_K) \quad (4.31)$$

oraz dla $\tau = \langle v_0 \dots v_p \rangle \in C_p(K)$ i $\sigma \in S_q(\text{st } \tau)$, $p, q \geq 0$,

$$s_p(\tau \otimes \sigma) = \begin{cases} (-1)^{i_\sigma} \langle v_0 \dots v_{i_\sigma-1} v^\sigma v_{i_\sigma} \dots v_p \rangle \otimes \sigma, & \text{gdy } v_{i_\sigma-1} \prec v^\sigma \prec v_{i_\sigma} \\ 0, & \text{gdy } v^\sigma \in \{v_0, \dots, v_p\}, \end{cases} \quad (4.32)$$

jest homotopią łańcuchową pomiędzy identycznością na kompleksie $\{C_{p,q}\}_{p \geq -1}$ a homomorfizmem zerowym. Innymi słowy, dla każdego $q \geq 0$, zachodzą równości

$$\begin{aligned} \bar{\delta}_0 \circ s_{-1} &= \text{id}, & \text{na } C_{-1,q} \\ \delta_1 \circ s_0 &= \text{id} - s_{-1} \circ \bar{\delta}_0, & \text{na } C_{0,q} \\ \delta_{p+1} \circ s_p + s_{p-1} \circ \delta_p &= \text{id}, & \text{na } C_{p,q}, p > 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dowód. Pierwsze dwie równości (4.33) pozostawiamy jako ćwiczenie. Niech zatem $p > 0$. W przypadku $\tau \otimes \sigma \in C_{p,q}$ takich, że $\tau = \langle v_0 \dots v_p \rangle$ i $v_{i_\sigma-1} \prec v^\sigma \prec v_{i_\sigma}$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \delta_{p+1}s_p(\tau \otimes \sigma) &= \sum_{i < i_\sigma} (-1)^{i_\sigma+i} \langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_{i_\sigma-1} v^\sigma v_{i_\sigma} \dots v_p \rangle \otimes \sigma + \tau \otimes \sigma \\ &\quad + \sum_{i \geq i_\sigma} (-1)^{i_\sigma+i+1} \langle v_0 \dots v_{i_\sigma-1} v^\sigma v_{i_\sigma} \dots \widehat{v}_i \dots v_p \rangle \otimes \sigma \\ &= \tau \otimes \sigma - s_{p-1} \left(\sum_{i \leq p} (-1)^i \langle v_0 \dots \widehat{v}_i \dots v_p \rangle \otimes \sigma \right). \end{aligned}$$

Jeśli natomiast $v^\sigma = v_{i_\sigma}$, to mamy $\delta_{p+1}s_p(\tau \otimes \sigma) = 0$, natomiast

$$s_{p-1}\delta_p(\tau \otimes \sigma) = s_{p-1}((-1)^{i_\sigma} \langle v_0 \dots \widehat{v}_{i_\sigma} \dots v_p \rangle \otimes \sigma) = \tau \otimes \sigma.$$

□

Ćwiczenie 4.2.3. Sprawdzić, że homomorfizmy s_p są poprawnie zdefiniowane. Wykazać pozostałe dwie tożsamości w (4.33).

Analogiczną do opisanej powyżej homotopię łańcuchową dla kolumn diagramu (4.22) już właściwie znamy – grupy homologii przestrzeni ściągających były wyliczone w przykładzie 3.1.2, a homotopię łańcuchową dla zbiorów wypukłych (ogólnie – gwiaździstych) tworzą operatory stożkowe postaci $B*$. Ze względu na postulowaną w twierdzeniu 4.2.1 jawną postać homomorfizmu $C(K) \rightarrow C(\mathfrak{U}_K)$ przyjmujemy definicję nieco zmodyfikowaną.

Dla dowolnego afinicznego sympleksu $\tau \in C_p K$, zbiór $\text{st } \tau$ jest gwiaździsty względem środka B_τ sympleksu $\tau(\Delta^p)$. Rozważmy *prawostronny* operator stożkowy

$$C_q(\text{st } \tau) \ni \sigma \mapsto \sigma * B_\tau \in C_{q+1}(\text{st } \tau)$$

taki, że

$$\sigma * B_\tau(\lambda_0, \dots, \lambda_{q+1}) = (1 - \lambda_{q+1})\sigma\left(\frac{\lambda_0}{1 - \lambda_{q+1}}, \dots, \frac{\lambda_q}{1 - \lambda_{q+1}}\right) + \lambda_{q+1}B_\tau.$$

Lemat 4.2.3. Dla $p \geq 0$ rodzina homomorfizmów $z_q: C_{p,q} \rightarrow C_{p,q+1}$, $q \geq -1$, zdefiniowana poniżej

$$z_{-1}(\tau) = \tau \otimes \langle B_\tau \rangle, \quad \text{dla } \tau \in S_p K \quad (4.34)$$

oraz

$$z_q(\tau \otimes \sigma) = (-1)^{q+1} \tau \otimes (\sigma * B_\tau) \quad (4.35)$$

dla $\tau \in C_p(K)$ i $\sigma \in S_q(\text{st } \tau)$, $p, q \geq 0$, jest homotopią łańcuchową pomiędzy identycznością na kompleksie $\{C_{p,q}\}_{q \geq -1}$ a homomorfizmem zerowym. Dla każdego $p \geq 0$, zachodzą równości

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_0 \circ z_{-1} &= \text{id}, & \text{na } C_{p,-1} \\ \partial_1 \circ z_0 &= \text{id} - z_{-1} \circ \bar{\partial}_0, & \text{na } C_{p,0} \\ \partial_{q+1} \circ z_q + z_{q-1} \circ \partial_q &= \text{id}, & \text{na } C_{p,q}, q > 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Dla budowy homomorfizmu łańcuchowego $C(K) \rightarrow C(\mathfrak{M}_K)$, homotopijnie odwrotnego do β , potrzebujemy jeszcze kilku własności diagramu (4.22) wynikających z ujętej w lemacie 4.2.3 dokładności kompleksów stanowiących kolumny. Zaczniemy od rozważenia dowolnego cyklu $c_n \in C_n(K)$. Pierwsza z tożsamości (4.36) oznacza, że $c_n = \bar{\partial}_0 c_{n,0}$ jest obrazem łańcucha $c_{n,0} = z_{-1}c_n \in C_{n,0}$, co ilustruje lewy dolny narożnik poniższego diagramu.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & c_{n-2,2} = z_1 \delta c_{n-1,1} \dots \\
 & & & & \downarrow z_1 \uparrow \partial_2 \\
 & & & & \delta c_{n-1,1} \dots \\
 & & c_{n-1,1} = z_0 \delta c_{n,0} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & \delta c_{n-1,1} \dots \\
 & & \downarrow z_0 \uparrow \partial_1 & & \downarrow \partial_1 \\
 c_{n,0} = z_{-1}c_n & \xrightarrow{\delta_n} & \delta c_{n,0} & \xrightarrow{\delta_{n-1}} & 0 \\
 \downarrow z_{-1} \uparrow \bar{\partial}_0 & & \downarrow \bar{\partial}_0 & & \\
 c_n & \xrightarrow{\partial_n} & 0 & &
 \end{array} \tag{4.37}$$

Wprawdzie $c_{n,0}$ nie musi być δ_n -cyklem, ale obraz $\delta_n c_{n,0} \in C_{n-1,0}$ jest $\bar{\partial}_0$ -cyklem, a więc także ∂_1 -brzegiem. Druga z tożsamości (4.36) daje równość $\delta_n c_{n,0} = \partial_1 c_{n-1,1}$, dla odpowiednio zdefiniowanego łańcucha $c_{n-1,1} \in C_{n-1,1}$. Po właściwym dobraniu znaków otrzymujemy

$$d_n(c_{n,0} + (-1)^n c_{n-1,1}) = (-1)^n \delta_{n-1} c_{n-1,1} \in C_{n-2,1}.$$

Powyższy schemat możemy powtarzać – uzyskany wyżej δ_{n-1} -brzeg okazuje się być ∂_1 -cyklem, a więc $\delta_{n-1} c_{n-1,1} = \partial_2 c_{n-2,2}$ dla odpowiednio zdefiniowanego łańcucha $c_{n-2,2} \in C_{n-2,2}$, itd. Efektem końcowym takiej „wędrowki po diagramie” jest ciąg łańcuchów $c_{n,0}, c_{n-1,1}, \dots, c_{0,n}$ taki, że suma

$$c = c_{n,0} + (-1)^n c_{n-1,1} + \dots \pm c_{0,n} \in C_n(\mathfrak{M}_K)$$

jest d_n -cyklem i przy tym $\beta(c) = c_n$.

Lemat 4.2.4. *Niech $\Lambda: C_{p,q} \rightarrow C_{p-1,q+1}$, dla $p > 0, q \geq 0$, oraz $\ell_{p,q}: C_{p,q} \rightarrow C_n(\mathfrak{M}_K)$, dla $n = p + q, p, q \geq 0$, będą określone, jak następuje:*

$$\Lambda_{c_{p,q}} = (-1)^p z_q \delta_p c_{p,q} \in C_{p-1,q+1}, \tag{4.38}$$

$$\ell_{p,q} c_{p,q} = c_{p,q} + \Lambda_{c_{p,q}} + \dots + \Lambda^p c_{p,q} \in C_{p,q} \oplus C_{p-1,q+1} \oplus \dots \oplus C_{0,n}, \tag{4.39}$$

dla $c_{p,q} \in C_{p,q}$. Zachodzą następujące tożsamości

$$d_n \circ \ell_{p,q} = \ell_{p,q-1} \circ \partial'_q, \quad \text{na } C_{p,q}, \text{ dla } n > p \geq 0, q > 0, \tag{4.40}$$

$$d_n \circ \ell_{n,0} z_{-1} = \ell_{n-1,0} z_{-1} \circ \partial_n, \quad \text{na } C_n(K), \text{ dla } n > 0. \tag{4.41}$$

Dowód. Ponieważ $\ell_{0,n} = \text{id}$, tożsamość (4.40) jest w tym przypadku oczywista. Dla dowodu indukcyjnego (względem p) założmy zatem, że równość (4.40) jest prawdziwa dla pary indeksów $(p-1, q+1)$. Korzystamy przy tym z zależności $\ell_{p,q} = \text{id} + \ell_{p-1,q+1} \circ \Lambda$, $\ell_{p-1,q} \circ \delta_p = \delta_p$, będących bezpośrednią konsekwencją definicji (4.38–4.39). Jeśli $q > 0$, to dla $c_{p,q} \in C_{p,q}$ otrzymujemy kolejno

$$\begin{aligned} d_n \ell_{p,q} c_{p,q} &= \partial'_q c_{p,q} + \delta_p c_{p,q} + \ell_{p-1,q} \partial'_{q+1} (-1)^p z_q \delta_p c_{p,q} \\ &= \partial'_q c_{p,q} + \delta_p c_{p,q} - \ell_{p-1,q} (\text{id} - z_{q-1} \partial_q) \delta_p c_{p,q} \\ &= \partial'_q c_{p,q} + \ell_{p-1,q} z_{q-1} \delta_p \partial_q c_{p,q} \\ &= (\text{id} + \ell_{p-1,q} \circ \Lambda) \partial'_q c_{p,q} = \ell_{p,q-1} \partial'_q c_{p,q}. \end{aligned}$$

Jeżeli natomiast $q = 0$, tzn. $p = n$, to dla $c_{n,0} = z_{-1} c_n$, $c_n \in C_n(K)$, analogiczne przekształcenia dają

$$\begin{aligned} d_n \ell_{n,0} z_{-1} c_n &= \delta_n c_{n,0} + \ell_{n-1,0} \partial'_1 (-1)^n z_0 \delta_n c_{n,0} \\ &= \delta_n c_{n,0} - \ell_{n-1,0} (\text{id} - z_{-1} \bar{\partial}_0) \delta_n c_{n,0} \\ &= \ell_{n-1,0} z_{-1} \partial_n \bar{\partial}_0 c_{n,0} \\ &= \ell_{n-1,0} z_{-1} \partial_n c_n, \end{aligned}$$

co kończy dowód lematu. \square

Wniosek 4.2.5. *Ciąg homomorfizmów $P_n = \ell_{n,0} z_{-1}$, $n \geq 0$, jest odwzorowaniem łańcuchowym $P: C(K) \rightarrow C(\mathfrak{M}_K)$ homotopijnie odwrotnym do β określonego przez (4.25–4.26).*

Dowód. Łańcuchowość homomorfizmu P została wykazana w lemacie. Ponieważ złożenie $\beta \circ P$ jest identycznością na $C(K)$, pozostaje wskazać homotopię łańcuchową

$$D: \text{id} \simeq P \circ \beta.$$

Rozważmy zatem homomorfizmy grup $D_n: C_n(\mathfrak{M}_K) \rightarrow C_{n+1}(\mathfrak{M}_K)$ takie, że

$$D_n|_{C_{p,q}} = (-1)^p \ell_{p,q+1} z_q, \quad \text{dla } p+q = n, n \geq 0. \quad (4.42)$$

Wówczas dla $c_{p,q} \in C_{p,q}$ mamy

$$\begin{aligned} (d_{n+1} D_n + D_{n-1} d_n) c_{p,q} &= (-1)^p d_{n+1} \ell_{p,q+1} z_q c_{p,q} + D_{n-1} (\delta_p c_{p,q} + (-1)^p \partial_q c_{p,q}) \\ &= \ell_{p,q} \partial_{q+1} z_q c_{p,q} + (-1)^{p-1} \ell_{p-1,q+1} z_q \delta_p c_{p,q} + \ell_{p,q} z_{q-1} \partial_q c_{p,q} \\ &= \ell_{p,q} (\partial_{q+1} z_q + z_{q-1} \partial_q) c_{p,q} + (-1)^{p-1} \ell_{p-1,q+1} z_q \delta_p c_{p,q} \\ &= \ell_{p,q} c_{p,q} - \ell_{p-1,q+1} \Lambda c_{p,q} = c_{p,q}, \end{aligned}$$

jeśli $q > 0$, natomiast

$$\begin{aligned} (d_{n+1} D_n + D_{n-1} d_n) c_{n,0} &= \ell_{n,0} \partial_1 z_0 c_{n,0} + (-1)^{n-1} \ell_{n-1,1} z_0 \delta_n c_{n,0} \\ &= \ell_{n,0} (\text{id} - z_{-1} \bar{\partial}_0) c_{n,0} + c_{n,0} - \ell_{n,0} c_{n,0} \\ &= c_{n,0} - P \bar{\partial}_0 c_{n,0}, \end{aligned}$$

co dowodzi, że D jest postulowaną homotopią. \square

Ponieważ lemat 4.2.4 korzysta jedynie z własności homomorfizmów $z_q, q \geq -1$, ujętych w (4.36), analogiczny lemat jest prawdziwy dla homomorfizmów $s_p, p \geq -1$, spełniających warunki (4.33).

Lemat 4.2.6. *Niech $W: C_{p,q} \rightarrow C_{p+1,q-1}$, dla $p \geq 0, q > 0$, oraz $\omega_{p,q}: C_{p,q} \rightarrow C_n(\mathfrak{M}_K)$, dla $n = p + q, p, q \geq 0$, będą określone, jak następuje:*

$$Wc_{p,q} = -s_p \partial'_q c_{p,q} \in C_{p+1,q-1}, \quad (4.43)$$

$$\omega_{p,q} c_{p,q} = W^q c_{p,q} + \dots + Wc_{p,q} + c_{p,q} \in C_{n,0} \oplus \dots \oplus C_{p+1,q-1} \oplus C_{p,q} \quad (4.44)$$

dla $c_{p,q} \in C_{p,q}$. Zachodzą następujące tożsamości

$$d_n \circ \omega_{p,q} = \omega_{p-1,q} \circ \delta_p, \quad \text{na } C_{p,q}, \text{ dla } n \geq p > 0, q \geq 0, \quad (4.45)$$

$$d_n \circ \omega_{0,n} s_{-1} = \omega_{0,n-1} s_{-1} \circ \delta_n, \quad \text{na } C_n(\mathfrak{M}_K), \text{ dla } n > 0. \quad (4.46)$$

□

Wniosek 4.2.7. *Ciąg homomorfizmów $R_n = \omega_{0,n} s_{-1}, n \geq 0$, jest odwzorowaniem łańcuchowym $R: C(\mathfrak{M}_K) \rightarrow C(\mathfrak{M}_K)$ homotopijnie odwrotnym do α określonego przez (4.25–4.26).* □

Ćwiczenie 4.2.4. Udowodnić lemat 4.2.6 i wniosek 4.2.7.

Dowód twierdzenia 4.2.1. Wnioski 4.2.5 i 4.2.7 zamykają pierwszą część dowodu twierdzenia. Zajmijmy się zatem konstrukcją homomorfizmu $(f, \phi)_\#$. Korzystając z definicji 3.1.4 i 4.1.8 homomorfizmów indukowanych i konwencji (4.28) dotyczącej oznaczeń generatorów grup $C_{p,q}$, przyjmijmy

$$(f, \phi)_\#(\tau \otimes \sigma) = \phi_\# \tau \otimes f_\# \sigma, \quad (4.47)$$

dla $\tau \in C_p(K), \sigma \in C_q(\text{st } \tau), p, q \geq 0$. Związek f i ϕ zapewnia poprawność tej definicji. Zarówno łańcuchowość, jak i przemienność z α i β wynikają wprost z (4.29–4.30).

Do wykazania pozostaje jawna postać złożenia $\alpha \circ P$. Bezpośrednio z definicji wynika, że na $C_n(K)$ zachodzi równość $\alpha \circ P_n = \bar{\partial}_0 \Lambda^n z_{-1}$. Sprawdzamy, po uzgodnieniu znaków, że wzór na homomorfizm Λ ma na $C_{p,q}$ postać,

$$\begin{aligned} \Lambda(\tau \otimes \sigma) &= (-1)^p z_q \left(\sum_{i \leq p} (-1)^i \tau_i \otimes \sigma \right) \\ &= (-1)^{n+1} \sum_{i \leq p} (-1)^i \tau_i \otimes (\sigma * B_{\tau_i}), \end{aligned} \quad (4.48)$$

gdzie τ_i jest i -tą ścianą afinicznego sympleksu $\tau \in S_p K$, dla $i \leq p, \sigma \in C_q(\text{st } \tau)$. Przyjmując $\lambda = (-1)^{n+1} \Lambda$, zajmiemy się teraz obliczaniem wyrażenia

$$\lambda^n(\tau \otimes \langle B_\tau \rangle) \in C_{0,n}, \quad \text{dla } \tau = \langle v_0 \dots v_n \rangle \in S_n K, v_0 \prec \dots \prec v_n.$$

Traktując sympleks τ jako ustalony, dla dowolnego niepustego podzbioru $J \subset \{0, \dots, n\}$ o elementach $j_0 < \dots < j_p$, niech $\tau_J := \langle v_{j_0} \dots v_{j_p} \rangle \in S_p K$ oznacza

ścianę o wierzchołkach z J , zaś $B_J := B_{\tau_J}$ niech będzie środkiem tej ściany. Zauważmy, że brzeg sympleksu τ_J może być zapisany w postaci

$$\begin{aligned} \partial_p \tau_J &= \sum_{i \leq p} (-1)^i \tau_{J \setminus \{j_i\}} \\ &= \sum_{j \in J} \text{sign}(j; J \setminus \{j\}) \tau_{J \setminus \{j\}}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

gdzie przyjęto oznaczenie $\text{sign}(j; J') = (-1)^a$, $a = \#\{k \in J'; j > k\}$, dla $j \notin J'$. Mając zatem równość

$$\lambda(\tau_J \otimes \sigma) = \sum_{j \in J} \text{sign}(j; J \setminus \{j\}) \tau_{J \setminus \{j\}} \otimes (\sigma * B_{J \setminus \{j\}}), \quad (4.50)$$

dla $\sigma \in C_q(\mathcal{U}_K)$, możemy zaprezentować wzór ogólny

$$\lambda^q(\tau \otimes \langle B_\tau \rangle) = \sum_{(j_1, \dots, j_q)} \text{sign}(j_1, \dots, j_q; J_q) \tau_{J_q} \otimes \langle B_{J_0} \dots B_{J_q} \rangle, \quad \text{dla } q > 0, \quad (4.51)$$

gdzie sumowanie jest po wszystkich q -elementowych kombinacjach bez powtórzeń ze zbioru $J_0 = \{0, 1, \dots, n\}$, $J_k = J_{k-1} \setminus \{j_k\}$, dla $k > 0$, a znak \pm przy poszczególnych składnikach jest iloczynem

$$\text{sign}(j_1, \dots, j_q; J_q) := \text{sign}(j_1; J_1) \cdot \dots \cdot \text{sign}(j_q; J_q).$$

Wzór (4.51) wynika z (4.49–4.50) przez prostą iterację. Dla $q = n$ otrzymujemy zatem

$$\lambda^n(\tau \otimes \langle B_\tau \rangle) = \sum_{(j_1, \dots, j_{n+1})} \text{sign}(j_1, \dots, j_n, j_{n+1}) \langle v_{j_{n+1}} \rangle \otimes \langle B_{J_0} \dots B_{J_n} \rangle,$$

gdzie tym razem suma rozciąga się na wszystkie permutacje zbioru indeksów. Stąd ostatecznie

$$\alpha P_n(\tau) = \sum_{(j_1, \dots, j_{n+1})} \text{sign}(j_1, \dots, j_n, j_{n+1}) \langle B_{J_0} \dots B_{J_n} \rangle,$$

co pokrywa się ze wzorem (3.39) na podział barycentryczny $\text{sd}_n \tau = \tau_{\#}(\text{sd}_n \iota_n)$. \square

Ćwiczenie 4.2.5. Podać jawny opis odwzorowania łańcuchowego $\beta \circ R: C(\mathcal{U}_K) \rightarrow C(K)$. Zauważyć, że każdy sympleks singularny $\sigma \in S_n \mathcal{U}_K$ wyznacza odwzorowanie sympleksyjne $\tilde{\sigma}: \text{sd}^1 \Delta^n \rightarrow \mathcal{N} \mathcal{U}_K \cong K$.

Zapowiadany wcześniej wariant relatywny twierdzenia 4.2.1 korzysta z faktu, iż przedstawione w dowodzie konstrukcje są *wewnętrzne*, co stanowi słabszą wersję naturalności i odnosi się do podkompleksów i homomorfizmów włożenia $L \subset K$, dla dowolnej pary g.k.s. (K, L) . Zakładamy kontynuację przyjętych do tej pory oznaczeń.

Zacniemy od prostej obserwacji dotyczącej gwiazd st_K i st_L wierzchołków i sympleksów, odpowiednio w $|K|$ i w $|L|$. Zachodzą równości

$$\text{st}_L \tau = |L| \cap \text{st}_K \tau \quad \text{dla } \tau \in L, \quad (4.52)$$

a zatem także $\mathfrak{U}_K|_{|L|} = \mathfrak{U}_L$ dla pokryć gwiazdzistych, oraz

$$C_n(\mathfrak{U}_L) = C_n(\mathfrak{U}_K) \cap C_n(|L|),$$

dla $n \geq 0$.

Z kolei dla ciągu podwójnego (4.21) definiującego kompleks łańcuchowy (4.23) i mającego równoważny opis (4.28–4.29), oznaczmy przez

$$S_{p,q}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K) = \{\tau \otimes \sigma; \tau \in S_p K, \sigma \in S_q(\text{st } \tau)\}$$

zbiór generatorów grup $C_{p,q} = C_q(\mathfrak{N}_p \mathfrak{U}_K)$, $p, q \geq 0$. Inkluzje $S_{p,q}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_L) \subset S_{p,q}(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K)$, wynikające z relacji $L \subset K$, są zgodne z operatorami brzegu i homomorfizmami α, β . Niech $C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K, L)$ będzie kompleksem ilorazowym $\{C_n(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K)/C_n(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_L)\}$.

Twierdzenie 4.2.8. *Przy oznaczeniach zaczerpniętych z twierdzenia 4.2.1, dla dowolnej pary kompleksów symplecjalnych (K, L) homomorfizmy α i β indukują homotopijne równoważności łańcuchowe*

$$\bar{\alpha}: C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K, L) \rightarrow C(\mathfrak{U}_K, |L|), \quad \text{oraz} \quad \bar{\beta}: C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K, L) \rightarrow C(K, L).$$

Ponadto, istnieje odwzorowanie łańcuchowe $\bar{P}: C(K, L) \rightarrow C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K, L)$ homotopijnie odwrotne do $\bar{\beta}$ i takie, że złożenie $\bar{\alpha} \circ \bar{P}: C(K, L) \rightarrow C(\mathfrak{U}_K, |L|) \hookrightarrow C(|K|, |L|)$ jest homomorfizmem podziału barycentrycznego.

Homomorfizmy $\bar{\alpha}$ i $\bar{\beta}$ są naturalne względem odwzorowań symplecjalnych par $\phi: (K, L) \rightarrow (K', L')$, tzn. istnieje odwzorowanie łańcuchowe $\Phi: C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K, L) \rightarrow C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_{K'}, L')$, dla którego następujący diagram

$$\begin{array}{ccccc} C(\mathfrak{U}_K, |L|) & \xleftarrow{\bar{\alpha}} & C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K, L) & \xrightarrow{\bar{\beta}} & C(K, L) \\ |\phi|_{\#} \downarrow & & \Phi \downarrow & & \phi_{\#} \downarrow \\ C(\mathfrak{U}_{K'}, |L'|) & \xleftarrow{\bar{\alpha}} & C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_{K'}, L') & \xrightarrow{\bar{\beta}} & C(K', L') \end{array} \quad (4.53)$$

jest przemienny.

Dowód. Sprawdźmy przemiennosc następującego diagramu

$$\begin{array}{ccccc} C(L) & \xrightarrow{\subset} & C(K) & \longrightarrow & C(K, L) \\ P \downarrow & & P \downarrow & & \bar{P} \downarrow \\ C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_L) & \xrightarrow{\subset} & C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K) & \longrightarrow & C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K, L) \\ \uparrow R & & \uparrow R & & \uparrow \bar{R} \\ C(\mathfrak{U}_L) & \xrightarrow{\subset} & C(\mathfrak{U}_K) & \longrightarrow & C(\mathfrak{U}_K, |L|) \end{array} \quad (4.54)$$

w którym wiersze są krótkimi ciągami dokładnymi, natomiast równoważności homotopijne $P = \{\ell_{n,0} z_{-1}\}$ i $R = \{\omega_{0,n} s_{-1}\}$ zostały zdefiniowane (dla K) w trakcie dowodu twierdzenia 4.2.1.

Podstawą dla konstrukcji homomorfizmu P takiego, że $\beta P = \text{id}_{C(K)}$ i homotopii łańcuchowej $D: \text{id} \simeq P\beta$ są wzory (4.34–4.35), które jednoznacznie, w sposób *wewnętrzny dla każdego sympleksu afinicznego*, definiują homotopie łańcuchowe w obrębie kolumn diagramu (4.22). Oznacza to zgodność homomorfizmów P utworzonych dla K i L , czyli przemienność lewego górnego kwadratu diagramu (4.54) – i prowadzi do definicji homomorfizmu grup ilorazowych \bar{P} zamykającego prawy górny kwadrat diagramu (por. ćwiczenie 5.1.1). Równości definiujące D przenoszą się na grupy ilorazowe i określają homotopię $\bar{D}: \text{id} \simeq \bar{P}\bar{\beta}$.

Analogiczne rozumowanie dla homomorfizmu R takiego, że $\alpha R = \text{id}_{C(\mathfrak{U}_K)}$ i odpowiedniej homotopii łańcuchowej $\text{id} \simeq R\alpha$, wymaga uzgodnienia definicji (4.31–4.32) dla K i L . Oprócz założonej wcześniej zgodnej kolejności wierzchołków kompleksów potrzebujemy jeszcze zgodnych funkcji $S_q(\mathfrak{U}_K) \rightarrow K_0, S_q(\mathfrak{U}_L) \rightarrow L_0$, które każdemu sympleksowi singularnemu σ przypiszą wierzchołek v^σ taki, że $\sigma(\Delta^q) \subset \text{st } v^\sigma$ – odpowiednio w K i w L . Jeśli zatem przyjąć, że funkcję $\sigma \mapsto v^\sigma$ definiujemy na $S_q(\mathfrak{U}_L)$, a następnie rozszerzamy na $S_q(\mathfrak{U}_K)$, to zgodność definicji (4.31–4.32) przenosi się na całość konstrukcji, co oznacza przemienność lewego dolnego kwadratu diagramu (4.54) i prowadzi do definicji równoważności łańcuchowej grup ilorazowych \bar{R} zamykającej prawy dolny kwadrat diagramu.

