

WYBOCZENIE CIENKOŚCIENNYCH KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH Z ŻEBRAMI POŚREDNIMI

A. TETER

Katedra Mechaniki Stosowanej, Politechniki Lubelskiej
Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin

Z. KOŁAKOWSKI, T. KUBIAK

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy rozpatrzono interakcyjne wyoboczenie pryzmatycznych, cienkościennych, kompozytowych słupów o przekrojach otwartych wzmocnionych żebrami pośrednimi i wzmocnieniami brzegowymi. Przyjęto, że słupy są swobodnie podparte. Nieliniowe zagadnienie rozwiązano asymptotyczną teorią Koitera w ramach pierwszego rzędu przybliżenia. Asymptotyczna teoria pierwszego nieliniowego przybliżenia pozwala ocenić jednocześnie wpływ niedokładności i interakcji różnych postaci wyoboczenia na zachowanie się konstrukcji cienkościennych. Ocena ta może stanowić jedynie dolne oszacowanie nośności. Szczegółowe obliczenia prowadzono dla kilku przypadków słupów.

1. WSTĘP

Nowoczesne materiały kompozytowe od chwili ich pojawienia się w latach sześćdziesiątych znalazły bardzo szerokie zastosowanie w nowoczesnych konstrukcjach, zaś postęp w ich stosowaniu w dużym stopniu zależy od wiedzy i umiejętności konstruktorów i użytkowników. Wytrzymałość kompozytów w kierunku ułożenia włókien wzmacniających jest kilkakrotnie wyższa niż w pozostałych kierunkach. Wymagają przez to większej uwagi przy ich projektowaniu niż konstrukcje izotropowe. Lepsze zrozumienie zjawisk zachodzących podczas utraty i po utracie stateczności jest konieczne do prawidłowej oceny pracy cienkościennych konstrukcji kompozytowych.

Autorzy od prawie dziesięciu lat zajmują się nieliniową statecznością izotropowych konstrukcji cienkościennych z żebrami pośrednimi. Podsumowaniem prowadzonych badań jest praca [6]. W prezentowanej pracy przedstawiono ocenę nośności cienkościennych konstrukcji kompozytowych o przekrojach otwartych wzmocnionych żebrami pośrednimi. Usztywnienia przenoszą część obciążenia i dzielą element płytowy na mniejsze części o większej sztywności powiększając w ten sposób znacznie ich nośność. Wielkość, kształt, położenie żeber pośrednich oraz wzmocnienia brzegowe wywierają istotny wpływ na krytyczne i zakrytyczne zachowanie się konstrukcji. Asymptotyczna teoria pierwszego nieliniowego przybliżenia [1-3, 5-8] pozwala ocenić jednocześnie wpływ niedokładności i interakcji różnych postaci wyoboczenia na zachowanie się konstrukcji cienkościennych. Może stanowić jedynie dolne oszacowanie nośności lub też próbę oszacowania nośności w ramach drugiego rzędu na podstawie przyjętego przybliżenia dla liniowej analizy stateczności [4].

2. POSTAWIENIE ZAGADNIENIA

Rozpatrzono cienkościenne, kompozytowe słupy o przekrojach otwartych poddane ścisłaniu. Przekroje poprzeczne analizowanych elementów są zbudowane z płyt prostokątnych o długości ℓ połączonych na wzdłużnych brzegach i podpartych swobodnie na obu końcach. Dla każdej i -tej płyty przyporządkowano lokalny kartezjański układ współrzędnych. Materiał wszystkich płyt podlega prawu Hooke'a. W analizie teoretycznej założono klasyczną teorię płyt kompozytowych [5,7] oraz płytowy model konstrukcji cienkościennych [8].

