

ZYGMUNT TOWAREK

MECHANIKA OGÓLNA

Zagadnienia wybrane

Część I
STATYKA

Część II
KINEMATYKA

Część III
DYNAMIKA

Politechnika Łódzka
2017

Zygmunt Towarek

MECHANIKA OGÓLNA

Zagadnienia wybrane

Wydanie II uzupełnione

Łódź 2017

Recenzenci:
prof. dr hab. inż. Wiesław Ostachowicz
prof. dr hab. inż. Jan Osiecki

Redaktor Naukowy Wydziału Organizacji i Zarządzania
prof. dr hab. inż. Tomasz Kapitaniak

© Copyright by Politechnika Łódzka 2017

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel. 42-631-20-87, 42-631-29-52
fax 42-631-25-38
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-829-2

Nakład 200 egz. Ark. druk. 16,0. Papier offset. 80 g, 70 x 100
Druk ukończono w maju 2017 r.
Wykonano w Drukarni Quick-Druk, 90-562 Łódź, ul. Łąkowa 11
Nr 2218

Prezentowane opracowanie jest drugim wydaniem skryptu „Mechanika ogólna. Zagadnienia wybrane”. Wydanie to zostało uzupełnione licznymi przykładami zadań, mających ułatwić zrozumienie i przyswojenie materiału teoretycznego, przedstawionego w postaci twierdzeń, definicji i wzorów. Skrypt przeznaczony jest dla studentów uczelni technicznych i dostosowany do programu przedmiotu *mechanika techniczna*.

Skrypt zawiera treści prowadzonego na kilku kierunkach Wydziału Mechanicznego Politechniki Łódzkiej wykładu z *mechaniki technicznej* i stanowi podstawową wiedzę z mechaniki punktu i ciała sztywnego, niezbędną do studiowania wielu przedmiotów technicznych na wszystkich specjalnościach tego Wydziału. Jest on również formą podręcznego poradnika dla inżynierów zajmujących się konstruowaniem i eksploatacją dynamiczną maszyn i urządzeń.

Myszę więc, że przygotowany skrypt będzie interesującą pozycją dla wielu studentów i inżynierów, którzy chcą nie tylko poznać, ale i wykorzystać w pracy inżynierskiej podstawową wiedzę z *mechaniki*.

Autor

SPIS TREŚCI

| | |
|--|----|
| WSTĘP | 9 |
| CZEŚĆ I. STATYKA..... | 11 |
| 1.1. Pojęcia podstawowe..... | 11 |
| 1.1.1. Podstawowe określenia. Prawa Newtona..... | 11 |
| 1.1.2. Więzy i ich oddziaływania (reakcje)..... | 13 |
| 1.2. Układ sił zbieżnych..... | 16 |
| 1.2.1. Wypadkowa płaskiego układu sił zbieżnych | 16 |
| 1.2.2. Analityczne warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił | 17 |
| 1.2.3. Twierdzenie o trzech siłach..... | 21 |
| 1.2.4. Wypadkowa przestrzennego zbieżnego układu sił..... | 23 |
| 1.2.5. Warunki równowagi przestrzennego zbieżnego układu sił..... | 24 |
| 1.3. Tarcie i prawa tarcia | 28 |
| 1.4. Płaski dowolny układ sił..... | 32 |
| 1.4.1. Moment siły względem punktu..... | 32 |
| 1.4.2. Wypadkowa dwóch sił równoległych | 35 |
| 1.4.3. Para sił. Równoważność par sił działających w płaszczyźnie.. | 39 |
| 1.4.4. Redukcja płaskiego dowolnego układu sił..... | 42 |
| 1.4.5. Warunki równowagi płaskiego dowolnego układu sił | 45 |
| 1.5. Opór przy toczeniu..... | 50 |
| 1.6. Tarcie ciągłe na stały krążek..... | 52 |
| 1.7. Przestrzenny dowolny układ sił | 57 |
| 1.7.1. Moment siły względem punktu w przestrzeni..... | 57 |
| 1.7.2. Moment siły względem osi | 58 |
| 1.7.3. Twierdzenia o parach sił działających w przestrzeni | 60 |
| 1.7.4. Redukcja przestrzennego dowolnego układu sił do danego punktu | 62 |
| 1.7.5. Warunki równowagi przestrzennego dowolnego układu sił | 63 |
| 1.7.6. Niezmienniki przestrzennego układu sił. Skrętnik, oś centralna | 64 |
| 1.8. Środki ciężkości..... | 71 |
| 1.8.1. Środki ciężkości powierzchni | 74 |
| 1.8.2. Środki ciężkości linii..... | 75 |
| 1.8.3. Środki ciężkości niektórych linii, powierzchni i brył Środek ciężkości łuku koła | 76 |
| 1.8.4. Twierdzenia Pappusa-Guldina | 82 |

| | |
|--|-----|
| CZEŚĆ II. KINEMATYKA | 86 |
| 2.1. Kinematyka punktu | 86 |
| 2.1.1. Ruch punktu w opisie analitycznym | 86 |
| 2.1.2. Ruch punktu po torze | 87 |
| 2.1.3. Prędkość punktu | 88 |
| 2.1.4. Przyspieszenie punktu. Przyspieszenie we współrzędnych naturalnych | 91 |
| 2.1.5. Przyspieszenie punktu w opisie analitycznym | 94 |
| 2.1.6. Prędkość i przyspieszenie punktu w układzie biegunowym na płaszczyźnie | 95 |
| 2.1.7. Wybrane przypadki ruchu punktu | 97 |
| 2.2. Kinematyka ciała sztywnego | 106 |
| 2.2.1. Położenie ciała w przestrzeni. Stopnie swobody | 106 |
| 2.2.2. Związek między prędkościami dwu punktów ciała sztywnego | 108 |
| 2.2.3. Ruch postępowy ciała sztywnego | 111 |
| 2.2.4. Ruch obrotowy ciała sztywnego | 112 |
| 2.2.5. Ruch płaski ciała sztywnego | 118 |
| 2.2.5.1. Prędkość punktu w ruchu płaskim | 121 |
| 2.2.5.2. Przyspieszenie punktu w ruchu płaskim | 125 |
| 2.2.6. Ruch kulisty ciała sztywnego | 132 |
| 2.3. Ruch złożony punktu – wiadomości | 138 |
| CZEŚĆ III. DYNAMIKA | 145 |
| 3.1. Prawa Newtona | 145 |
| 3.2. Dynamika punktu materialnego | 147 |
| 3.2.1. Dynamiczne równania ruchu punktu materialnego | 147 |
| 3.2.2. Równania ruchu nieswobodnego punktu materialnego | 148 |
| 3.2.3. Szczególne przypadki ruchu punktu materialnego | 157 |
| 3.3. Pęd punktu i układu punktów materialnych | 165 |
| 3.3.1. Pęd punktu materialnego | 165 |
| 3.3.2. Pęd układu punktów materialnych | 167 |
| 3.4. Prawo ruchu środka masy | 172 |
| 3.5. Zasada d'Alemberta | 174 |
| 3.6. Momenty bezwładności ciała sztywnego | 181 |
| 3.6.1. Moment bezwładności i moment odśrodkowy | 181 |
| 3.6.2. Twierdzenie Steinera. Moment bezwładności względem osi obróconej | 185 |
| 3.6.3. Momenty bezwładności wybranych ciał jednorodnych | 189 |
| 3.7. Kręt punktu i układu punktów materialnych | 195 |
| 3.7.1. Kręt punktu materialnego | 195 |
| 3.7.2. Kręt układu punktów materialnych | 197 |

| | |
|--|-----|
| 3.7.3. Kręt układu punktów materialnych względem dowolnego punktu | 200 |
| 3.7.4. Kręt ciała w ruchu obrotowym..... | 202 |
| 3.7.5. Kręt ciała sztywnego w ruchu kulistym. | 204 |
| 3.8. Dynamika ruchu obrotowego i płaskiego ciała sztywnego..... | 208 |
| 3.8.1. Dynamika ruchu obrotowego | 208 |
| 3.8.2. Dynamika ruchu płaskiego..... | 211 |
| 3.9. Dynamika ruchu kulistego równania Eulera..... | 217 |
| 3.10. Praca i moc siły. Energia kinetyczna | 221 |
| 3.10.1. Praca i moc siły | 221 |
| 3.10.2. Energia kinetyczna punktu. Prawo zmienności energii kinetycznej punktu materialnego..... | 224 |
| 3.10.3. Prawo zmienności energii kinetycznej układu punktów materialnych | 227 |
| 3.10.4. Energia kinetyczna ciała sztywnego | 229 |
| 3.10.5. Praca siły sprężystej. Praca momentu siły | 232 |
| 3.11. Podstawy teorii uderzenia..... | 238 |
| 3.11.1. Uderzenie swobodne | 239 |
| 3.11.2. Uderzenie nieswobodne | 241 |
| 3.11.3. Środek uderzenia..... | 245 |
| 3.12. Zakończenie..... | 247 |
| Bibliografia..... | 248 |

WSTĘP

Mechanika ogólna jest to nauka zajmująca się ruchem ciał materialnych. Często także używana nazwa mechanika teoretyczna określa podstawowe prawa ruchu, dotyczące modeli ciał rzeczywistych jakimi są punkt materialny oraz ciało doskonale sztywne. Mechanika ogólna składa się z dwu podstawowych działów: kinematyki i dynamiki. Kinematyka zajmuje się opisem ruchu punktu lub ciała sztywnego w czasie, bez uwzględniania przyczyn wywołujących ten ruch, natomiast dynamika zajmuje się ruchem przyjętego modelu ciała rzeczywistego w zależności od działających na niego sił. Jeśli działający na ciało układ sił pozostaje w równowadze, rozważamy szczególny przypadek dynamiki tego ciała, polegający na jego spoczynku. Ten stan zachowania się ciała został wyodrębniony z dynamiki i nosi nazwę statyki. Tak więc ze względów dydaktycznych, jak i rozwoju historycznego, mechanikę dzielimy na statykę, kinematykę i dynamikę.

Początki rozwoju mechaniki jako nauki ścisłej sięgają czasów starożytnych. Pierwsze prace dotyczące maszyn prostych zawdzięczamy Archytasowi z Tarenu oraz Arystotelesowi (IV wiek p.n.e.), który stwierdził, że każdy ruch musi wynikać z właściwej przyczyny. Podstawy statyki natomiast zawdzięczamy Archimedesowi (III wiek p.n.e.). Podał on prawa działania dźwigni, dodawania sił równoległych, oraz wprowadził pojęcie środka ciężkości.

Znaczący rozwój mechaniki odnosi się do drugiego tysiąclecia czasów nowożytnych. Na przełomie XV i XVI wieku Leonardo da Vinci (1452-1519) przedstawił opracowania związane z toczeniem krążka, zjawiskiem tarcia, równoległoboku sił czy momentu siły, ale pełne opracowanie zasad statyki zawdzięczamy Kartezjuszowi (1596-1650), który prawa te uporządkował w dziele „Traktat o mechanice” wydanym po jego śmierci w 1668 roku. Odkrycie Mikołaja Kopernika (1473-1543) dało początek nowemu spojrzeniu na rolę układu odniesienia w badaniu ruchu planet i przyczyniło się do sformułowania zasady równoważności ruchów względnych w układzie słonecznym (heliocentrycznym).

Podstawy mechaniki teoretycznej zawdzięczamy Isaacowi Newtonowi (1642-1727), który w oparciu o fakty doświadczalne sformułował i opublikował prawa dynamiki dla ciała w ruchu postępowym, gdyż w ruchu tym wszystkie punkty poruszają się identycznie. Ponieważ w ruchu dowolnym ciała jego punkty mogą wykonywać ruchy różne, obecnie prawa Newtona formułuje się dla punktu materialnego, z możliwością przeniesienia na układy punktów.

Prace Newtona dały początek bardzo szybkiemu rozwojowi mechaniki, a szczególnie metod matematycznych, tworząc podstawy mechaniki analitycznej. Szczególne zasługi w rozwoju mechaniki ciała sztywnego i podstaw mechaniki analitycznej mają Leonhard Euler (1707-1783), Jean d'Alembert (1717-1783), Ludwik Lagrange (1736-1813), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Rowan Hamilton (1805-1865), czy Paul Emil Appel (1855-1930).

Rozwój nauk fizycznych, przypadający na wiek XX, uściślił prawa mechaniki klasycznej związane ze zjawiskami atomowymi, tworząc dziedzinę nauki zwaną mechaniką kwantową. Początki mechaniki kwantowej stworzyli Max Planck (1858-1947), Erwin Schrodinger (1887-1961) i Paul Dirac (1902-1984). Innym ważnym osiągnięciem tego stulecia jest uściślenie praw mechaniki związanych z opisem masy poruszającego się ciała. Twórcą teorii względności dającej podstawy mechaniki relatywistycznej, w której uwzględniono relatywistyczną zmienność masy, jest Albert Einstein (1879-1955).

Mechanika klasyczna ostatniego stulecia związana jest z takimi nazwiskami, jak: I.W. Mieszczercki (1859-1935), T. Huber (1872-1950), czy S. Banach (1892-1945). Sformułowali oni i podali podstawowy zakres mechaniki ogólnej i teoretycznej, który z różnymi modyfikacjami jest przekazywany na wszystkich uczelniach technicznych.

Przyjmowany w mechanice analitycznej model zastępczy ciała rzeczywistego, jako ciała doskonale sztywnego, jest oczywistym uproszczeniem. Uproszczenie to pozwala na uzyskanie prostego i przejrzystego obrazu praw i zasad rządzących ruchem, jednak w wielu zagadnieniach technicznych taki model ciała jest niewystarczający i należy uwzględnić jego odkształcenia. Problemami tymi dla ciał stałych zajmuje się mechanika ciała odkształcalnego (teoria sprężystości, teoria plastyczności, reologia), dla cieczy – mechanika płynów (hydromechanika) i dla gazów – mechanika gazów (areomechanika).

CZEŚĆ I. STATYKA

1.1. POJĘCIA PODSTAWOWE

1.1.1. Podstawowe określenia. Prawa Newtona

Punktem materialnym nazywamy taki model ciała, który można potraktować jak punkt geometryczny, któremu przypisano masę. Jest to ciało o tak małych wymiarach w stosunku do przestrzeni, w której ruch się odbywa, że można pominąć przemieszczenia tego ciała wywołane przez obrót.

Ciało doskonale sztywne jest to taki model ciała, którego punkty pod działaniem przyłożonych sił nie zmieniają położenia względem siebie. Ciało to nie ulega odkształceniom, a więc odległości między jego punktami nie ulegają zmianie.

Siłą nazywamy oddziaływanie ciał na siebie. Można je podzielić na siły oddziaływania bezpośredniego i na odległość (siły przyciągania, magnetyczne, elektrostatyczne). Siły rozłożone na powierzchni w sposób ciągły można zastąpić równoważną siłą skupioną, przyłożoną w odpowiednim punkcie.

Jak już wspomniano we wstępie, statyka jest wyodrębnionym działem mechaniki ogólnej, której podstawę stanowią prawa Newtona sformułowane i ogłoszone w 1687 r. w pracy pt. *Philosophiae naturalis principia mathematica* wydanej w Londynie. Prawa te, odniesione do punktu materialnego, mają następującą treść.

Prawo pierwsze. Punkt materialny, na który nie działa żadna siła, lub działające siły równoważą się, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Prawo drugie. Przyspieszenie punktu materialnego o stałej masie, na który działa siła jest proporcjonalne do tej siły i ma kierunek tej siły.

$$m \mathbf{p} = \mathbf{P} \quad (1.1)$$

Jest to równanie wektorowe, opisujące zależność między wartościami wektorów siły \mathbf{P} i przyspieszenia \mathbf{p} .

Prawo trzecie. Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych są równe co do wartości liczbowej, przeciwnie skierowane i działają wzdłuż prostej łączącej te punkty.

$$\mathbf{P}_{1,2} = - \mathbf{P}_{2,1}$$

W obowiązującym w Polsce międzynarodowym układzie jednostek SI (Systemie International), jako jednostki podstawowe przyjęto: długość 1 metr (1 m), czas 1 sekunda (1 s) i masa 1 kilogram (1 kg).

Jednostką **siły** w układzie SI jest **1 niuton** (1 N), który na podstawie drugiego prawa Newtona w jednostkach podstawowych ma wartość:

$$1 \text{ niuton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 1 \text{ mkg/s}^2 \quad (1.2)$$

Oznacza to, że 1 N jest to siła, która ciału o masie 1 kg nadaje przyspieszenie 1 m/s^2 . W układzie SI występują również wielokrotności 1 N, takie jak 1 kN i 1 MN:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kiloniuton} &= 1 \text{ kN} = 10^3 \text{ N} \\ 1 \text{ meganiuton} &= 1 \text{ MN} = 10^6 \text{ N} \end{aligned}$$

W fizyce spotyka się jeszcze jednostkę siły związaną z układem CGS (centymetr, gram, sekunda). Jednostka ta nazywa się **dyną** i jako pochodna jednostek podstawowych ma wartość:

$$1 \text{ dyna} = 1 \text{ g} \cdot 1 \text{ cm/s}^2 = 1 \text{ gcm/s}^2$$

Zależność między jednym niutonem i jedną dyną wynosi:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 1000 \text{ g} \cdot 100 \text{ cm/s}^2 = 10^5 \text{ dyn}$$

Siłą ciężkości nazywamy siłę z jaką Ziemia przyciąga rozważane ciało materialne. Wartość tej siły nazywamy ciężarem ciała, a jej wielkość wynika z drugiego prawa Newtona.

(1.3)

$$G = mg$$

Ciężarem więc jest iloczyn masy i wartości przyspieszenia ziemskiego. Przyspieszenie ziemskie zależy od szerokości geograficznej i największą wartość osiąga w okolicach bieguna. Dla Polski przyspieszenie ziemskie można przyjąć $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

W układzie **technicznym** albo **ciężarowym** jako jedną z jednostek podstawowych przyjmuje się jednostkę siły. Przyjmując tak jak w układzie SI jednostkę długości 1 metr, czasu 1 sekunda, trzecią jednostką podstawową nie jest masa, a jednostka siły (1 kG):

$$1 \text{ kG} = 1 \text{ kg} \cdot 9,80665 \text{ m/s}^2 = 9,80665 \text{ mkg/s}^2 = 9,80665 \text{ N}$$

Z wystarczającym przybliżeniem dla praktycznych obliczeń można przyjąć $1 \text{ kG} = 9,81 \text{ N}$.

1.1.2. Więzy i ich oddziaływania (reakcje)

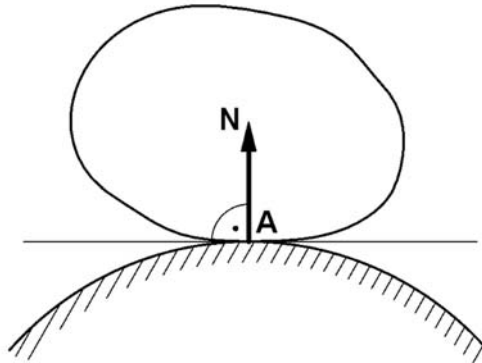
Więzami będziemy nazywali ograniczenia ruchu w przestrzeni. Spośród więzów spotykanych w statyce można wyróżnić więzy obustronne i jednostronne, wewnętrzne i zewnętrzne oraz idealne, czyli takie, w których nie występuje tarcie.

Jak podano we wstępie statyka zajmuje się równowagą układów sił działających na przyjęty model ciała rzeczywistego. Jeśli siły przyłożone do ciała tworzą układ równoważący się, to ciało to może pozostawać w spoczynku. Zadaniem statyki jest więc wyznaczenie warunków, jakie muszą spełniać działające układy sił, aby ciało, na które działają było w równowadze.

Ponieważ badanie równowagi dotyczy ciał swobodnych, **należy istniejące więzy zastąpić odpowiednimi reakcjami i po ich przyłożeniu traktować jak ciało swobodne poddane działaniu sił czynnych i reakcji więzów.**

Poniżej przedstawiono ważniejsze przypadki więzów, którym mogą być poddane ciała materialne.

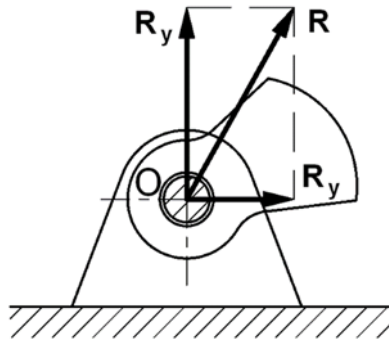
Reakcja normalna N – reakcja przyłożona w punkcie zetknięcia się danego ciała z powierzchnią innego ciała, o kierunku normalnym do powierzchni styku. Więzy jednostronne, idealne.



Rys. 1.1.

Należy pamiętać, że **każdemu działaniu towarzyszy równe co do wartości, wzdłuż tej samej prostej, przeciwdziałanie**, czyli jeśli podłoże działa na ciało reakcją normalną N , to z taką samą reakcją działa ciało na podłoże.

Przegub walcowy stały R – reakcja przechodząca przez oś sworznia. Po zastąpieniu przegubu walcowego stałego odpowiednią reakcją, do rozpatrywanego układu wprowadzamy dwie niewiadome: wartość liczbową tej reakcji oraz wartość kąta nachylenia jej kierunku. Więzy dwustronne zewnętrzne.



Rys. 1.2

W rozwiązaniach technicznych uwolnienie od więzów przegubu walcowego stałego polega na przyłożeniu do układu dwu składowych wyznaczonej reakcji. Składowe te mogą mieć kierunki dowolne, ale najwygodniej ze względów matematycznych jest, aby kierunki te były do siebie prostopadłe.

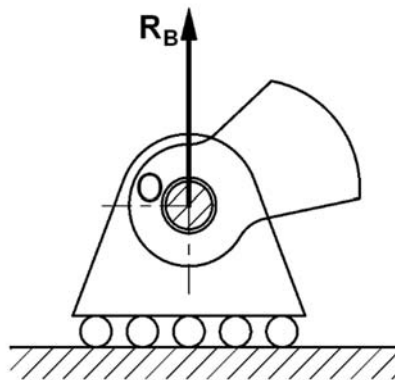
Zgodnie z rysunkiem dla prostopadłych składowych reakcji, całkowita wartość reakcji przegubu stałego wynosi:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (1.4)$$

a jej kierunek z poziomem, oznaczony kątem α , można wyznaczyć z zależności:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2}}$$

Podpora przesuwna R_B – reakcja prostopadła do płaszczyzny, po której mogą toczyć się rolki podpory przesuwnej. Więzy dwustronne zewnętrzne.

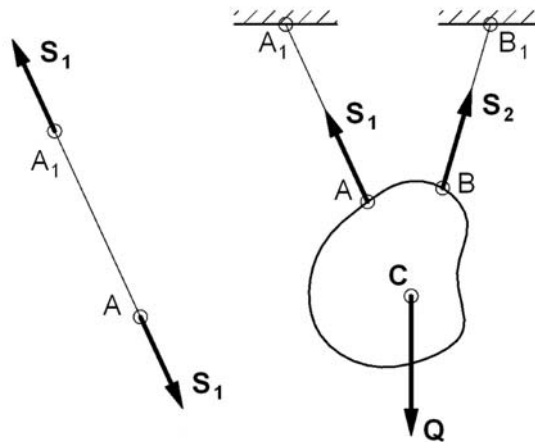


Rys. 1.3

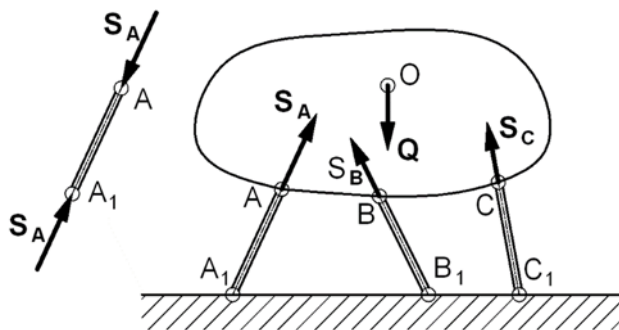
Cięgno lub lekki pręt S – reakcja przyłożona do rozpatrywanego ciała w miejscu zamocowania cięgna lub lekkiego pręta, o kierunku pokrywającym się z kierunkiem uwalnianego cięgna czy pręta. Jest to wynikiem uwolnienia od więzów części wiotkiego cięgna, na przykład AA_1 (rys. 1.4). Otóż **jeśli ciało odkształcalne pod działaniem układu sił znajduje się w równowadze, to pozostanie również w równowadze, jeśli ciało potraktujemy jako sztywne**. Na odcinek cięgna AA_1 działają dwie siły przyłożone w punktach A i A_1 . **Jeśli odcinek ten znajduje się w równowadze, siły te są równe i leżą na jednej prostej tworząc układ sił równoważących się, czyli zerowy**.

Zgodnie z zasadą działania i przeciwdziałania do ciała przykładamy siłę S_1 na kierunku uwalnianego cięgna lub lekkiego pręta.

Dla cięgna więzy jednostronne zewnętrzne, natomiast dla pręta więzy dwustronne zewnętrzne.



Rys. 1.4



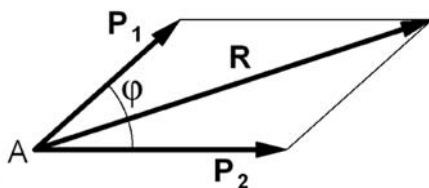
Rys. 1.5

1.2. UKŁAD SIŁ ZBIEŻNYCH

1.2.1. Wypadkowa płaskiego układu sił zbieżnych

Układ sił, którego linie działania leżą w jednej płaszczyźnie i przecinają się w jednym punkcie, nazywamy płaskim układem sił zbieżnych.

Rozważmy układ dwu sił P_1 i P_2 przyłożonych do punktu A ciała sztywnego. Z zasady równoległoboku wynika, że **dwie siły przyłożone do jednego punktu, równoważne są jednej sile przyłożonej w tym samym punkcie, będącej przekątną równoległoboku zbudowanego na tych siłach.**



Rys. 1.6

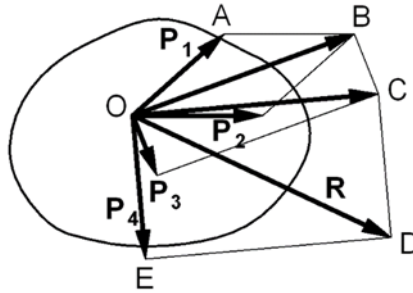
Suma tych sił nosi nazwę siły wypadkowej R i w zapisie wektorowym można ją zapisać:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \quad (1.5)$$

Wartość liczbowa tej wypadkowej wynika z twierdzenia cosinusów i wynosi:

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2 \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \cos \varphi}$$

Do punktu O rozważanego ciała (rys. 1.7) został przyłożony układ sił zbieżnych P_1, P_2, P_3, P_4 . Chcąc wyznaczyć wypadkową tego układu, należy wykonać następujące postępowanie. Stosując zasadę równoległoboku dla sił P_1 i P_2 wyznaczyć ich wypadkową. Wypadkową tą, jak zaznaczono na rysunku, jest wektor OB, który następnie należy dodać do siły P_3 , budując odpowiedni równoległobok z tych wektorów. Otrzymaną wypadkową jest teraz wektor OC, który dalej należy dodać do siły P_4 . W konsekwencji otrzymano jedną siłę R , jako **wypadkową** działającego układu sił. Przedstawiony powyżej sposób dodawania sił tworzących układ płaski zbieżny można zastosować do dowolnej ich liczby.



Rys. 1.7

Jak wynika z rysunku, wypadkowa \mathbf{R} jest zamykającym bokiem wieloboku OABCD, natomiast boki tego wieloboku odpowiadają wektorom odpowiednich sił \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 , \mathbf{P}_3 i \mathbf{P}_4 . Wielobok tak zbudowany nazywa się **wielobokiem sił**, a wypadkowa \mathbf{R} jest sumą geometryczną wszystkich sił stanowiących układ. Można stwierdzić:

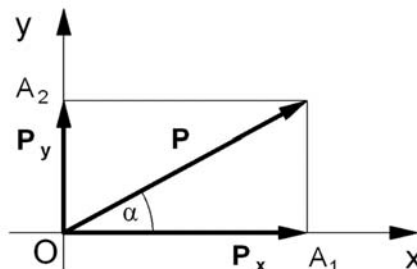
Każdy płaski zbieżny układ n sił \mathbf{P}_1 , $\mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ przyłożonych do jednego punktu O możemy zastąpić jedną siłą wypadkową \mathbf{R} przyłożoną w punkcie zbieżności, równą sumie geometrycznej tych sił:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (1.6)$$

1.2.2. Analityczne warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił

Rzut wektora na oś

Niech w punkcie O dowolnego ciała działa siła \mathbf{P} . Z punktem O tego ciała zwiążmy prostokątny układ współrzędnych Ox i Oy, aby w płaszczyźnie Oxy znajdowała się siła \mathbf{P} . Z końca siły \mathbf{P} , a więc przez punkt A poprowadźmy proste prostopadłe do osi przyjętego układu. Proste te na osiach układu odcięły odcinki OA_1 i OA_2 , które nazwiemy rzutami siły \mathbf{P} na osie przyjętego układu współrzędnych.



Rys. 1.8

Składowe wektora \mathbf{P} w prostokątnym układzie współrzędnych Oxy wynoszą:

$$P_x = P \cos \alpha \qquad P_y = P \sin \alpha \qquad (1.7)$$

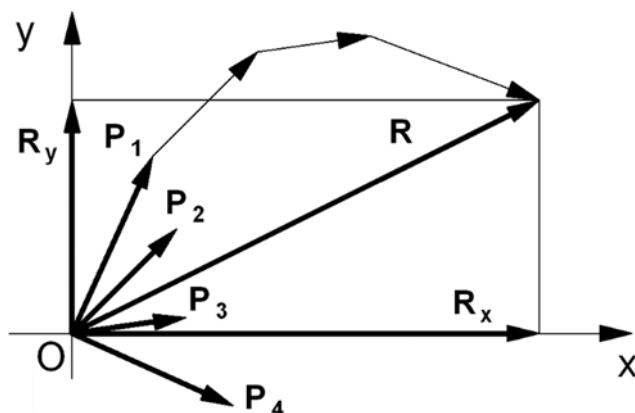
Odwracając zagadnienie i przyjmując za znane składowe siły w prostokątnym układzie współrzędnych, jej wartość liczbową oraz kierunek wyrażony funkcją trygonometryczną można zapisać:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} \qquad \cos \alpha = \frac{P_x}{P} = \frac{P_x}{\sqrt{P_x^2 + P_y^2}}$$

Zgodnie z rozważaniami o wypadkowej płaskiego zbieżnego układu sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, można stwierdzić, że aby płaski zbieżny układ sił był w równowadze, wielobok sił zbudowany ze składowych musi być figurą zamkniętą. Warunek ten w zapisie wektorowym ma postać:

$$\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = \mathbf{0} \qquad (1.8)$$

Zwiążmy z punktem zbieżności O płaskiego układu n sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, prostokątny układ osi współrzędnych, poprowadzony w płaszczyźnie działającego układu sił.



Rys. 1.9

Na podstawie równania (1.6), z którego wynika, że płaski układ sił zbieżnych można zastąpić siłą wypadkową \mathbf{R} równą ich sumie geometrycznej, mamy:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (1.9)$$

Opierając się na twierdzeniu o rzucie siły wypadkowej, według którego rzut siły wypadkowej na dowolną oś równy jest sumie rzutów sił składowych na tę samą oś, możemy wyznaczyć analitycznie składowe siły wypadkowej \mathbf{R} na osie Ox i Oy :

$$R_x = P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad (1.10)$$

$$R_y = P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{i=1}^n P_{iy}$$

Jak już udowodniono, warunkiem równowagi płaskiego zbieżnego układu sił jest zamknięty wielobok zbudowany na tych siłach. Oznacza to, że siła wypadkowa \mathbf{R} rozważanego układu musi być wówczas równa zero, czyli rzuty tej wypadkowej na osie Ox i Oy dowolnego prostokątnego układu współrzędnych, przyjętego w płaszczyźnie działania tych sił, muszą być równe zero. Z powyższych zależności otrzymujemy bezpośrednio dwa analityczne warunki równowagi:

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad (1.11)$$

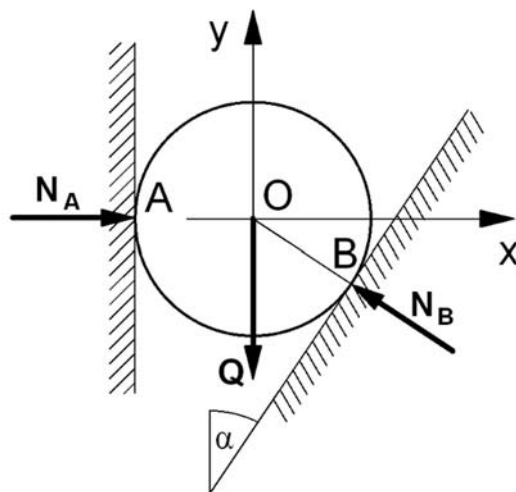
Tak więc warunkiem równowagi płaskiego zbieżnego układu sił jest, aby suma rzutów wszystkich sił na dwie osie dowolne, oby nierównoległe i leżące w tej samej płaszczyźnie, była równa zero.

Przykład 1.1

Między dwie gładkie płaszczyzny tworzące między sobą kąt α włożono kulę o ciężarze Q . Kula opiera się o pionową płaszczyznę w punkcie A oraz o płaszczyznę pochyłą w punkcie B , jak pokazano na rysunku. Wyznaczyć reakcje w miejscach podparcia.

Rozwiązanie

Po uwolnieniu od więzów na kulę działają trzy siły: siła ciężkości Q , reakcja normalna N_A w punkcie styku kuli ze ścianą pionową oraz reakcja normalna N_B w punkcie styku kuli z płaszczyzną pochyłą.



Rys. 1.10

Równania równowagi w rozpatrywanym przypadku mają postać:

$$\sum P_{ix} = N_A - N_B \cos \alpha = 0$$

$$\sum P_{iy} = N_B \sin \alpha - Q = 0$$

Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań, względem niewiadomych reakcji normalnych, wyznaczono odpowiednie reakcje podparcia:

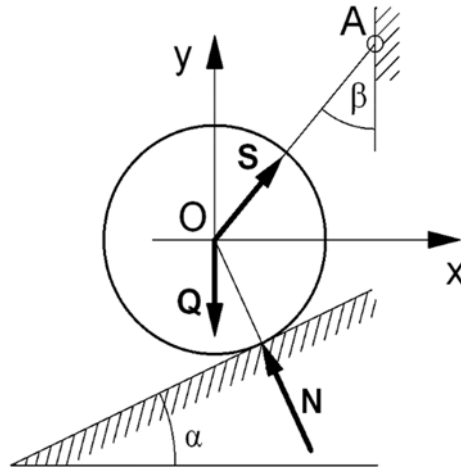
$$N_A = Q \operatorname{ctg} \alpha \qquad N_B = \frac{Q}{\sin \alpha}$$

Przykład 1.2

Kulę o ciężarze Q ustawiono na gładkiej równi pochyłej. Położenie równowagi kuli zapewnia lina OA zaczepiona w środku kuli i tworząca kąt β z pionem. Obliczyć reakcje równi i cięgna na kulę, jeżeli równia tworzy kąt α z poziomem.

Rozwiązanie

Po uwolnieniu od więzów na kulę działają trzy siły: siła ciężkości Q , reakcja normalna N w punkcie styku kuli z równią oraz siła w linie S działająca wzdłuż cięgna.



Rys. 1.11

Równania równowagi układu sił działających na kulę mają postać:

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= S \sin \beta - N \sin \alpha = 0 \\ \sum P_{iy} &= S \cos \beta + N \cos \alpha - Q = 0\end{aligned}$$

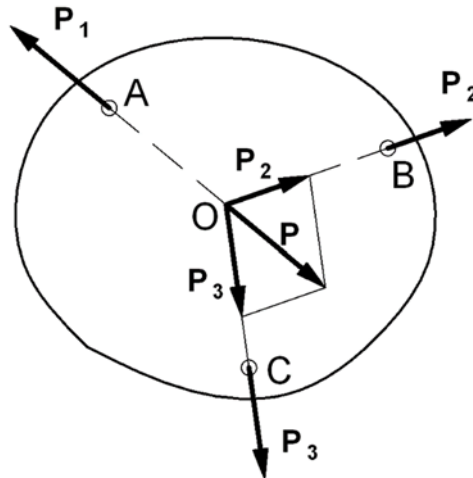
Po rozwiązaniu otrzymanego układu równań otrzymano wartości reakcji:

$$S = Q \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \qquad N = Q \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

1.2.3. Twierdzenie o trzech siłach

Niech w punktach A, B, C ciała sztywnego działają trzy nierównoległe siły \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 i \mathbf{P}_3 . Ponieważ z założenia, linie działania tych sił przecinają się w jednym punkcie O, siły \mathbf{P}_2 i \mathbf{P}_3 można przesunąć do tego punktu i dodać metodą równoległoboku. Otrzymano wypadkową $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3$.

W wyniku przeprowadzonego działania na ciało działają teraz dwie siły: \mathbf{P}_1 przyłożona w punkcie A i \mathbf{P} przyłożona w punkcie O. Aby ciało było w równowadze, siły te muszą tworzyć układ zerowy, tzn. muszą być równe co do wartości liczbowych, przeciwne co do kierunku i działać wzdłuż jednej prostej. A więc linia działania siły \mathbf{P}_1 musi także przechodzić przez punkt O, jak założono na początku. Ponadto układ sił musi być układem równoważącym się, czyli trójkąt sił zbudowany z wektorów \mathbf{P}_1 , \mathbf{P}_2 i \mathbf{P}_3 musi być zamkniętym.



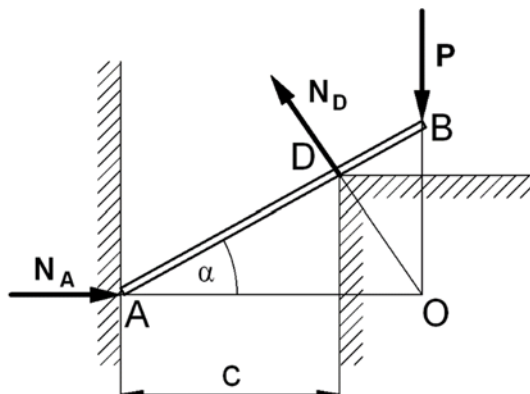
Rys. 1.12

Jako wynik powyższych rozważań można sformułować twierdzenie dotyczące równowagi trzech nierównoległych sił:

Aby trzy nierównoległe siły działające w jednej płaszczyźnie były w równowadze, linie działania tych sił muszą przecinać się w jednym punkcie, a same siły tworzyć trójkąt zamknięty.

Przykład 1.3

Lekki pręt AB o długości l wstawiono do kanału o szerokości c i obciążono jego koniec B pionową siłą P . Pręt opiera się o gładką pionową ścianę w punkcie A oraz o krawędź kanału w punkcie D, jak pokazano na rysunku. Określić kąt α , pod jakim należy ustawić pręt, aby pozostał w równowadze.



Rys. 1.13

Rozwiązanie

Na pręt działają trzy siły: pionowa siła \mathbf{P} , przyłożona na końcu B pręta oraz reakcje \mathbf{N}_A i \mathbf{N}_D . Kierunek reakcji \mathbf{N}_A jest prostopadły do ściany kanału, natomiast reakcji \mathbf{N}_D jest prostopadły do pręta. W położeniu równowagi linie działania wszystkich sił muszą przecinać się w jednym punkcie O. Z konstrukcji przedstawionej na rysunku znajdujemy:

Z trójkąta AOB mamy $AO = l \cos \alpha$, następnie z trójkąta ADO można wyznaczyć:

$$AO = \frac{AD}{\cos \alpha}$$

ponieważ $c = AD \cos \alpha$, po prostych przekształceniach znajdujemy:

$$AO = \frac{AD}{\cos \alpha} = \frac{c}{\cos^2 \alpha}$$

Porównując powyższą wartość AO z wyznaczoną z trójkąta AOB, otrzymujemy:

$$l \cos \alpha = \frac{c}{\cos^2 \alpha}$$

ostatecznie mamy:

$$\cos \alpha = \sqrt[3]{\frac{c}{l}}$$

Z otrzymanej zależności wynika, że równowaga jest możliwa tylko w przypadku gdy $\frac{c}{l} \leq 1$.

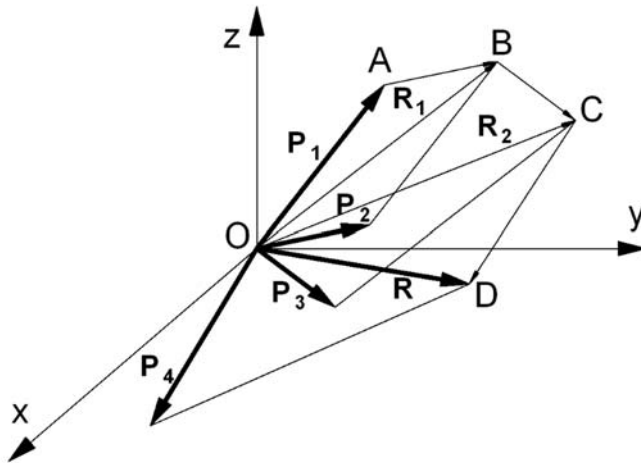
Chcąc wyznaczyć wartości reakcji \mathbf{N}_A i \mathbf{N}_D , należy przyjąć układ osi współrzędnych, napisać równania równowagi jako równania rzutów wszystkich sił na osie, a następnie otrzymany układ równań algebraicznych rozwiązać względem nieświadomych reakcji.

1.2.4. Wypadkowa przestrzennego zbieżnego układu sił

Układ sił przyłożonych do jednego punktu, których linie działania nie leżą w jednej płaszczyźnie nazywamy przestrzennym układem sił zbieżnych. Taki układ złożony z czterech sił $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_4$ przedstawiono na rysunku 1.14. Znajdziemy jego wypadkową.

Przez siły \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 przyłożone do punktu O poprowadzono płaszczyznę, w której zgodnie z zasadą równoległoboku wyznaczono wypadkową \mathbf{R}_1 jako przekątną równoległoboku zbudowanego na tych siłach. Wypadkowa \mathbf{R}_1 przyłożona jest do punktu O i jest sumą geometryczną sił składowych. Mamy więc:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \quad (\text{a})$$



Rys. 1.14

Podobnie poprowadzono płaszczyznę przez wypadkową \mathbf{R}_1 i siłę \mathbf{P}_3 . W płaszczyźnie tej wyznaczono wypadkową \mathbf{R}_2 sił \mathbf{R}_1 i \mathbf{P}_3 :

$$\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1 + \mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 \quad (\text{b})$$

Postępując analogicznie z następnymi siłami, a więc \mathbf{R}_2 i \mathbf{P}_4 , otrzymano ostatecznie:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_2 + \mathbf{P}_4 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4 \quad (\text{c})$$

Przedstawiony na rysunku przestrzenny zbieżny układ sił zastąpiliśmy jedną siłą wypadkową \mathbf{R} , równą domykającemu bokowi OD przestrzennego wieloboku sił OABCD zbudowanego z wektorów składowych.

Jeśli do jednego punktu będzie przyłożonych n sił, ich wypadkowa będzie równa:

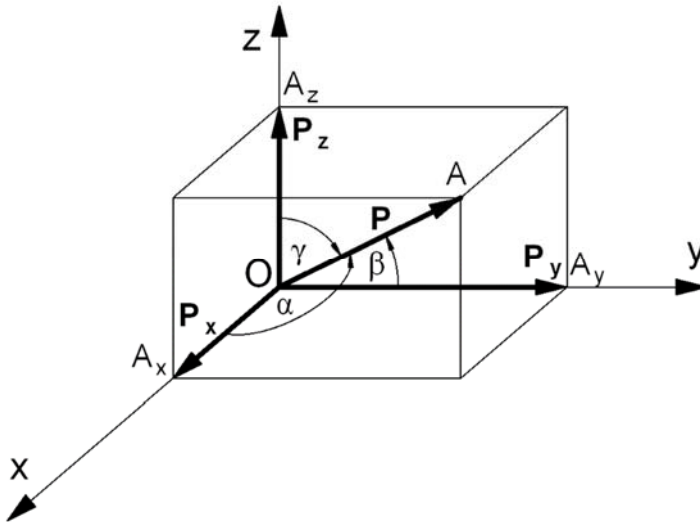
$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (1.12)$$

Dowolny przestrzenny układ sił przyłożonych do jednego punktu zastąpić możemy jedną siłą wypadkową przyłożoną w tym punkcie i równą sumie geometrycznej wszystkich sił.

1.2.5. Warunki równowagi przestrzennego zbieżnego układu sił

W dowolnym punkcie O ciała sztywnego przyłożono siłę \mathbf{P} . Z punktem tym związano trzy wzajemnie prostopadłe osie Ox , Oy , Oz tworzące prawoskrętny prostokątny układ współrzędnych. Następnie z końca siły \mathbf{P} poprowadzono trzy

płaszczyzny prostopadłe do osi układu, które w przecięciu z osiami odcięły składowe siły \mathbf{P} w przyjętym układzie osi.



Rys. 1.15

$$P_x = P \cos \alpha$$

$$P_y = P \cos \beta$$

$$P_z = P \cos \gamma$$

gdzie α , β i γ są kątami, jakie siła \mathbf{P} tworzy z osiami Ox , Oy i Oz – jak pokazano na rys 1.15. Cosinusy tych kątów nazywamy cosinusami kierunkowymi siły \mathbf{P} .

Wartość siły \mathbf{P} wyrażona poprzez składowe w prostokątnym układzie współrzędnych wynosi:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

Po wyznaczeniu składowych siły w prostokątnym układzie współrzędnych cosinusy kierunkowe wynoszą:

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{P}$$

$$\cos \beta = \frac{P_y}{P}$$

$$\cos \gamma = \frac{P_z}{P}$$

Jeśli powyższe równania podniesiemy do kwadratu i stronami dodamy, otrzymamy związek jaki muszą spełniać cosinusy kierunkowe:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Niech do punktu O ciała sztywnego będzie przyłożony przestrzenny układ n sił zbieżnych $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, jak pokazano na rysunku.

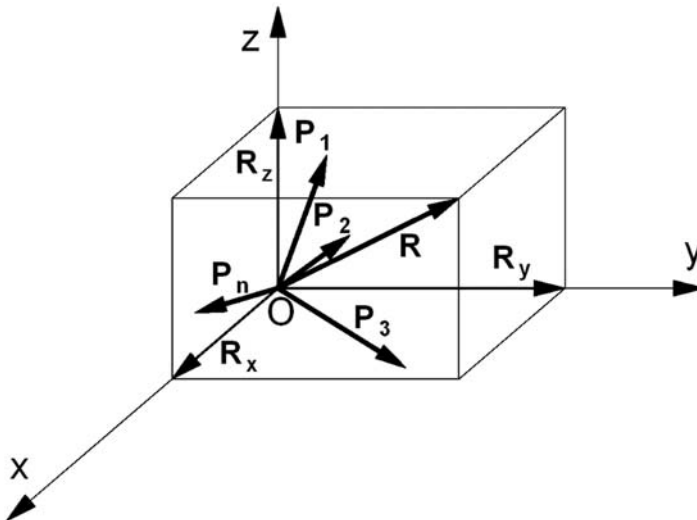
Wypadkowa tego układu, jak już wiadomo, równa jest sumie geometrycznej wszystkich sił i wynosi:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (1.13)$$

Z twierdzenia o rzucie siły wypadkowej i jej składowych na dowolną oś, składowe siły wypadkowej \mathbf{R} wynoszą:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} \quad (1.14)$$

Po wyznaczeniu z powyższych wzorów składowych R_x , R_y i R_z możemy znaleźć wartość liczbową wypadkowej \mathbf{R} oraz jej kosinusy kierunkowe.



Rys. 1.16

Jak wiadomo, przestrzenny zbieżny układ sił można zastąpić jedną siłą wypadkową będącą sumą geometryczną wszystkich działających sił. Wynika z tego, że aby rozważany układ sił pozostawał w równowadze, jego wypadkowa musi się równać zero:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0 \quad (1.15)$$

Same siły tworzące przestrzenny zbieżny układ muszą tworzyć wielobok zamknięty, czyli koniec ostatniego wektora powinien być początkiem pierwszego.

Zerowanie się wypadkowej \mathbf{R} przestrzennego układu sił zbieżnych oznacza, że jej rzuty na osie przyjętego układu współrzędnych muszą być również równe zero. Otrzymujemy w ten sposób trzy analityczne warunki równowagi:

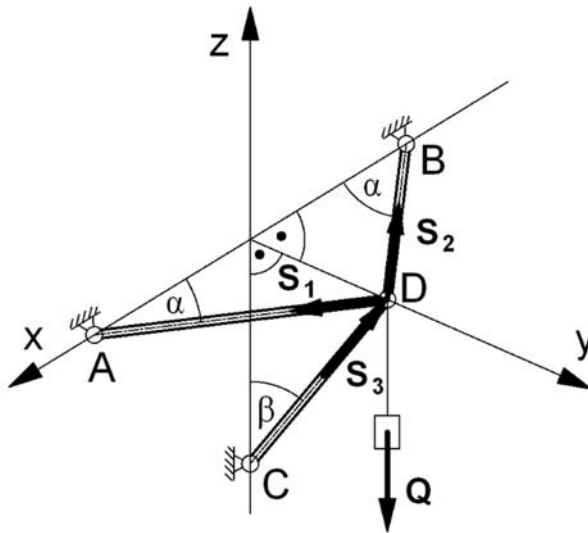
$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \quad (1.16)$$

Warunkiem równowagi przestrzennego zbieżnego układu sił jest, aby suma rzutów wszystkich sił na trzy dowolne osie, oby nierównoległe i nieleżące w jednej płaszczyźnie, była równa zero.

Najczęściej układ osi przyjmujemy jako prostokątny.

Przykład 1.4

Wspornik zbudowany z trzech lekkich prętów, połączonych przegubowo, zamocowano do pionowej ściany, jak pokazano na rysunku. Wyznaczyć siły w prętach wspornika, jeśli obciążymy go ciężarem Q w przegubie D .



Rys. 1.17

Rozwiązanie

Układ uwalniamy od więzów. Przykładamy ciężar Q i w miejsce prętów przyłożono siły w nich działające, jak pokazano na rysunku. Pręty AD i BD przyjęto jako rozciągane, a pręt CD jako ściskany. Przyjęto układ osi współrzędnych i wyznaczono równania rzutów sił na te osie.

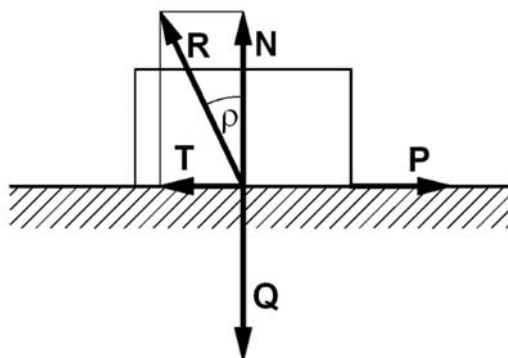
$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= S_1 \cos \alpha - S_2 \cos \alpha = 0 \\ \sum P_{iy} &= -S_1 \sin \alpha - S_2 \sin \alpha + S_3 \sin \beta = 0 \\ \sum P_{iz} &= S_3 \cos \beta - Q = 0\end{aligned}$$

Rozwiązując powyższy układ równań względem niewiadomych sił w prętach, otrzymano ich wartości:

$$S_1 = S_2 = Q \frac{\operatorname{tg} \beta}{2 \sin \alpha} \quad S_3 = Q \frac{1}{\cos \beta}$$

1.3. TARCIE I PRAWA TARCIA

Rozpatrzmy ciało o ciężarze Q , spoczywające na chropowatej powierzchni, jak pokazano na rysunku. Do ciała tego przyłożmy poziomą siłę P powodującą jego ruch.



Rys. 1.18

Z doświadczenia wiadomo, że aby nastąpił ruch ciała, wartość siły P musi być większa od pewnej granicznej wartości. Siła mniejsza od wartości granicznej nie spowoduje ruchu i ciało będzie pozostawać w spoczynku. Wynika z tego, że oprócz reakcji normalnej podłoża N , istnieje jeszcze składowa styczna, którą oznaczamy T i nazywamy siłą tarcia.

W wyniku wielu doświadczeń przeprowadzonych przez Coulomba i Morena dla różnych stykających się powierzchni, zostały ustalone prawa tarcia zawierające zależność między maksymalną wartością siły tarcia T a naciskiem normalnym N .

1. Siła tarcia nie zależy od wielkości powierzchni stykających się ciał, a jedynie od ich rodzaju.

2. Wartość siły tarcia dla ciała znajdującego się w spoczynku może zmieniać się od zera do maksymalnej wartości, która jest proporcjonalna do całkowitego nacisku normalnego:

$$T \leq \mu N \quad (1.17)$$

3. Siła tarcia dla ciała będącego w spoczynku jest skierowana przeciwnie do zamierzonego kierunku ruchu (rys. 1.18). Natomiast siła tarcia dla ciała będącego w ruchu jest przeciwna do kierunku ruchu i maleje wraz ze wzrostem prędkości.

Występujący we wzorze na siłę tarcia współczynnik μ , dla ciała będącego w spoczynku, nosi nazwę współczynnika tarcia statycznego, natomiast w przypadku, gdy ciało ślizga się, współczynnik tarcia oznaczamy μ' i nosi on nazwę współczynnika tarcia kinetycznego. Oznaczony na rysunku kąt ρ , jaki tworzy całkowita reakcja \mathbf{R} , przy maksymalnej sile tarcia, z normalną do powierzchni styku, nosi nazwę kąta tarcia i wynosi:

$$T = N \operatorname{tg} \rho \quad \text{czyli} \quad \mu = \operatorname{tg} \rho$$

a więc współczynnik tarcia jest równy tangensowi kąta tarcia.

Przykładowe współczynniki tarcia statycznego μ :

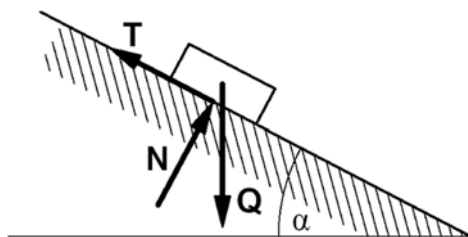
| | |
|--|-------------------|
| – żeliwo po żeliwie, bez smarowania, obrobione zgrubnie | $\mu = 0,22$ |
| – stal po żeliwie, bez smarowania, obrobione zgrubnie | $\mu = 0,16$ |
| – stal po żeliwie, ze smarowaniem, obróbka dokładna | $\mu = 0,10$ |
| – stal po żeliwie, powierzchnie szlifowane, dokładnie smarowane | $\mu = 0,02$ |
| – drewno po drewnie | $\mu = 0,4 - 0,7$ |

Przykład 1.5

Ciało o ciężarze Q ustawiono na równi pochyłej tworzącej kąt α z poziomem. Wyznaczyć maksymalną wartość kąta α pochylenia równi w granicznym położeniu równowagi. Współczynnik tarcia statycznego wynosi μ .

Rozwiązanie

Spoczywające na równi ciało uwalniamy od więzów. Przykładamy siłę ciężkości Q , siłę normalną N oraz siłę tarcia T , która jest przeciwna do ewentualnego kierunku ruchu ciała, a więc skierowana w górę równi.



Rys. 1.19

Warunki równowagi, jako rzuty sił na osie przyjętego układu współrzędnych Oxy, gdzie oś Ox pokrywa się z linią spadku równi, a oś Oy jest prostopadła do równi, mają postać:

$$\sum P_{ix} = Q \sin \alpha - T = 0$$

$$\sum P_{iy} = N - Q \cos \alpha = 0$$

Z prawa tarcia mamy: $T = \mu N$.

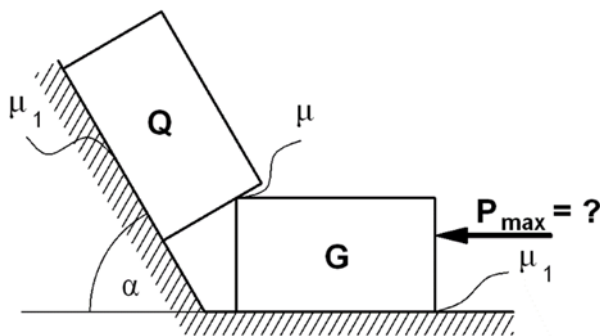
Rozwiązując otrzymany układ równań i uwzględniając warunek wynikający z prawa tarcia, otrzymujemy graniczną wartość kąta α w położeniu równowagi:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu = \operatorname{tg} \rho$$

Na podstawie otrzymanego wyniku można stwierdzić, że w położeniu równowagi kąt pochylenia równi α nie powinien przekraczać kąta tarcia ρ .

Przykład 1.6

Na płaszczyznach przecinających się pod kątem α ustawiono dwa bloki o ciężarach Q i G. Współczynnik tarcia między blokami wynosi μ , natomiast między blokami a podłożem wynosi μ_1 . Wyznaczyć maksymalną siłę P, jaką można przyłożyć do bloku o ciężarze G w granicznym położeniu równowagi układu.