Przemienność diagramu (4.53) otrzymujemy, biorąc za Φ homomorfizm łańcuchowy indukowany w kompleksach relatywnych przez $(|\phi|, \phi)_\#$ – por. (4.47). \square

Podstawowym wnioskiem z twierdzeń 4.2.1–4.2.8 jest następujące

Twierdzenie 4.2.9 (O izomorfizmie dla homologii symplecjoidalnych). *Dla dowolnego g.k.s. K homomorfizm włożenia $\iota_K: C(K) \hookrightarrow C(|K|)$ jest równoważnością łańcuchową. Dla dowolnej pary kompleksów symplecjoidalnych (K, L) homomorfizm $\iota_{(K,L)}: C(K, L) \hookrightarrow C(|K|, |L|)$ indukowany przez włożenia jest równoważnością łańcuchową.*

Dla dowolnego odwzorowania symplecjoidalnego $\phi: (K, L) \rightarrow (K', L')$ i odpowiadającej mu funkcji ciągłej $|\phi|: (|K|, |L|) \rightarrow (|K'|, |L'|)$, następujące diagramy

$$\begin{array}{ccccccc} C(K, L) & \xrightarrow{[\iota_{(K,L)}]} & C(|K|, |L|) & & H(K, L) & \xrightarrow{\cong} & H(|K|, |L|) \\ [\phi_\#] \downarrow & & \downarrow [|\phi|_\#] & & \phi_* \downarrow & & \downarrow |\phi|_* \\ C(K', L') & \xrightarrow{[\iota_{(K',L')}] } & C(|K'|, |L'|) & & H(K', L') & \xrightarrow{\cong} & H(|K'|, |L'|) \end{array} \quad (4.55)$$

są przemienne (pierwszy – w kategorii klas homotopii łańcuchowych).

Dowód. Zgodnie z twierdzeniem 4.2.1, dla dowolnego g.k.s. K , następujący diagram odwzorowań łańcuchowych

$$\begin{array}{ccc} C(K) & \xrightarrow{\alpha P} & C(\mathfrak{U}_K) \\ \iota_K \downarrow & & \downarrow \iota_{\mathfrak{U}_K} \\ C(|K|) & \xrightarrow{\text{sd}} & C(|K|) \end{array}$$

jest przemienny. Po przejściu do klas homotopii odwzorowań łańcuchowych mamy zatem

$$[\iota_K] = [sd]^{-1} \circ [\iota_{\mathfrak{M}_K}] \circ [\alpha P] = [\iota_{\mathfrak{M}_K}] \circ [\alpha] \circ [\beta]^{-1},$$

co oznacza, że klasa homotopii $[\iota_K]$ jest złożeniem trzech izomorfizmów, a więc także izomorfizmem w kategorii, czyli klasą równoważności łańcuchowych.

Dla dowolnego ϕ , przemiennosc pierwszego diagramu (4.55) jest teraz wnioskiem z twierdzenia 4.2.1 i naturalności podziału barycentrycznego. Przemiennosc drugiego z diagramów wynika z przemiennosci pierwszego.

Dla dowolnej pary (K, L) , twierdzenie 4.2.8 daje przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} C(K, L) & \xrightarrow{\bar{\alpha}P} & C(\mathfrak{M}_K, |L|) \\ \iota_{K,L} \downarrow & & \downarrow \iota_{\mathfrak{M}_K, |L|} \\ C(|K|, |L|) & \xrightarrow{sd} & C(|K| \cdot |L|), \end{array}$$

w którym o wszystkich homomorfizmach, oprócz $\iota_{K,L}$, wiemy już, że są równoważnościami homotopijnymi.

Naturalność (4.55) jest prostym wnioskiem z przemiennosci diagramu (4.53). \square

4.3 Charakterystyka Eulera i liczba Lefschetza

Dowolna triangulacja K (zwartego) wielościanu W ma skończenie generowane grupy łańcuchów symplecjalnych $C(K)$ i grupy homologii $H_n(K)$, przy czym $C_n(K) = 0$ dla $n > \dim W$. Ponieważ grupy homologii symplecjalnych są izomorficzne z $H_n(W)$, $n \geq 0$, wymiary (rangi) tych grup są niezmiennikami topologicznymi wielościanu. Nie wnikając dokładniej w charakteryzację ogólnej struktury grup przemiennych skończenie generowanych, skupimy się na tzw. podgrupie beztorsyjnej i wykorzystamy znane fakty z teorii przestrzeni liniowych.

Jeśli X jest przestrzenią topologiczną o skończenie generowanej grupie homologii $H(X)$ – w szczególności, gdy $X \simeq W$ jest homotopijnie równoważna z dowolnym wielościanem, to – zgodnie z definicją 1.5.6 – dla każdej funkcji ciągłej $f: X \rightarrow X$ możemy rozważać ślady homomorfizmów f_* działających na grupach homologii.

Definicja 4.3.1. Liczbą Lefschetza funkcji ciągłej $f: X \rightarrow X$ nazywamy wielkość

$$\lambda(f) = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}\{f_*: H_k(X) \rightarrow H_k(X)\} \quad (4.56)$$

określoną, gdy grupa z gradacją $H(X)$ jest skończenie generowana. Liczbę Lefschetza $\lambda(\operatorname{id}_X)$ odwzorowania tożsamościowego nazywamy charakterystyką Eulera przestrzeni i oznaczamy $\chi(X)$. Zatem

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \rho(H_k(X)). \quad (4.57)$$

Przyjmujemy, że kompleks $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest *skończenie generowany*, jeśli suma prosta $\bigoplus_n C_n$ jest skończenie generowana. W szczególności, suma może zawierać tylko skończenie wiele składników niezerowych. W ujęciu tradycyjnym, charakterystyka Eulera i liczby Lefschetza są niezmiennikami topologicznymi, względnie łatwo dającymi się wyliczyć na podstawie dowolnej triangulacji. Ten punkt widzenia wspiera następujący fakt dotyczący kompleksów łańcuchowych.

Twierdzenie 4.3.1 (Twierdzenie Hopfa o śladzie). *Dla dowolnego skończenie generowanego kompleksu łańcuchowego $C = (\{C_n\}, \{\partial_n\})$ i dowolnego homomorfizmu $h: C \rightarrow C$, zachodzi równość*

$$\sum_k (-1)^k \operatorname{tr}\{h_*: H_k C \rightarrow H_k C\} = \sum_k (-1)^k \operatorname{tr}\{h_k: C_k \rightarrow C_k\}. \quad (4.58)$$

Równość (4.58) wygodnie jest zapisywać w postaci

$$\lambda(h_*) = \lambda(h), \quad (4.59)$$

po stosownym rozszerzeniu definicji 4.3.1 na homomorfizmy grup z gradacją.

Każdy kompleks łańcuchowy $C = (\{C_n\}, \{\partial_n\})$ jest źródłem dwu rodzin homomorfizmów obejmujących grupy cykli i brzegów: $Z_n C \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} C$ oraz $B_n C \rightarrow Z_n C \rightarrow H_n C$. Wspólna cecha tych homomorfizmów stanowi podstawę do następującej definicji.

Definicja 4.3.2. *Para homomorfizmów grup przemiennej $i: A \rightarrow B, j: B \rightarrow C$ tworzy krótki ciąg dokładny*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \longrightarrow 0, \quad (4.60)$$

jeśli i jest monomorfizmem, j epimorfizmem oraz zachodzi równość $\operatorname{im} i = \ker j$, tzn., jeśli w ciągu (4.60) obraz każdego homomorfizmu jest jądrem następnego.

Stwierdzenie 4.3.2. *Jeśli homomorfizmy grup $i: A \rightarrow B, j: B \rightarrow C$ tworzą krótki ciąg dokładny, to indukowane przez nie przekształcenia liniowe $i^{\mathbb{Q}}: A^{\mathbb{Q}} \rightarrow B^{\mathbb{Q}}, j^{\mathbb{Q}}: B^{\mathbb{Q}} \rightarrow C^{\mathbb{Q}}$ również.* \square

Dowód. Ćwiczenie. \square

Wniosek 4.3.3. *Jeśli grupa B w ciągu dokładnym (4.60) jest skończenie generowana, to $\rho(A) + \rho(C) = \rho(B)$.*

Dowód. Dla przestrzeni liniowych, $\dim(\ker j^{\mathbb{Q}}) + \dim(\operatorname{im} j^{\mathbb{Q}}) = \dim(B^{\mathbb{Q}})$. \square

Ćwiczenie 4.3.1. Wykorzystać wniosek do opisu charakterystyki Eulera wielościanu $W = |K|$ jako naprzemiennej sumy $\chi(W) = \sum_i (-1)^i \#S_i K$ liczby sympleksów dowolnej triangulacji K .

Wniosek 4.3.4. Dla dowolnego krótkiego ciągu dokładnego (4.60) grup skończenie generowanych, niech f, g i h będą automorfizmami takimi, że poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & f \downarrow & & g \downarrow & & h \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (4.61)$$

Wówczas ślady automorfizmów f, g i h wiążą zależność

$$\operatorname{tr} f + \operatorname{tr} h = \operatorname{tr} g. \quad (4.62)$$

Dowód. Po przejściu do przestrzeni wektorowych nad \mathbb{Q} możemy znaleźć homomorfizm $p: C^{\mathbb{Q}} \rightarrow B^{\mathbb{Q}}$ prawostronnie odwrotny do $j^{\mathbb{Q}}$ i otrzymać tym samym izomorfizm $(i^{\mathbb{Q}}, p): A^{\mathbb{Q}} \oplus C^{\mathbb{Q}} \rightarrow B^{\mathbb{Q}}$. Dla uzyskania przemiennego diagramu

$$\begin{array}{ccc} A^{\mathbb{Q}} \oplus C^{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{(i^{\mathbb{Q}}, p)} & B^{\mathbb{Q}} \\ g' \downarrow & & g^{\mathbb{Q}} \downarrow \\ A^{\mathbb{Q}} \oplus C^{\mathbb{Q}} & \xrightarrow{(i^{\mathbb{Q}}, p)} & B^{\mathbb{Q}} \end{array} \quad (4.63)$$

zapewniającego równość śladów $\operatorname{tr} g^{\mathbb{Q}} = \operatorname{tr} g'$, potrzebna jest nam obserwacja, że dla $c \in C^{\mathbb{Q}}$, wyrażenie $g^{\mathbb{Q}}p(c) - ph^{\mathbb{Q}}(c)$ zawiera się w jądrze $\ker j^{\mathbb{Q}}$, a zatem jest postaci

$$g^{\mathbb{Q}}p(c) - ph^{\mathbb{Q}}(c) = i^{\mathbb{Q}}q(c),$$

dla jednoznacznie określonego (a więc liniowego) odwzorowania $q: C^{\mathbb{Q}} \rightarrow A^{\mathbb{Q}}$. Wystarczy teraz przyjąć $q'(a \oplus c) = (f^{\mathbb{Q}}(a) + q(c)) \oplus h^{\mathbb{Q}}(c)$, aby dla dowolnych baz w $A^{\mathbb{Q}}$ i $C^{\mathbb{Q}}$ macierz odwzorowania q' przyjęła postać

$$\left[\begin{array}{c|c} M_f & M_q \\ \hline 0 & M_h \end{array} \right],$$

gdzie M_f i M_h są odpowiednio macierzami automorfizmów $f^{\mathbb{Q}}$ i $h^{\mathbb{Q}}$. Stąd natychmiast otrzymujemy równość $\operatorname{tr} q' = \operatorname{tr} f^{\mathbb{Q}} + \operatorname{tr} h^{\mathbb{Q}}$. \square

Dowód twierdzenia Hopfa 4.3.1. Stosując dwukrotnie wniosek 4.3.4, otrzymujemy odpowiednio równości

- dla odwzorowań $Z_k C \hookrightarrow C_k \rightarrow B_{k-1} C$,

$$\operatorname{tr}\{f_{\#}: C_k \rightarrow C_k\} = \operatorname{tr}(f_{\#}|_{Z_k C}) + \operatorname{tr}(f_{\#}|_{B_{k-1} C}), \quad (4.64)$$

- dla ciągu $B_k C \hookrightarrow Z_k C \rightarrow H_k C$,

$$\operatorname{tr}\{f_{*}: H_k C \rightarrow H_k C\} = \operatorname{tr}(f_{\#}|_{Z_k C}) - \operatorname{tr}(f_{\#}|_{B_k C}), \quad (4.65)$$

gdzie $k \in \mathbb{Z}$ przebiega skończony przedział indeksów, dla których grupy C_k są niezerowe. Wynikają stąd tożsamości

$$\mathrm{tr}\{f_{\#}: C_k \rightarrow C_k\} - \mathrm{tr}\{f_*: H_k C \rightarrow H_k C\} = \mathrm{tr}(f_{\#}|_{B_k C}) + \mathrm{tr}(f_{\#}|_{B_{k-1} C}),$$

które, przesumowane ze znakiem $(-1)^k$ po $k \in \mathbb{Z}$, kończą dowód. \square

Twierdzenie 4.3.5 (Twierdzenie Lefschetza o punkcie stałym). *Dla dowolnej zwartej przestrzeni topologicznej X homeomorficznej z wielościanem i funkcji ciągłej $f: X \rightarrow X$ odwzorowującej X w siebie, prawdziwa jest implikacja*

$$\lambda(f) \neq 0 \implies \exists_{x \in X} f(x) = x,$$

a zatem funkcja bez punktów stałych ma liczbę Lefschetza równą 0.

Wniosek 4.3.6. *Dla wielościanu W o niezerowej charakterystyce Eulera, każda funkcja ciągła $f: W \rightarrow W$ homotopijna z identycznością ma punkt stały.* \square

Dowód twierdzenia Lefschetza. Ponieważ każdy homeomorfizm $F: X \cong W$ ustala wzajemnie jednoznaczność odpowiedniości pomiędzy punktami stałymi funkcji $f \circ F^{-1}$ i f , możemy nie tracąc ogólności przyjąć, że $X = |L|$ jest wielościanem o ustalonej triangulacji L , położonym w przestrzeni euklidesowej. Załóżmy, że funkcja ciągła $f: X \rightarrow X$ nie ma punktów stałych. W tym przypadku kres dolny odległości $a = \inf\{|x - f(x)|; x \in X\}$ jest liczbą dodatnią; ustalmy triangulację $K = \mathrm{sd}^k L$ tak drobną, by spełniony był warunek

$$\max\{\mathrm{diam}(\tau); \tau \in K\} < \frac{a}{2}. \quad (4.66)$$

Zgodnie z wnioskiem 2.3.6, $f: |K| \rightarrow |K|$ dopuszcza aproksymację symplecjonalną $\phi: \mathrm{sd}^m K \rightarrow K$, dla pewnego $m \geq 0$. Dla obliczenia śladów i liczby Lefschetza homomorfizmu $f_*: H(|K|) \rightarrow H(|K|)$ wykorzystamy diagram

$$\begin{array}{ccccc} C_n(K) & \xrightarrow{\mathrm{sd}^m} & C_n(\mathrm{sd}^m K) & \xrightarrow{\phi_{\#}} & C_n(K) \\ \iota_K \downarrow & & \iota_{\mathrm{sd}^m K} \downarrow & & \iota_K \downarrow \\ C_n(|K|) & \xrightarrow{\mathrm{sd}^m} & C_n(|K|) & \xrightarrow{f_{\#}} & C_n(|K|) \end{array} \quad (4.67)$$

dla $n \geq 0$, w którym przemienność prawego kwadratu ma miejsce dopiero na poziomie grup homologii, podczas gdy homomorfizm indukowany w homologiach singularnych przez sd^m jest wówczas identycznością. Zgodnie z twierdzeniem 4.3.1 mamy zatem

$$\lambda(f_*) = \lambda(\phi_* \circ \mathrm{sd}_*^m) = \lambda(\phi_{\#} \circ \mathrm{sd}^m).$$

Wykażemy, że ślad homomorfizmu tworzącego górny wiersz diagramu (4.67) jest równy 0, dla każdego $n \geq 0$. W tym celu zauważmy, że dla dowolnego $\sigma \in K$ zbiory σ i $|\phi|(\sigma)$ są rozłączne. Istotnie, gdyby istniała para punktów $x, y \in \sigma$ taka, że

$y = |\phi|(x)$, to dla dowolnego sympleksu $\tau \in K$ zawierającego jednocześnie $f(x)$ i $|\phi|(x)$ zachodziłyby wówczas nierówności

$$\begin{aligned} |x - f(x)| &\leq |x - y| + ||\phi|(x) - f(x)| \\ &\leq \text{diam}(\sigma) + \text{diam}(\tau) \\ &< \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a, \end{aligned}$$

co oznacza sprzeczność z definicją liczby a .

Aby przejść teraz do łańcuchów symplecjalnych, ustalamy liniowy porządek w zbiorze wierzchołków kompleksów K i $\text{sd}^m K$. Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami, każdemu sympleksowi $\sigma \in K$ wymiaru $q \geq 0$ odpowiada jednoznacznie ustalony afiniczny sympleks singularny $\langle \sigma \rangle \in S_q K$, przy czym łańcuch $\text{sd}^m \langle \sigma \rangle = \langle \sigma \rangle_{\#}(\iota_q) \in C_q(\text{sd}^m \sigma)$ ma nośnik równy σ . Ponieważ dla każdego q -wymiarowego sympleksu $\tau \in \text{sd}^m \sigma$, obraz $\phi_{\#} \langle \tau \rangle$ jest albo równy 0, albo ma nośnik $|\phi|(\tau) \subset |\phi|(\sigma)$ – rozłączny z σ , obraz

$$\phi_{\#} \text{sd}^m \langle \sigma \rangle \in C_q(K)$$

jest kombinacją sympleksów afinicznych różnych od $\langle \sigma \rangle$. Po przejściu do \mathbb{Q} -przestrzeni wektorowych rozpiętych na grupach łańcuchów symplecjalnych obrazy generatorów z $S_q(K)$ stanowią naturalną bazę, w której stwierdzamy zerowanie się śladu $\text{tr } \phi_{\#} \text{sd}^m |_{C_q K}$, dla każdego $q \geq 0$. \square

Stwierdzenie 4.3.7. *Liczba Lefschetza dowolnego odwzorowania sfery, $f: S^n \rightarrow S^n$ wyraża się wzorem $\lambda(f) = 1 + (-1)^n \deg(f)$.* \square

Wniosek 4.3.8. *Jeśli odwzorowanie $f: S^n \rightarrow S^n$ nie ma punktów stałych, to stopień $\deg(f)$ jest równy $(-1)^{n+1}$.* \square

Klasyczne twierdzenie Brouwera–Hopfa mówi, że odwzorowania sfery są homotopijne wtedy i tylko wtedy, gdy mają ten sam stopień. Tym samym odwzorowanie antypodyczne $x \mapsto -x$ jest z dokładnością do homotopii jedynym odwzorowaniem sfery bez punktów stałych.

Dla zwartej rozmaitości różniczkowalnej X znikanie charakterystyki Eulera $\chi(X)$ jest warunkiem koniecznym na to, by na rozmaitości istniało ciągle pole wektorowe styczne, różne od zera w każdym punkcie. Ponieważ każde pole styczne generuje 1-parametrową rodzinę dyfeomorfizmów, możemy fakt ten sformułować i wykazać w nieco ogólniejszej sytuacji.

Definicja 4.3.3. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X , funkcję ciągłą*

$$\psi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$$

nazywamy 1-parametrową rodziną homeomorfizmów, jeżeli:

(i) $\psi(0, \cdot) = \text{id}_X$ oraz

(ii) $\psi(t_1 + t_2, x) = \psi(t_1, \psi(t_2, x))$, dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}, x \in X$.

Punkt $x_0 \in X$ jest punktem stałym rodziny ψ , jeśli $\psi(t, x_0) = x_0$ dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Przy oznaczeniach $\psi_t := \psi(t, \cdot): X \rightarrow X$ zapisujemy własność (ii) w postaci $\psi_{t_1} \circ \psi_{t_2} = \psi_{t_1+t_2}$, co razem z własnością (i) oznacza, że istotnie wszystkie tak otrzymane funkcje są homeomorfizmami X .

Twierdzenie 4.3.9. *Jeśli X jest (zwartym) wielościanem o nieznikającej charakterystyce Eulera $\chi(X)$, to każda 1-parametrowa rodzina homeomorfizmów na X ma punkt stały.*

Dowód. Wszystkie homeomorfizmy $\psi_t, t \in \mathbb{R}$, składające się na dowolną 1-parametrową rodzinę $\psi: \mathbb{R} \times X \rightarrow X$, są homotopijne z $\psi_0 = \text{id}_X$. W związku z tym mają niezerową liczbę Lefschetza

$$\lambda(\psi_t) = \lambda(\text{id}_X) = \chi(X)$$

i każdy z nich posiada punkt stały. Dla $n > 0$ niech

$$A_n = \{x \in X; \psi_{1/2^n}(x) = x\} \neq \emptyset$$

będzie zbiorem punktów stałych odwzorowania $\psi_{1/2^n}$. Tożsamość

$$\psi_{1/2^{n+1}} \circ \psi_{1/2^{n+1}} = \psi_{1/2^n}$$

pociąga za sobą inkluzje $A_{n+1} \subset A_n$ dla $n > 0$. W przestrzeni zwartej przekrój $F = \bigcap_n A_n$ jest niepusty. F zawiera punkty stałe wszystkich funkcji $\psi_{\pm 1/2^n}, n > 0$, jak również ich superpozycji – czyli wszystkich funkcji ψ_t , dla $t = m/2^n, m \in \mathbb{Z}, n > 0$. Dla zakończenia dowodu i stwierdzenia, że punkty zbioru F są stałe dla całej rodziny ψ , wystarczy skorzystać z ciągłości rodziny względem pierwszego argumentu. \square

Klasycznym wnioskiem z przedstawionej tu teorii jest

Wniosek 4.3.10 (Twierdzenie o zaczesywaniu sfer). *Na sferach S^{2k} parzystego wymiaru każde ciągle styczne pole wektorowe ma miejsce zerowe.* \square

Pole wektorowe styczne na sferze jest funkcją $f: S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ taką, że w każdym punkcie $x \in S^{2k}, f(x) \perp x$.

W szczególności oznacza to niemożność zaczesania sfery S^2 i w ogóle żadnej sfery parzystego wymiaru – w sposób ciągly, bez zawirowań. Sfera $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$ wymiaru nieparzystego ma nieznikające pole styczne

$$(x_1, x_2, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) \mapsto (x_2, -x_1, \dots, x_{2k}, -x_{2k-1}).$$

4.4 Produkty

Cały bieżący rozdział omawia łańcuchy i homologie symplecjialne jako alternatywne, ale równoważne z dokładnością do homotopii, sposoby wprowadzania grup homologii w kategorii przestrzeni topologicznych triangulowalnych. W ostatnim podrozdziale prezentujemy symplecjialny wariant twierdzenia Eilenberga–Zilbera i zmierzamy w stronę symplecjialnych podstaw dla iloczynów.

Zacznijmy od oczywistej obserwacji dotyczącej homomorfizmu diagonalnego Alexandera–Whitneya (3.74).

Stwierdzenie 4.4.1. *Dla każdego g.k.s. K z ustaloną kolejnością wierzchołków, homomorfizm diagonalny d^{aw} odwzorowuje podkompleks $C(K)$ w $C(K) \otimes C(K)$, co daje przemienny diagram*

$$\begin{array}{ccc} C(K) & \xrightarrow{d^{aw}} & C(K) \otimes C(K) \\ \iota_K \downarrow & & \downarrow \iota_K \otimes \iota_K \\ C(|K|) & \xrightarrow{d^{aw}} & C(|K|) \otimes C(|K|). \end{array} \quad (4.68)$$

□

Ćwiczenie 4.4.1. Sprawdzić, że symplecjialny homomorfizm diagonalny $d^{aw} : C(K) \rightarrow C(K) \otimes C(K)$ jest naturalny względem odwzorowań łańcuchowych zachowujących porządek wierzchołków.

Punktem wyjścia do zdefiniowania produktu kompleksów symplecjialnych będą dla nas zgodne triangulacje (3.66) produktów $\Delta^p \times \Delta^q$. Triangulacje te będziemy oznaczać $sd^0(\Delta^p \times \Delta^q)$, dla $p, q \geq 0$. Każda para odwzorowań afinicznych $\Delta^p \xrightarrow{\sigma} |\sigma|$, $\Delta^q \xrightarrow{\tau} |\tau|$, opisujących sympleksy geometryczne $|\sigma|$ i $|\tau|$ indukuje triangulację produktu $|\sigma| \times |\tau|$.

Definicja 4.4.1. *Dla dowolnych (geometrycznych) kompleksów symplecjialnych K i K' o ustalonym porządku wierzchołków, iloczynem lub produktem kartezjańskim $K \times K'$ nazywamy kompleks geometryczny w przestrzeni $E_K \times E_{K'}$,*

$$K \times K' = \bigcup \{(\sigma \times \tau) sd^0(\Delta^p \times \Delta^q); \sigma \in S_p K, \tau \in S_q K', p, q \geq 0\}, \quad (4.69)$$

złożony z naturalnych triangulacji produktów $|\sigma| \times |\tau|$ sympleksów $|\sigma| \in K$ i $|\tau| \in K'$. Za wyróżniony porządek w zbiorze wierzchołków produktu przyjmujemy porządek leksykograficzny.

Uwaga 4.4.1. Przyjmując definicję produktu kompleksów symplecjialnych, stajemy przed pytaniem o izomorfizm przestrzeni topologicznych $|K| \times |K'|$ i $|K \times K'|$ – topologia w $|K| \times |K'|$ może być mocniejsza. W przypadku skończonych kompleksów lub, ogólniej, lokalnie zwartych czynników obie topologie w produkcie są identyczne. Ewentualna niezgodność topologii nie stanowi jednak przeszkody dla dalszych rozważań, gdyż w obu przestrzeniach są dokładnie *te same* sympleksy singularne, a więc ma miejsce równość

$$C(|K| \times |K'|) = C(|K \times K'|)$$

kompleksów łańcuchowych singularnych. Wyjaśnienie i stosowne twierdzenia czytelnik znajdzie np. w [Gray, rozdz. 8].

Uwaga 4.4.2. Produkt kartezjański kompleksów symplecjajnych $K \times K'$ jest ściśle związany z wybraną kolejnością wierzchołków, co znacznie ogranicza jego naturalność. W szczególności, produkt odwzorowań symplecjajnych $f: K \rightarrow L$ i $g: K' \rightarrow L'$ jest odwzorowaniem symplecjajnym $f \times g: K \times K' \rightarrow L \times L'$, o ile oba odwzorowania są rosnące (niemalejące).

Stwierdzenie 4.4.2. *Odwzorowanie diagonalne $\Delta: K \rightarrow K \times K$ oraz projekcje $\pi^1: K \times K' \rightarrow K$ i $\pi^2: K \times K' \rightarrow K'$ są odwzorowaniami symplecjajnymi. Jeśli $L \subset K$ i $L' \subset K'$ są dowolnymi podkompleksami, to suma $K \times L' \cup L \times K'$ jest podkompleksem produktu $K \times K'$. \square*

Definicja 4.4.2. Produktem kartezjańskim par kompleksów symplecjajnych (K, L) i (K', L') będziemy nazywać parę

$$(K, L) \times (K', L') = (K \times K', K \times L' \cup L \times K'). \quad (4.70)$$

Następujące twierdzenie może być uważane za symplecjajny odpowiednik twierdzenia Eilenberga–Zilbera 3.5.4.

