

NOŚNOŚĆ GRANICZNA CIENKOŚCIENNYCH SŁUPÓW Z CENTRALNYMI ŻEBRAMI POŚREDNIMI W RAMACH DRUGIEGO RZĘDU NIELINIOWEGO PRZYBLIŻENIA

Z. KOŁAKOWSKI

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, Poland*

A. TETER

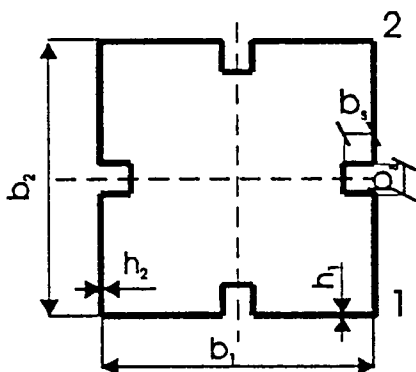
*Katedra Mechaniki Stosowanej Politechniki Lubelskiej
Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin, Poland*

W pracy przeanalizowano interakcyjne wyboczenie cienkościennych słupów wzmocnionych żebrawami pośrednimi. Żebra modelowano płytami. Przyjęto, że słupy są swobodnie podparte na obu końcach. Zastosowano drugi rząd nieliniowego przybliżenia asymptotycznej metody Byskowa i Hutchinsona [1] wykorzystując w obliczeniach numerycznych metodę macierzy przejścia. Analizę przeprowadzono dla różnych parametrów geometrycznych.

1. Wstęp

Wzrost zdolności do przenoszenia obciążenia i sztywności konstrukcji cienkościennej uzyskuje się najczęściej poprzez odpowiednie ukształtowanie przekrojów poprzecznych użytych elementów cienkościennych (np. poprzez wprowadzenie żebrowo-ściennych). Żebra pośrednie są szeroko stosowane w wielu rodzajach konstrukcji metalowych. Omawiane usztywnienia przenoszą część obciążenia i dzielą element płytowy na mniejsze części powiększając w ten sposób znacznie ich nośność. Wielkość, kształt, położenie żebrowo-ściennych wywierają istotny wpływ na krytyczne i zakrytyczne zachowanie się konstrukcji cienkościennych. Łatwość formowania konstrukcji cienkościennych umożliwia coraz szersze ich wykorzystywanie. Stosowanie żebrowo-ściennych wymaga jednak bardziej złożonej i wszechstronnej analizy pod działaniem narastających obciążeń (aż do obciążeń niszczących włącznie). Uwzględnienie płytowego modelu żebrowo-ściennych stwarza takie możliwości.

Konstrukcje cienkościenne mogą pracować po lokalnej utracie stateczności. Na skutek lokalnego wyboczenia następuje zmniejszenie wzdłużnej sztywności konstrukcji. Wzajemne oddziaływanie różnych postaci utraty stateczności, dla konstrukcji rzeczywistych obciążonych niedokładnościami wstępnymi, jest decydującym czynnikiem określającym nośność graniczną konstrukcji.



Rys. 2.1. Przekrój poprzeczny analizowanego słupa o przekroju zamkniętym.

Fig. 2.1. Type of closed cross-section considered.

Zastosowana metoda rozwiązania zagadnienia umożliwia uwzględnienie wszystkich typów postaci utraty stateczności, zjawiska shear-lag, efektu deplanacji przekrojów poprzecznych oraz uwzględnienie transformacji postaci wybożenia wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego.

2. Postawienie zagadnienia

W pracy analizowano wpływ współdziałania różnych postaci wybożenia cienkościennych słupów. Rozpatrzono pryzmatyczne, cienkościenne słupy o przekrojach zamkniętych (rys. 2.1) i otwarte wzmocnione centralnymi, wzdłużnymi żebrami pośrednimi zbudowanymi z płyt o boku: b_s . Omawiane słupy są zbudowane z płyt prostokątnych połączonych na wzdłużnych brzegach i podpartych swobodnie na obu końcach. Materiał wszystkich płyt podlega prawu Hooke'a.

Błonowe odkształcenie względne dla i -tej ścianki przyjęto w postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ix} &= u_{i,x} + 0.5(w_{i,x}^2 + v_{i,x}^2); & \varepsilon_{iy} &= u_{i,y} + 0.5(w_{i,y}^2 + v_{i,y}^2); \\ 2\varepsilon_{ixy} &= \gamma_{ixy} = u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y} \end{aligned} \quad (1)$$

zaś zmiany krzywizn:

$$\kappa_{ix} = -w_{i,xx}; \quad \kappa_{iy} = -w_{i,yy}; \quad \kappa_{ixy} = -w_{i,xy}; \quad (2)$$

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczej ścianki wynikają następujące różniczkowe równania równowagi:

$$\begin{aligned} N_{ix,x} + N_{ixy,y} + (N_{iy}u_{i,y})_{,y} &= 0; & N_{iy,y} + N_{ixy,x} + (N_{ix}v_{i,x})_{,x} &= 0 \\ D_i \nabla \nabla w_i - (N_{ix}w_{i,x})_{,x} - (N_{iy}w_{i,y})_{,y} - (N_{ixy}w_{i,x})_{,y} - (N_{ixy}w_{i,y})_{,x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

W miejscu połączenia ścianek spełniono odpowiednie geometryczne i statyczne warunki współpracy [3].