Rys. 1.20

Rozwiązanie

Rozważany układ uwalniamy od więzów. Usuwamy myślowo podłoże i zastępujemy je reakcją normalną (siły N_1 i N_2). W punkcie styku bloków przykładamy również reakcję normalną jako prostopadłą do stycznej poprowadzonej w miejscu styku (siła N_3). Następnie przykładamy siły tarcia w miejscach styku przemieszczających się względem siebie powierzchni. Ponieważ rozpatrujemy przypadek równowagi układu przy sile P_{\max} , zamierzony ruch układu będzie odbywał się w górę. Mamy więc (rys. 1.21):

Równania równowagi rozpatrywanych układów, wynikające z rzutów działających sił na przyjęte układy osi współrzędnych, mają postać:

– układ a)

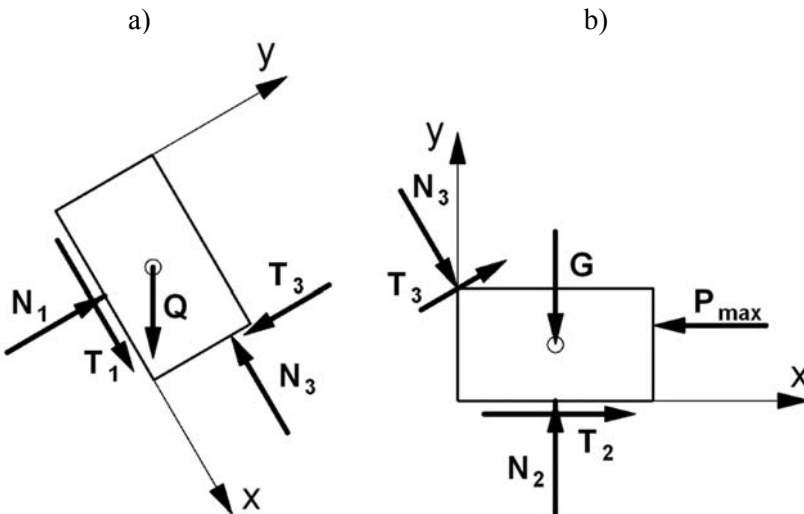
$$\sum P_{ix} = Q \sin \alpha + T_1 - N_3 = 0$$

$$\sum P_{iy} = -Q \cos \alpha - T_3 + N_1 = 0$$

– układ b)

$$\sum P_{ix} = T_2 - P_{\max} + N_3 \cos \alpha + T_3 \sin \alpha = 0$$

$$\sum P_{iy} = N_2 - G - N_3 \sin \alpha + T_3 \cos \alpha = 0$$



Rys. 1.21

Z prawa tarcia w granicznym położeniu równowagi mamy:

$$T_1 = \mu_1 N_1 \qquad T_2 = \mu_1 N_2 \qquad T_3 = \mu N_3$$

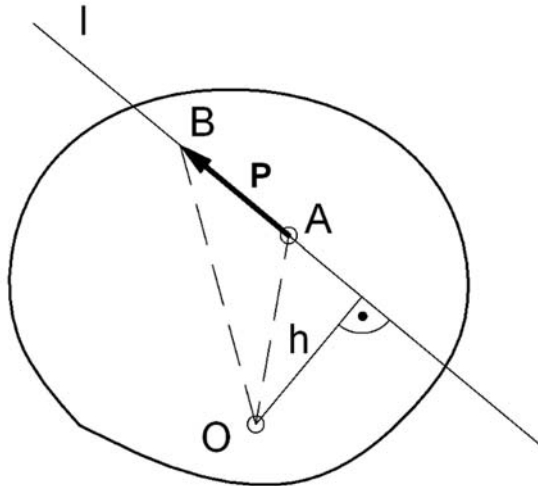
Rozwiązując powyższy układ równań względem poszukiwanej wielkości siły P_{\max} , otrzymano jej wartość.

$$P_{\max} = G\mu_1 + Q \cdot (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) \cdot \left(\frac{\mu + \mu_1}{1 - \mu\mu_1} \sin \alpha + \cos \alpha \right)$$

1.4. PŁASKI DOWOLNY UKŁAD SIŁ

1.4.1. Moment siły względem punktu

Niech na ciało materialne działa siła \mathbf{P} przyłożona do pewnego punktu tego ciała. Obierzmy dowolny punkt O , którego odległość h od linii działania tej siły l nazwiemy ramieniem siły \mathbf{P} .



Rys. 1.22

Moment siły względem punktu jest to wektor, którego wartość równa jest iloczynowi wartości liczbowej siły \mathbf{P} i jej ramienia wyznaczonego względem punktu O . Wektor ten, oznaczony \mathbf{M}_0 , przyłożony jest w punkcie O , prostopadłe do płaszczyzny przesuniętej przez linię działania siły i ten punkt i skierowany tak, że patrząc z jego końca siła \mathbf{P} stara się obrócić względem punktu O zgodnie z ruchem trygonometrycznym.

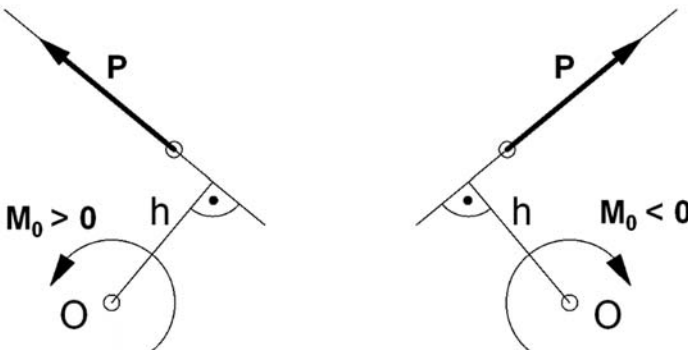
Wartość bezwzględna momentu siły względem punktu wynosi:

$$M_0 = P \cdot h \quad (1.18)$$

Jeśli zbudujemy trójkąt, którego podstawą będzie wektor \mathbf{P} , a wierzchołkiem punkt O , wartość bezwzględną momentu siły względem punktu można również przedstawić jako dwa pola otrzymanego trójkąta:

$$M_0 = P \cdot h = 2 \cdot F_{OAB} \quad (1.19)$$

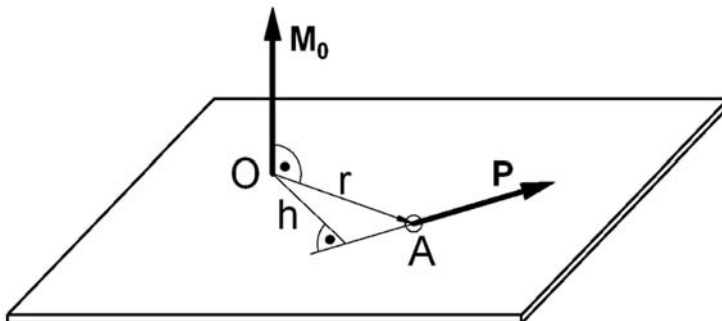
Moment siły względem punktu może mieć wartość dodatnią lub ujemną. Jeśli siła \mathbf{P} działa tak, że wywołuje obrót względem punktu O , zgodny z kierunkiem trygonometrycznym, moment jest dodatni, natomiast jeśli kierunek obrotu siły \mathbf{P} względem punktu O jest przeciwny, moment jest ujemny.



Rys. 1.23

Moment siły względem punktu w ujęciu wektorowym

Jeżeli położenie siły \mathbf{P} względem punktu O opiszemy promieniem wektorem \mathbf{r} , to moment tej siły względem punktu O można przedstawić jako iloczyn wektorowy promienia \mathbf{r} i wektora siły \mathbf{P} .



Rys. 1.24

Zgodnie z kierunkami wektorów przedstawionych na rysunku mamy:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (1.20)$$

Z własności iloczynu wektorowego dwu wektorów wynikają wszystkie parametry momentu \mathbf{M}_0 . Jego wartość, kierunek oraz zwrot. Wartość liczbowa tego iloczynu wynosi:

$$M_0 = Ph$$

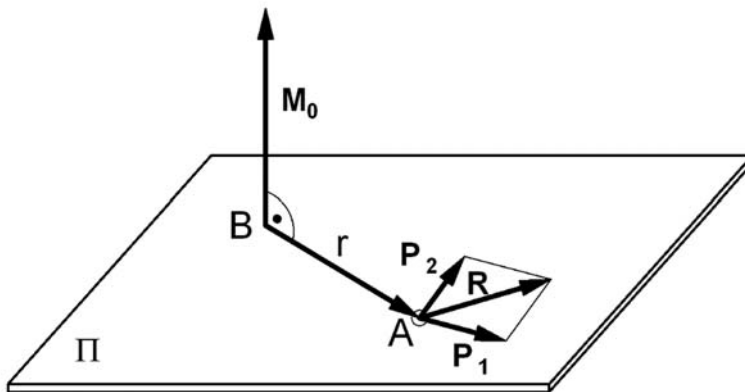
Na rysunku poniżej przedstawiono dwie siły \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 przyłożone do jednego punktu A oraz ich wypadkową \mathbf{R} przyłożoną również w tym punkcie. Mamy więc:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \quad (a)$$

Oznaczmy moment wypadkowej \mathbf{R} względem dowolnego punktu B przez \mathbf{M}_B , a sił składowych odpowiednio \mathbf{M}_{1B} i \mathbf{M}_{2B} .

Możemy zapisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B &= \mathbf{r} \times \mathbf{R} \\ \mathbf{M}_{1B} &= \mathbf{r} \times \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{M}_{2B} &= \mathbf{r} \times \mathbf{P}_2 \end{aligned} \quad (b)$$



Rys. 1.25

Wstawiając (a) do pierwszego równania (b), mamy:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r} \times (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) \quad (c)$$

po prostych przekształceniach oraz wykorzystaniu zależności (b) otrzymano:

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{P}_2 = \mathbf{M}_{1B} + \mathbf{M}_{2B} \quad (\text{d})$$

W ogólnym przypadku siły składowe \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 oraz punkt B nie leżą w jednej płaszczyźnie. Jeżeli jednak rozpatrujemy układ płaski, wektory momentów wszystkich sił są prostopadłe do płaszczyzny ich działania, czyli można je odłożyć na jednej prostej. Zależności (d) można nadać algebraiczną postać:

$$M_B = M_{1B} + M_{2B} \quad (1.21)$$

Z wyprowadzonego równania (1.21) wynika twierdzenie Varignona:

Moment siły wypadkowej dwu sił przyłożonych do jednego punktu A względem dowolnego punktu B równy jest sumie momentów sił składowych względem tegoż punktu B.

Udowodnione twierdzenie można uogólnić dla dowolnego układu sił zbieżnych.

Jednostką momentu siły w układzie SI jest 1 niutonometr (1 Nm).

$$1 \text{ Nm} = 1 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} 1 \text{ m} = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

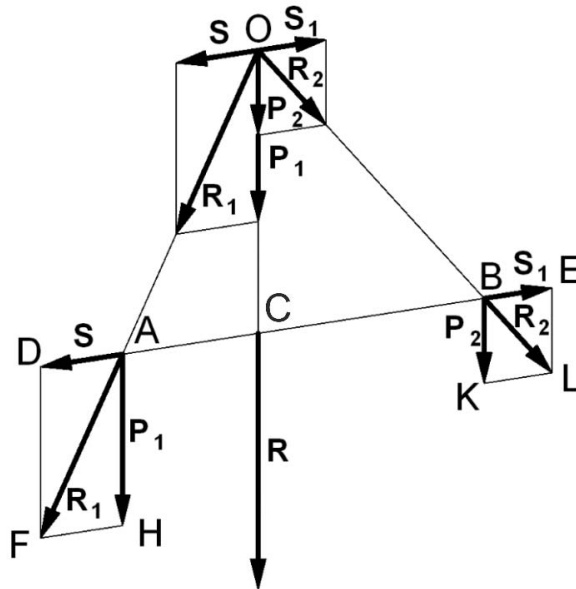
W układzie technicznym jednostką momentu siły jest 1 kilogramometr (1 kGm).

$$1 \text{ kGm} = 9.81 \text{ Nm}$$

1.4.2. Wypadkowa dwóch sił równoległych

Siły zgodnie skierowane

Dwie siły nierównoległe, których linie działania leżą w tej samej płaszczyźnie, można dodać, zastępując ich działanie wypadkową, jako przekątną równoległoboku zbudowanego na tych siłach. W przypadku sił równoległych, kiedy ich linie działania są równoległe, zbudowanie równoległoboku jest niemożliwe. Dodanie więc dwóch sił równoległych wymaga wykonania następującego rozwiązania.



Rys. 1.26

W punktach A i B ciała sztywnego działają dwie siły równoległe \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 zgodnie skierowane. Do punktów tych przyłożono układ zerowy sił \mathbf{S} i \mathbf{S}_1 działających wzdłuż prostej AB.

Mamy:

$$\mathbf{S} = -\mathbf{S}_1 \quad (\text{a})$$

Siły \mathbf{P}_1 i \mathbf{S} przyłożone do punktu A oraz siły \mathbf{P}_2 i \mathbf{S}_1 przyłożone do punktu B możemy zastąpić wypadkowymi:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{S} \quad \mathbf{R}_2 = \mathbf{P}_2 + \mathbf{S}_1 \quad (\text{b})$$

Linie działania sił \mathbf{R}_1 i \mathbf{R}_2 przecinają się w punkcie O. Po przesunięciu ich do punktu O można zbudować równoległobok i wyznaczyć ich wypadkową:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 \quad (\text{c})$$

wstawiając (a) i (b) do powyższego równania mamy:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{S} + \mathbf{P}_2 + \mathbf{S}_1 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \quad (\text{d})$$

Tak więc siły \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 przyłożone do punktów A i B zastąpiono jedną siłą wypadkową \mathbf{R} równoległą do tych sił. Wartość liczbową tej wypadkowej równa jest sumie wartości liczbowych sił \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 :

$$R = P_1 + P_2 \quad (1.22)$$

Linia działania wypadkowej \mathbf{R} przecina odcinek AB w punkcie C, którego położenie wyznaczymy z zależności geometrycznych. Z podobieństwa trójkątów AOC i FAH mamy:

$$\frac{AC}{CO} = \frac{S}{P_1}$$

Trójkąty BOC i LBK są również podobne i także można napisać:

$$\frac{BC}{CO} = \frac{S_1}{P_2} = \frac{S}{P_2}$$

Dzieląc stronami otrzymane proporcje, otrzymujemy:

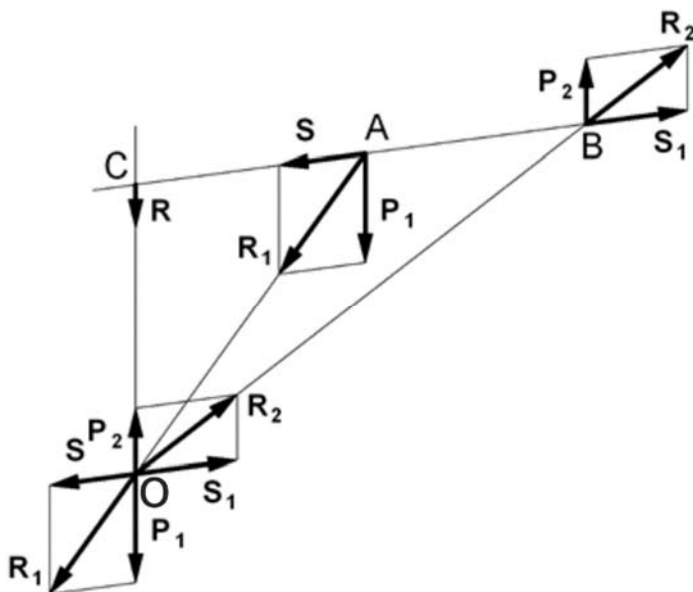
$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1}$$

Otrzymane wyniki można podsumować następująco:

Dwie siły równoległe zgodnie skierowane \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 , przyłożone w punktach A i B ciała sztywnego, zastąpić możemy jedną siłą wypadkową \mathbf{R} , równoległą i zgodnie z nimi skierowaną, o wartości równej sumie wartości liczbowych tych sił. Linia działania siły wypadkowej dzieli wewnętrznie odcinek AB na odcinki odwrotnie proporcjonalne do wartości liczbowych tych sił.

Siły przeciwnie skierowane

Niech na ciało sztywne działają dwie siły równoległe \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 przeciwnie skierowane, przyłożone w punktach A i B tego ciała. Załóżmy, że siła \mathbf{P}_1 ma wartość liczbową większą od siły \mathbf{P}_2 .



Rys. 1.27

Postępując jak poprzednio, przykładamy w punktach A i B dwie siły S i S_1 , równe co do wartości i przeciwnie skierowane wzdłuż tej samej prostej. Zastępujemy siły P_1 i S wypadkową R_1 oraz siły P_2 i S_1 wypadkową R_2 . Przesuwamy następnie siły R_1 i R_2 wzdłuż ich linii działania do punktu przecięcia się tych linii i zastępujemy wypadkową:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \quad (\text{a})$$

Siła wypadkowa równa jest sumie geometrycznej sił P_1 i P_2 . Ponieważ siły te leżą na jednej prostej, wartość liczbowa siły wypadkowej jest różnicą wartości liczbowych tych sił:

$$R = P_1 - P_2 \quad (1.23)$$

Wypadkowa R skierowana jest zgodnie z siłą o większej wartości, czyli w rozpatrywanym przypadku zgodnie z siłą P_1 . Punkt C, w którym linia działania wypadkowej R przecina prostą poprowadzoną przez punkty A i B, wyznaczamy opierając się na podobieństwie trójkątów AOC oraz BOC do odpowiednich trójkątów sił. Na podstawie rysunku mamy:

$$\frac{AC}{CO} = \frac{S}{P_1} \qquad \frac{BC}{CO} = \frac{S_1}{P_2}$$

Ponieważ $S = S_1$, ostatecznie mamy:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{P_2}{P_1}$$

Dwie siły równoległe i przeciwnie skierowane P_1 i P_2 , przyłożone w punktach A i B ciała sztywnego, zastąpić możemy jedną wypadkową R , również równoległą, skierowaną zgodnie z siłą o większej wartości liczbowej. Linia działania wypadkowej leży po stronie siły większej i dzieli zewnętrznie odcinek AB na odcinki odwrotnie proporcjonalne do wartości liczbowych przyłożonych sił. Wartość wypadkowej R równa jest różnicy wartości liczbowych działających sił.

1.4.3. Para sił. Równowaga par sił działających w płaszczyźnie

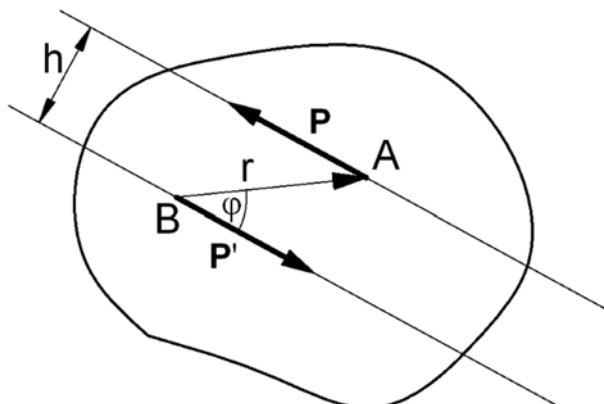
W poprzednim punkcie przedstawiono znajdowanie siły wypadkowej dwóch sił równoległych przeciwnie skierowanych. Jak wynika otrzymanych rozwiązań, taka wypadkowa istnieje, jeżeli siły P_1 i P_2 , mają różne wartości liczbowe. Jeśli P_2 dąży do P_1 , wartość liczbowa wypadkowej R dąży do zera, natomiast punkt C, przez który przechodzi jej linia działania, nieskończenie się oddala. Tak więc dwie siły równoległe, przeciwnie skierowane o równych wartościach liczbowych, nie mają siły wypadkowej i tworzą układ, który nazywamy **parą sił**.

Mamy więc z założenia $P' = P$, czyli $P' = -P$. Odległość między liniami działania sił tworzących parę nosi nazwę ramienia pary sił. Na rysunku odległość h .

Jak już podano, para sił nie ma siły wypadkowej. Parę sił charakteryzuje moment pary sił, który określa jej obrotowe działanie na ciało materialne.

Momentem pary sił nazywamy wektor M , o wartości bezwzględnej równej iloczynowi wartości liczbowej jednej z sił oraz ramienia pary. Wektor M jest prostopadły do płaszczyzny działania tej pary i skierowany tak, że patrząc z jego końca para sił stara się wywołać obrót zgodny z ruchem trygonometrycznym, czyli:

$$M = r \times P \qquad (1.24)$$



Rys. 1.28

Wartość wektora momentu pary sił wynosi:

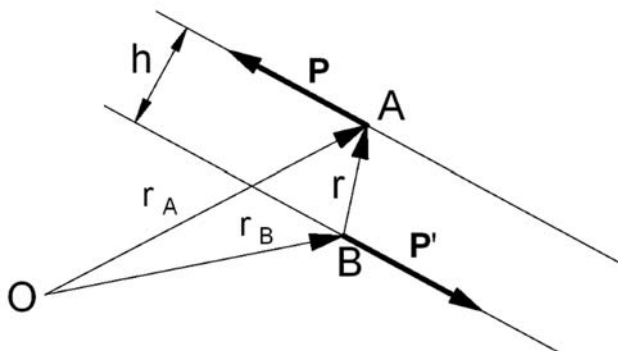
$$M = P \cdot r \cdot \sin \varphi = P \cdot h \quad (1.25)$$

Ponieważ wektor momentu pary sił jest zawsze prostopadły do płaszczyzny działania tej pary, do określenia momentu \mathbf{M} wystarczy podać tylko jego wartość względem osi prostopadłej do płaszczyzny pary:

$$M = \pm P \cdot h \quad (1.26)$$

Znak plus należy przyjąć, jeśli para stara się obrócić zgodnie z kierunkiem trygonometrycznym, minus – jeśli para stara się obrócić w kierunku przeciwnym do trygonometrycznego.

Wyznamy sumę momentów sił \mathbf{P} i \mathbf{P}' tworzących parę względem dowolnie obranego punktu O leżącego w płaszczyźnie działania tej pary.



Rys. 1.29

Moment przedstawionej na rysunku pary wynosi $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$, natomiast suma momentów sił wchodzących w skład pary względem punktu O ma wartość:

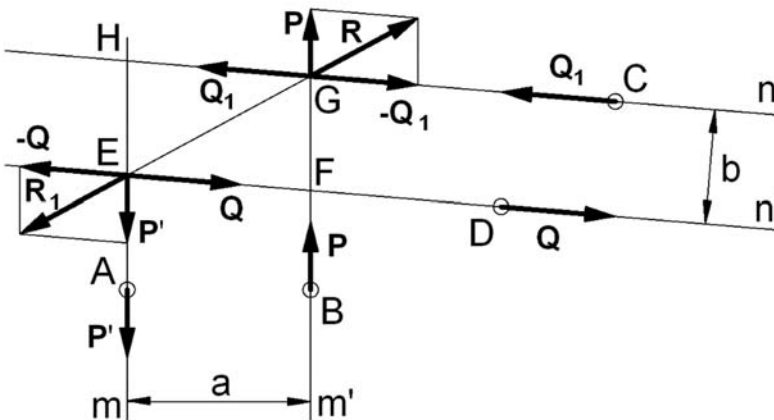
$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r}_A \times \mathbf{P} + \mathbf{r}_B \times \mathbf{P}' \quad (1.27)$$

Ponieważ $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}$ oraz $\mathbf{P}' = -\mathbf{P}$, ostatecznie mamy:

$$\mathbf{M}_0 = (\mathbf{r}_B + \mathbf{r}) \times \mathbf{P} - \mathbf{r}_B \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (1.28)$$

Wykazaliśmy, że suma momentów sił tworzących parę, względem dowolnego punktu O płaszczyzny działania tej pary, równa jest momentowi tej pary. Tak więc wektor momentu pary sił jest wektorem swobodnym, przyłożonym w dowolnym punkcie płaszczyzny działania tej pary.

Na rysunku poniżej przedstawiono parę sił \mathbf{P} i \mathbf{P}' , o momencie równym $M = Pa$ i liniach działania sił odpowiednio m i m' . Poprowadźmy dwie inne proste równoległe n i n' , ale tak, aby ich kierunki nie były równoległe do linii działania sił \mathbf{P} i \mathbf{P}' .



Rys. 1.30

Siłę \mathbf{P} przesuniemy do punktu G, a siłę \mathbf{P}' przesuniemy do punktu E. W punktach G i E przyłożymy układy zerowe sił działające wzdłuż poprowadzonych prostych n i n' . A więc w punkcie E przyłożymy siły \mathbf{Q} i $-\mathbf{Q}$, natomiast w punkcie G siły \mathbf{Q}_1 i $-\mathbf{Q}_1$. Przy czym zakładamy, że $\mathbf{Q}_1 = -\mathbf{Q}$, co oznacza, że przyłożone siły mają równe wartości liczbowe Q . Wartość tej siły jest taka, że spełnia ona równanie:

$$Qb = Pa \quad (a)$$

Przyłożone w punkcie G siły \mathbf{P} i $-\mathbf{Q}_1$ zastąpiono wypadkową $\mathbf{R} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}_1$, a siły \mathbf{P}' i $-\mathbf{Q}$ działające w punkcie E wypadkową $\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}' - \mathbf{Q}$. Ponieważ założono, że $\mathbf{Q}_1 = -\mathbf{Q}$ oraz $\mathbf{P}' = -\mathbf{P}$, otrzymane wypadkowe spełniają zależność $\mathbf{R}_1 = -\mathbf{R}$ i leżą na przekątnej EG równoległoboku EHGF. Jak wynika z rysunku:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{a}{b} \quad \text{i z założenia} \quad \frac{a}{b} = \frac{Q}{P} \quad (\text{b})$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{Q}{P} \quad (\text{c})$$

Z otrzymanej proporcji wynika, że równoległoboki utworzone z sił \mathbf{P} i $-\mathbf{Q}_1$ oraz \mathbf{P}' i $-\mathbf{Q}$ są podobne do równoległoboku EHGF. Wypadkowe \mathbf{R} i \mathbf{R}_1 leżą więc na przekątnej EG tego równoległoboku. Ponieważ siły \mathbf{R} i \mathbf{R}_1 mają równe wartości i tworzą układ zerowy, pozostają ostatecznie tylko dwie siły \mathbf{Q} i \mathbf{Q}_1 przyłożone w punktach odpowiednio E i G. Siły te tworzą parę, sił której moment wynosi:

$$M_1 = Qb \quad (\text{d})$$

Uwzględniając poczynione na początku założenie, mamy:

$$M_1 = Qb = Pa = M \quad (\text{e})$$

Tak więc otrzymaliśmy w konsekwencji parę sił, której moment równy jest momentowi pary sił \mathbf{P} i \mathbf{P}' . Wynika z tego, że **każdą parę sił działającą na ciało sztywne można zastąpić dowolną parą o tym samym momencie i tej samej płaszczyźnie działania.**

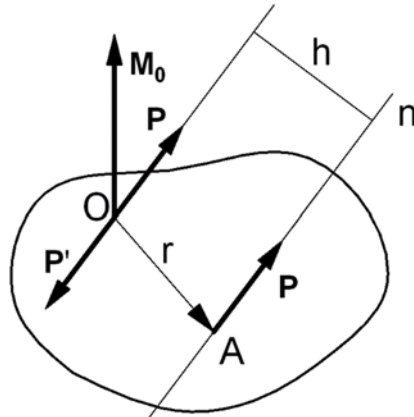
Udowodnione twierdzenie można wykorzystać do sumowania par sił działających w tej samej płaszczyźnie. Mianowicie, gdy w jednej płaszczyźnie ciała sztywnego działa n par sił, to pary te można zastąpić jedną parą wypadkową, której moment równy jest sumie momentów par składowych. Wartość pary wypadkowej wynosi:

$$M = \sum_{i=1}^n M_i \quad (1.29)$$

1.4.4. Redukcja płaskiego dowolnego układu sił

Aby wyjaśnić redukcję układu sił działających w płaszczyźnie, rozpatrzmy równoległe przesunięcie tylko jednej siły.

Niech w punkcie A ciała sztywnego działa siła \mathbf{P} . Chcąc przesunąć ją do dowolnego punktu O tego ciała, w punkcie tym przykładamy układ zerowy sił \mathbf{P} i $\mathbf{P}' = -\mathbf{P}$. Zgodnie z własnością układu zerowego, **równowaga istniejącego układu sił nie zmienia się, jeśli do układu tego dodamy lub odejmiemy układ zerowy.**



Rys. 1.31

Siła \mathbf{P}' przyłożona w punkcie O , z siłą \mathbf{P} przyłożoną do punktu A , tworzą parę sił o momencie $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}$. Ponieważ h jest odległością punktu redukcji O od prostej n działania siły \mathbf{P} i jednocześnie ramieniem siły \mathbf{P} przyłożonej w punkcie A względem punktu O , moment otrzymanej pary sił i moment siły względem obranego punktu O są sobie równe. Mamy:

$$M = M_0 = P \cdot h$$

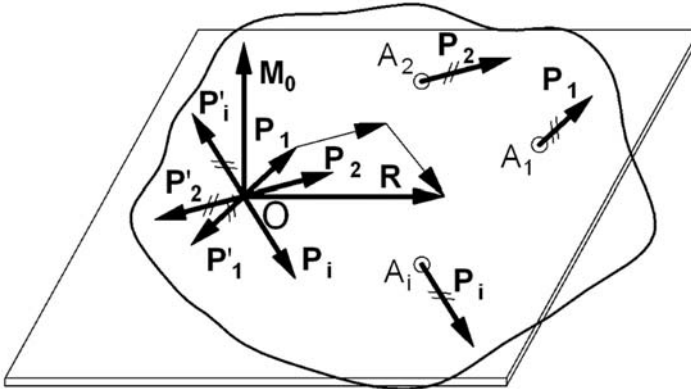
gdzie M_0 jest wartością momentu siły \mathbf{P} względem punktu O .

Udowodniliśmy następujące twierdzenie:

Siłę \mathbf{P} przyłożoną do punktu A ciała sztywnego możemy przenieść do dowolnego punktu O tego ciała, dodając jednocześnie moment pary sił równy momentowi danej siły względem punktu O .

Dla uogólnienia rozważań rozpatrzmy płaski układ sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, przyłożonych odpowiednio w punktach A_1, A_2, \dots, A_n ciała sztywnego, jak pokazano na rysunku. W płaszczyźnie działania sił obierzmy punkt O , który nazwiemy środkiem redukcji. W punkcie tym przyłożmy układy zerowe sił \mathbf{P}_1 i $\mathbf{P}_1' = -\mathbf{P}_1$, \mathbf{P}_2

i $\mathbf{P}_2' = -\mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ i $\mathbf{P}_n' = -\mathbf{P}_n$. Otrzymaliśmy w wyniku układ płaski sił zbieżnych $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ o środku zbieżności w punkcie O oraz pary sił, których momenty, zgodnie z udowodnionym powyżej twierdzeniem, równe są momentom odpowiednich sił względem środka redukcji O .



Rys. 1.32

Wszystkie siły $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, tworzące płaski zbieżny układ przyłożony w punkcie O , możemy zastąpić wypadkową \mathbf{R} równą sumie geometrycznej tych sił:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (1.30)$$

Także otrzymane pary sił możemy zastąpić jedną parą wypadkową, której moment będzie równy sumie momentów tych par. Oznaczając przez M_0 moment wypadkowy, mamy:

$$M_0 = \sum_{i=1}^{i=n} M_{i0} \quad (1.31)$$

Otrzymane wyniki możemy podsumować następującym stwierdzeniem:

Dowolny płaski układ sił przyłożony do ciała sztywnego zredukować możemy do dowolnego punktu O , przykładając w tym punkcie siłę \mathbf{R} , jako sumę geometryczną działających sił, oraz parę o momencie M_0 równym sumie algebraicznej momentów danych sił względem punktu O .

Siłę \mathbf{R} nazywać będziemy wektorem głównym, natomiast moment M_0 momentem głównym.

1.4.5. Warunki równowagi płaskiego dowolnego układu sił

W wyniku redukcji płaskiego dowolnego układu sił P_1, P_2, \dots, P_n przyłożonego do punktów ciała sztywnego, otrzymaliśmy układ złożony z siły

$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i$ przyłożonej do obranego środka redukcji O oraz moment pary sił

o momencie $M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i0}$. Oczywiście jest, że równowaga rozważanego układu

będzie spełniona, jeśli zarówno siła \mathbf{R} , jak i moment M_0 będą równe zero. Stąd wynikają dwa geometryczne warunki równowagi:

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0 \quad M_0 = \sum_{i=1}^n M_{i0} = 0 \quad (1.32)$$

Jeśli wektor główny \mathbf{R} ma być równy zero, to również jego rzuty na dowolne osie muszą być równe zero. Wynika z tego, że sumy rzutów wszystkich sił na osie x i y dowolnego prostokątnego układu współrzędnych muszą być równe zero. Z powyższego otrzymujemy trzy analityczne warunki równowagi (równania równowagi):

$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{i0} = 0 \quad (1.33)$$

Warunkiem równowagi płaskiego dowolnego układu sił jest, aby suma rzutów wszystkich sił na dwie osie dowolne, oby nierównoległe była równa zero oraz suma momentów wszystkich sił względem dowolnego punktu była także równa zero.

Zazwyczaj osie, na które wyznaczamy rzuty sił, są osiami prostokątnego układu współrzędnych. Punkt O , względem którego przyrównujemy do zera sumę momentów danych sił, nie musi pokrywać się z początkiem przyjętego układu osi. Wśród wyprowadzonych równań równowagi mamy dwa równania rzutów i jedno równanie momentów. Spełnienie geometrycznych warunków równowagi można zapewnić również, kiedy napiszemy trzy równania momentów lub dwa równania rzutów i jedno momentów. Równoważne warunki równowagi wynikające z trzech równań momentów mają postać:

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad \sum_{i=1}^n M_{iC} = 0 \quad (a)$$

z zastrzeżeniem że punkty A, B i C nie mogą leżeć na jednej prostej.

Równoważne warunki równowagi wynikające z jednego równania rzutów i dwóch równań momentów mają postać:

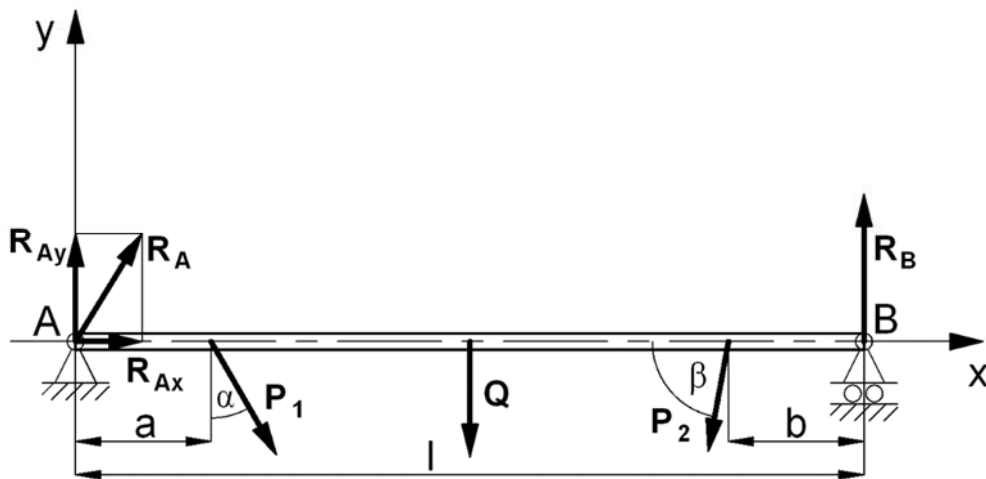
$$\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 \qquad \sum_{i=1}^n M_{iA} = 0 \qquad \sum_{i=1}^n M_{iB} = 0 \quad (b)$$

z zastrzeżeniem że oś x nie jest prostopadła do odcinka AB .

Przykład 1.7

Ciężką belkę o ciężarze Q i długości l podparto na przegubach – stałym w końcu A belki i przesuwym w końcu B . Dodatkowo belkę obciążono siłą P_1 przyłożoną w odległości a od przegubu stałego, której kierunek tworzy kąt α z pionem, oraz siłą P_2 w odległości b od przegubu B , tworzącą kąt β z poziomem. Wyznaczyć reakcje podpór.

Rozwiązanie



Rys. 1.33

Na belkę działają następujące siły: siła ciężkości Q przyłożona w środku ciężkości belki, dane siły P_1 i P_2 oraz reakcje R_{Ax} i R_{Ay} w przegubie stałym A i reakcja R_B w przegubie przesuwnym B .

Po uwolnieniu od więzów otrzymaliśmy do rozwiązania płaski dowolny układ sił, z trzema niewiadomymi związanymi z reakcjami w przegubach. Przyjmując układ osi współrzędnych, napiszemy trzy równania równowagi wynikające z rzutów i momentów działających sił.

$$\sum P_{ix} = R_{Ax} + P_1 \sin \alpha - P_2 \cos \beta = 0$$

$$\sum P_{iy} = R_{Ay} - P_1 \cos \alpha - Q - P_2 \sin \beta + R_B = 0$$

$$\sum M_{iA} = -P_1 \cos \alpha \cdot a - Q \frac{l}{2} - P_2 \sin \beta \cdot (l - a) + R_B l = 0$$

Rozwiązując otrzymany układ równań względem niewiadomych R_{Ax} , R_{Ay} i R_B , wyznaczono reakcje podpór:

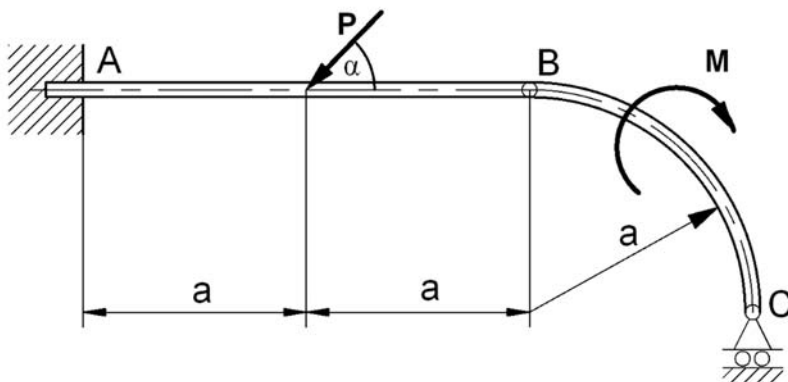
$$R_{Ax} = P_2 \cos \beta - P_1 \sin \alpha$$

$$R_{Ay} = \frac{1}{2}Q + P_1 \left(1 - \frac{a}{l}\right) \cos \alpha + P_2 \frac{b}{l} \sin \beta$$

$$R_B = P_1 \frac{a}{l} \cos \alpha + \frac{1}{2}Q + P_2 \left(1 - \frac{b}{l}\right) \sin \beta$$

Przykład 1.8

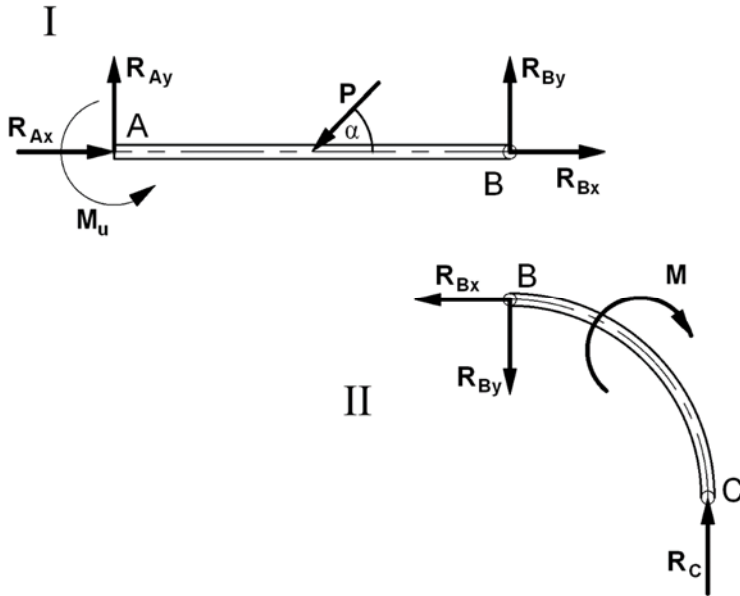
Lekką belkę o długości $2a$ utwierdzono w punkcie A, a drugi jej koniec B zamocowano przegubowo z lekkim łukiem o promieniu a . Łuk ten podparto przegubem przesuwным C i obciążono parą sił o momencie M , jak pokazano na rysunku. Wyznaczyć całkowitą reakcję w miejscu utwierdzenia belki oraz reakcję w przegubie przesuwным C, jeśli belkę obciążymy stałą siłą P działającą pod kątem α do poziomu.



Rys. 1.34

Rozwiązanie

Rozpatrywany układ jest płaskim dowolnym układem sił, złożonym z dwu układów prostych. Wyodrębnione układy należy uwolnić od więzów. Więzy utwierdzenia zastępujemy reakcją R_A , przykładając składowe R_{Ax} i R_{Ay} oraz momentem utwierdzenia, przykładając moment pary sił M_u .



Rys. 1.35

Warunki równowagi dla rozpatrywanych układów mają postać:

– układ I

$$\sum P_{ix} = R_{Ax} - P \cos \alpha + R_{Bx} = 0$$

$$\sum P_{iy} = R_{Ay} - P \sin \alpha + R_{By} = 0$$

$$\sum M_{iA} = M_u - P \sin \alpha \cdot a + R_{By} \cdot 2a = 0$$

– układ II

$$\sum P_{ix} = -R_{Bx} = 0$$

$$\sum P_{iy} = R_C - R_{By} = 0$$

$$\sum M_{iB} = R_C \cdot a - M = 0$$

Rozwiązując powyższy układ równań, otrzymujemy poszukiwane reakcje w miejscu utwierdzenia A oraz w przegubie C. Mamy więc:

$$R_{Ax} = P \cos \alpha$$

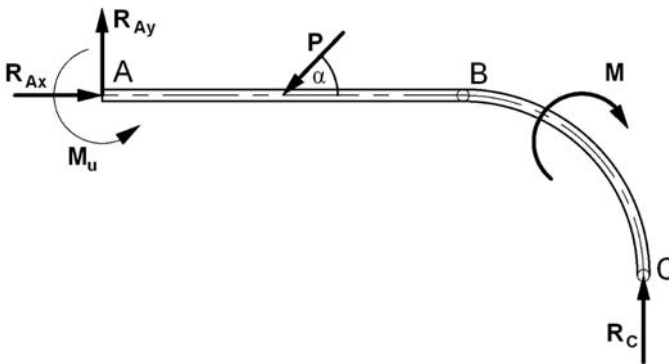
$$R_{Ay} = P \sin \alpha - \frac{M}{a}$$

$$M_u = Pa \sin \alpha - 2M$$

$$R_C = \frac{M}{a}$$

Rozwiązując płaski dowolny, złożony układ sił, można napisać tyle warunków równowagi, ile jest układów prostych razy trzy. Jednak nie zawsze do wyznaczenia poszukiwanych reakcji potrzebne są wszystkie warunki równowagi. Można więc nabierając wprawy pisać tylko takie warunki, z których wyznaczymy interesujące nas wielkości. I tak dla rozpatrywanego układu reakcje w przegubie B, które nas nie interesują, można potraktować jako siły wewnętrzne i równania równowagi napisać dla całego układu, dopisując brakujące równanie dla układu II jako równanie momentów względem właśnie punktu B.

Mamy więc:



Rys. 1.36

Dla całego układu:

$$\sum P_{ix} = R_{Ax} - P \cos \alpha = 0$$

$$\sum P_{iy} = R_{Ay} - P \sin \alpha + R_C = 0$$

$$\sum M_{iA} = M_u - P \sin \alpha \cdot a + R_C \cdot 3a - M = 0$$

Tylko dla układu II:

$$\sum M_{iB} = R_C \cdot a - M = 0$$

Rozwiązując otrzymany układ równań względem poszukiwanych reakcji, otrzymano identyczny wynik jak w poprzednim rozwiązaniu.

$$R_{Ax} = P \cos \alpha$$

$$R_{Ay} = P \sin \alpha - \frac{M}{a}$$

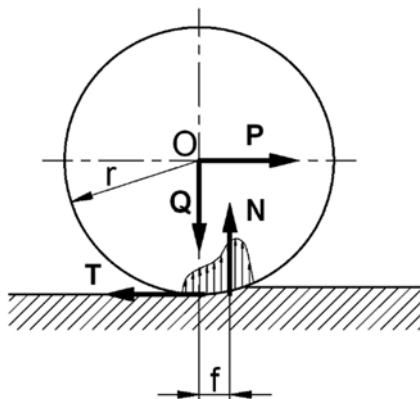
$$M_u = Pa \sin \alpha - 2M$$

$$R_C = \frac{M}{a}$$

1.5. OPÓR PRZY TOCZENIU

Doświadczenie wskazuje, że jeśli do krążka ustawionego na poziomej płaszczyźnie przyłożymy poziomą siłę \mathbf{P} , jak pokazano na rysunku poniżej, to dopóki siła ta będzie mniejsza od pewnej granicznej wartości, krążek pozostanie w spoczynku. Dopiero przekroczenie tej granicznej wartości siły spowoduje toczenie się krążka.

Zjawisko to pozwala wyjaśnić równanie momentów napisane względem punktu A styku krążka z podłożem. Względem tego punktu momenty siły ciężkości \mathbf{Q} oraz siły tarcia \mathbf{T} są równe zero, a moment siły \mathbf{P} wynosi $-Pr$. Aby równowaga wynikająca z równania momentów wszystkich sił względem punktu A była spełniona, reakcja normalna \mathbf{N} musi dawać moment, czyli działać na pewnym ramieniu.



Rys. 1.37

Przesunięcie reakcji normalnej N w kierunku toczenia krążka wynika z odkształceń, jakich doznaje krążek i podłoże. Styk krążka z podłożem nie jest punktowy i naciski normalne, których wypadkową jest siła N rozkładają się w sposób przedstawiony na rysunku. Oznaczając przez f przesunięcie siły normalnej względem teoretycznego punktu styku krążka z podłożem, równanie momentów względem punktu przecięcia siły stycznej z normalną ma postać: $Qf - Pr = 0$. Stąd otrzymujemy warunek, który musi być spełniony, aby rozpatrywany krążek nie zaczął się toczyć:

$$P \leq Q \frac{f}{r} \quad (1.34)$$

Współczynnik f nosi nazwę współczynnika oporu przy toczeniu i ma wymiar długości, gdyż jest ramieniem siły nacisku N .

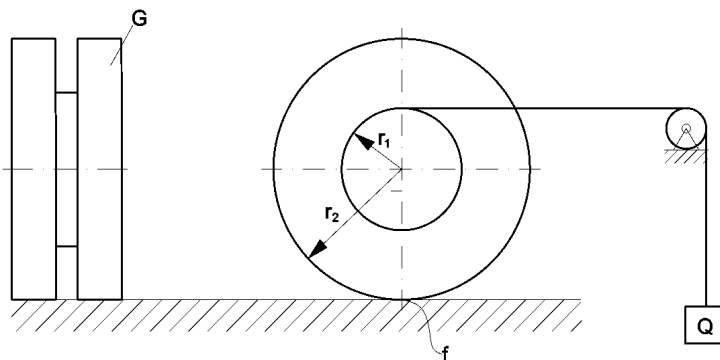
Ze wzoru (1.34) wynika, że jeśli $f/r < \mu$, krążek będzie się toczył nim nastąpi poślizg, jeśli $f/r > \mu$, nastąpi zjawisko odwrotne. Zazwyczaj f/r jest w analizowanej szpuli dużo mniejsze od współczynnika tarcia μ i mamy do czynienia z toczeniem.

Niektóre wartości współczynników oporu przy toczeniu, podane w cm, wynoszą:

- | | |
|---|-------------------|
| – krążek drewniany po podłożu z drewna | $f = 0,05-0,06$, |
| – krążek z miękkiej stali po podłożu z miękkiej stali | $f = 0,005$, |
| – krążek drewniany po podłożu ze stali | $f = 0,03-0,04$, |
| – kulka z hartowanej stali po podłożu ze stali | $f = 0,001$. |

Przykład 1.9

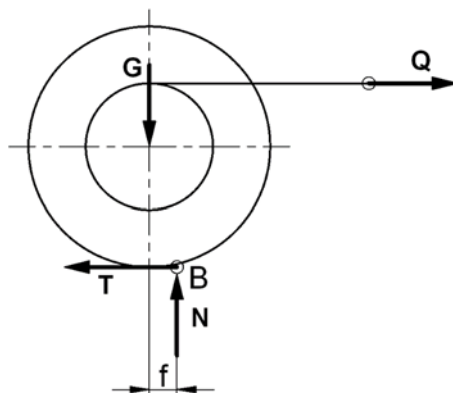
Szpulę o ciężarze G ustawiono na poziomym podłożu. Na szpulę nawinięto linę, a jej koniec przerzucono przez lekki krążek i obciążono ciężarem Q . Wyznaczyć wielkość tego ciężaru w granicznym położeniu równowagi, jeśli współczynnik oporu toczenia szpulki po podłożu wynosi f .



Rys. 1.38

Rozwiązanie

Analizowaną szpulę uwalniamy od więzów. Przykładamy siłę normalną przesuniętą w kierunku toczenia o wielkość oporu toczenia f oraz siłę tarcia T , której wartość zawarta jest w granicach $0 \leq T \leq \mu N$ i jest nieznaną reakcją podłoża, gdyż w czasie toczenia bez poślizgu siła tarcia nie musi być całkowicie rozwinięta. Po uwolnieniu od więzów otrzymano płaski dowolny układ sił.



Rys. 1.39

Do wyznaczenia wartości ciężaru Q w położeniu równowagi napisano tylko jedno równanie wynikające z sumy momentów względem punktu B:

$$\sum M_{iB} = G \cdot f - Q \cdot (r_1 + r_2) = 0$$

Ostatecznie mamy:

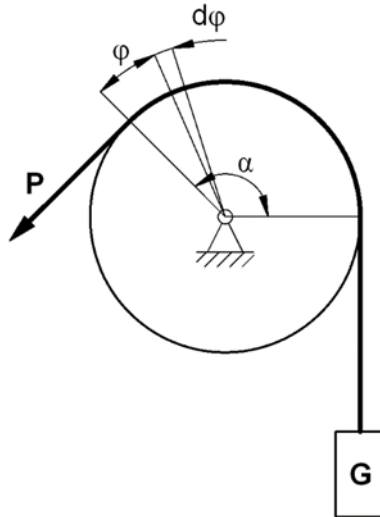
$$Q = G \frac{f}{r_1 + r_2}$$

Wartość ilorazu występującego w otrzymanym wyniku jest dużo mniejsza od współczynnika tarcia posuwistego μ . Tak więc do przemieszczenia dowolnego ciężaru po poziomej powierzchni korzystniejsze jest przetoczenie tego ciężaru na rolkach niż proste przesuwanie.

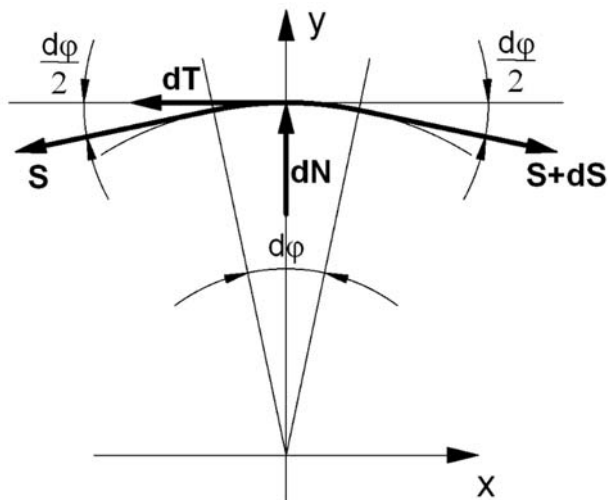
1.6. TARCIE CIĘGNA O STAŁY KRAŻEK

Niech stały, chropowaty krążek opasuje cięgno (może to być lina lub pas), na końcu którego zawieszono ciało o ciężarze G (rys. 1.40a).

a)



b)



Rys. 1.40

Jaką siłę \mathbf{P} należy przyłożyć do drugiego końca cięгна, aby układ pozostawał w równowadze.

Gdyby między krążkiem i cięgnem nie było tarcia, wiadomo że siła \mathbf{P} równa byłaby zawieszonemu ciężarowi \mathbf{G} . Występujące tarcie w układzie zmniejsza wartość siły \mathbf{P} , gdyż powstała siła tarcia pomaga utrzymać ciężar \mathbf{G} w położeniu równowagi. Różnica między siłami \mathbf{P} i \mathbf{G} przyłożonymi do końców cięгна

powoduje, że elementarne naciski dN oraz elementarne siły tarcia dT są zmienne na całej długości styku cięgna z krążkiem. Fakt ten powoduje, że nie możemy badać równowagi cięgna w całości, lecz rozważyć równowagę jego elementu i całkować wzdłuż długości styku cięgna z krążkiem.

Rozpatrzmy równowagę sił działających na element cięgna (rys. 1.40b). Równania rzutów sił na osie x i y mają postać:

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= -S \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} + (S + dS) \cdot \cos \frac{d\varphi}{2} - dT = 0 \\ \sum P_{iy} &= -S \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \cdot \sin \frac{d\varphi}{2} + dN = 0\end{aligned}\quad (a)$$

Ponieważ rozpatrujemy równowagę elementu cięgna ograniczonego kątem $d\varphi$, którego wartość dąży do zera, możemy przyjąć:

$$\cos \frac{d\varphi}{2} = 1 \qquad \sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}\quad (b)$$

Wstawiając powyższe wartości do układu równań (a), otrzymano:

$$\begin{aligned}dS - dT &= 0 \\ -S \cdot d\varphi - \frac{1}{2} dS \cdot d\varphi + dN &= 0\end{aligned}\quad (c)$$

Rozwiązanie układu równań (c) ograniczymy do małych pierwszego rzędu i pominiemy iloczyn $dS \cdot d\varphi$ jako małą wielkość wyższego rzędu. Po uwzględnieniu związku na siłę tarcia:

$$dT = \mu \cdot dN\quad (d)$$

otrzymano równanie o postaci:

$$dS = \mu \cdot S \cdot d\varphi\quad (e)$$

Rozdzielając zmienne i całkując stronami w granicach opasania krążka cięgmem, otrzymano:

$$\int_P^G \frac{dS}{S} = \int_0^\alpha \mu \cdot d\varphi\quad (f)$$

ostatecznie mamy:

$$\ln \frac{G}{P} = \mu \cdot \alpha\quad (g)$$

Związek między siłami G i P nosi nazwę wzoru Eulera (1707-1783) i przedstawiany jest w postaci:

$$\frac{G}{P} = e^{\mu\alpha} \quad (1.35)$$

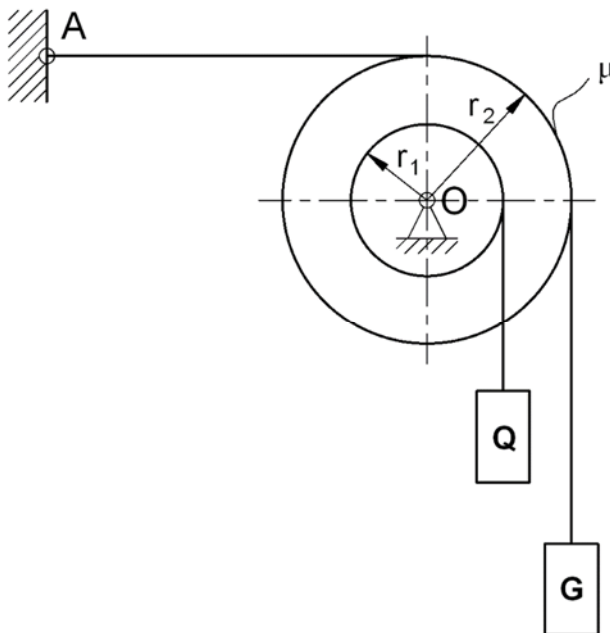
gdzie μ jest współczynnikiem tarcia cięgna o krążek, natomiast α jest kątem opasania krążka przez cięgno.

Przykład 1.10

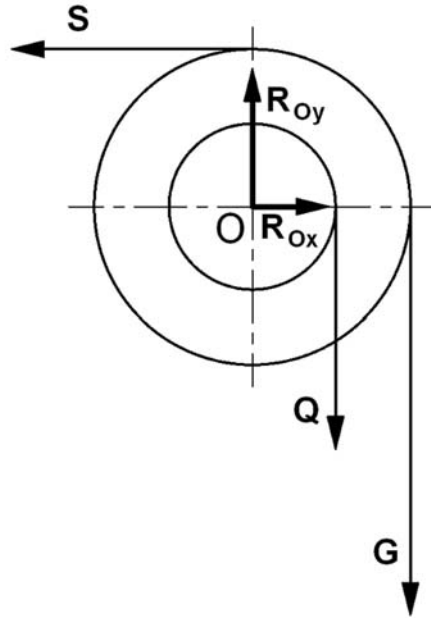
Na bęben linowy o promieniu r_1 nawinięto linę i obciążono ją ciężarem Q . Bęben hamulcowy o promieniu r_2 opasuje taśma hamująca, której jeden koniec zamocowano w punkcie A , a drugi obciążono ciężarem G . Wyznaczyć wartość ciężaru G w położeniu równowagi układu, jeśli współczynnik tarcia taśmy hamulcowej o bęben wynosi μ .

Rozwiązanie

Rozpatrywany układ przedstawiono na rys. 1.41. Zgodnie z zasadami statyki analizowany układ uwolniono od więzów. W miejscu ułożyskowania bębnow przyłożono dwie składowe reakcji, natomiast w części stałej taśmy hamulcowej przyłożono siłę w taśmie S .



Rys. 1.41



Rys. 1.42

Otrzymany układ działających sił (rys. 1.42) jest płaskim dowolnym układem, dla którego można napisać trzy równania równowagi. Ponieważ mamy wyznaczyć tylko wartość ciężaru \$G\$, pomijając wyznaczenie reakcji w miejscu łożyskowania bębnow, wykorzystamy warunek równowagi wynikający z równania momentów wszystkich sił względem punktu \$O\$.

Mamy więc:

$$\sum M_{i_o} = S \cdot r_2 - G \cdot r_2 - Q \cdot r_1 = 0$$

W otrzymanym równaniu niewiadomymi są siły \$G\$ i \$S\$. Ze wzoru Eulera na tarcie cięgien mamy:

$$\frac{S}{G} = e^{\frac{\mu \pi}{4}}$$

Ostatecznie po prostych przekształceniach wartość siły \$G\$ w położeniu równowagi wynosi:

$$G = Q \frac{r_1}{r_2 \left(e^{\frac{\mu \pi}{4}} - 1 \right)}$$

1.7. PRZESTRZENNY DOWOLNY UKŁAD SIŁ

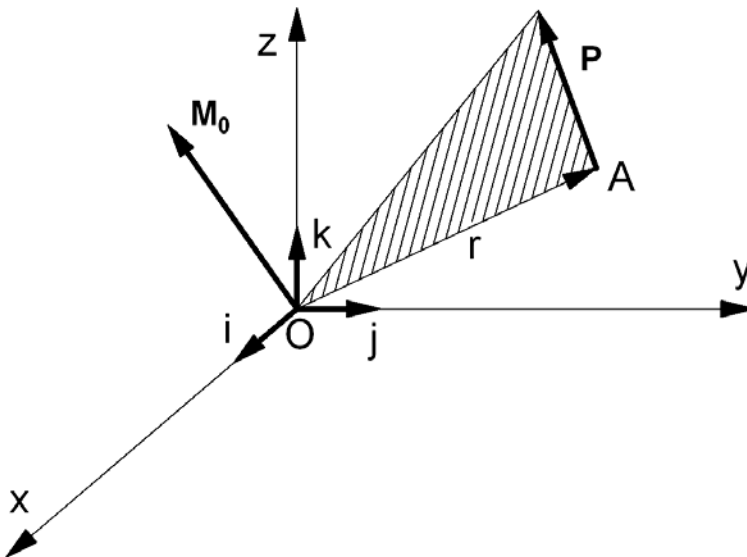
1.7.1. Moment siły względem punktu w przestrzeni

Niech działa siła \mathbf{P} , przyłożona w pewnym punkcie A. Obierzmy dowolny punkt O, względem którego chcemy wyznaczyć jej moment. Położenie siły \mathbf{P} względem obranego punktu O opiszymy promieniem wektorem \mathbf{r} , jak pokazano na rysunku 1.43.