Twierdzenie 4.4.3. *Dla dowolnych (geometrycznych) kompleksów symplecjajnych K i K' o ustalonym porządku wierzchołków, homomorfizm Eilenberga–Zilbera ∇ (3.67) zachowuje łańcuchy symplecjajne i wyznacza diagram przemienny*

$$\begin{array}{ccc} C(K) \otimes C(K') & \xrightarrow{\nabla} & C(K \times K') \\ \iota_K \otimes \iota_{K'} \downarrow & & \downarrow \iota_{K \times K'} \\ C(|K|) \otimes C(|K'|) & \xrightarrow{\nabla} & C(|K \times K'|). \end{array} \quad (4.71)$$

Indukowany homomorfizm $\nabla: C(K) \otimes C(K') \rightarrow C(K \times K')$ jest równoważnością homotopijną. Homotopijnie odwrotnym odwzorowaniem łańcuchowym jest złożenie

$$AW^\Delta: C(K \times K') \xrightarrow{d^{aw}} C(K \times K') \otimes C(K \times K') \xrightarrow{\pi_{\#}^1 \otimes \pi_{\#}^2} C(K) \otimes C(K'), \quad (4.72)$$

dla którego diagram

$$\begin{array}{ccc} C(K \times K') & \xrightarrow{AW^\Delta} & C(K) \otimes C(K') \\ \iota_{K \times K'} \downarrow & & \downarrow \iota_K \otimes \iota_{K'} \\ C(|K \times K'|) & \xrightarrow{AW^\Delta} & C(|K|) \otimes C(|K'|) \end{array} \quad (4.73)$$

jest przemienny z dokładnością do homotopii.

Dowód. Przemiennność diagramu (4.71), a właściwie istnienie symplecjajnej wersji homomorfizmu ∇ wynika z połączenia wzoru (3.67) i definicji produktu $K \times K'$.

Dla dowodu przemienności kolejnego diagramu, przedstawiamy (4.73) jako złożenie dwu kwadratów

$$\begin{array}{ccccc}
 C(K \times K') & \xrightarrow{d^{aw}} & C(K \times K') \otimes C(K \times K') & \xrightarrow{\pi_{\#}^1 \otimes \pi_{\#}^2} & C(K) \otimes C(K') \\
 \iota_{K \times K'} \downarrow & & \iota_{K \times K'} \downarrow \otimes \iota_{K \times K'} & & \downarrow \iota_{K \otimes K'} \quad (4.74) \\
 C(|K \times K'|) & \xrightarrow{d^{aw}} & C(|K \times K'|) \otimes C(|K \times K'|) & \xrightarrow{\pi_{\#}^1 \otimes \pi_{\#}^2} & C(|K|) \otimes C(|K'|),
 \end{array}$$

z których przemienność lewego jest ujęta w stwierdzeniu 4.4.1, natomiast prawy jest produktem tensorowym dwu diagramów postaci (4.55) – przemiennych z dokładnością do homotopii łańcuchowej.

Dowód tego, iż homomorfizmy ∇ i AW^{Δ} są wzajemnie odwrotnymi homotopijnymi równoważnościami, wynika teraz z twierdzenia Eilenberga–Zilbera 3.5.4, a właściwie z lematów 3.5.5–3.5.6 i przemienności diagramów (4.71) i (4.73) połączonych we właściwej kolejności. \square

Definicja 4.4.3. Homomorfizm $AW^{\Delta}: C(K \times K') \rightarrow C(K) \otimes C(K')$, opisany w (4.72), nazywamy symplecjajnym homomorfizmem Alexandra–Whitneya.

Ćwiczenie 4.4.2. Sprawdzić, że symplecjajny homomorfizm diagonalny d^{aw} jest złożeniem

$$d^{aw}: C(K) \xrightarrow{\Delta_{\#}} C(K \times K) \xrightarrow{AW^{\Delta}} C(K) \otimes C(K).$$

Wniosek 4.4.4. Dla dowolnych par kompleksów symplecjajnych (K, L) i (K', L') , produkt w homologiach symplecjajnych,

$$\begin{aligned}
 H(K, L) \otimes H(K', L') \ni [c] \otimes [c'] &\xrightarrow{\times} [\nabla(c \otimes c')] \\
 &\in H(K \times K', K \times L' \cup L \times K'), \quad (4.75)
 \end{aligned}$$

jest iloczynem krzyżowym zgodnym z (3.70) w sensie przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc}
 H(K, L) \otimes H(K', L') & \xrightarrow{\times} & H(K \times K', K \times L' \cup L \times K') \\
 \iota_* \otimes \iota_* \downarrow & & \downarrow \iota_* \\
 H(|K|, |L|) \otimes H(|K'|, |L'|) & \xrightarrow{\times} & H(|K \times K'|, |K \times L' \cup L \times K'|), \quad (4.76)
 \end{array}$$

w którym homomorfizmy ι_* są kanonicznymi izomorfizmami. \square

Równoważność iloczynów krzyżowych w homologiach symplecjajnych i singularnych pozwala na ich efektywne obliczanie.

Stwierdzenie 4.4.5. Dla dowolnych $p, q > 0$, iloczyn krzyżowy

$$H_p(\Delta^p, \partial\Delta^p) \otimes H_q(\Delta^q, \partial\Delta^q) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(\Delta^p \times \Delta^q, \partial(\Delta^p \times \Delta^q))$$

jest izomorfizmem. Iloczyn krzyżowy klas podstawowych $[\iota_p] \times [\iota_q]$ standardowych sympleksów Δ^p i Δ^q jest dodatnią klasą podstawową wielościanu $\Delta^p \times \Delta^q$.

Dowód. Skorzystajmy z naturalnej triangulacji obu sympleksów i ich produktu. Zgodnie z twierdzeniem 4.1.6, klasa $[t_p] \times [t_q]$, reprezentowana przez $c := \nabla(t_p \otimes t_q)$ jest krotnością klasy podstawowej, przy czym ze względu na współczynniki równe ± 1 , współczynnikiem proporcjonalności jest też ± 1 . Ze wzoru (3.67) wynika, że składnik łańcucha c odpowiadający ciągom $\mu = (1, \dots, p), \nu = (p+1, \dots, p+q)$ jest równy $+1 \cdot \sigma$, gdzie

$$\sigma = \langle (E_0, E_0) \dots (E_p, E_0) \dots (E_p, E_q) \rangle.$$

Korzystając ze stwierdzenia 4.1.4, czytelnik łatwo sprawdzi równość $\deg(\sigma) = 1$. \square

Wniosek 4.4.6. *Dla $p, q > 0$ i dowolnych punktów $P \in \mathbb{R}^p, Q \in \mathbb{R}^q$, iloczyn krzyżowy dodatnich orientacji przestrzeni euklidesowych w P i w Q jest dodatnią orientacją produktu w punkcie (P, Q) ,*

$$\vartheta_P^+ \times \vartheta_Q^+ = \vartheta_{(P,Q)}^+ \in H_{p+q}(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{(P, Q)\}). \quad (4.77)$$

W szczególności, zachodzi równość

$$\vartheta_p^+ \times \vartheta_q^+ = \vartheta_{p+q}^+,$$

dla produktu klas orientacji w zerze.

Dowód. Wybierzmy punkty $P' \in \text{int } \Delta^p, Q' \in \text{int } \Delta^q$. Dla dowolnych punktów $P \in \mathbb{R}^p, Q \in \mathbb{R}^q$, naturalność iloczynu krzyżowego implikuje przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccc} H_p(\Delta^p, \partial\Delta^p) \otimes H_q(\Delta^q, \partial\Delta^q) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q}(\Delta^p \times \Delta^q, \partial(\Delta^p \times \Delta^q)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus \{P'\}) \otimes H_q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q \setminus \{Q'\}) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q}(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{(P', Q')\}) \\ t_* \otimes t_* \downarrow & & \downarrow (t \times t)_* \\ H_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus \{P\}) \otimes H_q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q \setminus \{Q\}) & \xrightarrow{\times} & H_{p+q}(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{(P, Q)\}), \end{array}$$

w którym funkcje oznaczone jako t (a więc także $t \times t$) są przesunięciami o odpowiedni wektor. Iloczyn klas podstawowych w pierwszym wierszu przechodzi w kolejnych wierszach na iloczyn odpowiednich orientacji. \square

Wniosek 4.4.7. *Dla dowolnych $p, q > 0$, iloczyn krzyżowy*

$$H_p(B^p, S^{p-1}) \otimes H_q(B^q, S^{q-1}) \xrightarrow{\times} H_{p+q}(B^p \times B^q, \partial(B^p \times B^q))$$

jest izomorfizmem. Iloczyn klas podstawowych $\vartheta_p \times \vartheta_q$ jest dodatnią klasą podstawową zwartego wypukłego podzbiorku $B^p \times B^q \subset \mathbb{R}^{p+q}$. \square

Ćwiczenie 4.4.3. Wykorzystać wniosek 4.4.6 dla wskazania izomorfizmu $H_{p+q}(S^p \times S^q) \cong \mathbb{Z}$, w którym jedynie $1 \in \mathbb{Z}$ odpowiada generator $\theta_p \times \theta_q$.

Rozdział 5

Ciągi dokładne

Pojęciem, a właściwie narzędziem, którego siłę spróbujemy przybliżyć czytelnikowi w bieżącym rozdziale, jest ciąg dokładny.

Definicja 5.0.4. *Ciąg homomorfizmów grup*

$$\dots G_{n+1} \xrightarrow{h_{n+1}} G_n \xrightarrow{h_n} G_{n-1} \dots$$

jest dokładny, jeśli dla każdego n zachodzi równość $\ker h_n = \operatorname{im} h_{n+1}$.

Warunkiem koniecznym dokładności ciągu są oczywiście równości $h_n \circ h_{n+1} = 0$, dla wszystkich kolejnych złożeń.

5.1 Konstrukcje uniwersalne

W rozdziale 3 poznaliśmy już silne konsekwencje istnienia ciągu dokładnego pary. Ciąg dokładny (3.18) powstał z homomorfizmów indukowanych uzupełnionych o homomorfizm łączący. Dla konstrukcji i dokładności ciągu istotny był fakt, że trzy kompleksy łańcuchowe $C = (\{C_n\}, \{\partial_n\})$, $C' = (\{C'_n\}, \{\partial'_n\})$ i $C'' = (\{C''_n\}, \{\partial''_n\})$ i ich homomorfizmy tworzą krótki ciąg dokładny (por. def. 4.3.2)

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \longrightarrow 0. \quad (5.1)$$

W szczególności, $i: C' \rightarrow C$ jest monomorfizmem, a $j: C \rightarrow C''$ – epimorfizmem.

Dla dowolnego cyklu $c'' \in Z_n(C'')$ wybieramy zatem przeciwobraz w $j^{-1}c''$, czyli łańcuch $c \in C_n$ taki, że $j(c) = c''$. Wówczas brzeg $\partial_n(c)$ leży w jądrze $\ker j = \operatorname{im} i$, a więc jest postaci $\partial_n(c) = i(c')$, dla pewnego $c' \in C'_{n-1}$. Pozostawiamy czytelnikowi sprawdzenie, że c' jest cyklem i że klasa $[c'] \in H_{n-1}(C')$ nie zależy od wyboru reprezentanta w klasie homologii $[c''] \in H_n(C'')$. Całość konstrukcji

ilustruje diagram

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{i_n} & C_n & \xrightarrow[\leftarrow c'']{j_n} & C''_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \partial'_n \downarrow & & \partial_n \downarrow & & \partial''_n \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow[\leftarrow \partial_{n-1} c']{i_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{j_{n-1}} & C''_{n-1} & \longrightarrow & 0.
 \end{array} \tag{5.2}$$

Dla otrzymanego w ten sposób *homomorfizmu łączącego* przyjmujemy oznaczenie

$$\partial_*[c''] := [c'']. \tag{5.3}$$

Twierdzenie 5.1.1. *Dla dowolnego krótkiego ciągu dokładnego (5.1) wzór (5.3) definiuje homomorfizmy grup homologii $\partial_*: H_n(C'') \rightarrow H_{n-1}(C')$, $n \geq 0$, takie, że następujący długi ciąg homomorfizmów*

$$\xrightarrow{\partial_*} H_n(C') \xrightarrow{i_*} H_n(C) \xrightarrow{j_*} H_n(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C') \xrightarrow{i_*} \tag{5.4}$$

jest dokładny.

Każdy homomorfizm krótkich ciągów dokładnych $0 \rightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \rightarrow 0$ i $0 \rightarrow D' \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{\beta} D'' \rightarrow 0$, czyli układ odwzorowań łańcuchowych $h: C \rightarrow D$, $h': C' \rightarrow D'$ i $h'': C'' \rightarrow D''$, dla których następujący diagram jest przemienny

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & C'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & h' \downarrow & & h \downarrow & & h'' \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & D' & \xrightarrow{\alpha} & D & \xrightarrow{\beta} & D'' & \longrightarrow & 0,
 \end{array} \tag{5.5}$$

wyznacza przemienny diagram

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \xrightarrow{\partial_*} & H_n(C') & \xrightarrow{i_*} & H_n(C) & \xrightarrow{j_*} & H_n(C'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{i_*} & & \\
 & h'_* \downarrow & & h_* \downarrow & & h''_* \downarrow & & h'_* \downarrow & & & \\
 \xrightarrow{\partial_*} & H_n(D') & \xrightarrow{\alpha_*} & H_n(D) & \xrightarrow{\beta_*} & H_n(D'') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(D') & \xrightarrow{\alpha_*} & &
 \end{array} \tag{5.6}$$

długich ciągów dokładnych.

Dowód. Dowód, będąc w istocie powtórzeniem dowodu twierdzenia 3.2.2, stanowi bardzo pouczające ćwiczenie dla cierpliwego czytelnika. \square

Wniosek 5.1.2. *Dla dowolnej trójki przestrzeni topologicznych $A \subset B \subset X$ istnieje naturalny długi ciąg dokładny*

$$\dots H_n(B, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, B) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(B, A) \dots$$

w którym homomorfizm łączący jest złożeniem $H(X, B) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(B) \rightarrow H_{n-1}(B, A)$.

Dowód. Ćwiczenie. \square

Ćwiczenie 5.1.1. Sprawdzić, że w diagramie (5.5) homomorfizmy h i h' spełniające warunek przemienności $h \circ i = \alpha \circ h'$ wyznaczają jednoznacznie homomorfizm h'' . Analogicznie – h i h'' wyznaczają jednoznacznie homomorfizm h' . Podać przykład, że środkowy homomorfizm nie jest jednoznacznie wyznaczony przez skrajne.

Ważna w praktyce możliwość zastosowań ciągów dokładnych zawarta jest w następującym lemacie.

Lemat 5.1.3 (Twierdzenie o pięciu izomorfizmach). *Załóżmy, że poniższy przemienny diagram homomorfizmów grup*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{g} & B & \xrightarrow{h} & C & \xrightarrow{i} & D & \xrightarrow{j} & E \\ \alpha \downarrow \cong & & \beta \downarrow \cong & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow \cong & & \varepsilon \downarrow \cong \\ A' & \xrightarrow{g'} & B' & \xrightarrow{h'} & C' & \xrightarrow{i'} & D' & \xrightarrow{j'} & E' \end{array} \quad (5.7)$$

ma dokładne wiersze. Jeżeli α i β oraz δ i ε są izomorfizmami, to środkowy homomorfizm γ również jest izomorfizmem.

Dowód. Dla dowodu monomorficzności γ weźmy dowolne $c \in \ker \gamma$. Ponieważ $\delta i(c) = i' \gamma(c) = 0$, c należy do jądra $\ker i = \operatorname{im} h$, a zatem $c = h(b)$ dla pewnego $b \in B$. Teraz z równości $h' \beta(b) = \gamma h(b) = 0$ wynika, że $\beta(b)$ należy do jądra $\ker h' = \operatorname{im} g'$, a więc jest postaci $\beta(b) = g' \alpha(a) = \beta g(a)$ dla pewnego $a \in A$. Otrzymana równość $b = g(a)$ implikuje $c = hg(a) = 0$.

Dowód epimorficzności również polega na intensywnej „wędrówce” po diagramie (5.7). Dla dowolnego $c' \in C'$, element $d = \delta^{-1} i'(c') \in D$ spełnia warunek $\delta(d) = i'(c')$, a zatem równość $\varepsilon j(d) = j' \delta(d) = 0$ dowodzi, że d należy do jądra $\ker j = \operatorname{im} i$. Niech $c \in C$ będzie elementem takim, że $i(c) = d$. Wówczas z równości $i'(c') = \delta i(c) = i' \gamma(c)$ wynika, że różnica $c' - \gamma(c)$ należy do jądra $\ker i' = \operatorname{im} h'$. Biorąc $b \in B$ takie, że $c' - \gamma(c) = h' \beta(b)$, otrzymujemy $c' = \gamma(c + h(b))$. \square

Wniosek 5.1.4. *Jeżeli w diagramie (5.5) dowolne dwa spośród homomorfizmów h, h' i h'' indukują izomorfizm w homologiach, to trzeci również indukuje izomorfizm.* \square

We wcześniejszych rozdziałach wielokrotnie wykazywana była homotopijna równoważność różnych kompleksów łańcuchowych – dla podziału barycentrycznego, lokalizacji czy kompleksów symplecjalnych – jako podstawowa przyczyna izomorfizmów odpowiednich grup homologii. Mając w perspektywie w kolejnym rozdziale dalsze, bardziej zaawansowane konstrukcje *kohomologii i iloczynów*, traktujemy równoważność homotopijną jako gwarancję zachowania *pełni informacji* zawartej w kompleksie łańcuchowym, mimo niekiedy radykalnej redukcji wymiaru, jak w przypadku równoważnych kompleksów symplecjalnych i singularnych, $C(K) \simeq C(|K|)$. Twierdzenie zamykające ten podrozdział zasadniczo upraszcza problem równoważności kompleksów łańcuchowych.

Twierdzenie 5.1.5 (Abstrakcyjne twierdzenie o homotopijnej równoważności). *Jeśli kompleksy łańcuchowe C i C' są wolne, to dowolny homomorfizm $h: C \rightarrow C'$*

jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy homomorfizm indukowany w homologiach $h_*: H(C) \rightarrow H(C')$ jest izomorfizmem.

Przygotowując się do dowodu, wykorzystamy pojęcie stożka. Stożkiem homomorfizmu $h: C \rightarrow C'$ nazwiemy kompleks łańcuchowy \bar{C} złożony z grup $\bar{C}_n = C_{n-1} \oplus C'_n$ i operatorów brzegu

$$\bar{\partial}_n(c, c') = (-\partial_{n-1}c, h(c) + \partial'_n c')$$

dla $c \in C_{n-1}, c' \in C'_n, n \in \mathbb{Z}$. Podstawą dla dowodu twierdzenia będą następujące dwa lematy.

Lemat 5.1.6. *h jest homotopijną równoważnością wtedy i tylko wtedy, gdy stożek \bar{C} jest ściągalny, tzn. gdy istnieje homotopia $\text{id}_{\bar{C}} \simeq 0$.*

Lemat 5.1.7. *Dla dowolnego homomorfizmu $h: C \rightarrow C'$ istnieje ciąg dokładny*

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(\bar{C}) \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{h_*} H_n(C') \longrightarrow H_n(\bar{C}) \longrightarrow \dots \quad (5.8)$$

Dowód Lematu 5.1.6. Jeśli $\bar{D}: \text{id}_{\bar{C}} \simeq 0$ jest homotopią – łańcuchowym ściągnięciem stożka, to zapisując działanie \bar{D} w postaci

$$\begin{aligned} \bar{D}_{n+1}(c, 0) &= (D_n c, \Lambda c) && \text{dla } c \in C_n \\ \bar{D}_n(0, c') &= (h'(c'), -D'_n c') && \text{dla } c' \in C'_n, \end{aligned}$$

otrzymujemy homomorfizm $h': C' \rightarrow C$ i homotopie łańcuchowe $D: h'h \simeq \text{id}_C$, $D': hh' \simeq \text{id}_{C'}$. Dokładniej, warunek homotopii dla \bar{D} jest równoważny następującej czwórce warunków:

- (i) $\partial_{n+1}D_n c + D_{n-1}\partial_n c = h'h(c) - c$,
- (ii) $hD_n c - D'_n h(c) + \partial'_{n+2}\Lambda c - \Lambda\partial_n c$,
- (iii) $\partial_n h'(c') = h'\partial'_n c'$,
- (iv) $\partial'_{n+1}D'_n c' + D'_{n-1}\partial'_n c' = hh'(c') - c'$,

dla $c \in C_n, c' \in C'_n, n \in \mathbb{Z}$.

Jeśli teraz odwrócić kolejność rozumowania i wyjść od homomorfizmu $h': C' \rightarrow C$ oraz dowolnych homotopii łańcuchowych $D: h'h \simeq \text{id}_C$, $D': hh' \simeq \text{id}_{C'}$, to do wskazania homotopii \bar{D} brakuje jeszcze tajemniczego homomorfizmu $\Lambda: C_n \rightarrow C'_{n+2}$ spełniającego warunek (ii). W tym miejscu dowodu Spanier [10] nakazuje przyjąć $\Lambda := -D'(D'h - hD)$ i zmodyfikować homotopię D o składnik $h'(D'h - hD)$. Pozostaje sprawdzić, że wzory

$$\begin{aligned} \bar{D}_n(c, 0) &= (D_{n-1}c + h'(D'_{n-1}h - hD_{n-1})c, -D'_n(D'_{n-1}h - hD_{n-1})c) && \text{dla } c \in C_{n-1} \\ \bar{D}_n(0, c') &= (h'(c'), -D'_n c') && \text{dla } c' \in C'_n, \end{aligned}$$

definiują łańcuchowe ściągnięcie stożka. □

Ćwiczenie 5.1.2. Sprawdzić, że stożek \bar{C} jest kompleksem łańcuchowym. Uzupełnić powyższy dowód o brakujące obliczenia.

Dowód Lematu 5.1.7. Zgodnie z definicją stożka istnieje włożenie $C' \hookrightarrow \bar{C}$, $c' \mapsto (0, c')$, a zatem także krótki ciąg dokładny kompleksów łańcuchowych

$$0 \longrightarrow C' \longrightarrow \bar{C} \longrightarrow \bar{C}/C' \longrightarrow 0.$$

Pozostaje sprawdzić, że w odpowiadającym mu ciągu dokładnym homologii można wymienić ogniwa $H_{n+1}(\bar{C}/C') \rightarrow H_n(C')$, $n \in \mathbb{Z}$, wykorzystując przemienne diagramy

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(\bar{C}/C') & \xrightarrow{\partial_*} & H_n(C') \\ \downarrow \cong & & \parallel \\ H_n(C) & \xrightarrow{h_*} & H_n(C') \end{array} \quad (5.9)$$

gdzie izomorfizm na poziomie grup łańcuchów $\bar{C}_n/C'_n \cong C_{n-1}$, dla $n \in \mathbb{Z}$, jest z dokładnością do znaku przemienny z operatorami brzegu. \square

Ćwiczenie 5.1.3. Sprawdzić przemienność diagramu (5.9). Podać jawną postać homomorfizmów tworzących docelowy ciąg dokładny.

Dowód Twierdzenia 5.1.5. W ciągu dokładnym (5.8) homomorfizmy h_* są izomorfizmami wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie grupy homologii stożka znikają. Pozostaje wykazać, że w tym przypadku stożek jest homotopijnie ściągalny. Zakładamy zatem, że kompleks łańcuchowy wolny $\bar{C} = (\{\bar{C}_n\}, \{\bar{\partial}_n\})$ ma zerowe grupy homologii, czyli $B_n(\bar{C}) = Z_n(\bar{C})$, dla wszystkich n . Z założenia wiemy, że są to grupy wolne – jako podgrupy grup wolnych – a więc dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ istnieje homomorfizm $s_{n-1}: Z_{n-1}(\bar{C}) \rightarrow \bar{C}_n$ prawostronnie odwrotny do $\bar{\partial}_n$. Dla każdego n , poprawnie określone jest złożenie

$$D_n = s_n(\text{id}_n - s_{n-1}\bar{\partial}_n): \bar{C}_n \rightarrow \bar{C}_{n+1}$$

i ciąg $D = \{D_n\}$ jest szukaną homotopią łańcuchową $\text{id}_{\bar{C}} \simeq 0$. \square

5.2 Ciągi Mayera–Vietorisa

W poprzednich rozdziałach pojawiły się dwa izomorfizmy wiążące homologie relatywne i opatrzone nazwą *Twierdzenie o wycinaniu*. Dla dowolnych par przestrzeni topologicznych mamy zatem wniosek 3.3.9

$$H(X, A) \cong H(X \setminus W, A \setminus W), \quad \text{gdy } \bar{W} \subset \text{int } A, \quad (5.10)$$

natomiast dla par kompleksów symplecjalnych – stwierdzenie 4.1.3

$$H(|K|, |L|) \cong H(|K'|, |K'| \cap |L|), \quad \text{gdy } K = L \cup K', \quad (5.11)$$

co oznacza *wycinanie* podzbioru $W = |K| \setminus |K'| \subset |L|$.

Definicja 5.2.1. *Włożenie par przestrzeni topologicznych $(X \setminus U, A \setminus U) \rightarrow (X, A)$ jest wycinaniem, jeśli indukuje izomorfizm $H(X \setminus U, A \setminus U) \cong H(X, A)$ grup homologii.*

W dalszej części rozdziału podamy alternatywne twierdzenie, które ujmuje własność wycinania w ciąg dokładny i wiąże ją ze wzajemnym położeniem podzbiorów danej przestrzeni topologicznej X .

Definicja 5.2.2. *Za triadę będziemy uważać układ $(X; X_1, X_2)$ złożony z przestrzeni topologicznej X i dwu jej podzbiorów X_1 i X_2 . Triada jest dokładna, gdy spełnia równoważne warunki sformułowane poniżej.*

Stwierdzenie 5.2.1. *Dla dowolnej triady $(X; X_1, X_2)$, następujące warunki są równoważne:*

- (i) *Włożenie $i_1: (X_1, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_2)$ jest wycinaniem.*
- (ii) *Włożenie $i_2: (X_2, X_1 \cap X_2) \rightarrow (X_1 \cup X_2, X_1)$ jest wycinaniem.*
- (iii) *$(i_{1*}, i_{2*}): H(X_1, X_1 \cap X_2) \oplus H(X_2, X_1 \cap X_2) \cong H(X_1 \cup X_2, X_1 \cap X_2)$.*
- (iv) *Włożenie podkompleksu $C\{X_1, X_2\} = C(X_1) + C(X_2)$ łańcuchów wpisanych w pokrycie zbioru $X_1 \cup X_2$ indukuje izomorfizm $HC\{X_1, X_2\} \cong H(X_1 \cup X_2)$.*
- (v) *To samo włożenie indukuje izomorfizm $H(C(X)/C\{X_1, X_2\}) \cong H(X, X_1 \cup X_2)$.*

Opisana w twierdzeniu dokładność triady nie zależy od otaczającej przestrzeni X . Część autorów uwzględnia to w nazewnictwie, pisząc o parze (X_1, X_2) spełniającej aksjomaty wycinania (i)–(ii).

Dowód. Ćwiczenie. Sprowadzić każdą z własności (i)–(iii) i (v) do (iv). Wykorzystać izomorfizmy grup

$$\begin{aligned} \frac{C(X_1)}{C(X_1) \cap C(X_2)} &\xrightarrow{\cong} \frac{C(X_1) + C(X_2)}{C(X_2)} \\ \frac{C(X_1)}{C(X_1) \cap C(X_2)} \oplus \frac{C(X_2)}{C(X_1) \cap C(X_2)} &\xrightarrow{\cong} \frac{C(X_1) + C(X_2)}{C(X_1) \cap C(X_2)} \end{aligned}$$

□

Przykłady triad dokładnych obejmują m.in. sytuację, gdy $X_1, X_2 \subset X$ są podzbiarami otwartymi. Dokładne są również triady utworzone z przestrzeni dwu podkompleksów symplecjalnych położonych w większym g.k.s. W bieżącym podrozdziale wykażemy także dokładność triad $(X; A_1, A_2)$ złożonych z CW –kompleksu i dowolnych dwu CW –podkompleksów.