Nieliniowe zagadnienie stateczności rozwiązano asymptotyczną metodą E. Byskova i J. W. Hutchinsona [1]. Pola przemieszczeń \bar{U} i sił \bar{N} rozwinięto w szereg potęgowy względem amplitud postaci wybożenia ξ_n (amplituda n -tej postaci wybożenia odniesiona do grubości pierwszej płyty):

$$\bar{U} = \lambda \bar{U}_i^{(0)} + \xi_n \bar{U}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{U}_i^{(nn)} + \dots, \quad \bar{N} = \lambda \bar{N}_i^{(0)} + \xi_n \bar{N}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{N}_i^{(nn)} + \dots, \quad (4)$$

Pokrytyczne ścieżki równowagi dla konstrukcji cienkościennych z amplitudami imperfekcji $\bar{\xi}_n$ odpowiadającymi ξ_n są określone przez następujący układ N równań nieliniowych [1-3]:

$$a_J \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_J}\right) \xi_J + a_{ijJ} \xi_i \xi_j + b_{ijkJ} \xi_i^3 + \dots = a_J \bar{\xi}_J \frac{\lambda}{\lambda_J}, \quad J=1, \dots, N; \quad (5)$$

gdzie: λ - parametr obciążenia; λ_J - krytyczna wartość λ .

Wyrażenia na a_o , a_J , a_{ijJ} , b_{ijkJ} podano w pracach [1-2]. Pokrytyczne współczynniki a_{ijJ} zależą tylko od wartości krytycznych podczas gdy współczynniki b_{ijkJ} zależą ponadto od pól drugiego rzędu.

Wyznaczenie nieliniowych współczynników pokrytycznych oraz współczynników redukcji sztywności wzdłużnej w ramach nieliniowego drugiego rzędu przybliżenia pozwala opisać pełne zachowanie się konstrukcji cienkościennej w zakresie sprężystym.

W poniższych rozważaniach przyjęto następujące warunki brzegowe na obu poprzecznych końcach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = 0, y_i) dy_i &= \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = \ell, y_i) dy_i = N_{ix}^o; \\ v_i(x_i = 0, y_i) &= v_i(x_i = \ell, y_i) = 0, \quad w_i(x_i = 0, y_i) = w_i(x_i = \ell, y_i) = 0, \\ w_{i,xx}(x_i = 0, y_i) &= w_{i,xx}(x_i = \ell, y_i) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

Analiza ograniczona tylko do pierwszego nieliniowego przybliżenia rozwiązania zagadnienia stateczności cienkościennych konstrukcji wskazuje wrażliwość konstrukcji rzeczywistych na niedokładności. Dobrze wiadomo, że konstrukcje, dla których lokalne wyboczenie poprzedza globalne $\lambda_1 \gg \lambda_2$, mogą przenieść obciążenie przewyższające obciążenie odpowiadające krytycznej wartości wyboczenia lokalnego. Analiza ich zachowania się nie zawsze może być otrzymana w ramach asymptotycznej teorii pierwszego nieliniowego przybliżenia, w której graniczne obciążenie jest zawsze mniejsze od minimalnej wartości obciążenia krytycznego zagadnienia liniowego. Konieczne jest zatem uwzględnienie drugiego rzędu przybliżenia, tzn. członów czwartego stopnia w energii potencjalnej, co pozwala wyznaczyć pokrytyczne ścieżki równowagi. W ogólnym przypadku w analizie stateczności należy rozwiązać zagadnienie brzegowe: dla lokalnych, globalnej i mieszanej postaci drugiego rzędu, jednakże w przypadku $\lambda_1 \gg \lambda_2$ główną rolę odgrywają lokalne postacie drugiego rzędu. Dla globalnej postaci drugiego rzędu dla eulerowskiego modelu słupa powyboczeniowy współczynnik dla niesprężonego wyboczenia jest równy zeru, a w przypadku dokładnego rozwiązania jest często mało istotny.