Dla każdej i -tej płyty przyjęto następujące zależności geometryczne [5,7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{1,1} + 0,5 u_{m,1} u_{m,1} & \varepsilon_4 &= -h u_{3,11} \\ \varepsilon_2 &= u_{2,2} + 0,5 u_{m,2} u_{m,2} & \varepsilon_5 &= -h u_{3,22} \\ \varepsilon_3 &= u_{1,2} + u_{2,1} + u_{m,1} u_{m,2} & \varepsilon_6 &= -2 h u_{3,12} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: h jest grubością płyty; $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$, $u_3 \equiv w$ składowymi wektora przemieszczenia względem osi $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ oraz $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_x$, $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_y$, $\varepsilon_3 \equiv 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$, $\varepsilon_4 \equiv h \kappa_x$, $\varepsilon_5 \equiv h \kappa_y$, $\varepsilon_6 \equiv h \kappa_{xy}$. Sumowanie po $m=1,2,3$.

Wykorzystując klasyczną teorię płyt wielowarstwowych równania konstytutywne mają następującą postać [5,7]:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} = [K] \{\varepsilon\} \quad (2)$$

gdzie: N_1 , N_2 , N_3 są bezwymiarowymi siłami przekrojowymi, zaś N_4 , N_5 , N_6 bezwymiarowymi momentami przekrojowymi:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N_x}{E_o h} & N_2 &= \frac{N_y}{E_o h} & N_3 &= \frac{N_{xy}}{E_o h} \\ N_4 &= \frac{M_x}{E_o h^2} & N_5 &= \frac{M_y}{E_o h^2} & N_6 &= \frac{M_{xy}}{E_o h^2} \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: E_o jest modułem odniesienia Younga.

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczej i -tej płyty przy uwzględnieniu zależności (1) wynikają następujące różniczkowe równania równowagi:

$$\begin{aligned} [N_1 (1 + u_{1,1}) + N_3 u_{1,2}]_{,1} + [N_2 u_{1,2} + N_3 (1 + u_{1,1})]_{,2} &= 0 \\ [N_1 u_{2,1} + N_3 (1 + u_{2,2})]_{,1} + [N_2 (1 + u_{2,2}) + N_3 u_{2,1}]_{,2} &= 0 \\ (h N_{4,1} + N_1 u_{3,1} + N_3 u_{3,2})_{,1} + (h N_{5,2} + 2 h N_{6,1} + N_2 u_{3,2} + N_3 u_{3,1})_{,2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Rozwiązanie układu (4) dla i -tej płyty tworzącej cienkościenny słup musi spełniać kinematyczne i statyczne warunki współpracy na wzdłużnych brzegach oraz dodatkowo warunki brzegowe odpowiadające swobodnemu podparciu na obu końcach słupa (dla $x_1 = 0; \ell$). Nieliniowe zagadnienie stateczności w ramach pierwszego rzędu nieliniowego przybliżenia rozwiązano asymptotyczną metodą Byskova i Hutchinsona [1]. Pola przemieszczeń \bar{U} i sił \bar{N} rozwinięto w szeregi potęgowe względem bezwymiarowych amplitud postaci wyboczenia ξ_j :

$$\bar{U} = \lambda \bar{U}^{(0)} + \xi_j \bar{U}^{(j)} + \dots \quad \bar{N} = \lambda \bar{N}^{(0)} + \xi_j \bar{N}^{(j)} + \dots \quad (5)$$

gdzie: $\bar{U}^{(0)}, \bar{N}^{(0)}$ — pole dokrytyczne, $\bar{U}^{(j)}, \bar{N}^{(j)}$ — stany krytyczne. Zakres wskaźników j wynosi $[1, J]$ gdzie J jest liczbą współdziałających postaci wyboczenia.