Moment siły \mathbf{P} względem punktu O będzie to wektor, o wartości równej iloczynowi wektorowemu promienia wektora \mathbf{r} i siły \mathbf{P} . Mamy więc:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} \triangleright \quad (1.36)$$

gdzie \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} są wersorami osi x, y i z, natomiast r_x , r_y , r_z oraz P_x , P_y , P_z są składowymi, odpowiednio promienia wektora \mathbf{r} i siły \mathbf{P} w przyjętym układzie osi.



Rys. 1.43

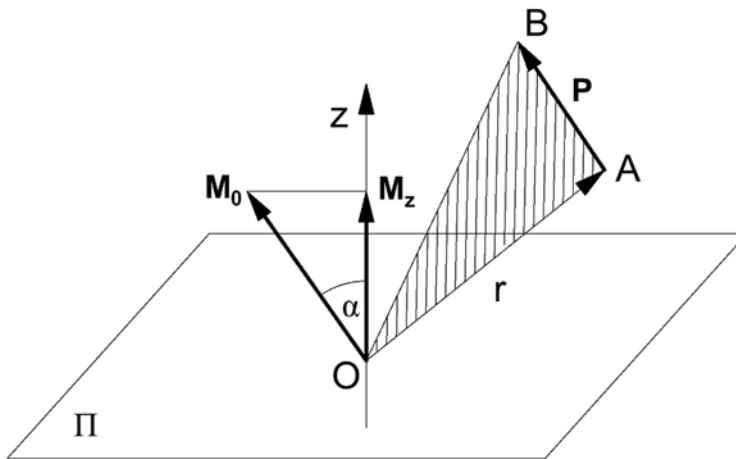
Składowe wektora momentu \mathbf{M}_0 wyrażone poprzez odpowiednie składowe promienia wektora i siły wynoszą:

$$\begin{aligned}
 M_{0x} &= P_z r_y - P_y r_z \\
 M_{0y} &= P_x r_z - P_z r_x \\
 M_{0z} &= P_y r_x - P_x r_y
 \end{aligned}
 \tag{1.37}$$

1.7.2. Moment siły względem osi

Miarą działania obrotowego siły względem osi jest wielkość, która nosi nazwę momentu siły względem osi.

Momentem siły \mathbf{P} względem osi z nazywamy wektor leżący na tej osi, o wartości liczbowej równej rzutowi momentu tejże siły wyznaczonemu względem dowolnego punktu osi na tę oś.



Rys. 1.44

Z definicji wynika, że moment siły względem osi ma wartość stałą, niezależną od wyboru położenia punktu na osi względem którego wyznaczony moment rzutowy na oś. Udowodnijmy słuszność tego wniosku.

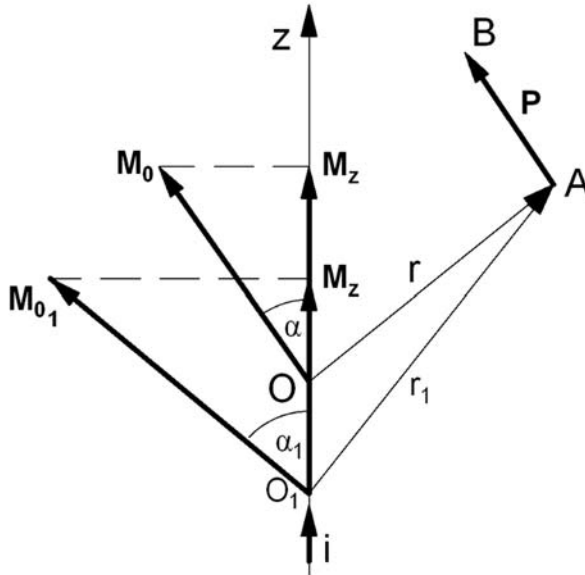
Niech będzie siła \mathbf{P} i oś z , na której przyjęto punkty O i O_1 (rys. 1.45).

Momenty tej siły względem punktów O i O_1 odpowiednio wynoszą:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{P}
 \tag{a}$$

oraz

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{0_1} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{P} = (\mathbf{O}_1\mathbf{O} + \mathbf{r}) \times \mathbf{P} = \mathbf{O}_1\mathbf{O} \times \mathbf{P} + \mathbf{r} \times \mathbf{P} \\
 \mathbf{M}_{0_1} &= \mathbf{O}_1\mathbf{O} \times \mathbf{P} + \mathbf{M}_0
 \end{aligned}
 \tag{b}$$



Rys. 1.45

Pomnóżmy skalarnie otrzymane wyrażenie (b) przez wersor \mathbf{i} osi z . Otrzymano:

$$\mathbf{M}_{0_1} \cdot \mathbf{i} = (\mathbf{O}_1 \mathbf{O} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{i} + M_0 \cdot \mathbf{i} \quad (\text{c})$$

Wektor określony iloczynem wektorowym promienia $\mathbf{O}_1 \mathbf{O}$ i siły \mathbf{P} , stojący po prawej stronie równania (c) jest z własności iloczynu wektorowego, prostopadły do wektorów składowych. Tak więc iloczyn skalarny tego wektora oraz wersora \mathbf{i} osi z jest równy zero.

Rozpisując pozostałe iloczyny skalarne i pamiętając, że wartość wersora wynosi 1, mamy:

$$M_{0_1} \cdot \cos \alpha_1 = M_0 \cdot \cos \alpha \quad (\text{d})$$

Otrzymane równanie potwierdza słuszność definicji, że rzut momentu siły względem dowolnego punktu osi na tę oś jest stały.

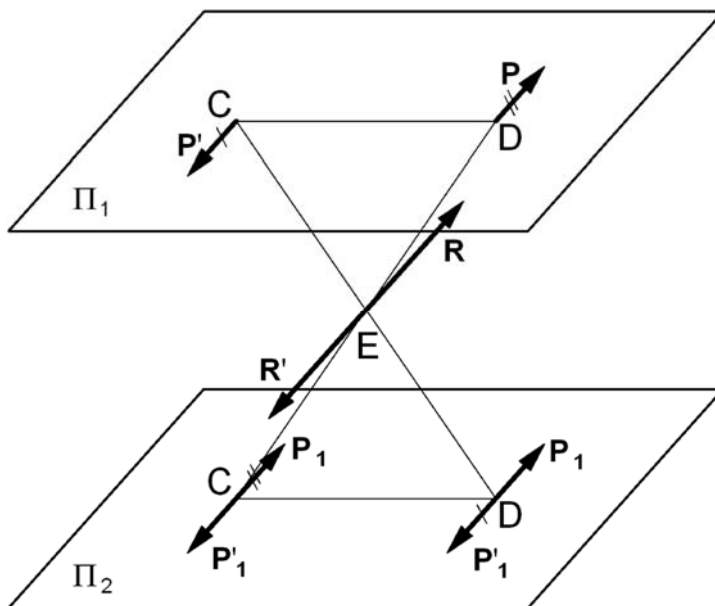
Wartości momentu siły względem osi prostopadłych wynikają bezpośrednio z równań (1.37) wyrażających składowe momentu siły względem punktu O jako początku układu osi współrzędnych. Mamy ostatecznie:

$$\begin{aligned} M_x &= P_z y - P_y z \\ M_y &= P_x z - P_z x \\ M_z &= P_y x - P_x y \end{aligned} \quad (\text{e})$$

1.7.3. Twierdzenia o parach sił działających w przestrzeni

Pary sił działające w płaszczyznach równoległych

Zachowując niezmienny moment, parę sił można przenosić do dowolnej płaszczyzny równoległej do jej płaszczyzny działania.



Rys. 1.46

Niech na ciało sztywne działa para sił \mathbf{P} i $\mathbf{P}' = -\mathbf{P}$ w płaszczyźnie π_1 , przyłożonych do punktów A i B tego ciała. Obierzmy dowolną płaszczyznę π_2 równoległą do płaszczyzny π_1 i w punktach C i D tej płaszczyzny przyłożmy układy zerowe sił \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}'_1 . Układy zerowe spełniają zależność $\mathbf{P}_1 = -\mathbf{P}'_1 = \mathbf{P}$. Punkty C i D w obranej płaszczyźnie wyznaczono tak, aby odcinki AB i CD były równe i do siebie równoległe.

Siły \mathbf{P} i $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}$ przyłożone odpowiednio w punktach B i C, jako dwie równoległe i równe, możemy zastąpić wypadkową $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{P}_1 = 2\mathbf{P}$ przyłożoną w punkcie E. Podobnie siły \mathbf{P}' i \mathbf{P}'_1 przyłożone do punktów A i D zastąpimy wypadkową $\mathbf{R}' = \mathbf{P}' + \mathbf{P}'_1 = -2\mathbf{P} = -\mathbf{R}$, przyłożoną również do punktu E. Siły \mathbf{R} i \mathbf{R}' jako równe tworzą układ zerowy i pozostają jedynie dwie siły \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}'_1 tworzące parę sił, o płaszczyźnie działania π_2 . Ponieważ z założenia $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}$ i odcinek $AB = CD$, moment otrzymanej pary sił jest taki sam jak pary sił \mathbf{P} i \mathbf{P}' . A więc postawione na początku twierdzenie zostało udowodnione.

Dodawanie par sił działających w różnych płaszczyznach

Dwie pary sił przyłożone do ciała sztywnego i działające w płaszczyznach przecinających się są równoważne jednej parze o momencie równym sumie geometrycznej momentów tych par.

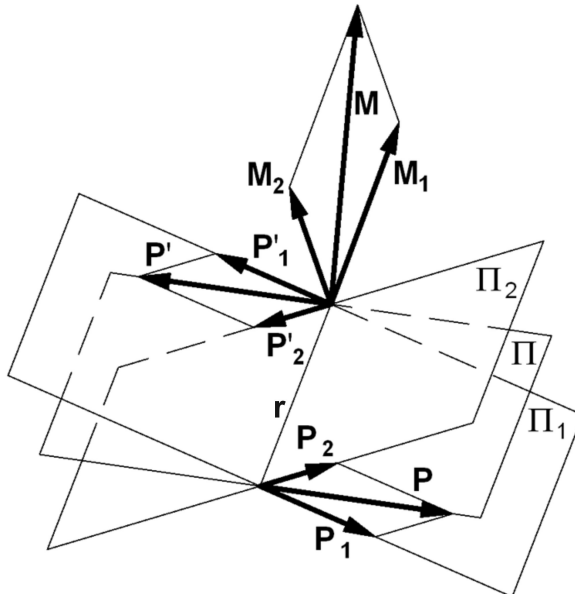
Przyłożmy do ciała sztywnego parę sił \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_1' działającą w płaszczyźnie π_1 o momencie \mathbf{M}_1 oraz parę sił \mathbf{P}_2 i \mathbf{P}_2' działającą w płaszczyźnie π_2 o momencie \mathbf{M}_2 . Obie pary sił zamieńmy na im równoważne, aby ich ramię wynosiło \mathbf{r} , jak pokazano na rysunku 1.47.

Przyłożone siły \mathbf{P}_1 i \mathbf{P}_2 w punkcie A oraz siły \mathbf{P}_1' i \mathbf{P}_2' w punkcie B zastąpiono wypadkowymi odpowiednio:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}' &= \mathbf{P}_1' + \mathbf{P}_2'\end{aligned}\quad (\text{a})$$

Zgodnie z definicją momentu siły względem punktu B i momentem pary sił możemy zapisać:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \mathbf{r} \times \mathbf{P}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{P}_2 \quad (\text{b})$$



Rys. 1.47

i ostatecznie:

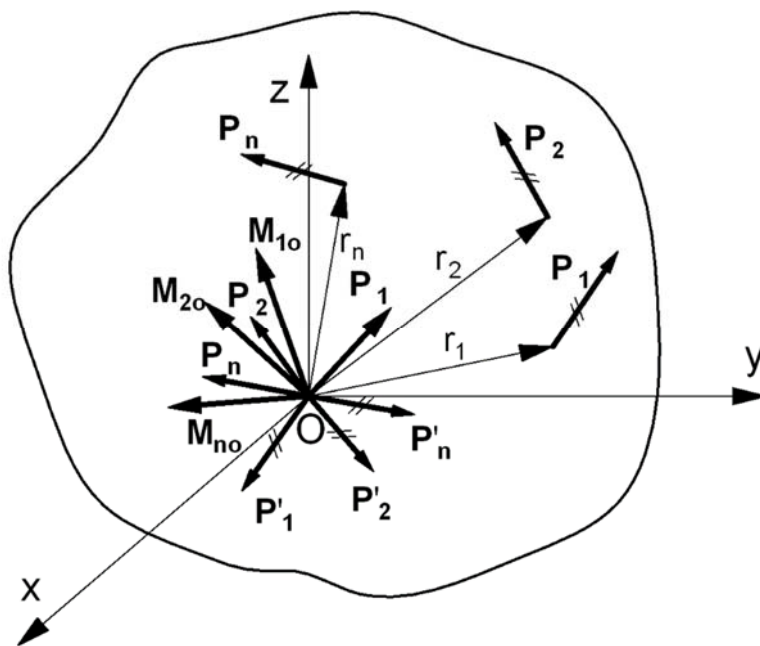
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (1.38)$$

Moment wypadkowy równy jest sumie geometrycznej momentów par składowych, a więc sformułowane na wstępie twierdzenie jest prawdziwe.

1.7.4. Redukcja przestrzennego dowolnego układu sił do danego punktu

Przyłożmy do punktów A_1, A_2, \dots, A_n ciała sztywnego, układ sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, które są dowolnie skierowane w przestrzeni. Następnie do obranego punktu O , środka redukcji, przyłożmy układy zerowe tych sił, jak pokazano na rysunku 1.48.

Po przyłożeniu układów zerowych otrzymano układ sił, w którym można wyodrębnić przestrzenny układ sił zbieżnych $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ przyłożonych do punktu O oraz n par sił $\mathbf{M}_{10}, \mathbf{M}_{20}, \dots, \mathbf{M}_{n0}$, wyrażających momenty poszczególnych sił względem punktu O .



Rys. 1.48

Układ sił zbieżnych przyłożonych w punkcie O zastąpić można jedną siłą wypadkową \mathbf{R} równą sumie geometrycznej wszystkich sił, natomiast pary sił równoważnym momentem pary \mathbf{M}_0 , o momencie równym sumie geometrycznej – momentów wszystkich par. Otrzymano więc:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (1.39)$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{10} + \mathbf{M}_{20} + \dots + \mathbf{M}_{n0} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} \quad (1.40)$$

Dowolny przestrzenny układ sił działający na ciało sztywne zastąpić możemy jedną siłą \mathbf{R} przyłożoną w dowolnie wybranym środku redukcji O , będącą sumą geometryczną wszystkich sił, oraz momentem pary \mathbf{M}_0 , równym sumie geometrycznej momentów wszystkich sił względem środka O .

Otrzymaną w wyniku redukcji wypadkową \mathbf{R} nazywamy wektorem głównym układu, zaś moment \mathbf{M}_0 momentem głównym względem przyjętego środka redukcji O .

Znając składowe sił przyłożonych do ciała sztywnego w prostokątnym układzie współrzędnych, możemy wyznaczyć składowe wektora głównego \mathbf{R} , korzystając z twierdzenia o rzucie siły wypadkowej i jej składowych na dowolną oś. Otrzymujemy:

$$R_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad R_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad R_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} \quad (1.41)$$

Również składowe momentu głównego względem osi układu, którego początek jest w środku redukcji O , równe są sumom odpowiednich składowych momentów działających sił względem początku układu współrzędnych. Na podstawie twierdzenia o rzucie momentu siły względem punktu leżącego na osi, na tę oś, składowe momentu głównego równe są sumie momentów danych sił względem odpowiednich osi. Tak więc mamy:

$$M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_{ix} \quad M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_{iy} \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz} \quad (1.42)$$

1.7.5. Warunki równowagi przestrzennego dowolnego układu sił

W wyniku redukcji przestrzennego dowolnego układu sił do danego punktu otrzymaliśmy wektor główny \mathbf{R} oraz moment główny \mathbf{M}_0 . Tak więc aby przestrzenny dowolny układ sił pozostawał w równowadze, zarówno wektor główny \mathbf{R} , jak i moment główny \mathbf{M}_0 muszą być równe zero.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} = 0 \quad (1.43)$$

Z tych dwu warunków geometrycznych otrzymujemy odpowiadające im warunki analityczne w postaci równań równowagi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0 & \quad \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0 & \quad \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0 \\ \sum_{i=1}^n M_{ix} = 0 & \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} = 0 & \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} = 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

Otrzymaliśmy sześć równań równowagi – trzy wynikające z sumy rzutów sił na osie układu współrzędnych oraz trzy wynikające z sumy momentów wszystkich sił względem tych osi.

Warunkiem równowagi przestrzennego dowolnego układu sił jest, aby suma rzutów wszystkich sił na trzy osie dowolne, oby nierównoległe i nieleżące w jednej płaszczyźnie, była równa zero oraz suma momentów względem tych osi była również równa zero.

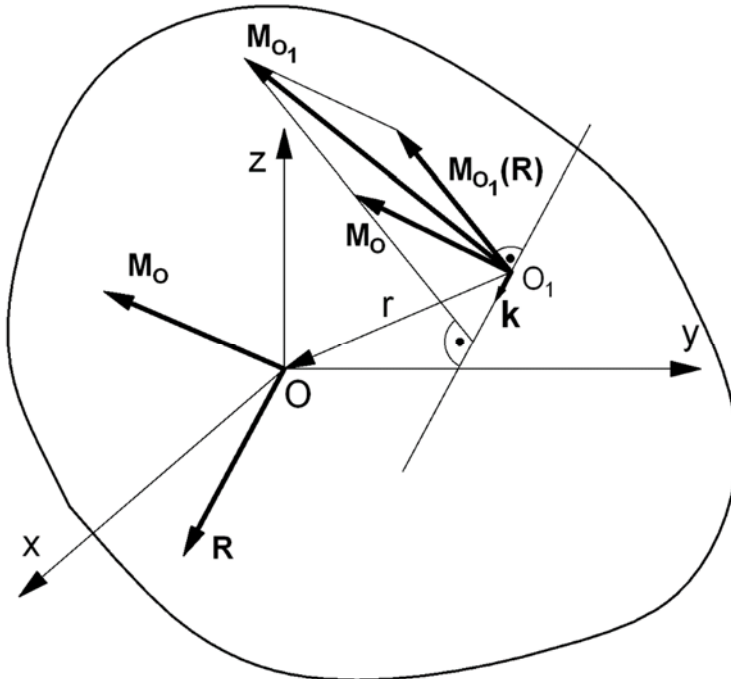
1.7.6. Niezmienniki przestrzennego układu sił Skretnik, oś centralna

W wyniku redukcji przestrzennego dowolnego układu sił do danego punktu, otrzymano układ złożony z wektora głównego \mathbf{R} , jako sumy geometrycznej wszystkich sił, oraz momentu głównego \mathbf{M}_O jako sumy geometrycznej momentów wszystkich sił względem środka redukcji O (1.39) i (1.40).

Wektor główny układu nie zależy od wyboru bieguna (środka redukcji), ponieważ wyznaczenie jego polega na obliczeniu sumy geometrycznej sił tworzących układ. Moment główny natomiast zmienia swą wartość wraz ze zmianą wyboru bieguna.

Jeśli moment główny względem bieguna O wynosi M_0 , wyznaczmy więc moment główny względem innego dowolnego bieguna O_1 . Zgodnie z rys. 1.49 mamy:

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \mathbf{r} \times \mathbf{R} \quad (a)$$



Rys. 1.49

Wektor będący iloczynem wektorowym promienia wektora \mathbf{r} i wektora głównego \mathbf{R} oznaczono $\mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{R})$ i zgodnie z definicją jest on prostopadły do wektora \mathbf{R} . Mamy więc:

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O + \mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{R}) \quad (\text{b})$$

Pomnóżmy skalarnie powyższe równanie przez wektor jednostkowy \mathbf{k} wektora głównego \mathbf{R} . Mamy:

$$\mathbf{M}_{O_1} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{k} \quad (\text{c})$$

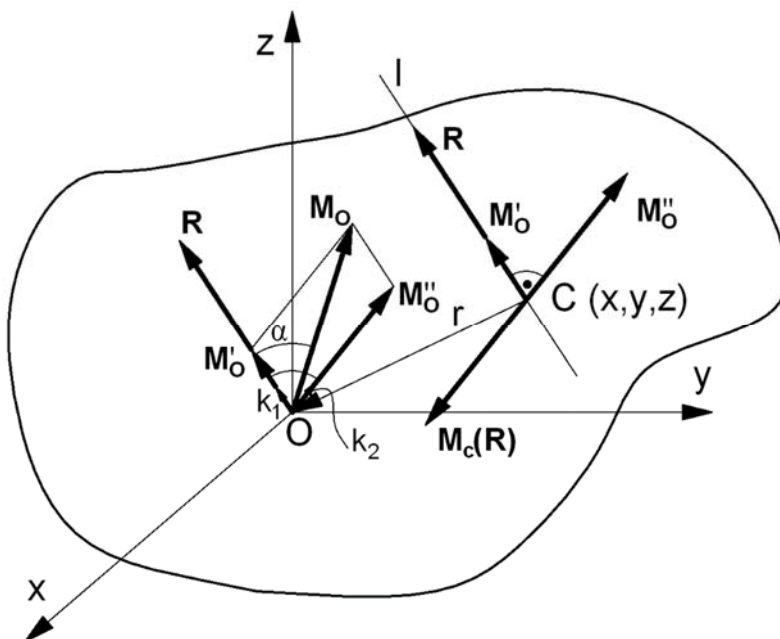
gdź $\mathbf{M}_{O_1}(\mathbf{R}) \cdot \mathbf{k} = 0$ z uwagi na prostopadłość wektorów składowych.

Ostatecznie otrzymujemy zależność dotyczącą iloczynu skalarnego momentu głównego i wektora głównego:

$$\mathbf{M}_{O_1} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{R} \quad (1.45)$$

Podsumowując można stwierdzić, że **wektor główny oraz iloczyn skalarny wektora momentu głównego i wektora głównego są niezmiennikami przestrzennego dowolnego układu sił.**

Ze zmianą wyboru bieguna zmienia się moment główny rozpatrywanego układu. Wyznamy taki punkt C przestrzeni działania układu sił, względem którego moment wektora głównego \mathbf{R} równoważy się ze składową momentu głównego \mathbf{M}_O o kierunku prostopadłym do wektora głównego (rys. 1.50).



Rys. 1.50

Zgodnie z rysunkiem składowe momentu głównego względem punktu O wynoszą:

$$M'_O = M_O \cdot \cos \alpha \quad M''_O = M_O \cdot \sin \alpha \quad (d)$$

Wprowadzając wersory na kierunku wektora głównego \mathbf{k}_1 i kierunku prostopadłym \mathbf{k}_2 , moment główny względem punktu C wynosi:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{k}_1 \cdot M'_O + \mathbf{k}_2 \cdot M''_O + \mathbf{M}_C(\mathbf{R}) \quad (e)$$

gdzie: $\mathbf{M}_C(\mathbf{R}) = \mathbf{r} \times \mathbf{R}$

Ponieważ z założenia punkt C wybrano taki, że $\mathbf{k}_2 \cdot M''_O = -\mathbf{M}_C(\mathbf{R})$, w punkcie C otrzymano układ złożony z wektora głównego \mathbf{R} oraz składowej M'_O momentu głównego względem bieguna O. Układ ten złożony z dwu wektorów

leżących na jednej prostej nazywamy **skrętnikiem**, a prostą tę – **osią centralną**. Tak więc moment główny względem punktu (bieguna) C leży na osi centralnej i ma wartość:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{M}'_O \quad (f)$$

Znając wektor główny \mathbf{R} oraz wektor momentu głównego \mathbf{M}_O względem bieguna O, można wyznaczyć równanie osi centralnej w układzie osi współrzędnych związanych z tym biegunem (rys. 1.50). Leżący na osi centralnej moment główny względem bieguna C ma wartość:

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{M}_O + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -x & -y & -z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} \quad (g)$$

Składowe tego momentu wynoszą:

$$\begin{aligned} M_{Cx} &= M_{Ox} - R_z \cdot y + R_y \cdot z \\ M_{Cy} &= M_{Oy} - R_x \cdot z + R_z \cdot x \\ M_{Cz} &= M_{Oz} - R_y \cdot x + R_x \cdot y \end{aligned} \quad (h)$$

Ponieważ w punkcie C wektor główny \mathbf{R} i wektor momentu głównego \mathbf{M}_O leżą na osi centralnej, składowe tych wektorów muszą być odpowiednio proporcjonalne. Mamy więc:

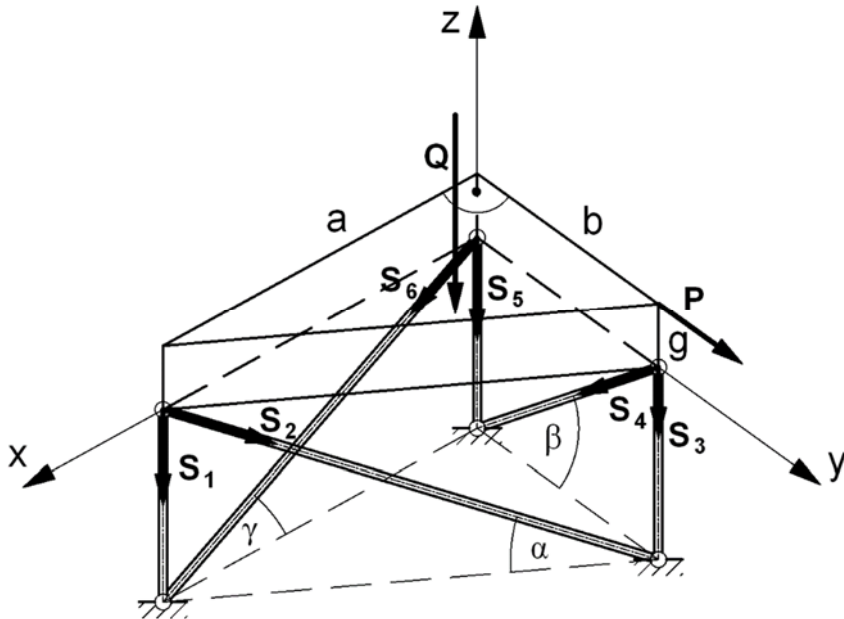
$$\frac{M_{Ox} - R_z \cdot y + R_y \cdot z}{R_x} = \frac{M_{Oy} - R_x \cdot z + R_z \cdot x}{R_y} = \frac{M_{Oz} - R_y \cdot x + R_x \cdot y}{R_z} \quad (1.46)$$

Jest to równanie prostej l w przestrzeni, przechodzącej przez punkt C o współrzędnych x, y, z, która jest osią centralną rozpatrywanego układu sił.

Przykład 1.11

Ciężką płytę o ciężarze \mathbf{Q} i grubości g, w kształcie trójkąta prostokątnego, podparto na sześciu lekkich prętach, jak pokazano na rysunku. Wyznaczyć siły w prętach, jeśli wzdłuż górnej krawędzi b płyty działa siła \mathbf{P} .

Rozwiązanie



Rys. 1.51

Siły w prętach oznaczono S_1, \dots, S_6 . Zgodnie z zasadą uwalniania od więzów siły te działają wzdłuż osi prętów i mogą być przyłożone dowolnie co do zwrotu. Po przyłożeniu siły czynnej P oraz sił w prętach S_i (przy założeniu, że wszystkie pręty są rozciągane), otrzymano przestrzenny dowolny układ sił, który musi spełniać równania równowagi w przyjętym układzie osi xyz . Do napisania równań równowagi wprowadzono pomocniczo kąt φ , jaki tworzy przyprostokątna, przez którą poprowadzono oś x , z przeciwprostokątną rozpatrywanej płyty. Równania równowagi mają postać:

$$\sum P_{ix} = -S_2 \cos \alpha \cos \varphi + S_6 \cos \gamma = 0$$

$$\sum P_{iy} = S_2 \cos \alpha \sin \varphi - S_4 \cos \beta + P = 0$$

$$\sum P_{iz} = -S_1 - S_2 \sin \alpha - S_3 - S_4 \sin \beta - S_5 - S_6 \sin \gamma - Q = 0$$

$$\sum M_{ix} = -P \cdot g - Q \frac{b}{3} - S_3 \cdot b - S_4 \sin \beta \cdot b = 0$$

$$\sum M_{iy} = Q \frac{a}{3} + S_1 \cdot a + S_2 \sin \alpha \cdot a = 0$$

$$\sum M_{iz} = S_2 \cos \alpha \sin \varphi \cdot a = 0$$

Po rozwiązaniu powyższego układu sześciu równań wyznaczono wartości sił w prętach podpierających płytę:

$$S_1 = -\frac{1}{3}Q$$

$$S_2 = S_6 = 0$$

$$S_3 = -P \left(\operatorname{tg} \beta + \frac{g}{b} \right) - \frac{1}{3}Q$$

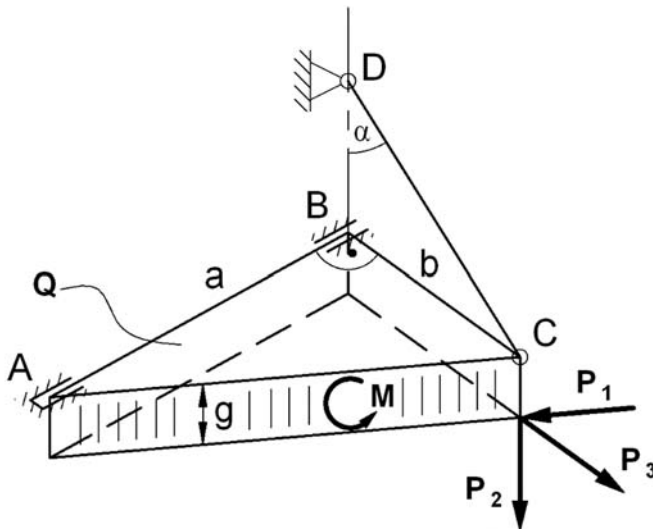
$$S_4 = P \frac{1}{\cos \beta}$$

$$S_5 = P \frac{g}{b} - \frac{1}{3}Q$$

Znak minus oznacza że pręt jest ściskany.

Przykład 1.12

Ciężką płytę o ciężarze Q w kształcie trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b oraz grubości g zamocowano w łożysku poprzeczno-wzdłużnym A i łożysku poprzecznym B . W położeniu poziomym płyta jest utrzymywana lekką liną CD leżącą w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez przyprostokątną b i tworzącą kąt α z pionem. Wyznaczyć reakcje w łożyskach A i B oraz siłę w linii CD , jeśli płytę obciążymy siłami P_1 , P_2 i P_3 oraz momentem pary sił M działającym w płaszczyźnie pionowej przechodzącej przez przeciwprostokątną płyty, jak zaznaczono na rys. 1.52.



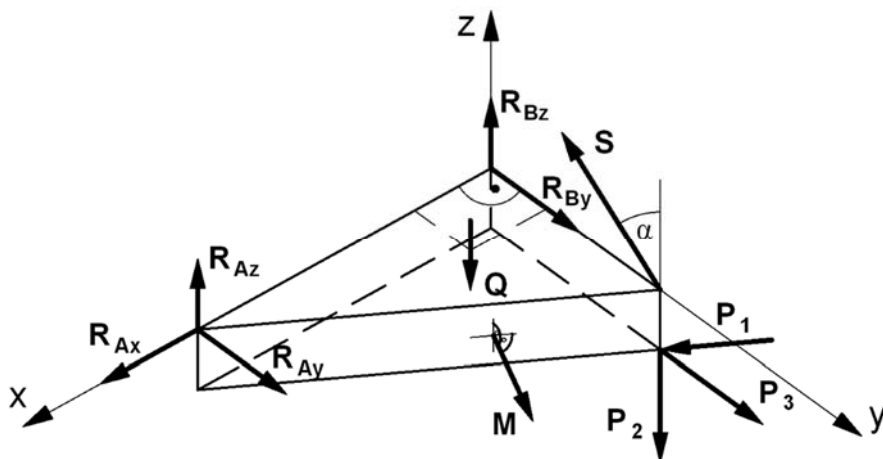
Rys. 1.52

Rozwiązanie

Rozważaną płytę uwolniono od więzów. Usunięto myślowo łożysko poprzeczno-wzdłużne i zastąpiono je reakcją R_A , przykładając trzy jej składowe, ale

tak, aby jedna składowa działała wzdłuż osi łożyska, a dwie pozostałe leżały w płaszczyźnie prostopadłej do tej osi. Następnie uwolniono od więzów łożysko poprzeczne, przykładając dwie składowe reakcji R_B , leżące w płaszczyźnie prostopadłej do osi tego łożyska. Usunięto myślowo linę i zastąpiono jej działanie siłą przyłożoną wzdłuż jej kierunku.

Tak uwolnioną od więzów płytę obciążono siłami czynnymi P_1 , P_2 i P_3 oraz momentem pary sił M i po przyjęciu układu osi współrzędnych wyznaczono warunki równowagi.



Rys. 1.53

Warunki równowagi wynikające z rzutów wszystkich sił na osie przyjętego układu mają postać:

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= R_{Ax} + P_1 \cdot \cos\beta = 0 \\ \sum P_{iy} &= R_{Ay} + R_{By} - S \cdot \sin\alpha - P_1 \cdot \sin\beta + P_3 = 0 \\ \sum P_{iz} &= R_{Az} + R_{Bz} - Q + S \cdot \cos\alpha - P_2 = 0\end{aligned}$$

Równania momentów wszystkich sił względem osi przyjętego układu mają wartość:

$$\begin{aligned}\sum M_{ix} &= S \cdot \cos\alpha \cdot b - Q \cdot \frac{b}{3} + P_3 \cdot g - P_2 \cdot b - P_1 \cdot \sin\beta \cdot g + M \cdot \sin\beta = 0 \\ \sum M_{iy} &= Q \cdot \frac{a}{3} - P_1 \cdot \cos\beta \cdot g - R_{Az} \cdot a + M \cdot \cos\beta = 0 \\ \sum M_{iz} &= R_{Ay} \cdot a - P_1 \cdot \cos\beta \cdot b = 0\end{aligned}$$

Zależności trygonometryczne wynoszą:

$$\sin\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \cos\beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Rozwiązując otrzymany układ równań względem poszukiwanych reakcji w łożyskach i siły w linie, mamy:

$$R_{Ax} = -P_1 \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$R_{Ay} = P_1 \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$R_{Az} = \frac{1}{3}Q - P_1 \frac{g}{\sqrt{a^2 + b^2}} + M \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$R_{By} = \left(\frac{1}{3}Q + P - M \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} - P_3 \frac{g}{b} + P_1 \frac{g}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \cdot \operatorname{tg}\alpha - P_3$$

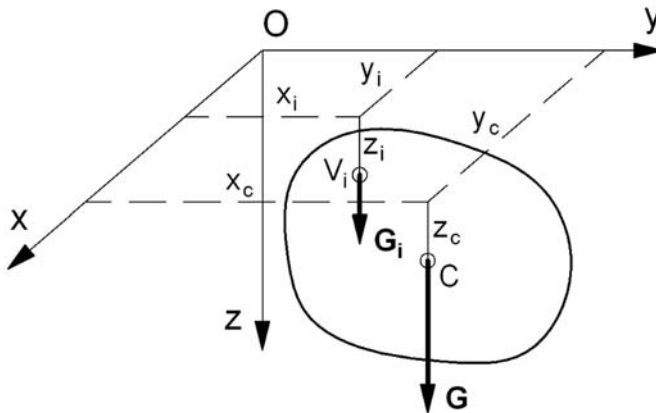
$$R_{Bz} = \frac{1}{3}Q + P_3 \frac{g}{b}$$

$$S = \frac{1}{\cos\alpha} \left(\frac{1}{3}Q - P_3 \frac{g}{b} + P_2 + P_1 \frac{g}{\sqrt{a^2 + b^2}} - M \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

1.8. ŚRODKI CIĘŻKOŚCI

Szczególnym przypadkiem sił równoległych są siły ciężkości, czyli siły przyciągania ziemskiego. Siły te, choć są zbieżne do środka ziemi, można potraktować jako równoległe, ponieważ wymiary rozpatrywanych ciał w praktyce inżynierskiej są bardzo małe w porównaniu z promieniem kuli ziemskiej.

Środek ciężkości jest to punkt, w którym przyłożona jest całkowita siła ciężkości ciała, niezależnie od jego położenia.



Rys. 1.54

Zwiążmy z rozpatrywanym ciałem prostokątny układ osi współrzędnych i pozwólmy temu ciału na dowolne przemieszczenie w przestrzeni. Okaze się, że siła ciężkości przyłożona do tego ciała będzie zmieniała swój kierunek względem układu osi związanego z tym ciałem, jednak współrzędne punktu jej przyłożenia pozostaną niezmiennie. Ta własność siły ciężkości oznacza, że jej linia działania przechodzi zawsze przez ten sam punkt, który nazywa się środek ciężkości i oznaczony został literą C.

W dowolnym punkcie ciała, którego współrzędne są x_i, y_i, z_i jak przedstawiono na rysunku, wytnijmy element o objętości V_i . Ciężar jednostki objętości, czyli ciężar właściwy oznaczmy przez γ_i . Ciężar wyciętego elementu wynosi:

$$G_i = \gamma_i V_i \quad (1.47)$$

Korzystając z twierdzenia o momencie siły wypadkowej względem osi y i x , mamy:

$$\begin{aligned} Gx_c &= \sum_{i=1}^n G_i x_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i x_i \\ Gy_c &= \sum_{i=1}^n G_i y_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i y_i \end{aligned} \quad (1.48)$$

ponieważ ciężar rozpatrywanego ciała $G = \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i$, wyrażenia na współrzędne środka ciężkości mają postać:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i x_i V_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i V_i} \quad (1.49)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i y_i V_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i V_i}$$

Współrzędną z_c wyznaczmy dla ciała obróconego razem z układem osi współrzędnych o kąt prosty względem osi y . Siły ciężkości zmieniają kierunek i będą równoległe do osi x , ale ich punkty przyłożenia pozostaną niezmienione. Pisząc równanie wynikające z twierdzenia o momencie siły wypadkowej względem osi y , mamy:

$$Gz_c = \sum_{i=1}^n G_i z_i = \sum_{i=1}^n \gamma_i V_i z_i \quad (1.50)$$

Po przekształceniu powyższego równania i podstawieniu zależności opisującej ciężar rozpatrywanego ciała mamy:

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i z_i V_i}{\sum_{i=1}^n \gamma_i V_i} \quad (1.51)$$

Otrzymane wyrażenia na współrzędne środka ciężkości ciała materialnego są wzorami przybliżonymi, choć często używanymi w zagadnieniach technicznych. Aby otrzymać wzory dokładne, należy z podziałem na elementarne objętości przejść do granicy i przyjąć nieskończoną ich liczbę o wymiarach dążących do zera. Występujące w powyższych wzorach sumy zostaną zmienione w całki, z sumowaniem po całej objętości. Ostatecznie dla ciała jednorodnego otrzymujemy:

$$x_c = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V x dV}{V} \quad y_c = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V y dV}{V} \quad z_c = \frac{\int_V z dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V z dV}{V} \quad (1.52)$$

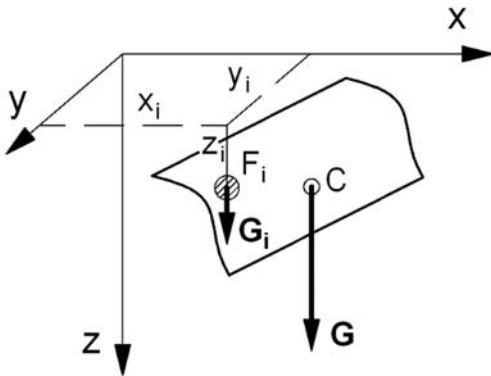
1.8.1. Środki ciężkości powierzchni

Rozpatrzmy powłokę, której grubość wynosi f i jest bardzo mała w odniesieniu do innych wymiarów. Ciężar rozpatrywanego elementu o polu powierzchni F_i wynosi (rys. 1.55):

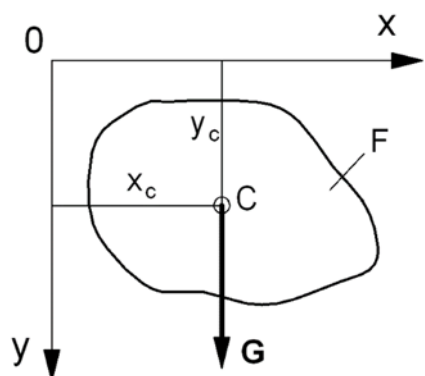
$$G_i = \gamma_i V_i = \gamma_i f F_i \quad (1.53)$$

Po podstawieniu elementarnego ciężaru (1.53) do wyrażeń (1.49) i (1.51) i uproszczeniu przez ciężar właściwy otrzymano wzory określające położenie środka ciężkości powierzchni jednorodnych:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i F_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \quad (1.54)$$



Rys. 1.55



Rys. 1.56

Po przejściu do granicy podziału na elementarne powierzchnie otrzymujemy całki powierzchniowe o postaci:

$$x_c = \frac{\int_F x dF}{\int_F dF} = \frac{\int_F x dF}{F} \quad y_c = \frac{\int_F y dF}{\int_F dF} = \frac{\int_F y dF}{F} \quad (1.55)$$

$$z_c = \frac{\int_F z dF}{\int_F dF} = \frac{\int_F z dF}{F}$$

Dla figury płaskiej $z_c = 0$, a pozostałe dwie współrzędne zgodnie z powyższymi wzorami wynoszą:

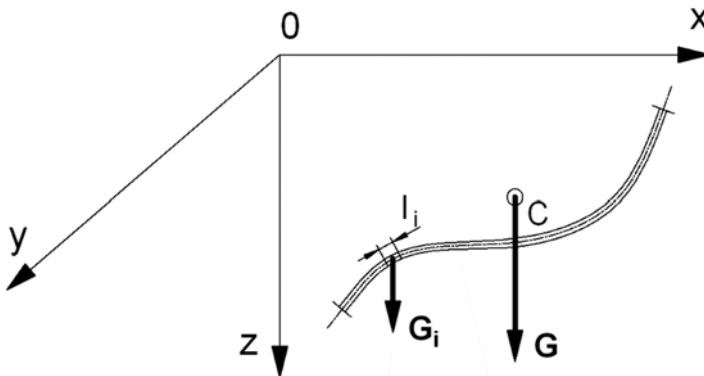
$$x_c = \frac{\int x dF}{\int dF} = \frac{\int x dF}{F} \qquad y_c = \frac{\int y dF}{\int dF} = \frac{\int y dF}{F} \qquad (1.56)$$

Występujące w licznikach całki są momentami statycznymi figury płaskiej względem osi y i x .

1.8.2. Środki ciężkości linii

Podobnie jak dla powierzchni, elementarny ciężar jednorodnej linii o stałej grubości s i długości l_i wynosi:

$$G_i = \gamma_i V_i = \gamma_i s l_i \qquad (1.57)$$



Rys. 1.57

Po podstawieniu elementarnego ciężaru linii (1.57) do wyrażeń (1.49) i (1.51) oraz uproszczeniu przez ciężar właściwy, otrzymano wzory określające położenie środka ciężkości jednorodnej linii:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} \qquad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n z_i l_i}{\sum_{i=1}^n l_i} \qquad (1.58)$$

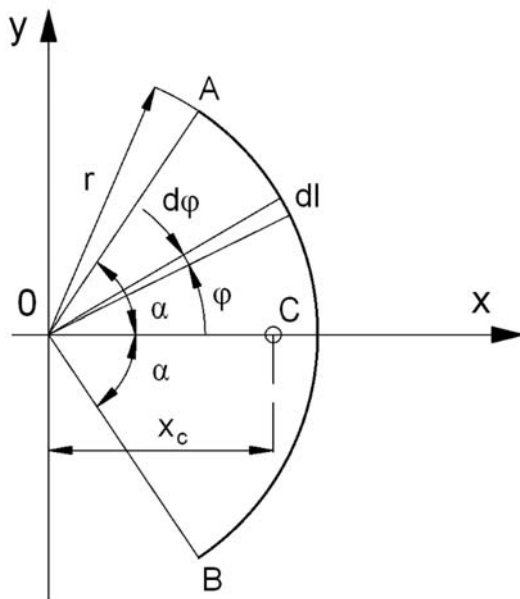
Po przejściu do granicy podziału na elementarne długości dl otrzymujemy całki rozciągnięte na całą długość linii i środek ciężkości określają zależności:

$$\begin{aligned}
 x_c &= \frac{\int x dl}{\int dl} = \frac{\int x dl}{l} & y_c &= \frac{\int y dl}{\int dl} = \frac{\int y dl}{l} \\
 z_c &= \frac{\int z dl}{\int dl} = \frac{\int z dl}{l}
 \end{aligned}
 \tag{1.59}$$

1.8.3. Środki ciężkości niektórych linii, powierzchni i brył

Środek ciężkości łuku koła

Znalezienie środka ciężkości linii jako łuku koła AB o promieniu r , ograniczonego kątem 2α , przeprowadzono w prostokątnym układzie osi współrzędnych o początku w środku koła O i osi x jako osi symetrii tego łuku. Środek ciężkości łuku C będzie leżał na tej osi.



Rys. 1.58

Zgodnie ze wzorem (1.59) możemy napisać:

$$x_c = \frac{\int x dl}{l}$$

Dla rozpatrywanego łuku mamy: $l = 2 r \alpha$, $dl = r d\varphi$, $x = r \cos\varphi$. Wstawiając te wartości do powyższego wzoru, otrzymujemy:

$$x_c = \frac{r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\varphi d\varphi}{2\alpha} = \frac{r |\sin\alpha|_{-\alpha}^{+\alpha}}{2\alpha} = \frac{r \sin\alpha}{\alpha} \quad (1.60)$$

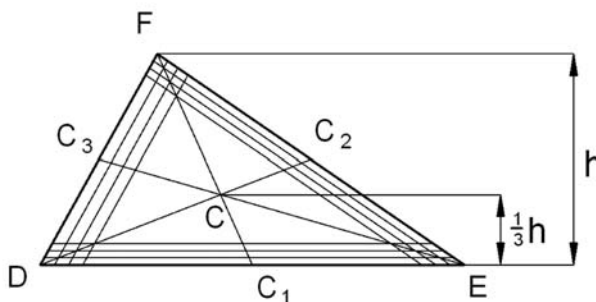
Dla łuku półkola, czyli dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ współrzędna środka ciężkości wynosi

$$x_c = \frac{2r}{\pi}$$

Środek ciężkości powierzchni trójkąta

W celu znalezienia środka ciężkości trójkąta DEF podzielmy jego powierzchnię na paski równoległe do DE, jak pokazano na rys. 1.59. Przy założeniu, że szerokość otrzymanych pasków dąży do zera, możemy je traktować jako odcinki. Środek ciężkości odcinka leży w połowie jego długości, a więc środki ciężkości elementarnych pasków, na które podzielono powierzchnię trójkąta, leżą na środkowej FC_1 .

W podobny sposób podzielmy powierzchnię trójkąta na paski równoległe do EF i DF. Otrzymamy środkowe DC_2 i EC_3 , które przecinają się z środkową FC_1 w punkcie C. Jak wiadomo, środkowe trójkąta dzielą się w stosunku 2 : 1, tak więc $C_1C = \frac{1}{3} C_1F$.



Rys. 1.59

Z przeprowadzonej konstrukcji znajdowania środka ciężkości powierzchni trójkąta wynika, że środek ten leży w punkcie przecięcia się trzech środkowych, czyli

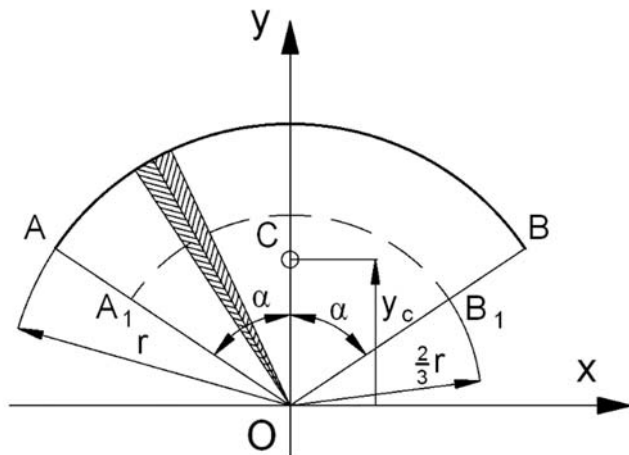
w odległości odpowiadającej jednej trzeciej wysokości od podstawy. Oznaczając przez y_c położenie środka ciężkości od podstawy DE, mamy:

$$y_c = \frac{1}{3} h \quad (1.61)$$

gdzie h jest wysokością trójkąta.

Środek ciężkości powierzchni wycinka koła

Podzielmy powierzchnię wycinka koła OAB na elementarne równe wycinki. Przy zwiększaniu liczby elementarnych wycinków do nieskończoności możemy je potraktować jako trójkąty o wysokościach równych promieniowi r . Środek ciężkości rozpatrywanej powierzchni wycinka koła pokrywa się ze środkiem ciężkości łuku koła A_1B_1 , wyznaczonego przez środki ciężkości elementarnych trójkątów.



Rys. 1.60

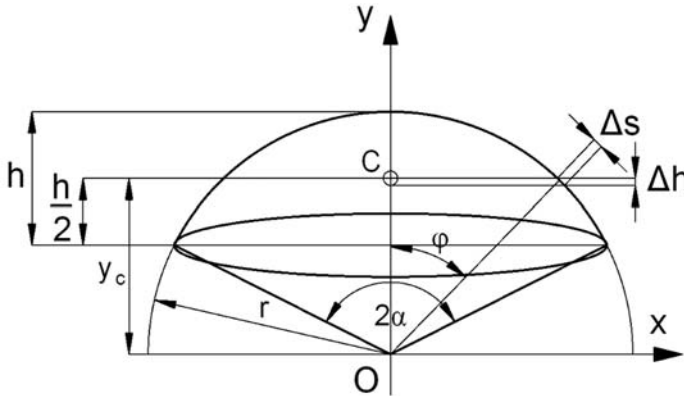
Promień tego łuku wynosi $\frac{2}{3} r$ i po podstawieniu do wzoru (1.60) w miejsce promienia r , wartości $\frac{2}{3} r$ otrzymujemy współrzędną położenia środka ciężkości C wycinka koła. Współrzędna ta mierzona jest wzdłuż osi symetrii wycinka i wynosi:

$$y_c = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (1.62)$$

Dla półkola, czyli dla $\alpha = \frac{\pi}{2}$ środek ciężkości leży w odległości $y_c = \frac{4r}{3\pi}$.

Środek ciężkości czaszy kulistej

Niech będzie dana czasza kulista o promieniu r , jak przedstawiono na rys. 1.61. W dowolnym miejscu czaszy poprowadźmy dwie równoległe płaszczyzny prostopadłe do jej osi, których odległość wynosi Δh .



Rys. 1.61

Powierzchnia pierścienia powstałego z tego przecięcia wynosi:

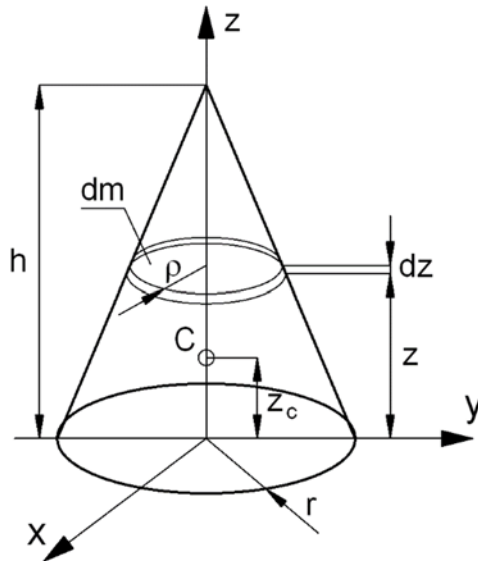
$$\Delta F = \Delta s \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \varphi = \frac{\Delta h}{\sin \varphi} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \sin \varphi = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \Delta h \quad (1.63)$$

Z otrzymanej zależności wynika, że elementarne pole powierzchni pierścienia powstałego z przecięcia płaszczyznami nie zależy od miejsca jego położenia oznaczonego kątem φ . Czyli każdy pierścień o wysokości Δh ma tę samą masę, bez względu na odległość od środka geometrycznego czaszy kulistej. Dzieliąc więc czaszę na pierścienie o stałej wysokości Δh , otrzymujemy zbiór punktów o tej samej masie rozłożonych na odcinku równym wyniosłości czaszy, tak więc środek ciężkości rozpatrywanej czaszy leży w połowie jej wyniosłości. Mamy ostatecznie:

$$y_c = r \cdot \cos \alpha + \frac{1}{2}(r - r \cdot \cos \alpha) = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (1 + \cos \alpha) \quad (1.64)$$

Środek ciężkości stożka

Rozpatrzmy stożek o promieniu podstawy r i wysokości h , jak przedstawiono na rys. 1.62.



Rys. 1.62

Środek ciężkości stożka będzie leżał na osi obrotu, gdyż jest ona również osią symetrii. Należy więc wyznaczyć jedynie współrzędną z_c . Zgodnie z zależnościami (1.52) wyprowadzonymi dla ciała jednorodnego o znanym ciężarze właściwym mamy:

$$z_c = \frac{\int z \cdot dV}{V} \quad (\text{a})$$

Podzielmy cały stożek na elementarne objętości w postaci krążków o grubości dz i zmiennym promieniu ρ , jak na rys. 1.62.

Elementarna objętość wynosi:

$$dV = \pi \cdot \rho^2 \cdot dz \quad (\text{b})$$

Z rys. 1.62 zależność między promieniem krążka ρ i współrzędną jego położenia z wynosi:

$$\frac{r}{h} = \frac{\rho}{h - z} \quad (\text{c})$$

Po wyznaczeniu promienia ρ z zależności (c) i wstawieniu do (b) otrzymano elementarną objętość stożka w funkcji zmiennej z . Mamy:

$$dV = \pi \cdot \left(\frac{(h-z) \cdot r}{h} \right)^2 \cdot dz \quad (d)$$

Wstawiając (d) do wyrażenia (a), wyznaczono położenie środka ciężkości stożka:

$$z_c = \frac{\int_0^h \frac{\pi}{h^2} (r^2 h^2 z - 2 \cdot h \cdot r^2 z^2 + r^2 z^3) \cdot dz}{\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h} \quad (e)$$

i ostatecznie po scałkowaniu:

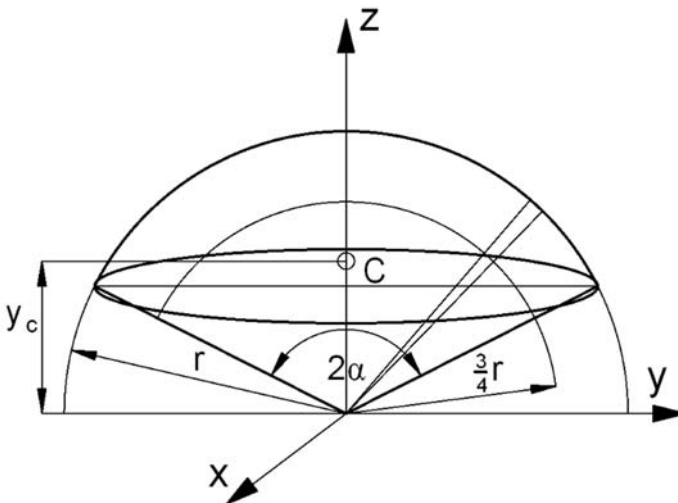
$$z_c = \frac{1}{4} \cdot h \quad (1.65)$$

Otrzymany wynik dotyczy również ostrosłupa o dowolnym kształcie podstawy.

Środek ciężkości wycinka kuli

Środek ciężkości wycinka kuli wyznaczono dla wycinka przedstawionego na rys. 1.63. Jest to wycinek kuli o promieniu r i kącie ograniczającym jego wycięcie 2α (patrz rysunek). Podzielmy rozważany wycinek kuli na ostrosłupy o dowolnym kształcie podstawy i wierzchołku w środku kuli.

Środki ciężkości tak wyodrębnionych brył leżą w odległości $\frac{1}{4}$ wysokości



Rys. 1.63

od podstawy, czyli utworzą powierzchnię kulistą o promieniu $\frac{3}{4}r$.
 Środek ciężkości otrzymanej czaszy kulistej wyznacza środek ciężkości wycinka kuli i zgodnie z zależnością (1.61) mamy:

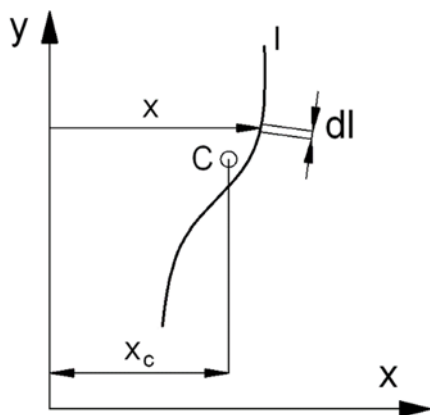
$$z_c = \frac{3}{8} \cdot r \cdot (1 + \cos \alpha) \quad (1.66)$$

1.8.4. Twierdzenia Pappusa-Guldina

Twierdzenia te pozwalają na wyznaczenie pola powierzchni i objętości brył obrotowych.

Twierdzenie I

Powierzchnia powstała przez obrót linii płaskiej dookoła stałej osi, leżącej w płaszczyźnie tej linii i nieprzecinającej jej, równa jest iloczynowi długości tej linii i drogi jaką zakreśli jej środek ciężkości.



Rys. 1.64

Zgodnie z rysunkiem 1.64, elementarna powierzchnia powstała w wyniku obrotu elementarnej długości linii dl wynosi: $dF = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dl$.

Całkując otrzymane wyrażenie na całą długość linii, mamy:

$$F = 2 \cdot \pi \cdot \int_1 x \cdot dl \quad (a)$$

Korzystając z pierwszej zależności (1.59), mamy: $x_c \cdot l = \int_1 x \cdot dl$. Po wstawieniu do wyrażenia (a) otrzymano ostatecznie:

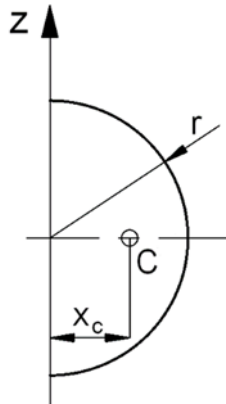
$$F = 2 \cdot \pi \cdot x_c \cdot l \quad (1.67)$$

Przykład 1.13

Wykorzystując twierdzenie Pappusa-Guldina, wyznaczyć wyrażenie na powierzchnię kuli.

Rozwiązanie

Powierzchnię kuli otrzymano obracając półokrąg o promieniu r dookoła osi pionowej (rys. 1.65).