Niezależnie od swej ewentualnej dokładności, każda triada wyznacza dwa krótkie ciągi dokładne – bezwzględny

$$0 \longrightarrow C(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_{1\#}, -j_{2\#})} C(X_1) \oplus C(X_2) \xrightarrow{(\iota_1, \iota_2)} C(X_1) + C(X_2) \longrightarrow 0, \quad (5.12)$$

gdzie ι_h, j_h są włożeniami dla $h = 1, 2$ – i relatywny

$$0 \longrightarrow C(X, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_{1\#}, -j_{2\#})} C(X, X_1) \oplus C(X, X_2) \xrightarrow{(\iota_{1*}, \iota_{2*})} C(X)/(C(X_1) + C(X_2)) \longrightarrow 0. \quad (5.13)$$

Twierdzenie 5.2.2 (Ciągi Mayera–Vietorisa). *Każda triada dokładna $(X; X_1, X_2)$ wyznacza dwa długie ciągi dokładne grup homologii:*

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\delta_*} H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_{1*}, -j_{2*})} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\delta_*} \dots \quad (5.14)$$

$$\dots \longrightarrow H_{n+1}(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\delta_*} H_n(X, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_{1*}, -j_{2*})} H_n(X, X_1) \oplus H_n(X, X_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} H_n(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\delta_*} \dots \quad (5.15)$$

□

Ciągi dokładne (5.14)–(5.15) nazywane są, odpowiednio, *ciągami Mayera–Vietorisa* i *relatywnym ciągiem Mayera–Vietorisa* triady dokładnej.

Ćwiczenie 5.2.1. Sprawdzić dokładność ciągów (5.12–5.13).

Ćwiczenie 5.2.2. Podać jawną postać homomorfizmów łączących δ_* w ciągach Mayera–Vietorisa. Sprawdzić, że homomorfizmy te są identyczne ze złożeniami, odpowiednio

$$H_{n+1}(X_1 \cup X_2) \rightarrow H_{n+1}(X_1 \cup X_2, X_2) \xleftarrow{\cong} H_{n+1}(X_1, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X_1 \cap X_2) \quad (5.16)$$

oraz

$$H_{n+1}(X, X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_*} H_n(X_1 \cup X_2, X_1) \xleftarrow{\cong} H_n(X_2, X_1 \cap X_2) \rightarrow H_n(X, X_1 \cap X_2). \quad (5.17)$$

Ćwiczenie 5.2.3. Sformułować i udowodnić własność naturalności ciągów Mayera–Vietorisa względem odwzorowań triad dokładnych.

W przypadku, gdy przekrój $X_1 \cap X_2$ jest niepusty, możemy wykorzystać naturalność ciągu Mayera–Vietorisa i porównać go z ciągiem triady (dokładnej!) $(P; P, P)$, w której $P = \{x_0\} \subset X_1 \cap X_2$ jest zbiorem jednopunktowym. Rozkład (3.23) daje wówczas

Wniosek 5.2.3. *Dowolna triada dokładna $(X; X_1, X_2)$, spełniająca warunek $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, wyznacza zredukowany ciąg dokładny Mayera–Vietorisa*

$$\dots \longrightarrow H_1(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\delta_*} \tilde{H}_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(j_{1*}, -j_{2*})} \tilde{H}_0(X_1) \oplus \tilde{H}_0(X_2) \xrightarrow{(i_{1*}, i_{2*})} \tilde{H}_0(X_1 \cup X_2) \rightarrow 0. \quad (5.18)$$

□

Wykorzystamy teraz skonstruowane wyżej ciągi dokładne dla relatywnie prostego dowodu ważnych w topologii \mathbb{R}^n twierdzeń pochodzących w tym sformułowaniu od Brouwera. Ze względu na trywialność grup homologii przestrzeni euklidesowej – niezależnie od wymiaru, całość rozważań przenosimy do sfery S^n będącej uzwarciem \mathbb{R}^n .

Lemat 5.2.4. *Dla dowolnego podzbioru $A \subset S^n$ homeomorficznego z kostką I^k , $0 \leq k \leq n$, przestrzeń $S^n \setminus A$ ma trywialne wszystkie grupy homologii.*

Dowód. Przypadek $k = 0$, jako oczywisty, pozwala rozpocząć dowód indukcyjny. Przypuśćmy zatem, że teza lematu jest prawdziwa dla kostek wymiaru $m < k$, dla pewnego $k < n$. Ustalmy homeomorfizm $h: J \times I \rightarrow A$, gdzie $J = I^{k-1}$. Kładąc $A' = h(J \times [0, \frac{1}{2}])$ i $A'' = h(J \times [\frac{1}{2}, 1])$ możemy rozważyć triadę dokładną $(S^n; S^n \setminus A', S^n \setminus A'')$ i zredukowany ciąg Mayera-Vietorisa (5.18), w którym wszystkie człony $\tilde{H}_q(S^n \setminus (A' \cap A''))$ znikają – z założenia indukcyjnego. Dokładność ciągu daje – dla każdego $q \geq 0$ – izomorfizm

$$(j'_*, j''_*): \tilde{H}_q(S^n \setminus A) \cong \tilde{H}_q(S^n \setminus A') \oplus \tilde{H}_q(S^n \setminus A''),$$

gdzie $j': S^n \setminus A \subset S^n \setminus A'$ i $j'': S^n \setminus A \subset S^n \setminus A''$ są włożeniami. Jeśli zatem istnieje element niezerowy $z \in \tilde{H}_q(S^n \setminus A)$, to różny od zera jest także (przynajmniej) jeden z obrazów j'_*z, j''_*z . W zależności od sytuacji powtarzamy powyższą konstrukcję dla A' lub A'' i otrzymujemy nieskończony ciąg podzbiorów

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

taki, że:

- (i) obraz klasy z w każdej z grup $\tilde{H}_q(S^n \setminus A_j), j > 0$, jest niezerowy,
- (ii) przekrój $B = \bigcap_j A_j$ jest homeomorficzny z kostką J .

Z założenia indukcyjnego wynika, że obraz klasy z znika w grupie $\tilde{H}_q(S^n \setminus B) = 0$, a zatem, jeśli z jest reprezentowane przez cykl $c \in \tilde{Z}_q(S^n \setminus A)$, to istnieje łańcuch $c' \in C_{q+1}(S^n \setminus B)$ taki, że $c = \partial_{q+1}c'$. Nośnik $|c'|$ łańcucha c' , jako zwarty podzbiór sumy $\bigcup_j (S^n \setminus A_j)$, zawiera się w pewnym składniku $S^n \setminus A_{j_0}$. Oznacza to, że obraz klasy z znika w $\tilde{H}_q(S^n \setminus A_{j_0})$, co daje sprzeczność z własnością (i). \square

Wniosek 5.2.5. *Jeśli $B \subset S^n$ jest dowolnym podzbiorem homeomorficznym ze sferą $S^k, 0 \leq k < n$, to dopełnienie $S^n \setminus B$ ma grupy homologii takie same, jak sfera wymiaru $n - k - 1$.*

Dowód. Dla $k = 0$, B jest zbiorem dwupunktowym i przestrzeń $S^n \setminus B$, homeomorficzna z \mathbb{R}^n bez punktu, jest homotopijnie równoważna sferze S^{n-1} . W przypadku $k > 0$, rozkładamy zbiór B na dwie domknięte półsfery $B = A_1 \cup A_2$ homeomorficzne z kostką I^k i mające przekrój homeomorficzny z S^{k-1} . Prowadzi to do zredukowanego ciągu Mayera-Vietorisa

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus A_1) \oplus \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus A_2) &\rightarrow \tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus (A_1 \cap A_2)) \rightarrow \\ &\rightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus B) \rightarrow \tilde{H}_q(S^n \setminus A_1) \oplus \tilde{H}_q(S^n \setminus A_2) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

w którym człony zawierające sumy proste znikają. Otrzymane izomorfizmy

$$\tilde{H}_{q+1}(S^n \setminus (A_1 \cap A_2)) \cong \tilde{H}_q(S^n \setminus B) \quad \text{dla } q \geq 0,$$

pozwalają na indukcyjny dowód tezy – względem wymiaru k wycinanej sfery. \square

Ćwiczenie 5.2.4. Przy założeniach lematu 5.2.4 i wniosku 5.2.5 dotyczących wycinanych zbiorów A i B , obliczyć grupy homologii $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus A)$ i $\tilde{H}_q(\mathbb{R}^n \setminus B)$, $q \geq 0$.

Poniższe twierdzenie stanowi wzmocnienie otrzymanego wyżej wyniku w przypadku ostatniego kroku indukcyjnego – dla $k = n - 1$.

Twierdzenie 5.2.6 (Jordana-Brouwera o wycinaniu). *Homeomorficzny obraz $(n - 1)$ -wymiarowej sfery rozcina S^n na dwie składowe spójności i jest ich wspólnym brzegiem.*

Dowód. Niech $B \subset S^n$ będzie podzbiorem homeomorficznym z S^{n-1} . Z wniosku 5.2.5 wynika, że $H_0(S^n \setminus B) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, a więc zbiór $S^n \setminus B$ ma dwie składowe łukowej spójności – zbiory otwarte U i V . Brzegi $\partial U, \partial V$ zawarte są w B , gdyż są rozłączne zarówno z U , jak i z V . Dla dowodu inkluzji

$$B \subset \partial U \cap \partial V = \bar{U} \cap \bar{V}$$

weźmy dowolny punkt $x \in B$ i rozetnijmy sferę B w dowolnie małym jego otoczeniu. Dokładniej, niech N będzie dowolnym otoczeniem punktu x w S^n . Przekrój $B \cap N$ jest wówczas otoczeniem x w $B \cong S^{n-1}$ i zawiera otoczenie $A \subset B \cap N$ takie, że $B \setminus A$ jest homeomorficzne z kostką I^{n-1} . Wynikająca z lematu 5.2.4 równość $\tilde{H}_0(S^n \setminus (B \setminus A)) = 0$ oznacza łukową spójność zbioru

$$S^n \setminus (B \setminus A) = U \cup V \cup A.$$

Dowolne dwa punkty $p \in U$ oraz $q \in V$ mogą być zatem połączone drogą $\omega: I \rightarrow U \cup V \cup A$ – z konieczności przecinającą zbiór A . Pierwszy z punktów przekroju $\omega(I) \cap A$ należy do \bar{U} , ostatni – do \bar{V} . Zawierające zbiór A otoczenie $N \ni x$ ma zatem punkty wspólne z U i z V , a więc $x \in \bar{U} \cap \bar{V}$. Pozostaje zauważyć, że dla otwartych podzbiorów S^n łukowa spójność jest równoważna spójności. \square

Zaczerpniętą z [10] listę topologicznych konsekwencji dających się wyprowadzić z faktu istnienia ciągu dokładnego Mayera-Vietorisa kończy

Twierdzenie 5.2.7 (Brouwera o niezmienniczości obszaru). *Jeśli U jest podzbiorem otwartym sfery S^n , a $V \subset S^n$ zbiorem homeomorficznym z U , to V również jest podzbiorem otwartym.*

Dowód. Ustalmy homeomorfizm $h: U \rightarrow V$. Teza twierdzenia jest lokalna w tym sensie, że dla dowolnego punktu $x \in U$ wystarczy wskazać otoczenie, którego obraz jest otwarty w S^n . Jeśli przyjąć za A domknięte otoczenie x w U homeomorficzne z kostką I^n o brzegu $B \cong S^{n-1}$, to lemat 5.2.4 zapewnia spójność dopełnienia $S^n \setminus A'$, $A' = h(A)$, natomiast twierdzenie 5.2.6 daje rozkład zbioru $S^n \setminus B'$, $B' =$

$h(B)$, na dokładnie dwie składowe spójności. Ponieważ różnica $A' \setminus B' = h(A \setminus B)$ jest zbiorem spójnym, równość

$$S^n \setminus B' = (S^n \setminus A') \cup (A' \setminus B')$$

jest dokładnie rozkładem na składowe. W szczególności, oba zbiory są otwarte w S^n i $h(A \setminus B)$ jest otoczeniem punktu $h(x)$. \square

5.3 Homologie CW-kompleksów

Przygotowując się do radykalnego uproszczenia kompleksów łańcuchowych i procedury obliczania grup homologii dla CW-kompleksów, zaczniemy od uproszczenia nazwy – parę (X, A) będziemy nazywać CW-parą, jeśli X jest CW-kompleksem, a $A \subset X$ podkompleksem. Zgodnie z twierdzeniem 2.4.9, każda CW-para (X, A) jest parą kołnierzykową. W pierwszej kolejności pozwoli nam to na rozszerzenie własności wycinania (5.11) na dowolne CW-kompleksy. Zaczniemy od wykazania pomocniczej własności wykorzystywanej głównie dla retraktów deformacyjnych (p. definicja 1.1.3).

Lemat 5.3.1. *Dla dowolnej pary domkniętej (X, A) i otoczenia $U \supset A$ w X takiego, że włożenie $A \hookrightarrow U$ jest homotopijną równoważnością, włożenie par wyznacza izomorfizm w homologiach $H(X, A) \cong H(X, U) \cong H(X \setminus A, U \setminus A)$.*

Dowód. Wystarczy porównać ciągi dokładne par (X, A) i (X, U) i zastosować lemat 5.1.3. \square

Twierdzenie 5.3.2. *Dla dowolnej pary kołnierzykowej (X, A) , jeśli przestrzeń $Z = X \cup_f Y$ powstaje z Y przez doklejenie X za pomocą odwzorowania $f: A \rightarrow Y$, to kanoniczne rozszerzenie $\bar{f}: (X, A) \rightarrow (Z, Y)$ funkcji f indukuje izomorfizm grup homologii $\bar{f}_*: H(X, A) \xrightarrow{\cong} H(Z, Y)$.*

Dowód. Niech U będzie kołnierzykiem zbioru $A \subset X$. Zgodnie z twierdzeniem 1.4.5, $\bar{f}(U) \cup Y$ jest kołnierzykiem zbioru Y w Z . Dla każdego $n \geq 0$, w diagramie przemianym

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, U) & \longleftarrow & H_n(X \setminus A, U \setminus A) \\ \bar{f}_* \downarrow & & \bar{f}_* \downarrow & & (\bar{f}|_{X \setminus A})_* \downarrow \cong \\ H_n(Z, Y) & \longrightarrow & H_n(Z, \bar{f}(U) \cup Y) & \longleftarrow & H_n(Z \setminus Y, \bar{f}(U \setminus A)) \end{array} \quad (5.19)$$

wiersze – indukowane przez inkluzje – są izomorfizmami, a więc kolejno środkowy i lewy homomorfizm \bar{f}_* też jest izomorfizmem. \square

Jako wniosek dostajemy zapowiadzaną silną własność wycinania dla CW-kompleksów (i w szczególności też – dowolnych kompleksów sympleksyjnych).

Wniosek 5.3.3 (Twierdzenie o wycinaniu dla par kołnierzykowych). *Dla dowolnej pary kołnierzykowej (X, A) rzutowanie $X \rightarrow X/A$ wyznacza kanoniczny izomorfizm w homologiach $H(X, A) \cong H(X/A, \{A\}) = \tilde{H}(X/A)$.* \square

W przypadku dowolnej CW -pary (X, A) mamy zatem silną redukcję przestrzeni topologicznej, niemożliwą do sformułowania w kategorii kompleksów sympleksyjnych. Twierdzenie o izomorfizmie $H(|K|, |L|) \cong H(C(K)/C(L))$, dla relatywnych homologii sympleksyjnych, pozwalało jednak na anihilację wszystkich komórek (sympleksów) zawartych w podkompleksie, co można uważać za odpowiednio silną, analogiczną redukcję kompleksów łańcuchowych. Pokażemy teraz, że podobna silna redukcja możliwa jest dla wszystkich CW -par.

Punktem wyjścia do kolejnej redukcji i wprowadzenia łańcuchów i homologii komórkowych jest twierdzenie 5.3.2 zastosowane do sytuacji ujętej w poniższym lemacie.

Lemat 5.3.4. *Jeśli (X, A) jest dowolną CW -parą, a \mathcal{G}_X i $\mathcal{G}_A \subset \mathcal{G}_X$ – CW -rozkładami X i A , to dla każdego $n > 0$ odwzorowania charakterystyczne $\Phi_e, e \in \mathcal{G}_X$, wyznaczają homeomorfizm*

$$\coprod_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} B^n \cup_{(\phi_e)} (X^{n-1} \cup A) \xrightarrow{\cong} X^n \cup A, \quad (5.20)$$

gdzie suma rozłączna rozciąga się na n -komórki ze zbioru $\mathcal{G}_{X \setminus A}^n = \mathcal{G}_X^n \setminus \mathcal{G}_A^n$.

Dowód. Ćwiczenie. □

Przyjmując oznaczenia $X_A^n := X^n \cup A$, dla $n \geq 0$, $X_A^{-1} := A$, możemy sformułować następujący

Wniosek 5.3.5. *Dla dowolnej CW -pary (X, A) odwzorowania charakterystyczne $\Phi_e, e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n$, wyznaczają izomorfizm*

$$H_q(X_A^n, X_A^{n-1}) \cong \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} \tilde{H}_q(B^n/S^{n-1}) = \begin{cases} 0, & \text{dla } q \neq n \\ \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} \mathbb{Z}, & \text{dla } q = n \end{cases}$$

dla $n \geq 0$. Składniki proste grup $H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ są (izomorficznymi) obrazami homomorfizmów

$$\Phi_{e*} : H_n(B^n/S^{n-1}) \hookrightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \quad \text{dla } e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n.$$

Dowód. Izomorfizmy (5.20) przedstawiają podkompleksy $X^n \cup A$ jako efekt ciągu operacji doklejania przestrzeni (rodziny kul) za pomocą funkcji charakterystycznych ograniczonych do sfer. Ponieważ wszystkie doklejane pary

$$\left(\coprod_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} B^n, \coprod_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} S^{n-1} \right)$$

są parami kołnierzykowymi, twierdzenie 5.3.2 upraszcza obliczanie relatywnych grup homologii i sprowadza je do wzoru (3.24). □

Definicja 5.3.1. Dla dowolnej CW-pary (X, A) , grupy wolne

$$CW_n(X, A) = H_n(X_A^n, X_A^{n-1}), \quad n \geq 0,$$

oraz operatory brzegu

$$\partial_n^{cw} : H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_A^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X_A^{n-1}, X_A^{n-2}), \quad n > 0,$$

będące homomorfizmami łączącymi w ciągach dokładnych trójek $(X_A^n, X_A^{n-1}, X_A^{n-2})$, tworzą komórkowy kompleks łańcuchowy $CW(X, A)$ pary (X, A) . Grupy homologii komórkowego kompleksu łańcuchowego pary będziemy oznaczać $H_n^{cw}(X, A)$ dla $n \geq 0$.

W przypadku $A = \emptyset$, kompleks łańcuchowy $CW(X) = CW(X, \emptyset)$ posiada augmentację $CW_0(X) = H_0(X^0) \xrightarrow{\eta_*} \mathbb{Z}$.

Uwaga 5.3.1. Wybór rodziny funkcji charakterystycznych w X , wraz z dokonaniem wcześniej wskazaniem klas podstawowych $\vartheta_n \in H_n(B^n, S^{n-1})$, $n > 0$, pozwala na jednoznaczne wyróżnienie generatorów

$$[e] = \Phi_{e*} \vartheta_n \in H_n(X_A^n, X_A^{n-1}), \quad e \in \mathcal{G}_{X_A}^n, \quad (5.21)$$

w poszczególnych składnikach prostych. W efekcie otrzymujemy czytelny opis

$$CW_n(X, A) = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_{X_A}^n} \mathbb{Z}[e] \quad (5.22)$$

łańcuchów komórkowych jako skończonych kombinacji zorientowanych komórek o współczynnikach całkowitych.

Klasami homologii kompleksu łańcuchowego $CW(X, A)$ są warstwy

$$[c]_{(X, A)}^{cw} := [c]_{(X_A^n, X_A^{n-1})} + \text{im } \partial_{n+1}^{cw} \quad (5.23)$$

dla $c \in C_n(X_A^n)$, $n \geq 0$, takich, że $\partial_n c \in C_{n-1}(X_A^{n-1})$ i $[\partial_n c]_{(X_A^{n-1}, X_A^{n-2})} = 0$.

Dla efektywnego porównania kompleksów $CW(X, A)$, $C(X, A)$ i dowodu ich równoważności wprowadzimy jeszcze pomocniczy kompleks łańcuchowy VX_A ,

$$V_n X_A := Z_n(X_A^n, X_A^{n-1}) = C_n(X_A^n) \cap \partial_n^{-1} C_{n-1}(X_A^{n-1}), \quad \text{dla } n \geq 0, \quad (5.24)$$

– por. (3.13), zawarty jako podkompleks w $C(X)$ i zawierający $C(A)$. Niech $V(X, A)$ będzie ilorazowym kompleksem łańcuchowym,

$$V_n(X, A) = V_n X_A / C_n(A), \quad (5.25)$$

dla $n \geq 0$. Kompleks $VX_\emptyset = V(X, \emptyset)$ ma kanoniczną augmentację $V_0 X_\emptyset = C_0(X) \xrightarrow{\eta_*} \mathbb{Z}$.

Definicja 5.3.2. Dla dowolnych CW-par (X, A) i (Y, B) , odwzorowanie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ będziemy nazywać komórkowym lub odwzorowaniem CW-par, gdy f zachowuje zdefiniowaną wyżej filtrację, tzn., gdy $f(X_A^n) \subset Y_B^n$ dla $n \geq 0$.

Odwzorowanie CW -par $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ indukuje funktorialne homomorfizmy kompleksów łańcuchowych

$$f_{\#}^{cw} = f_*: CW(X, A) \rightarrow CW(Y, B), \quad [c]_{(X_A^n, X_A^{n-1})} \mapsto [f_{\#}c]_{(Y_B^n, Y_B^{n-1})},$$

dla $n \geq 0$, oraz $f_{\#}: VX_A \rightarrow VY_B, V(X, A) \rightarrow V(Y, B)$ – dla pomocniczych kompleksów.

Twierdzenie 5.3.6 (O izomorfizmie dla kompleksów komórkowych). *Niech (X, A) będzie dowolną CW -parą.*

(i) *Włożenie $VX_A \hookrightarrow C(X)$ indukuje monomorfizm $i: V(X, A) \rightarrow C(X, A)$ i izomorfizm grup homologii*

$$i_*: HV(X, A) \xrightarrow{\cong} H(X, A).$$

(ii) *Odwzorowanie*

$$p: V_n(X, A) \ni c + C_n(A) \mapsto [c]_{(X_A^n, X_A^{n-1})} \in CW_n(X, A), \quad \text{dla } n \geq 0,$$

jest łańcuchowe i indukuje izomorfizm grup homologii

$$p_*: HV(X, A) \xrightarrow{\cong} H^{cw}(X, A).$$

(iii) *Odwzorowania łańcuchowe i oraz p są naturalnymi równoważnościami łańcuchowymi. Jeśli ρ jest odwzorowaniem łańcuchowym homotopijnie odwrotnym do p , to złożenie $i \circ \rho: CW(X, A) \rightarrow C(X, A)$ jest równoważnością i wyznacza naturalny izomorfizm grup homologii*

$$i_* p_*^{-1}: H^{cw}(X, A) \xrightarrow{\cong} H(X, A). \quad (5.26)$$

W przypadku $A = \emptyset$, równoważności i, p zachowują augmentację. Wszystkie wymienione wyżej izomorfizmy są naturalne względem odwzorowań komórkowych CW -par.

W dowodzie twierdzenia wykorzystamy następujący lemat, stanowiący uzupełnienie wniosku 5.3.5.

Lemat 5.3.7. *Dla dowolnej CW -pary (X, A) , następujące grupy homologii są trywialne dla wszystkich $n \geq 0$:*

$$(i) \quad H_n(X, X_A^n) = 0 \quad \text{oraz}$$

$$(ii) \quad H_n(X_A^{n-1}, A) = 0.$$

Dowód. Dla dowodu (i) zauważmy najpierw, że każdy relatywny cykl $c \in Z_n(X, X_A^n)$ ma nośnik zwarty, zawarty w skończonej sumie komórek, a zatem $c \in Z_n(X_A^m, X_A^n)$, dla pewnego $m \geq n$, reprezentuje klasę homologii w $H_n(X_A^m, X_A^n)$. Wystarczy wykazać, że dla każdego $k \geq 0$ zachodzi równość $H_n(X_A^{n+k}, X_A^n) = 0$. Fakt ten jest

oczywisty dla $k = 0$, natomiast podany niżej fragment ciągu dokładnego trójki $(X_A^{n+k+1}, X_A^{n+k}, X_A^n)$,

$$H_n(X_A^{n+k}, X_A^n) \longrightarrow H_n(X_A^{n+k+1}, X_A^n) \longrightarrow H_n(X_A^{n+k+1}, X_A^{n+k}) = 0$$

pozwała poprzez indukcję uzyskać tezę dla wszystkich $k > 0$.

Dowód równości (ii) wynika z podobnego indukcyjnego rozumowania, w którym tożsamość $H_n(X_A^k, A) = 0$ postulowana dla $-1 \leq k < n$ jest oczywista, gdy $k = -1$, natomiast krok indukcyjny umożliwia ciąg dokładny

$$H_n(X_A^{k-1}, A) \longrightarrow H_n(X_A^k, A) \longrightarrow H_n(X_A^k, X_A^{k-1}) = 0.$$

□

Przystępując do dowodu twierdzenia, ustalmy jeszcze oznaczenia – klasę homologii w $H_n V(X, A)$ reprezentowaną przez łańcuch $c \in C_n(X_A^n)$ taki, że $\partial_n c \in C_{n-1}(A)$, będziemy oznaczać $[c]_{(X,A)}^v$.

Ćwiczenie 5.3.1. Sprawdzić, że grupy homologii kompleksu ilorazowego $V(X, A)$ są kanonicznie izomorficzne z grupami $H_n^v(X, A) := Z_n^v(X, A)/B_n^v(X, A)$, gdzie

$$\begin{aligned} Z_n^v(X, A) &= C_n(X_A^n) \cap \partial_n^{-1} C_{n-1}(A) \\ B_n^v(X, A) &= B_n(X_A^{n+1}) + C_n(A), \end{aligned} \quad (5.27)$$

dla $n \geq 0$.

Dowód Twierdzenia 5.3.6. Dla dowodu (i)–(ii) skorzystamy z lematu 5.3.7 i wykazemy kolejno wskazane własności homomorfizmów i_* i p_* . Zauważmy, że poprawność definicji homomorfizmu p wynika z konstrukcji kompleksu VX_A , natomiast łańcuchowość jest oczywistym wnioskiem z jawnej postaci homomorfizmu łączącego ∂_* .

Monomorficzność i_ :* Dla dowolnego $c \in Z_n^v(X, A)$ przypuśćmy, że w $H_n(X, A)$ zachodzi równość $[c]_{(X,A)} = 0$, tzn. istnieją łańcuchy $b \in C_{n+1}(X)$ i $c' \in C_n(A)$ takie, że $c = \partial_{n+1} b + c'$. Wówczas b wyznacza klasę relatywną $\beta = [b]_{(X, X_A^n)} \in H_{n+1}(X, X_A^n)$, a podany niżej fragment ciągu dokładnego trójki (X, X_A^{n+1}, X_A^n) ,

$$H_{n+1}(X_A^{n+1}, X_A^n) \longrightarrow H_{n+1}(X, X_A^n) \longrightarrow H_{n+1}(X, X_A^{n+1}) = 0$$

pozwała przedstawić β jako obraz klasy $[b']_{(X_A^{n+1}, X_A^n)}$ dla pewnego relatywnego cyklu b' . Oznacza to, że różnica $b - b' \in B_{n+1}(X, X_A^n)$ jest relatywnym brzegiem, czyli $b - b' - b'' \in B_{n+1}(X)$ dla pewnego $b'' \in C_{n+1}(X_A^n)$. Ostatecznie otrzymujemy

$$c = \partial_{n+1} b + c' = \partial_{n+1}(b' + b'') + c' \in B_n^v(X, A).$$

Epimorficzność i_ :* Fragment ciągu dokładnego trójki (X, X_A^n, A) ,

$$H_n(X_A^n, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, X_A^n) = 0$$

potwierdza, że dowolna klasa homologii relatywnych $\gamma \in H_n(X, A)$ jest reprezentowana przez łańcuch $c \in Z_n(X_A^n, A) = Z_n^v(X, A)$, a więc $\gamma = i_*[c]_{(X,A)}^v$.