W punkcie, w którym parametr obciążenia λ osiąga wartość maksymalną λ_s dla konstrukcji z imperfekcjami, jacobian nieliniowego układu równań [1,5-8]:

$$a_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r} \right) \xi_r + a_{jkr} \xi_j \xi_k + b_{jklr} \xi_j \xi_k \xi_l = a_r \frac{\lambda}{\lambda_r} \xi_r^* \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, \dots, J \quad (6)$$

jest równy zero. Wyrażenie na całkowitą energię potencjalną odpowiadającą (6) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \Pi = & -a_o \lambda^2 / 2 + a_r (1 - \lambda / \lambda_r) \xi_r^2 / 2 + a_{jkr} \xi_j \xi_k \xi_r / 3 + b_{jklr} \xi_j \xi_k \xi_l \xi_r / 4 \\ & - a_r \xi_r \xi_r^* \lambda / \lambda_r \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie: $\Pi_o = a_o \lambda^2 / 2$ - energia stanu dokrytycznego.

Współczynnik redukcji sztywności odpowiadający k -tej niesprężonej lokalnej postaci wyboczenia dla konstrukcji bez ugięć wstępnych i z symetryczną charakterystyką ugięć dla niesprężonej lokalnej postaci wyboczenia ($a_{kkk} = 0$) opisuje zależność [4,6,8]:

$$\bar{\eta}_k = \lim_{x \rightarrow \infty} \eta_k = \left[1 + \frac{a_k^2}{2 a_o b_{kkkk}} \right]^{-1} \approx \left[1 - \frac{a_k^2}{2 a_o \bar{b}_{kkkk}} \right] \quad (8)$$

Przybliżoną wartość b_{kkkk} dla k -tej niesprężonej lokalnej postaci można wyznaczyć ze wzoru (8):

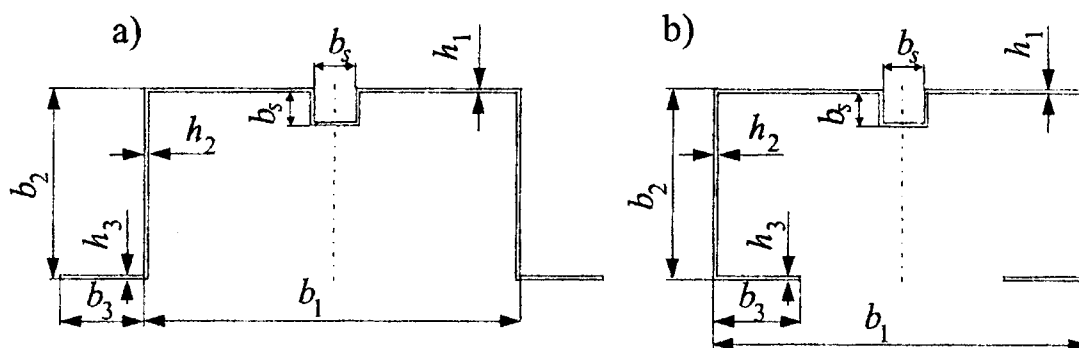
$$b_{kkkk} = \bar{b}_{kkkk} - \frac{a_k^2}{2 a_o} \quad (9)$$

gdzie: wartość \bar{b}_{kkkk} jest określona na podstawie znajomości funkcji ugięcia k -tej niesprężonej lokalnej postaci wyboczenia dla pierwszego rzędu przybliżenia [4].

Dla pojedynczej płyty współczynnik redukcji sztywności redukuje się do znanych wzorów Koitera i Pignataro [3]. Szczegółowy opis metody rozwiązania zagadnienia podano w pracy [4]. Dalej przyjęto $J=2$ oraz indeks 1 oznacza globalną postać wyboczenia, 2 – lokalną postać wyboczenia.