Rys. 1.65

Dla półokręgu położenie środka ciężkości wynosi $x_c = \frac{2 \cdot r}{\pi}$. Ostatecznie mamy:

$$F = 2 \cdot \pi \cdot x_c \cdot l = 2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot r}{\pi} \cdot \pi \cdot r = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Powierzchnia kuli wynosi $F = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

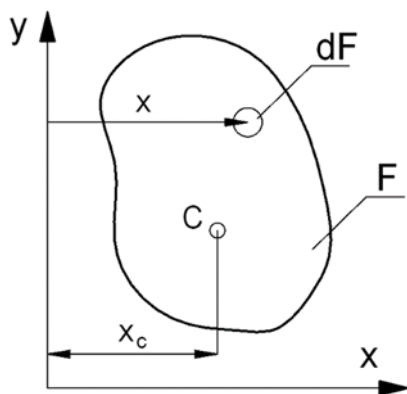
Twierdzenie II

Objętość bryły powstałej przez obrót figury płaskiej dookoła stałej osi, leżącej w płaszczyźnie tej figury i nieprzecinającej jej, równa jest iloczynowi pola powierzchni tej figury i drogi jaką zakresli jej środek ciężkości.

Zgodnie z rysunkiem 1.66, elementarna objętość powstała w wyniku obrotu elementarnej powierzchni figury dF wynosi: $dV = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot dF$.

Całkując otrzymane wyrażenie na całą powierzchnię figury, mamy:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot \int_V x \cdot dF \quad (b)$$



Rys. 1.66

Korzystając z pierwszej zależności (1.55), mamy: $x_c \cdot F = \int_V x \cdot dF$.

Po wstawieniu do wyrażenia (b) otrzymano ostatecznie:

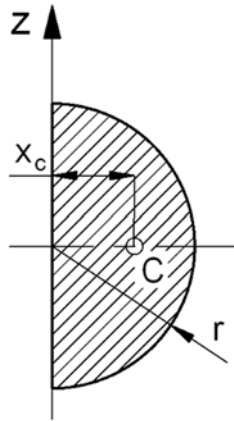
$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_c \cdot F \quad (1.68)$$

Przykład 1.14

Wykorzystując twierdzenie Pappusa-Guldina, wyznaczyć wyrażenie na objętość kuli.

Rozwiązanie

Objętość kuli otrzymamy, obracając półkole o promieniu r dookoła osi pionowej. Dla półkola położenie środka ciężkości wynosi $x_c = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$.



Rys. 1.67

Ostatecznie mamy:

$$V = 2 \cdot \pi \cdot x_c \cdot F = 2 \cdot \pi \cdot \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{2} \pi \cdot r^2 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Objętość kuli wynosi: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

CZĘŚĆ II. KINEMATYKA

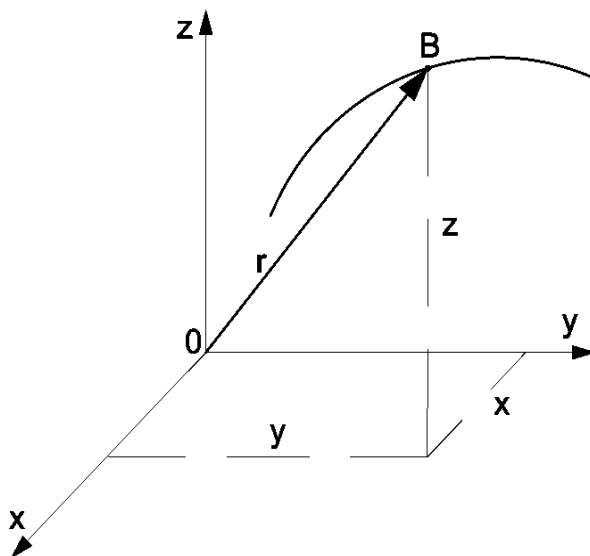
2.1. KINEMATYKA PUNKTU

Ruchem punktu (ciała) nazywamy zmianę jego położenia w czasie względem innego stałego ciała, z którym związany jest układ odniesienia. W badaniu ruchu układów mechanicznych, jako ciało nieruchome przyjmuje się Ziemię. Jednak gdybyśmy chcieli rozważać ruch kuli ziemskiej, to układ odniesienia należałoby związać ze Słońcem.

Z definicji ruchu punktu wynika, że bardzo ważną rolę w analizie jego ruchu odgrywa ciało, z którym zwiążemy układ odniesienia. Zazwyczaj jest to prostokątny układ osi współrzędnych, który nazywamy krótko **układem odniesienia**.

2.1.1. Ruch punktu w opisie analitycznym

Położenie poruszającego się punktu w przestrzeni możemy opisać trzema współzrędnymi, odniesionymi do osi prostokątnego układu współrzędnych Oxyz.



Rys. 2.1

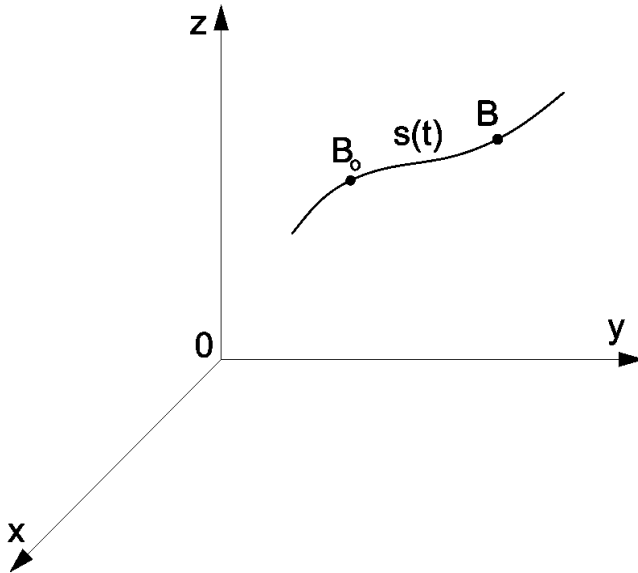
Układ osi będzie jednocześnie układem odniesienia dla poruszającego się punktu. Gdy punkt B porusza się, współzrędnymi x, y i z tego punktu ulegają zmianie, czyli są funkcjami czasu. Mamy wówczas:

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t) \qquad z = f_3(t) \qquad (2.1)$$

Tak zapisane współrzędne, jako funkcje czasu, noszą nazwę **równań ruchu punktu**. Gdy znane są te funkcje czasu, możemy dla dowolnej chwili wyznaczyć wartości współrzędnych punktu B, czyli określić jego położenie w danej chwili. Miejsce geometryczne chwilowych jego położenia nazywamy **torem punktu**. Równania ruchu punktu (2.1) noszą również nazwę parametrycznych równań toru punktu z parametrem czasu t .

2.1.2. Ruch punktu po torze

Często rozpatrujemy ruch punktu po znanym już torze. Jego położenie można opisać przez podanie wartości współrzędnej s , odmierzanej wzdłuż znanego toru, poczynając od stałego punktu B_0 , jak przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 2.2

Współrzędna s nosi nazwę **współrzędnej łukowej** i odpowiada długości łuku B_0B , odmierzanej od punktu B_0 zgodnie z przyjętym jako dodatni kierunkiem ruchu punktu po torze.

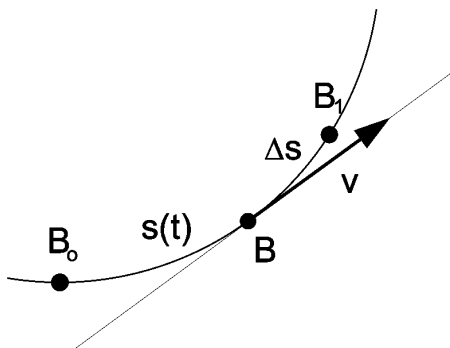
Ponieważ punkt zmienia swoje położenie wzdłuż toru, odmierzana od punktu B_0 współrzędna s jest w ogólności funkcją czasu. Współrzędna ta spełnia równanie, które jest równaniem ruchu i ma postać:

$$s = f(t) \qquad (2.2)$$

Powyższe równanie nosi nazwę **równania ruchu punktu po torze**.

2.1.3. Prędkość punktu

Rozpatrzmy ruch punktu B, który porusza się po dowolnym torze krzywoliniowym, jak pokazano na rysunku. Jego położenie w dowolnej chwili t można opisać współrzędną łukową s , odmierzaną od stałego punktu B_0 związanego z torem poruszającego się punktu.



Rys. 2.3

Niech w czasie Δt współrzędna łukowa $s(t)$ dozna pewnego przyrostu Δs . Wartość tego przyrostu, równa jest drodze punktu B, od chwili czasu t do chwili czasu $(t + \Delta t)$. Prędkością punktu B w ruchu krzywoliniowym nazwiemy wektor \mathbf{v} , o wartości bezwzględnej:

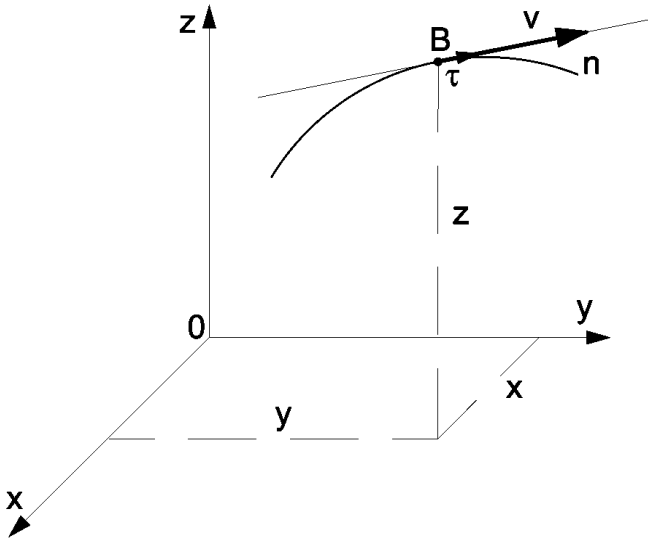
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (2.3)$$

Prędkością punktu B nazywamy wektor, którego wartość bezwzględna równa jest pochodnej drogi względem czasu. Wektor \mathbf{v} jest styczny do toru rozpatrywanego punktu i skierowany w kierunku jego ruchu.

Jeśli ruch punktu B odniesiemy do osi prostokątnego układu współrzędnych $Oxyz$ i opiszemy równaniami ruchu o postaci (2.1), mamy:

$$x = f_1(t) \quad y = f_2(t) \quad z = f_3(t) \quad (a)$$

Znając powyższe równania ruchu, prędkość \mathbf{v} możemy określić za pomocą jej składowych v_x , v_y i v_z .



Rys. 2.4

Jak wynika z rysunku, na kierunku stycznym do toru poruszającego się punktu przyjęto wektor jednostkowy, czyli wersor τ skierowany zgodnie z prędkością v . Na podstawie definicji prędkości możemy zapisać:

$$v = \tau \frac{ds}{dt} \quad (2.4)$$

Wersor τ jest wektorem jednostkowym skierowanym wzdłuż stycznej do toru, tak więc składowe tego wektora równe są jego cosinusom kierunkowym. Składowe wektora prędkości v_x , v_y i v_z mają wtedy wartość:

$$v_x = \cos \alpha \frac{ds}{dt} \quad v_y = \cos \beta \frac{ds}{dt} \quad v_z = \cos \gamma \frac{ds}{dt} \quad (b)$$

gdzie α , β i γ są kątami, jakie styczna do toru tworzy odpowiednio z osiami x , y , z przyjętego układu współrzędnych. Cosinusy kierunkowe stycznej do linii w przestrzeni wynoszą:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds} \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} \quad (c)$$

Ostatecznie, na podstawie (b) i (c) składowe prędkości v w nieruchomym prostokątnym układzie współrzędnych mają postać:

$$v_x = \frac{dx}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \quad v_y = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad (2.5)$$

$$v_z = \frac{dz}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dz}{dt}$$

Po wyznaczeniu składowych prędkości punktu, możemy wyznaczyć jej wartość bezwzględną, czyli po prostu wartość prędkości punktu.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \quad (2.6)$$

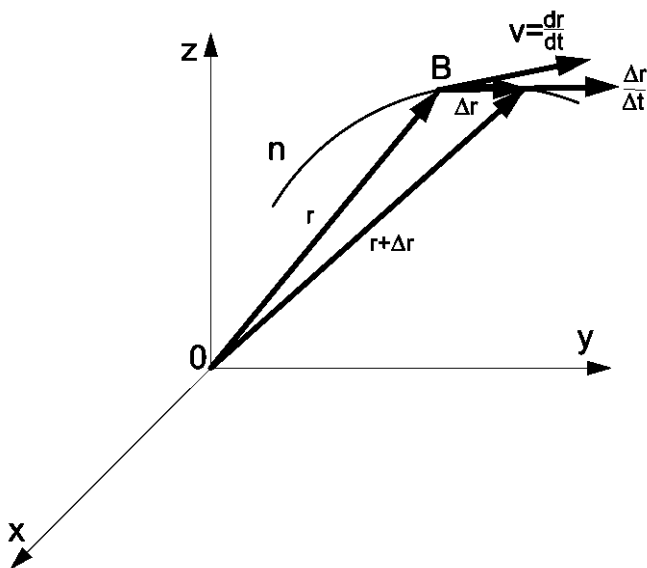
Z otrzymanych zależności (2.5) wynika następujące twierdzenie:

Rzut prędkości punktu poruszającego się w przestrzeni na dowolną nieruchomą oś równy jest prędkości rzutu tego punktu wzdłuż tej osi.

Położenie punktu B, który porusza się w przestrzeni, można również opisać promieniem-wektorem \mathbf{r} , poprowadzonym z początku układu osi współrzędnych O, jak pokazano na rysunku. Promień-wektor \mathbf{r} może zmieniać swą wartość, jak i kierunek w czasie, a więc jest wektorową funkcją czasu.

Zgodnie z pochodną geometryczną funkcji wektorowej możemy napisać:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.7)$$



Rys. 2.5

Z powyższego wzoru wynika, że prędkość punktu, którego położenie opisane jest promieniem-wektorem $\mathbf{r}(t)$, równa jest pochodnej geometrycznej tego promienia-wektora względem czasu.

Z interpretacji fizycznej pochodnej geometrycznej funkcji wektorowej $\mathbf{r}(t)$ wiadomo, że pochodna geometryczna wektora jest prędkością jego końca. Tak więc prędkość punktu B, którego położenie opisuje wektor $\mathbf{r}(t)$, jest prędkością końca wektora \mathbf{r} , a więc wektorem stycznym do hodografu promienia-wektora, czyli do toru poruszającego się punktu.

Jednostka prędkości wynika ze wzoru (2.3). Przyjmując jednostkę długości 1 metr i czasu 1 sekunda, mamy:

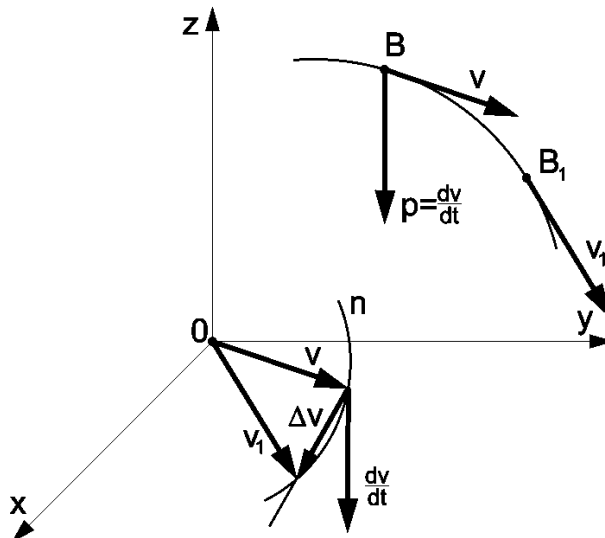
$$\text{jednostka prędkości} = 1 \text{ m/s}$$

Powszechnie używana jednostka prędkości 1 km/godz jest równa około 0,278 m/s.

2.1.4. Przyspieszenie punktu

Przyspieszenie we współrzędnych naturalnych

Niech punkt B porusza się w przestrzeni z prędkością \mathbf{v} . W czasie ruchu tego punktu wektor prędkości może zmieniać swój kierunek oraz wartość, czyli jest wektorową funkcją czasu t . Na rysunku poniżej przedstawiono prędkości punktu B w dwóch położeniach B i B_1 , odpowiadających chwilom czasu t i $t + \Delta t$.



Rys. 2.6

Jeśli oznaczymy prędkości poruszającego się punktu w chwilach t i $t + \Delta t$ odpowiednio \mathbf{v} i \mathbf{v}_1 , to w czasie Δt prędkość punktu dozna przyrostu geometrycznego $\Delta \mathbf{v}$, czyli $\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$.

Dla zobrazowania tego przyrostu prędkości, wektory \mathbf{v} i \mathbf{v}_1 przesunięto równolegle do początku O nieruchomego układu współrzędnych. Przez końce tych wektorów poprowadzono linię n , która nosi nazwę **hodografu prędkości** badanego punktu B .

Wielkość wektorową, charakteryzującą zmianę prędkości punktu w czasie, nazywać będziemy przyspieszeniem. Tak więc stosunek przyrostu geometrycznego prędkości $\Delta \mathbf{v}$ do przyrostu czasu Δt nazwiemy **przyspieszeniem średnim** punktu B :

$$\mathbf{p}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}}{t_1 - t} \quad (2.8)$$

Wektor przyspieszenia średniego ma ten sam kierunek co przyrost prędkości $\Delta \mathbf{v}$, a jego wartość zależy od przedziału czasu, w którym przyspieszenie to wyznaczamy. Wyznaczenie wielkości charakteryzującej chwilową zmianę prędkości wymaga przejścia do granicy, czyli założenia, że Δt dąży do zera. Otrzymany wówczas wektor nazywamy **przyspieszeniem chwilowym** w chwili t . Jego wartość wynosi:

$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (2.9)$$

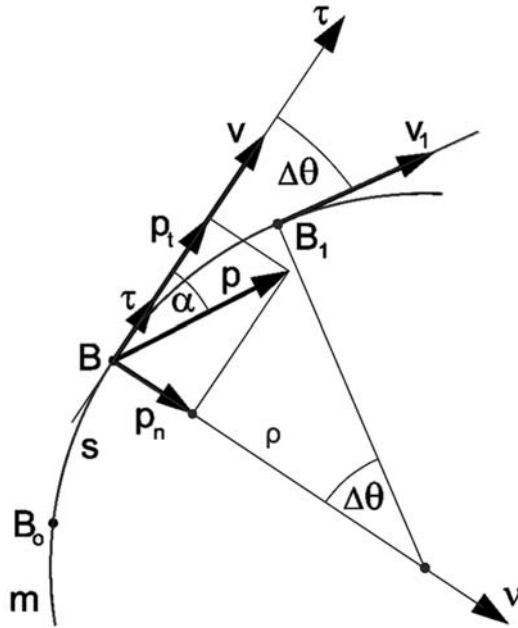
Przyspieszenie punktu równe jest granicy, do której dąży stosunek przyrostu geometrycznego prędkości do przyrostu czasu, gdy przyrost czasu dąży do zera.

Ze wzoru (2.9) wynika również, że przyspieszenie \mathbf{p} jest równe pochodnej geometrycznej prędkości \mathbf{v} względem czasu. Skierowane jest wzdłuż stycznej do hodografu prędkości i przyłożone w punkcie, którego przyspieszenie wyznaczamy.

Przyspieszenie jest wynikiem nie tylko zmiany wartości wektora prędkości punktu, ale i jego kierunku. Tak więc jeśli punkt porusza się po torze krzywoliniowym nawet ze stałą prędkością, przyspieszenie jest różne od zera, gdyż prędkość zmienia swój kierunek doznając przyrostu geometrycznego. Przyspieszenie jest równe zero jedynie w ruchu jednostajnym prostoliniowym.

Zbadajmy poruszający się punkt B po torze m . Położenie tego punktu zostało opisane współrzędną łukową s , jak przedstawiono na rys. 2.7. Załóżmy dalej, że torem tego punktu jest linia płaska. Przez \mathbf{v} oznaczono prędkość punktu B w chwili t , a przez \mathbf{v}_1 prędkość w chwili $t + \Delta t$, czyli w położeniu B_1 . Z równań (2.7) i (2.9) mamy:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \quad (2.10)$$



Rys. 2.7

Zgodnie z zależnością (2.4), po przyjęciu wersorów wzdłuż stycznej i normalnej do toru punktu B, prędkość tego punktu możemy zapisać w postaci:

$$\mathbf{v} = \tau \cdot v \quad (a)$$

a więc przyspieszenie tego punktu, zgodnie z równaniem (2.10) jako pochodna geometryczna prędkości, wynosi:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\tau}{dt} v + \tau \frac{dv}{dt} \quad (2.11)$$

Pochodna wersora jednostkowego τ , jest wektorem o kierunku wersora \mathbf{v} i wartości liczbowej równej prędkości jego końca. Wartość liczbową tej pochodnej wynosi: $\left| \frac{d\tau}{dt} \right| = \omega \cdot 1$, gdzie ω jest prędkością kątową, z jaką zmienia się kierunek wektora prędkości punktu B. Na podstawie rys. 2.7 prędkość kątową ω można zapisać jako: $\omega = \frac{v}{\rho}$. Po uwzględnieniu wersora \mathbf{v} na kierunku normalnym ostatecznie całkowite przyspieszenie wynosi:

$$\mathbf{p} = v \frac{v^2}{\rho} + \boldsymbol{\tau} \frac{dv}{dt} \quad (2.12)$$

gdzie ρ jest promieniem krzywizny toru poruszającego się punktu.

Tak więc całkowite przyspieszenie punktu w ruchu krzywoliniowym jest sumą geometryczną przyspieszenia normalnego i stycznego, gdzie:

$$\begin{aligned} \text{przyspieszenie normalne } p_n &= \frac{v^2}{\rho} \\ \text{przyspieszenie styczne } p_t &= \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Przyspieszenie normalne punktu w ruchu krzywoliniowym równe jest ilorazowi kwadratu prędkości punktu i promienia krzywizny toru.

Przyspieszenie styczne punktu w ruchu krzywoliniowym równe jest pochodnej prędkości względem czasu.

Całkowitą wartość liczbową przyspieszenia punktu oraz kąt, jaki to przyspieszenie tworzy z kierunkiem prędkości można obliczyć z zależności:

$$p = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\rho^2}} \quad \cos \alpha = \frac{p_t}{p} \quad (2.14)$$

2.1.5. Przyspieszenie punktu w opisie analitycznym

Jeśli punkt porusza się w stałym układzie osi współrzędnych, to jego równania ruchu mają postać:

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t) \quad (a)$$

Zgodnie z równaniami (2.5) składowe prędkości punktu \mathbf{v} są pochodnymi względem czasu odpowiednich jego współrzędnych. Możemy to zapisać:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \quad (b)$$

Z równania (2.9) wynika, że przyspieszenie punktu \mathbf{p} jest pochodną wektorową po czasie prędkości \mathbf{v} . Składowe wektora przyspieszenia równe więc będą pochodnym odpowiednich składowych wektora prędkości \mathbf{v} . Mamy więc:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \ddot{x} & p_y &= \frac{dv_y}{dt} = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ p_z &= \frac{dv_z}{dt} = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Z równań (2.15) wynika, że składowe przyspieszenia punktu w stałym prostokątnym układzie współrzędnych równe są pierwszym pochodnym względem czasu

składowych prędkości, czyli drugim pochodnym względem czasu odpowiednich współrzędnych badanego punktu. Znając składowe przyspieszenia, możemy wyznaczyć jego wartość bezwzględną:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (2.16)$$

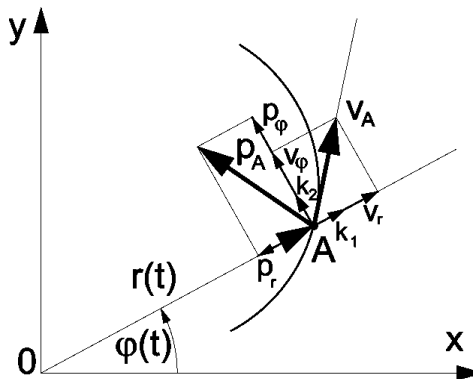
Jednostka przyspieszenia wynika z definicji i wyraża stosunek przyrostu prędkości do przyrostu czasu. Równa jest więc ilorazowi jednostki prędkości i jednostki czasu:

$$\text{jednostka przyspieszenia} = 1 \text{ m/s}^2$$

Jest to przyspieszenie takiego ruchu, w którym przyrost prędkości punktu w czasie 1 s ma wartość liczbową równą 1 m/s.

2.1.6. Prędkość i przyspieszenie punktu w układzie biegunowym na płaszczyźnie

Niech położenie punktu A na płaszczyźnie opisują współrzędne w układzie biegunowym, a więc, promień $r = r(t)$ i kąt $\varphi = \varphi(t)$, jak pokazano na rys. 2.8.



Rys. 2.8

Całkowita prędkość punktu A, zgodnie z definicją, będzie pochodną wektorową promienia wektora r opisującego położenie punktu w czasie. Uwzględniając przyjęte wersory k_1 i k_2 oraz $r(t) = k_1 r(t)$, otrzymano:

$$v_A = \frac{dr}{dt} = \frac{dk_1}{dt} \cdot r + k_1 \cdot \frac{dr}{dt} \quad (a)$$

Pochodna wektorowa wersora k_1 jako prędkość jego końca jest wektorem o kierunku wersora k_2 i wartości wynikającej z obrotu promienia r , czyli zmiany kąta φ . Mamy:

$$\frac{d\mathbf{k}_1}{dt} = \mathbf{k}_2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot 1 \quad (\text{b})$$

Wstawiając (b) do (a), otrzymujemy ostatecznie:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{k}_1 \cdot \frac{dr}{dt} + \mathbf{k}_2 \frac{d\varphi}{dt} \cdot r \quad (2.17)$$

Przy wektorze \mathbf{k}_1 otrzymano składową prędkości w kierunku zgodnym z przyrostem promienia wektora $v_r = \frac{dr}{dt}$ oraz przy wektorze \mathbf{k}_2 otrzymano składową

w kierunku prostopadłym do promienia i zgodnym z przyrostem kąta $v_\phi = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$.

Mamy więc:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{k}_1 \cdot v_r + \mathbf{k}_2 \cdot v_\phi \quad (\text{c})$$

Przyspieszenie punktu A zgodnie z definicją jest pochodną wektorową prędkości względem czasu. Różniczkując równość (2.17), mamy:

$$\mathbf{p}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} + \mathbf{k}_1 \cdot \frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d\mathbf{k}_2}{dt} \left(\frac{d\varphi}{dt} \cdot r \right) + \mathbf{k}_2 \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2} \cdot r + \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} \right) \quad (\text{d})$$

Po uwzględnieniu zależności (b) i wyznaczeniu w identyczny sposób pochodnej drugiego wektora jako:

$$\frac{d\mathbf{k}_2}{dt} = -\mathbf{k}_1 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot 1 \quad (\text{e})$$

z równania (d) otrzymano wartość przyspieszenia punkt A:

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{k}_1 \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] + \mathbf{k}_2 \left[r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} \right] \quad (2.18)$$

gdzie składowa przyspieszenia p_r w kierunku promienia wynosi:

$$p_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r \cdot \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (2.19)$$

i składowa p_ϕ w kierunku prostopadłym do promienia ma wartość:

$$p_\phi = \left[r \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2 \cdot \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{dt} \right] \quad (2.20)$$

2.1.7. Wybrane przypadki ruchu punktu

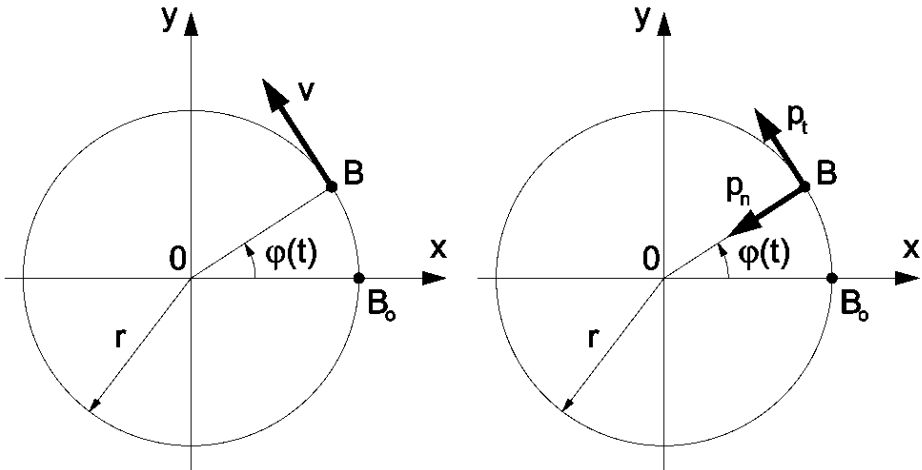
Ruch po okręgu

Niech punkt B porusza się po okręgu koła o promieniu r , jak pokazano na rysunku. Zgodnie ze wzorem (2.2) równanie ruchu tego punktu po torze można przedstawić w postaci:

$$s = r \varphi(t) \quad (a)$$

gdzie parametr s oznacza drogę przebytą przez punkt i nosi nazwę współrzędnej łukowej. Współrzędna łukowa odmierzana jest od nieruchomego punktu B_0 , a $\varphi(t)$ jest kątem obrotu promienia r wyrażonym w radianach. Wartość liczbowa prędkości w punktu A wynosi:

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} \quad (b)$$



Rys. 2.9

Wielkość $\frac{d\varphi}{dt}$ jest **prędkością kątową** promienia wodzącego r , którą oznaczono symbolem ω . Mamy więc:

$$v = r \omega \quad (2.21)$$

W ruchu punktu po okręgu jego prędkość liniowa jest iloczynem promienia i prędkości kątowej tego promienia, określającego położenie poruszającego się punktu.

Na ogół prędkość kątową jest pewną funkcją czasu t . Gdy jest ona stała i znana jest liczba obrotów n , które promień wodzący wykonuje w ciągu jednej minuty, wtedy łatwo można obliczyć prędkość kątową ω wyrażoną w rad/s:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \text{ rad/s} \quad (2.22)$$

Całkowite przyspieszenie \mathbf{p} punktu A poruszającego się po okręgu wyznaczono jako sumę geometryczną przyspieszenia stycznego p_τ i przyspieszenia normalnego p_v . Składowe te zgodnie z zależnościami (2.13) wynoszą:

$$p_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon \quad (2.23)$$

$$p_v = \frac{v^2}{\rho} = \frac{r^2\omega^2}{r} = \omega^2 r \quad (2.24)$$

gdzie $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ i nosi nazwę **przyspieszenia kąowego**.

Znając składowe przyspieszenia, styczną i normalną, można wyznaczyć całkowitą jego wartość, która wynosi:

$$p = \sqrt{p_\tau^2 + p_v^2} \quad (2.25)$$

Przyspieszenie normalne w ruchu punktu po okręgu nosi również nazwę przyspieszenia dośrodkowego.

Rzut punktu pod kątem do poziomu

Przeanalizujmy przebieg ruchu punktu B, który odbywa się w płaszczyźnie pionowej ze stałym przyspieszeniem ziemskim \mathbf{g} .

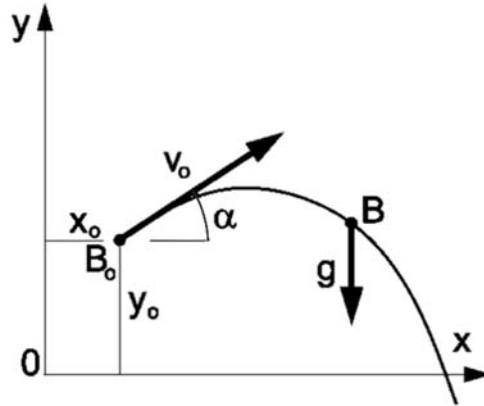
W przyjętym układzie odniesienia, jako układzie osi współrzędnych Oxy, składowe przyspieszenia poruszającego się punktu wynoszą:

$$p_x = \ddot{x} = 0 \quad p_y = \ddot{y} = -g \quad (a)$$

Po dwukrotnym scałkowaniu powyższych równań wyrażających składowe przyspieszenia w przyjętym układzie osi, otrzymano odpowiednio:

$$v_x = \int p_x dt = C_1 \quad x = \int v_x dt = C_1 t + C_2 \quad (b)$$

$$v_y = \int p_y dt = -gt + C_3 \quad y = \int v_y dt = -\frac{gt^2}{2} + C_3 t + C_4$$



Rys. 2.10

gdzie C_1 , C_2 , C_3 i C_4 są stałymi całkowania, które należy wyznaczyć z warunków początkowych ruchu. Jeśli dla $t = 0$ punkt znajdował się w położeniu B_0 opisanym współrzędnymi x_0 i y_0 , natomiast prędkość początkowa wynosiła v_0 i tworzyła kąt α z poziomem, warunki początkowe mają postać:

$$\begin{aligned}
 (x)_{t=0} &= x_0 \\
 (y)_{t=0} &= y_0 \\
 (v_x)_{t=0} &= (\dot{x})_{t=0} = v_0 \cos \alpha \\
 (v_y)_{t=0} &= (\dot{y})_{t=0} = v_0 \sin \alpha
 \end{aligned} \tag{c}$$

Po wstawieniu tych warunków do równań (b), otrzymano wartości stałych C_1 , C_2 , C_3 i C_4 :

$$\begin{aligned}
 C_1 &= v_0 \cos \alpha & C_2 &= x_0 \\
 C_3 &= v_0 \sin \alpha & C_4 &= y_0
 \end{aligned}$$

Wyznaczone stałe całkowania pozwalają zapisać równania ruchu punktu w przyjętym układzie osi współrzędnych. Równania ruchu mają postać:

$$x = x_0 + (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = y_0 + (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2} \tag{2.26}$$

Torem badanego punktu jest linia opisana równaniem powstałym po wyrugowaniu parametru czasu t . Równanie to ma postać:

$$y = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} (x - x_0)^2 \quad (2.27)$$

Jak wynika z otrzymanego równania, torem analizowanego punktu jest krzywa drugiego stopnia, a więc parabola o osi równoległej do osi y , zwrócona wypukłością ku górze.

Przykład 2.1

Znając równania ruchu punktu materialnego w prostokątnym układzie osi współrzędnych, zbadać jego ruch, wyznaczając tor poruszającego się punktu, jego prędkość i przyspieszenie. Równania ruchu mają postać:

$$x = 3 \cdot \sin 2t$$

$$y = 3 \cdot \cos 2t$$

Rozwiązanie

Analiza kinematyczna ruchu punktu materialnego dotyczy dwu zagadnień. Jedna grupa zagadnień polega na **badaniu** znanych równań ruchu wyznaczonych w prostokątnym układzie osi współrzędnych bądź równań ruchu po torze. Druga grupa zagadnień dotyczy **układania** równań ruchu punktu, również w prostokątnym układzie osi współrzędnych lub w ruchu po torze. Należy jednak pamiętać, że do wyznaczenia przyspieszenia punktu, którego ruch opisuje równanie ruchu po torze, potrzebny jest promień krzywizny toru w danej chwili ruchu. Tak więc dla ruchu krzywoliniowego punktu po torze dowolnym, innym niż ruch po okręgu koła, jedyną możliwością wyznaczenia przyspieszenia poruszającego się punktu, pozostają równania ruchu, wyznaczone w prostokątnym układzie osi współrzędnych. Wyznaczenie toru poruszającego się punktu polega na wyrugowaniu z równań ruchu parametru czasu t . Dla równań ruchu zawierających funkcje trygonometryczne równanie toru otrzymamy pozbywając się funkcji trygonometrycznych w całości.

Tak więc analizowane równania ruchu podniesiono stronami do kwadratu. Mamy więc:

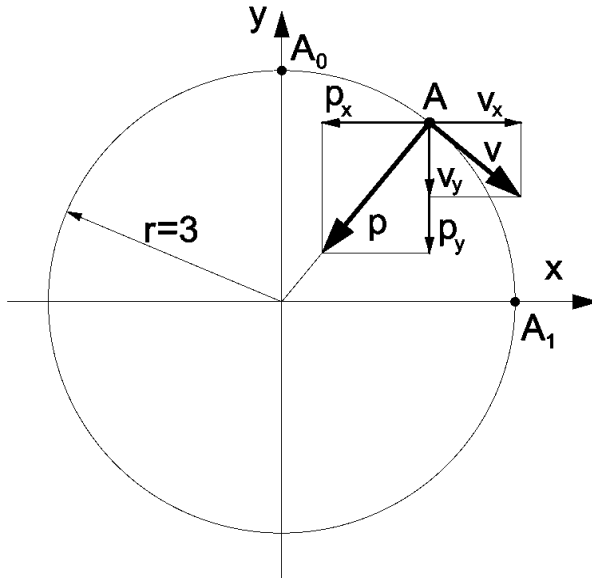
$$x^2 = 3^2 \cdot \sin^2 2t$$

$$y^2 = 3^2 \cdot \cos^2 2t$$

Dodając stronami otrzymane równania, mamy ostatecznie:

$$x^2 + y^2 = 3^2$$

Jest to równanie okręgu o promieniu $r = 3$ m.



Rys. 2.11

Początek ruchu punktu wyznaczono dla $t = 0$. Po wstawieniu $t = 0$ do równań ruchu, otrzymano położenie początkowe A_0 , o współrzędnych $x_0 = 0$, $y_0 = 3$. Wstawiając następną chwilę czasu do równań ruchu, określono jego kierunek.

Dla czasu $t_1 = \frac{\pi}{4}$ wyznaczono położenie punktu A_1 o współrzędnych $x_1 = 3$,

$y_1 = 0$. Oznacza to, że ruch punktu jest zgodny z ruchem wskazówek zegara.

Prędkość punktu, którego ruch zadany jest równaniami ruchu w układzie osi współrzędnych prostokątnych, wyznaczono jako sumę geometryczną składowych obliczonych względem osi układu. Mamy więc:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 6 \cdot \cos 2t \quad V_y = \frac{dy}{dt} = -6 \cdot \sin 2t$$

i ostatecznie:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{6^2 \cdot \cos^2 2t + 6^2 \cdot \sin^2 2t} = 6 \text{ m/s}$$

Przyspieszenie również wyznaczono jako sumę geometryczną składowych obliczonych względem osi układu. Różniczkując względem czasu składowe prędkości, otrzymano składowe przyspieszeń. Mamy więc:

$$p_x = \frac{dV_x}{dt} = -12 \cdot \sin 2t \quad p_y = \frac{dV_y}{dt} = -12 \cdot \cos 2t$$

i ostatecznie:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{12^2 \cdot \sin^2 2t + 12^2 \cdot \cos^2 2t} = 12 \text{ m/s}^2$$

Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń, obie składowe przyspieszenia w przyjętym układzie osi współrzędnych są ujemne, a całkowite przyspieszenie ma wartość stałą.

Torem poruszającego się punktu jest okrąg o promieniu $r = 3 \text{ m}$, tak więc całkowite przyspieszenie można wyznaczyć jako sumę geometryczną przyspieszenia stycznego i normalnego. Mamy więc $p_t = \frac{dV}{dt} = 0$, ponieważ:

$$V = 6 \text{ m/s} = \text{const}$$

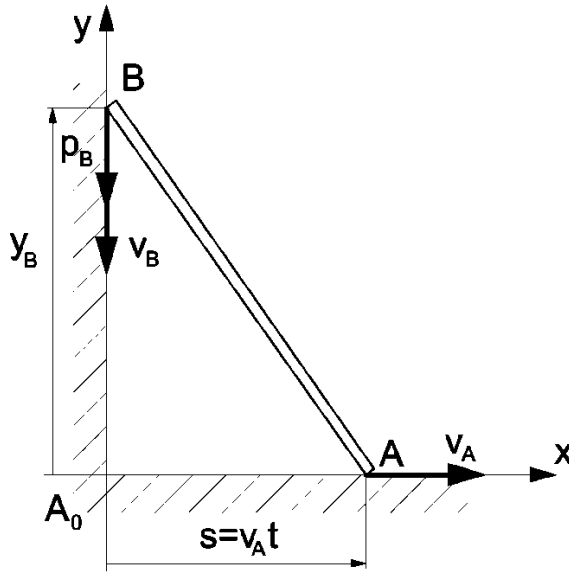
i

$$p_n = \frac{V^2}{r} = \frac{6^2}{3} = 12 \text{ m/s}^2$$

Tak więc całkowite przyspieszenie poruszającego się punktu jest stałe i równe przyspieszeniu normalnemu.

Przykład 2.2

Dla ślizgającego się pręta AB o długości l , po dwu prostopadłych płaszczyznach, wyznaczyć równanie ruchu końca B, ślizgającego się po płaszczyźnie pionowej. Wyznaczyć również jego prędkość i przyspieszenie, jeśli ruch pręta wymuszony jest stałą prędkością końca A wynoszącą $V_A = \text{const}$.



Rys. 2.12

Rozwiązanie

Równanie ruchu punktu B pręta AB wyznaczono dla dowolnej chwili ruchu. Położenie początkowe pręta przyjęto jako położenie szczególne, od którego należy odmierzać przemieszczenie punktów układu oraz czas. Przyjęto, że w chwili początkowej pręt był pionowy, a punkt A znajdował się w położeniu A_0 . W dowolnej chwili ruchu koniec A przebył drogę $s = V_A \cdot t$, natomiast położenie końca B pręta opisuje współrzędna y_B , która jest równaniem ruchu tego punktu:

$$y_B = \sqrt{l^2 - V_A^2 \cdot t^2}$$

Ruch punktu B jest ruchem prostoliniowym wzdłuż osi y , tak więc jego prędkość wynosi:

$$V_B = \frac{dy_B}{dt} = -\frac{V_A^2 \cdot t}{\sqrt{l^2 - V_A^2 \cdot t^2}} \text{ m/s}$$

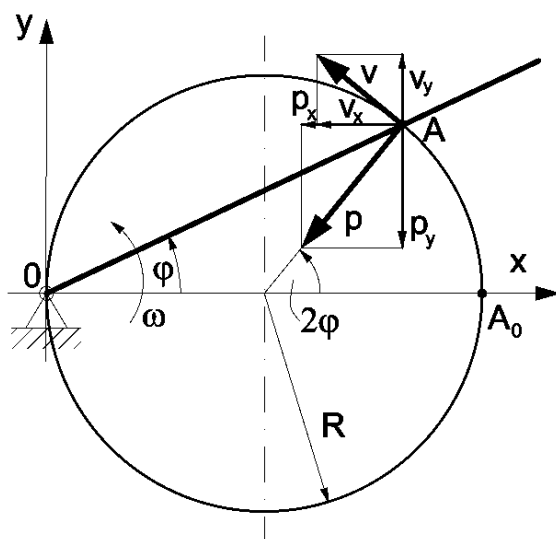
Znak minus oznacza, że prędkość punktu B skierowana jest przeciwnie do przyjętego kierunku osi y . Przyspieszenie końca B pręta jest równe pochodnej jego prędkości względem czasu. Mamy więc:

$$p_B = \frac{dV_B}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{V_A^2 \cdot t}{\sqrt{l^2 - V_A^2 \cdot t^2}} \right) = \frac{V_A^2 \cdot l^2}{(l^2 - V_A^2 \cdot t^2)^{3/2}} \text{ m/s}^2$$

Przyspieszenie końca B pręta jest dodatnie, czyli zgodnie skierowane z kierunkiem prędkości.

Przykład 2.3

Po okręgu kola o promieniu R ślizga się obręczka A. Na okręgu w punkcie O zamocowano przegubowo pręt, który obraca się ze stałą prędkością kątową ω . Wyznaczyć równania ruchu oraz prędkość i przyspieszenie obręczki A, jeśli połączymy ją z prętem i okręgiem kola.



Rys. 2.13

Ruch obręczki rozpatrzono w układzie osi współrzędnych związanych z torem, po którym się ona porusza. Jako położenie początkowe ruchu przyjęto położenie poziome obrotowego pręta i obręczki w położeniu A_0 . W dowolnej chwili pręt obrócił się o kąt $\varphi = \int \omega \cdot dt = \omega \cdot t$ ($\omega = \text{const}$), a obręczka przesunęła się

w położeniu A. Równania ruchu obrączki w przyjętym układzie osi współrzędnych mają postać:

$$x = R + R \cdot \cos 2\omega t$$

$$y = R \cdot \sin 2\omega t$$

Z równań ruchu obrączki wyznaczono składowe jej prędkości oraz prędkość całkowitą. Mamy więc:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -2 \cdot R \cdot \omega \cdot \sin 2\omega t$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 2 \cdot R \cdot \omega \cdot \cos 2\omega t$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4 \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2 2\omega t + 4 \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 2\omega t} = 2 \cdot R \cdot \omega$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że ruch obrączki po okręgu koła odbywa się ze stałą prędkością $V = 2R\omega$ m/s.

Przyspieszenie całkowite obrączki wyznaczono również ze składowych odniesionych do przyjętego układu osi współrzędnych. Składowe tego przyspieszenia oraz przyspieszenie całkowite obrączki wynoszą:

$$p_x = \frac{dV_x}{dt} = -4 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \cos 2\omega t$$

$$p_y = \frac{dV_y}{dt} = -4 \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \sin 2\omega t$$

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} = \sqrt{16 \cdot R^2 \cdot \omega^4 \cdot \cos^2 2\omega t + 16 \cdot R^2 \cdot \omega^4 \sin^2 2\omega t} = 4 \cdot R \cdot \omega^2$$

Całkowite przyspieszenie obrączki w jej ruchu po okręgu koła jest stałe i wynosi $p = 4R\omega^2$ m/s². Skierowane jest do środka toru, ponieważ obie składowe przyspieszenia wyznaczone względem przyjętych osi współrzędnych mają wartości ujemne.

Jak wynika z treści przykładu, obrączka porusza się po okręgu koła o znanym promieniu R . Jej ruch można więc opisać równaniem ruchu po torze i z niego wyznaczyć prędkość i przyspieszenie obrączki.

Zgodnie z przyjętym położeniem początkowym obrotowego pręta (patrz rysunek), równanie ruchu po torze obrączki ma postać:

$$s = 2 \cdot \varphi \cdot R = 2 \cdot R \cdot \omega \cdot t$$

Zgodnie z definicją, prędkość obrączki wynosi:

$$V = \frac{ds}{dt} = 2 \cdot R \cdot \omega \text{ m/s}$$

Przyspieszenie obrączki w jej ruchu po torze wyznaczono jako sumę geometryczną przyspieszenia stycznego i przyspieszenia normalnego. Przyspieszenie styczne wynosi:

$$p_t = \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{ponieważ } V = \text{const}$$

Przyspieszenie normalne ma wartość:

$$p_n = \frac{V^2}{R} = \frac{4 \cdot R^2 \cdot \omega^2}{R} = 4 \cdot R \cdot \omega^2 \text{ m/s}^2$$

Całkowite przyspieszenie jest stałe i równe przyspieszeniu normalnemu.

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że analiza ruchu punktu poruszającego się po okręgu koła, w oparciu o równanie ruchu po torze, pozwala na szybsze wyznaczenie jego prędkości i przyspieszenia.

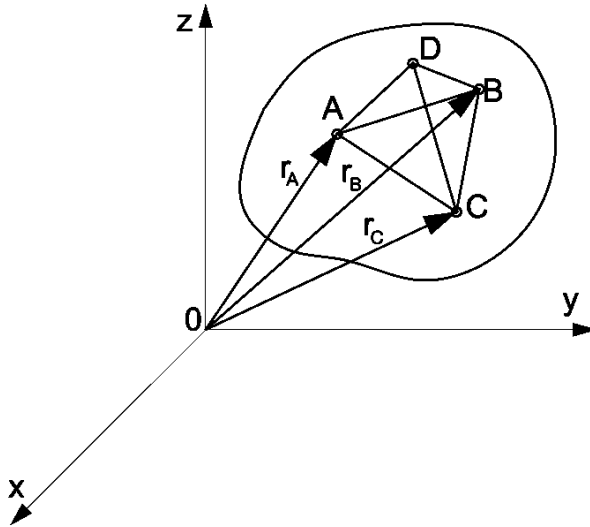
Wyniki otrzymane z obliczeń prędkości i przyspieszenia obrączki dla ruchu odniesionego do układu osi współrzędnych i ruchu odniesionego do równania ruchu po torze są identyczne.

2.2. KINEMATYKA CIAŁA SZTYWNEGO

2.2.1. Położenie ciała w przestrzeni. Stopnie swobody

Dotychczasowe rozważania dotyczyły ruchu punktu materialnego, czyli ciała stanowiącego najprostszy obiekt geometryczny. Obecnie przejdziemy do analizy ruchu ciała sztywnego, czyli takiego ciała, w którym wzajemne odległości między jego punktami nie ulegają zmianie.

Jak już wcześniej podano, ruch ciała polega na zmianie w czasie jego położenia względem stałego układu odniesienia, związanego z innym ciałem. Aby móc analizować taki ruch, należy przyjąć ogólne zasady umożliwiające opisywanie chwilowych położenia rozważanego ciała względem przyjętego za stały układu odniesienia. Jeśli za układ odniesienia zostanie przyjęty prostokątny układ osi współrzędnych, to jednoznaczne położenie tego ciała w tym układzie można określić podając współrzędne położenia trzech dowolnych punktów nieleżących na jednej prostej.



Rys. 2.14

Istotnie, znając położenie wybranych punktów A, B i C, będących wierzchołkami powstałego trójkąta, można względem tych punktów jednoznacznie wyznaczyć położenie dowolnego punktu D należącego również do rozważanego ciała. Położenie punktów A, B i C określono współrzędnymi w prostokątnym układzie osi współrzędnych Oxy i ponieważ rozpatruje się ruch ciała sztywnego, współrzędne te spełniają związki wynikające z definicji tego ciała. Mianowicie wzajemne odległości między punktami ciała sztywnego są stałe i niezależne od jego położenia w przestrzeni. Związki te mają postać:

$$\begin{aligned}
 (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 &= r_{AB}^2 \\
 (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 &= r_{AC}^2 \\
 (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 &= r_{BC}^2
 \end{aligned}
 \tag{2.28}$$

gdzie r_{AB} , r_{AC} i r_{BC} są długościami odcinków odpowiednio AB, AC i BC.

Otrzymano trzy równania, a do określenia położenia punktów A, B i C potrzebnych jest dziewięć współrzędnych, tak więc sześć z tych współrzędnych można przyjąć dowolnie, a pozostałe trzy należy wyznaczyć z powyższych równań. Wynika z tego, że aby jednoznacznie opisać położenie swobodnego ciała w przestrzeni, niezbędnych jest sześć niezależnych parametrów. Liczbę tych parametrów nazywać będziemy **liczbą stopni swobody**. Jeśli ciało poddane jest więzom i nie jest swobodne, jego liczba stopni swobody jest mniejsza od sześciu

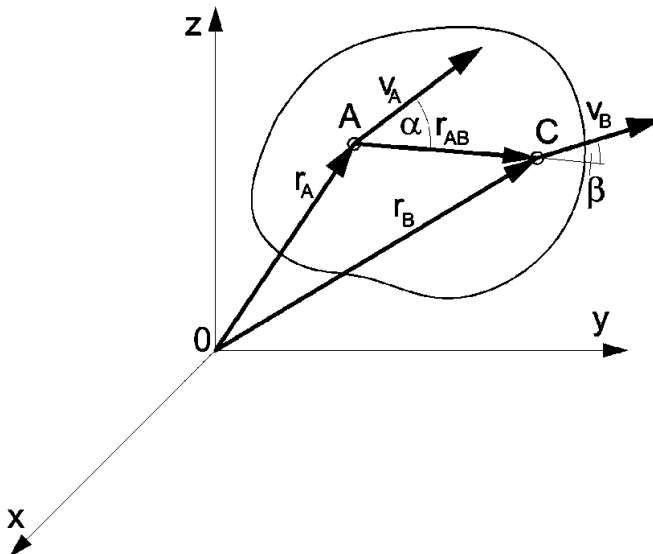
i potrzeba mniej parametrów do opisanego jego położenia w przestrzeni. W zależności od ilości odebranych stopni swobody, otrzymujemy ruchy ciała sztywnego nazwane: postępowym, obrotowym, płaskim czy kulistym.

2.2.2. Związek między prędkościami dwu punktów ciała sztywnego

Wyznamy związek między prędkościami dwu punktów poruszającego się ciała sztywnego. Istnienie takiej zależności wynika z faktu, że w ciele sztywnym odległość między punktami tego ciała jest stała i nie pozwala na zupełnie niezależne ich ruchy.

Na rysunku poniżej oznaczono przez \mathbf{v}_A i \mathbf{v}_B prędkości punktów A i B, a przez \mathbf{r}_A i \mathbf{r}_B promienie-wektory tych punktów poprowadzone z początku układu współrzędnych. Prędkości tych punktów wynoszą:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \qquad \mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} \qquad (a)$$



Rys. 2.15

a z rysunku możemy zapisać:

$$\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A \qquad (b)$$

Różniczkując otrzymane wyrażenie, mamy:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \quad (c)$$

Dla ciała sztywnego poruszającego się w przestrzeni, wektor \mathbf{r}_{AB} jest stały względem tego ciała, czyli nie zmienia swej wartości ani kierunku. Przyrost tego wektora wynika jedynie z ruchu samego ciała. Tak więc po zróżniczkowaniu równania (b) względem czasu, pochodna bezwzględna wektora \mathbf{r}_{AB} jako prędkość jego końca wynosi:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}_{AB}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.29)$$

Jak wynika z otrzymanej zależności, pochodna bezwzględna wektora \mathbf{r}_{AB} równa jest sumie pochodnej tego wektora wyznaczonej w układzie związanym z rozpatrywanym ciałem (pochodnej lokalnej) oraz prędkości końca tego wektora wynikającej z chwilowego ruchu obrotowego tego ciała względem stałego układu odniesienia x, y, z . Ponieważ rozpatrujemy ruch ciała sztywnego, pochodna promienia \mathbf{r}_{AB} względem tego ciała (pochodna lokalna) jest równa zero. Mamy więc:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}_{AB}}{dt} = 0 \quad (d)$$

a równanie (2.29) przyjmuje postać:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.30)$$

Pochodna bezwzględna względem czasu promienia \mathbf{r}_{AB} równa jest iloczynowi wektorowemu prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ i promienia \mathbf{r}_{AB} . Wstawiając (2.30) oraz (a) do równania (c), otrzymano:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A \quad (e)$$

Pomnóżmy skalarnie równanie (e) przez promień \mathbf{r}_{AB} . Mamy:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \cdot \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_{AB} - \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_{AB} \quad (2.31)$$

Jak wynika z iloczynu wektorowego, wektor będący iloczynem wektorowym prędkości kątowej $\boldsymbol{\omega}$ i promienia \mathbf{r}_{AB} jest prostopadły do \mathbf{r}_{AB} . Tak więc iloczyn skalarny stojący po lewej stronie równania (e) jest równy zero. Mamy zatem po przeniesieniu:

$$\mathbf{v}_B \cdot \mathbf{r}_{AB} = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{r}_{AB} \quad (2.32)$$

Rozpisując powyższe iloczyny skalarne, otrzymujemy:

$$v_B \cdot r_{AB} \cdot \cos\beta = v_A \cdot r_{AB} \cdot \cos\alpha \quad (g)$$

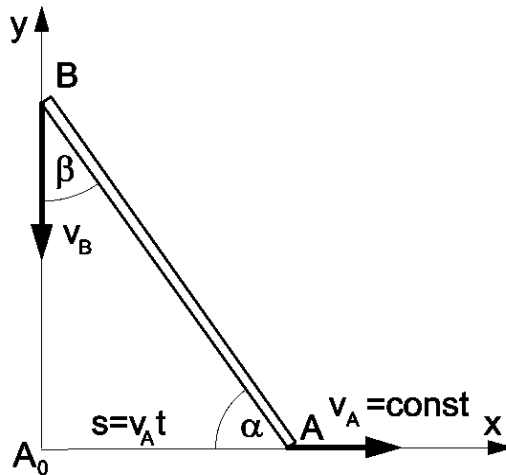
Dzieląc przez r_{AB} , ostatecznie mamy:

$$v_B \cos\beta = v_A \cos\alpha \quad (2.33)$$

W czasie ruchu ciała sztywnego, rzuty wektorów prędkości dwóch dowolnych jego punktów na prostą łączącą te punkty są sobie równe.

Przykład 2.4

Stosując twierdzenie o rzutach prędkości dwu punktów ciała sztywnego, wyznaczyć prędkość punktu B pręta z przykładu 2.2.



Rys. 2.16

Z twierdzenia o rzutach prędkości mamy:

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\beta$$

Początek ruchu pręta przyjęto w chwili, w której punkt A znajdował się w położeniu A_0 . Dla znanej długości pręta l , funkcje trygonometryczne będą miały wartość:

$$\cos\alpha = \frac{V_A \cdot t}{l} \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{l^2 - V_A^2 \cdot t^2}}{l}$$

Wstawiając otrzymane zależności trygonometryczne do równania wynikającego z twierdzenia o rzutach prędkości dwu punktów ciała sztywnego na prostą łączącą te punkty, mamy:

$$V_B = V_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = V_A \frac{V_A \cdot t}{\sqrt{1^2 - V_A^2 \cdot t^2}} = \frac{V_A^2 \cdot t}{\sqrt{1^2 - V_A^2 \cdot t^2}} \quad \text{m/s}$$

Tak więc wyznaczona prędkość punktu B pręta ma taką samą wartość jak prędkość wyznaczona w przykładzie 2.2.

2.2.3. Ruch postępowy ciała sztywnego

Ruch ciała, w którym dowolnie poprowadzona prosta związana z tym ciałem pozostaje zawsze równoległa do poprzedniego położenia, nazywamy **ruchem postępowym**.

Jak wynika z rysunku, zgodnie z definicją, przyrosty geometryczne $\Delta \mathbf{r}_A$ i $\Delta \mathbf{r}_B$, których doznają te promienie w czasie Δt , są sobie równe. Mamy więc:

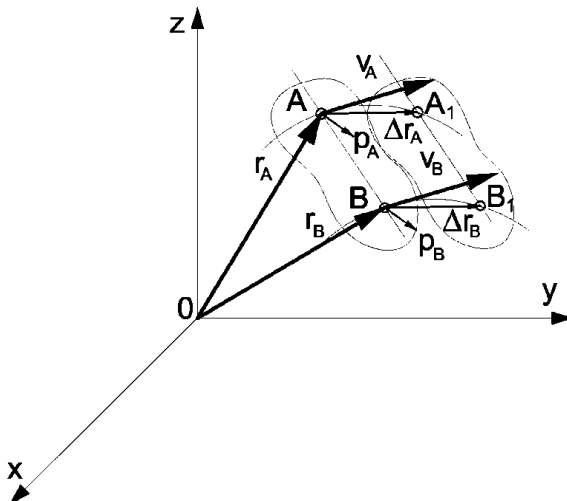
$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B \quad (\text{a})$$

i następnie:

$$\mathbf{v}_A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_A}{\Delta t} \quad \mathbf{v}_B = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}_B}{\Delta t} \quad (\text{b})$$

Biorąc pod uwagę, że przyrosty promieni-wektorów są takie same, mamy:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v} \quad (2.34)$$



Rys. 2.17

W ruchu postępowym ciała sztywnego prędkości wszystkich punktów są takie same. Ta jednakowa prędkość wszystkich punktów nosi nazwę prędkości ruchu postępowego ciała.