*Monomorficzność p_** : Załóżmy, że dla pewnego relatywnego cyklu $c \in Z_n^v(X, A)$, klasa homologii c w $H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ mieści się w obrazie $\partial_{n+1}^{cw} = \partial_* : H_{n+1}(X_A^{n+1}, X_A^n) \rightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$. Z ciągu dokładnego trójki $(X_A^{n+1}, X_A^n, X_A^{n-1})$ wynika, że znika klasa reprezentowana przez c w $H_n(X_A^{n+1}, X_A^{n-1})$, czyli $c = \partial_{n+1}b + c'$ dla pewnych łańcuchów $b \in C_{n+1}(X_A^{n+1}), c' \in C_n(X_A^{n-1})$. Ponieważ $\partial_n c' = \partial_n c \in C_{n-1}(A)$, oznacza to, że łańcuch c' reprezentuje klasę

$$[c']_{(X_A^{n-1}, A)} \in H_n(X_A^{n-1}, A) = 0.$$

Istnieją zatem łańcuchy $b' \in C_{n+1}(X_A^{n-1}), c'' \in C_n(A)$ takie, że $c' = \partial_{n+1}b' + c''$. Ostatecznie otrzymujemy

$$c = \partial_{n+1}b + c' = \partial_{n+1}(b + b') + c'' \in B_n^v(X, A).$$

*Epimorficzność p_** : Klasa $\gamma \in H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ jest cyklem w $CW_n(X, A)$, jeśli należy do jądra ∂_n^{cw} , czyli do obrazu homomorfizmu $H_n(X_A^n, X_A^{n-2}) \rightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$. Fragment ciągu dokładnego trójki (X_A^n, X_A^{n-2}, A) ,

$$H_n(X_A^n, A) \longrightarrow H_n(X_A^n, X_A^{n-2}) \longrightarrow H_{n-1}(X_A^{n-2}, A) = 0$$

dowodzi, że pierwsze z odwzorowań jest epimorfizmem. Możemy zatem przyjąć, że γ jest reprezentowane przez łańcuch $c \in C_n(X_A^n)$ taki, że $\partial_n c \in C_{n-1}(A)$. Zatem $c \in Z_n^v(X, A)$ i $p(c) = \gamma$.

Część (iii) twierdzenia jest prostym wnioskiem z już udowodnionych izomorfizmów (i)–(ii) i twierdzenia 5.1.5. Naturalność względem odwzorowań CW – par pozostawiamy do sprawdzenia czytelnikowi – jako ćwiczenie. \square

Czytelnik zapewne zauważył, że dowód części (i) twierdzenia można było przeprowadzić dla włożenia $i : VX_A \rightarrow C(X)$ i następnie skorzystać z lematu 5.1.3. Rezygnacja z kompleksów ilorazowych (relatywnych) w dowodzie nie jest jednak w pełni możliwa i nie prowadzi do istotnych uproszczeń.

Przykład 5.3.1. Brak komórek nieparzystego wymiaru sprawia, że kompleksy łańcuchowe komórkowe $CW(\mathbb{C}P^n)$ i $CW(\mathbb{H}P^n)$ przestrzeni rzutowych nad \mathbb{C} i \mathbb{H} mają zerowy homomorfizm brzegu. Daje to izomorfizmy

$$H_q(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{dla } q = 2k \leq 2n \\ 0, & \text{dla } q \neq 2k \text{ lub } q > 2n. \end{cases} \quad (5.28)$$

oraz

$$H_q(\mathbb{H}P^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{dla } q = 4k \leq 4n \\ 0, & \text{dla } q \neq 4k \text{ lub } q > 4n. \end{cases} \quad (5.29)$$

Pomimo faktycznego braku operatorów brzegu, kompleksy $CW(\mathbb{C}P^n)$ i $CW(\mathbb{H}P^n)$ nie są całkiem trywialne – każdy z nich posiada jeszcze homomorfizm diagonalny

$$CW(FP^n) \rightarrow CW(FP^n) \otimes CW(FP^n), \quad F = \mathbb{C}, \mathbb{H},$$

którego nietrywialność docenimy w kolejnym rozdziale.

Formalna definicja kompleksu łańcuchowego $CW(X, A)$ nie zawiera efektywnych, bezpośrednich metod obliczania. Dotyczy to zarówno operatora brzegu ∂^{cw} , jak i homomorfizmów $f_{\#}^{cw} : CW(X, A) \rightarrow CW(Y, B)$ indukowanych przez odwzorowania CW -par. Precyzyjne sformułowanie stosownych algorytmów wymaga ustalenia rodzin funkcji charakterystycznych dla komórek składających się na rozważane CW -kompleksy, zgodnie z opisem podanym w uwadze 5.3.1.

Definicja 5.3.3. *Dla dowolnej pary komórek $a, b \in \mathcal{G}_X$ w CW -kompleksie X wymiarów, odpowiednio, n i $n-1$ współczynnikiem incydencji a względem b nazywamy liczbę*

$$[a : b] = \deg_z(\Phi_b^{-1} \circ \varphi_a)$$

będącą lokalnym stopniem odwzorowania

$$\Phi_b^{-1} \circ \varphi_a : \varphi_a^{-1}b \rightarrow b \rightarrow \text{int } B^{n-1} \hookrightarrow S^{n-1}$$

w dowolnym punkcie z kuli otwartej. Znak współczynnika $[a : b]$ zależy od wyboru funkcji doklejającej $\varphi_a = \Phi_a|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$ komórki a i funkcji charakterystycznej $\Phi_b : (B^{n-1}, S^{n-2}) \rightarrow (X^{n-1}, X^{n-2})$ komórki b .

Wnętrze $\text{int } B^{n-1}$ traktujemy jako podzbiór sfery S^{n-1} włożony za pomocą odwzorowania (3.49). Współczynnik incydencji $[a : b]$ jest równy 0, gdy $b \not\subseteq \partial a$.

Twierdzenie 5.3.8. *Dla dowolnej CW -pary (X, A) , operator brzegu ∂^{cw} w kompleksie łańcuchowym $CW(X, A)$ wyraża się wzorem*

$$\partial_n^{cw} \left(\sum_{a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} c_a [a] \right) = \sum_{b \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^{n-1}} \left(\sum_{a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} [a : b] c_a \right) [b]. \quad (5.30)$$

Dla dowolnego odwzorowania CW -par $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ i dowolnego $n \geq 0$, homomorfizm indukowany $f_n^{cw} : CW_n(X, A) \rightarrow CW_n(Y, B)$ wyraża się wzorem

$$f_n^{cw} \left(\sum_{a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} c_a [a] \right) = \sum_{b \in \mathcal{G}_{Y \setminus B}^n} \left(\sum_{a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} f_b^a c_a \right) [b], \quad (5.31)$$

gdzie macierz $[f_b^a]_{a,b}$ składa się z lokalnych stopni odwzorowań

$$\text{int } B^n \supset (\Phi_a^{-1}(a \cap f^{-1}(b))) \xrightarrow{\cong} a \cap f^{-1}(b) \xrightarrow{f} b \xrightarrow{\cong} \text{int } B^n, \quad (5.32)$$

w dowolnym punkcie kuli otwartej, dla $a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n, b \in \mathcal{G}_{Y \setminus B}^n$.

W szczególności, współczynnik f_b^a znika, gdy $b \not\subseteq f(a)$. Włożenie wnętrza kuli $\text{int } B^n$ w sferę S^n za pomocą rzutu stereograficznego (3.49) gwarantuje jednoznaczność podanych w twierdzeniu współczynników – po ustaleniu odwzorowań charakterystycznych.

Przygotowując się do przeprowadzenia dowodu twierdzenia, zajmiemy się najpierw dokładniej rozkładem relatywnych grup homologii $H_n(X_A^n, X_A^{n-1})$ na sumę prostą podaną we wniosku 5.3.5. Poniższy lemat podaje rozkład zależny od struktury CW -kompleksu, a nie od funkcji charakterystycznych.

Lemat 5.3.9. Dla dowolnej CW-pary (X, A) , w dowolnym wymiarze $n \geq 0$, układ funkcji $\{(i^e, p^e); e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n\}$, składający się z par: włożenie

$$i^e: X_A^n / (X_A^n \setminus e) \xrightarrow{\subset} X_A^n / X_A^{n-1},$$

oraz indukowane przez inkluzję $X_A^{n-1} \subset X_A^n \setminus e$ rzutowanie

$$p^e: X_A^n / X_A^{n-1} \longrightarrow X_A^n / (X_A^n \setminus e)$$

spełnia warunki

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} i_*^e \circ p_*^e &= \text{id} \quad \text{na } \tilde{H}_n(X_A^n / X_A^{n-1}), \\ p_*^e \circ i_*^{e'} &= \begin{cases} \text{id} & \text{na } \tilde{H}_n(X_A^n \setminus e), \quad \text{gdy } e = e' \\ 0 & \text{gdy } e \neq e', \end{cases} \end{aligned} \quad (5.33)$$

dla $e, e' \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n$, a zatem ustala izomorfizm (por. stwierdzenie 1.5.1)

$$\tilde{H}_n(X_A^n / X_A^{n-1}) = \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} \text{im } i_*^e \cong \bigoplus_{e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n} \tilde{H}_n(X_A^n / (X_A^n \setminus e)). \quad (5.34)$$

Dla każdej komórki $e \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n$, funkcja charakterystyczna Φ_e indukuje homeomorfizm

$$\bar{\Phi}_e: B^n / S^{n-1} \xrightarrow{\cong} X_A^n / (X_A^n \setminus e).$$

Dowód. Ćwiczenie. □

Dowód twierdzenia 5.3.8. Główna część dowodu równości (5.30) korzysta z następującego przemiennego diagramu

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_n(X_A^n / X_A^{n-1}) & \xleftarrow{\cong} & H_n(X_A^n, X_A^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n^{cw}} & H_{n-1}(X_A^{n-1}, X_A^{n-2}) \\ i_*^a \uparrow & & \Phi_{a*} \uparrow & & \varphi_{a*} \uparrow \\ \tilde{H}_n(X_A^n / (X_A^n \setminus a)) & \xleftarrow[\Phi_{a*}]{\cong} & H_n(B^n, S^{n-1}) & \xrightarrow[\partial_*]{\cong} & \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

dla $a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^n$. Będący homomorfizmem łączącym operator brzegu ∂_n^{cw} , ograniczony do składnika prostego $\text{im } \Phi_{a*} \cong \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$, sprowadza się do homomorfizmu φ_{a*} indukowanego przez odwzorowanie doklejające komórkę a . Wynika stąd, że dla $b \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^{n-1}$ współczynnik przy $c_a b$ we wzorze (5.30) jest stopniem odwzorowania

$$S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_a} X_A^{n-1} / X_A^{n-2} \xrightarrow{p^b} X_A^{n-1} / (X_A^{n-1} \setminus b) \xrightarrow{\bar{\Phi}_b^{-1}} B^{n-1} / S^{n-2} \cong S^{n-1}. \quad (5.35)$$

Jeśli skorzystać z (3.55) i obliczać stopień lokalnie – w dowolnym punkcie wnętrza $\text{int } B^{n-1} \hookrightarrow S^{n-1}$, to złożenie (5.35) redukuje się do

$$\varphi_a^{-1}(b) \xrightarrow{\varphi_a} b \xrightarrow{p^b} b \xrightarrow{\bar{\Phi}_b^{-1}} \text{int } B^{n-1},$$

co oznacza obliczanie współczynnika incydencji $[a : b]$.

Niech teraz $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ będzie dowolnym odwzorowaniem CW-par. Dla znalezienia współczynników f_b^a we wzorze (5.31) ustalmy dowolne n -komórki $a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}$ i $b \in \mathcal{G}_{Y \setminus B}$ i rozważmy przemienny diagram

$$\begin{array}{ccccccc} \tilde{H}_n(B^n/S^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(X_A^n, X_A^{n-1}) & \xrightarrow{f_{\#}^{cw}} & H_n(Y_B^n, Y_B^{n-1}) & \longrightarrow & \tilde{H}_n(B^n/S^{n-1}) \\ \Phi_{a*} \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \Phi_{b*} \downarrow \cong \\ \tilde{H}_n(X_A^n/(X_A^n \setminus a)) & \xrightarrow{i_*^a} & \tilde{H}_n(X_A^n/X_A^{n-1}) & \xrightarrow{f_*} & \tilde{H}_n(Y_B^n/Y_B^{n-1}) & \xrightarrow{p_*^b} & \tilde{H}_n(Y_B^n/(Y_B^n \setminus b)), \end{array}$$

w którym górny wiersz jest mnożeniem przez f_b^a . Szukany współczynnik jest zatem stopniem odwzorowania

$$\begin{aligned} B^n/S^{n-1} &\xrightarrow{\Phi_a} X_A^n/(X_A^n \setminus a) \xrightarrow{i_*^a} X_A^n/X_A^{n-1} \xrightarrow{\bar{f}} Y_B^n/Y_B^{n-1} \xrightarrow{p_*^b} \\ &\rightarrow Y_B^n/(Y_B^n \setminus b) \xrightarrow{\Phi_b^{-1}} B^n/S^{n-1}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Obliczany – jak poprzednio – względem dowolnego punktu wnętrza $\text{int } B^n$, jest to stopień lokalny złożenia (5.32). \square

Przykład 5.3.2. Kompleks łańcuchowy rzeczywistej przestrzeni rzutowej $CW(\mathbb{R}P^n)$. Wychodząc od podanych w (2.30) funkcji charakterystycznych

$$\Phi^k: B^k \ni (x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto [x_0, \dots, x_{k-1}, \sqrt{1 - \|x\|^2}, 0, \dots, 0] \in \mathbb{R}P^n$$

i funkcji „doklejających” $\varphi^k = \Phi^k|_{S^{k-1}}$, dla $k \leq n$, obliczamy współczynnik incydencji $[e^k : e^{k-1}]$ jako lokalny stopień odwzorowania

$$\begin{aligned} (\Phi^{k-1})^{-1} \circ \varphi^k: \{(x_0, \dots, x_{k-1}) \in S^{k-1}; x_{k-1} \neq 0\} &\longrightarrow \text{int } B^{k-1} \\ (x_0, \dots, x_{k-1}) &\mapsto \text{sign}(x_{k-1})(x_0, \dots, x_{k-2}). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Na poszczególnych półsferach otwartych $\{x \in S^{k-1}; x_{k-1} \leq 0\}$ oba homeomorfizmy składające się na (5.37) różnią się o złożenie z odwzorowaniem antypodycznym. a więc $[e^k : e^{k-1}] = \pm(1 + (-1)^k)$. Dokładne obliczenia wymagają nałożenia rzutu stereograficznego (3.49) na odwzorowanie (5.37), co daje funkcję

$$S^{k-1} \ni (x', x_{k-1}) \xrightarrow{f} (2x_{k-1}x', 1 - 2x_{k-1}^2) \in S^{k-1}, \quad (5.38)$$

przeprowadzającą biegun południowy $P = (0, \dots, 0, -1)$ na siebie. W lokalnych współrzędnych $\psi: B^{k-1} \ni y \mapsto (y, -\sqrt{1 - \|y\|^2}) \in S^{k-1}$ wokół P funkcja f opisuje się poprzez złożenie $\phi = \psi^{-1}f\psi: y \mapsto -2\sqrt{1 - \|y\|^2}y$, o stopniu $\deg_0(\phi) = (-1)^{k-1}$. Reguły obliczania lokalnego stopnia odwzorowania f implikują równości

$$\deg_P(f) = (1 + (-1)^k) \deg_P(f|_{\psi(B^{k-1})}) = (-1)^{k-1} - 1,$$

a zatem operator brzegu w kompleksie $CW(\mathbb{R}P^n) = \bigoplus_{k \leq n} \mathbb{Z}[e^k]$ działa zgodnie z regułą

$$\partial_k^{cw}[e^k] = -(1 - (-1)^k)[e^{k-1}], \quad (5.39)$$

dla $k = 1, \dots, n$. Wyznaczenie stąd grup homologii $H(\mathbb{R}P^n)$ pozostawiamy czytelnikowi jako ćwiczenie.

Przykład 5.3.3. Kontynuując poprzedni przykład, wyznaczmy teraz automorfizmy $f_{(q)\#}^{cw}$ kompleksu łańcuchowego $CW(\mathbb{R}P^n)$ indukowane przez homeomorfizmy

$$f_{(q)} : [x_0, \dots, x_q, \dots, x_n] \rightarrow [x_0, \dots, -x_q, \dots, x_n],$$

dla $q \geq 0$. Zgodnie z twierdzeniem 5.3.8, dla każdego $k \leq n$ należy wyznaczyć lokalny stopień odwzorowania (5.32) kuli B^k w siebie,

$$(x_0, \dots, x_{k-1}) \rightarrow \begin{cases} (x_0, \dots, x_{k-1}), & \text{dla } k < q, \\ (-x_0, \dots, -x_{k-1}), & \text{dla } k = q, \\ (x_0, \dots, -x_q, \dots, x_{k-1}), & \text{dla } q < k \leq n, \end{cases} \quad (5.40)$$

na przykład w punkcie $0 \in B^k$. Otrzymane współczynniki (± 1) opisują działanie $f_{(q)\#}^{cw} = \{f_{(q)k}^{cw}; k \leq n\}$ na generatorach

$$[e^0], \dots, [e^n] \mapsto [e^0], \dots, [e^{q-1}], (-1)^q [e^q], -[e^{q+1}], \dots, -[e^n]. \quad (5.41)$$

Zauważmy, że obrót w zakresie każdej z par współrzędnych (x_{q-1}, x_q) i (x_q, x_{q+1}) wyznacza homotopię homeomorfizmu $f_{(q)}$ z odwzorowaniami zamieniającymi miejscami odpowiednią parę współrzędnych jednorodnych w $\mathbb{R}P^n$. Oznacza to, że odwzorowania $f_{(q)}$, $q \leq n$, są wzajemnie homotopijne, a odwzorowania łańcuchowe opisane przez (5.41) – łańcuchowo homotopijne.

Ćwiczenie 5.3.2. Sprawdzić, że dla n parzystego istnieje homotopia $f_{(q)} \simeq \text{id}_{\mathbb{R}P^n}$, podczas gdy dla n nieparzystych *symetrie* $f_{(q)}$, $q \leq n$, indukują nietrywialny automorfizm grupy $H_n(\mathbb{R}P^n) \cong \mathbb{Z}$.

Ćwiczenie 5.3.3. Zdefiniować CW -rozkład sfery S^n składający się z pary komórek e_+^k, e_-^k (półsfery otwarte) w każdym wymiarze $k \leq n$. Wyznaczyć kompleks łańcuchowy $CW(S^n)$ i homomorfizm $h_{\#}^{cw} : CW(S^n) \rightarrow CW(\mathbb{R}P^n)$ indukowany przez odwzorowanie Hopfa utożsamiające punkty naprzeciwległe.

5.4 Produkty w kategorii CW -kompleksów

Opis homologii singularnych CW -kompleksów – poprzez łańcuchy komórkowe (5.22) i ich grupy homologii – w szczególnie prosty sposób przenosi się na produkty CW -przestrzeni i CW -par, korzystając przy tym istotnie z naturalności (i nietrywialności) zdefiniowanego w podrozdziale 3.5 iloczynu krzyżowego. Przechodząc do szczegółowego opisu produktu kartezjańskiego, zauważmy najpierw, że dla dowolnych CW -par (X, A) i (Y, B) i liczb $p, q \geq 0$, w produkcie $X \times Y$ mają miejsce następujące inkluzje podkompleksów

$$X_A^p \times Y_B^q \subset X^p \times Y^q \cup (X \times B \cup A \times Y) \subset (X \times Y)_{A,B}^{p+q}, \quad (5.42)$$

gdzie ostatni symbol oznacza $(X \times Y)_{X \times B \cup A \times Y}^{p+q}$ i jest skrótem przyjętym na potrzeby bieżącego podrozdziału.

Podstawowe związki CW -kompleksów i produktu krzyżowego zbiera następujące twierdzenie, które można uznawać za komórkową wersję twierdzenia Eilenberga-Zilbera.

Twierdzenie 5.4.1 (Eilenberga–Zilbera dla łańcuchów komórkowych). *Dla dowolnych dwu CW-par (X, A) i (Y, B) , iloczyn krzyżowy wyznacza naturalny izomorfizm kompleksów łańcuchowych*

$$\nabla^{cw}: CW(X, A) \otimes CW(Y, B) \xrightarrow{\cong} CW((X, A) \times (Y, B)), \quad (5.43)$$

$$CW_p(X, A) \otimes CW_q(Y, B) \ni c \otimes c' \longmapsto \mu_*^{pq}(c \times c') \in CW_{p+q}((X, A) \times (Y, B)), \quad (5.44)$$

gdzie na iloczyn krzyżowy klas $c \in H_p(X_A^p, X_A^{p-1})$ i $c' \in H_q(Y_B^q, Y_B^{q-1})$ działa homomorfizm indukowany przez włożenie

$$(X_A^p \times Y_B^q, X_A^p \times Y_B^{q-1} \cup X_A^{p-1} \times Y_B^q) \xrightarrow{\mu_*^{pq}} ((X \times Y)_{A,B}^{p+q}, (X \times Y)_{A,B}^{p+q-1})$$

opisane w (5.42). Izomorfizm ∇^{cw} jest homotopijnie równoważny naturalnemu homomorfizmowi Eilenberga–Zilbera $\nabla: C(X, A) \otimes C(Y, B) \rightarrow C((X, A) \times (Y, B))$ w tym sensie, że wybór dowolnych homotopijnych równoważności $\zeta = i\rho$ pomiędzy kompleksami łańcuchów komórkowych i singularnych (twierdzenie 5.3.6) prowadzi do homotopijnych odwzorowań

$$\zeta \circ \nabla^{cw} \simeq \nabla \circ (\zeta \otimes \zeta). \quad (5.45)$$

Na wyróżnionych generatorach (5.21–5.22), po ustaleniu odwzorowań charakterystycznych, izomorfizm ∇^{cw} działa zgodnie ze wzorem

$$\nabla^{cw}([a] \otimes [b]) = [a \times b], \quad \text{dla } a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}, b \in \mathcal{G}_{Y \setminus B}. \quad (5.46)$$

Dowód. Dla dowolnej pary komórek $a \in \mathcal{G}_{X \setminus A}^p, b \in \mathcal{G}_{Y \setminus B}^q$, o łącznym wymiarze $n \geq 0$, oraz ich odwzorowań charakterystycznych, naturalność iloczynu krzyżowego implikuje przemienność diagramu

$$\begin{array}{ccc} H_p(B^p, S^{p-1}) \otimes H_q(B^q, S^{q-1}) & \xrightarrow{\times} & H_n(B^p \times B^q, \partial(B^p \times B^q)) & \xrightarrow{=} & H_n(B^p \times B^q, \partial(B^p \times B^q)) \\ \Phi_{a*} \otimes \Phi_{b*} \downarrow & & (\Phi_a \times \Phi_b)_* \downarrow & & (\Phi_{a \times b})_* \downarrow \\ H_p(X_A^p, X_A^{p-1}) \otimes H_q(Y_B^q, Y_B^{q-1}) & \xrightarrow{\times} & H_n((X_A^p, X_A^{p-1}) \times (Y_B^q, Y_B^{q-1})) & \xrightarrow{\mu_*} & H_n((X \times Y)_{A,B}^n, (X \times Y)_{A,B}^{n-1}) \end{array}$$

skąd natychmiast otrzymujemy (5.46). Jako bijekcja na zbiorze generatorów, homomorfizm ∇^{cw} jest zatem izomorfizmem liniowym. Dla dowodu łańcuchowości, rozważmy dowolne dwa łańcuchy komórkowe $[c] \in CW_p(X, A), [c'] \in CW_q(Y, B)$, reprezentowane – jako klasy homologii – przez relatywne cykle $c \in Z_p(X_A^n, X_A^{n-1})$ i $c' \in Z_q(Y_B^q, Y_B^{q-1})$. Faktyczna prostota definicji

$$\nabla^{cw}([c]_{(X,A)} \otimes [c']_{(Y,B)}) = [\nabla(c \otimes c')]_{((X \times Y)_{A,B}^n, (X \times Y)_{A,B}^{n-1})},$$

wraz z jawnym opisem operatora brzegu $\partial_n^{cw} = \partial_*$ pozwalają na bezpośrednie sprawdzenie równości

$$\partial_{p+q}^{cw} \nabla^{cw}([c] \otimes [c']) = [\nabla(\partial_p c \otimes c')] + (-1)^p [\nabla(c \otimes \partial_q c')]$$

oznaczającej przemienność ∇^{cw} z operatorami brzegu.

Pozostaje sprawdzenie własności (5.45). W tym celu zdefiniujemy odpowiednik homomorfizmu Eilenberga–Zilbera,

$$\nabla^v : V X_A / C(A) \otimes V Y_B / C(B) \rightarrow V(X \times Y)_{X \times B \cup A \times Y} / C(X \times B \cup A \times Y),$$

indukowany przez ∇ na produkcie pomocniczych kompleksów łańcuchowym wprowadzonych w (5.24–5.25). Wiemy już, że ∇ przeprowadza iloczyn tensorowy cykli relatywnych $V_p X_A = Z_p(X_A^n, X_A^{n-1})$ i $V_q Y_B = Z_q(Y_B^q, Y_B^{q-1})$, $p, q \geq 0$, w grupy cykli relatywnych produktu kartezjańskiego. Aby przenieść ∇ – zgodnie z definicją (5.25) – na stosowne grupy ilorazowe, wystarczy jeszcze zauważyć inkluzje

$$\nabla(V_p X_A \otimes C_q(B) + C_p(A) \otimes V_q Y_B) \subset C_{p+q}(X \times B \cup A \times Y),$$

dla $p, q \geq 0$, wynikające z naturalności homomorfizmu Eilenberga–Zilbera. Przy oznaczeniach zaczerpniętych z twierdzenia 5.3.6 mamy zatem przemienny diagram

$$\begin{array}{ccc} CW(X, A) \otimes CW(Y, B) & \xrightarrow{\nabla^{cw}} & CW(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \\ p \otimes p \uparrow \downarrow \rho \otimes \rho & & p \uparrow \downarrow \rho \\ V(X, A) \otimes V(Y, B) & \xrightarrow{\nabla^v} & V(X \times Y, X \times B \cup A \times Y) \quad (5.47) \\ i_{\#} \otimes i_{\#} \downarrow & & i_{\#} \downarrow \\ C(X, A) \otimes C(Y, B) & \xrightarrow{\nabla} & C(X \times Y, X \times B \cup A \times Y), \end{array}$$

w którym homomorfizmy ρ oznaczają homotopijnie odwrotne do p . Równości $p \circ \nabla^v = \nabla^{cw} \circ (p \otimes p)$ oraz $i_{\#} \circ \nabla^v = \nabla \circ (i_{\#} \otimes i_{\#})$ prowadzą do homotopii łańcuchowej

$$i_{\#} \rho \circ \nabla^{cw} \simeq \nabla \circ (i_{\#} \rho \otimes i_{\#} \rho),$$

co daje (5.45) i kończy dowód. \square

W przypadku CW –przestrzeni i CW –par kompleksy łańcuchowe komórkowe stanowią istotną redukcję badanych przez nas obiektów algebraicznych – punktem wyjścia są tu kompleksy singularne – związanych w naturalny sposób z klasami homotopii przestrzeni topologicznych. Zgodnie z wnioskiem 3.5.11, istnieje także zredukowana wersja naturalnego homomorfizmu diagonalnego.

Definicja 5.4.1. Dla dowolnego CW –kompleksu X , niech $h : X \rightarrow X \times X$ będzie dowolnym odwzorowaniem komórkowym homotopijnym z $\Delta : x \mapsto (x, x)$. Złożenie

$$d^{cw} : CW(X) \xrightarrow{h_{\#}^{cw}} CW(X \times X) \xrightarrow{(\nabla^{cw})^{-1}} CW(X) \otimes CW(X) \quad (5.48)$$

nazywać będziemy komórkowym homomorfizmem diagonalnym CW –kompleksu X .

Ćwiczenie 5.4.1. Sprawdzić zgodność homomorfizmów diagonalnych d^{aw} i d^{cw} .

Definicję 5.4.1 trudno uznać za obliczalną. Sugerujemy czytelnikowi skonstruowanie aproksymacji komórkowej przekształcenia diagonalnego Δ rzeczywistej przestrzeni rzutowej $\mathbb{R}P^2$ i wyznaczenia na tej podstawie homomorfizmu diagonalnego d^{cw} .

Homomorfizmy diagonalne stanowią podstawę do wprowadzenia wewnętrznego iloczynu w grupach *kohomologii* – p. rozdział 6.