3. ANALIZA WYNIKÓW OBLICZEŃ

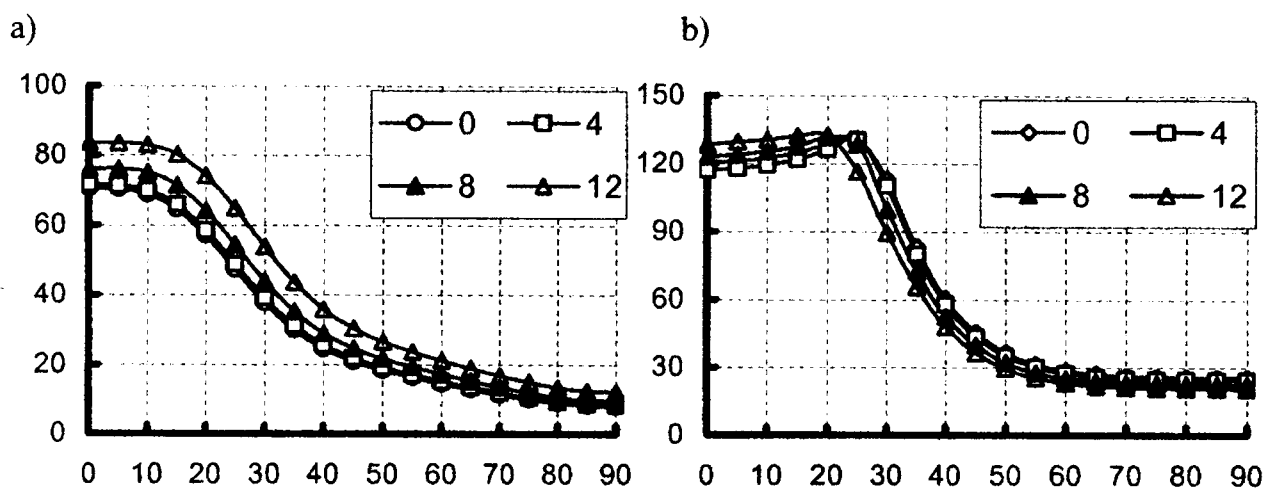
Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1 o następujących wymiarach geometrycznych: $b_1 = 50$ mm, $b_2 = 25$ mm, $b_3 = 12,5$ mm, $h_1 = h_2 = h_3 = 8h_{warst} = 8 \cdot 0,125$ mm = 1 mm i długości $l = 650$ mm. Każda z płyt wykonana jest z ośmiowarstwowego kompozytu. Każda z warstw charakteryzuje się następującymi właściwościami mechanicznymi: $E_1 = 140$ GPa, $E_2 = 10,3$ GPa, $G = 5,15$ GPa, $\nu_{12} = 0,29$, $h_{warst} = 0,125$ mm oraz skierowanym kątem Θ względem lokalnego układu współrzędnych [5,7]. Rozpatrzono jedynie kompozyty o symetrycznym $[\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/\Theta]_T$ i antysymetrycznym ułożeniu warstw $[\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta]_T$.



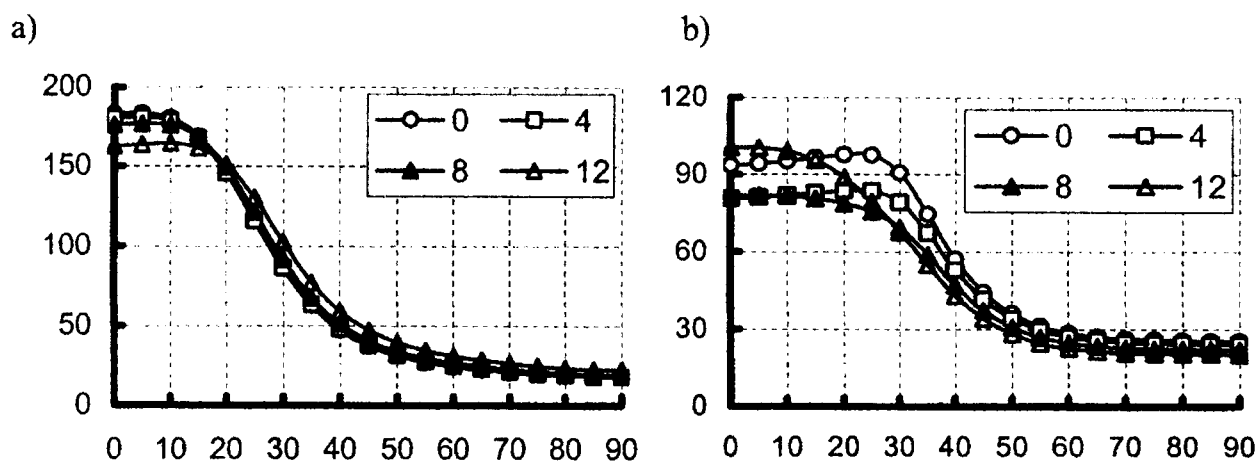
Rys. 1. Przekroje otwarte z centralnym C-żebrem pośrednim: a) omega zewnętrzna, b) omega wewnętrzna.