Pominięcie mieszanej postaci drugiego rzędu, z którą związane są człony typów $a_{1iij}\xi_i^2\xi_j^2$ ($i > 1$) i $a_{ijij}\xi_i^2\xi_j^2$ ($i, j > 1; i \neq j$) w energii potencjalnej, jest możliwe dzięki uwzględnieniu już członów typu $a_{iij}\xi_i^2$ oraz $a_{lij}\xi_i\xi_j$. Możliwość takiego pominięcia wykazał W. T. Koiter, S. Sridharan i M. H. Peng. Przyjęcie do analizy w ramach pierwszego nieliniowego przybliżenia członu typu $a_{ijij}\xi_i\xi_j$ ($i \neq j$), uwzględnia interakcję między globalną postacią i dwiema najbardziej niebezpiecznymi lokalnymi postaciami wyboczenia mającymi taką samą liczbę półfal. Ta drugorzędna lokalna postać wyboczenia jest analogiczna do mieszanej postaci drugiego rzędu, a zatem uwzględnienie jej w ramach pierwszego rzędu przybliżenia pozwala pominąć mieszane postaci drugiego rzędu.

W pracy [6] zajęto się analizą rozwiązania drugiego nieliniowego przybliżenia, uwzględniającego tylko lokalne postaci drugiego rzędu (tzn. podstawową i drugorzędną postać). Z warunku ortogonalności pól pierwszego i drugiego rzędu wynika, że należy zmienić ewentualnie amplitudy tylko rozpatrywanych harmonik dla każdej z lokalnej postaci drugiego rzędu. Prostota spełnienia warunku ortogonalności jest jedną z głównych przyczyn wybranego tutaj sposobu rozwiązania drugiego rzędu przybliżenia w postaci szeregów, w porównaniu z innymi sposobami.

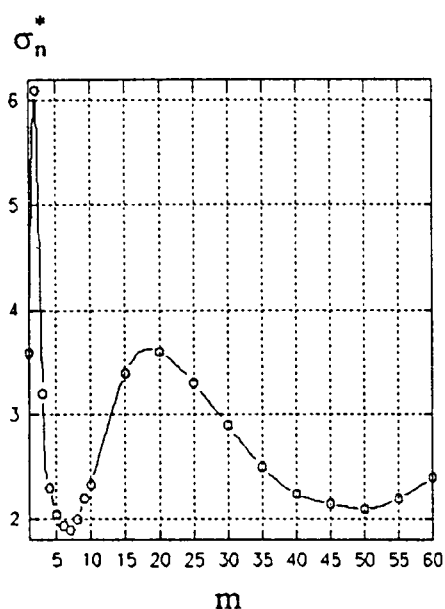
Równania dla lokalnych postaci drugiego przybliżenia zależą nie tylko od odpowiedniej lokalnej postaci pierwszego rzędu, ale ze względu na warunki ortogonalności, końcowe rozwiązanie zależy także od rozpatrywanych postaci pierwszego rzędu. Dlatego też każda z lokalnych postaci drugiego rzędu otrzymana przy uwzględnieniu interakcyjnego wyboczenia nie jest identyczna z postacią otrzymaną w ramach teorii jednomodalnego wyboczenia.

W analizie numerycznej badano pola drugiego rzędu, pokrytyczne ścieżki równowagi w funkcji parametrów konstrukcji oraz ich wpływ na obciążenie graniczne.

Obliczenia potwierdziły, że w przypadku, gdy wartość obciążenia globalnego przewyższa obciążenie lokalne, jest możliwe osiągnięcie nośności granicznej większej od minimalnej wartości obciążenia lokalnego dla umiarkowanie małych wartości imperfekcji. Uwzględnienie w analizie sprzężonego wyboczenia drugiego rzędu przybliżenia istotnie ogranicza teoretyczny obszar czułości na niedokładności.

3. Analiza wyników obliczeń

Szczegółowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla ściskanych słupów o przekrojach zamkniętych wzmocnionych centralnymi C-żebami pośrednimi pokazanych na rys. 2.1, o następujących wymiarach: $b_1 / b_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 1$, $l / b_2 = 20$, $b_1 / h_1 = 100$. Żebra pośrednie modelowano płytami.



Rys. 3.1. Wykres bezwymiarowych naprężeń krytycznych w funkcji liczby półfal m dla ściskanego słupa zamkniętego wzmocnionego centralnym C-żebrem pośrednim (rys. 2.1);

Fig. 3.1. Dimensionless stress carried by the number of half-waves m for uniform compression column with cross-section presented in Fig. 2.1.

Na rys. 3.1 przedstawiono zależność bezwymiarowych naprężeń krytycznych $\sigma_n^* = (\sigma_n / E) \cdot 10^3$ w funkcji: liczby półfal m dla założonego stosunku wymiaru wzmocnienia do grubości pierwszej płyty ($b_s / h_1 = 4$). Wprowadzenie żeber wzdłużnych powoduje wzrost obciążeń krytycznych odpowiadających wyboczeniu lokalnemu. Żebra pośrednie powiększają sztywność giętą elementów płytowych. Dla słupów wzmocnionych żebrami pośrednimi mogą wystąpić dwa minima lokalne dla lokalnych postaci wyboczenia. Pierwsze odpowiada mniejszej liczbie półfal m w porównaniu ze słupem bez wzmocnień, zaś drugie minimum odpowiada większej liczbie półfal. W szczególnych przypadkach wartości tych minimów dla lokalnych postaci wyboczenia mogą być sobie prawie równe. Obu tym minimum odpowiadają jednak różne postaci wyboczenia lokalnego [3, 5].