Rozdział 6

W stronę zaawansowanej teorii

Powszechnie znanym problemem związanym z poznawaniem topologii algebraicznej jest zauważalna dysproporcja pomiędzy ilością topologicznych i algebraicznych konstrukcji wspierających podstawy teorii a pojawiającymi się sporadycznie zastosowaniami, wynikami, których ranga co pewien czas wynagradza nas za włożony wysiłek. Tytuł niniejszego, ostatniego rozdziału można traktować jako zapowiedź końca tej „wspinaczki” – przyswojenie podstaw, a więc otwarcie szerokiej drogi do rozkoszowania się piękną, choć uważaną za trudną, teorią.

Rozdziały 3–5 objęły podstawy (i nieco praktyki) teorii homologii przestrzeni topologicznych, z uwzględnieniem ważnych w sensie zarówno historycznym, jak i praktycznym homologii symplecjonalnych i komórkowych. Równoległym celem założonym przez autora było także wykazanie równoważności każdego z wariantów, w sensie homotopii, już na poziomie kompleksów łańcuchowych. Realizacja tego celu umożliwia nam szybkie przejście do efektywnych obliczeń, czego efektem jest np. przedstawiony w podrozdziale 6.2 dowód klasycznego twierdzenia o antypodach.

6.1 Zmiana współczynników i kohomologie

Definicja 6.1.1. *Będziemy nazywać modelem singularnym pary (X, A) dowolny kompleks łańcuchowy $C^M(X, A) = \{C_n^M(X, A); n \geq 0\}$ złożony z grup wolnych i zaopatrzony w równoważność homotopijną $\zeta^M = \zeta_{(X,A)}^M: C^M(X, A) \xrightarrow{\simeq} C(X, A)$. Od modelu singularnego przestrzeni X wymagamy dodatkowo by kompleks $C^M(X)$ posiadał augmentację zachowywaną przez równoważność ζ^M .*

Model singularny przestrzeni X posiada – określony z dokładnością do homotopii łańcuchowej – homomorfizm diagonalny $d^M = d_X^M: C^M(X) \rightarrow C^M(X) \otimes C^M(X)$ równoważny z d^{aw} w sensie homotopii

$$d^{aw} \circ (\zeta^M \otimes \zeta^M) \simeq \zeta^M \circ d^M.$$

Każde odwzorowanie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ wyznacza jednoznacznie klasę homotopii odwzorowań łańcuchowych $f_{\#}^M: C^M(X, A) \rightarrow C^M(Y, B)$ dowolnych modeli singularnych rozważanych par przestrzeni topologicznych. Jednoznaczność zapewnia wymaganie przemienności diagramu

$$\begin{array}{ccc} C^M(X, A) & \xrightarrow{f_{\#}^M} & C^M(Y, B) \\ \varsigma_{(X,A)}^M \downarrow & & \varsigma_{(Y,B)}^M \downarrow \\ C(X, A) & \xrightarrow{f_{\#}} & C(Y, B) \end{array} \quad (6.1)$$

z dokładnością do homotopii łańcuchowej.

Z opisaną wyżej sytuacją mieliśmy do czynienia w poprzednich rozdziałach. Zarówno kompleksy symplekcyjne, jak i CW –kompleksy oraz odpowiadające im komórkowe kompleksy łańcuchowe stanowią źródło modeli singularnych – dodatkowo powiązanych poprzez jawnie opisane homomorfizmy pochodzące od odwzorowań przestrzeni topologicznych szczególnej postaci. Dotyczy to także włożeń $A \subset X$, ale zgodność modeli przestrzeni X, A i pary (X, A) opisana w krótkim ciągu dokładnym $C^M(A) \rightarrow C^M(X) \rightarrow C^M(X, A)$ ma miejsce tylko w wyróżnionych przypadkach – dla podkompleksów w ramach odpowiedniej kategorii.

Ćwiczenie 6.1.1. Zwarte wielościany i CW –kompleksy mają skończenie generowane zredukowane kompleksy łańcuchowe – zależne od struktury komórkowej przestrzeni. Zdefiniować *minimalne kompleksy łańcuchowe*, jako równoważne kompleksy o minimalnej liczbie generatorów. Uwzględnić zachowywanie homomorfizmu diagonalnego. Zbadać naturalność określonego w ten sposób *minimalnego modelu* traktowanego w całości jako niezmiennik przestrzeni topologicznej.

Przykład 6.1.1. Dla $n > 0$, modelem singularnym pary $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ jest kompleks (\mathbb{Z}, n) , złożony z jedynej niezerowej grupy \mathbb{Z} w wymiarze n i równoważności łańcuchowych przeprowadzających modelowy łańcuch $1 \in \mathbb{Z}$ na klasę ϑ_n^+ (na dowolny cykl relatywny reprezentujący ϑ_n^+). Upraszczając notację, możemy przyjąć, że modelem singularnym jest w tym przypadku kompleks grup homologii $H(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ z zerowym operatorem brzegu.

Przykład 6.1.2. Modelem singularnym sfery $S^n, n \geq 1$, jest izomorficzny z $(\mathbb{Z}, 0) \oplus (\mathbb{Z}, n)$ kompleks grup homologii $H(S^n)$ z zerowym operatorem brzegu. Homomorfizm diagonalny $d: H(S^n) \rightarrow H(S^n) \otimes H(S^n)$ jest niezerowy, ale trywialny – w tym sensie, że opisany jednoznacznie przez własność (i) stwierdzenia 3.5.10, tzn.

$$d(1) = 1 \otimes 1, \quad d(\theta_n) = \theta_n \otimes 1 + 1 \otimes \theta_n,$$

gdzie przez $1 \in H_0(S^n)$ oznaczyliśmy generator utożsamiany z jedyнкą przez augmentację $\eta: H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$.

Odpowiedzią na nasuwające się pytanie – kiedy kompleks grup homologii jest modelem singularnym? – jest: zawsze, gdy tylko jest to możliwe.

Stwierdzenie 6.1.1. Dla dowolnej pary (X, A) , kompleks grup homologii $H(X, A)$ z zerowym operatorem brzegu jest modelem singularnym pary wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie grupy $H_n(X, A), n \geq 0$, są wolne.

Dowód. Ćwiczenie. Skorzystać z twierdzenia 5.1.5. \square

Uwaga 6.1.1. W przypadku ogólnym, gdy para przestrzeni topologicznych nie posiada modelu singularnego o zerowym operatorze brzegu, niejednoznaczność homomorfizmów – w tym homomorfizmu diagonalnego – sprawia, że pożądana efektywność obliczeń wymaga zmiany podejścia. Jedną z przyjętych w topologii algebraicznej dróg zakłada zmianę grupy współczynników, np. użycie grupy \mathbb{Z}_p zamiast \mathbb{Z} pozwala wyzerować te operatory, których działanie było mnożeniem przez krotkość $p \in \mathbb{Z}$. Inną drogą jest przejście do grup dualnych (grup homomorfizmów). Znaczenie tej operacji będzie widoczne w kolejnym podrozdziale.

Mając do dyspozycji rodzinę algebraicznych modeli utworzonych dla opisu przestrzeni topologicznych – w postaci kompleksów singularnych $C(X, A)$ i, ewentualnie, równoważnych im komórkowych kompleksów łańcuchowych $CW(X, A)$ – zajmujemy się teraz dodatkowymi konstrukcjami natury algebraicznej, pozwalającymi na wydobycie z modeli kolejnych *obliczalnych* niezmienników, charakteryzujących przestrzenie topologiczne i relacje pomiędzy nimi.

Wychodząc od dowolnego kompleksu łańcuchowego $(\{C_n\}, \{\partial_n\})$ i dowolnej grupy abelowej G , poddajemy czytelnikowi pod rozwagę dwa kolejne obiekty algebraiczne.

Definicja 6.1.2. *Mówimy, że kompleks łańcuchowy $C \otimes G$ złożony z produktów tensorowych $C_n \otimes G$ i operatorów brzegu $\partial_n^G = \partial_n \otimes \text{id}_G, n \in \mathbb{Z}$, powstaje z C poprzez rozszerzenie grupy współczynników do G . Jeśli $\eta: C \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$ jest augmentacją w C , to homomorfizm indukowany $C \otimes G \rightarrow (G, 0), C_0 \otimes G \rightarrow G$, uważamy za augmentację kompleksu o współczynnikach w G .*

Kompleksem łańcuchowym (singularnym, symplecjajalnym, komórkowym) o współczynnikach w grupie G nazywamy kompleks utworzony poprzez rozszerzenie współczynników z odpowiedniego, zgodnego z kontekstem kompleksu łańcuchowego. Grupy homologii otrzymanych w ten sposób kompleksów łańcuchowych nazywamy grupami homologii o współczynnikach w G .

Tradycyjnym sposobem zaznaczenia grupy współczynników jest wykorzystanie oznaczeń $C(X; G), C(X, A; G)$ itd. dla kompleksów łańcuchowych i, odpowiednio, $H(X; G), H(X, A; G)$ itd. dla grup homologii. Traktowanie grupy jako współczynników w nowo powstałych grupach łańcuchów uzasadnia naturalny izomorfizm

$$\left(\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{Z} \right) \otimes G \cong \bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G$$

obejmujący wszystkie rozważane kompleksy łańcuchowe – i związane z tym opis łańcuchów jako skończonych formalnych sum $c = \sum_a c_a \cdot a$, gdzie $c_a \in G$, dla $a \in \mathcal{A}$.

Druga, ważna, konstrukcja algebraiczna zastępuje łańcuchy *kolańcuchami* i rozważa grupy homomorfizmów $\text{Hom}(C_n, G)$, wraz z dualnymi do ∂_{n+1} operatorami *(ko-)brzegu* $\delta^n: \text{Hom}(C_n, G) \rightarrow \text{Hom}(C_{n+1}, G)$, dla $n \in \mathbb{Z}$. Formalna zmiana znaku indeksów z n na $-n$ pozwala traktować otrzymane w ten sposób kompleksy jako łańcuchowe – w wymiarach niedodatnich – i korzystać w ten sposób z całej

maszinerii grup homologii, homomorfizmów indukowanych i ciągów dokładnych. Zachęcamy czytelnika do wykonania stosownej formalizacji w ramach ćwiczenia.

Definicja 6.1.3. Parę $C^* = (\{C^n\}, \{\delta^n\})$ złożoną z grup abelowych i ciągu homomorfizmów (operatorów) kobrzeżu

$$\delta^n: C^n \rightarrow C^{n+1}, \quad \text{gdzie } \delta^{n+1} \circ \delta^n = 0 \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z},$$

uwazamy za kompleks kółanuchowy. Grupy $H^n(C^*) = \ker \delta^n / \text{im } \delta^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, noszą nazwę grup kohomologii kompleksu C^* .

Homomorfizmem lub odwzorowaniem kółanuchowym $f: C^* \rightarrow \bar{C}^*$ jest dowolny ciąg homomorfizmów $f^n: C^n \rightarrow \bar{C}^n$, $n \in \mathbb{Z}$, przemienny z właściwymi homomorfizmami kobrzeżu. Homotopia kółanuchowa $D: f \simeq g$, dla $f, g: C^* \rightarrow \bar{C}^*$, jest rodziną homomorfizmów $D^n: C^n \rightarrow \bar{C}^{n-1}$, spełniającą warunki

$$\delta^{n-1} \circ D^n + D^{n+1} \circ \delta^n = f^n - g^n, \quad \text{dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Definicja 6.1.4. Dla dowolnego kompleksu łańcuchowego C , kompleksem kółanuchowym o współczynnikach w grupie G nazywamy kompleks dualny $\text{Hom}(C, G) = (\{\text{Hom}(C_n, G)\}, \{\delta^n\})$. Jeśli kompleks C posiada augmentację $\eta: C \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$, to homomorfizm dualny $\text{Hom}(\eta, G): G \rightarrow \text{Hom}(C_0, G)$, którego obraz zawiera się w jądrze $\ker \delta^0$, uwazamy za augmentację kompleksu kółanuchowego. Przyjmujemy, że operatory kobrzeżu spełniają warunek

$$\delta^n = (-1)^n \text{Hom}(\partial_{n+1}, G), \quad \text{dla } n \geq 0, \quad (6.2)$$

gdzie dodatkowy znak ± 1 wprowadzony w [3] znajdzie zastosowanie w odniesieniu do produktów.

Kompleksem kółanuchowym (singularnym, symplecjajalnym lub komórkowym) o współczynnikach w grupie G nazywamy kompleks dualny do odpowiedniego, zgodnego z kontekstem kompleksu łańcuchowego.

Stwierdzenie 6.1.2. Dla dowolnej grupy współczynników G , każdy homomorfizm łańcuchowy kompleksów łańcuchowych $h: C \rightarrow C'$ wyznacza funktorialne homomorfizmy, łańcuchowy

$$h \otimes G: C \otimes G \rightarrow C' \otimes G, \quad c \otimes g \mapsto h(c) \otimes g$$

i kółanuchowy

$$\text{Hom}(h, G): \text{Hom}(C', G) \rightarrow \text{Hom}(C, G), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ h,$$

dla kompleksów dualnych. Homotopia łańcuchowa odwzorowań łańcuchowych indukuje właściwe homotopie odpowiednich homomorfizmów dla kompleksów o współczynnikach w G .

Dowód. Ćwiczenie. □

Kompleksy kółanuchowe o współczynnikach w G , dualne do kompleksów łańcuchowych oznaczają się jako $C^*(X; G)$, $C^*(X, A; G)$ itd. W analogiczny sposób, jako $H^*(X; G)$, $H^*(X, A; G)$ itd. oznaczane są grupy kohomologii o współczynnikach w G .

Gwiazdka jako indeks górny sugeruje zmienioną rolę indeksów i oznacza, że mamy do czynienia z funktorami *kontrawariantnymi* – odwracającymi kierunek działania homomorfizmów. Stąd np. dowolne odwzorowanie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ indukuje homomorfizmy

$$f^\#: C^*(Y, B; G) \rightarrow C^*(X, A; G), \quad f^*: H^*(Y, B; G) \rightarrow H^*(X, A; G).$$

Grupy kohomologii o współczynnikach w \mathbb{Z} oznaczamy zazwyczaj jako $H^*(X)$, $H^*(X, A)$ itd. – pomijając symbol grupy współczynników.

Możliwość traktowania grupy G jako współczynników w grupach kółanuchów uzasadnia izomorfizm

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{Z}, G\right) \cong \prod_{a \in \mathcal{A}} G = G^{\mathcal{A}}$$

obejmujący wszystkie rozważane kompleksy kółanuchowe – i związany z tym opis kółanuchów jako funkcji (ciągów uogólnionych) $\varphi = (\varphi_a)_{a \in \mathcal{A}} \in G^{\mathcal{A}}$. Istotną różnicą w stosunku do łańcuchów jest brak zwartości *nośnika*

$$\text{supp}(\varphi) = \bigcup \{|\sigma|; \varphi_\sigma \neq 0\}$$

związany z tym, że w przypadku nieskończonego zbioru generatorów \mathcal{A} kółanuch φ może zawierać nieskończenie wiele współczynników różnych od zera.

Jak widać, proces przenoszenia podstawowych definicji obowiązujących dla kontekstu *łańcuchowego* na odpowiednie obiekty i konstrukcje *kółanuchowe* generuje wiele tekstu. Zakładamy, że ewentualną dalszą rolę translatora weźmie na siebie czytelnik. Już teraz możemy sformułować oczywiste

Stwierdzenie 6.1.3. *Dla dowolnej grupy G wszystkie wykazane w rozdziałach 3–5 równoważności łańcuchowe wyznaczają równoważności łańcuchowe odpowiednich kompleksów łańcuchowych o współczynnikach w G oraz równoważności kółanuchowe odpowiednich kompleksów dualnych.* \square

Wniosek 6.1.4 (Twierdzenie o izomorfizmie dla modeli singularnych). *Dla dowolnej grupy G , każdy model singularny $\zeta^M: C^M(X, A) \xrightarrow{\cong} C(X, A)$ pary (X, A) indukuje izomorfizmy*

$$\zeta_*^M: H(C^M \otimes G) \cong H(X, A; G)$$

$$\zeta^{M*}: H^*(X, A; G) \cong H^*(\text{Hom}(C^M, G)).$$

W szczególności, istnieją naturalne izomorfizmy grup homologii

$$\begin{aligned} H(K, L; G) &\xrightarrow{\cong} H(|K|, |L|; G), \quad \text{dla par symplecjalnych} \\ H^{cw}(X, A; G) &\xrightarrow{\cong} H(X, A; G), \quad \text{dla CW-par,} \end{aligned} \tag{6.3}$$

oraz naturalne izomorfizmy grup kohomologii

$$\begin{aligned} H^*(K, L; G) &\xleftarrow{\cong} H^*(|K|, |L|; G), \text{ dla par symplecjajalnych} \\ H_{cw}^*(X, A; G) &\xleftarrow{\cong} H^*(X, A; G), \text{ dla CW-par,} \end{aligned} \quad (6.4)$$

gdzie symbol H_{cw}^* oznacza kohomologie komórkowe $H^*CW(X, A; G)$. \square

Przykład 6.1.3. Korzystając z najbardziej zredukowanego z wykorzystywanych kompleksów łańcuchowych – kompleksu komórkowego – obliczamy

$$H_k(S^n; G) = H^k(S^n; G) = \begin{cases} 0, & \text{dla } k \neq 0, n \\ G, & \text{dla } k \in \{0, n\}, n > 0, \end{cases}$$

dla dowolnej grupy współczynników G . W wymiarze n powyższy związek jest zgodny z działaniem homomorfizmów indukowanych: dla dowolnego odwzorowania f sfery S^n w siebie, homomorfizm $f^*: H^n(S^n; G) \rightarrow H^n(S^n; G)$ jest mnożeniem przez stopień $\deg(f)$ – opisujący również działanie f_* w homologiach.

Przykład 6.1.4. Mniej banalny jest przypadek rzeczywistych przestrzeni rzutowych, dla których operator brzegu dany wzorem (5.39) redukuje się do zera – po zmianie współczynników na \mathbb{Z}_2 . Zatem

$$H_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \cong H^k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2, \quad \text{dla } k \leq n.$$

Podobnie proste wzory opisują grupy homologii i kohomologii o dowolnych współczynnikach dla pozostałych przestrzeni rzutowych.

Obliczyć grupy kohomologii $H^*(\mathbb{R}P^n)$, $n \geq 1$.

Nieco więcej pracy wymaga przeniesienie na homologie ze współczynnikami i kohomologie konstrukcji dotyczących długich ciągów dokładnych, przy czym przeszkodą mógłby być ewentualny brak odpowiednich *krótkich* ciągów dokładnych. W przypadku kompleksu złożonego z grup wolnych, a z takimi właśnie mamy do czynienia, wątpliwości wyjaśnia

Lemat 6.1.5. Dla dowolnej grupy abelowej G , krótki ciąg dokładny

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \longrightarrow 0, \quad (6.5)$$

w którym C'' jest grupą wolną, wyznacza krótkie ciągi dokładne

$$0 \longrightarrow C' \otimes G \xrightarrow{i \otimes G} C \otimes G \xrightarrow{p \otimes G} C'' \otimes G \longrightarrow 0 \quad (6.6)$$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C'', G) \xrightarrow{\text{Hom}(p, G)} \text{Hom}(C, G) \xrightarrow{\text{Hom}(i, G)} \text{Hom}(C', G) \longrightarrow 0.$$

Jeśli grupa C jest wolna, to dokładność krótkiego ciągu grup współczynników

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$$

implikuje dokładność ciągów

$$0 \longrightarrow C \otimes G' \longrightarrow C \otimes G \longrightarrow C \otimes G'' \longrightarrow 0 \quad (6.7)$$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(C, G') \longrightarrow \text{Hom}(C, G) \longrightarrow \text{Hom}(C, G'') \longrightarrow 0.$$

Dowód. Dowód pierwszej części lematu korzysta z *rozszerzalności* ciągu (6.5) – na swobodnych generatorach grupy C'' można zdefiniować homomorfizm $j: C'' \rightarrow C'$ prawostronnie odwrotny do p , co wraz z homomorfizmem $q = i^{-1}(\text{id}_C - jp): C \rightarrow C'$ oznacza rozkład centralnej grupy ciągu na sumę prostą $C = \text{im } i \oplus \text{im } j$. Zależność $iq + jp = \text{id}_C$ przenosi się na krótkie ciągi (6.6) i implikuje ich dokładność.

Dokładność ciągów (6.7) sprawdzamy „po współrzędnych”. \square

Ćwiczenie 6.1.2. Jakie są odpowiednie długie ciągi dokładne? Opisać homomorfizmy łączące – dla ciągów (6.6) oznaczane jako ∂_* , δ^* , natomiast dla (6.7) – nazywane odpowiednio homologicznym i kohomologicznym *homomorfizmem Bocksteina* i oznaczane jako β_* , β^* .

Ćwiczenie 6.1.3. Wyznaczyć homomorfizmy Bocksteina i odpowiednie długie ciągi dokładne dla rzeczywistych przestrzeni rzutowych i ciągów dokładnych grup $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$ oraz $0 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 0$.

Ćwiczenie 6.1.4. Grupa \mathbb{Z}_2 jest ciałem, a więc grupy homologii i kohomologii o współczynnikach w \mathbb{Z}_2 są przestrzeniami wektorowymi. Sprawdzić równości

$$\chi(X) = \sum_k (-1)^k \dim_{\mathbb{Z}_2} H_k(X, \mathbb{Z}_2),$$

dla charakterystyki Eulera, oraz

$$\lambda(f) \equiv \sum_k (-1)^k \text{tr}_{\mathbb{Z}_2} \{f_*: H_k(X, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_k(X, \mathbb{Z}_2)\} \pmod{2},$$

dla liczby Lefschetza automorfizmu f zwartego wielościanu X . Sformułować i wykazać analogiczne twierdzenia dla kohomologii.

Uwaga 6.1.2. W topologii algebraicznej od dawna znane są tzw. *twierdzenia o uniwersalnych współczynnikach* mówiące, że wszystkie opisane wyżej grupy homologii $H_n(X, A; G)$ i kohomologii $H^n(X, A; G)$ dają się jednoznacznie, efektywnie wyliczyć, wyrazić poprzez grupy $H_n(X, A)$ i $H_{n-1}(X, A)$ – o współczynnikach całkowitych (p. [10]). Jaki jest zatem powód uzasadniający badanie zdefiniowanych wyżej *dotatkowych* grup homologii i kohomologii? Otóż twierdzenia o uniwersalnych współczynnikach *nie obejmują homomorfizmów* – znane są przykłady odwzorowań nierozróżnialnych w homologiach całkowitych, a indukujących różne homomorfizmy w kohomologiach czy homologiach o współczynnikach np. \mathbb{Z}_2 .

6.2 Bogaty asortyment produktów

W rozdziale 3 poznaliśmy naturalny iloczyn krzyżowy działający w homologiach. Łącząc twierdzenie Eilenberga–Zilbera z dualnością pomiędzy łańcuchami i kołańcuchami, można zdefiniować wiele odwzorowań biaddytywnych nazywanych tradycyjnie iloczynami lub produktami i zaopatrzonych w odpowiedni przymiotnik. W podręczniku [3] czytelnik znajdzie definicje i własności ośmiu. Wzbogacanie struktury algebraicznej związanej w naturalny, funktorialny sposób z przestrzeniami topologicznymi pociąga za sobą nałożenie dodatkowych warunków na homomorfizmy indukowane przez odwzorowania ciągle.

Ćwiczenie 6.2.1. Rozszerzyć definicję 3.5.4 – zdefiniować iloczyn krzyżowy dla homologii o współczynnikach w dowolnych grupach G i G' .

Ponieważ niniejszy skrypt jest zaledwie wprowadzeniem do tematyki objętej nazwą *topologia algebraiczna* i to głównie w zakresie tzw. *teorii singularnej*, potraktujemy ten temat połowicznie i zdefiniujemy jeszcze trzy: produkt skalarny, iloczyn krzyżowy w kohomologiach oraz \cup -iloczyn, czyli tzw. iloczyn wewnętrzny.

Definicja 6.2.1. Dla dowolnej pary (X, A) i grupy abelowej G , iloczynem skalarnym o wartościach w G wyznaczonym przez (X, A) będziemy nazywać rodzinę homomorfizmów

$$\begin{aligned} \langle \rangle: H^n(X, A; G) \otimes H_n(X, A) &\rightarrow G, & \text{dla } n \geq 0 \\ [\varphi] \otimes [c] &\mapsto \langle [\varphi], [c] \rangle := \varphi(c). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Iloczyn skalarny jest *naturalny*, tzn. dowolne odwzorowanie $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ prowadzi do tożsamości

$$\langle u, f_*\xi \rangle = \langle f^*u, \xi \rangle, \quad (6.9)$$

dla $u \in H^n(Y, B; G)$, $\xi \in H_n(X, A)$, $n \geq 0$.

Ćwiczenie 6.2.2. Rozważyć ogólniejszy homomorfizm ewaluacji

$$H^*(\text{Hom}(C, G)) \otimes HC \ni [\varphi] \otimes [c] \xrightarrow{\langle \rangle} \varphi(c) \in G. \quad (6.10)$$

Sprawdzić poprawność definicji i niezależność od reprezentantów φ i c . Wykorzystać homomorfizm (1.18) i rozszerzyć iloczyn skalarny na dowolne grupy współczynników G i G' . Sprawdzić naturalność.

Możliwość wyznaczania iloczynu skalarnego w oparciu o dowolny model singularny i homomorfizm ewaluacji (6.10) wynika z następującej własności

Stwierdzenie 6.2.1. Dla dowolnej pary wzajemnie odwrotnych równoważności homotopijnych $\zeta: C^M \rightarrow C$, $\zeta: C \rightarrow C^M$, następujący kwadrat jest przemienny

$$\begin{array}{ccc} H^*(\text{Hom}(C^M, G)) \otimes H(C^M) & \xrightarrow{\langle \rangle} & G \\ \zeta^* \otimes \zeta_* \downarrow & & \parallel \\ H^*(\text{Hom}(C, G)) \otimes HC & \xrightarrow{\langle \rangle} & G \end{array} \quad (6.11)$$

Dowód. Dla sprawdzenia przemienności w homologiach obliczymy ewaluację dolnego wiersza na parze $(\varphi, c) \in \text{Hom}(C^M, G) \times C^M$. Korzystając z homotopii łańcuchowej $D\partial + \partial D = \zeta\zeta - \text{id}_{C^M}$, otrzymujemy

$$\langle \varphi\zeta, \zeta(c) \rangle = \varphi(\zeta\zeta(c)) = \varphi(c) + \varphi D(\partial c) + (-1)^{|\varphi|} (\delta\varphi)(Dc),$$

gdzie ostatnie dwa składniki znikają, jeśli φ jest kocyklem, a c cyklem. Oznacza to przemienność diagramu (6.11) na poziomie odwzorowań biaddytywnych. \square

Przykład 6.2.1. Iloczyn skalarny

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \otimes H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}$$

pozwała wyróżnić w grupach $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong \mathbb{Z}$ generatory ϑ^n , dualne do zdefiniowanych w homologiach ϑ_n^+ .

Przykład 6.2.2. W przestrzeni rzeczywistej rzutowej $\mathbb{R}P^n$ iloczyn skalarny

$$\langle \rangle : H^{2k+1}(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z}_2) \otimes H_{2k+1}(\mathbb{R}P^n) \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad 2k+1 \leq n,$$

są izomorfizmem $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ (lub $\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$), co łatwo sprawdzamy korzystając z modelu $CW(\mathbb{R}P^n)$.

Dla zachowania równowagi pomiędzy homologiami i kohomologiami zdefiniujemy teraz iloczyn krzyżowy w kohomologiach. Pomoże nam w tym następujący lemat uogólniający homomorfizm (1.19).