Na rys. 2 przedstawiono wykresy globalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] dla wyboczenia giętno-skrętnego (rys. 2a) i wyboczenia giętnego (rys. 2b) w funkcji kąta Θ [deg] dla przekroju pokazanego na rys. 1a, zaś na rys. 3 analogiczne wykresy dla przekroju pokazanego na rys. 1b dla czterech wartości parametru wzmocnienia żebra $b_s = 0; 4; 8; 12$ mm i symetrycznego ułożenia warstw. W przypadku antysymetrycznego ułożeniu warstw otrzymano praktycznie identyczne wyniki obciążeń krytycznych. Na rys. 4 przedstawiono zależność naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] dla postaci lokalnej w funkcji kąta Θ [deg] dla przekroju z rys. 1a. Wyniki obliczeń dla przekroju pokazanego na rys. 1b są takie same zarówno dla ułożenia warstw symetrycznego i antysymetrycznego.

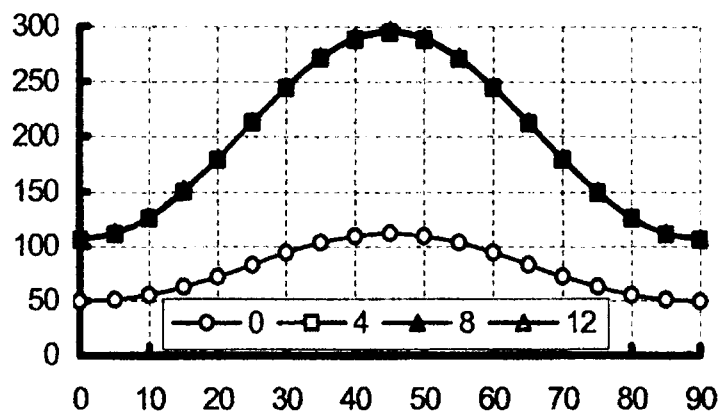
Wartości globalnych naprężeń krytycznych dla różnych wartości b_s są sobie bliskie. Największe wartości krytyczne dla wyboczenia giętno-skrętnego są dla $0 \leq \Theta \leq 15^\circ$, zaś dla wyboczenia giętnego dla $0 \leq \Theta \leq 25^\circ$, najmniejsza dla $\Theta = 90^\circ$. Wpływ wielkości b_s daje się zauważyć dla wartości $b_s \geq 2$ mm i osiąga maksymalną wartość dla $\Theta = 45^\circ$.



Rys. 2. Wykresy globalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] w funkcji kąta ułożenia warstw Θ oraz parametru wzmocnienia b_s dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1a: a) postać giętno-skrętna (antysymetryczna), b) postać giętna (symetryczna)



Rys. 3. Wykresy globalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] w funkcji kąta ułożenia warstw Θ oraz parametru wzmocnienia b_s dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1b: a) postać giętno-skrętna (antysymetryczna), b) postać giętna (symetryczna)



Rys. 4. Wykresy lokalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] w funkcji kąta ułożenia warstw Θ oraz parametru wzmocnienia b_s dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1

Tabela 1. Porównanie naprężeń krytycznych dla różnych ułożeń warstw kompozytu.