Jeśli \mathbf{p}_A oznaczymy przyspieszenie punktu A, a przez \mathbf{p}_B oznaczymy przyspieszenie punktu B, możemy zapisać:

$$\mathbf{p}_A = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} \qquad \mathbf{p}_B = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} \qquad (2.35)$$

Biorąc pod uwagę równość prędkości, otrzymujemy:

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_B = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{p} \qquad (2.36)$$

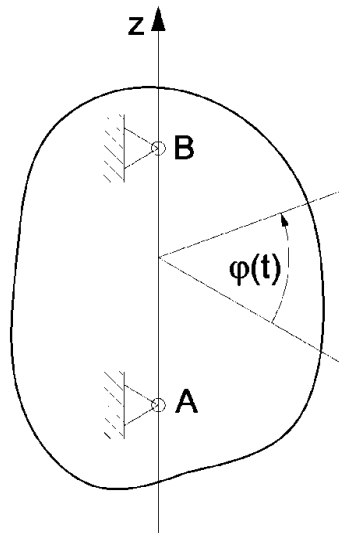
W ruchu postępowym ciała sztywnego przyspieszenia wszystkich punktów są takie same. To jednakowe dla wszystkich punktów przyspieszenie nosi nazwę przyspieszenia ruchu postępowego.

2.2.4. Ruch obrotowy ciała sztywnego

Ruch ciała, którego dwa punkty zostały unieruchomione nazywamy **ruchem obrotowym**. Prosta przechodząca przez te punkty nosi nazwę osi obrotu. Tak skrępowane ciało, które może tylko obracać się wokół nieruchomej osi, ma jeden stopień swobody. Do określenia jego położenia względem osi obrotu potrzebny jest tylko jeden parametr. Tym parametrem jest kąt φ obrotu ciała, odmierzany zgodnie z kierunkiem trygonometrycznym. Równanie ruchu obrotowego ciała ma postać:

$$\varphi = f(t) \qquad (2.37)$$

Droga kątowa φ wyrażona jest w radianach.



Rys. 2.18

Zbadajmy ruch obrotowy ciała sztywnego dookoła pionowej osi. Niech od chwili czasu t do chwili $t + \Delta t$, droga kątowna obrotu ciała φ dozna przyrostu o $\Delta\varphi$, czyli osiągnie wartość $\varphi + \Delta\varphi$. Jeżeli założymy, że przyrost czasu Δt dąży do zera, to średnia prędkość kątowna ciała dąży do prędkości chwilowej w chwili t i wynosi:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad (2.38)$$

Prędkość kątowna ciała w ruchu obrotowym dookoła stałej osi równa jest pochodnej względem czasu drogi kątownej przebytej przez to ciało.

Miarą wzrostu prędkości kątownej w czasie jest przyspieszenie kątowne. Jeżeli w chwilach czasu t i $t + \Delta t$ prędkość kątowna ciała w ruchu obrotowym wynosiła odpowiednio ω i $\omega + \Delta\omega$, to dla przyrostu czasu Δt dążącego do zera otrzymujemy:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} \quad (2.39)$$

Przyspieszenie kątowne ciała w ruchu obrotowym ε równe jest pierwszej pochodnej względem czasu prędkości kątownej ω , czyli drugiej pochodnej kąta obrotu φ .

Zgodnie z definicją prędkości i przyspieszenia, jednostką prędkości kątownej jest 1 rad/s , a przyspieszenia kątownego 1 rad/s^2 .

Znając prędkość kątowną i przyspieszenie kątowne obracającego się wokół nieruchomej osi ciała, można wyznaczyć prędkość i przyspieszenie dowolnego punktu tego ciała. Jeśli punkt M znajduje się w odległości h od stałej osi obrotu, to jego torem jest koło o promieniu h i środku w punkcie O leżącym na tej osi.

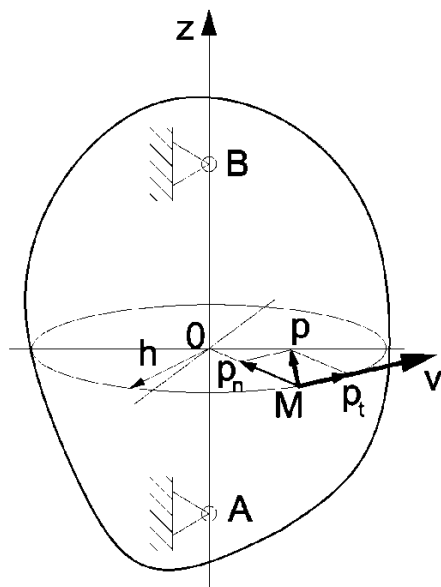
Prędkość liniowa punktu M wynosi:

$$v = \omega h \quad (2.40)$$

Przyspieszenie liniowe punktu M rozłożono na składową styczną p_t i składową normalną p_n .

Zgodnie z (2.23) i (2.24) mamy:

$$p_t = \varepsilon h \qquad p_n = \omega^2 h \quad (2.41)$$



Rys. 2.19

Przyspieszenie styczne punktu ciała w ruchu obrotowym równe jest iloczynowi przyspieszenia kąowego i odległości tego punktu od osi obrotu, natomiast przyspieszenie normalne punktu w ruchu obrotowym ciała równe jest iloczynowi kwadratu prędkości kąowej i odległości punktu od osi obrotu. Przyspieszenie to nosi nazwę przyspieszenia dośrodkowego. Całkowita wartość liczbową przyspieszenia liniowego \mathbf{p} punktu M wynosi:

$$p = \sqrt{p_t^2 + p_n^2} = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (2.42)$$

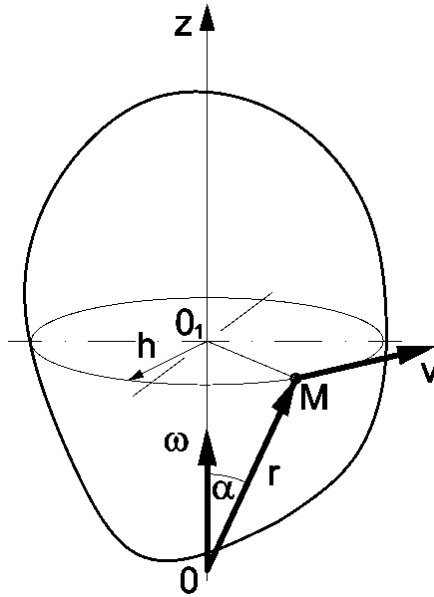
Prędkość kąowa i przyspieszenie kąowe jako wektory

W poprzednim punkcie rozpatrzono ruch obrotowy ciała sztywnego wokół stałej osi obrotu. Określone wartości prędkości kąowej i przyspieszenia kąowego, jako pochodne względem czasu, odpowiednio kąta obrotu φ oraz prędkości kąowej ciała ω , można przedstawić za pomocą wektorów.

Wektor prędkości kąowej $\boldsymbol{\omega}$ leży na osi obrotu i skierowany jest tak, że patrząc z jego końca ciało obraca się zgodnie z ruchem trygonometrycznym.

Początkiem tego wektora jest dowolny punkt na osi, co oznacza, że można go przesuwając wzdłuż tej osi (wektor posuwany). Miarą tego wektora jest wielkość

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}.$$



Rys. 2.20

Prędkość liniową dowolnego punktu M można zapisać w postaci iloczynu wektorowego. Mamy wówczas:

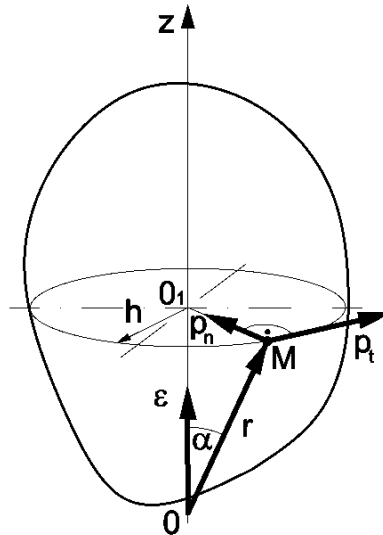
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.43)$$

Wartość bezwzględna wektora prędkości \mathbf{v} , wynikająca z definicji iloczynu wektorowego wynosi:

$$v = \omega r \sin \alpha = \omega h \quad (a)$$

Wektor przyspieszenia kątownego $\boldsymbol{\varepsilon}$ leży na osi obrotu. Jego zwrot zależy od prędkości kątownej. Jeśli prędkość kątowna rośnie, to przyspieszenie kątowne $\boldsymbol{\varepsilon}$ ma ten sam zwrot co prędkość, gdy natomiast prędkość kątowna maleje, wektory $\boldsymbol{\omega}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$ mają zwroty przeciwne. Wartość przyspieszenia kątownego ciała względem osi obrotu równa jest pierwszej pochodnej prędkości kątownej względem czasu:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\varphi}}{dt^2} \quad (b)$$



Rys. 2.21

Przyspieszenie liniowe punktu M wynosi:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.44)$$

Po wstawieniu $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ oraz $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ otrzymano wektorową postać przyspieszenia punktu A w ruchu obrotowym:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (2.45)$$

Tak więc całkowite przyspieszenie równe jest sumie dwu wektorów. Pierwszy z nich jest przyspieszeniem stycznym $\mathbf{p}_t = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}$, natomiast drugi przyspieszeniem normalnym $\mathbf{p}_n = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$.

Wartości bezwzględne tych wektorów odpowiednio wynoszą:

$$p_t = \varepsilon r \sin\alpha = \varepsilon h \quad (c)$$

$$p_n = \omega v = \omega \omega h = \omega^2 h \quad (d)$$

Otrzymano ten sam wynik jaki przedstawiono wzorami (2.41).

Przykład 2.5

Dana jest przekładnia zębata o średnicach kół podziałowych odpowiednio d_1 , d_2 i d_3 . Na osi koła zębatego o średnicy podziałowej d_3 zamocowano koło linowe o promieniu r_4 . Na koło to nawinięto linę, na której zawieszono ciężar Q.

Wyznaczyć przyspieszenie ε koła napędowego o średnicy podziałowej d_1 , aby ciężar Q poruszał się ze stałym przyspieszeniem p .

Rozwiązanie

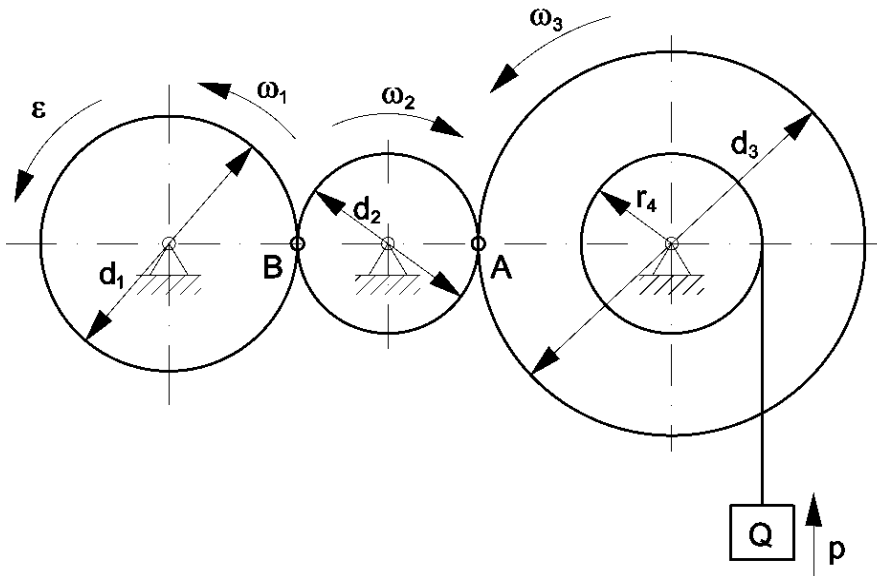
Prędkość ciężaru Q poruszającego się ze stałym przyspieszeniem p wynosi:

$$V = \int p \cdot dt = p \cdot t + C_1$$

Przyjęto, że dla $t = 0$ $V = 0$, więc $C_1 = 0$.

Prędkość kątowna koła o średnicy podziałowej d_3 wynosi:

$$\omega_3 = \frac{V}{r_4} = \frac{p \cdot t}{r_4} \quad \text{s}^{-1}$$



Rys. 2.22

Prędkość punktu A leżącego na kołach podziałowych kół o średnicach d_2 i d_3 ma wartość:

$$V_A = \omega_3 \cdot \frac{d_3}{2} = \frac{p \cdot t \cdot d_3}{2 \cdot r_4} \quad \text{m/s}$$

Tak więc prędkość kątowna koła o średnicy podziałowej d_2 wynosi:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{\frac{d_2}{2}} = \frac{p \cdot t \cdot d_3}{r_4 \cdot d_2} = \frac{p \cdot t}{r_4} \cdot \frac{d_3}{d_2} \quad \text{s}^{-1}$$

Jak wynika z wykonanych obliczeń, prędkość kąтова koła o średnicy podziałowej d_2 jest równa prędkości kątowej ω_3 pomnożonej przez przełożenie i . Przełożenie, jest to stosunek średnic podziałowych zazębiających się kół zębatach. Może to być również stosunek ilości zębów tych kół czy ich promieni.

Prędkość kąтова koła napędowego o średnicy podziałowej d_1 wynosi:

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot i = \frac{p \cdot t}{r_4} \cdot \frac{d_3}{d_2} \cdot \frac{d_2}{d_1} = \frac{p \cdot t}{r_4} \cdot \frac{d_3}{d_1} \quad \text{s}^{-1}$$

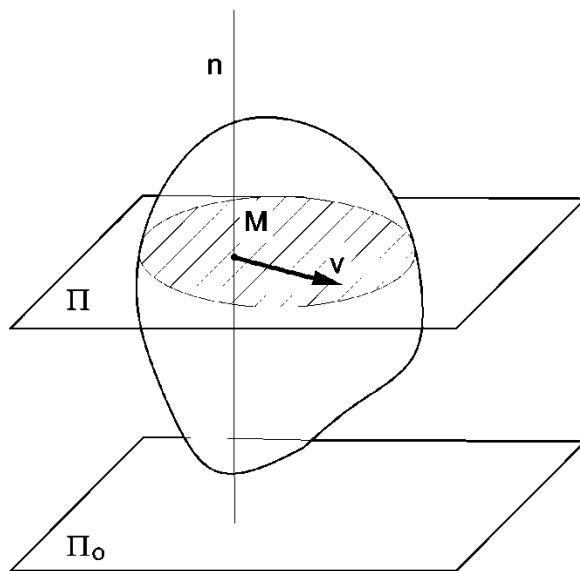
Przyspieszenie kątowe ε koła napędowego o średnicy podziałowej d_1 wynika z definicji ruchu obrotowego i wynosi:

$$\varepsilon = \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{p}{r_4} \cdot \frac{d_3}{d_1} \quad \text{s}^{-2}$$

Tak więc przyspieszenie kątowe ε , jakie należy przyłożyć do koła napędowego o średnicy d_1 , jest równe przyspieszeniu kątowemu koła o średnicy podziałowej d_3 pomnożonemu przez przełożenie między kołami przekładni.

2.2.5. Ruch płaski ciała sztywnego

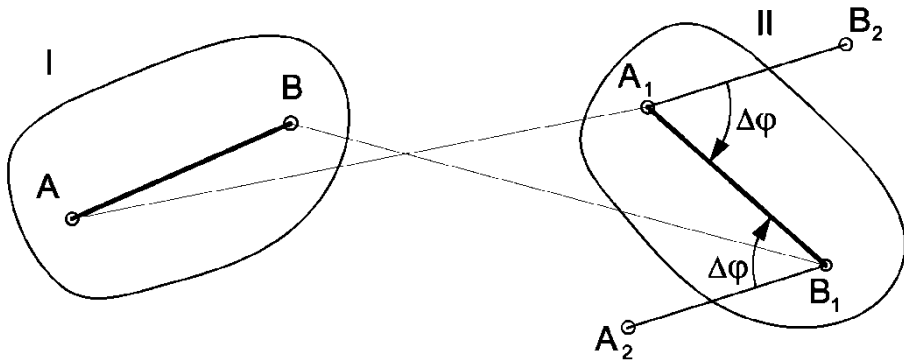
Ruchem płaskim ciała sztywnego nazywamy taki ruch, w którym wszystkie jego punkty poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej stałej płaszczyzny, zwanej płaszczyzną kierującą (na rysunku płaszczyzna Π_0).



Rys. 2.23

Z definicji ruchu płaskiego wynika, że badanie ruchu płaskiego ciała sztywnego można sprowadzić do ruchu figury płaskiej, powstałej z przecięcia badanego ciała dowolną płaszczyzną Π , równoległą do płaszczyzny kierującej Π_0 (na rysunku figura zakreskowana). Wyznaczona wartość prędkości i przyspieszenia punktu M , leżącego na prostej n prostopadłej do płaszczyzny kierującej Π_0 , jest jednakowa dla wszystkich punktów należących do tej prostej.

Rozważmy przemieszczenie figury płaskiej powstałej z przecięcia ciała sztywnego płaszczyzną Π , przedstawioną na rysunku poniżej. Położenie tej figury opisano odcinkiem AB w położeniu I i tym samym odcinkiem w położeniu II oznaczonym A_1B_1 . Jak widać, położenie odcinka AB należącego do figury określa jednoznacznie położenie tej figury.



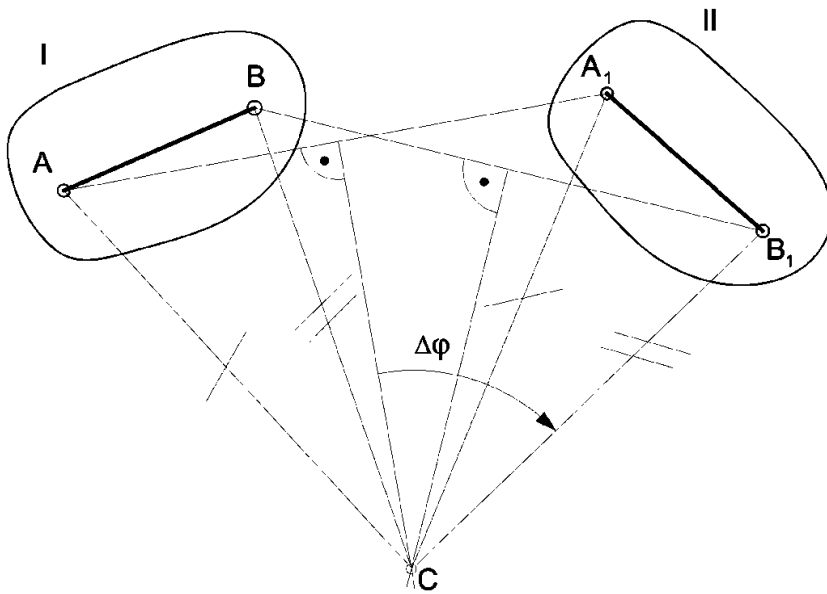
Rys. 2.24

Chcąc przemieścić rozpatrywaną figurę płaską w swojej płaszczyźnie z położenia oznaczonego I do położenia II, możemy przesunąć ją równoległe, aby odcinek AB zajął położenie A_1B_2 i obrócić wokół punktu A_1 o kąt $\Delta\varphi$. To samo przemieszczenie można wykonać inaczej. Mianowicie przesunąć równoległe odcinek AB , aby zajął położenie A_2B_1 i obrócić wokół punktu B_1 o taki sam kąt $\Delta\varphi$. Z powyższego wynika następujące twierdzenie:

Dowolne przemieszczenie figury płaskiej w swojej płaszczyźnie można potraktować jako złożone z przesunięcia równoległego, równego przesunięciu dowolnie obranego punktu tej figury jako bieguna, oraz obrotu wokół tego bieguna. Kąt obrotu tej figury nie zależy od wyboru bieguna.

Jeśli za biegun obierzemy punkt, który w danej chwili jest stały, to w przemieszczeniu płaskim figury, jako ruchu złożonym, nie będzie przesunięcia równoległego figury, a jedynie jej obrót, czyli ruch płaski figury jako ruch obrotowy dookoła pewnego punktu.

Na rysunku poniżej odcinki AB i A_1B_1 przedstawiają odcinek należący do figury płaskiej w dwu położeniach I i II. Połączmy punkty A i A_1 oraz punkty B i B_1 i wystawmy symetralne odpowiednio l_1 i l_2 powstałych odcinków AA_1 i BB_1 . Symetralne te przecięły się w punkcie C , który łączymy z punktami A i B oraz A_1 i B_1 . Otrzymaliśmy dwa trójkąty ABC i A_1B_1C . Są one przystające, ponieważ wspólny wierzchołek C leży jednocześnie na symetralnej odcinka AA_1 oraz odcinka BB_1 . Mamy więc: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C$, $BC = B_1C$.



Rys. 2.25

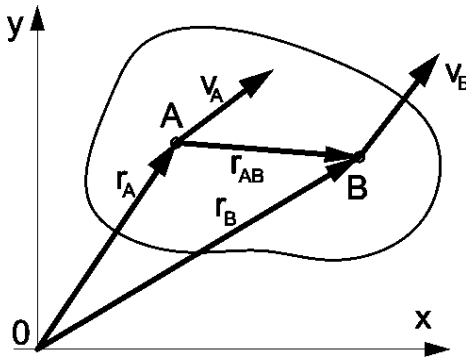
Tak więc przemieszczenie odcinka AB w położenie A_1B_1 , czyli z położenia I w położenie II, można uzyskać przez obrót trójkąta ABC wokół jego wierzchołka C o kąt $\Delta\varphi$, do pokrycia się z trójkątem przystającym A_1B_1C . Wyznaczony punkt C , wokół którego dokonuje się tego obrotu, nosi nazwę środka obrotu. Z przeprowadzonych rozważań wynika następujące twierdzenie:

Dowolne przemieszczenie figury płaskiej w swej płaszczyźnie może być dokonane przez obrót wokół pewnego punktu, który nosi nazwę środka obrotu.

2.2.5.1. Prędkość punktu w ruchu płaskim

Ruch płaski jako ruch złożony

Rozpatrzmy ruch figury płaskiej, której położenie w swej płaszczyźnie określają dwa dowolne punkty A i B. Położenia tych punktów w rozpatrywanej chwili określono promieniami-wektorami \mathbf{r}_A i \mathbf{r}_B poprowadzonymi z początku układu współrzędnych O, jak na rysunku.



Rys. 2.26

W czasie Δt promienie-wektory opisujące położenie punktów A i B doznały przyrostów geometrycznych i zgodnie z definicją prędkości tych punktów wynoszą:

$$\mathbf{v}_A = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} \quad \mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} \quad (2.46)$$

Zależność między promieniami-wektorami opisującymi położenie punktów A i B poruszającego się ciała ma postać:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{AB} \quad (2.47)$$

tak więc prędkość punktu B wynosi:

$$\mathbf{v}_B = \frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{r}}_{AB}}{dt} + \omega \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.48)$$

Dwa ostatnie wyrażenia powyższego równania dotyczą pochodnej bezwzględnej promienia-wektora \mathbf{r}_{AB} . Pochodna ta jak wiadomo jest równa prędkości końca tego wektora w stałym układzie odniesienia i składa się z pochodnej lokalnej (w układzie związanym z poruszającym się ciałem) oraz składowej prędkości wynikającej z ruchu ciała.

Ponieważ rozpatrujemy ruch płaski ciała sztywnego, położenie punktów A i B względem siebie nie ulega zmianie. Mamy więc:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}_{AB}}{dt} = 0$$

Podstawiając:

$$\frac{d\mathbf{r}_A}{dt} = \mathbf{v}_A \quad (2.49)$$

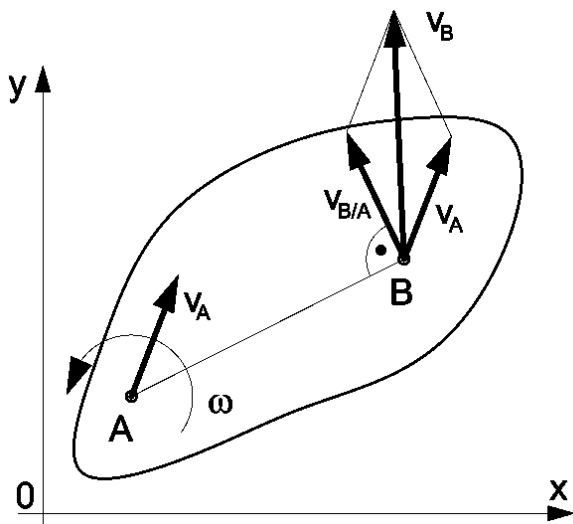
ostatecznie otrzymano:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.50)$$

Otrzymane równanie (2.50) można zapisać słowami: Prędkość dowolnego punktu B figury w ruchu płaskim, równa jest sumie geometrycznej prędkości dowolnie wybranego punktu A jako bieguna oraz prędkości punktu B względem bieguna A. Prędkość względem bieguna wynika z ruchu obrotowego figury i nie zależy od wyboru tego bieguna A:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \quad (2.51)$$

Prędkość punktu A jako bieguna oraz prędkość punktu B jako sumę omówionych wyżej wektorów przedstawiono graficznie na rys. 2.27.



Rys. 2.27

gdzie:

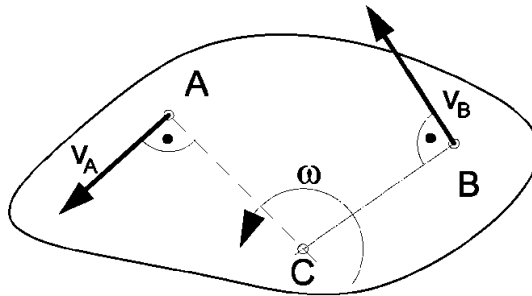
$$v_{B/A} = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}| = \omega AB \quad (2.52)$$

Ruch płaski jako chwilowy ruch obrotowy

Jak już udowodniono, ruch płaski można potraktować jako ruch obrotowy względem punktu, który jest środkiem obrotu. Punkt ten, dla rozpatrywanej chwili ruchu figury płaskiej, ma prędkość równą zero, zaś w innej chwili prędkość tego punktu jest różna od zera i nie jest on już środkiem obrotu. Dlatego punkt ten nazywamy **chwilowym środkiem obrotu**, a sam ruch figury w swojej płaszczyźnie – chwilowym ruchem obrotowym.

Miejsce geometryczne kolejnych położenia chwilowych środków obrotu nazywamy **centroidą**. Centroidę, wyznaczoną w układzie związanym z poruszającą się figurą płaską, nazywamy centroidą ruchomą, natomiast wyznaczoną w układzie stałym centroidą stałą. Znając obie centroidy, można ruch figury płaskiej przedstawić jako wynik toczenia się bez poślizgu centroidy ruchomej po centroidzie stałej.

Do wyznaczenia prędkości dowolnego punktu figury poruszającej się ruchem płaskim, jako chwilowym ruchem obrotowym, należy znać chwilową prędkość kątową oraz położenie chwilowego środka obrotu. Wyznaczenie chwilowego środka obrotu przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 2.28

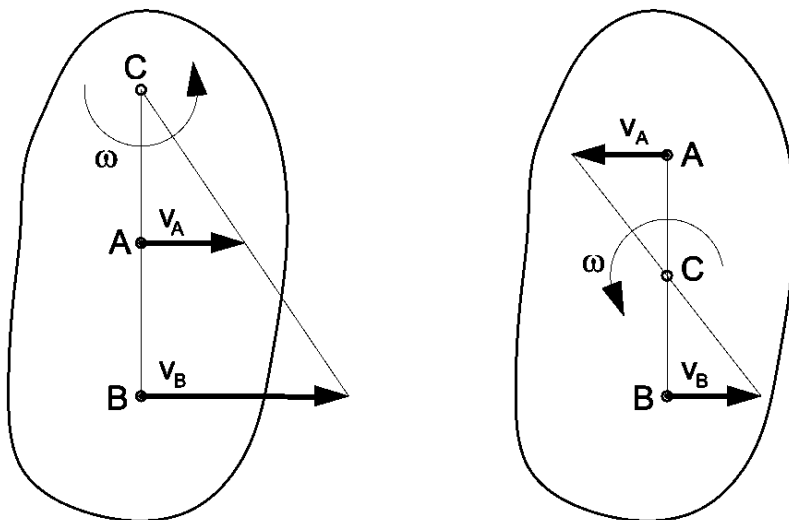
Założmy, że w danej chwili punkty A i B należące do figury płaskiej mają prędkości odpowiednio v_A i v_B . Wystawmy w punktach A i B proste prostopadłe do tych prędkości, które w przecięciu wyznaczą punkt C. Punkt ten jest chwilowym środkiem obrotu, gdyż jego prędkość jest równa zero. Wniosek ten można udowodnić, stosując twierdzenie o rzutach prędkości dwóch punktów ciała sztywnego na prostą łączącą te punkty. Otóż rzut prędkości punktu C na prostą AC i BC jednocześnie musi być równy zero, ponieważ z założenia rzut prędkości v_A na prostą AC jest równy zero i rzut prędkości v_B na prostą BC jest również równy zero. Tak więc prędkość punktu C jest równa zero.

Rozpatrywana figura płaska stanowi przekrój ciała sztywnego poruszającego się ruchem płaskim. Chwilowemu ruchowi obrotowemu tej figury wokół chwilowego środka obrotu C odpowiada chwilowy ruch obrotowy ciała sztywnego wokół osi chwilowej, przechodzącej przez punkt C i prostopadłej do płaszczyzny kierującej.

Znając położenie chwilowego środka obrotu oraz prędkość kątową chwilowego ruchu obrotowego względem tego środka, otrzymujemy natychmiast:

$$v_A = \omega AC \qquad v_B = \omega BC \qquad (2.53)$$

Jak wynika ze sposobu wyznaczania chwilowego środka obrotu, do jego znalezienia nie jest konieczna znajomość prędkości punktów A i B, lecz jedynie ich kierunki. Sytuacja zmienia się, jeśli chcemy wyznaczyć chwilowy środek obrotu w przypadku, w którym prędkości punktów A i B są do siebie równoległe. Gdy prędkości v_A i v_B są równoległe i równe, chwilowa prędkość kątowa równa się zero, a ruch figury płaskiej jest chwilowym ruchem postępowym, natomiast gdy wartości równoległych prędkości są różne, wyznaczenie chwilowego środka obrotu przedstawiono na rysunku.



Rys. 2.29

Chwilowy środek obrotu leży na przecięciu prostej łączącej końce wektorów v_A i v_B z prostą AB. Położenie tego punktu wynika z faktu, że prędkości punktów figury płaskiej są proporcjonalne do odległości punktów od chwilowego środka obrotu. Mamy więc:

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B}{BC} \quad (a)$$

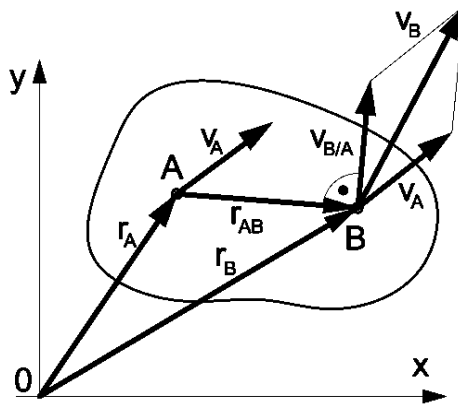
i po przekształceniu dla odpowiednich przypadków przedstawionych na rysunkach:

$$AC = AB \frac{v_A}{v_A - v_B} \quad AC = AB \frac{v_A}{v_A + v_B} \quad (b)$$

2.2.5.2. Przyspieszenie punktu w ruchu płaskim

Z wprowadzonej zależności (2.51) prędkość dowolnego punktu B figury w ruchu płaskim wynosi:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (a)$$



Rys. 2.30

Jak wynika z definicji, przyspieszenie \mathbf{p}_B punktu B jest równe pochodnej geometrycznej prędkości względem czasu. Różniczkując wyrażenie (a), otrzymano:

$$\mathbf{p}_B = \frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} \quad (2.54)$$

gdzie:

$$\frac{d\mathbf{v}_A}{dt} = \mathbf{p}_A \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (b)$$

Jak już wiadomo, pochodna bezwzględna promienia \mathbf{r}_{AB} wynosi:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}_{AB}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.55)$$

Ponieważ rozpatrujemy ruch płaski ciała sztywnego, pochodna lokalna tego promienia jest równa zero, czyli:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}_{AB}}{dt} = 0 \quad (2.56)$$

i ostatecznie pochodna bezwzględna promienia \mathbf{r}_{AB} wynosi:

$$\frac{d\mathbf{r}_{AB}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.57)$$

Tak więc całkowite przyspieszenie dowolnego punktu B figury poruszającej się ruchem płaskim, na podstawie równania (2.54), będzie sumą następujących wektorów:

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{p}_A + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \quad (2.58)$$

czyli:

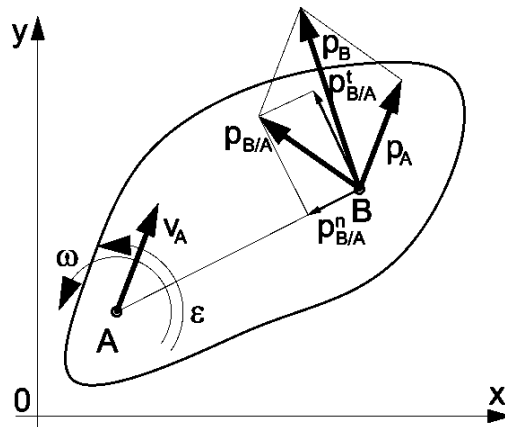
$$\mathbf{p}_B = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_{B/A} \quad (2.59)$$

Przyspieszenie dowolnego punktu B figury w ruchu płaskim jest równe sumie geometrycznej przyspieszenia dowolnie obranego punktu A jako bieguna oraz przyspieszenia punktu B w ruchu względem bieguna.

Graficzne przedstawienie składowych przyspieszenia punktu B przedstawiono na rysunku poniżej:

$$\mathbf{p}_{B/A}^{(t)} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_{AB} \quad (2.60)$$

$$\mathbf{p}_{B/A}^{(n)} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{AB}) \quad (2.61)$$



Rys. 2.31

Wartość liczbowa przyspieszenia stycznego i normalnego punktu B względem bieguna A wynosi odpowiednio:

$$p_{B/A}^{(t)} = \varepsilon \cdot r_{AB} \quad (d)$$

$$p_{B/A}^{(n)} = \omega^2 \cdot r_{AB}$$

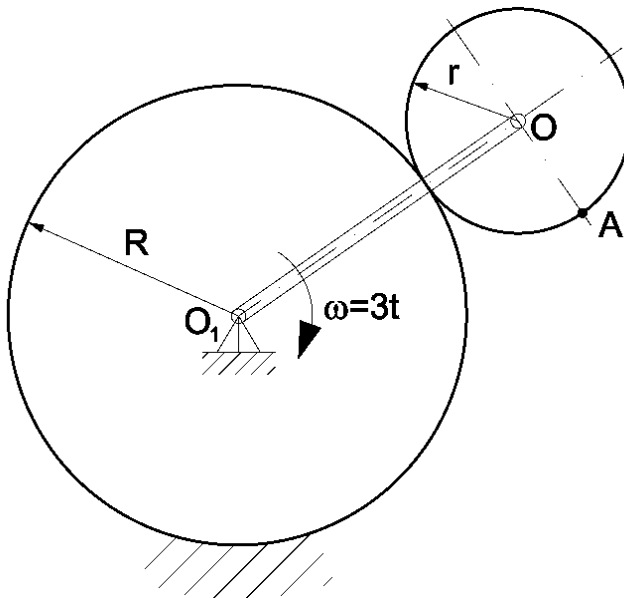
Przykład 2.6

Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktu A koła o promieniu r , w położeniu przedstawionym na rysunku. Koło o promieniu r toczy się bez poślizgu po nieruchomym wieńcu o promieniu R i jest napędzane korbą obracającą się ze zmienną prędkością kątową $\omega = 3t$ wokół środka wieńca O_1 .

Rozwiązanie

Koło o promieniu r porusza się ruchem płaskim. Chwilowy środek obrotu tego koła znajduje się w miejscu styku z nieruchomym wieńcem. Prędkość liniowa środka O , wynika z ruchu obrotowego korby i ma wartość:

$$v_O = \omega \cdot (R + r) = 3 \cdot t \cdot (R + r) \quad (a)$$



Rys. 2.32

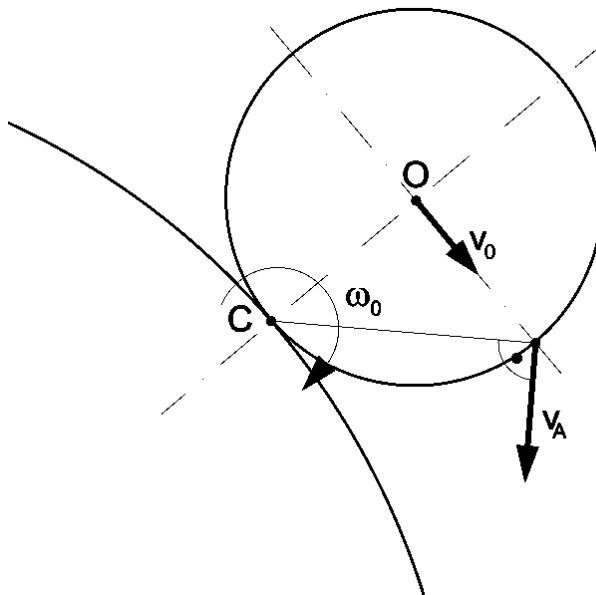
Chwilowa prędkość kątowna ruchu płaskiego względem chwilowego środka obrotu wynosi:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} = 3 \cdot t \cdot \frac{R+r}{r} \quad (\text{b})$$

Prędkość punktu A wyznaczmy, traktując ruch koła o promieniu r jako chwilowy ruch obrotowy względem chwilowego środka obrotu. Mamy natychmiast:

$$v_A = \omega_0 AC = 3 \cdot t \cdot \frac{R+r}{r} \cdot r \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot t \cdot (R+r) \quad (\text{c})$$

Graficzne przedstawienie prędkości punktu A przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 2.33

Do wyznaczenia przyspieszenia punktu A obierzmy za biegun środek koła O . Całkowite przyspieszenie bieguna wyniesie:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_0 &= \mathbf{p}_0^t + \mathbf{p}_0^n \\ p_0^t &= \varepsilon \cdot (R+r) = 3 \cdot (R+r) \\ p_0^n &= \omega^2 \cdot (R+r) = 9 \cdot t^2 \cdot (R+r) \end{aligned} \quad (\text{d})$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 3$$

Przyspieszenie punktu A możemy teraz zapisać:

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_{A/0}$$

lub dokładniej:

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_0^t + \mathbf{p}_0^n + \mathbf{p}_{A/0}^t + \mathbf{p}_{A/0}^n \quad (\text{e})$$

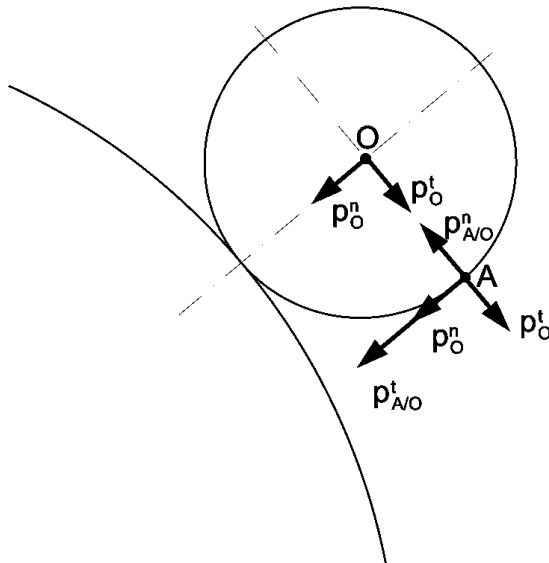
Nieznane składowe przyspieszenia punktu A względem bieguna O, wynoszą:

$$\begin{aligned} p_{A/0}^t &= \varepsilon_0 \cdot AO = 3 \cdot (R + r) \\ p_{A/0}^n &= \omega_0^2 \cdot AO = 9 \cdot t^2 \cdot \frac{(R + r)^2}{r} \end{aligned} \quad (\text{f})$$

gdzie:

$$\varepsilon_0 = \frac{d\omega_0}{dt} = 3 \cdot \frac{R + r}{r}$$

Graficzne przedstawienie wszystkich składowych przyspieszenia punktu A przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 2.34

Zgodnie z przedstawionymi na rysunku kierunkami składowych przyspieszeń przyłożonych w punkcie A, całkowite jego przyspieszenie wyniesie:

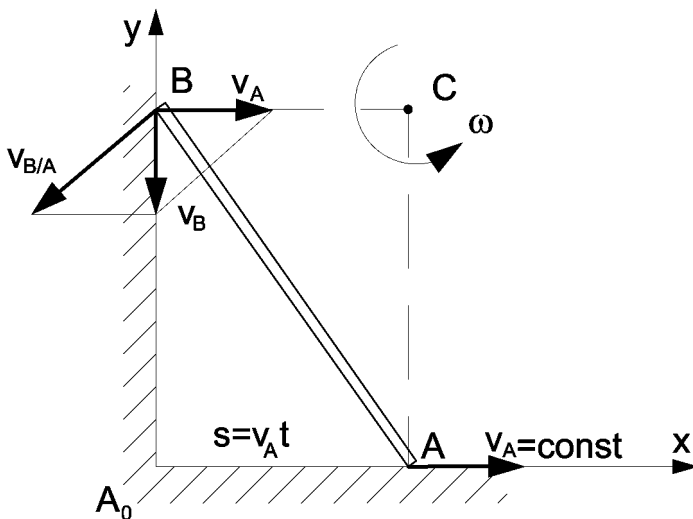
$$p_A = \sqrt{(p_0^t - p_{A/0}^n)^2 + (p_0^n + p_{A/0}^t)^2} \quad (g)$$

Wstawiając wyznaczone wcześniej wartości składowych przyspieszeń, otrzymano ostatecznie:

$$p_A = 3 \cdot (R + r) \sqrt{\left(1 - 3 \cdot t^2 \cdot \frac{R + r}{r}\right)^2 + (3 \cdot t^2 + 1)^2} \quad (h)$$

Przykład 2.7

Dla pręta o długości l z przykładu 2.2 wyznaczyć prędkość i przyspieszenie końca B ślizgającego się po płaszczyźnie pionowej.



Rys. 2.35

Rozwiązanie

Ruch pręta jest ruchem płaskim. Chwilowy środek obrotu znajduje się w punkcie przecięcia linii prostopadłych do wektorów prędkości dwu punktów poruszającego się pręta. Jednym punktem jest punkt A, którego prędkość jest całkowicie znana, drugim punktem jest punkt B, którego znamy tylko kierunek prędkości (punkt B ślizga się po pionowej powierzchni). Na przecięciu tych prostopadłych znajduje się chwilowy środek obrotu C.

Chwilowa prędkość kątowna wynosi:

$$\omega = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_A}{\sqrt{l^2 - (V_A \cdot t)^2}}$$

Traktując ruch pręta jako chwilowy ruch obrotowy względem chwilowego środka obrotu, wyznaczono prędkość punktu B:

$$V_B = \omega \cdot BC = \frac{V_A}{\sqrt{l^2 - (V_A \cdot t)^2}} \cdot V_A \cdot t = \frac{V_A^2 \cdot t}{\sqrt{l^2 - V_A^2 \cdot t^2}}$$

Prędkość punktu B można także wyznaczyć traktując ruch pręta jako ruch złożony z ruchu postępowego z prędkością wybranego bieguna i ruchu obrotowego względem tego bieguna. Jako biegun wybrano punkt A o całkowicie znanej prędkości. Mamy więc:

$$V_B = V_A + V_{B/A}$$

$$V_{B/A} = \omega \cdot AB = \frac{V_A}{\sqrt{l^2 - (V_A \cdot t)^2}} \cdot l = \frac{V_A \cdot l}{\sqrt{l^2 - (V_A \cdot t)^2}}$$

Zgodnie z rysunkiem suma geometryczna wektorów V_A i $V_{B/A}$ wynosi:

$$V_B = \sqrt{V_{B/A}^2 - V_A^2} = \frac{V_A^2 \cdot t}{\sqrt{l^2 - V_A^2 \cdot t^2}}$$

Przyspieszenie punktu B wyznaczono, traktując ruch pręta jako ruch złożony. Jako biegun przyjęto punkt A, ponieważ porusza się on po torze prostoliniowym ze znaną prędkością.

Całkowite przyspieszenie bieguna wynosi:

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_A^t + \mathbf{p}_A^n$$

$$p_A^t = \frac{dV_A}{dt} = 0 \quad V_A = \text{const} \quad p_A^n = \frac{V_A^2}{\rho} = 0 \quad \text{ruch prostoliniowy}$$

$$\mathbf{p}_A = 0$$

Przyspieszenie punktu B pręta jest równe sumie geometrycznej wektorów przyspieszenia bieguna i przyspieszenia w ruchu względem bieguna:

$$\mathbf{p}_B = \mathbf{p}_A + \mathbf{p}_{B/A}^t + \mathbf{p}_{B/A}^n$$

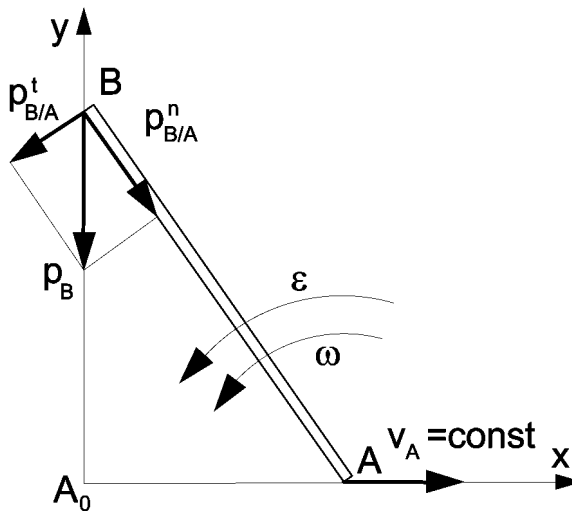
Składowe tego przyspieszenia mają wartość:

$$p_{B/A}^t = \varepsilon \cdot AB = \frac{V_A^3 \cdot t \cdot l}{(l^2 - V_A^2 \cdot t^2)^{3/2}}$$

$$p_{B/A}^n = \omega^2 \cdot AB = \frac{V_A^2 \cdot l}{(l^2 - V_A^2 \cdot t^2)}$$

gdzie:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{V_A^3 \cdot t}{(l^2 - V_A^2 \cdot t^2)^{3/2}}$$



Rys. 2.36

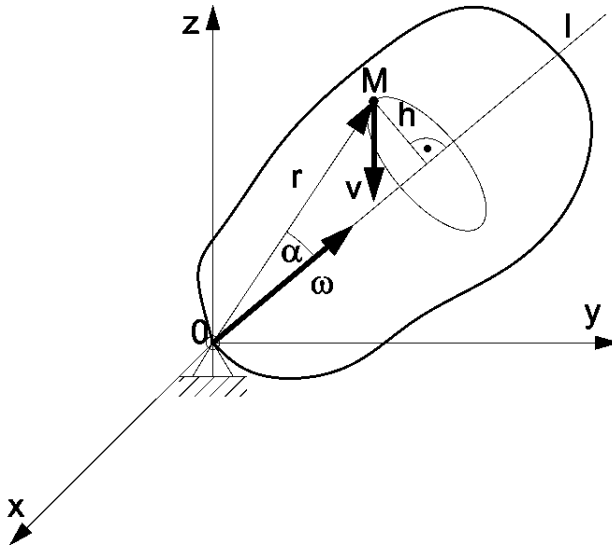
Całkowite przyspieszenie punktu B jest sumą geometryczną składowych i zgodnie z rysunkiem wynosi:

$$p_B = \sqrt{(p_{B/A}^t)^2 + (p_{B/A}^n)^2} = \frac{V_A^2 \cdot l^2}{(l^2 - V_A^2 \cdot t^2)^{3/2}}$$

2.2.6. Ruch kulisty ciała sztywnego

Ciało sztywne, którego jeden punkt jest unieruchomiony, wykonuje ruch nazwany ruchem kulistym. Ten nieruchomy punkt nosi nazwę środka ruchu kulistego.

Z drugiego twierdzenia Eulera wynika, że każde ciało sztywne, którego jeden punkt jest unieruchomiony, można dowolnie przemieścić z jednego położenia w drugie, wykonując obrót względem wyznaczonej osi przechodzącej przez środek ruchu kulistego.



Rys. 2.37

Zgodnie z równaniem (2.39) określającym prędkość dowolnego punktu ciała w ruchu obrotowym mamy:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.62)$$

Chwilowa prędkość kątowna $\boldsymbol{\omega}$ leży na chwilowej osi obrotu l .

Ruch kulisty zdecydowanie różni się od ruchu obrotowego wokół stałej osi, gdyż w ruchu kulistym oś obrotu jest osią chwilową, zmieniającą swoje położenie tak względem stałego układu odniesienia, jak i względem samego ciała.

Wartość liczbowa prędkości punktu M , wynikająca z zapisu wektorowego, wynosi:

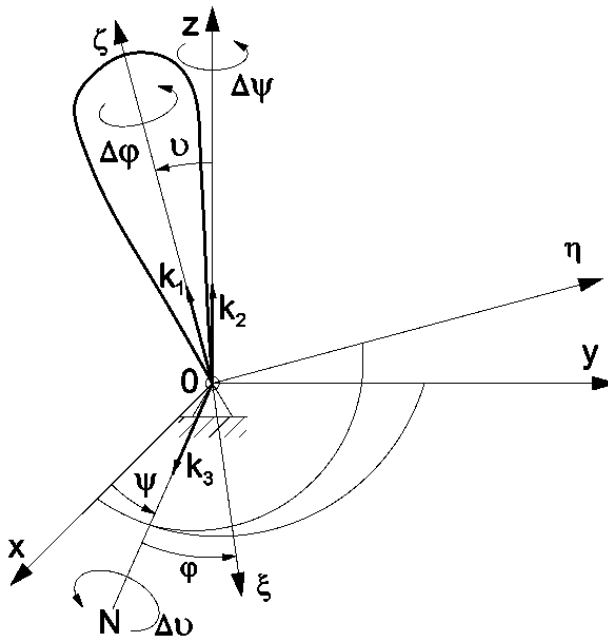
$$v = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}| = \omega r \sin \alpha = \omega h \quad (a)$$

Jak już wspomniano, chwilowa oś obrotu w ruchu kulistym ciała sztywnego zmienia swoje położenie tak względem nieruchomego układu współrzędnych, jak i względem poruszającego się ciała. Miejscem geometrycznym osi chwilowych w układzie nieruchomym jest powierzchnia stożkowa o wierzchołku w środku

ruchu kulistego O , nazwana aksoidą nieruchomą (stałą), natomiast miejsce geometryczne osi chwilowych w układzie związanym z poruszającym się ciałem – powierzchnia stożkowa, nazwana aksoidą ruchomą. Można więc stwierdzić:

Ruch kulisty ciała sztywnego można odwzorować przez odtaczanie bez poślizgu aksoidy ruchomej po aksoidzie stałej.

Chwilową prędkość kątową ruchu kulistego najczęściej przedstawia się jako sumę geometryczną trzech wektorów wynikających z przyrostów kątów Eulera, jak przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 2.38

Układ osi $Oxyz$ jest układem nieruchomym, natomiast układ osi $O\xi\eta\zeta$ jest układem związanym z poruszającym się ciałem sztywnym. Linia N nazywa się linią węzłów i jest krawędzią przecięcia płaszczyzny Oxy z płaszczyzną $O\xi\eta$:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k}_1\dot{\varphi} + \mathbf{k}_2\dot{\psi} + \mathbf{k}_3\dot{\vartheta} \quad (2.63)$$

Jeśli oznaczymy: $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{k}_1\dot{\varphi}$ $\boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{k}_2\dot{\psi}$ $\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{k}_3\dot{\vartheta}$ (b)

całkowita chwilowa prędkość kątowna ruchu kulistego ciała sztywnego wynosi:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_3 \quad (2.64)$$

gdzie:

$\boldsymbol{\omega}_1$ – prędkość kątowna obrotu własnego,

$\boldsymbol{\omega}_2$ – prędkość kątowna precesji,

$\boldsymbol{\omega}_3$ – prędkość kątowna nutacji.

Zgodnie z definicją przyspieszenie punktu M jest pochodną geometryczną prędkości \mathbf{v} względem czasu. Różniczkując zatem prędkość wyrażoną równaniem (2.62), otrzymano:

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (2.65)$$

Biorąc pod uwagę, że: $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ oraz $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (c)

mamy ostatecznie:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (2.66)$$

Otrzymano przyspieszenie \mathbf{p} punktu M jako sumę geometryczną dwu wektorów. Oznaczając te wektory odpowiednio przez \mathbf{p}_1 i \mathbf{p}_2 , mamy:

$$\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r} \quad (d)$$

$$\mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \quad (e)$$

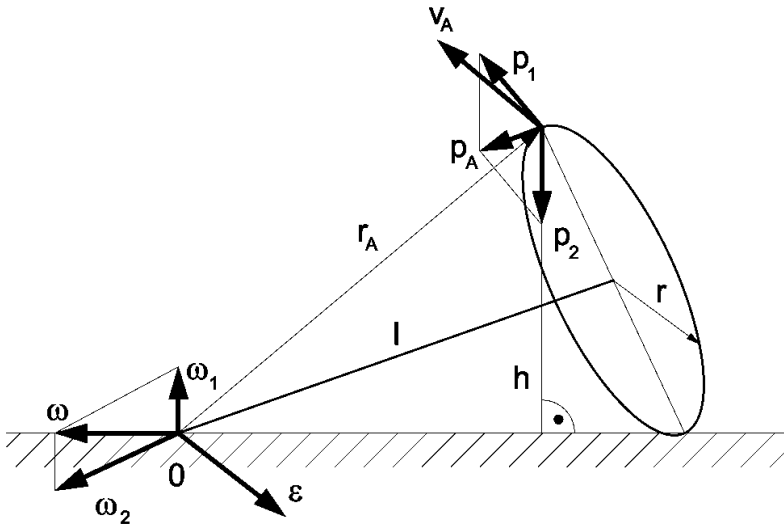
Kierunek przyspieszenia \mathbf{p}_1 nie pokrywa się z kierunkiem prędkości \mathbf{v} punktu M i nie jest wobec tego przyspieszeniem stycznym tego punktu.

Wspomniany wektor nosi nazwę **przyspieszenia obrotowego** punktu M.

Wektor \mathbf{p}_2 nosi nazwę **przyspieszenia doosiowego** i równy jest iloczynowi wektorowemu wektorów $\boldsymbol{\omega}$ i \mathbf{v} . Ponieważ wektory te są do siebie prostopadłe, mamy natychmiast:

$$p_2 = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}| = \omega v = \omega^2 h \quad (2.67)$$

Przyspieszenie kątowne $\boldsymbol{\varepsilon}$, jak wynika z zależności (c), jest pochodną geometryczną prędkości kątownej $\boldsymbol{\omega}$ względem czasu, czyli zgodnie z interpretacją pochodnej geometrycznej – prędkością końca wektora $\boldsymbol{\omega}$. Na rysunku poniżej zaznaczono wektor przyspieszenia kątownego $\boldsymbol{\varepsilon}$ dla szczególnego przypadku ruchu kulistego ciała sztywnego, wykonującego precesję regularną (prędkość nutacji $\boldsymbol{\omega}_3 = \mathbf{k}_3 \dot{\vartheta} = 0$).



Rys. 2.40

Rozwiązanie

Na osi precesji przykładamy prędkość kątową precesji ω_1 . Całkowita prędkość kątowna ruchu kulistego ω leży na chwilowej osi obrotu i jest sumą geometryczną prędkości kątownej precesji i prędkości kątownej obrotu własnego. Prędkość kątowna nutacji jest równa zero, ponieważ kąt między osią obrotu własnego i osią precesji w czasie ruchu układu jest stały. Z rozkładu prędkości kątownych przedstawionych na rysunku, chwilowa prędkość kątowna ruchu kulistego wynosi:

$$\omega = \omega_1 \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\omega_1 \cdot l}{r}$$

Odległość punktu A od chwilowej osi obrotu wynosi:

$$h = 2 \cdot r \cdot \cos \alpha = \frac{2 \cdot r \cdot l}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

Tak więc prędkość punktu A znajdującego się na obwodzie toczącej się tarczy, w chwilowym ruchu obrotowym względem chwilowej osi obrotu wynosi:

$$V_A = \omega \cdot h = 2 \cdot \frac{\omega_1 \cdot l^2}{\sqrt{l^2 + r^2}}$$

Prędkość ta jest prostopadła do rysunku i styczna do koła o promieniu h. Przyspieszenie punktu A jest równe sumie geometrycznej przyspieszeń, obrotowego i doosiowego. Mamy więc:

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$$

gdzie: $\mathbf{p}_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}_A$ $\mathbf{p}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_A$

Aby obliczyć przyspieszenie obrotowe należy wyznaczyć przyspieszenie kątowe ruchu kulistego $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$. Wartość tego przyspieszenia wynika z definicji i jest równa prędkości końca wektora $\boldsymbol{\omega}$. Chwilowe przyspieszenie kątowe wynosi:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} = \omega_1^2 \cdot \frac{1}{r}$$

Wektor ten, jako prędkość końca wektora prędkości kątovej $\boldsymbol{\omega}$, przyłożono w środku ruchu kulistego O prostopadle do rysunku. Przyspieszenie obrotowe jest iloczynem wektorowym wektorów $\boldsymbol{\varepsilon}$ oraz \mathbf{r}_A i wynosi:

$$p_1 = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{r}_A \cdot \sin \frac{\pi}{2} = \omega_1^2 \cdot \frac{1}{r} \cdot \sqrt{l^2 + r^2}$$

Przyspieszenie doosiowe jest iloczynem wektorowym prostopadłych wektorów prędkości kątovej $\boldsymbol{\omega}$ i prędkości liniowej \mathbf{V}_A . Przyspieszenie to wynosi:

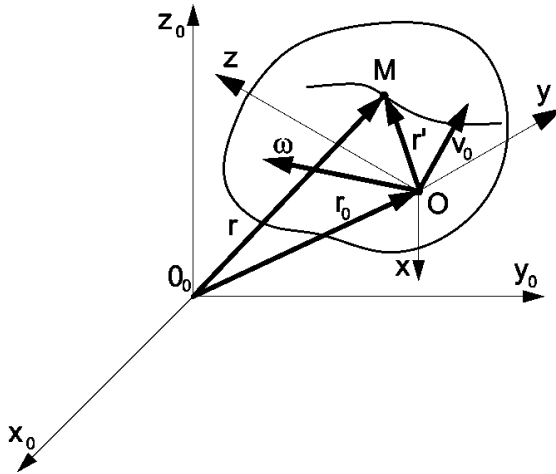
$$p_2 = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{V}_A = 2 \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{l^3}{r \cdot \sqrt{l^2 + r^2}}$$

Całkowite przyspieszenie punktu A zgodnie z rysunkiem wynosi:

$$p_A = \sqrt{p_1^2 + p_2^2} - 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \cos \alpha = \omega_1^2 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{l^4 + r^4 + 6 \cdot l^2 \cdot r^2}}{r \cdot \sqrt{l^2 + r^2}}$$

2.3. RUCH ZŁOŻONY PUNKTU – WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

W dotychczasowym badaniu ruchu punktu lub ciała w przestrzeni zakładano, że odbywa się on względem stałego układu odniesienia. W wielu zagadnieniach technicznych mamy do czynienia z ruchem jakiegoś punktu, który porusza się w ruchomym układzie odniesienia (wewnątrz ruchomego ciała), poruszającym się z kolei względem układu stałego. Badając więc ruch punktu w układzie ruchomym, możemy określić tor, prędkość i przyspieszenie punktu względem tego układu, jednak będą to inne wielkości niż wyznaczone w stałym układzie odniesienia.