Lemat 6.2.2. *Dla dowolnych kompleksów łańcuchowych C, C' i dowolnych grup współczynników G, G' , homomorfizmy grup*

$$\text{Hom}(C_p, G) \otimes \text{Hom}(C'_q, G') \xrightarrow{\mu_{pq}} \text{Hom}(C_p \otimes C'_q, G \otimes G') \quad (6.12)$$

$$\mu_{pq}(\varphi \otimes \psi)(c \otimes c') = (-1)^{pq} \varphi(c) \otimes \psi(c'), \quad \text{dla } c \in C_p, c' \in C'_q, p, q \geq 0,$$

wyznaczają kanoniczne odwzorowanie kołańcuchowe (homomorfizm)

$$\mu : \text{Hom}(C, G) \otimes \text{Hom}(C', G') \longrightarrow \text{Hom}(C \otimes C', G \otimes G').$$

Dowód. Ćwiczenie. Por. ćwiczenie 1.5.3. □

Wychodząc od dowolnych dwu przestrzeni topologicznych X i Y , stosując lemat 6.2.2 i korzystając z homomorfizmu Alexandra–Whitneya, otrzymujemy naturalne odwzorowanie łańcuchowe $C^*(X; G) \otimes C^*(Y, G') \longrightarrow C^*(X \times Y; G \otimes G')$. Przejście do homologii ułatwia nam kanoniczny homomorfizm (3.63) – złożenie

$$\begin{aligned} H^*(X; G) \otimes H^*(Y, G') &\xrightarrow{\times} H^*(X \times Y; G \otimes G') \\ [\varphi] \otimes [\psi] &\longmapsto [\mu(\varphi \otimes \psi) \circ AW] \end{aligned} \quad (6.13)$$

jest szukanym produktem. W przypadku ogólnym (dla par) możemy skorzystać z-relatywnej wersji \overline{AW} i równoważności (3.73).

Definicja 6.2.2. *Dla dowolnych grup G i G' oraz par $(X, A), (Y, B)$ takich, że triada $(X \times Y; A \times Y, X \times B)$ jest dokładna, iloczynem krzyżowym nazywamy rodzinę homomorfizmów*

$$\times : H^p(X, A; G) \otimes H^q(Y, B; G') \longrightarrow H^n(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; G''), \quad (6.14)$$

gdzie $n = p + q$ i $G'' = G \otimes G'$, reprezentowanych przez złożenia

$$\begin{aligned} \text{Hom}(C_p(X, A), G) \otimes \text{Hom}(C_q(Y, B), G') &\xrightarrow{\mu^{pq}} \bigoplus_{i+j=n} \text{Hom}(C_i(X, A) \otimes C_j(Y, B), G'') \xrightarrow{\cong} \\ &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}\left(\bigoplus_{i+j=n} C_i(X) \otimes C_j(Y) / C_i(A) \otimes C_j(Y) + C_i(X) \otimes C_j(B), G''\right) \xrightarrow{\overline{AW}} \\ &\xrightarrow{\overline{AW}} \text{Hom}(C_n(X \times Y) / C_n(A \times Y) + C_n(X \times B), G'') \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(C_n(X \times Y, A \times Y \cup X \times B), G''), \end{aligned} \quad (6.15)$$

gdzie ostatnia z równoważności wynika z dokładności triady.

Stwierdzenie 6.2.3 (Dualność iloczynów krzyżowych). *Dla dowolnych klas homologii $\xi \in H_p(X, A), \eta \in H_q(Y, B)$ i klas kohomologii $u \in H^p(X, A; G), v \in H^q(Y, B; G')$, zachodzi równość*

$$\langle u \times v, \xi \times \eta \rangle = (-1)^{pq} \langle u, \xi \rangle \otimes \langle v, \eta \rangle. \quad (6.16)$$

Dowód. Przyjmując, że klasy kohomologii występujące we wzorze (6.16) są reprezentowane przez kocykle φ i ψ , a klasy homologii – przez cykle c i c' , możemy podać jawny opis odpowiednich iloczynów krzyżowych,

$$[c] \times [c'] = [\iota \circ \bar{\nabla}(c \otimes c')], \quad [\varphi] \times [\psi] = [\mu_{pq}(\varphi \otimes \psi) \circ \overline{AW} \circ \rho],$$

gdzie włożenie ι jest równoważnością

$$C(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \xrightarrow{\cong} C(X \times Y) / C(A \times Y) + C(X \times B),$$

a ρ – równoważnością odwrotną. Iloczyn skalarny opisanych wyżej klas jest ewaluacją

$$\begin{aligned} \langle [\varphi] \times [\psi], [c] \times [c'] \rangle &= \mu_{pq}(\varphi \otimes \psi) \circ \overline{AW} \circ \rho \circ \iota \circ \bar{\nabla}(c \otimes c') \\ &= \mu_{pq}(\varphi \otimes \psi) \circ \overline{AW} \circ \bar{\nabla}(c \otimes c') \\ &= \mu_{pq}(\varphi \otimes \psi) \circ (c \otimes c') = (-1)^{pq} \varphi(c) \otimes \psi(c'), \end{aligned}$$

gdzie – podobnie jak w dowodzie stwierdzenia 6.2.1 – złożenia homotopijne z identyficyznością (tu: $\rho \circ \iota$ oraz $\overline{AW} \circ \bar{\nabla}$) nie wpływają na wynik. \square

Przykład 6.2.3. W przestrzeni $H^{p+q}(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\})$ zachodzi równość (por. przykład 6.2.1)

$$\vartheta^p \times \vartheta^q = (-1)^{pq} \vartheta^{p+q}.$$

Zatem iloczyn krzyżowy

$$H^p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus \{0\}) \otimes H^q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q \setminus \{0\}) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(\mathbb{R}^{p+q}, \mathbb{R}^{p+q} \setminus \{0\})$$

jest izomorfizmem.

Jeśli chcemy, by wyróżnione generatory były zgodne z iloczynem krzyżowym, bez zmiany znaku, możemy to uzyskać kładąc np. $\vartheta_+^n = (-1)^{\binom{n}{2}} \vartheta^n$, co oznacza wprowadzenie znaku permutacji odwracającej kolejność współrzędnych w \mathbb{R}^n .

Zgodnie z zapowiedzią, zmierzamy teraz do wprowadzenia w grupach kohomologii wewnętrzznego iloczynu – a właściwie całej rodziny powiązanych wzajemnie iloczynów generowanych przez ten sam homomorfizm diagonalny d^{aw} .

Zacznijmy od rozszerzenia homomorfizmu diagonalnego na triady. Korzystamy przy tym z obserwacji, mającej swe źródło w naturalności.

Stwierdzenie 6.2.4. *Dla dowolnej triady $(X; A_1, A_2)$ homomorfizm diagonalny Alexandera–Whitneya $d^{aw} : C(X) \rightarrow C(X) \otimes C(X)$ wyznacza homomorfizm kompleksów ilorazowych $\bar{d}_{A_1 A_2}^{aw} : C(X)/_{C(A_1)+C(A_2)} \rightarrow C(X, A_1) \otimes C(X, A_2)$. Jeśli triada $(X; A_1, A_2)$ jest dokładna, odwzorowanie $\bar{d}_{A_1 A_2}^{aw}$ wyznacza jednoznacznie klasę homotopijnie równoważnych homomorfizmów*

$$d_{A_1 A_2}^{aw} : C(X, A_1 \cup A_2) \rightarrow C(X, A_1) \otimes C(X, A_2) \quad (6.17)$$

kompleksów relatywnych.

Dowolne pary (X, A) i (Y, B) takie, że triada $(X \times Y; A \times Y, X \times B)$ jest dokładna, prowadzą do diagramu, przemiennego z dokładnością do homotopii łańcuchowej,

$$\begin{array}{ccc} C(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) & \xlongequal{\quad} & C((X, A) \times (Y, B)) \\ d_{A \times Y, X \times B}^{aw} \downarrow & & \overline{AW} \uparrow \bar{\nabla} \\ C(X \times Y, A \times Y) \otimes C(X \times Y, X \times B) & \xrightarrow{\pi_{\#}^1 \otimes \pi_{\#}^2} & C(X, A) \otimes C(Y, B), \end{array} \quad (6.18)$$

w którym $\pi^1, \pi^2 : X \times Y \rightarrow X, Y$ oznaczają projekcje. \square

Definicja 6.2.3. *Homomorfizm $d_{A_1 A_2}^{aw}$ nazywamy homomorfizmem diagonalnym triady $(X; A_1, A_2)$.*

Diagram (6.18) sugeruje, że homomorfizm diagonalny działa „w niewłaściwym kierunku”. Jest to także widoczne w coraz bardziej rozbudowanych oznaczeniach homomorfizmu (6.17), w których kolejne indeksy nie tyle są związane z dziedziną, co wskazują jedną z możliwych grup docelowych. Odwrócenie kierunku staje się efektem przejścia do kompleksów i homomorfizmów dualnych, co umożliwi nam lemat 6.2.2.

Definicja 6.2.4. *Niech G będzie pierścieniem (przemiennym) z jednością, zaś X dowolną przestrzenią topologiczną. Iloczynem wewnętrznym lub \cup -iloczynem w grupach kohomologii $H^*(X; G)$ nazywamy rodzinę homomorfizmów*

$$\cup : H^p(X; G) \otimes H^q(X; G) \rightarrow H^{p+q}(X; G) \quad (6.19)$$

takich, że dla dowolnych kocykli $\varphi \in C^p(X; G), \psi \in C^q(X; G)$ iloczyn $[\varphi] \cup [\psi] = \cup([\varphi] \otimes [\psi])$ jest reprezentowany przez złożenie

$$C_{p+q}(X) \xrightarrow{d^{aw}} (C(X) \otimes C(X))_{p+q} \xrightarrow{\mu_{pq}(\varphi \otimes \psi)} G \otimes G \rightarrow G, \quad (6.20)$$

dla $p, q \geq 0$, gdzie ostatni homomorfizm jest mnożeniem w pierścieniu.

Iloczynem wewnętrznym lub \cup -iloczynem w grupach kohomologii relatywnych przestrzeni X nazywamy rodzinę homomorfizmów

$$\cup: H^p(X, A_1; G) \otimes H^q(X, A_2; G) \rightarrow H^{p+q}(X, A_1 \cup A_2; G), \quad (6.21)$$

określonych dla triad dokładnych $(X; A_1, A_2)$, takich, że dla dowolnych kocykli $\varphi \in C^p(X, A_1; G)$, $\psi \in C^q(X, A_2; G)$ iloczyn $[\varphi] \cup [\psi]$ jest reprezentowany przez złożenie

$$C_{p+q}(X, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\alpha_{A_1 A_2}^{aw}} (C(X, A_1) \otimes C(X, A_2))_{p+q} \xrightarrow{\mu_{pq}(\varphi \otimes \psi)} G \otimes G \rightarrow G, \quad (6.22)$$

dla $p, q \geq 0$.

Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X , obraz jednostki grupy G w homomorfizmie indukowanym $\eta^*: G \rightarrow H^0(X; G)$ jest wyróżnioną klasą homologii oznaczaną jako 1.

Twierdzenie 6.2.5. Grupa $H^*(X; G) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X; G)$ rozważana wraz z iloczynem wewnętrznym \cup jest pierścieniem z jednostką $1 \in H^0(X; G)$. Jako pierścień z naturalną gradacją daną przez wymiar $|u| = n$ dla $u \in H^n(X; G)$, $n \geq 0$, pierścień $H^*(X; G)$ jest przemienny, tzn. zachodzą równości

$$u \cup v = (-1)^{|u||v|} v \cup u, \quad (6.23)$$

dla $u, v \in H^*(X; G)$. Dla dowolnego odwzorowania $f: X \rightarrow Y$ homomorfizm indukowany $f^*: H^*(Y; G) \rightarrow H^*(X; G)$ jest homomorfizmem pierścieni.

Pierścień $H^*(X; G)$ działa na każdej z grup $H^*(X, A; G) = \bigoplus_{n \geq 0} H^n(X, A; G)$, dla $A \subset X$ (np. lewostronnie). Działanie to jest naturalne względem odwzorowań par.

Dowód. Ćwiczenie. Skorzystać ze stwierdzenia 3.5.10. □

Ćwiczenie 6.2.3. Sformułować i wykazać własności: łączność, przemiennność i naturalność dla \cup -iloczynu (6.21).

Definicja 6.2.5. Naturalny pierścień $H^*(X; G)$ jest pierścieniem kohomologii przestrzeni X o współczynnikach w G .

Z przemienności diagramu (6.18) wynika natychmiast

Stwierdzenie 6.2.6. Jeśli triada $(X \times Y; A \times Y, X \times B)$ jest dokładna, a $\varrho: G \otimes G \rightarrow G$ oznacza mnożenie w pierścieniu, to dla dowolnych klas $u \in H^*(X, A; G)$, $v \in H^*(Y, B; G)$ zachodzi równość

$$\varrho_*(u \times v) = (\pi_1^* u) \cup (\pi_2^* v), \quad (6.24)$$

gdzie $\pi_1: (X \times Y, A \times Y) \rightarrow (X, A)$, $\pi_2: (X \times Y, X \times B) \rightarrow (Y, B)$ są projekcjami. □

Przykład 6.2.4. Następujący kwadrat

$$\begin{array}{ccc}
 H^p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus \{0\}) \otimes H^q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\pi_1^* \otimes \pi_2^*} & H^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{0,q}) \otimes H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^{p,0}) \\
 \times \downarrow & & \downarrow \cup \\
 H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xlongequal{\quad} & H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^{0,q} \cap \mathbb{R}^{p,0})),
 \end{array} \tag{6.25}$$

w którym $\mathbb{R}^{0,q} = \{0\} \times \mathbb{R}^q$ i $\mathbb{R}^{p,0} = \mathbb{R}^p \times \{0\}$ jest przemienny. Wszystkie homomorfizmy tworzące diagram są izomorfizmami.

Przypominamy, że kompleksy komórkowe $CW(FP^n; R)$ przestrzeni rzutowych wymiaru $n \geq 1$ o współczynnikach odpowiednio $R = \mathbb{Z}_2$, gdy $F = \mathbb{R}$, oraz $R = \mathbb{Z}$, dla $F = \mathbb{C}, \mathbb{H}$, mają zerowe operatory brzegu. Pozwala to opisać zarówno grupy homologii, jak i kohomologii jako izomorficzne z R – w wymiarach dk , $k = 0, 1, \dots, n$, gdzie zgodnie z definicją (p. przykład 2.4.2) $d \in \{1, 2, 4\}$ oznacza wymiar ciała F nad \mathbb{R} . Następujące twierdzenie wchodzi w skład każdego kursu topologii algebraicznej.

Twierdzenie 6.2.7 (O strukturze pierścienia w przestrzeniach rzutowych). *Dla dowolnej przestrzeni rzutowej FP^n , $n \geq 1$, nad ciałem $F = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, niech $x \in H^d(FP^n; R) \cong R$ oznacza dowolny generator w minimalnym niezerowym wymiarze d . Wówczas potęgi $x^k = x \cup \dots \cup x$ $s\acute{q}$, dla $k \leq n$, generatorami grup $H^{kd}(FP^n; R)$, natomiast pierścień kohomologii $H^*(FP^n; R)$ jest izomorficzny z obciętym pierścieniem wielomianów $R[x]/(x^{n+1})$ nad R , w którym potęgi powyżej n znikają.*

Dowód. Czytelnik znajdzie elementarny, dostępny w oparciu o materiał skryptu dowód w [3, Twierdzenie VII.9.4]. Geometryczna konstrukcja opisana przez Dolda pozwala wykorzystać (6.25) i wykazać, że każdy z iloczynów

$$\cup: H^{di}(FP^n; R) \otimes H^{dj}(FP^n; R) \longrightarrow H^{d(i+j)}(FP^n; R), \quad i + j \leq n,$$

jest izomorfizmem. □

Ćwiczenie 6.2.4. Sprawdzić, że dla $m < n$ włożenie $FP^m \hookrightarrow FP^n$ indukuje w kohomologiach epimorfizm $R[x_n]/(x_n^{n+1}) \rightarrow R[x_m]/(x_m^{m+1})$ przeprowadzający generator $x_n \in H^d(FP^n; R)$ na $x_m \in H^d(FP^m; R)$ (z dokładnością do znaku) i anihilujący x_n^{m+1} .

Wniosek 6.2.8. *Podprzestrzeń $FP^m \hookrightarrow FP^n$ nie jest retraktem – dla $n > m > 0$.*

Dowód. Ćwiczenie. □

Twierdzenie 6.2.7 pozwala w prosty sposób uzyskać klasyczne

Twierdzenie 6.2.9 (Borsuka–Ulama o antypodach).

(i) *Dla dowolnego odwzorowania $h: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, istnieje punkt $x \in S^n$ taki, że $h(x) = h(-x)$.*

(ii) Nie istnieje odwzorowanie wzajemnie antypodyczne $g: S^n \rightarrow S^m$, tzn. takie, że $g(-x) = -g(x)$, dla wszystkich $x \in S^n$ – jeśli $n > m > 0$.

Dowód. Część (i) twierdzenia daje się łatwo sprowadzić do (ii). Istotnie, jeśli dla h nie istniałaby para punktów antypodycznych o tym samym obrazie, to wzór

$$g(x) = (h(x) - h(-x))/\|h(x) - h(-x)\|$$

definiowałby wzajemnie antypodyczne odwzorowanie $g: S^n \rightarrow S^{n-1}$.

Dla dowodu (ii) przypuścimy, że odwzorowanie g o podanej własności istnieje; niech $f: \mathbb{R}P^n \rightarrow \mathbb{R}P^m$ oznacza indukowane odwzorowanie przestrzeni rzutowych. Zgodnie z przykładem 1.3.6, jeśli $\tilde{\omega}: (I, \{0\}) \rightarrow (S^n, \{1\})$, $\tilde{\omega}(1) = -1$, jest podniesieniem pętli ω generującej $\pi_1(\mathbb{R}P^n, 1)$, to droga $g \circ \tilde{\omega}$ jest podniesieniem pętli $f \circ \omega$, przy czym własność

$$g \circ \tilde{\omega}(1) = g(-\tilde{\omega}(0)) = -g \circ \tilde{\omega}(0)$$

oznacza nietrywialność pętli $f \circ \omega$, a więc $f_*: \pi(\mathbb{R}P^n, 1) \rightarrow \pi(\mathbb{R}P^m, f(1))$ jest izomorfizmem. Po przejściu do klas homologii, gdzie pętle homotopijne z ω wyznaczają generator w grupie $H_1(\mathbb{R}P^n)$, oznacza to, że homomorfizm $f_*: H_1(\mathbb{R}P^n) \rightarrow H_1(\mathbb{R}P^m)$ jest izomorfizmem. Naturalność (6.9) iloczynu skalarnego i jego nietrywialność w $\mathbb{R}P^n$ (p. przykład 6.2.2) pozwalają wywnioskować stąd, że homomorfizm $f^*: H^1(\mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ przeprowadza na siebie stosowne generatory algebr, $f^*(x_m) = x_n$. Skoro f^* jest także homomorfizmem algebr, otrzymujemy $0 = f^*(x_n^{m+1}) = x_n^{m+1}$ – sprzeczność. \square

Wniosek 6.2.10 (Twierdzenie o sprawiedliwym podziale kanapki). *Dla dowolnych ograniczonych zbiorów mierzalnych A_1, \dots, A_n w \mathbb{R}^n , $n \leq 1$, istnieje hiperpłaszczyzna $H \subset \mathbb{R}^n$ rozdzielająca każdy ze zbiorów A_i na części o równej mierze.*

Nazwa przypisana twierdzeniu odnosi się do 3-wymiarowej kanapki złożonej z pieczywa, szynki i sera – przygotowanej do przecięcia idealną matematyczną płaszczyzną, pozbawioną grubości i lepkości.

Dowód. Utożsamiając \mathbb{R}^n z podprzestrzenią $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, możemy każdą hiperpłaszczyznę $H \subset \mathbb{R}^n$ przedstawić jako część wspólną \mathbb{R}^n i hiperpłaszczyzny $\tilde{H} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ rozpiętej na zbiorze $H \cup \{N\}$, gdzie $N = (0, \dots, 0, 1)$ jest „biegunem północnym”. Możemy teraz sparametryzować półprzestrzeń w \mathbb{R}^n – o krawędzi H – wskazując wektor jednostkowy $x \in S^{n+1}$ ortogonalny do \tilde{H} i skierowany do wnętrza odpowiedniej półprzestrzeni w \mathbb{R}^{n+1} . Dzięki temu, wzór

$$f: x \mapsto (|A_1 \cap \tilde{H}_x|, \dots, |A_n \cap \tilde{H}_x|),$$

gdzie \tilde{H}_x oznacza wyróżnioną przez x półprzestrzeń o krawędzi ortogonalnej do x , definiuje funkcję $f: S^{n+1} \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Przyjmując $f(N) = 0$, rozszerzamy f do ciągłego odwzorowania sfery S^{n+1} w \mathbb{R}^n . Ponieważ pary półprzestrzeni dopełniających odpowiadają parom wektorów $(x, -x)$, istnienie hiperpłaszczyzny *sprawiedliwego podziału* wynika z twierdzenia Borsuka–Ulama. \square

6.3 Co dalej?

Naturalną kontynuacją teorii homologii i kohomologii jest włączenie do rozważań rozmaitości – topologicznych lub różniczkowalnych. Rozmaitości, jako przestrzenie lokalnie homeomorficzne (dyfeomorficzne) z \mathbb{R}^n , wyróżnia jednoznacznie określony wymiar oraz lokalna orientowalność. Globalnie, dla rozmaitości zwartej i spójnej X oznacza to istnienie dwu orientacji i dwu (do wyboru) klas podstawowych $\zeta_X \in H_n(X)$, jeśli rozmaitość jest orientowalna; zmiana współczynników na \mathbb{Z}_2 nie pozostawia wyboru, a więc każda rozmaitość jest \mathbb{Z}_2 -orientowana, z jednoznacznie określoną klasą podstawową $\zeta_X \in H_n(X, \mathbb{Z}_2)$, o ile jest zwarta. Klasyczne, cytowane w skrypcie podręczniki [3], [8], czy [9] kierują wykład w stronę rozmaitości i wykazują dualność Poincaré’go – własność, która wyróżnia model singularny rozmaitości zwartych i oznacza izomorfizmy

$$H^q(X, R) \xrightarrow{\cong} H_{n-q}(X, R), \quad u \mapsto u \cap \zeta_X,$$

dla $0 \leq q \leq n$, gdzie $R = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$, zależnie od orientowalności X , a \cap jest kolejnym – jak widać potrzebnym – iloczynem.

Dla odmiany, Dupont [5] całość wykładu skupia na rozmaitościach różniczkowalnych, przy czym rozpoczyna od dowodu twierdzenia deRhama o równoważności kompleksu kołańcuchowego $C^*(X, \mathbb{R})$ – o współczynnikach rzeczywistych – oraz algebry zewnętrznej $\mathcal{A}^*(X)$ form różniczkowych na rozmaitości. Dowód korzysta z kompleksów podwójnych i stanowi pierwowzór przedstawionego w rozdziale 4 dowodu twierdzenia o izomorfizmie. Dodatkową atrakcją [5] jest przedstawiony tam także dowód równoważności \cup -produktu z iloczynem zewnętrznym form różniczkowych. W tym miejscu zatem geometria różniczkowa i bardzo nieróżniczkowa topologia algebraiczna okazują się zgodne.

Czytelników, którzy zainteresują się bardziej teorią homotopii, autor niniejszego skryptu zachęca do studiowania [7], a jeśli z osiągniętego, wyższego poziomu zechcą ponownie spojrzeć na homologie i kohomologie – do zapoznania się z [12].

Wszystkim, początkującym i bardziej zaawansowanym, polecam sięgnięcie do źródeł – wyodrębnionych i zebranych przez J.F. Adamsa w [1].

Grzegorz Andrzejczak

Spis symboli i skrótów

Symbol	Opis	Definicja
$f \simeq g$	odwzorowania homotopijne	str. 3
$F: f \simeq g$	homotopia odwzorowań f i g	str. 3
$[f]: X \rightarrow Y$	klasa homotopii odwzorowania $f: X \rightarrow Y$	str. 3
$X \simeq Y$	przestrzeń homotopijnie równoważna	str. 3
$f \simeq g$ rel A	homotopijność relatywna	str. 4
(X, A)	para (topologiczna)	str. 4
$f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$	odwzorowanie par	str. 4
$(X, A) \times (Y, B)$	produkt kartezjański par	str. 4
$I \times (X, Y)$	produkt przedziału i pary	str. 5
$\mathcal{C}(X, Y)$	zbiór morfizmów kategorii \mathcal{C} z X do Y	str. 5
$\Pi(X)$	zbiór dróg w przestrzeni X	str. 6
$\Omega(X, x_0)$	przestrzeń pętli w X w punkcie x_0	str. 6
$f_{\#}$	odwzorowanie indukowane w przestrzeni dróg	str. 6
$\mathcal{P}(X)$	zbiór klas homotopii dróg w X , grupoid podstawowy	str. 6
$\pi(X; x, y)$	zbiór klas dróg o początku x i końcu y	str. 6
f_*	odwzorowanie indukowane (homomorfizm)	str. 6
	w grupoidzie podstawowym	str. 6
$\omega \cdot \omega'$	produkt dróg	str. 6
$[\omega] \cdot [\omega']$	produkt klas homotopii dróg	str. 7
e_x	droga stała – w punkcie	str. 7
1_x	klasa homotopii stałej drogi	str. 7
$\bar{\omega}$	droga przeciwna (odwrotna)	str. 7
$\pi_1(X, x_0)$	grupa podstawowa	str. 8
$h_{[\gamma]}$	izomorfizm grup podstawowych o różnych punktach odniesienia	str. 8
$G_1 *_G G_2$	amalgamat grup	str. 11
$\pi_n(X, x_0)$	n -ta grupa homotopii	str. 12
$\coprod_{a \in \mathcal{A}} X_a$	suma rozłączna przestrzeni topologicznych	str. 19
X/R	przestrzeń ilorazowa	str. 19
$X \cup_f Y$	przestrzeń – efekt doklejenia X do Y za pomocą f	str. 20
$\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} G_a$	suma prosta rodziny grup	str. 23
$\prod_{a \in \mathcal{A}} G_a$	produkt grup	str. 23

Symbol	Opis	Definicja
$\text{Hom}(G, H)$	grupa homomorfizmów grup	str. 23
$G \otimes G', g \otimes g'$	iloczyn tensorowy grup, elementów grup	str. 24
$f \otimes f'$	iloczyn tensorowy odwzorowań	str. 24
$G^{\mathbb{Q}}$	\mathbb{Q} –przestrzeń wektorowa rozpięta na grupie G	str. 25
$\phi^{\mathbb{Q}}: G^{\mathbb{Q}} \rightarrow H^{\mathbb{Q}}$	homomorfizm indukowany	str. 26
$\text{tr}(h)$	śląd automorfizmu	str. 26
\vec{pq}	wektor od p do q w przestrzeni afinicznej	str. 27
Δ^n	standardowy n –sympleks	str. 28
E_0, \dots, E_n	wierzchołki Δ^n	str. 28
$(v_0 \dots v_n)$	sympleks geometryczny (o danych wierzchołkach)	str. 28
$\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$	kombinacja wypukła punktów przestrzeni afinicznej	str. 28
$\langle v_0 \dots v_n \rangle$	odwzorowanie opisujące sympleks geometryczny	str. 28
$\lambda_0, \dots, \lambda_n$	współrzędne barycentryczne	str. 29
∂	brzeg (sympleksu)	str. 29
$\text{int } \sigma$	wnętrze sympleksu σ	str. 29
ε_i	odwzorowanie opisujące i –tą ścianę Δ^n	str. 29
$\text{diam } \sigma$	średnica sympleksu	str. 29
g.k.s.	geometryczny kompleks symplecjalny	str. 30
$\dim K$	wymiar kompleksu	str. 30
K^n	n –wymiarowy szkielet kompleksu	str. 30
$ K $	przestrzeń geometrycznego kompleksu	str. 30
$\text{sd}^0 \sigma$	naturalny g.k.s. sympleksu geometrycznego σ	str. 31
$\text{sd}^1 \sigma$	g.k.s. – podział barycentryczny sympleksu geometrycznego σ	str. 31
a.k.s.	abstrakcyjny kompleks symplecjalny	str. 32
$\mathcal{N}\mathcal{U}$	a.k.s. – nerw pokrycia \mathcal{U} przestrzeni topologicznej	str. 33
E_K	przestrzeń afiniczna rozpięta na zbiorze wierzchołków a.k.s K	str. 33
$ K $	geometryczna realizacja abstrakcyjnego kompleksu symplecjalnego	str. 34
$\text{st } v$	gwiazda wierzchołka v kompleksu symplecjalnego	str. 34
\mathcal{U}_K	gwiazdziste pokrycie przestrzeni $ K $	str. 34
K/f	kompleks ilorazowy	str. 35
T^2	torus	str. 35
K^2	butelka Kleina	str. 35
$\phi: K \rightarrow L$	odwzorowanie symplecjalne kompleksów	str. 37
$ \phi : K \rightarrow L $	odwzorowanie symplecjalne przestrzeni kompleksów	str. 37
$\text{sd } K$	podział barycentryczny kompleksu symplecjalnego	str. 39
$\text{sd } \phi: \text{sd } K \rightarrow \text{sd } L$	podział barycentryczny odwzorowania symplecjalnego	str. 39
sd^m	iterowany podział barycentryczny	str. 40
X^n	n –ty szkielet CW –przestrzeni X	str. 41
$\Phi_e: (B^n, S^{n-1}) \rightarrow (X^n, X^{n-1})$	odwzorowanie charakterystyczne komórki e	str. 41
\mathcal{G}_X	CW –rozkład CW –kompleksu X	str. 42
$\mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n$	przestrzenie rzutowe	str. 43
$\mathcal{G}_{X/A}$	CW –rozkład kompleksu ilorazowego	str. 46
$\mathcal{G}_{X \times Y}$	CW –rozkład produktu kartezjańskiego	str. 47