Lp.	Postać wybożenia	Naprężenia krytyczne σ_{kr} [MPa]			
		[45/-45/45/-45/-45/45/45] _T		[45/-45/0/0/0/0/-45/45] _T	
		Rys. 1a	Rys. 1b	Rys. 1a	Rys. 1b
1.	globalna giętno-skrętna	21,9	37,8	59,5	135,4
2.	globalna giętna	43,7	41,6	177,9	133,4
3.	lokalna	294,1	293,2	289,6	289,9

Tabela 2. Porównanie wrażliwości omawianych konstrukcji na niedokładności.

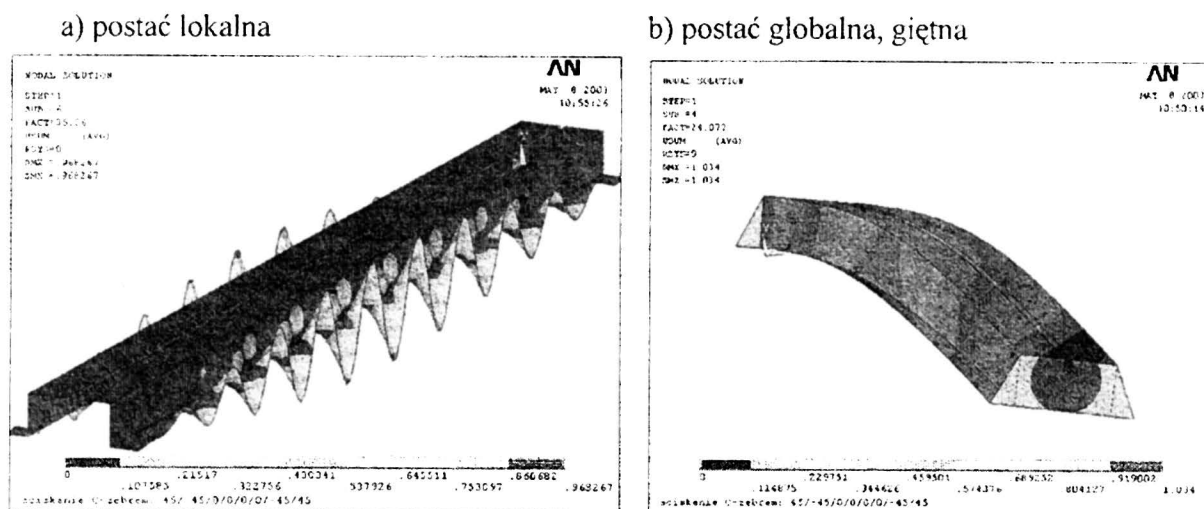
Lp.	Przypadek	σ_1	σ_2	σ_s	σ_1 / σ_2	$\sigma_s / [\min(\sigma_1, \sigma_2)]$
		[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]	[-]
1.	Rys. 1a	181,9	174,7	122,1	1,049	0,699
2.	Rys. 1b	143,4	173,4	116,8	0,822	0,815

Tabela 3. Porównanie obciążeń krytycznych dla ceownika na rys. 1 a.

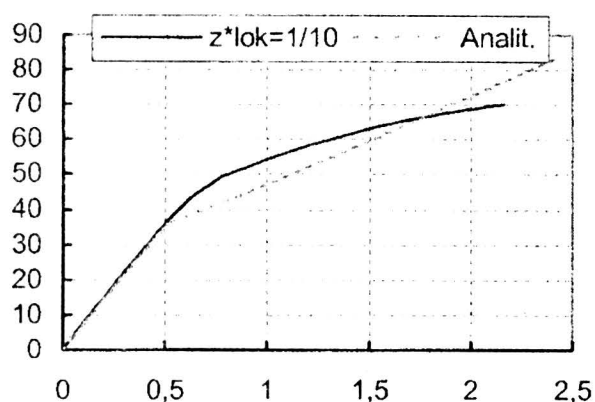
Lp.	Postać wybożenia	Naprężenia krytyczne σ_{kr} [MPa]	
		Prezentowana metoda	ANSYS5.7
1.	globalna giętna	177	181
2.	lokalna	289	266