Rys. 2.41

Na rysunku układ osi $Ox_0y_0z_0$ jest stałym układem odniesienia, natomiast układ $Oxyz$ jest układem ruchomym, związanym z poruszającym się ciałem.

Położenie punktu M w stałym układzie odniesienia opisuje funkcja wektorowa $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Z rysunku wynika:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}' \quad (\text{a})$$

Zgodnie z definicją prędkości punktu mamy:

$$\mathbf{v}_M = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\hat{\mathbf{r}}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (2.69)$$

gdzie pochodna bezwzględna promienia-wektora \mathbf{r}' , poprowadzonego z początku ruchomego układu współrzędnych, jest sumą pochodnej tzw. lokalnej, wyznaczonej względem układu ruchomego oraz prędkości końca tego promienia-wektora wynikającej z ruchu obrotowego ciała z prędkością $\boldsymbol{\omega}$. Tak więc w przypadku gdy $\boldsymbol{\omega} = 0$, czyli gdy układ ruchomy porusza się ruchem postępowym, wówczas pochodna bezwzględna i pochodna lokalna są sobie równe, ponieważ promień-wektor nie doznaje dodatkowego przyrostu wynikającego z ruchu układu ruchomego. Wprowadzając oznaczenia:

$$\mathbf{v}_u = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (2.70)$$

$$\mathbf{v}_w = \frac{d\hat{\mathbf{r}}'}{dt} \quad (2.71)$$

otrzymujemy ostatecznie:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_u + \mathbf{v}_w \quad (2.72)$$

Prędkość bezwzględna punktu w ruchu złożonym \mathbf{v}_M równa jest sumie geometrycznej prędkości w ruchu unoszenia \mathbf{v}_u oraz prędkości w ruchu względnym \mathbf{v}_w .

\mathbf{v}_M – prędkość bezwzględna; jest to prędkość poruszającego się punktu M względem układu stałego,

\mathbf{v}_w – prędkość względna; jest to prędkość punktu M wyznaczona względem układu ruchomego,

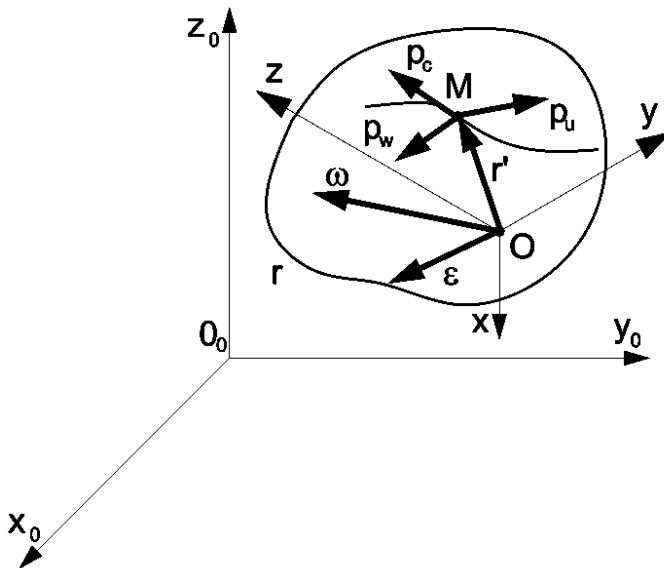
\mathbf{v}_u – prędkość unoszenia; jest to prędkość, jaką miałby punkt M, gdyby był sztywno związany z poruszającym się ciałem.

Przyspieszenie bezwzględne \mathbf{p}_M równe jest pochodnej względem czasu prędkości bezwzględnej \mathbf{v}_M . Przyspieszenie to wyznaczamy w stosunku do układu nieruchomego i dlatego ta pochodna jest pochodną bezwzględną. Mamy więc:

$$\mathbf{p}_M = \frac{d\mathbf{v}_M}{dt} \quad (2.73)$$

Zgodnie z równaniem (2.69) prędkość \mathbf{v}_M wynosi:

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' + \mathbf{v}_w \quad (2.74)$$



Rys. 2.42

Po podstawieniu do równania (2.73) otrzymano:

$$\mathbf{p}_M = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_w}{dt} \quad (2.75)$$

Wektory \mathbf{r}' i \mathbf{v}_w wyznaczone są w ruchomym układzie odniesienia i w związku z tym pochodną bezwzględną tych wektorów wyznaczono analogicznie jak przy prędkości, w zależności od pochodnej lokalnej. Pochodna bezwzględna promienia-wektora \mathbf{r}' wynosi:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{v}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad (a)$$

i prędkości względnej \mathbf{v}_w :

$$\frac{d\mathbf{v}_w}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{v}}_w}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w = \mathbf{p}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w \quad (b)$$

biorąc pod uwagę, że:

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{p}_0 \quad \text{oraz} \quad \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{\varepsilon} \quad (c)$$

gdzie \mathbf{p}_0 i $\boldsymbol{\varepsilon}$ oznaczają odpowiednio przyspieszenie początku O ruchomego układu współrzędnych Oxyz i przyspieszenie kątowe tego układu.

Wstawiając (a), (b) i (c) do równania (2.71), otrzymano:

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{v}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{p}_w + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w \quad (d)$$

i ostatecznie po przekształceniu:

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \mathbf{p}_w + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w) \quad (2.76)$$

W powyższym równaniu można wyodrębnić przyspieszenie unoszenia, tj. przyspieszenie, które miałby punkt M, gdyby był sztywno związany z ruchomym układem odniesienia Oxyz. Tak więc przyspieszenie bezwzględne punktu M wynosi:

$$\mathbf{p}_M = \mathbf{p}_u + \mathbf{p}_w + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w) \quad (2.77)$$

gdzie:

$$\mathbf{p}_u = \mathbf{p}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \quad (2.78)$$

Przyspieszenie bezwzględne punktu M otrzymaliśmy jako sumę geometryczną przyspieszenia unoszenia \mathbf{p}_u , przyspieszenia względnego \mathbf{p}_w oraz pewnego dodatkowego przyspieszenia noszącego nazwę **przyspieszenia Coriolisa**. Oznaczając to przyspieszenie \mathbf{p}_c , mamy:

$$\mathbf{p}_c = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_w) \quad (2.79)$$

Całkowite przyspieszenie bezwzględne punktu M można przedstawić w postaci sumy wektorów:

$$\mathbf{P}_M = \mathbf{P}_u + \mathbf{P}_w + \mathbf{P}_c \quad (2.80)$$

Przyspieszenie bezwzględne punktu w ruchu złożonym \mathbf{p}_M równe jest sumie geometrycznej przyspieszeń w ruchu unoszenia \mathbf{p}_u , w ruchu względnym \mathbf{p}_w oraz przyspieszenia Coriolisa \mathbf{p}_c .

- \mathbf{P}_M – przyspieszenie bezwzględne; jest to przyspieszenie poruszającego się punktu M względem stałego układu odniesienia.
- \mathbf{p}_u – przyspieszenie unoszenia; jest to przyspieszenie jakie miałby punkt M, gdyby był sztywno związany z poruszającym się ciałem.
- \mathbf{p}_w – przyspieszenie względne; jest to przyspieszenie punktu M wyznaczone względem układu ruchomego.
- \mathbf{p}_c – przyspieszenie Coriolisa; jest to przyspieszenie, którego wartość wynika z podwojonego iloczynu wektorowego prędkości kątowej unoszenia i prędkości względnej punktu M.

Przykład 2.9

Dany jest mechanizm korbowy, jak przedstawiono na rysunku 2.43. W mechanizmie tym korba obraca się ze stałą prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$, a umieszczony na niej suwak połączony jest przegubowo z poziomym prętem. Wyznaczyć prędkość i przyspieszenie bezwzględne suwaka, jeśli połączony przegubem z suwakiem pręt porusza się w poziomej prowadnicy.

Rozwiązanie

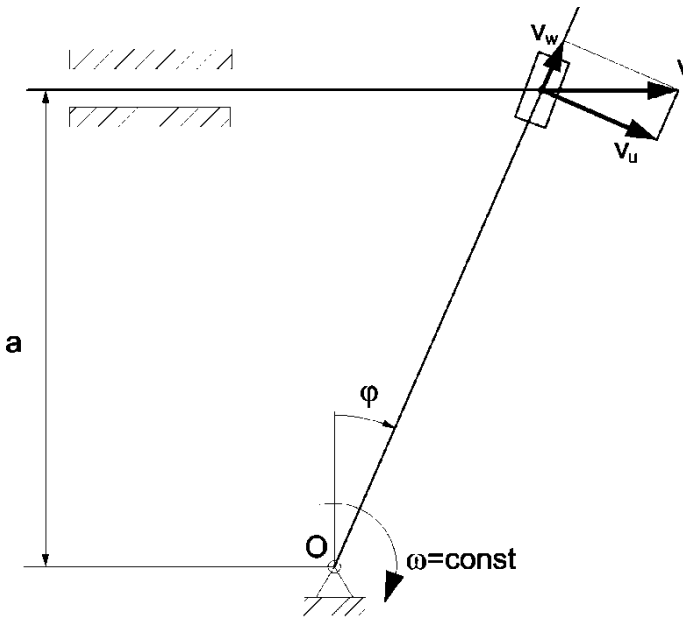
Suwak porusza się ruchem złożonym. Ruch suwaka związany z obrotem korby z prędkością kątową $\boldsymbol{\omega}$ jest ruchem unoszenia, natomiast ruch suwaka wzdłuż korby jest ruchem względnym. Ruch bezwzględny suwaka wynika z ruchu poziomego pręta zamocowanego w prowadnicy.

Wektory prędkości unoszenia, względnej i bezwzględnej suwaka przedstawiono na rysunku.

Położenie układu w dowolnej chwili opisano kątem obrotu korby φ :

$$\varphi = \int \boldsymbol{\omega} \cdot dt = \boldsymbol{\omega} \cdot t + C$$

dla $t = 0$ $\varphi = 0$ $C = 0$ tak więc $\varphi = \boldsymbol{\omega} \cdot t$



Rys. 2.43

Prędkość unoszenia dowolnej chwili wynosi:

$$V_u = \omega \cdot OA = \omega \cdot \frac{a}{\cos \omega t}$$

Prędkość bezwzględna suwaka wynika z rozkładu prędkości w ruchu złożonym i zgodnie z rysunkiem, wynosi:

$$V = \frac{V_u}{\cos \omega t} = \frac{\omega \cdot a}{\cos^2 \omega t}$$

Przyspieszenie bezwzględne suwaka jest sumą geometryczną składowych przyspieszeń w ruchu unoszenia, w ruchu względnym i przyspieszenia coriolisa. Mamy więc:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_u^t + \mathbf{p}_u^n + \mathbf{p}_w^t + \mathbf{p}_w^n + \mathbf{p}_{cor}$$

Wartości liczbowe składowych przyspieszeń wynoszą:

$$p_u^t = \varepsilon \cdot OA = 0 \quad \text{ponieważ} \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{a} \quad \omega = \text{const}$$

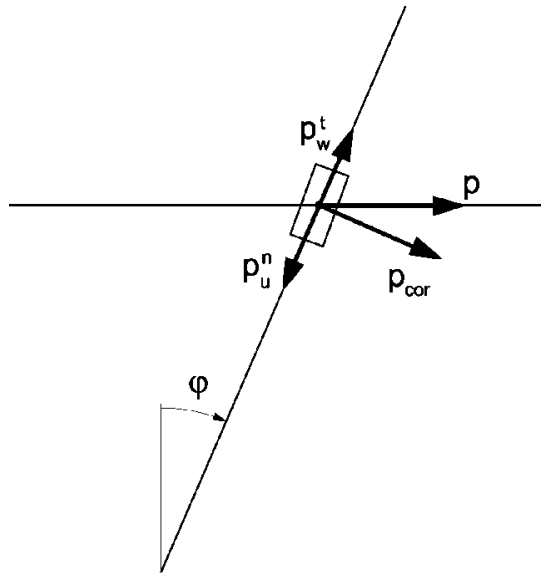
$$p_u^n = \omega^2 \cdot OA = \frac{\omega^2 \cdot a}{\cos \omega t}$$

$$p_w^t = \frac{dV_w}{dt} = \omega^2 \cdot a \cdot \frac{1 + \sin^2 \omega t}{\cos^3 \omega t} \quad \text{gdzie} \quad V_w = V \cdot \sin \varphi = \frac{\omega \cdot a \cdot \sin \omega t}{\cos^2 \omega t}$$

$p_w^n = 0$ ponieważ ruch względny jest ruchem prostoliniowym.

$$p_{\text{cor}} = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_w): \quad p_{\text{cor}} = 2 \cdot \omega \cdot V_w = \frac{2 \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \sin \omega t}{\cos^2 \omega t}$$

Wektory wyznaczonych składowych przyspieszenia suwaka przedstawiono na rysunku 2.44.



Rys. 2.44

Jak wcześniej wyjaśniono, bezwzględny ruch suwaka jest poziomy. Korzystając z twierdzenia o rzucie wektora wypadkowego i jego składowych na dowolną oś, przyspieszenie bezwzględne suwaka wyniesie:

$$p = p_w^t \cdot \sin \varphi - p_w^n \cdot \sin \varphi + p_{\text{cor}} \cos \varphi$$

i ostatecznie:

$$p = \frac{2 \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \sin \omega t}{\cos^3 \omega t}$$

Jak łatwo zauważyć, bezwzględny ruch suwaka jest ruchem prostoliniowym, tak więc jego przyspieszenie jest pochodną prędkości względem czasu. Mamy natomiast:

$$p = p_t = \frac{dV}{dt} = \frac{2 \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \sin \omega t}{\cos^3 \omega t}$$

CZĘŚĆ III. DYNAMIKA

3.1. PRAWA NEWTONA

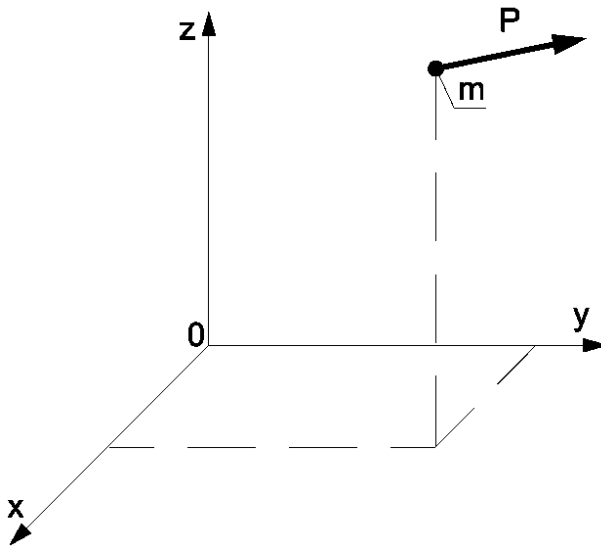
Jak już podano we wstępie, dynamika jest częścią mechaniki i ustala związki między ruchem ciała a siłami do niego przyłożonymi. Opiera się na drugim prawie Newtona, zacytowanym w pierwszej części niniejszego opracowania. Prawa te dotyczą punktu materialnego lub ciała poruszającego się ruchem postępowym. Podstawowe znaczenie tych praw w tej części mechaniki jest powodem zacytowania ich ponownie.

Prawo pierwsze. Punkt materialny, na który nie działa żadna siła, lub działające siły równoważą się, pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej.

Prawo drugie. Przyspieszenie punktu materialnego, na który działa siła, jest proporcjonalne do tej siły i ma jej kierunek.

Jeśli na punkt materialny o stałej masie m działa siła \mathbf{P} , a przyspieszenie od tej siły wynosi \mathbf{p} , to zgodnie z drugim prawem Newtona można napisać równanie:

$$m \mathbf{p} = \mathbf{P} \quad (3.1)$$

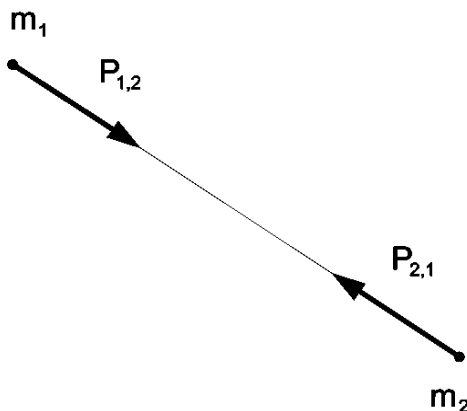


Rys. 3.1

Równanie to nosi nazwę dynamicznego równania ruchu punktu materialnego. Z wektorowego równania (3.1) można otrzymać równanie, opisujące zależność między wartościami liczbowymi działającej siły i wywołanego tą siłą przyspieszenia.

$$m \mathbf{p} = \mathbf{P} \quad (3.2)$$

Prawo trzecie. Siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych są równe co do wartości liczbowej, przeciwnie skierowane i działają wzdłuż prostej łączącej te punkty.



Rys. 3.2

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{1,2} &= -\mathbf{P}_{2,1} \\ P_{1,2} &= P_{2,1} \end{aligned} \quad (3.3)$$

czyli

Drugie prawo Newtona zostało sformułowane dla jednej siły działającej na punkt materialny. W przypadku działania wielu sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, wektor przyspieszenia tego punktu, równy jest sumie geometrycznej wektorów przyspieszeń, jakie miałby ten punkt, gdyby każda z przyłożonych sił działała osobno.

Niech $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$ będą wektorami przyspieszeń punktu materialnego, pochodzącymi od sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$. Niech \mathbf{p} będzie wektorem przyspieszenia tego punktu, wywołanym działaniem siły wypadkowej. Na podstawie powyższego stwierdzenia mamy:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n \quad (a)$$

Z drugiego prawa Newtona można napisać następujące związki:

$$m \mathbf{p}_1 = \mathbf{P}_1 \quad m \mathbf{p}_2 = \mathbf{P}_2 \quad \dots \quad m \mathbf{p}_n = \mathbf{P}_n \quad (b)$$

Jeśli obie strony równania (a) pomnożymy przez masę m i uwzględnimy powyższe zależności, otrzymamy równanie:

$$m \mathbf{p} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n. \quad (3.4)$$

Z otrzymanego równania wynika, że przyspieszenie rozważanego punktu materialnego równe jest przyspieszeniu, jakie wywoła siła wypadkowa, będąca sumą geometryczną sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$. Tak więc w szczególnym przypadku, jeśli na punkt materialny działa układ sił, którego suma geometryczna jest równa zero, z równania (3.4) wynika, że przyspieszenie tego punktu także jest równe zero. Oznacza to, iż punkt pozostaje w spoczynku lub porusza się ruchem jednostajnym po linii prostej. Jest to treścią pierwszego prawa Newtona.

3.2. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO

3.2.1. Dynamiczne równania ruchu punktu materialnego

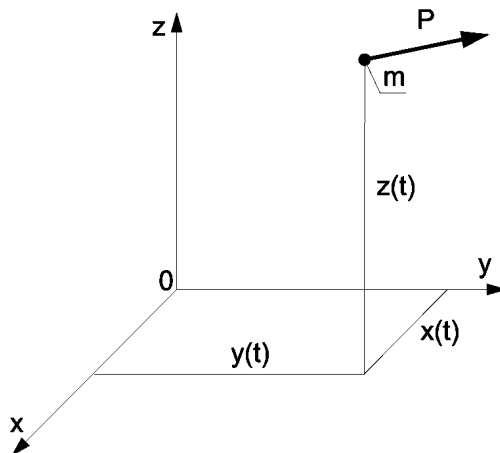
Do badania ruchu punktu poruszającego się dowolnie w przestrzeni pod wpływem działania siły \mathbf{P} zastosowano równanie dynamiczne wynikające z drugiego prawa Newtona.

$$m \mathbf{p} = \mathbf{P} \quad (3.5)$$

Jeśli ruch punktu rozpatrujemy w prostokątnym układzie osi współrzędnych $Oxyz$, to równaniu wektorowemu (3.5) odpowiadają trzy równania skalarne wynikające z odpowiednich rzutów na osie:

$$m p_x = P_x \quad m p_y = P_y \quad m p_z = P_z \quad (a)$$

Wykorzystując zależności $p_x = \ddot{x}$, $p_y = \ddot{y}$, $p_z = \ddot{z}$, gdzie x, y, z są współrzędnymi rozpatrywanego punktu materialnego, otrzymujemy **różniczkowe równania ruchu punktu** w prostokątnym układzie osi współrzędnych.



Rys. 3.3

$$m\ddot{x} = P_x \quad m\ddot{y} = P_y \quad m\ddot{z} = P_z \quad (3.6)$$

Rozwiązując więc konkretne zagadnienie z dynamiki punktu materialnego, należy znaleźć rozwiązania układu równań różniczkowych (3.6). Jak widać przedstawione równania są rzędu drugiego, a więc rozwiązania tych równań zależą od sześciu stałych. Stałe te należy wyznaczyć z warunków początkowych ruchu dla chwili $t = 0$.

Mamy więc:

$$\begin{aligned} (x)_{t=0} &= x_0 & (y)_{t=0} &= y_0 & (z)_{t=0} &= z_0 \\ (\dot{x})_{t=0} &= v_{0x} & (\dot{y})_{t=0} &= v_{0y} & (\dot{z})_{t=0} &= v_{0z} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Przedstawione powyżej równania dotyczą ruchu punktu materialnego w przestrzeni, czyli ruchu punktu opisanego trzema parametrami. W szczególnym przypadku, jeśli siła \mathbf{P} działa w tej samej płaszczyźnie, w której leży prędkość początkowa punktu, ruch będzie się odbywał we wspomnianej płaszczyźnie, a równania różniczkowe ruchu sprowadzają się do dwu równań:

$$m\ddot{x} = P_x \quad m\ddot{y} = P_y \quad (3.8)$$

Trzecie równanie układu równań (3.6) jest tożsamościowo spełnione, ponieważ mamy $z = 0$ i $P_z = 0$.

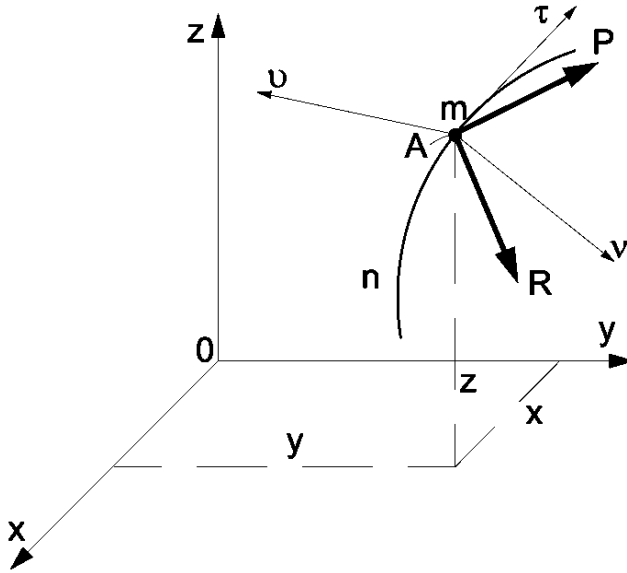
3.2.2. Równania ruchu nieswobodnego punktu materialnego

Niech nałożone więzy na nieswobodny punkt materialny o masie m , do którego przyłożono siłę \mathbf{P} powodują, że punkt ten porusza się po linii n , jak przedstawiono na rysunku 3.4.

Równanie dynamiczne tego punktu musi być napisane dla punktu swobodnego i w związku z tym oprócz siły czynnej \mathbf{P} w równaniu należy uwzględnić reakcję więzów \mathbf{R} . Równanie to ma postać:

$$m \mathbf{p} = \mathbf{P} + \mathbf{R} \quad (a)$$

Otrzymane równanie wektorowe można zastąpić trzema równaniami skalarными, wynikającymi ze składowych wektorów występujących w równaniu (a) wzdłuż osi przyjętego układu. Dla prostokątnego układu współrzędnych Oxyz mamy:



Rys. 3.4

$$m\ddot{x} = P_x + R_x \quad m\ddot{y} = P_y + R_y \quad m\ddot{z} = P_z + R_z \quad (3.9)$$

W układzie osi związanych z torem poruszającego się punktu, czyli odpowiednio wzdłuż stycznej τ , normalnej głównej v i binormalnej \mathfrak{g} do toru, jak pokazano na rysunku, mamy:

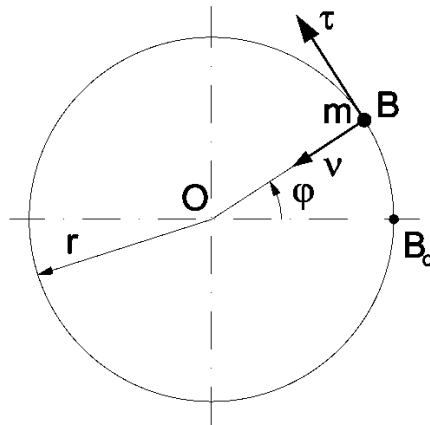
$$m \frac{dv}{dt} = P_\tau + R_\tau \quad m \frac{v^2}{\rho} = P_v + R_v \quad 0 = P_g + R_g \quad (3.10)$$

Są to równania, w których przyspieszenie występujące w równaniu (a) zostało wyrażone poprzez przyspieszenie styczne i normalne. Wartości tych składowych zostały wyznaczone w części II opracowania i opisane wzorem (2.13).

W trzech równaniach (3.10) mamy cztery niewiadome, którymi są v , R_τ , R_v , R_g . Jeśli torem poruszającego się punktu nie jest linia gładka, dodatkowy warunek otrzymujemy z prawa tarcia, natomiast jeśli torem jest linia gładka, tym dodatkowym warunkiem jest $R_\tau = 0$, gdyż składowa styczna znika. Zasadniczym równaniem różniczkowym ruchu jest pierwsze z równań (3.10), ponieważ z równania tego możemy wyznaczyć współrzędną łukową s położenia punktu, jako funkcję czasu t . Pozostałe równania określają zależność między składowymi reakcji.

Dla szczególnego przypadku ruchu krzywoliniowego punktu, to jest ruchu po okręgu koła o promieniu r , prędkość tego punktu można wyrazić:

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \dot{\varphi} \quad (b)$$



Rys. 3.5

gdzie φ jest drogą kątową promienia wodzącego poprowadzonego ze środka okręgu do punktu materialnego. Po wstawieniu (b) do równań (3.10) otrzymujemy układ równań:

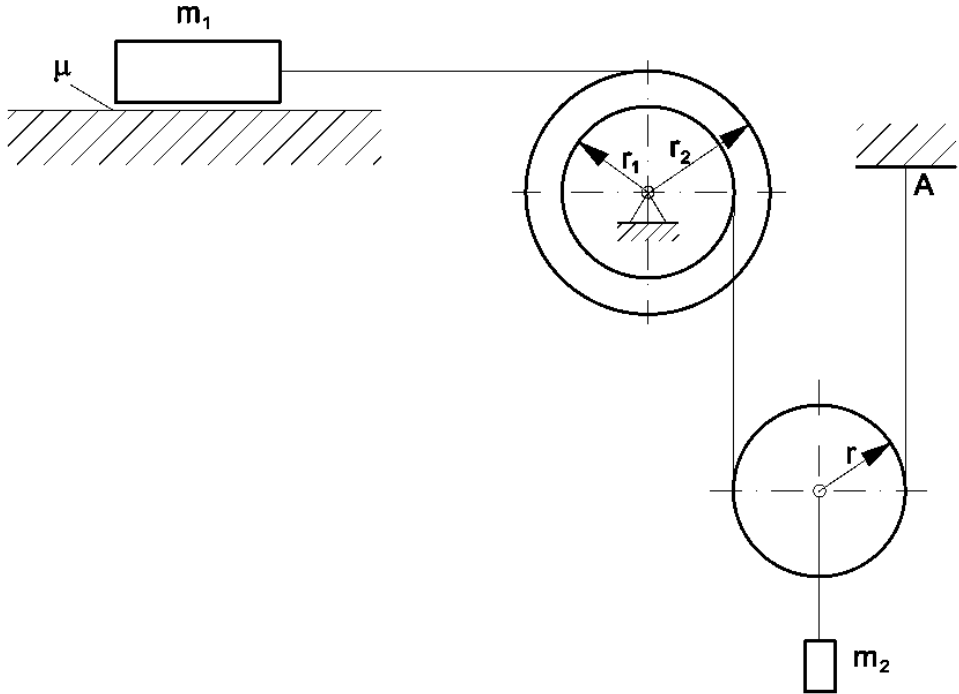
$$m r \ddot{\varphi} = P_{\tau} + R_{\tau} \quad m r \dot{\varphi}^2 = P_v + R_v \quad 0 = P_s + R_s \quad (3.11)$$

Dla ruchu punktu po gładkim okręgu koła ze stałą prędkością $v = \omega r$, z drugiego równania znajdujemy $R_v = m r \omega^2$. Reakcja ta nosi nazwę **siły dośrodkowej**.

Przykład 3.1

Wyznaczyć przyspieszenia masy m_1 i m_2 dla układu przedstawionego na rysunku. Masa m_1 spoczywa na chropowatej powierzchni, której współczynnik tarcia wynosi μ . Masa m_1 połączona jest liną, nawiniętą na większe koło lekkiej

szpuli. Z mniejszego koła szpuli odwija się lina opasująca krążek o promieniu r , do środka którego podwieszono masę m_2 . Koniec tej liny zaczepiono w stałym punkcie A, jak pokazano na rysunku.



Rys. 3.6

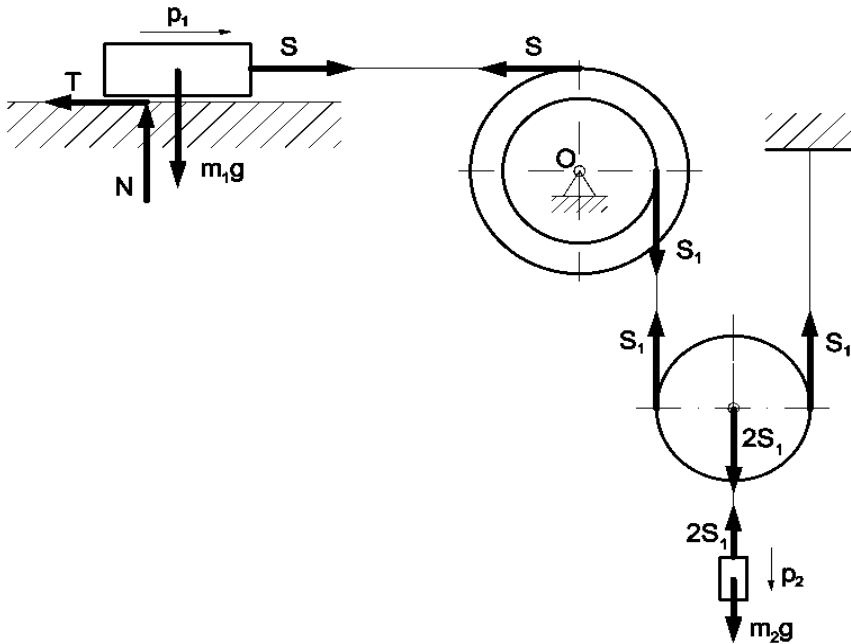
Rozwiązanie

Uwalniamy układ od więzów, aby napisać dynamiczne równania ruchu dla punktów materialnych m_1 i m_2 .

Dynamiczne równania ruchu mają postać:

– dla masy m_1 :

$$\begin{aligned} m_1 \cdot p_1 &= S - T \\ m_1 \cdot 0 &= N - m_1 \cdot g \\ T &= \mu \cdot N \end{aligned} \quad (a)$$



Rys. 3.7

– dla masy m_2 :

$$m_2 \cdot p_2 = m_2 \cdot g - 2 \cdot S_1 \quad (b)$$

Dla lekkiej szpuli możemy napisać równanie ze statyki, uwzględniające zależność między siłami w linach:

$$\sum M_{i0} = S \cdot r_2 - S_1 \cdot r_1 = 0 \quad (c)$$

Otrzymano układ 5 równań, w których jest 6 niewiadomych. Równania te należy uzupełnić równaniem z kinematyki, uwzględniającym zależność między przyspieszeniami.

Rozpatrując ruch obrotowy szpuli i ruch płaski krążka o promieniu r , mamy:

$$p_1 = 2 \cdot p_2 \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad (d)$$

Rozwiązując otrzymany układ równań, wyznaczono przyspieszenia mas:

$$p_1 = 2 \cdot g \cdot r_2 \frac{m_2 \cdot r_1 - 2 \cdot m_1 \cdot \mu \cdot r_2}{m_2 \cdot r_1^2 + 4 \cdot m_1 \cdot r_2^2} \quad (e)$$

$$p_2 = g \cdot r_1 \frac{m_2 \cdot r_1 - 2 \cdot m_1 \cdot \mu \cdot r_2}{m_2 \cdot r_1^2 + 4 \cdot m_1 \cdot r_2^2}$$

Przykład 3.2

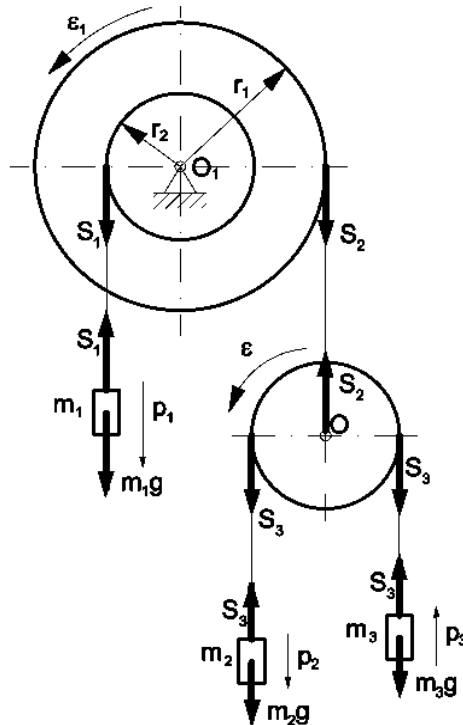
Wyznaczyć przyspieszenia mas m_1 , m_2 , m_3 zawieszonych na lekkich linach opasujących lekkie koła, jak pokazano na rysunku. Koło o promieniu r_1 , połączone jest z kołem o promieniu r_2 , tworząc szpulę obracającą się na wspólnej osi.

Rozwiązanie

Przyspieszenia mas wyznaczono z dynamicznych równań ruchu. Aby napisać dynamiczne równania ruchu, należy rozpatrywany układ uwolnić od więzów i przyjąć kierunki ich przyspieszeń. Na tym etapie rozwiązania, kierunki przyspieszeń można przyjąć dowolnie, gdyż właściwe, zależne od wielkości mas otrzymamy po rozwiązaniu układu równań dynamicznych i związków kinematycznych napisanych dla przyjętych kierunków przyspieszeń.

Dynamiczne równania ruchu rozpatrywanych mas m_1 , m_2 , m_3 mają postać:

$$\begin{aligned} m_1 \cdot p_1 &= m_1 \cdot g - S_1 \\ m_2 \cdot p_2 &= m_2 \cdot g - S_3 \\ m_3 \cdot p_3 &= S_3 - m_3 \cdot g \end{aligned}$$



Rys. 3.8

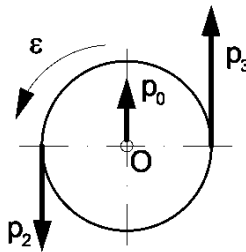
Aby rozwiązać otrzymany układ równań względem poszukiwanych wartości przyspieszeń należy otrzymane równania ruchu uzupełnić warunkami wynikającymi ze statyki oraz kinematyki ruchu układu.

Ze statyki mamy:

$$\text{– dla lekkiej szpuli: } \sum M_{O_1} = S_1 \cdot r_1 - S_2 \cdot r_2 = 0$$

$$\text{– dla koła o środku O: } \sum P_{iy} = S_2 - 2 \cdot S_3 = 0$$

Zależność kinematyczną otrzymano z analizy ruchu obrotowego szpuli oraz ruchu płaskiego koła o środku O. Zgodnie z przyjętymi kierunkami przyspieszeń mamy:



Rys. 3.9

$$\text{– dla szpuli: } \varepsilon_1 = \frac{p_1}{r_1} = \frac{p_o}{r_2} \quad p_o = p_1 \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

$$\text{– dla koła o środku O: } p_2 = -p_o + \varepsilon \cdot r \quad p_3 = p_o + \varepsilon \cdot r$$

Otrzymane związki odjęto stronami, otrzymując zależność między przyspieszeniami liniowymi:

$$p_2 - p_3 = -2 \cdot p_o$$

i ostatecznie:

$$p_2 - p_3 = -2 \cdot p_1 \cdot \frac{r_2}{r_1}$$

Uwzględniając wyznaczone warunki w dynamicznych równaniach ruchu, otrzymano poszukiwane wartości przyspieszeń:

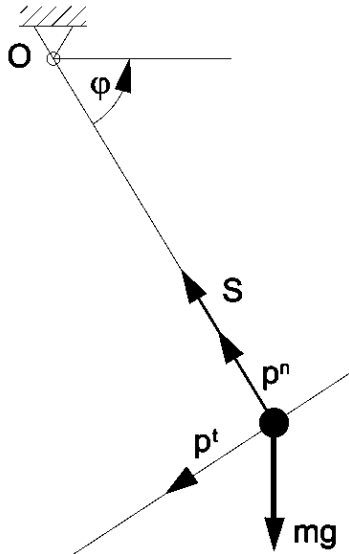
$$p_1 = g \cdot \left(\frac{-4 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot r_2 \cdot (r_1 + r_2)}{m_2 \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + 4 \cdot m_3 \cdot r_2^2) + m_1 \cdot m_3 \cdot r_1^2} + 1 \right)$$

$$p_2 = g \cdot \left(\frac{-2 \cdot m_1 \cdot m_3 \cdot r_1 \cdot (r_1 + r_2)}{m_2 \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + 4 \cdot m_3 \cdot r_2^2) + m_1 \cdot m_3 \cdot r_1^2} + 1 \right)$$

$$p_3 = g \cdot \left(\frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot r_1 \cdot (r_1 + r_2)}{m_2 \cdot (m_1 \cdot r_1^2 + 4 \cdot m_3 \cdot r_2^2) + m_1 \cdot m_3 \cdot r_1^2} - 1 \right)$$

Przykład 3.3

Wyznaczyć siłę w lekkiej linie o długości l , na której zawieszono kulę o masie m . Siłę w linie wyznaczyć w funkcji kąta φ , jaki linia w czasie ruchu tworzy z poziomem. W chwili początkowej linia była pozioma, a kula pozostawała w spoczynku.



Rys. 3.10

Rozwiązanie

Ruch kuli potraktowano jako ruch punktu materialnego poruszającego się ruchem krzywoliniowym po torze o znanym promieniu krzywizny toru.

Ruch ten opisano równaniami dynamicznymi odniesionymi do toru tego punktu, w układzie osi naturalnych, czyli na kierunku styczny i normalny (torem tego punktu jest linia płaska). Mamy więc:

$$m \cdot p_t = m \cdot g \cdot \cos \varphi$$

$$m \cdot p_n = S - m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

gdzie:

$$p_t = \frac{dV}{dt} \qquad p_n = \frac{V^2}{l}$$

Z równania dynamicznego na kierunek normalny otrzymano:

$$S = m \cdot \frac{V^2}{l} + m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Aby wyznaczyć siłę w linie w funkcji kąta φ , należy wyznaczyć wartość prędkości poruszającego się punktu również w funkcji kąta φ .

Z równania dynamicznego na kierunek styczny mamy:

$$\frac{dV}{dt} = g \cdot \cos \varphi$$

W równaniu tym są trzy zmienne V , φ i czas t . Aby rozwiązać to równanie przez rozdzielanie zmiennych, przyjęto podstawienie:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \omega = \frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{V}{l}$$

Wstawiając to podstawienie do równania dynamicznego na kierunek styczny, otrzymano:

$$\frac{V}{l} \cdot \frac{dV}{d\varphi} = g \cdot \cos \varphi$$

Po rozdzieleniu zmiennych mamy:

$$\frac{V}{l} \cdot dV = g \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi$$

Po scałkowaniu stronami powyższego równania i wyznaczeniu stałej całkowania z warunku początkowego dla $t = 0$, $\varphi = 0$ i $V = 0$, stała całkowania $C = 0$, otrzymano:

$$\frac{V^2}{l} = 2 \cdot g \cdot \sin \varphi$$

Otrzymaną wartość prędkości wstawiono do zależności opisującej wartość siły w linie, otrzymując ostatecznie:

$$S = 3 \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

3.2.3. Szczególne przypadki ruchu punktu materialnego

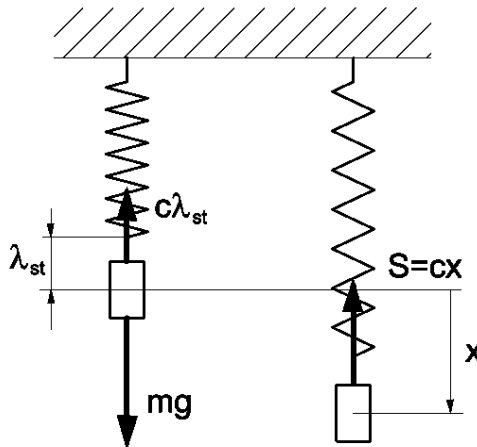
Drgania swobodne punktu materialnego

Rozpatrzmy ruch punktu o masie m , zawieszonoego na liniowej sprężynie o stałej c , jak pokazano na rys. 3.11.

Po zawieszeniu na sprężynie masy m , siła ciężkości tej masy spowoduje wydłużenie się sprężyny o długość odpowiadającą wydłużeniu statycznemu λ_{st} , które zgodnie z rysunkiem wynosi:

$$\lambda_{st} = \frac{mg}{c} \quad (a)$$

Masa m osiągnie w tym położeniu równowagę i każde wychylenie z tego położenia spowoduje ruch względem tego położenia. Napiszmy równanie dynamiczne dla poruszającego się punktu w dowolnym położeniu określonym współrzędną x . Na punkt działa tylko siła w sprężynie, gdyż siła ciężkości równoważy się w każdej chwili ruchu z siłą pochodzącą od wydłużenia statycznego.



Rys. 3.11

Mamy więc:

$$m \cdot \ddot{x} = -S = -c \cdot x \quad (b)$$

Dzieląc otrzymane równanie przez masę, otrzymano:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0 \quad (c)$$

Po podstawieniu $\frac{c}{m} = \omega^2$, gdzie ω jest częstością kołową drgań, otrzymano równanie różniczkowe ruchu harmonicznego postaci:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = 0 \quad (3.12)$$

Rozwiązanie tego równania jest kombinacją liniową rozwiązań odpowiadających pierwiastkom równania charakterystycznego i ma postać:

$$x = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t) \quad (3.13)$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi które wyznaczamy z warunków początkowych.

Jeśli za początek ruchu przyjmiemy chwilę wychylenia masy m o odległość a i puszczeniu jej bez prędkości początkowej, warunki będą miały postać:

$$\text{dla } t = 0 \quad \text{przemieszczenie } x = a \quad \text{prędkość } \dot{x} = 0 \quad (d)$$

Prędkość w dowolnej chwili jest pochodną przemieszczenia wyrażonego równaniem (3.13) i ma wartość:

$$\dot{x} = C_1 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) - C_2 \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) \quad (e)$$

Wstawiając warunki początkowe (d) do równań (3.13) i (e), otrzymano wartości stałych C_1 i C_2 , które wynoszą: $C_1 = 0$ i $C_2 = a$.

Równanie ruchu harmonicznego punktu materialnego o masie m ma postać:

$$x = a \cdot \cos(\omega t) \quad (3.14)$$

Okres ruchu tego punktu (drgań) wynika z okresowości funkcji cosinus i ma wartość:

$$\omega \cdot (t + T) = \omega \cdot t + 2 \cdot \pi = \omega \cdot \left(t + \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \right) \quad (f)$$

Ostatecznie okres drgań wynosi:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (g)$$

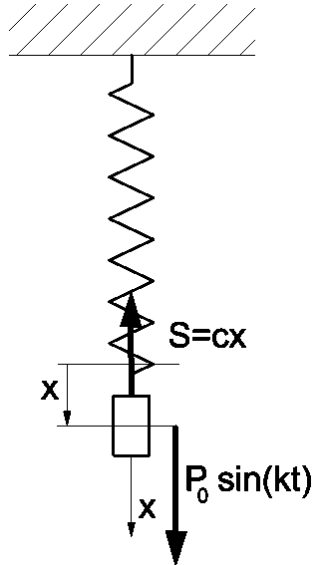
Częstotliwość drgań określona jest zależnością:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} \quad (h)$$

Drgania wymuszone siłą harmoniczną bez tłumienia

Rozpatrzmy ruch punktu o masie m , zawieszonoego na liniowej sprężynie o stałej c , jak pokazano na rys. 3.12.

Do punktu tego przyłożmy harmoniczną siłę o stałej amplitudzie P_0 .



Rys. 3.12

Równanie ruchu tego punktu ma postać:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot \dot{x} = P_0 \cdot \sin(kt) \quad (i)$$

Po sprowadzeniu powyższego równania do postaci odniesionej do jednostki masy mamy:

$$\ddot{x} + \omega^2 \cdot x = q \cdot \sin(kt) \quad (3.15)$$

gdzie: $\omega^2 = \frac{c}{m}$ $q = \frac{P_0}{m}$

Rozwiązanie równania (3.15) jest sumą rozwiązań równania jednorodnego, którego postać przedstawia równanie (3.13), a więc:

$$x_0 = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t) \quad (j)$$

oraz rozwiązanie szczególnego odpowiadającego funkcji okresowej stojącej po prawej stronie równania (3.15). Rozwiązanie to przewidujemy postaci:

$$x_s = A \cdot \sin(kt) + B \cdot \cos(kt) \quad (k)$$

Po podstawieniu rozwiązania (k) do równania (3.15) otrzymano stałe A i B. Stałe te wynoszą:

$$A = \frac{q}{\omega^2 - k^2} \quad B = 0$$

Rozwiązanie równania (3.15) ma postać:

$$x = C_1 \cdot \sin(\omega t) + C_2 \cdot \cos(\omega t) + \frac{q}{\omega^2 - k^2} \sin(kt) \quad (l)$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi, które należy wyznaczyć z warunków początkowych ruchu.

Dla $t = 0$ $x(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 0$

Stałe te wynoszą:

$$C_1 = -\frac{q \cdot k}{\omega \cdot (\omega^2 - k^2)} \quad C_2 = 0 \quad (m)$$

Podstawiając stałe C_1 i C_2 do równania (l), otrzymano równanie drgań wymuszonych punktu materialnego zawieszonoego na liniowej sprężynie.

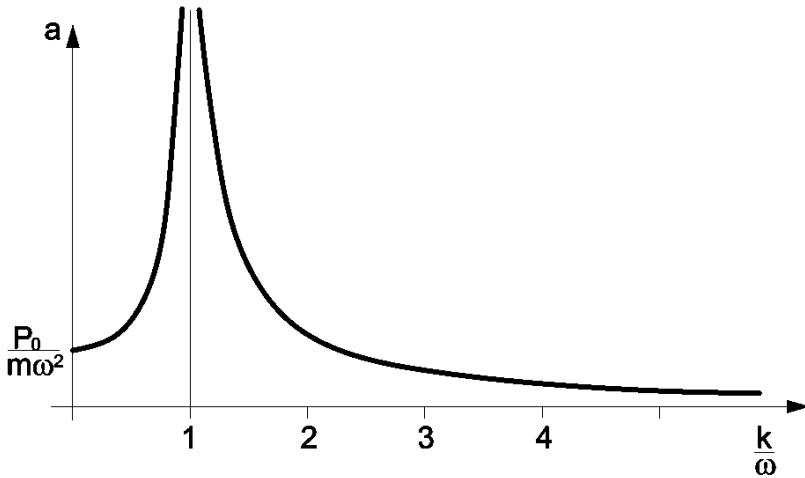
$$x = -\frac{q \cdot k}{\omega \cdot (\omega^2 - k^2)} \cdot \sin(\omega t) + \frac{q}{\omega^2 - k^2} \sin(kt) \quad (3.16)$$

Rozwiązanie powyższe ma sens, jeśli $\omega \neq k$. Otrzymane rozwiązanie składa się z dwu wyrazów, pierwszy dotyczy drgań z częstością własną układu zależną od parametrów siły wymuszającej (amplituda, częstość), drugi dotyczy drgań wymuszonych z częstością siły wymuszającej.

Zgodnie z równaniem (3.16) amplituda drgań wymuszonych wynosi:

$$|a| = \left| \frac{q}{\omega^2 - k^2} \right| = \left| \frac{P_0}{m \cdot \omega^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{k^2}{\omega^2}} \right| \quad (n)$$

Wartość amplitudy drgań wymuszonych, przy stałej amplitudzie siły wymuszającej, zależy od częstości tej siły. Przebieg wartości tej amplitudy w funkcji częstości wymuszenia przedstawiono na rys. 3.13.



Rys. 3.13

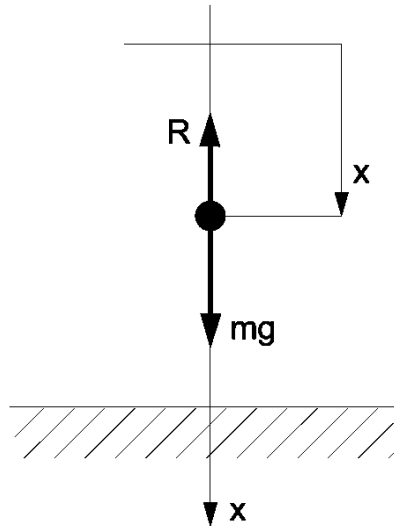
Dla częstości siły wymuszającej równej częstości drgań własnych układu $\omega = k$ następuje gwałtowny wzrost amplitudy drgań wymuszonych (dla układu bez tłumienia amplituda rośnie do nieskończoności). Zjawisko to nosi nazwę rezonansu.

Swobodny spadek z uwzględnieniem oporu powietrza

Ciało poruszające się w ośrodku gazowym (w powietrzu) wywołuje opór, którego wartość jest proporcjonalna do kwadratu prędkości tego ciała. Dodajmy, że ruch ciała w ośrodku płynnym wywołuje opór proporcjonalny do prędkości. Rozpatrzmy ruch ciała o masie m , spadającego w dół pod wpływem siły ciężkości z uwzględnieniem oporu powietrza, jak pokazano na rys. 3.14. Równanie ruchu tego ciała ma postać:

$$m \cdot \ddot{x} = m \cdot g - R \quad (a)$$

gdzie R jest siłą oporu powietrza.



Rys.3.14

Siła ta, zgodnie z wynikami badań doświadczalnych, jest proporcjonalna do kwadratu prędkości i wynosi:

$$R = k \cdot v^2 \quad (b)$$

Stała k jest współczynnikiem oporu powietrza, który zależy od kształtu i wymiarów spadającego ciała. Wstawiając (b) do równania (a) i uwzględniając, że

$\ddot{x} = \frac{dv}{dt}$ mamy:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m} \cdot v^2 \quad (c)$$

Jeśli wprowadzimy oznaczenie $c^2 = \frac{m \cdot g}{k}$, co na podstawie równania (c) oznacza, że przyspieszenie spadającego ciała jest równe zero, a jego prędkość $v = c$, otrzymujemy równanie:

$$\frac{dv}{dt} = g \cdot \frac{c^2 - v^2}{c^2} \quad (d)$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymano równanie:

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2} \cdot dt \quad (e)$$

Wykorzystując podstawienie:

$$\frac{1}{c^2 - v^2} = \frac{1}{2 \cdot c} \left(\frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right) \quad (f)$$

i całkując stronami równanie (e), otrzymano:

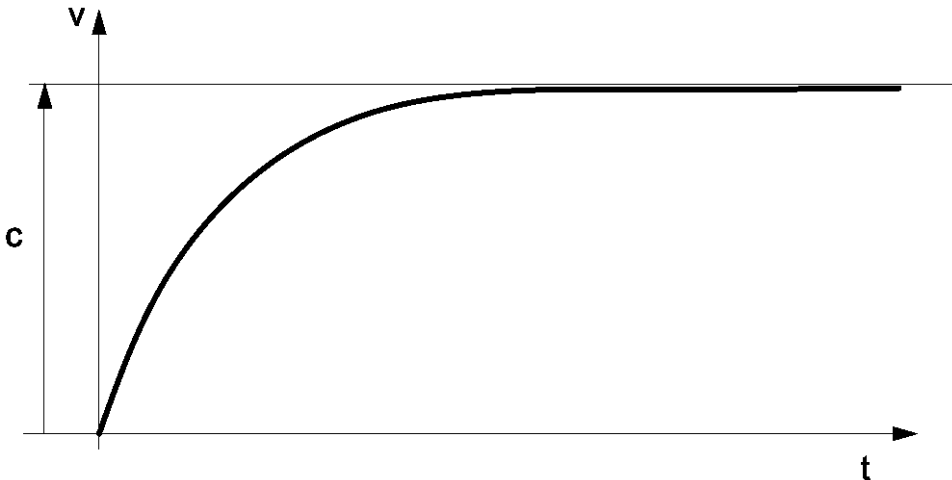
$$\ln(c+v) - \ln(c-v) = \frac{2 \cdot g}{c} \cdot t + C \quad (g)$$

Wstawiając warunki początkowe ruchu ciała, że dla $t = 0$, prędkość $v = 0$, stała $C = 0$.

Przekształcając równanie (g) względem prędkości, otrzymano:

$$v = c \cdot \frac{e^{\frac{2gt}{c}} - 1}{e^{\frac{2gt}{c}} + 1} = c \cdot \operatorname{th} \left(\frac{gt}{c} \right) \quad (3.17)$$

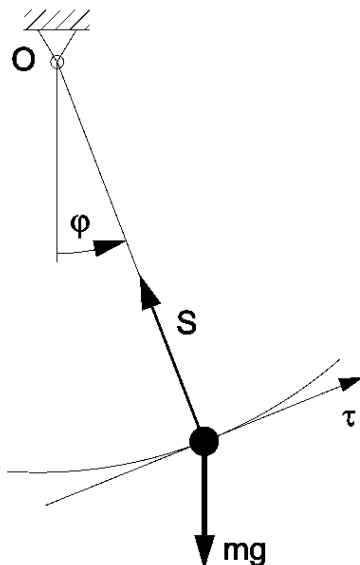
Jest to zależność umożliwiająca wyznaczenie prędkości spadającego ciała w funkcji czasu. Wynika z niej, że jeśli czas t rośnie nieograniczenie, $\operatorname{th} \left(\frac{gt}{c} \right)$ dąży do jedności, a prędkość v zmierza do wartości c , która nosi nazwę prędkości granicznej. Wykres zmiany prędkości w czasie przedstawiono na rys. 3.15.



Rys. 3.15

Wahadło matematyczne

Wahadłem matematycznym nazywamy punkt materialny zawieszony na nieważkiej nici (pręcie), mogący wykonywać ruch w płaszczyźnie pionowej. Rozpatrzmy ruch punktu o masie m , który zawieszono na nici o długości l , jak pokazano na rys. 3.16.



Rys. 3.16

Po uwolnieniu punktu od więzów i napisaniu równania ruchu na kierunek styczny do toru, otrzymano równanie:

$$m \cdot p_t = -m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (a)$$

Jeśli ograniczymy się do małych kątów φ i w rozwinięciu funkcji $\sin \varphi$ w szereg potęgowy uwzględnimy tylko pierwszą potęgę, otrzymamy $\sin \varphi \approx \varphi$. Podstawiając wartość przyspieszenia stycznego $p_t = \varepsilon \cdot l = \ddot{\varphi} \cdot l$ oraz uproszczenie odpowiadające małym kątom φ do równania (a), otrzymano:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 \quad (b)$$

Wstawiając podstawienie $\frac{g}{l} = \omega^2$, otrzymano równanie różniczkowe o identycznej postaci jak równanie (3.12) opisujące ruch harmoniczny punktu materialnego zawieszonoego na liniowej sprężynie.

Równanie ruchu wahadła matematycznego ma postać:

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \cdot \varphi = 0 \quad (3.18)$$

Rozwiązanie równania (3.18) jest identyczne jak równania (3.12). Po wstawieniu warunków początkowych odpowiadających wychyleniu wahadła o kąt φ_0 i puszczeniu bez prędkości początkowej, otrzymano równanie ruchu:

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos(\omega t) \quad (3.19)$$

Okres wahań wahadła matematycznego wynosi:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (c)$$

Z zależności (c) wynika, że okres wahadła matematycznego nie zależy od początkowego wychylenia wahadła φ_0 . Dla małych kątów wychylenia okres wahań ma wartość stałą.