Symbol	Opis	Definicja
$S_n X$	zbiór n -sympleksów singularnych w X	str. 49
$C_n(X)$	grupa n -łańcuchów singularnych przestrzeni X	str. 49
$\text{supp}(c)$	nośnik łańcucha singularnego	str. 50
$f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y)$	homomorfizm indukowany	str. 50
$\partial_n: C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$	operator brzegu	str. 50
$\tilde{\partial}_0: C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$,	rozszerzony operator brzegu	str. 50
$\iota_n = \text{id}_{\Delta^n}$	wzorcowy sympleks singularny	str. 51
$C(X)$	singularny kompleks łańcuchowy przestrzeni X	str. 52
$\tilde{C}(X)$	rozszerzony singularny kompleks łańcuchowy przestrzeni X	str. 52
$C = (\{C_n\}, \{\partial_n\})$	kompleks łańcuchowy	str. 52
$Z_n C, B_n C$	grupy cykli i brzegów kompleksu łańcuchowego	str. 53
$H_n C$	grup homologii kompleksu łańcuchowego	str. 53
$[c] = c + B_n C$	klasa homologii cyklu c	str. 53
$HC = \{H_n C\}_{n \in \mathbb{Z}}$	kompleks (grupa z gradacją) homologii	str. 53
$F_*: H_n C \rightarrow H_n C'$	homomorfizm indukowany w homologiach	str. 53
$Z_n(X), \tilde{Z}_0(X), B_n(X)$	grupy cykli (zredukowana) i brzegów singularnych	str. 53
$H_n(X), \tilde{H}_n(X)$	grupa homologii (zredukowana) przestrzeni X	str. 54
$\eta: C(X) \rightarrow (\mathbb{Z}, 0)$	homomorfizm augmentacji	str. 55
$D: F \simeq G$	homotopia łańcuchowa odwzorowań łańcuchowych	str. 56
$C \simeq C'$	kompleksy łańcuchowe (homotopijnie) równoważne	str. 56
$C_n(X, A), C(X, A)$	grupa/kompleks relatywnych łańcuchów singularnych pary	str. 57
$\bar{\partial}_n$	operator brzegu w kompleksie relatywnym	str. 57
$H_n(X, A), H(X, A)$	grupa (z gradacją) homologii relatywnych	str. 57
$Z_n(X, A), B_n(X, A)$	grupa relatywnych cykli/brzegów	str. 57
$[c]_X, [c]_{(X,A)}$	oznaczenia klas homologii	str. 57
$H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A)$	homomorfizm łączący pary	str. 58
$A_i = (0, E_i), B_i = (1, E_i)$	wierzchołki pryzmy $I \times \Delta^n$	str. 61
B_*	operator stożkowy w zbiorze wypukłym	str. 64
$\text{sd}: C(X) \rightarrow C(X)$	homomorfizm podziału barycentrycznego	str. 65
$S_n \mathfrak{U}, C_n(\mathfrak{U})$	zbiór sympleksów/grupa łańcuchów wpisanych w pokrycie	str. 67
$C(\mathfrak{U}), C(\mathfrak{U}, A)$	kompleks łańcuchowy (relatywny) wpisany w pokrycie	str. 67
$\iota_{\mathfrak{U}}, \iota_{\mathfrak{U}, A}$	homomorfizmy włożenia kompleksów wpisanych w pokrycie	str. 67
sd^+	równoważność łańcuchowa odwrotna do $\iota_{\mathfrak{U}}, \iota_{\mathfrak{U}, A}$	str. 68
$\theta_n \in H_n(S^n)$	wyróżniony układ generatorów	str. 71
$\pi: B^n \rightarrow S^n$	rzut stereograficzny kuli	str. 71
$\varpi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$	rzut stereograficzny przestrzeni \mathbb{R}^n	str. 71
$\text{deg}(f)$	stopień odwzorowania sfery S^n lub pary (B^n, S^{n-1}) w siebie	str. 73
$\text{deg}_z(f)$	stopień lokalny odwzorowania f w punkcie z	str. 74
$C \otimes C'$	iloczyn tensorowy kompleksów łańcuchowych	str. 77
$HC \otimes HC' \xrightarrow{\alpha} H(C \otimes C')$	homomorfizm kanoniczny	str. 77
$C(X \times Y) \xrightarrow{AW} C(X) \otimes C(Y)$	homomorfizm Alexandera–Whitneya	str. 78

Symbol	Opis	Definicja
$C(X) \otimes C(Y) \xrightarrow{\nabla} C(X \times Y)$	homomorfizm Eilenberga–Zilbera	str. 79
$\overline{\nabla}$	relatywny homomorfizm Eilenberga–Zilbera	str. 80
\overline{AW}	relatywny homomorfizm Alexandera–Whitneya	str. 81
d^{aw}	homomorfizmem diagonalnym Alexandera–Whitneya	str. 82
\prec	liniowy porządek w zbiorze wierzchołków g.k.s.	str. 84
$\langle \sigma \rangle$	afiniczny sympleks odpowiadający sympleksowi geometrycznemu	str. 84
$S_n K$	zbiór afinicznych sympleksów kompleksu K	str. 84
$C_n(K), C(K)$	grupa łańcuchów symplecjialnych/symplicjalny kompleks łańcuchowy g.k.s. K	str. 85
$H_n(K), H(K)$	grupy homologii symplecjialnych	str. 85
$Z_n(K), B_n(K)$	grupy symplecjialnych cykli/brzegów	str. 85
$\iota_K: C(K) \hookrightarrow C(K)$	homomorfizm włożenia	str. 85
$\phi: (K, L) \rightarrow (K', L')$	odwzorowanie symplecjialne par kompleksów symplecjialnych	str. 86
$C_n(K, L), C(K, L)$	grupa relatywnych łańcuchów symplecjialnych, symplecjialny relatywny kompleks łańcuchowy	str. 86
$H_n(K, L)$	grupa relatywnych homologii symplecjialnych	str. 86
$Z_n(K, L), B_n(K, L)$	grupa symplecjialnych relatywnych cykli/brzegów	str. 87
$\deg(\sigma)$	stopień afinicznego n -sympleksu w \mathbb{R}^n	str. 88
\mathcal{O}^+	dodatnia orientacja w \mathbb{R}^n	str. 89
$\vartheta_P^+, \vartheta_n^+$	dodatnia orientacja w \mathbb{R}^n w punkcie P /w $P = \{0\}$	str. 89
$[c_K] \in H_n(K, \partial K)$	klasa podstawowa wielościanu	str. 90
ϑ_n	klasa podstawowa w kuli B^n	str. 91
$\phi_{\#}: C(K) \rightarrow C(K')$	homomorfizm indukowany przez odwzorowanie symplecjialne	str. 92
ϕ_*	homomorfizm indukowany w homologiach symplecjialnych	str. 92
$w_\sigma \prec w_\tau$	porządek w zbiorze wierzchołków kompleksu $sd K$	str. 93
$sd: C(K) \rightarrow C(sdK)$	podział barycentryczny łańcuchów symplecjialnych	str. 93
$\mathfrak{N}\mathfrak{U}, \mathfrak{N}_p\mathfrak{U}$	topologiczny nerw pokrycia \mathfrak{U}	str. 95
$\varepsilon_i: \mathfrak{N}_p\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{N}_{p-1}\mathfrak{U}$	operator symplecjialny	str. 95
$C_{pq} = C_q(\mathfrak{N}_p\mathfrak{U}_K)$	kompleks podwójny łańcuchów singularnych na zbiorach nerwu pokrycia	str. 96
δ_p, ∂_q	operatory brzegu w kompleksie podwójnym	str. 96
$C(\mathfrak{N}\mathfrak{U}_K)$	kompleks łańcuchowy kompleksu podwójnego	str. 96
$st(\tau)$	gwiazda sympleksu afinicznego $\tau \in S_n K$	str. 98
$\sigma * B$	prawostronny operator stożkowy	str. 99
$(f, \phi)_{\#}$	homomorfizm indukowany dla kompleksu podwójnego	str. 102
$\lambda(f)$	liczba Lefschetza odwzorowania $f: X \rightarrow X$	str. 106
$\chi(X)$	charakterystyka Eulera zbioru X	str. 106
$\lambda(h)$	liczba Lefschetza homomorfizmu grup z gradacją	str. 107
$K \times K'$	produkt kartezjański kompleksów symplecjialnych	str. 112
$(K, L) \times (K', L')$	produkt kartezjański par kompleksów symplecjialnych	str. 113
AW^{Δ}	symplecjialny homomorfizm Aleksandera–Whitneya	str. 113
∂_*	homomorfizm łączący dla krótkiego ciągu dokładnego	str. 117

Symbol	Opis	Definicja
$(X; X_1, X_2)$	triada	str. 121
$\mathcal{G}_{X \setminus A}^n$	$\mathcal{G}_X^n \setminus \mathcal{G}_A^n$	str. 126
X_A^n	relatywny szkielet CW -pary	str. 126
$CW_n(X, A)$	grupa łańcuchów komórkowych	str. 127
∂_n^{cw}	operator brzegu, komórkowy	str. 127
$CW(X, A), H_n^{cw}(X, A)$	kompleks łańcuchowy komórkowy/grupa homologii	str. 127
$[e] = \Phi_{e*} \vartheta_n$	generatory grupy $CW_n(X, A)$	str. 127
$[c]_{(X,A)}^{cw}$	oznaczenie klasy homologii łańcucha $c \in C_n(X_A^n)$	str. 127
$V(X, A)$	pomocniczy, pośredni kompleks łańcuchowy dla $CW(X, A)$	str. 127
$[a : b]$	współczynnik incydencji komórek	str. 131
$\varphi_a = \Phi_a _{S^{n-1}}$	funkcja dokładająca komórki	str. 131
∇^{cw}	komórkowy homomorfizm (izomorfizm) Eilenberga–Zilbera	str. 135
d^{cw}	komórkowy homomorfizm diagonalny	str. 136
$C^M(X, A), \varsigma^M$	model singularny	str. 137
$C \otimes G$	kompleks łańcuchowy o rozszerzonej grupie współczynników	str. 139
$C(X, A; G)$	łańcuchy o współczynnikach w grupie	str. 139
$H(X, A; G)$	homologie o współczynnikach w grupie	str. 139
$C^* = (\{C^n\}, \{\delta^n\})$	kompleks kołańcuchowy	str. 140
$H^n(C^*)$	grupy kohomologii kompleksu kołańcuchowego	str. 140
$\text{Hom}(C, G)$	kompleks kołańcuchowy dla C , o współczynnikach w grupie	str. 140
δ^n	operator kobrzegu w kompleksie kołańcuchowym	str. 140
$h \otimes G, \text{Hom}(h, G)$	rozszerzenia homomorfizmu kompleksów	str. 140
$C^*(X, A; G)$	kołańcuchy o współczynnikach w grupie	str. 141
$H^*(X, A; G)$	kohomologie o współczynnikach w grupie	str. 141
$f^\#, f^*$	homomorfizmy indukowane w grupach kołańcuchów, kohomologii	str. 141
$H^*(X, A)$	grupy kohomologii o współczynnikach w \mathbb{Z}	str. 141
$\text{supp}(\varphi)$	nośnik kołańcucha singularnego	str. 141
$H(K, L; G)$	homologie symplecjalne o współczynnikach w grupie	str. 141
$H^{cw}(X, A; G)$	homologie komórkowe o współczynnikach w grupie	str. 141
$H^*(K, L; G)$	kohomologie symplecjalne o współczynnikach w grupie	str. 142
$H_{cw}^*(X, A; G)$	homologie komórkowe o współczynnikach w grupie	str. 142
β_*, β^*	homomorfizmy Bocksteina	str. 143
$\langle \rangle$	iloczyn skalarny klas kohomologii i homologii, ewaluacja	str. 144
ϑ^n	klasa kohomologii dualna do ϑ_n^+	str. 145
$\{\mu_{pq}\}$	kanoniczne odwzorowanie kołańcuchowe	str. 145
\times	iloczyn krzyżowy w kohomologiach	str. 145
$d_{A_1 A_2}^{aw}$	homomorfizm diagonalny triady	str. 147
\cup	iloczyn wewnętrzny w kohomologiach	str. 147

Skorowidz

- a.k.s., *zob.* kompleks symplecjalny, abstrakcyjny
- amalgamat grup, 11
- aproksymacja symplecjalna, 38
 - identyczności, 40
- augmentacja
 - kompleksu łańcuchowego, 55
 - kompleksu kołańcuchowego, 140
 - w iloczynie tensorowym kompleksów, 77
- biegun północny w S^n , 71
- brzeg, 53
 - relatywny, 57
 - singularny, 54
 - symplecjalny, 85
- brzeg sympleksu, 29
 - singularnego, 51
- butelka Kleina, 35
- charakterystyka Eulera, 106
 - wielościannu, 107
- ciąg dokładny, 116
 - długi, 117
 - krótki, 107
 - Mayera–Vietorisa, 122
 - relatywny, 122
 - zredukowany, 122
 - pary, 58, 87
 - trójki, 117
- ciąg Mayera–Vietorisa, *zob.* ciąg dokładny
 - Mayera–Vietorisa
- Compact finiteness, 42
- CW–kompleks, 41
 - podkompleks, 42
 - rozkład, 41
 - kuli domkniętej, 43
 - przestrzeni rzutowej, 43
 - sfery, 43
- CW–para, 125
- cykl, 53
 - relatywny, 57
 - singularny, 54
 - singularny, zredukowany, 54
 - symplecjalny, 85
- diagram przemienności, 52
- doklejenie przestrzeni, 20
- droga, 6
- filtracja, 19
 - domknięta, 19
- funkcja
 - biaddytywna, 24
 - ciągła, 2
- funktor
 - kontrawariantny, 5
 - kowariantny, 5
- g.k.s., *zob.* kompleks symplecjalny, geometryczny
- generator wyróżniony
 - w $H_n(B^n, S^{n-1})$, 91
 - w $H_n(S^n)$, 71
 - dodatni, 89
- grupa
 - łańcuchów singularnych, 49
 - wolna
 - generowana przez zbiór, 49
 - z gradacją, 53
- grupa homologii
 - H_0 , 60
 - butelki Kleina, 85
 - kompleksu łańcuchowego, 53
 - o współczynnikach w grupie, 139
 - pary, *zob.* grupa homologii relatywnych przestrzeni topologicznej, 54
 - przestrzeni topologicznej, zredukowana, 54
 - relatywnych, 57
 - symplecjalnych, 85
 - relatywnych, 86

- grupa kohomologii, 140
- grupa podstawowa, 8
 - jako grupa przekształceń, 17
- grupa topologiczna, 12
- grupoid podstawowy, 7
- grupy homologii
 - przestrzeni ściąganej, 55
 - przestrzeni jednopunktowej, 54
 - przestrzeni rzutowych, 130
 - sfer, 69
- grupy homotopii, wyższe, 12
- gwiazda
 - sympleksu, 98
 - wierzchołka kompleksu symplecjialnego, 34
- homeomorfizm lokalny
 - dodatnio zorientowany, 88
 - ujemnie zorientowany, 88
- homologie, *zob.* grupa homologii
 - komórkowe, *zob.* grupa homologii komórkowych
 - relatywne, *zob.* grupa homologii relatywnych
 - singularne, *zob.* grupa homologii
 - symplecjialne, *zob.* grupa homologii symplecjialnych
- homomorfizm
 - Alexandera–Whitneya, 78
 - relatywny, 81
 - symplecjialny, 114
 - Eilenberga–Zilbera, 79
 - relatywny, 80
 - grup z gradacją, 53
 - grupoidów podstawowych, 7
 - kanoniczny
 - $HC \otimes HC' \rightarrow H(C \otimes C')$, 77
 - $\pi_1 \rightarrow H_1$, 64
 - kołańcuchowy, 145
 - kompleksów łańcuchowych, 52
 - kompleksów kołańcuchowych, 140
 - naturalny, 61
 - podziału barycentrycznego, 65
 - dla łańcuchów symplecjialnych, 93
- homomorfizm diagonalny, 82
 - komórkowy, 136
 - relatywny, 147
 - triady dokładnej, 147
- homomorfizm indukowany
 - dla łańcuchów komórkowych, 131
 - dla łańcuchów singularnych, 50
 - dla łańcuchów symplecjialnych, 92
 - dla kołańcuchów, 141
 - funktorialność, 50
 - w homologiach, 53
 - symplecjialnych, 92
 - w kohomologiach, 141
- homomorfizm łączący, 117
 - w ciągu Mayera–Vietorisa, 122
 - pary, 58
 - trójki, 117
- homomorfizmy łańcuchowe
 - homotopijne, 56
- homomorfizmy Bocksteina, 143
- homotopia, 3
 - dróg, 6
 - kołańcuchowa, 140
 - łańcuchowa, 56
 - relatywna, 4
- \cup -iloczyn, 147
 - nietrywialność, 149
- iloczyn krzyżowy
 - dodatnich orientacji, 115
 - klas podstawowych, 114
 - w homologiach, 81
 - symplecjialnych, 114
 - w kohomologiach, 145
- iloczyn skalarny
 - dla modułów singularnych, 144
 - grup kohomologii i homologii, 144
 - w $\mathbb{R}P^n$, 145
- iloczyn tensorowy
 - grup, 24
 - z gradacją, 77
 - kompleksów łańcuchowych, 77
- iloczyn wewnętrzny, *zob.* \cup -iloczyn
- iloczyny krzyżowe, dualność, 146
- indykator, 49
- kategoria, 5
- klasa homologii, 53
- klasa homotopii
 - odwzorowania, 3
- klasa podstawowa
 - wielościanu, 90
 - zbioru wypukłego, 91
- kołnierzyk zbioru, 21
- kohomologie, *zob.* grupa kohomologii
- komórka, 41
- kombinacja wypukła, 28
- kompleks kołańcuchowy, 140
 - komórkowy, 140
 - o współczynnikach w grupie, 140
 - singularny, 140
 - symplecjialny, 140
- kompleks łańcuchowy, 52
 - komórkowy, 127
 - przestrzeni $\mathbb{R}P^n$, 133
 - o współczynnikach w grupie, 139
 - podwójny, 96
 - singularny, 52

- singularny, relatywny, 57
- singularny, rozszerzony, 52
- symplicjalny, 85
- symplicjalny, relatywny, 86
- wpisany w pokrycie, 67
- kompleks symplicjalny
 - abstrakcyjny, 32
 - geometryczny, 30
 - ilorazowy, 35
- kompleksy łańcuchowe
 - równoważne, homotopijnie, 56
- komutant grupy, 64
- łańcuch
 - komórkowy, 127
 - singularny, 50
 - \mathcal{U} -mały, 67
 - relatywny, 57
 - symplicjalny, 85
 - relatywny, 86
- liczba
 - Lebesgue'a, 11
 - Lefschetza, 106
- miotelka, 44
- model
 - minimalny, 138
 - singularny, 137
- morfizm, 5
- nakrycie, *zob.* przestrzeń nakrywająca
- nerw pokrycia, 33
 - topologiczny, 95
- nośnik
 - łańcucha singularnego, 50
 - kołańcucha singularnego, 141
 - sympleksu afinicznego, 84
- odwzorowania homotopijne, 3
 - par, 4
 - względem zbioru, 4
- odwzorowanie
 - afiniczne, 28
 - charakterystyczne komórki, 41
 - Hopfa, 44
 - indukowane
 - w przestrzeni dróg, 6
 - kołańcuchowe, *zob.* homomorfizm kompleksów kołańcuchowych
 - łańcuchowe, *zob.* homomorfizm kompleksów łańcuchowych
 - par, 4
 - sklejające, dla wielościanu, 35
 - zgodne ze strukturą symplicjalną, 38
- odwzorowanie komórkowe, 45
 - CW-par, 127
- odwzorowanie symplicjalne
 - kompleksów symplicjalnych, 36
 - par, 86
 - przestrzeni kompleksów symplicjalnych, 37
- operator
 - brzegu, 50
 - dla łańcuchów, komórkowych, 131
 - naturalność, 52
 - rozszerzony, 50
 - kobrzegu, 140
 - stożkowy, 64
 - prawostronny, 99
 - symplicjalny, 95
- orientacja przestrzeni \mathbb{R}^n , 71
 - dodatnia, 89
 - w punkcie, 89
 - w punkcie, 71
- płat, 12
- pętla, 6
- para, *zob.* para topologiczna
 - CW-, 42
 - domknięta, 20
 - kołnierzykowa, 21
 - kompleksów symplicjalnych, 86
 - spełniająca aksjomaty wycinania, 121
 - topologiczna, 4
- pierścień kohomologii, 148
- podniesienie
 - drogi, 14
 - homotopii, 14
 - odwzorowania, 13
- podział barycentryczny
 - kompleksu symplicjalnego, 39
 - sympleksu, 31
- pokrycie gwiazdziste
 - przestrzeni kompleksu symplicjalnego, 34
- powierzchnia Riemanna, 13
- produkt
 - dróg, 6
 - grup, 23
 - klas homotopii dróg, 7
- produkt kartezjański
 - CW-kompleksów, 46
 - CW-par, 46
 - kompleksów symplicjalnych, 112
 - par, 4
- pryzma, 32
- przestrzeń
 - afiniczna, 27
 - geometrycznego kompleksu symplicjalnego, 30
 - ilorazowa, 19
 - jednospójna, 10

- lokalnie łukowo spójna, 15
- półlokalnie jednorodna, 17
- pętli, 6
- ściągalna, 4
- wektorowa
 - przestrzeni afinicznej, 27
- przestrzeń nakrywająca, 12
 - jednorodna, konstrukcja, 17
- przestrzeń rzutowa, 43
 - rzeczywista, 18
- przestrzenie
 - homotopijnie równoważne, 4
- \mathbb{Q} -przestrzeń wektorowa rozpięta na grupie,
 - 26
 - konstrukcja, 25
- ranga grupy, 26
- realizacja geometryczna a.k.s, 34
- retrakcja, 2
- retrakt, 2
 - deformacyjny, 4
 - deformacyjny, mocny, 4
- rodzina homeomorfizmów, 1-parametrowa, 110
- równoważność, 5
 - homotopijna, 4
- rozszerzenie grupy współczynników, 139
- rzut stereograficzny, 71
 - kuli, 71
- ściana sympleksu, 29
- śląd automorfizmu grupy, 26
- stożek homomorfizmu, 119
- stopień odwzorowania
 - afinicznego, 89
 - lokalny, w punkcie, 74
 - obliczanie, 76
 - sfer S^n w sobie, 73
- suma prosta grup, 23
- suma rozłączna
 - przestrzeni topologicznych, 19
- sympleks
 - abstrakcyjny, 33
 - afiniczny, 84
 - zorientowany dodatnio, 88
 - zorientowany ujemnie, 88
 - geometryczny, 28
 - singularny, 49
 - afiniczny, *zob.* sympleks afiniczny
 - wzorcowy, 51
 - standardowy, 28
- szkielet
 - CW-kompleksu, *zob.* szkielet CW-rozkładu
 - CW-rozkładu, 41
 - kompleksu symplecjonalnego, 30, 32
- topologia
 - indukowana, *zob.* słaba topologia
 - słaba, 18
- triada, 121
 - dokładna, 121
- triangulacja
 - butelki Kleina, 35
 - płaszczyzny rzutowej, 35
 - półkola, 30
 - produktu $\Delta^p \times \Delta^q$, 79
 - pryzmy, 32
 - torusa, 35
 - wielościannu, 32
- twierdzenie
 - Borsuka–Ulama, o antypodach, 149
 - Brouwera o niezmienniczości obszaru, 124
 - Brouwera o punkcie stałym, 72
 - dowód bezpośredni, 95
 - Eilenberga–Zilbera, 78
 - dla łańcuchów komórkowych, 135
 - dla łańcuchów symplecjonalnych, 113
 - Hopfa o śladzie, 107
 - Jordana-Brouwera o wycinaniu, 124
 - Lefschetza o punkcie stałym, 109
 - lemat Spernera, 94
 - o addytywności stopnia odwzorowania, 76
 - o homotopijnej równoważności, abstrakcyjne, 118
 - o izomorfizmie, 97
 - dowód, 102
 - dla ciągów dokładnych par, 87
 - dla homologii symplecjonalnych, 105
 - dla kompleksów komórkowych, 128
 - dla modeli singularnych, 141
 - relatywne, 104
 - o jednoznaczności podnoszenia, 13
 - o lokalizacji, 67
 - o nakryciu uniwersalnym, 16
 - o pięciu izomorfizmach, 118
 - o podziale kanapki, 150
 - o strukturze pierścienia w przestrzeniach rzutowych, 149
 - o wycinaniu, 69
 - dla kompleksów symplecjonalnych, 87
 - o wycinaniu dla par kołnierzykowych, 125
 - o zaczesywaniu sfer, 111
 - Struktura CW-kompleksu, 44
 - van Kampena, 11
 - własność podnoszenia dróg i homotopii, 14
 - zasadnicze twierdzenie algebry, 76
- Weak topology, 42

- wielościan, 32
- wierzchołek
 - kompleksu sympleksyjnego, 30
- włókno nakrycia, 12
- wnętrze sympleksu, 29
- współrzędne barycentryczne, 29
- współczynnik incydencji, 131
- wycinanie, własność włożenia par, 121
- wymiar
 - CW–kompleksu, 41
 - komórki, 41
 - kompleksu sympleksyjnego, 30
 - przestrzeni afinicznej, 27
 - sympleksu, 28
 - abstrakcyjnego, 33
 - singularnego, 49
- zbiór
 - afinicznie niezależny, 28
 - prawidłowo nakryty, 12

Bibliografia

- [1] J.F. Adams, Algebraic Topology – A Student’s Guide, Cambridge, 1972.
- [2] A. Białynicki–Birula, Algebra, PWN, 1971.
- [3] A. Dold, Lectures on Algebraic Topology. Springer, 1972.
- [4] R. Duda, Wprowadzenie do topologii, Cz. I–II, PWN, 1986.
- [5] Johan L. Dupont, Curvature and Characteristic Classes. Springer, 1978.
- [6] R. Engelking, Topologia ogólna. PWN, 1976.
- [7] B. Gray, Homotopy Theory. An Introduction to Algebraic Topology. Academic Press, 1975.
- [8] M.J. Greenberg, Wykłady z topologii algebraicznej. PWN, 1980.
- [9] W.S. Massey, Singular Homology Theory. Springer, 1980.
- [10] E.H. Spanier, Topologia algebraiczna, PWN, 1972.
- [11] J. Stillwell, Classical Topology and Combinatorial Group Theory. Springer, 1993.
- [12] R.M. Switzer, Algebraic Topology – Homotopy and Homology, Springer, 1975.

MATEMATYKA NAJPEWNIJSZYM KAPITAŁEM ABSOLWENTA

Projekt współfinansowany przez Unię Europejską
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego

Matematyka najpewniejszym kapitałem absolwenta

Grzegorz Andrzejczak – Wybrane zagadnienia topologii algebricznej

ISBN 978-83-7283-560-4