W analizie numerycznej nie stwierdzono przypadku pojawienia się dwóch minimów dla różnych lokalnych postaci wybożenia, co jest charakterystyczne dla konstrukcji izotropowych z żebrami pośrednimi [4,6]. Następnie przeprowadzono obliczenia dla następującego symetrycznego ułożenia warstw [45/-45/0/0/0/0/-45/45]_T. W Tabeli 1 przedstawiono porównanie wyników naprężeń krytycznych dla dwóch typów ułożenia warstw i $b_s = 4$ mm. Jak widać z tego porównania wzrost obciążenia globalnego dla drugiego typu ułożenia warstw powoduje znaczny wzrost globalnych wartości naprężeń krytycznych, zaś praktycznie niezmienną wartość krytycznych naprężeń lokalnych. Wzrost obciążenia globalnego wynika ze znacznego wzrostu globalnej sztywności giętniej całego przekroju poprzecznego, zaś lokalna sztywność giętna poszczególnych płyt pozostaje praktycznie stała. Następnie analizowano czułość konstrukcji pokazanych na rys. 1 na imperfekcje dla drugiego typu ułożenia warstw [45/-45/0/0]_S w ramach pierwszego rzędu nieliniowego przybliżenia dla założonych wielkości wstępnych ugięć $\xi_1^* = |1,0|$, $\xi_2^* = |0,2|$ oraz dla parametru wzmocnienia $b_s = 2$ mm. Najbardziej niebezpieczna okazała się interakcja globalnej giętniej postaci wybożenia z lokalną postacią wybożenia. W przypadku, gdy wartości obciążeń krytycznych są bliskie (przypadek 1 w Tabeli 2) następuje gwałtowny wzrost czułości konstrukcji na imperfekcje [1,5-8]. W Tabeli 3 przedstawiono zestawienie obciążeń krytycznych otrzymanych prezentowaną metodą oraz metodą elementów skończonych MES (pakiet ANSYS 5.7) dla przekroju pokazanego na rys. 1a o ułożeniu warstw [45/-45/0/0/0/0/-45/45]_T i $b_s = 4$ mm. W przypadku obliczeń MES-em na obciążonych brzegach ceownika zamodelowano tylko warunki odpowiadające globalnej giętniej i lokanej postaci wybożenia. Dla analizowanego powyżej ceownika w celu wyznaczenia lokalnej pokrytycznej ścieżki równowagi założono długość ceownika $\ell = 150$ mm. W oparciu o liniową analizę modalną dla lokalnych postaci wybożenia wyznaczono przybliżone wartości współczynników dla drugiego rzędu przybliżenia (9) b_{kkkk} dla $k=1-5$ (szczegóły w [2,4]). Tak wyznaczone współczynniki wstawiono do wyrażenia na energię (7), a następnie z zasady minimum

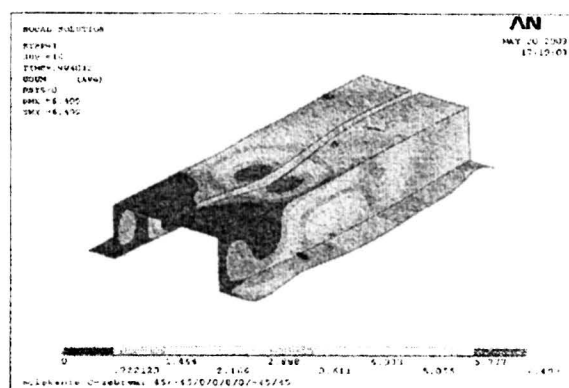
całkowitej energii wyznaczono przybliżone lokalne pokrytyczne zachowanie się ściskanego ceownika (rys. 6). Na tym samym rysunku przedstawiono też wyniki otrzymane z ANSYS5.7. Stwierdzono dobrą zgodność wyników otrzymaną obiema metodami. Należy podkreślić, że przybliżona metoda daje wyniki łatwiej i mniejszym nakładem czasu. Na rys. 7 przedstawiono postać wybożenia dla skrócenia czterokrotnie przekraczającego skrócenie krytyczne.