3.3. PĘD PUNKTU I UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

3.3.1. Pęd punktu materialnego

Ruch punktu materialnego pod działaniem siły, wynikający z drugiego prawa Newtona, można opisać równaniem:

$$m \mathbf{p} = \mathbf{P} \quad (a)$$

Równaniu temu można nadać inną postać, podstawiając wartość przyspieszenia $\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Mamy więc:

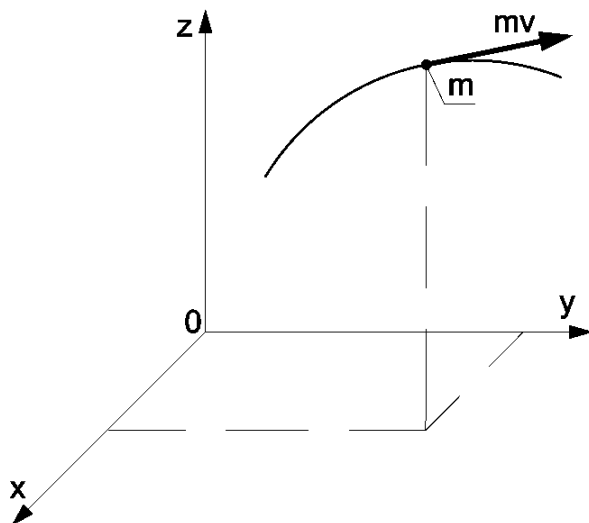
$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{P} \quad (b)$$

Ponieważ rozpatrujemy punkt o stałej masie m , której wartość nie zmienia się w czasie, masę tę możemy wstawić pod znak pochodnej. Mamy więc:

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{P} \quad (3.20)$$

Otrzymany w równaniu (3.20) wektor mv (iloczyn masy i prędkości) nosi nazwę **pędu** lub inaczej **ilości ruchu** punktu materialnego.

Z powyższego równania wynika również, że **pochodna wektorowa względem czasu pędu punktu materialnego równa jest sile działającej na ten punkt.**



Rys. 3.17

Ponieważ wektor pędu mv ma kierunek prędkości, jego składowe w prostokątnym układzie współrzędnych wynoszą:

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = P_x \quad \frac{d}{dt}(mv_y) = P_y \quad \frac{d}{dt}(mv_z) = P_z \quad (3.21)$$

Z równań tych wynika, że pochodna względem czasu, składowej pędu wyznaczonej względem nieruchomej osi, równa jest rzutowi działającej siły na tę oś. Wprowadźmy nową wielkość, którą nazwiemy **impulsem siły**.

Impuls stałej siły jest to wektor równy iloczynowi siły \mathbf{P} i czasu t . Oznaczając impuls siły przez \mathbf{S} , możemy zapisać:

$$\mathbf{S} = \mathbf{P} t \quad (3.22)$$

Z zapisu impulsu siły równaniem (3.22) wynika, że impuls \mathbf{S} jako wektor ma kierunek siły, tak więc składowe wektora impulsu w prostokątnym układzie osi współrzędnych wynoszą:

$$S_x = P_x t \quad S_y = P_y t \quad S_z = P_z t \quad (3.23)$$

W ogólnym przypadku, jeśli siła jest wektorową funkcją czasu, można wyznaczyć impuls elementarny dla chwili t . Mamy wówczas:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{P}dt \quad (c)$$

Dla skończonego przedziału czasu od t_0 do t , impuls będzie sumą geometryczną impulsów elementarnych tej siły i wyniesie:

$$\mathbf{S} = \int_{t_0}^t \mathbf{P}dt \quad (3.24)$$

Wykorzystując zależność (3.24), równanie (3.20) po scałkowaniu w granicach od t_0 do t będzie miało postać:

$$m \mathbf{v} - m \mathbf{v}_0 = \mathbf{S} \quad (3.25)$$

Z powyższego równania wynika, że przyrost wektorowy pędu punktu materialnego w skończonym przedziale czasu równy jest impulsowi siły działającej na ten punkt.

Jednostką pędu w układzie SI będzie 1 kg m/s – kilogramometr na sekundę (iloczyn masy i prędkości), natomiast jednostką impulsu siły w układzie SI będzie 1 N s – niutonosekunda (iloczyn siły i czasu). A więc:

$$1 \text{ N s} = 1 \text{ kg m/s} \quad (d)$$

3.3.2. Pęd układu punktów materialnych

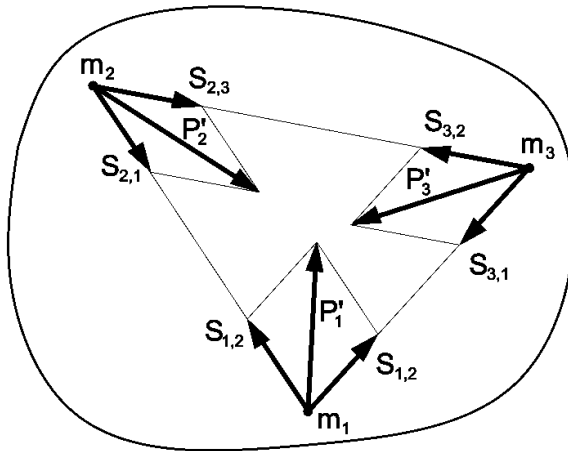
Niech będzie układ n punktów materialnych, którego elementarne masy wynoszą m_1, m_2, \dots, m_n . Układając dla każdej z mas dynamiczne równanie ruchu, należy uwzględnić wypadkową wszystkich sił działających na punkty rozważanego układu. Siły te podzielimy na dwie zasadnicze grupy: **siły zewnętrzne** i **siły wewnętrzne**.

Siłami zewnętrznymi nazywamy siły oddziaływania przez punkty lub ciała nienależące do układu rozważanego. Siłami wewnętrznymi natomiast nazwiemy siły wzajemnego oddziaływania punktów należących do tego samego układu.

Oznaczmy wypadkową sił zewnętrznych przyłożonych do punktu o masie m_i przez \mathbf{P}_i , a wypadkową sił wewnętrznych \mathbf{P}_i' .

Na podstawie trzeciego prawa Newtona, siły wzajemnego oddziaływania dwóch punktów materialnych są równe co do wartości liczbowej, przeciwnie skierowane i działają wzdłuż prostej łączącej te punkty. Tak więc mamy:

$$\mathbf{S}_{i,k} = - \mathbf{S}_{k,i} \quad (3.26)$$



Rys. 3.18

Z rysunku wynika, że wypadkowa sił wewnętrznych działająca na dowolny punkt materialny wynosi:

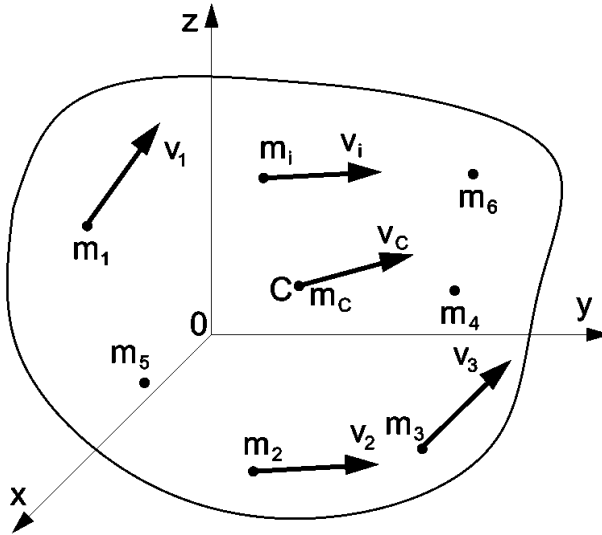
$$\mathbf{P}'_i = \sum_{k=1}^n \mathbf{S}_{i,k} \quad (3.27)$$

Uwzględniając własność sił wewnętrznych zapisaną równaniem (3.26), suma geometryczna wszystkich sił wewnętrznych dowolnego układu punktów materialnych oraz suma ich momentów względem dowolnego bieguna jest równa zero. Możemy zapisać:

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}'_i = 0 \quad \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}'_i = 0 \quad (3.28)$$

gdzie \mathbf{r}_i – promień-wektor punktu o masie m_i poprowadzony z początku przyjętego układu współrzędnych.

Rozpatrzmy układ punktów materialnych przedstawiony na rysunku poniżej. Zgodnie z równaniem (3.20), po uwzględnieniu sił zewnętrznych i wewnętrznych działających na punkty rozpatrywanego układu, dla każdego z tych punktów można ułożyć równanie postaci:



Rys. 3.19

$$\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{P}_i + \mathbf{P}'_i \quad (\text{a})$$

Sumując stronami tak wypisane równania dla wszystkich punktów należących do rozważanego układu, otrzymano:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}'_i \quad (3.29)$$

Po uwzględnieniu zależności (3.28) i zmianie znaków sumy otrzymano:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (3.30)$$

Sumę z lewej strony powyższego równania nazwano pędem albo ilością ruchu układu punktów materialnych. Oznaczając przez \mathbf{Q} pęd całego układu, mamy:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i \quad (3.31)$$

Ostatecznie możemy napisać:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (3.32)$$

Otrzymano równanie, z którego wynika następujące twierdzenie dotyczące układu punktów materialnych:

Pochodna względem czasu wektora pędu układu punktów materialnych równa jest sumie geometrycznej sił zewnętrznych przyłożonych do tego układu.

Z równania wektorowego (3.32) wynikają również trzy równania skalarne rzutów na osie przyjętego, stałego prostokątnego układu współrzędnych.

Mają one postać:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum_{i=1}^n P_{iz} \quad (3.33)$$

Jeśli $\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$, czyli jeśli na punkty materialne należące do rozważanego układu nie działają żadne siły zewnętrzne, układ nosi nazwę **układu izolowanego**. Tak więc $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = 0$ i jest to **zasada zachowania pędu**, z której wynika, że pęd układu izolowanego ma wartość stałą $\mathbf{Q} = \text{const}$.

Wyznamy praktycznie pęd układu punktów materialnych. Zgodnie ze wzorem (3.31) mamy:

$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{r}_i) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i \right) \quad (3.34)$$

Promień wektor \mathbf{r}_c określający położenie środka masy układu punktów materialnych wynosi:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{m} \quad (3.35)$$

Stojąca w liczniku suma iloczynów elementarnych mas i promieni wektorów określających ich położenie wyniesie:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_c \quad (b)$$

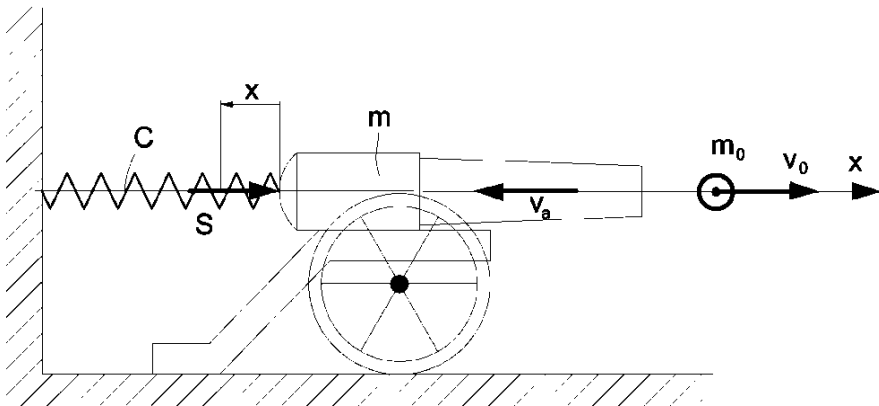
Ostatecznie, wstawiając (b) do równania (3.34), pęd układu punktów materialnych wynosi:

$$\mathbf{Q} = \frac{d}{dt}(\mathbf{m}\mathbf{r}_c) = \mathbf{m}\mathbf{v}_c \quad (3.36)$$

Wektor pędu układu punktów materialnych równy jest iloczynowi masy układu i prędkości jego środka masy.

Przykład 3.4

Z armaty o masie m ustawionej na poziomym podłożu i zabezpieczonej sprężyną o stałej c , jak pokazano na rysunku, wystrzelono pocisk o masie m_0 . Wyznaczyć ugięcie sprężyny zabezpieczającej armatę po wystrzeleniu pocisku, jeżeli pocisk opuszcza lufę armaty z prędkością V_p . W rozwiązaniu masę kół pominąć.



Rys. 3.20

Rozwiązanie

Aby wyznaczyć ugięcie lekkiej sprężyny po wystrzeleniu pocisku z armaty, należy wyznaczyć prędkość armaty w chwili wystrzału. Prędkość tę wyznaczono z zasady zachowania pędu układu materialnego. Wypadkowa sił zewnętrznych działających na układ w chwili wystrzału jest równa zero, gdyż siły wybuchu powodujące ruch kuli w lufie są siłami wewnętrznymi. Z twierdzenia o pochodnej pędu mamy:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{i=1}^n P_{ix}$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^n P_{ix} = 0$ $Q_x = \text{const}$

Oznaczając prędkość armaty po wystrzale przez V_a , mamy:

$$Q_x = m_o \cdot V_p - m \cdot V_a = 0$$

i ostatecznie:

$$V_a = \frac{m_o}{m} \cdot V_p$$

Dynamiczne równanie ruchu armaty o masie m po wystrzeleniu pocisku ma postać:

$$-m \cdot \ddot{x} = S = c \cdot x$$

ponieważ $\ddot{x} = \frac{dV}{dt}$ oraz $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \cdot \frac{dV}{dx}$, otrzymano równanie różniczkowe:

$$V \cdot \frac{dV}{dx} = -\frac{c}{m} \cdot x$$

Po rozdzieleniu zmiennych i scałkowaniu stronami mamy:

$$\frac{V^2}{2} = -\frac{c}{m} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

Stałą C wyznaczono z warunków początkowych. Dla $x = 0$ $V = V_a$ i z powyższego równania stała $C = \frac{V_a^2}{2}$. Ostatecznie prędkość armaty w funkcji ugięcia sprężyny wynosi:

$$V^2 = V_a^2 - \frac{c}{m} \cdot x^2$$

Ugięcie sprężyny po wystrzeleniu pocisku wyznaczono dla $V = 0$ (armata zatrzyma się) otrzymując:

$$x = V_a \cdot \sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{m_o}{\sqrt{m \cdot c}} \cdot V_p \quad [m]$$

3.4. PRAWO RUCHU ŚRODKA MASY

Korzystając z twierdzenia o pochodnej wektora pędu względem czasu, wyrażonym równaniem (3.32), udowodnimy ważne prawo dotyczące ruchu środka masy układu materialnego. Podstawiając do równania (3.32) pęd układu punktów materialnych zapisany równaniem (3.36), mamy:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (\text{a})$$

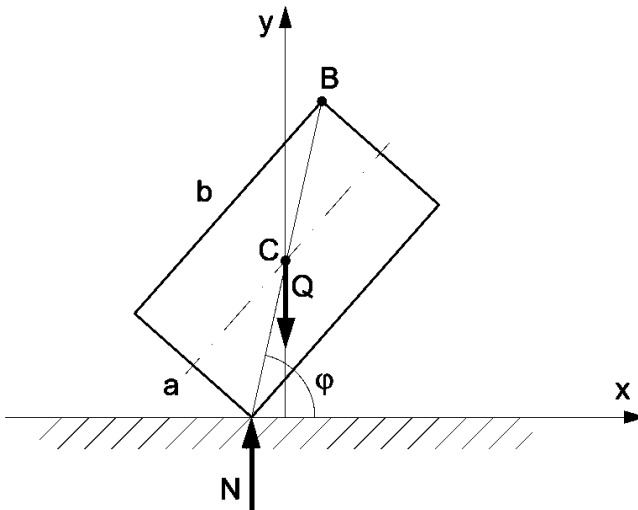
ponieważ pochodna geometryczna prędkości środka masy jest równa jego przyspieszeniu, otrzymujemy ostatecznie:

$$m\mathbf{p}_c = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \quad (3.37)$$

Środek masy układu punktów materialnych porusza się tak, jakby w nim była skupiona masa całego układu i do niego przyłożone wszystkie siły zewnętrzne.

Przykład 3.5

Prostokątną płytę o bokach a i b oraz ciężarze Q ustawiono narożem A na poziomej gładkiej płaszczyźnie, jak przedstawiono na rysunku. Wyznaczyć tor przeciwległego naroża B , jeśli płyta zacznie opadać pod wpływem własnego ciężaru.



Rys. 3.21

Rozwiązanie

Uwalniamy płytę od więzów. Po uwolnieniu łatwo zauważyć, że suma rzutów wszystkich sił na oś x jest równa zero. Tak więc z twierdzenia o ruchu środka masy mamy:

$$\frac{Q}{g} \cdot p_{Cx} = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0$$

czyli przyspieszenie środka masy płyty $p_{Cx} = 0$. Tak więc środek masy płyty (punkt C) będzie poruszał się wzdłuż osi y . Wprowadzając pomocniczo współrzędną kątową φ położenia przekątnej AB, równania ruchu naroża B w przyjętym układzie osi współrzędnych mają postać:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \varphi$$

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin \varphi$$

Podnosząc otrzymane równania ruchu do kwadratu i stronami dodając, otrzymano:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2} = 1$$

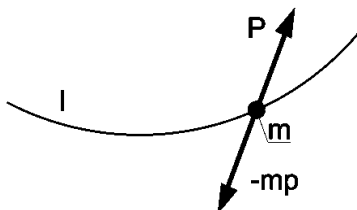
Jak widać torem naroża B jest elipsa o półosiach $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ i $\sqrt{a^2 + b^2}$.

3.5. ZASADA D'ALEMBERTA

Przekształćmy równanie dynamiczne punktu materialnego, wynikające z drugiego prawa Newtona, przenosząc oba wyrazy na jedną stronę. Otrzymamy:

$$\mathbf{P} - m\mathbf{p} = 0 \quad (3.38)$$

Dla punktu będącego w ruchu, równanie (3.38) jest warunkiem równowagi siły \mathbf{P} i powstałej siły dynamicznej.



Rys. 3.22

Ta dynamiczna siła $-m\mathbf{p}$, która jest równa co do wartości iloczynowi masy i przyspieszenia punktu, lecz przeciwnie do tego przyspieszenia skierowana, nosi nazwę **siły bezwładności** lub inaczej **siły d'Alemberta**:

Przyjmując, że siła \mathbf{P} jest wypadkową sił rzeczywistych działających na punkt materialny, możemy sformułować następującą zasadę, zwaną **zasadą d' Alemberta**:

Siły przyłożone do punktu materialnego równoważą się w każdej chwili z siłą bezwładności działającą na ten punkt.

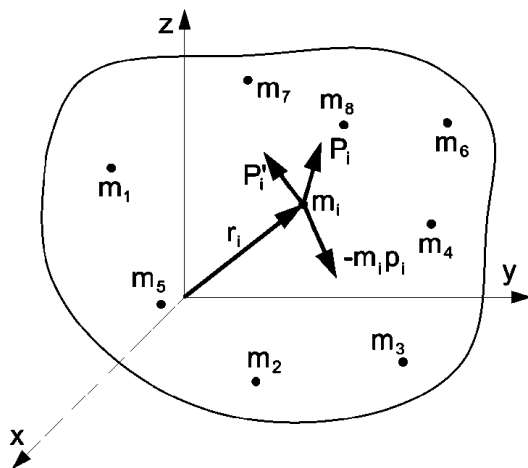
Rozpatrzmy teraz układ punktów materialnych przedstawiony na rysunku poniżej. Na punkt o masie m_i działają siły: \mathbf{P}_i – wypadkowa sił zewnętrznych, \mathbf{P}'_i – wypadkowa sił wewnętrznych oraz siła bezwładności punktu materialnego $-m_i\mathbf{p}_i$. Dla punktu tego, zgodnie z równaniem (3.38), możemy napisać:

$$-m_i\mathbf{p}_i + \mathbf{P}_i + \mathbf{P}'_i = 0 \quad (3.39)$$

Takie równanie równowagi możemy napisać dla każdego punktu materialnego należącego do rozważanego układu. Z tego wynika, że powstały układ sił, złożony z sił zewnętrznych, wewnętrznych i sił bezwładności, tworzy przestrzenny dowolny układ sił.

Warunkiem równowagi takiego układu sił, jak wiadomo (Część I. Statyka punkt 1.7.5 równanie (1.43)), jest zerowanie się sumy geometrycznej wszystkich sił rzeczywistych i sił bezwładności oraz zerowanie się sumy geometrycznej ich momentów względem dowolnie obranego bieguna O . Można to przedstawić równaniami:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^n m_i\mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}'_i &= \mathbf{0} \\ \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (-m_i\mathbf{p}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}'_i &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (a)$$



Rys. 3.23

Zgodnie z równaniami (3.28), wyprowadzonymi w punkcie 3.3.2, suma geometryczna sił wewnętrznych oraz suma ich momentów względem dowolnie obranego bieguna jest równa zero. Równania równowagi będą miały postać:

$$-\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0 \quad (3.40)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (-m_i \mathbf{p}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = 0$$

Na podstawie otrzymanych równań można sformułować następującą zasadę:

W czasie ruchu swobodnego układu materialnego siły zewnętrzne, przyłożone do punktów tego układu, równoważą się w każdej chwili z odpowiednimi siłami bezwładności.

Pierwsze z równań (3.40) można uprościć. Na podstawie zależności (b) z punktu 3.3.2, mamy:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = m \mathbf{r}_c$$

Różniczkując dwukrotnie obie strony tej zależności względem czasu, otrzymano:

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{p}_i = m \mathbf{p}_c \quad (3.41)$$

Wstawiając otrzymaną zależność do pierwszego równania (3.40), wektorowe równania równowagi będą miały następującą postać:

$$-m \mathbf{p}_c + \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (-m_i \mathbf{p}_i) + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i = 0 \quad (3.42)$$

Z równania (3.41) wynika, że całkowita siła bezwładności równa jest iloczynowi masy rozważanego układu i przyspieszenia środka masy ze znakiem minus.

Obierając za biegun O początek prostokątnego układu osi współrzędnych, z wektorowych równań (3.42) otrzymamy sześć skalnych równań równowagi, jak dla przestrzennego dowolnego układu sił. Trzy są równaniami rzutów i trzy równaniami momentów względem przyjętego układu osi:

$$\begin{aligned} -mp_{cx} + \sum_{i=1}^n P_{ix} &= 0 \\ -mp_{cy} + \sum_{i=1}^n P_{iy} &= 0 \\ -mp_{cz} + \sum_{i=1}^n P_{iz} &= 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$-\sum_{i=1}^n m_i (p_{iz} y_i - p_{iy} z_i) + \sum_{i=1}^n (P_{iz} y_i - P_{iy} z_i) = 0$$

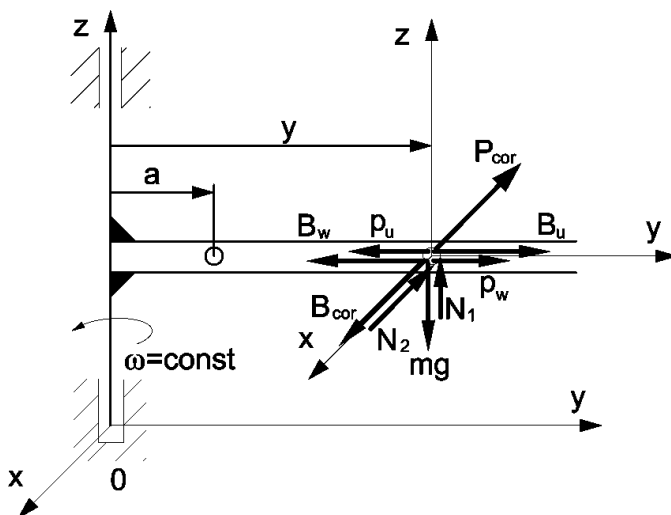
$$-\sum_{i=1}^n m_i (p_{ix} z_i - p_{iz} x_i) + \sum_{i=1}^n (P_{ix} z_i - P_{iz} x_i) = 0$$

$$-\sum_{i=1}^n m_i (p_{iy} x_i - p_{ix} y_i) + \sum_{i=1}^n (P_{iy} x_i - P_{ix} y_i) = 0$$

Wyprowadzone równania d'Alemberta uwzględniają jedynie siły zewnętrzne i dlatego są często stosowane w analizie dynamicznej ruchu ciała sztywnego. Należy jednak pamiętać, że pisząc równania dynamiczne w oparciu o tę zasadę musimy znać sumę geometryczną sił bezwładności oraz jej miejsce przyłożenia. Z równania (3.41) wiadomo, że suma geometryczna sił bezwładności równa jest iloczynowi masy całkowitej i wziętego ze znakiem minus przyspieszenia środka masy, natomiast miejsce jej przyłożenia w ogólnym przypadku jest nieznanne i tylko w niektórych przypadkach da się ono wyznaczyć.

Przykład 3.6

Gładką rurkę, z kulką o masie m w środku, zamocowano do pionowej osi obracającej się ze stałą prędkością kątową ω . Wyznaczyć reakcję kulki na ściankę rurki w dowolnej chwili jej ruchu, jeśli w chwili początkowej kulka znajdowała się w odległości a od osi obrotu. Opory ruchu kulki w rurce pominąć.



Rys. 3.24

Rozwiązanie

W dowolnej chwili ruchu na kulkę działają następujące siły: ciężkości mg , d'Alemberta od przyspieszenia unoszenia $B_u = m \cdot \omega^2 \cdot y$, d'Alemberta od przyspieszenia względnego $B_w = m \cdot \ddot{y}$, d'Alemberta od przyspieszenia coriolisa $B_{cor} = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \dot{y}$ i reakcje normalne oddziaływania ścianek rurki N_1 w kierunku osi z oraz N_2 w kierunku osi x .

Zgodnie z zasadą d'Alemberta, równania równowagi dynamicznej mają postać:

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= B_{cor} - N_2 = 0 \\ \sum P_{iy} &= B_u - B_w = 0 \\ \sum P_{iz} &= N_1 - m \cdot g = 0\end{aligned}$$

Rozwiązanie zadania rozpoczęto od równania drugiego, z którego wyznaczono równanie ruchu kulki:

$$\begin{aligned}m \cdot \omega^2 \cdot y - m \cdot \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{y} - \omega^2 \cdot y &= 0\end{aligned}$$

Jest to równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach. Postępując zgodnie ze znanymi procedurami, otrzymano rozwiązanie:

$$x = C_1 \cdot e^{\omega t} + C_2 \cdot e^{-\omega t}$$

Stałe C_1 i C_2 wyznaczone z warunków początkowych dla $t = 0$, $y = a$, $\dot{y} = 0$. Stałe te mają wartość $C_1 = C_2 = \frac{a}{2}$.

Równanie ruchu kulki w gładkiej rurce w funkcji czasu ma postać:

$$y = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

Wartości składowych reakcji kulki na ściankę rurki z dynamicznych równań równowagi wynoszą:

$$N_2 = B_{\text{cor}} = 2 \cdot m \cdot \omega \cdot \dot{y} = m \cdot a \cdot \omega^2 \cdot (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

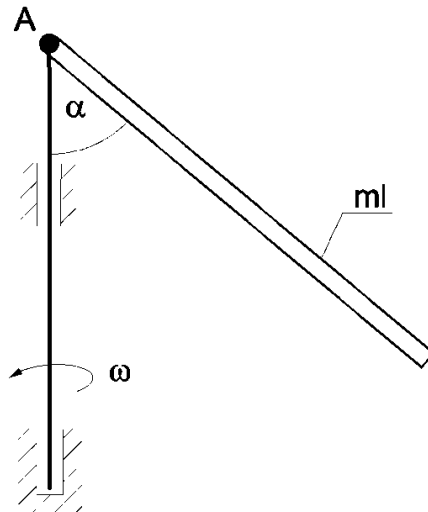
$$N_1 = m \cdot g$$

Całkowita wartość reakcji normalnej wynosi:

$$N = \sqrt{(m \cdot g)^2 + [m \cdot a \cdot \omega^2 \cdot (e^{\omega t} - e^{-\omega t})]^2} = m \cdot \sqrt{g^2 + a^2 \omega^4 (e^{\omega t} - e^{-\omega t})^2}$$

Przykład 3.7

Do pionowej osi obracającej się z prędkością kątową $\omega = \text{const}$ zamocowano przegubowo w punkcie A pręt o masie m i długości l . Wyznaczyć kąt α , jaki utworzy pręt z pionową osią w ruchu ustalonym.

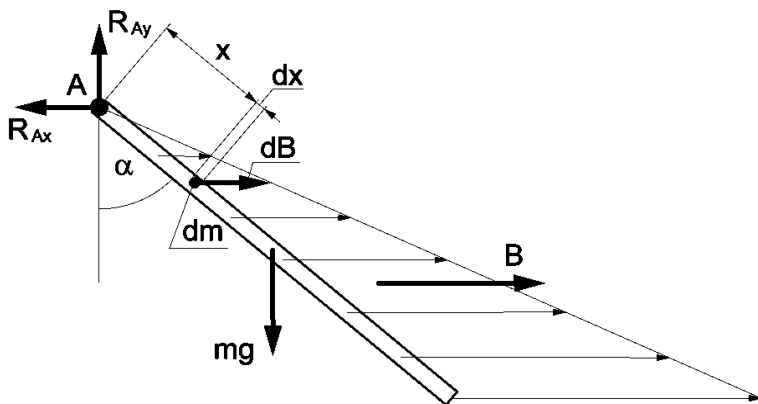


Rys. 3.25

Rozwiązanie

W ruchu obrotowym ze stałą prędkością kątową $\omega = \text{const}$, położenie pręta względem pionowej osi ustali się i będzie w równowadze względnej pod działaniem siły ciężkości i powstałej w wyniku obrotu siły bezwładności.

Uwalniając pręt od więzów, mamy siły czynne i reakcje jak na rysunku.



Rys. 3.26

Aby wyznaczyć kąt α , wystarczy napisać równanie równowagi wynikające z sumy momentów względem punktu A. Mamy:

$$\sum M_{iA} = M_B - m \cdot g \cdot \frac{l}{2} \cdot \sin \alpha = 0 \quad (a)$$

gdzie M_B jest momentem całkowitej siły bezwładności jako sumy wynikającej z ciągłego rozkładu wzdłuż pręta.

Tę całkowitą siłę bezwładności wyznaczymy sumując siły elementarne dB .

$$dB = dm \cdot \omega^2 \cdot x \cdot \sin \alpha \quad (b)$$

ponieważ pręt jest jednorodny, mamy:

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{l} \quad dm = \frac{m}{l} dx \quad (c)$$

$$dB = \frac{m}{l} dx \cdot \omega^2 \cdot x \cdot \sin \alpha \quad (d)$$

Całkując wyrażenie (d) wzdłuż długości pręta l , otrzymamy wartość całkowitej siły bezwładności. Jak wynika z równania (a) do wyznaczenia kąta α nie wystarczy znajomość jej wartości, należy wyznaczyć jej moment względem punktu A.

Ponieważ jak zwykle nie znamy miejsca przyłożenia siły bezwładności, skorzystamy z twierdzenia Varignona i zsumujemy momenty elementarne. Mamy więc:

$$dM_B = dB \cdot x \cdot \cos \alpha = \frac{m}{l} \cdot dx \cdot \omega^2 \cdot x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (e)$$

całkowity moment wynosi:

$$M_B = \int_0^l \frac{m}{l} \cdot dx \cdot \omega^2 \cdot x^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{3} m \cdot l^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (f)$$

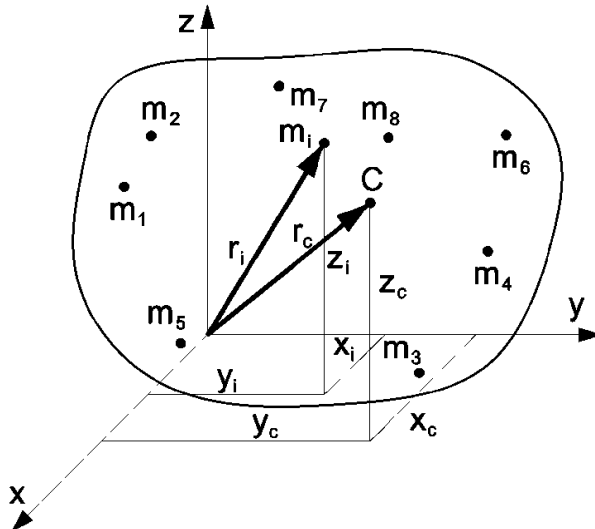
Po wstawieniu wyznaczonego momentu do równania (a) i rozwiązaniu względem funkcji trygonometrycznych, otrzymano:

$$\alpha = 0 \quad \text{lub} \quad \cos \alpha = \frac{3 \cdot g}{2 \cdot \omega^2 \cdot l} \quad (g)$$

3.6. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI CIAŁA SZTYWNEGO

3.6.1. Moment bezwładności i moment odśrodkowy

Układem punktów materialnych nazwalimy zbiór składający się z dowolnej liczby punktów materialnych. Rozważmy układ punktów materialnych w prostokątnym układzie osi współrzędnych, składający się z n elementarnych punktów, których masy odpowiednio wynoszą m_1, m_2, \dots, m_n . Położenie punktu o masie m_i określono promieniem-wektorem r_i poprowadzonym z początku tego układu. Składowe wektora r_i są jednocześnie współrzędnymi x_i, y_i, z_i położenia masy m_i .



Rys. 3.27

Punkt C zaznaczony na rysunku nosi nazwę środka masy układu punktów materialnych. Położenie tego punktu opisane promieniem-wektorem \mathbf{r}_c , poprowadzonym z początku układu osi współrzędnych O, określa równanie:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.44)$$

Jeśli oznaczymy przez x_c, y_c, z_c współrzędne środka masy C, które odpowiadają składowym promienia-wektora \mathbf{r}_c , to z równania wektorowego (3.44) otrzymamy bezpośrednio:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.45)$$

Sumy iloczynów elementarnych mas i odpowiednich współrzędnych występujące w licznikach noszą nazwę **momentów statycznych**.

W czasie ruchu ciała materialnego, oprócz wartości jego masy, bardzo istotna jest wielkość zależna od rozkładu tej masy w przestrzeni. Wielkość ta nosi nazwę momentu bezwładności.

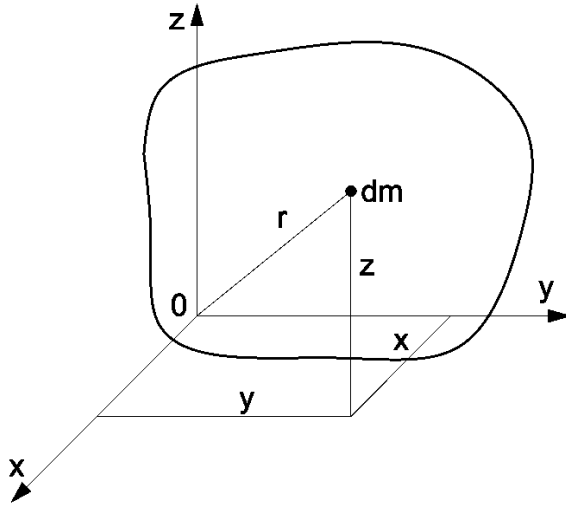
Moment bezwładności możemy określać względem osi, płaszczyzny lub punktu.

Momentem bezwładności ciała względem dowolnie obranej osi (płaszczyzny, punktu) nazywamy sumę iloczynów elementarnych mas, na które zostało podzielone ciało, przez kwadraty odległości tych elementów od przyjętej osi (płaszczyzny, punktu).

Jeśli oznaczymy elementarną masę przez dm , to zgodnie z definicją, momenty bezwładności ciała względem płaszczyzny Oyz, Oxz i Ozy odpowiednio wyniosą:

$$J_{(yz)} = \int_m x^2 dm \quad J_{(xz)} = \int_m y^2 dm \quad J_{(xy)} = \int_m z^2 dm \quad (a)$$

gdzie x, y, z są współrzędnymi prostokątnymi elementu o masie dm .



Rys. 3.28

Momenty bezwładności ciała względem osi Ox, Oy i Oz prostokątnego układu współrzędnych odpowiednio wynoszą:

$$\begin{aligned}
 J_x &= \int_m (y^2 + z^2) dm = \int_m y^2 dm + \int_m z^2 dm = J_{(xz)} + J_{(xy)} \\
 J_y &= \int_m (x^2 + z^2) dm = \int_m x^2 dm + \int_m z^2 dm = J_{(yz)} + J_{(xy)} \\
 J_z &= \int_m (x^2 + y^2) dm = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm = J_{(yz)} + J_{(xz)}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Otrzymano zależności, z których wynika, że moment bezwładności ciała wyznaczony względem osi, równy jest sumie momentów bezwładności tego ciała wyznaczonych względem dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyzn tworzących w przecięciu tę oś.

Sumując równania (3.46) stronami otrzymano:

$$J_x + J_y + J_z = 2(J_{(xz)} + J_{(yz)} + J_{(xy)}) \tag{3.47}$$

Suma momentów bezwładności ciała względem trzech wzajemnie prostopadłych osi, równa jest podwojonej sumie momentów bezwładności tego ciała względem trzech prostopadłych płaszczyzn tworzących w przecięciu te osie.

Moment bezwładności ciała względem punktu O, czyli biegunowy moment bezwładności wynosi:

$$J_0 = \int_m r^2 dm = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm \tag{b}$$

Zastępując całkę sumy przez sumę całek, otrzymano:

$$J_0 = \int_m x^2 dm + \int_m y^2 dm + \int_m z^2 dm = J_{(yz)} + J_{(xz)} + J_{(xy)} \quad (3.48)$$

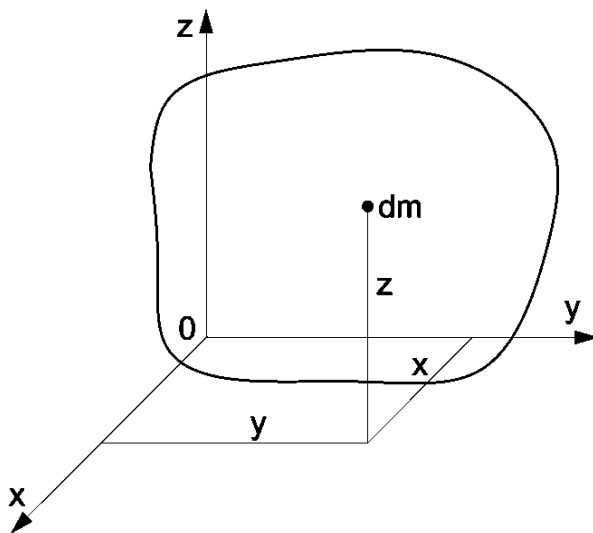
Podstawiając do powyższego równania w miejsce sumy momentów stojących po prawej stronie sumę z zależności (3.47), otrzymano:

$$J_0 = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) \quad (3.49)$$

Biegunowy moment bezwładności ciała równy jest sumie momentów bezwładności tego ciała względem trzech wzajemnie prostopadłych płaszczyzn tworzących w przecięciu ten biegun albo połowie sumy momentów bezwładności, wyznaczonych względem trzech wzajemnie prostopadłych osi o początku w tym biegunie.

Jednostką miary momentu bezwładności, jak wynika z definicji, jest iloczyn kwadratu jednostki długości i jednostki masy. W układzie SI jednostką miary momentu bezwładności jest $1 \text{ m}^2 \cdot 1 \text{ kg} = 1 \text{ kgm}^2$.

Oprócz momentów bezwładności, w opisie dynamicznym ciała używane są wielkości, które noszą nazwę momentów odśrodkowych lub momentów zboczenia. Jeśli współrzędne elementarnej masy dm oznaczymy przez x , y , z , jak zaznaczono na rysunku poniżej, to momentami odśrodkowymi ciała będą wielkości określone zależnościami:



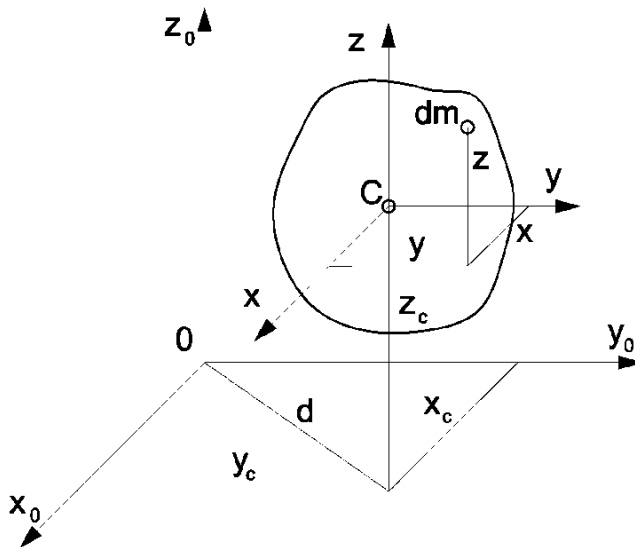
Rys. 3.29

$$\begin{aligned}
 J_{xy} = J_{yx} &= \int_m xy dm \\
 J_{yz} = J_{zy} &= \int_m yz dm \\
 J_{xz} = J_{zx} &= \int_m xz dm
 \end{aligned}
 \tag{3.50}$$

W przedstawionych zależnościach, pod znakami całek występują iloczyny współrzędnych położenia elementarnej masy dm . Wynika z tego, że w przeciwieństwie do momentów bezwładności, w których występują kwadraty tych współrzędnych, momenty odśrodkowe mogą mieć wartości zarówno dodatnie, ujemne, jak i zerowe. Zależy to od położenia ciała w stosunku do układu osi $Oxyz$.

3.6.2. Twierdzenie Steinera. Moment bezwładności względem osi obróconej

Poniżej przedstawiono ciało, z którym związano oś Cz przechodzącą przez jego środek masy. Poprowadźmy w dowolnym miejscu oś Oz_0 , równoległą do osi Cz . Zwiążmy z tymi osiami odpowiednie układy współrzędnych o osiach równoległych i wyznaczmy momenty bezwładności rozpatrywanego ciała względem osi z_0 i z .



Rys. 3.30

Zgodnie z przyjętymi oznaczeniami mamy:

$$J_z = \int_m (x^2 + y^2) dm, \quad J_{z_0} = \int_m (x_0^2 + y_0^2) dm \quad (a)$$

gdzie: $x_0 = x_c + x$ oraz $y_0 = y_c + y$, jak przedstawiono na rysunku.

Moment bezwładności ciała względem osi z_0 wynosi:

$$\begin{aligned} J_{z_0} &= \int_m (x_0^2 + y_0^2) dm = \int_m [(x_c + x)^2 + (y_c + y)^2] dm \\ J_{z_0} &= \int_m (x_c^2 + 2x_c x + x^2 + y_c^2 + 2y_c y + y^2) dm \end{aligned} \quad (b)$$

Uwzględniając, że x_c i y_c są współrzędnymi, które określają położenie stałych osi, a więc są również stałe, powyższe równanie możemy przedstawić w postaci:

$$J_{z_0} = \int_m (x^2 + y^2) dm + (x_c^2 + y_c^2) \int_m dm + 2x_c \int_m x dm + 2y_c \int_m y dm \quad (c)$$

Otrzymane wyrażenie jest sumą czterech całek. Pierwsza całka równa jest momentowi bezwładności J_z rozpatrywanego ciała względem osi przechodzącej przez środek jego masy. Druga całka równa jest masie całkowitej ciała, a ostatnie dwie przedstawiają momenty statyczne względem płaszczyzn przechodzących przez środek masy. Momenty te jak wiadomo są równe zero. Mamy więc:

$$(x_c^2 + y_c^2) = d^2 \quad \int_m dm = m \quad (d)$$

$$\int_m x dm = \int_m y dm = 0 \quad (e)$$

gdzie d jest odległością między osiami Oz_0 i Cz .

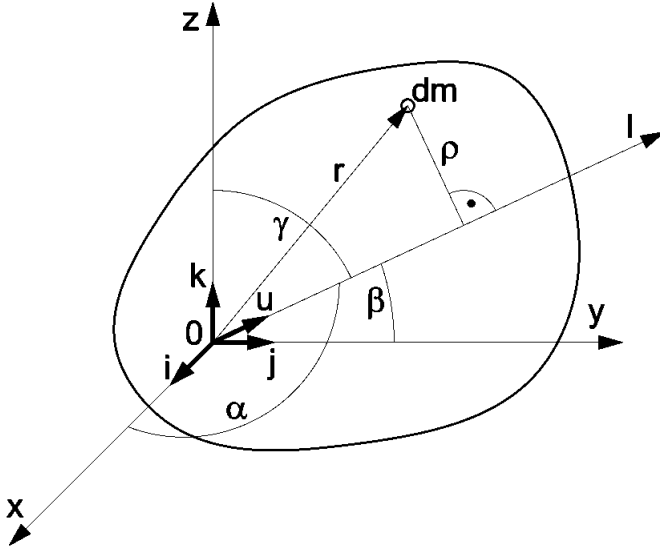
Uwzględniając zależności (d) i (e) w równaniu (c), ostatecznie otrzymano:

$$J_{z_0} = J_z + md^2 \quad (3.51)$$

Moment bezwładności ciała względem osi dowolnej równy jest sumie momentu bezwładności względem osi do niej równoległej i przechodzącej przez środek masy oraz iloczynu masy ciała i kwadratu odległości między tymi osiami.

Każdą oś przechodzącą przez środek masy ciała nazywać będziemy **osią centralną**.

Rozpatrzmy moment bezwładności ciała materialnego względem osi l , przechodzącej przez początek prostokątnego układu współrzędnych i tworzącej kąty α, β, γ odpowiednio z osiami x, y i z .



Rys. 3.31

Moment bezwładności względem osi l wynosi:

$$J_l = \int_m \rho^2 dm \quad (a)$$

Odległość ρ wyznaczmy z rachunku wektorowego dla wektorów \mathbf{r} i ρ oraz wektora \mathbf{u} . Wykorzystując własności iloczynu wektorowego, mamy:

$$\rho = \mathbf{r} \times \mathbf{u} \quad (b)$$

Składowe wektora \mathbf{u} , jako wektora jednostkowego leżącego na osi l , w układzie osi x, y, z , wynoszą:

$$\mathbf{u} = \mathbf{i} \cdot \cos\alpha + \mathbf{j} \cdot \cos\beta + \mathbf{k} \cdot \cos\gamma \quad (c)$$

Oznaczając położenie elementarnej masy dm współrzędnymi x, y, z , wartość iloczynu wektorowego (b) wynosi:

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix} \quad (\text{d})$$

Po rozwiązaniu powyższego wyznacznika wyznaczono składowe wektora ρ . Składowe te mają wartość:

$$\begin{aligned} \rho_x &= y \cdot \cos\gamma - z \cdot \cos\beta \\ \rho_y &= z \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\gamma \\ \rho_z &= x \cdot \cos\beta - y \cdot \cos\alpha \end{aligned} \quad (\text{e})$$

i następnie:

$$\rho^2 = (y \cdot \cos\gamma - z \cdot \cos\beta)^2 + (z \cdot \cos\alpha - x \cdot \cos\gamma)^2 + (x \cdot \cos\beta - y \cdot \cos\alpha)^2$$

Po wykonaniu działań algebraicznych i uporządkowaniu otrzymanego wyrażenia mamy:

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (z^2 + x^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + \\ &- 2 \cdot y \cdot z \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma - 2 \cdot z \cdot x \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha - 2 \cdot x \cdot y \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{aligned} \quad (\text{f})$$

Wstawiając (f) do wzoru na moment bezwładności (a) względem osi l, otrzymano:

$$\begin{aligned} J_l &= \cos^2 \alpha \int_m (y^2 + z^2) \cdot dm + \cos^2 \beta \int_m (z^2 + x^2) \cdot dm + \cos^2 \gamma \int_m (x^2 + y^2) \cdot dm + \\ &- 2 \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma \int_m y \cdot z \cdot dm - 2 \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha \int_m z \cdot x \cdot dm + \\ &- 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \int_m x \cdot y \cdot dm \end{aligned} \quad (\text{g})$$

Zastępując całki w powyższym równaniu odpowiednimi momentami bezwładności oraz momentami odśrodkowymi, otrzymano ostatecznie wzór na moment bezwładności ciała względem osi dowolnej przechodzącej przez początek układu osi współrzędnych, jeśli znane są momenty bezwładności i momenty odśrodkowe względem osi tego układu. Mamy:

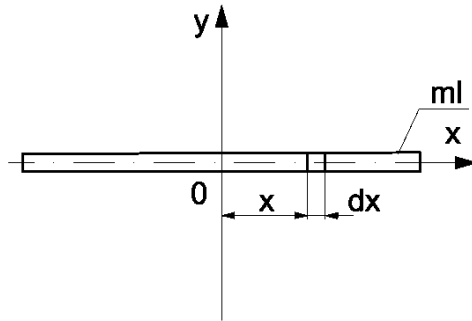
$$\begin{aligned} J_l &= J_x \cdot \cos^2 \alpha + J_y \cdot \cos^2 \beta + J_z \cdot \cos^2 \gamma - 2 \cdot J_{yz} \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \\ &- 2 \cdot J_{zx} \cdot \cos\gamma \cdot \cos\alpha - 2 \cdot J_{xy} \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \end{aligned} \quad (3.52)$$

W powyższym równaniu trzy ostatnie wyrazy zawierają momenty odśrodkowe. Jeśli osie Ox , Oy i Oz poprowadzimy tak, że momenty odśrodkowe będą równe zero, równanie (3.52) znacznie się uprości, a poprowadzone osie będą **głównymi osiami bezwładności**.

3.6.3. Momenty bezwładności wybranych ciał jednorodnych

Moment bezwładności pręta

Wyznamy moment bezwładności pręta względem osi symetrii, przy założeniu, że jego wymiar poprzeczny jest tak mały w porównaniu z długością, że można go pominąć.



Rys. 3.32

Wytnijmy myślowo element masy dm w odległości x od osi Oy i długości dx . Ponieważ pręt jest jednorodny, elementarna masa wynosi:

$$dm = \frac{m}{l} dx \quad (a)$$

Zapisując moment bezwładności pręta względem osi Oy , zgodnie z definicją mamy:

$$J_y = \int x^2 dm = \frac{m}{l} \int_{-l/2}^{+l/2} x^2 dx = \frac{m}{l} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{+l/2} \quad (b)$$

Po wstawieniu granic całkowania w równaniu (b), ostatecznie moment bezwładności pręta względem osi symetrii wynosi:

$$J_y = \frac{ml^2}{12} \quad (3.53)$$

Moment bezwładności prostopadłościanu

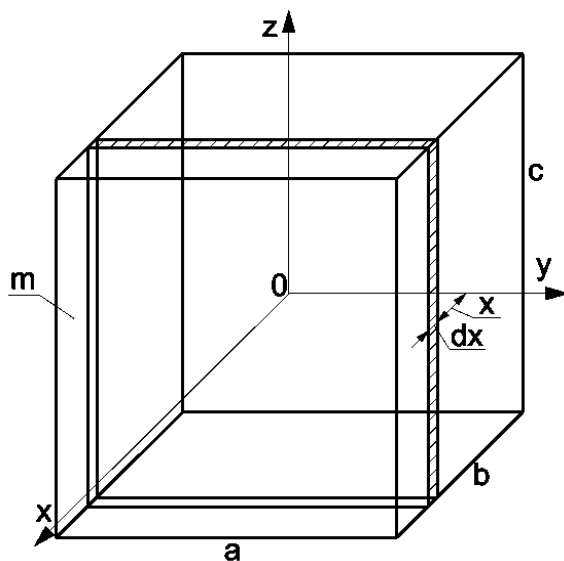
Wyznamy momenty bezwładności prostopadłościanu, względem osi prostokątnego układu współrzędnych, którego początek znajduje się w środku prostopadłościanu.

Wyznamy najpierw moment bezwładności J_z względem osi Oz .

Jak wiadomo z teorii momentów bezwładności, moment bezwładności względem osi z jest równy sumie momentów bezwładności względem płaszczyzn Oxz i Oyz tworzących w przecięciu oś z . Mamy więc:

$$J_z = J_{(xz)} + J_{(yz)} \quad (c)$$

Chcąc wyznaczyć moment bezwładności prostopadłościanu względem płaszczyzny Oyz , podzielimy myślowo ten prostopadłościan na elementarne masy dm , którymi będą płytki o grubości dx , znajdujące się w odległości x od płaszczyzny Oyz .



Rys. 3.33

Elementarna masa wynosi:

$$dm = \rho \cdot a \cdot c \cdot dx \quad (d)$$

gdzie ρ jest gęstością.

Moment bezwładności prostopadłościanu względem płaszczyzny Oyz wynosi:

$$J_{(yz)} = \int x^2 dm = \int_{-b/2}^{+b/2} \rho a c x^2 dx = \rho a c \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-b/2}^{+b/2} = \rho a c \frac{b^3}{12} \quad (e)$$

Podstawiając masę całkowitą prostopadłościanu $m = \rho a b c$, otrzymano ostatecznie:

$$J_{(yz)} = m \frac{b^2}{12} \quad (f)$$

Analogicznie, moment bezwładności prostopadłościanu względem płaszczyzny Oxz wynosi:

$$J_{(xz)} = m \frac{a^2}{12} \quad (g)$$

Wstawiając wyrażenia (f) i (g) do równania (c), otrzymano:

$$J_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \quad (3.54)$$

W podobny sposób można wyznaczyć momenty bezwładności prostopadłościanu względem osi Ox i Oy . Mamy więc:

$$J_x = \frac{m}{12} (a^2 + c^2) \quad J_y = \frac{m}{12} (b^2 + c^2) \quad (3.55)$$

Moment bezwładności walca

Wyznaczanie momentów bezwładności walca względem układu osi prostokątnych, o początku w środku masy walca, zacniemy od wyznaczenia momentu bezwładności względem osi Oz .

Wytnijmy myślowo elementarną masę dm , jako rurkę o promieniu r i grubości dr , jak pokazano na rysunku. Ta elementarna masa, o nieskończenie małej grubości wynosi:

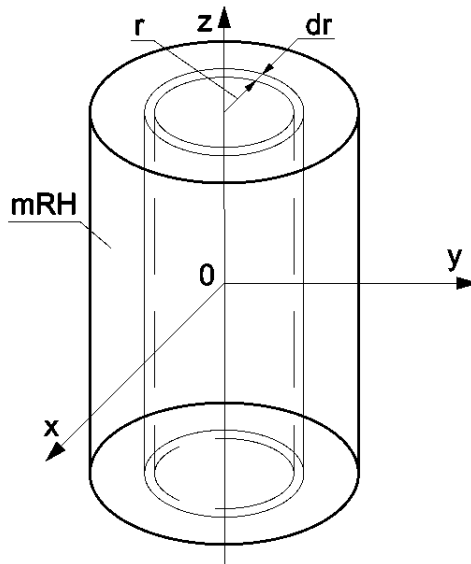
$$dm = \rho \cdot 2\pi r \cdot H \cdot dr \quad (h)$$

Moment bezwładności walca względem osi obrotu Oz wynosi:

$$J_z = \int r^2 dm = 2\pi\rho H \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho H \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi\rho H R^4}{2} \quad (i)$$

Biorąc pod uwagę, że całkowita masa walca wynosi:

$$m = \pi R^2 H \rho \quad (k)$$



Rys. 3.34

ostatecznie otrzymano:

$$J_z = \frac{mR^2}{2} \quad (3.56)$$

Z uwagi na symetrię osiową walca, wszystkie momenty bezwładności wyznaczone względem osi prostopadłych do osi Oz są sobie równe. Zatem moment bezwładności względem osi Ox jest równy momentowi bezwładności względem osi Oy.

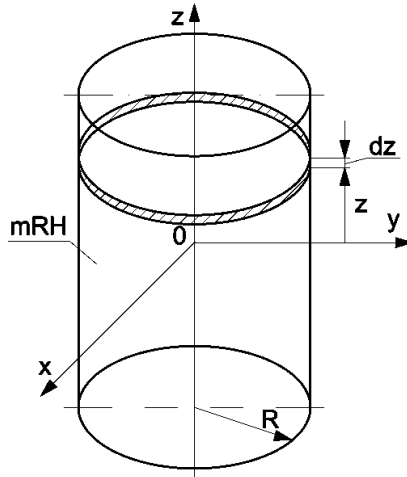
Moment bezwładności walca względem osi Ox wyznaczono jako sumę momentów bezwładności względem dwu płaszczyzn Oxz i Oxy, tworzących w przecięciu tę oś. Mamy więc:

$$J_x = J_{(xz)} + J_{(xy)} \quad (l)$$

Ponieważ $J_{(xz)} = J_{(yz)}$, moment bezwładności względem osi Oz, przedstawiony jako suma momentów względem dwu prostopadłych płaszczyzn $J_z = J_{(xz)} + J_{(yz)}$, można zapisać jako $J_z = 2 \cdot J_{(xz)}$. Zatem moment bezwładności względem płaszczyzny Oxz wynosi:

$$J_{(xz)} = \frac{1}{2} J_z = \frac{mR^2}{4} \quad (m)$$

Dla obliczenia momentu bezwładności walca względem płaszczyzny Oxy przyjęto elementarną masę dm w postaci kolistej płytki o grubości dz znajdującej się w odległości z od płaszczyzny Oxy.



Rys. 3.35

Elementarna masa $dm = \rho \cdot \pi R^2 dz$, a moment bezwładności względem płaszczyzny Oxy ma wartość:

$$J_{(xy)} = \int z^2 dm = \int_{-H/2}^{+H/2} z^2 \rho \pi R^2 dz = \rho \pi R^2 \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-H/2}^{+H/2} = \frac{1}{12} \rho \pi R^2 H^3 \quad (n)$$

po wstawieniu całkowitej masy walca (h) otrzymano:

$$J_{(xy)} = \frac{mH^2}{12} \quad (o)$$

Wstawiając wyrażenia (m) i (o) do równania (l), otrzymano ostatecznie:

$$J_x = J_y = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right) \quad (3.57)$$

Moment bezwładności kuli

Momenty bezwładności kuli wyznaczono względem prostokątnego układu współrzędnych, o początku w środku masy kuli. Dla tak przyjętego układu osi mamy:

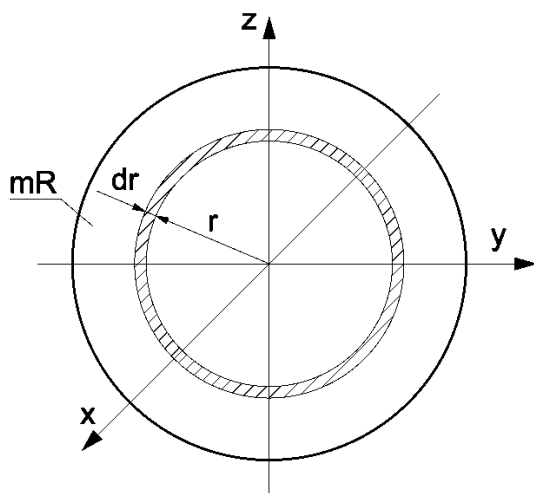
$$J_x = J_y = J_z \quad (p)$$

Na podstawie wyrażenia (3.49), wyznaczającego zależność między biegunowym momentem bezwładności a momentami bezwładności względem osi tego układu mamy:

$$J_0 = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z) \quad (r)$$

Uwzględniając (p), znajdujemy:

$$J_x = \frac{2}{3}J_0 \quad (s)$$



Rys. 3.36

Tak więc, aby wyznaczyć moment bezwładności kuli względem osi Ox , należy wyznaczyć biegunowy moment bezwładności względem środka kuli.