TABELKA 3.1. Wyniki obliczeń nośności granicznej dla słupa przedstawionego na rys.2.1.
Table 3.1. Load-carrying capacity for column with cross-section presented in Fig. 2.1.

| Lp. | σ_1^* | σ_2^* | σ_3^* | σ_4^* | σ_5^* | σ_s^* / σ_m^* |
|------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|---------------------------|
| 1. | 3,58694(1) | 1,93448(7) | 2,72152(7) | - | - | 0,9200 |
| 1.a. | 3,58694(1) | 2,72152(7) | 1,93448(7) | - | - | 0,9726 |
| 2. | 3,58694(1) | 2,11045(51) | 2,11458(51) | - | - | 0,7232 |
| 2.a. | 3,58694(1) | 2,11458(51) | 2,11045(51) | - | - | 0,7244 |
| 3. | 3,58694(1) | 1,93448(7) | 2,72152(7) | 2,04475(5) | 2,14602(9) | 0,9202 |
| 4. | 3,58694(1) | 2,11045(51) | 2,11458(51) | 2,11461(49) | 2,11321(53) | 0,7182 |
| 5. | 3,58694(1) | 1,93448(7) | 2,72152(7) | 2,11045(51) | 2,11458(51) | 0,9200 |
| 6. | 3,58694(1) | 2,11045(51) | 2,11458(51) | 1,93448(7) | 2,72152(7) | 0,7890 |

Dla określenia maksymalnej wartości obciążenia (tzw. nośności granicznej) konstrukcji rzeczywistej z kilkoma postaciami własnymi jest konieczne uwzględnienie wzajemnego oddziaływania różnych postaci wyboczenia. W analizie interakcji należy jedynie uwzględnić globalną postać wyboczenia i dwie najbardziej niebezpieczne lokalne postaci mające takie same liczby półfal [4]. Szczegółowe obliczenia

numeryczne przeprowadzono dla słupów o ugięciach wstępnych: $\bar{\xi}_1 = |1,0|$, $\bar{\xi}_2 = |0,25|$, $\bar{\xi}_k = 0$ gdzie $k=3,\dots,N$.

W tabeli 3.1 przedstawiono wartości bezwymiarowych naprężeń krytycznych wraz z podaną w nawiasach liczbą półfal oraz wartości bezwymiarowej nośności granicznej σ_S^* odniesionej do minimalnej wartości naprężeń krytycznych $\sigma_m^* = \min.\{\sigma_1^*; \sigma_2^*; \sigma_k^*\}$ dla analizowanego słupa zamkniętego z C-żebami pośrednimi (rys. 2.1).

4. Literatura

1. Byskov E., Hutchinson J. W.: Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. AIAA J., 15, 7, 1977, pp. 941-948.
2. Kołakowski Z.: Influence of modification of boundary conditions on load carrying capacity in thin-walled columns in the second order approximation. Int. J. Solids Structures, Vol. 30, No. 19, 1993, pp. 2597-2609.
3. Kołakowski Z., Teter A.: Interactive buckling of thin-walled closed beam-columns with intermediate stiffeners. Int. J. Solids Structures, Vol. 32, No. 11, 1995, pp. 1501-16.
4. Królak M.: Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ściankach płaskich (praca zbiorowa) PWN Warszawa-Łódź 1990.
5. Teter A., Kołakowski Z.: Interactive buckling of thin-walled open beam-columns with intermediate stiffeners. Int. J. Solids Structures, Vol. 33, No. 3, 1996, pp. 315-330.
6. Koiter W. T., Kuiken G. D. C.: The interaction between local and overall buckling on the behaviour of built-up columns. WTHD Report 23, Delft, 1971.

LOAD-CARRYING CAPACITY FOR THIN-WALLED ELASTIC BEAMS WITH CENTRAL INTERMEDIATE STIFFENERS - SECOND NONLINEAR APPROXIMATION

The present paper deals with a nonlinear analysis of stability of the elastic thin-walled elastic beams with the thin-walled stiffeners. The beams are assumed to be simply supported at the ends. The investigation is concerned with a method for the approximate evaluation of the load carrying capacity of thin-walled structures based on the second order nonlinear approximation of the asymptotic theory of stability. The asymptotic expansion established by Byskov and Hutchinson [1] is carried out in the numerical calculations using the transition matrix method.