Rys. 5. Postacie wybożenia dla przekroju otwartego (rys. 1a) z zębem pośrednim $b_s=4$ mm obliczone metodą elementów skończonych



Rys.6. Wykres siły ściskającej [kN] w funkcji skrócenia [mm] dla ceownika o długości 150 mm z zębem pośrednim o układzie warstw[45/-45/0/0]_s



Rys.7. Postać wybożenia dla skrócenia czterokrotnie przekraczającego skrócenie krytyczne

4. WNIOSKI

Prezentowana metoda umożliwia modalną analizę wybożenia konstrukcji cienkościennych z zębami pośrednimi. Prowadzone szczegółowe obliczenia numeryczne dla różnych parametrów omawianych kompozytowych konstrukcji o przekrojach otwartych prowadzą do następujących spostrzeżeń:

- wartości naprężeń krytycznych dla różnych wartości b_s są sobie bliskie;
- nie stwierdzono przypadku pojawienia się dwóch minimów dla różnych lokalnych postaci wybożenia;

- wpływ wielkości b_s daje się zauważyć dla wartości $b_s \geq 2$ mm i osiąga maksymalną wartość dla $\Theta = 45^\circ$;
- dla różnych typów ułożenia warstw istotnie zmieniają się obciążenia globalne, zaś praktycznie nie zmieniają się wartości krytyczne naprężeń lokalnych;
- dla omawianych konstrukcji kompozytowych najbardziej niebezpieczna okazała się interakcja globalnej giętej postaci wyboczenia z lokalną postacią wyboczenia.
- zaproponowane oszacowanie nośności konstrukcji dla drugiego rzędu w oparciu o analizę liniową zgadza się z MES-em z maksymalnym błędem 25% w całym analizowanym nadkrytycznym zakresie skrócenia.

LITERATURA

- [1] Byskov E, Hutchinson JW. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. *AIAA J.*, 1977; 15(7): 941-948.
- [2] Byskov E. Elastic buckling problem with infinitely many local modes. The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, The Technical University of Denmark, Report No. 327, 1986.
- [3] Koiter WT, Pignataro M. An alternative approach to the interaction between local and overall buckling in stiffened panels. In: "Buckling of Structures" /Proc. of IUTAM Symposium, Cambridge, 1974: 133-148.
- [4] Kołakowski Z. A semi-analytical method of interactive buckling of thin-walled elastic structures in the second order approximation; *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, No.25., 1996, pp.3779-3790.
- [5] Kołakowski Z, Kowal-Michalska K. (Eds.) Selected problems of instabilities in composite structures. Series of monog. Tech. University of Lodz, 1999, pp.222.
- [6] Królak, M. (Ed.). Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich. PWN, Warszawa-Łódź, 1990, str.553.
- [7] Królak M., Kołakowski Z., Kotelko M. Modal coupled instabilities of thin-walled composite plate and shell structures, *Proceedings of the Third International Conference on Thin-Walled Structures*, Elsevier, 2001, pp.293-300.
- [8] Teter A, Kołakowski Z. Interactive buckling and load carrying capacity of thin-walled beam-columns with intermediate stiffeners; *The Special Issue of Thin-Walled Structures Journal*, 2003, praca w druku.

BUCKLING OF THIN-WALLED COMPOSITE STRUCTURES WITH INTERMEDIATE STIFFENERS

This investigation is concerned with interactive buckling of open composite columns with intermediate and edge stiffeners under axial compression. The columns are assumed to be simply supported at their ends. The asymptotic Koiter's method is used in the first order approximation. The paper's aim is to achieve the improved study of the equilibrium path in the imperfection sensitivity of imperfect structures regarding the first order approximation. The first order approximation of the stability problem of thin-walled structures can serve as a lower estimation of load carrying capacity. The limit load is always lower than the minimum value of bifurcation load in the linear analysis. The calculations are carried out for a few columns.