Podzielmy kulę na elementarne masy dm , jako powłoki kuliste o promieniu r i grubości dr . Elementarna masa $dm = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$, a biegunowy moment bezwładności wynosi:

$$J_0 = \int r^2 dm = 4\pi\rho \int_0^R r^4 dr = 4\pi\rho \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R = 4\pi\rho \frac{R^5}{5} \quad (t)$$

Biorąc pod uwagę, że całkowita masa kuli $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, znajdujemy:

$$J_0 = \frac{3}{5} mR^2 \quad (u)$$

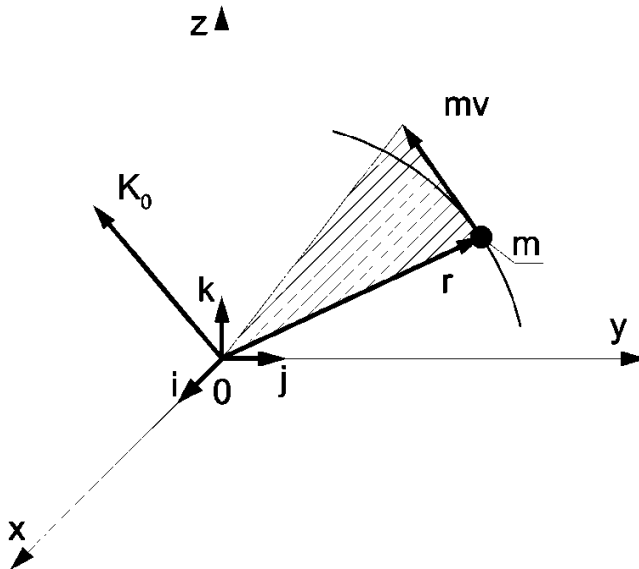
Wstawiając zależność (u) do wyrażenia (s), otrzymano ostatecznie:

$$J_x = \frac{2}{5} mR^2 \quad (3.58)$$

3.7. KRĘT PUNKTU I UKŁADU PUNKTÓW MATERIALNYCH

3.7.1. Kręt punktu materialnego

Niech punkt materialny, którego masa wynosi m , porusza się w przestrzeni z prędkością v . Ruch tego punktu odniesiono do prostokątnego układu osi współrzędnych, zaznaczając w tym układzie wektor jego pędu mv , jak przedstawiono na rysunku poniżej. **Moment pędu** tego punktu, lub krótko **kręt**, względem stałego bieguna O , można zdefiniować podobnie jak moment siły względem punktu w przestrzeni.



Rys. 3.37

Uwzględniając definicję momentu siły względem stałego punktu O , możemy zapisać kręt K_0 jako iloczyn wektorowy promienia-wektora r i pędu mv . Mamy więc:

$$K_0 = r \times mv \quad (3.59)$$

Jeśli początek prostokątnego układu osi współrzędnych $Oxyz$ znajduje się w obranym biegunie O , to składowe krętu \mathbf{K}_0 w przyjętym układzie osi współrzędnych można wyznaczyć z wyznacznika:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \quad (\text{a})$$

Po rozwiązaniu powyższego wyznacznika względem wersorów \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , osi układu współrzędnych, uzyskamy wyrażenia określające składowe wektora krętu \mathbf{K}_0 :

$$\begin{aligned} K_{0x} &= m(v_z y - v_y z) \\ K_{0y} &= m(v_x z - v_z x) \\ K_{0z} &= m(v_y x - v_x y) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Wyznamy jeszcze pochodną geometryczną względem czasu, krętu \mathbf{K}_0 obliczonego względem stałego bieguna O . Różniczkując (3.59), otrzymano:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad (\text{b})$$

Promień-wektor \mathbf{r} opisujący położenie rozważanego punktu poprowadzono z początku układu osi współrzędnych O , mamy więc:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0 \quad (\text{c})$$

Na podstawie udowodnionego twierdzenia o pochodnej wektora pędu mamy:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{P} \quad (\text{d})$$

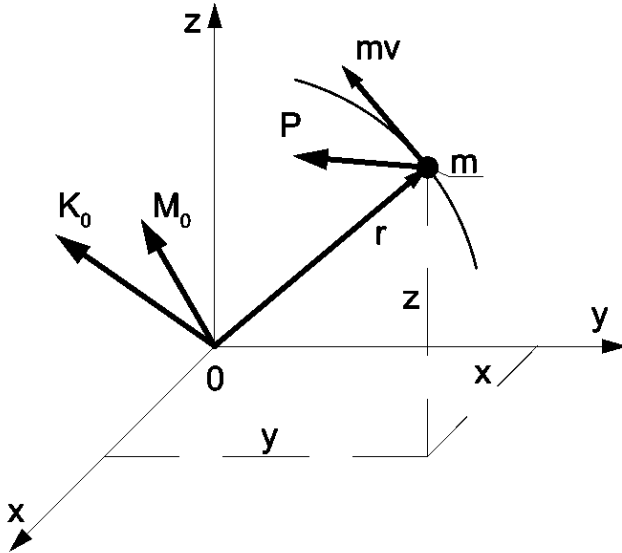
Podstawiając (c) i (d) do równania (b), otrzymano równanie:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{P} \quad (\text{e})$$

i ostatecznie:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \mathbf{M}_0 \quad (3.61)$$

Pochodna względem czasu krętu K_0 punktu materialnego wyznaczonego względem dowolnego stałego bieguna O równa jest momentowi wypadkowej sił działających na dany punkt materialny względem tego samego bieguna.



Rys. 3.38

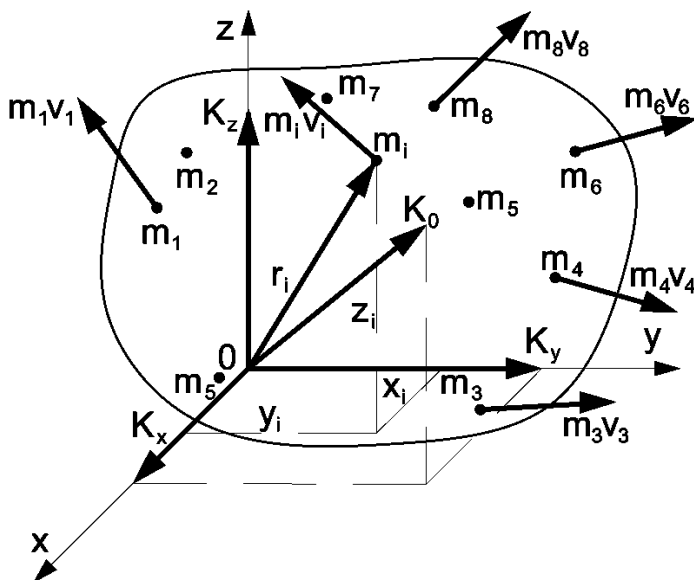
W przyjętym układzie osi współrzędnych z biegunem O jako jego początkiem, z równania wektorowego (3.61) wynikają następujące równania skalarne:

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x \quad \frac{dK_y}{dt} = M_y \quad \frac{dK_z}{dt} = M_z \quad (3.62)$$

Pochodna względem czasu krętu punktu materialnego wyznaczonego względem dowolnej stałej osi równa jest momentowi wypadkowej sił działających na dany punkt materialny względem tej samej osi.

3.7.2. Kręt układu punktów materialnych

Niech układ punktów materialnych o masach m_1, m_2, \dots, m_n porusza się w prostokątnym układzie osi współrzędnych pod działaniem sił zewnętrznych i wewnętrznych. Udowodnione twierdzenie o pochodnej krętu punktu materialnego względem czasu, zapisane równaniem (e), można teraz zastosować do wszystkich punktów rozważanego układu.



Rys. 3.39

Podstawiając wypadkową sił działających na punkt rozpatrywanego układu jako sumę geometryczną wypadkowej \mathbf{P}_i sił zewnętrznych i wypadkowej \mathbf{P}'_i sił wewnętrznych, mamy:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}'_i) \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.63)$$

Równań tej postaci można napisać tyle, ile jest punktów w rozpatrywanym układzie. Sumując je stronami, otrzymano równanie wektorowe:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}'_i) \quad (f)$$

czyli:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}'_i \quad (3.64)$$

Zgodnie z równaniem (3.28), suma momentów sił oddziaływania wewnętrznego punktów należących do rozpatrywanego układu materialnego, względem dowolnie obranego bieguna, równa jest zero. Mamy więc:

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i \right) = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i \quad (3.65)$$

Suma stojąca po lewej stronie powyższego równania jest **krętem układu punktów materialnych** względem stałego bieguna O:

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (3.66)$$

Natomiast prawa strona powyższego równania jest sumą geometryczną momentów sił zewnętrznych \mathbf{P}_i względem nieruchomego bieguna O. Ostatecznie otrzymano:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} \quad (3.67)$$

Pochodna względem czasu krętu \mathbf{K}_0 układu punktów materialnych względem dowolnego stałego bieguna O równa jest sumie geometrycznej momentów wszystkich sił zewnętrznych względem tego samego bieguna.

Tak jak dla punktu materialnego, również dla układu punktów materialnych z równania wektorowego (3.67), wynikają równania skalarne dotyczące składowych krętu \mathbf{K}_0 . Mamy więc:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{ix} \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iy} \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz} \quad (3.68)$$

Pochodna względem czasu krętu układu punktów materialnych względem dowolnej stałej osi równa jest sumie momentów wszystkich sił zewnętrznych działających na rozważany układ materialny względem tej samej osi.

Jeśli na układ punktów materialnych nie działają siły zewnętrzne albo suma momentów działających sił względem nieruchomego bieguna O jest równa zero, mamy wówczas:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = 0 \quad (3.69)$$

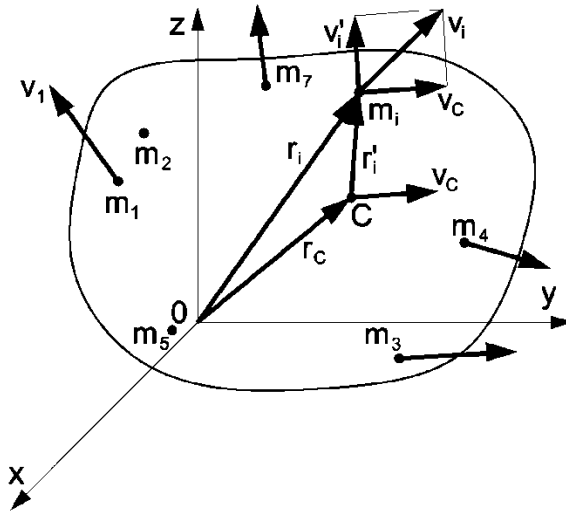
czyli: $\mathbf{K}_0 = \text{const}$

Otrzymany wynik jest **zasadą zachowania krętu**.

Jeśli moment wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do układu materialnego względem pewnego stałego bieguna O jest równy zeru, wtedy kręt \mathbf{K}_0 rozpatrywanego układu względem tego bieguna jest stały.

3.7.3. Kręt układu punktów materialnych względem dowolnego punktu

Rozpatrzmy ruch układu materialnego o masie $m = \sum m_i$ poruszającego się ruchem dowolnym względem stałego układu osi, jak pokazano na rys. 3.40.



Rys. 3.40

Położenie elementarnej masy m_i opisano promieniem wektorem \mathbf{r}_i , o wartości:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i \quad (g)$$

Po uwzględnieniu (g), kręt tego układu względem stałego punktu O, jako początku układu osi współrzędnych, zgodnie z zależnością (3.66) wynosi:

$$\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^n [(\mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i) \times m_i \mathbf{v}_i] = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_c \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (h)$$

Drugi składnik zależności (h) jest wektorem krętu rozpatrywanego układu względem środka masy. Mamy więc:

$$\mathbf{K}_C = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}'_i \times m_i \mathbf{v}_i) \quad (i)$$

Jeśli w pierwszym wyrazie równania (h) wyłączymy wektor \mathbf{r}_c przed znak sumy jako wektor jednakowy dla wszystkich punktów układu i wykorzystamy podstawienie (i), otrzymamy następujące równanie:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{r}_c \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i + \mathbf{K}_C \quad (j)$$

Zgodnie z równaniem (3.31), suma w powyższym równaniu jest pędem Q rozpatrywanego układu. Ostatecznie kręt układu materialnego względem dowolnego stałego punktu O ma wartość:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_C + \mathbf{r}_c \times \mathbf{Q} \quad (3.70)$$

Kręt układu punktów materialnych względem stałego bieguna O równy jest sumie krętu tego układu, wyznaczonego względem jego środka masy, oraz momentu pędu środka masy tego układu, wyznaczonego względem stałego bieguna O .

Zgodnie z (3.65) mamy:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i) \quad (k)$$

Wstawiając zależność (g) i wykonując różniczkowanie lewej strony powyższego równania, otrzymano:

$$\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} \times \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_c \times \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) + \frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_c \times \mathbf{P}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{P}_i \quad (l)$$

Zauważmy, że $\frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v}_c$, oraz $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = m \cdot \mathbf{v}_c$, a więc $\mathbf{v}_c \times m \cdot \mathbf{v}_c = 0$. Ponadto

na podstawie twierdzenia o pochodnej pędu mamy $\frac{d}{dt} (m_i \cdot \mathbf{v}_i) = \mathbf{P}_i$.

Podstawiając w równaniu (l), $\sum_{i=1}^n \mathbf{r}'_i \times \mathbf{P}_i = \mathbf{M}_C$, ostatecznie otrzymano:

$$\frac{d\mathbf{K}_C}{dt} = \mathbf{M}_C \quad (3.71)$$

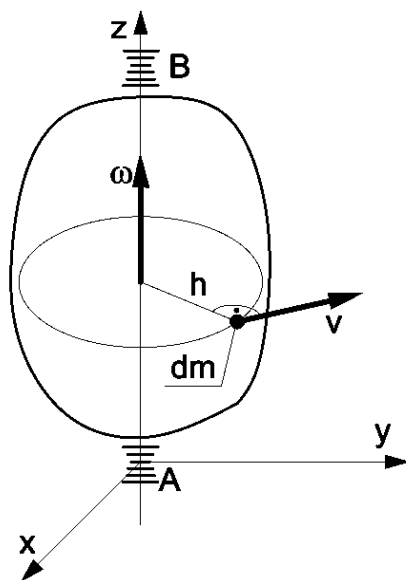
Pochodna względem czasu krętu układu punktów materialnych wyznaczonego względem środka masy równa jest sumie momentów wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do tego układu względem tegoż środka masy.

3.7.4. Kręt ciała w ruchu obrotowym

Wyznamy kręt ciała, które porusza się ruchem obrotowym wokół stałej osi Oz , z prędkością kątową równą ω . Rozważmy element ciała o masie dm w odległości h od osi obrotu.

Prędkość tego elementu ma wartość $v = \omega h$. Jeśli prędkość kątowna ω ciała jest zgodna z kierunkiem trygonometrycznym, czyli ma kierunek osi Oz , kręt elementu masy dm względem tej osi wynosi:

$$dK_z = hv dm = \omega h^2 dm \quad (3.72)$$



Rys. 3.41

Całkując elementarny kręt po całej masie m , wyznaczamy kręt całego ciała względem osi obrotu:

$$K_z = \int_m \omega h^2 dm = \omega \int_m h^2 dm \quad (a)$$

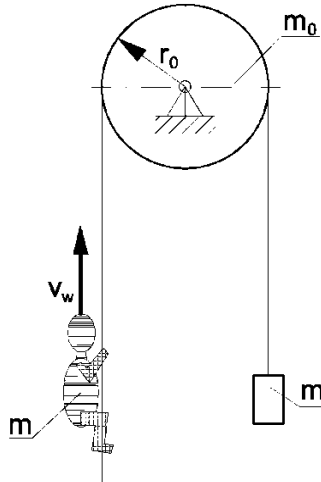
W otrzymanej zależności (a) całka stojąca po prawej stronie wyraża moment bezwładności rozpatrywanego ciała J_z względem osi Oz . Ostatecznie można zapisać:

$$K_z = J_z \omega \quad (3.73)$$

Kręt ciała sztywnego w ruchu obrotowym dookoła stałej osi obrotu równy jest iloczynowi jego momentu bezwładności względem tej osi i prędkości kątowej.

Przykład 3.8

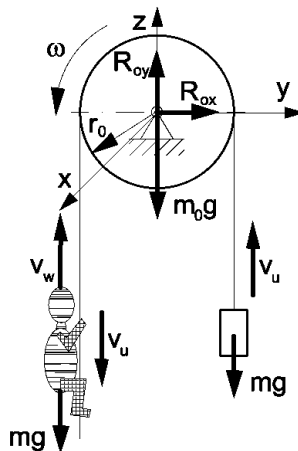
Przez krążek o masie m_0 i promieniu r_0 przerzucono lekką linę, której jeden koniec obciążono ciężarem o masie m . Na drugim końcu liny znajduje się człowiek, którego masa wynosi również m . Wyznaczyć prędkość bezwzględną człowieka, który zacznie wspinać się po linie z prędkością $V_w = \text{const}$ względem liny. Opory ruchu obrotowego krążka pominąć.



Rys. 3.42

Rozwiązanie

Rozpatrywany układ uwalniamy od więzów.



Rys. 3.43

Moment sił zewnętrznych w uwolnionym od więzów układzie względem poziomej osi x jest równy zero. Tak więc, zgodnie z zasadą zachowania krętu, kręt względem tej osi ma wartość stałą. Jeśli człowiek w chwili początkowej pozostawał w spoczynku, kręt całego układu będzie równy zero. Jeśli natomiast człowiek zacznie wspinać się po linie, masy rozpatrywanego układu zostaną wprawione w ruch, aby w dowolnej chwili kręt całego układu był równy zero. Kręt (moment pędu) rozpatrywanego układu w dowolnej chwili względem osi x wynosi:

$$K_x = m \cdot V_u \cdot r_o - m \cdot V_w \cdot r_o + J_o \cdot \omega + m \cdot V_u \cdot r_o$$

Ponieważ między krążkiem a liną nie ma poślizgu, mamy: $\omega = \frac{V_u}{r_o}$.

Po wstawieniu wartości momentu bezwładności krążka $J_o = \frac{m_o r_o^2}{2}$ otrzymano równanie:

$$2 \cdot m \cdot V_u \cdot r_o - m \cdot V_w \cdot r_o + \frac{m_o r_o^2}{2} \frac{V_u}{r_o} = 0$$

z którego prędkość unoszenia wynosi:

$$V_u = V_w \frac{m}{2 \cdot m + \frac{m_o}{2}}$$

Prędkość bezwzględna wspinającego się człowieka wynosi:

$$V = V_w - V_u = V_w \frac{2 \cdot m + m_o}{4 \cdot m + m_o}$$

Jeśli krążek będzie lekki ($m_o = 0$), prędkość bezwzględna człowieka wyniesie połowę prędkości względnej $V = \frac{V_w}{2}$, jeśli natomiast masa krążka będzie bardzo duża, człowiek będzie się wspinał z prędkością bezwzględną zbliżoną do prędkości względnej.

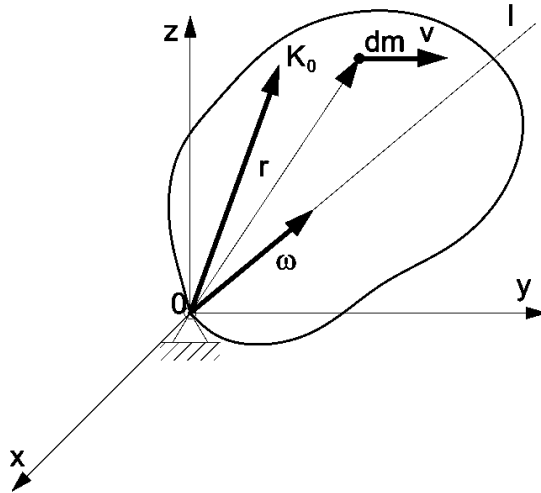
3.7.5. Kręt ciała sztywnego w ruchu kulistym

Kręt ciała sztywnego względem stałego bieguna O , który jest środkiem ruchu kulistego i początkiem układu osi współrzędnych (rys. 3.44) ma wartość:

$$\mathbf{K}_0 = \int_m (\mathbf{r} \times \mathbf{v} \cdot dm) \quad (m)$$

Prędkość dowolnego punktu ciała poruszającego się ruchem kulistym wynosi $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Podstawiając tak wyrażoną prędkość do zależności (m), otrzymamy pod całką podwójny iloczyn wektorowy, który po przekształceniu ma wartość:

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}^2 - \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) \quad (\text{n})$$



Rys. 3.44

Wstawiając (n) do (m), otrzymano wartość krętu ciała sztywnego w postaci wektorowej o postaci:

$$\mathbf{K}_0 = \boldsymbol{\omega} \int_m \mathbf{r}^2 dm - \int_m \mathbf{r} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}) dm \quad (\text{o})$$

Rzutuując to równanie na oś x układu współrzędnych, otrzymano:

$$K_x = \omega_x \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm - \int_m x (\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) dm \quad (\text{p})$$

Po uporządkowaniu powyższego równania i uwzględnieniu zależności wyrażających momenty bezwładności i momenty dewiacyjne otrzymano składowe wektora krętu w przyjętym układzie osi współrzędnych. Składowa na oś x wynosi:

$$K_x = J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z$$

Następne składowe wynoszą identycznie:

$$K_y = J_y \omega_y - J_{yx} \omega_x - J_{yz} \omega_z \quad (3.74)$$

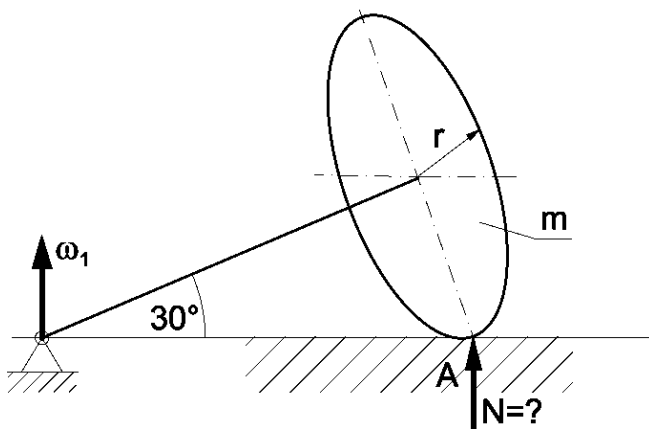
$$K_z = J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y$$

Jeśli osie układu współrzędnych będą dla rozpatrywanego ciała osiami głównymi, momenty dewiacyjne będą równe zero, a składowe krętu uproszczą się do postaci:

$$K_x = J_x \omega_x \quad K_y = J_y \omega_y \quad K_z = J_z \omega_z \quad (r)$$

Przykład 3.9

Tarczę o masie m i promieniu r osadzono na lekkiej osi, którą zamocowano przegubowo w punkcie O , jak pokazano na rysunku. Wyznaczyć nacisk tarczy na podłoże, jeśli oś tarczy tworzy z poziomem kąt $\alpha = 30^\circ$ i obraca się wokół osi pionowej z prędkością kątową $\omega_1 = \text{const}$ (prędkość precesji). Toczenie krążka po podłożu bez poślizgu.



Rys. 3.45

Rozwiązanie

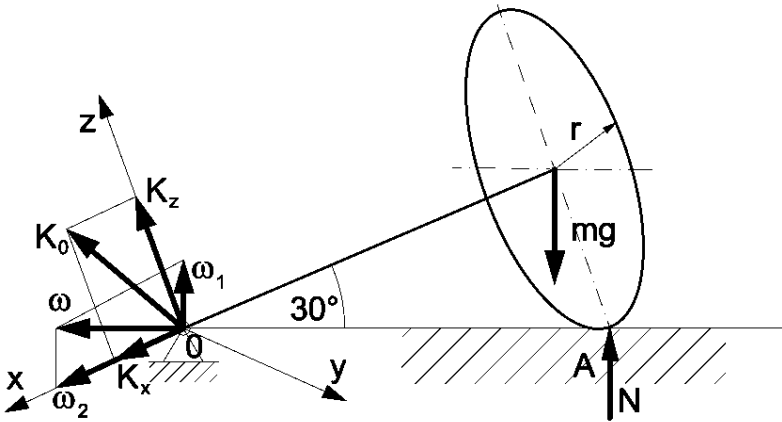
Tarcza porusza się ruchem kulistym. Do wyznaczenia nacisku tarczy na podłoże wykorzystano twierdzenie o pochodnej względem czasu wektora krętu ciała sztywnego.

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0}$$

Tarcza po podłożu toczy się bez poślizgu, tak więc prędkość punktu styku tarczy z podłożem jest równa zero i prosta OA jest chwilową osią obrotu. Znając wartość prędkości kątowej precesji układu, wyznaczono prędkość kątową obrotu własnego oraz chwilową prędkość kątową ruchu kulistego.

Chwilowa prędkość kątową ruchu kulistego układu wynosi:

$$\omega = \omega_1 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \omega_1$$



Rys. 3.46

a prędkość kątowa obrotu własnego wynosi:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot \omega_1$$

Do wyznaczenia wektora krętu rozpatrywanego układu przyjęto układ osi współrzędnych, które są głównymi osiami bezwładności. Składowe wektora krętu w tym układzie osi mają wartość:

$$K_x = J_x \cdot \omega_x = \frac{m \cdot r^2}{2} \cdot \omega \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{4} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1$$

$$K_y = J_y \cdot \omega_y = 0$$

$$K_z = J_z \cdot \omega_z = \left[\frac{m \cdot r^2}{2} + m \cdot (\sqrt{3} \cdot r)^2 \right] \cdot \omega \cdot \sin 30^\circ = \frac{13\sqrt{3}}{8} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1$$

Całkowity wektor krętu leży w płaszczyźnie xz i ma dwie składowe K_x i K_z (patrz rysunek). Pochodna tego wektora względem czasu w interpretacji kinematycznej jest prędkością, z jaką porusza się jego koniec (punkt D). Mamy zatem:

$$\frac{d\mathbf{K}_o}{dt} = \mathbf{V}_D = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0}$$

Ponieważ ruch kulisty tarczy odbywa się ze stałą prędkością kątową $\omega = \text{const}$, wartość krętu jest również stała $K_o = \text{const}$. Przyrost tego wektora powstaje jedynie na skutek jego obrotu dookoła osi precesji z prędkością kątową ω_1 . Mamy więc:

$$\mathbf{V}_D = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{K}_o$$

Wykorzystując wyznaczone składowe wektora krętu, mamy:

$$V_D = \omega_1 \cdot (\mathbf{K}_x \cdot \cos 30^\circ + \mathbf{K}_z \cdot \sin 30^\circ) = \frac{19\sqrt{3}}{16} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2$$

Moment sił zewnętrznych względem środka ruchu kulistego O wynosi:

$$\sum_{i=1}^n M_{i_o} = N \cdot 2 \cdot r - m \cdot g \cdot \sqrt{3} \cdot r$$

Podstawiając otrzymane wartości pochodnej krętu względem czasu oraz momentu sił zewnętrznych działających na układ do zależności wynikającej z twierdzenia o pochodnej wektora krętu ciała sztywnego względem czasu, mamy:

$$\frac{19\sqrt{3}}{16} \cdot m \cdot r^2 \cdot \omega_1^2 = 2 \cdot N \cdot r - \sqrt{3} \cdot m \cdot g \cdot r$$

i ostatecznie:

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot m \cdot \left(g + \frac{19}{16} \cdot \omega_1^2 \cdot r \right)$$

Wartość nacisku tarczy na podłoże w czasie jej ruchu jest większa od nacisku wynikającego z jej ciężaru o wielkość, która jest reakcją dynamiczną.

3.8. DYNAMIKA RUCHU OBROTOWEGO I PŁASKIEGO CIAŁA SZTYWNEGO

3.8.1. Dynamika ruchu obrotowego

Niech będzie ciało sztywne, obciążone siłami $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, mogące obracać się dookoła stałej osi. Równanie ruchu tego ciała, który powodują działające siły, wyznaczymy z twierdzenia o pochodnej krętu względem nieruchomej osi.

Na podstawie trzeciego równania (3.68) mamy:

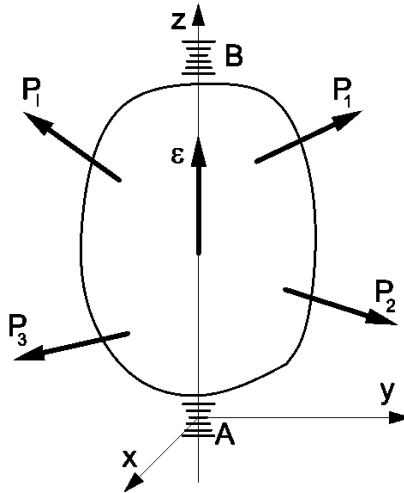
$$\frac{dK_z}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{i_z} \quad (\text{a})$$

Ponieważ kręt ciała sztywnego w ruchu obrotowym wynosi $K_z = J_z \omega$, po podstawieniu do równania (a) otrzymano:

$$\frac{d(J_z \omega)}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$

dla stałego momentu bezwładności ciała J_z mamy:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz} \quad (b)$$



Rys. 3.47

Ponadto dla ruchu obrotowego względem stałej osi mamy $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, równaniu (b) można nadać ostatecznie postać:

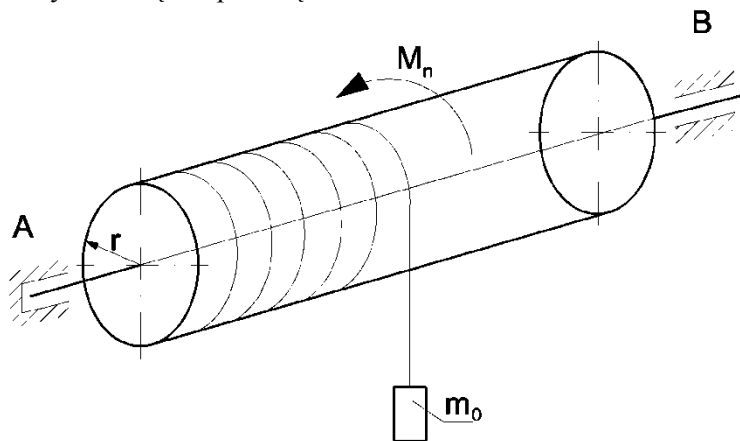
$$J_z \varepsilon = \sum_{i=1}^n M_{iz} \quad (3.75)$$

Jest to dynamiczne równanie ruchu obrotowego ciała sztywnego.

Iloczyn momentu bezwładności ciała i przyspieszenia kąтового względem osi obrotu równy jest sumie momentów wszystkich sił zewnętrznych działających na to ciało względem tej samej osi.

Przykład 3.10

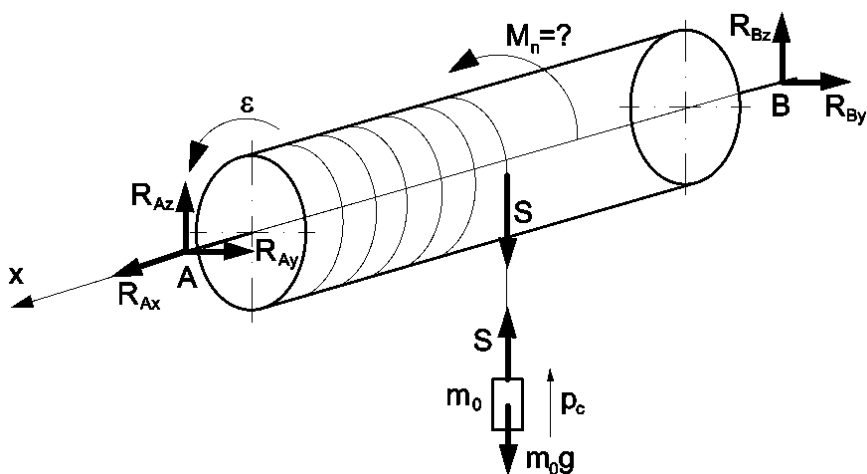
Na bęben o masie m i promieniu r , który może obracać się wokół poziomej osi, nawinięto lekką nierozciągliwą linę i obciążono ją ciężarem o masie m_0 . Wyznaczyć wartość momentu napędowego M_n jaki należy przyłożyć do bębna, aby podwieszony na linie ciężar poruszał się w górę z przyspieszeniem p_c . Tarcie w łożyskach bębna pominać.



Rys. 3.48

Rozwiązanie

Rozpatrywany układ uwalniamy od więzów.



Rys. 3.49

Bęben porusza się ruchem obrotowym, natomiast podwieszony na linie ciężar porusza się jak punkt materialny ruchem prostoliniowym.

Ruch bębna opisano równaniem dynamicznym ruchu obrotowego. Równanie to ma postać:

$$J_x \cdot \varepsilon = M_n - S \cdot r$$

Jak wynika z powyższego równania reakcje w łożyskach nie dają momentu względem osi obrotu i przy pominięciu oporów tarcia w łożyskach nie wpływają na wartość przyspieszenia kąтового bębna.

Równanie ruchu masy m_o wynosi:

$$m_o \cdot p_c = S - m_o \cdot g$$

Uzupełniając otrzymane dynamiczne równania ruchu zależnością kinematyczną ruchu obrotowego bębna i prostoliniowego masy m_o ; $\varepsilon = \frac{p_c}{r}$, otrzymano wartość momentu napędowego M_n :

$$M_n = \left(\frac{1}{2} \cdot m + m_o \right) \cdot r \cdot p_c + m_o \cdot g \cdot r$$

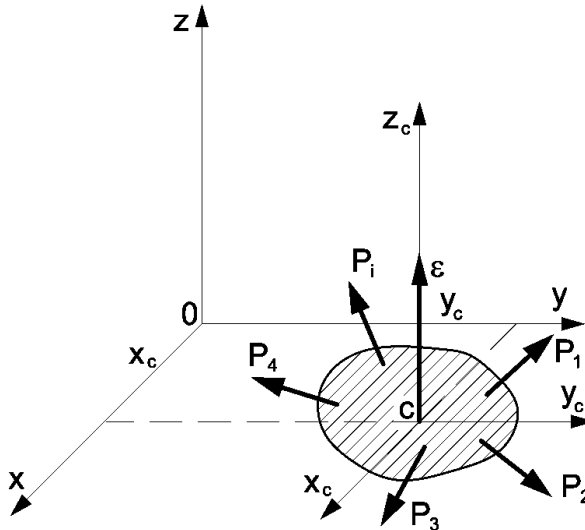
3.8.2. Dynamika ruchu płaskiego

Z kinematyki ruchu płaskiego ciała sztywnego wiadomo, że ruch płaski można potraktować jako ruch złożony z ruchu postępowego z prędkością wybranego bieguna oraz ruchu obrotowego względem tego bieguna. W dynamice ruchu płaskiego ciała sztywnego biegunem będzie środek masy.

Do wyprowadzenia dynamicznych równań ruchu płaskiego ciała sztywnego, na które działają siły zewnętrzne $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$, skorzystano z prawa o ruchu środka masy oraz twierdzenia o pochodnej krętu względem stałej osi przechodzącej przez środek masy. Otrzymano w ten sposób dwa następujące równania wektorowe:

$$m\mathbf{p}_c = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \qquad \frac{dK_{z_c}}{dt} = \sum_{i=1}^n M_{iz_c} \qquad (3.76)$$

Ponieważ kręt ciała w ruchu obrotowym zgodnie z równaniem (3.73) wynosi $K_{z_c} = J_{z_c} \omega$ oraz $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon = \dot{\varphi}$, z równań (3.76) wynikają następujące równania dynamiczne:



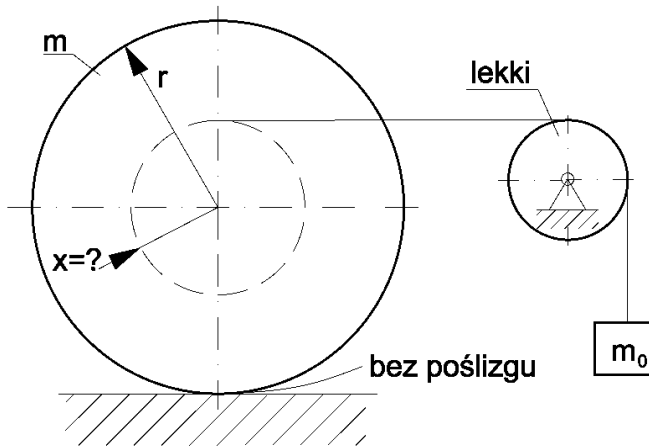
Rys. 3.50

$$m \cdot p_{cx} = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad m \cdot p_{cy} = \sum_{i=1}^n P_{iy} \quad J_{z_c} \varepsilon = \sum_{i=1}^n M_{iz_c} \quad (3.77)$$

Są to dwa równania dynamiczne dotyczące ruchu środka masy względem prostokątnego układu osi współrzędnych i jedno ruchu obrotowego względem osi przechodzącej przez środek masy.

Przykład 3.11

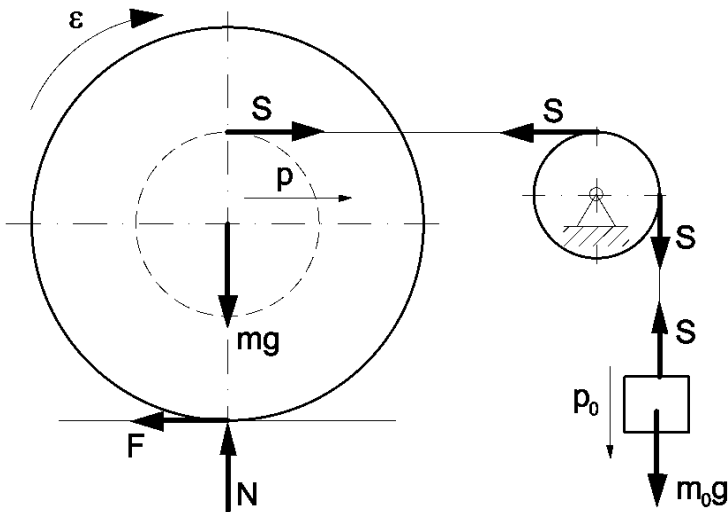
Na poziomej powierzchni ustawiono krążek o masie m i promieniu r , w którym nacięto rowek na lekką i nierozciągliwą nić, jak pokazano na rysunku. Nawiniętą na krążek nić przerzucono przez lekki krążek i obciążono ciężarem o masie m_0 . Wyznaczyć promień x , na jakim należy nawinąć nić, aby krążek toczył się bez poślizgu, oraz przyspieszenie masy m_0 .



Rys. 3.51

Rozwiązanie

Uwalniamy rozpatrywany układ od więzów. Krążek porusza się ruchem płaskim, natomiast masa m_0 porusza się jak punkt materialny ruchem prostoliniowym.



Rys. 3.52

W miejscu styku krążka z podłożem przyłożono reakcję normalną N oraz siłę tarcia F . Siłę tarcia oznaczono literą F , ponieważ siła ta przy toczeniu bez poślizgu nie musi być całkowicie rozwinięta i zawarta jest w przedziale $0 \leq F \leq \mu \cdot N$.

Oznacza to, że jeśli zakładam toczenie bez poślizgu, zakładam również, że współczynnik tarcia μ jest tak duży lub siła tarcia w czasie toczenia krążka bez poślizgu tak mała, że przyłożona siła tarcia F znajdzie się w podanym wyżej przedziale.

Dla ruchu płaskiego krążka toczącego się bez poślizgu, dynamiczne równania ruchu mają postać:

$$\begin{aligned}m \cdot p &= S - F \\0 &= N - m \cdot g \\J \cdot \varepsilon &= S \cdot x + F \cdot r\end{aligned}$$

Dla masy m_0 dynamiczne równanie ruchu jest równaniem ruchu prostoliniowego punktu i wynosi:

$$m_0 \cdot p_0 = m_0 \cdot g - S$$

Ponieważ krążek po podłożu toczy się bez poślizgu, w miejscu styku krążka z podłożem jest chwilowy środek obrotu. Tak więc można napisać zależność kinematyczną między przyspieszeniami. Mamy zatem:

$$\varepsilon = \frac{p}{r} = \frac{p_0}{r+x}$$

Rozwiązując otrzymane równania względem przyspieszenia masy m_0 , otrzymano:

$$p_0 = g \cdot \frac{2 \cdot m_0 (x+r)^2}{3 \cdot m \cdot r^2 + 2 \cdot m_0 (x+r)^2}$$

Jak wynika z otrzymanego rozwiązania, przyspieszenie masy m_0 zależy również od promienia x nawinięcia nici na krążek. Promień ten wyznaczono z warunku, w którym siła tarcia F występująca w czasie toczenia krążka bez poślizgu będzie równa zero. Oznacza to, że przy każdym współczynniku tarcia, nawet najmniejszym, toczenie bez poślizgu będzie możliwe.

Z dynamicznych równań ruchu wyznaczono siłę tarcia F , w funkcji wymuszającej ruch krążka siły S . Mamy:

$$F = S \cdot \frac{r - 2 \cdot x}{3 \cdot r}$$

Aby siła F była równa zero, wyrażenie $(r - 2 \cdot x)$ musi być równe zero. Ostatecznie mamy $x = \frac{r}{2}$. Tak więc, aby toczenie krążka odbywało się bez poślizgu,

promień nawinięcia nici musi wynosić $\frac{r}{2}$. Z otrzymanego rozwiązania wynika

również, że siła tarcia F może przyjmować wartości ujemne (dla $x > \frac{r}{2}$).

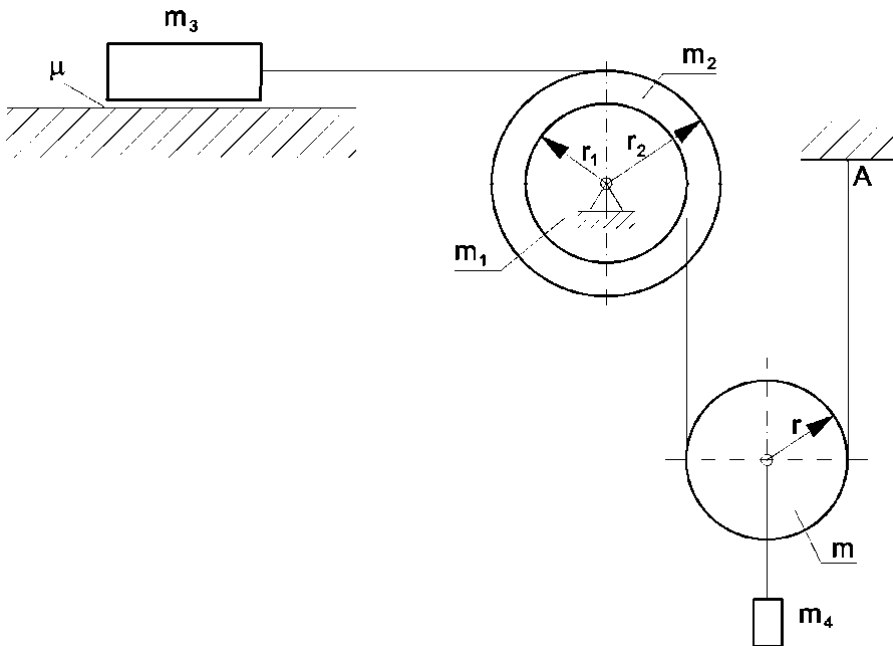
Oznacza to, że zwrot tej siły wynika z dynamicznej równowagi sił wywołujących ruch i w czasie uwalniania od więzów zwrot tej siły można przyjmować dowolnie.

Przyspieszenie masy m_0 dla $x = \frac{r}{2}$ wynosi:

$$p_0 = g \cdot \frac{3 \cdot m_0}{2 \cdot m + 3 \cdot m_0}$$

Przykład 3.12

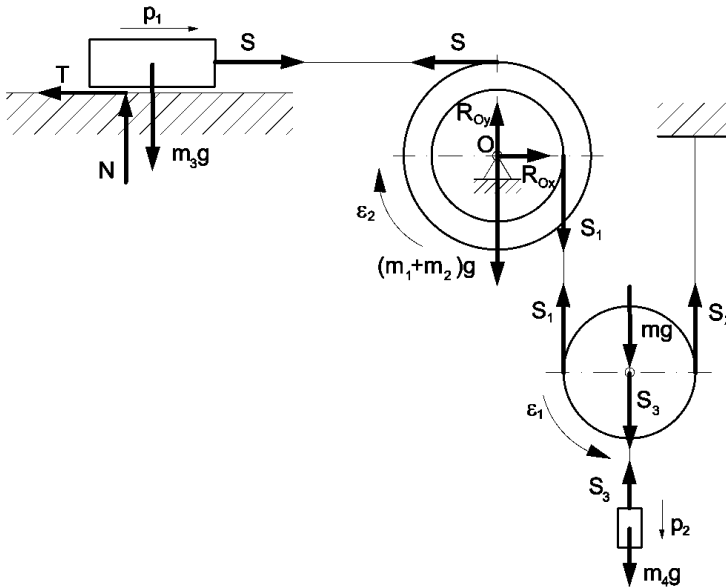
Wyznaczyć przyspieszenia masy m_3 i m_4 dla układu przedstawionego na rysunku 3.53. Masa m_3 spoczywa na chropowatej powierzchni, której współczynnik tarcia wynosi μ i połączona jest nierozciągliwą liną z kołem szpuli o masie m_2 i promieniu r_2 . Z koła o masie m_1 i promieniu r_1 odwija się lina opasująca krążek o masie m i promieniu r , do środka którego podwieszono masę m_4 . Koniec tej liny zaczepiono w stałym punkcie A.



Rys. 3.53

Rozwiązanie

Uwalniamy układ od więzów, aby napisać dynamiczne równania ruchu dla poszczególnych mas.



Rys. 3.54

Dynamiczne równania ruchu mają postać:

– dla masy m_3 :

$$\begin{aligned} m_3 \cdot p_1 &= S - T \\ m_3 \cdot 0 &= N - m_3 \cdot g \\ T &= \mu \cdot N \end{aligned} \quad (\text{a})$$

– dla szpuli złożonej z krążków o masach m_1 i m_2 w ruchu obrotowym:

$$(J_1 + J_2) \cdot \epsilon_2 = S_1 \cdot r_1 - S \cdot r_2 \quad (\text{b})$$

gdzie $J_1 = \frac{m_1 \cdot r_1^2}{2}$ i $J_2 = \frac{m_2 \cdot r_2^2}{2}$

– dla krążka o masie m w ruchu płaskim:

$$\begin{aligned} m \cdot p_2 &= S_3 + m \cdot g - S_1 - S_2 \\ J \cdot \epsilon_1 &= S_2 \cdot r - S_1 \cdot r \end{aligned} \quad (\text{c})$$

gdzie $J = \frac{m \cdot r^2}{2}$

– dla masy m_4 :

$$m_4 \cdot p_2 = m_4 \cdot g - S_3 \quad (d)$$

Zależności kinematyczne między założonymi przyspieszeniami wynoszą:

$$\varepsilon_1 = \frac{p_2}{r} \quad \varepsilon_2 = \frac{2 \cdot p_2}{r_1} = \frac{p_1}{r_2} \quad (e)$$

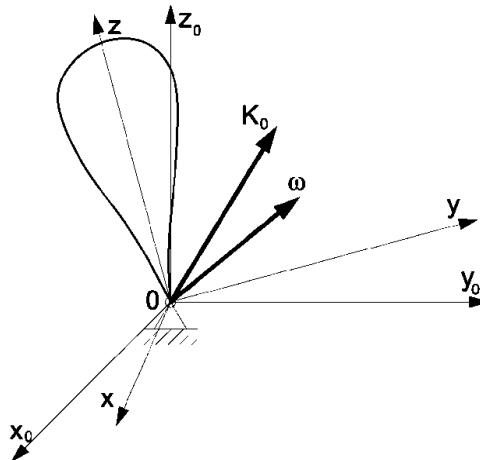
Rozwiązując otrzymany układ równań (a), (b), (c), (d) i (e) względem poszukiwanych przyspieszeń p_1 i p_2 , otrzymano:

$$p_1 = g \frac{(m + m_4) \frac{r_1}{2r_2} - \mu \cdot m_3}{m_3 + \frac{3}{2} m \left(\frac{r_1}{2r_2} \right)^2 + m_4 \left(\frac{r_1}{2r_2} \right)^2 + \left(\frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right)^2}$$

$$p_2 = g \frac{(m + m_4) - \mu \cdot m_3 \frac{2r_2}{r_1}}{m_3 \left(\frac{2r_2}{r_1} \right)^2 + \frac{3}{2} m + m_4 + \left(\frac{m_1 r_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{r_1} \right)^2}$$

3.9. DYNAMIKA RUCHU KULISTEGO RÓWNIANIA EULERA

Rozpatrzmy ruch kulisty ciała sztywnego przedstawiony na rysunku poniżej. Z ciałem tym zwiążemy układ osi współrzędnych x, y, z , który z założenia przyjmujemy jako układ osi głównych.



Rys. 3.55

Do wyprowadzenia dynamicznych równań Eulera wykorzystano twierdzenie o pochodnej wektora krętu układu materialnego względem środka ruchu kulistego O . Zgodnie z równaniem (3.67) mamy:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} \quad (\text{a})$$

Równania Eulera wyprowadzamy względem osi ruchomych, które są osiami głównymi, sztywno związanymi z poruszającym się ciałem. Bezwzględna pochodna krętu o składowych wyznaczonych w układzie ruchomym, zgodnie z wyjaśnieniem omówionym w kinematyce ciała sztywnego dotyczącym prędkości dwu jego punktów, wynosi:

$$\frac{d\mathbf{K}_0}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{K}}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0 \quad (\text{b})$$

Po wstawieniu (b) do (a) otrzymano następujące równanie wektorowe:

$$\frac{d\hat{\mathbf{K}}_0}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} \quad (\text{c})$$

Wstawiając składowe krętu \mathbf{K}_0 względem osi głównych opisanych równaniami (r) w poprzednim punkcie, równanie wektorowe (c) będzie miało postać:

$$\frac{d\hat{\mathbf{K}}_0}{dt} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ J_x \omega_x & J_y \omega_y & J_z \omega_z \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_{i0} \quad (\text{d})$$

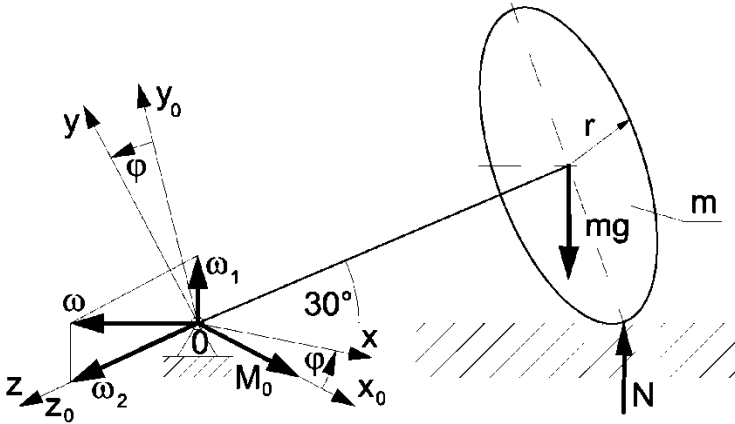
Rzutując otrzymane równanie wektorowe na osie ruchomego układu współrzędnych x, y, z , otrzymano różniczkowe dynamiczne równania ruchu kulistego Eulera. Równania te mają postać:

$$\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z &= \sum_{i=1}^n M_{ix} \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x &= \sum_{i=1}^n M_{iy} \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y &= \sum_{i=1}^n M_{iz} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Przykład 3.13

Zadanie z przykładu 3.9 rozwiązać z wykorzystaniem dynamicznych równań ruchu kulistego Eulera.

Rozwiązanie



Rys. 3.56

Dynamiczne równania ruchu Eulera wyznaczono względem osi głównych sztywno związanych z poruszającą się tarczą. Jest to układ osi xyz , jak zaznaczono na rysunku. Różniczkowe równania ruchu Eulera w przyjętym układzie osi współrzędnych będą miały postać:

$$J_x \cdot \frac{d\omega_x}{dt} - (J_y - J_z) \cdot \omega_y \cdot \omega_z = M_x$$

$$J_y \cdot \frac{d\omega_y}{dt} - (J_z - J_x) \cdot \omega_z \cdot \omega_x = M_y$$

$$J_z \cdot \frac{d\omega_z}{dt} - (J_x - J_y) \cdot \omega_x \cdot \omega_y = M_z$$

Ponieważ z założenia tarcza po podłożu toczy się bez poślizgu, prosta OA jest chwilową osią obrotu. Rozkład prędkości kątowych, precesji ω_1 i obrotu własnego ω_2 (prędkość nutacji jest równa zero) oraz chwilowej prędkości kątowej ruchu kulistego ω przedstawiono na rysunku. Z rozkładu tego mamy:

$$\omega = \omega_1 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \omega_1$$

Jest to prędkość kątowa ruchu kulistego tarczy.

Składowe prędkości kątowych w dowolnej chwili ruchu układu w przyjętym układzie osi głównych xyz będą miały wartość:

$$\begin{aligned}\omega_x &= \omega \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega_1 \cdot \sin \varphi \\ \omega_y &= \omega \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega_1 \cdot \cos \varphi \\ \omega_z &= \omega \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{2} \cdot \omega_1\end{aligned}$$

Położenie układu osi głównych xyz w dowolnej chwili wynika z elementarnego obrotu rozpatrywanego układu wokół osi obrotu własnego (oś z) o elementarny kąt φ . Przyjęto, że przy obrocie osi współrzędnych dookoła osi z o kąt φ , przemieszczenie kątowe osi z jest małe i można je pominąć.

Pochodne względem czasu składowych prędkości kątowych wynoszą:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega_1 \cdot \cos \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \omega_1 \cdot \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dt} \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Pochodna względem czasu kąta φ jest prędkością kątową obrotu własnego układu, czyli jest równa prędkości kątowej ω_2 . Mamy więc:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_2 = \frac{\omega_1}{\sin 30^\circ} = 2 \cdot \omega_1$$

Ostatecznie pochodne względem czasu składowych prędkości kątowej ruchu kulistego wynoszą:

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_x}{dt} &= \sqrt{3} \cdot \omega_1^2 \cdot \cos \varphi \\ \frac{d\omega_y}{dt} &= -\sqrt{3} \cdot \omega_1^2 \cdot \sin \varphi \\ \frac{d\omega_z}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Moment sił zewnętrznych względem ruchomych osi xyz , sztywno związanych z poruszającym się ciałem, wynosi:

$$M_x = (N \cdot 2 \cdot r - m \cdot g \cdot \sqrt{3} \cdot r) \cdot \cos \varphi$$

$$M_y = -(N \cdot 2 \cdot r - m \cdot g \cdot \sqrt{3} \cdot r) \cdot \sin \varphi$$

$$M_z = 0$$

Wstawiając otrzymane wartości do równań Eulera, otrzymano:

$$J_x \sqrt{3} \cdot \omega_1^2 \cos \varphi - (J_y - J_z) \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_1^2 \frac{3}{2} \cdot \cos \varphi = (N \cdot 2r - mg \cdot \sqrt{3} \cdot r) \cdot \cos \varphi$$

$$-J_y \sqrt{3} \cdot \omega_1^2 \sin \varphi - (J_z - J_x) \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_1^2 \frac{3}{2} \cdot \sin \varphi = -(N \cdot 2r - mg \cdot \sqrt{3} \cdot r) \cdot \sin \varphi$$

$$J_z \cdot 0 - (J_x - J_y) \cdot 0 = 0$$

Ostatecznie otrzymano dwa równoważne równania dynamiczne, w których $J_x = J_y$ o postaci:

$$J_x \omega_1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + J_z \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \omega_1^2 = 2 \cdot N \cdot r - \sqrt{3} \cdot mg \cdot r$$

Po wstawieniu momentów bezwładności względem osi x, $J_x = \frac{mr^2}{4} + m(r\sqrt{3})^2$

i względem osi z, $J_z = \frac{mr^2}{2}$ otrzymano:

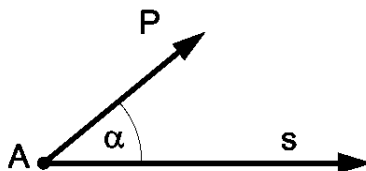
$$N = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot m \cdot \left(g + \frac{19}{16} \cdot \omega_1^2 \cdot r \right)$$

3.10. PRACA I MOC SIŁY. ENERGIA KINETYCZNA

3.10.1. Praca i moc siły

Jeśli punkt przyłożenia siły \mathbf{P} doznaje prostoliniowego przesunięcia, to mówimy, że siła ta wykonuje pewną pracę. Dla stałej co do wartości i kierunku siły \mathbf{P} praca wynosi:

$$L = \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} \quad (3.79)$$



Rys. 3.57

Pracą stałej siły na prostoliniowym przesunięciu nazywamy iloczyn skalarny siły \mathbf{P} i przesunięcia \mathbf{s} .

Wykorzystując definicję iloczynu skalarnego, równaniu (3.79) można nadać postać:

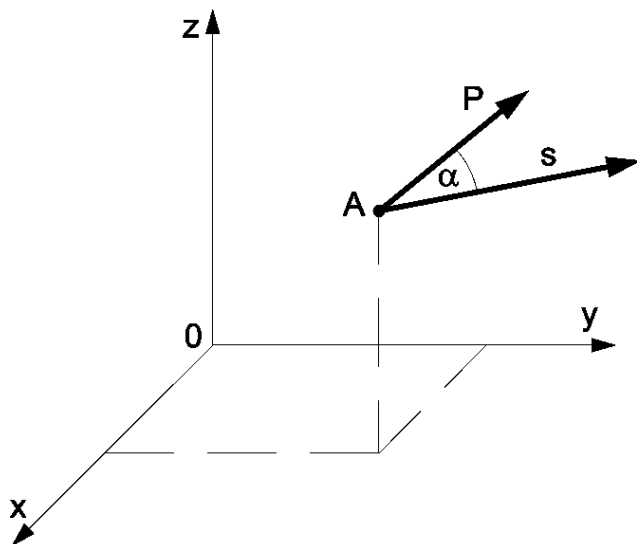
$$L = \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} \cdot \cos \alpha \quad (3.80)$$

Tak więc pracą stałej siły na prostoliniowym przesunięciu tej siły jest iloczyn wartości przesunięcia i rzutu siły na kierunek tego przesunięcia, czyli jeśli kąt $\alpha < \frac{\pi}{2}$, praca jest dodatnia, jeśli kąt $\alpha > \frac{\pi}{2}$, praca, jest ujemna, a jeśli kąt

$\alpha = \frac{\pi}{2}$, praca jest równa zero.

Gdy siła \mathbf{P} oraz przesunięcie \mathbf{s} opisane są przez składowe w prostokątnym układzie osi współrzędnych, z definicji iloczynu skalarnego dwóch wektorów mamy:

$$L = \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = P_x s_x + P_y s_y + P_z s_z \quad (3.81)$$



Rys. 3.58

Jeśli rozpatrywana siła \mathbf{P} jest wypadkową n sił $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ przyłożonych w jednym punkcie, ze statyki mamy $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i$ i po wstawieniu do równania (3.79) otrzymujemy:

$$L = \mathbf{P} \cdot \mathbf{s} = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \right) \cdot \mathbf{s} = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{s} + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{s} + \dots + \mathbf{P}_n \cdot \mathbf{s} \quad (3.82)$$

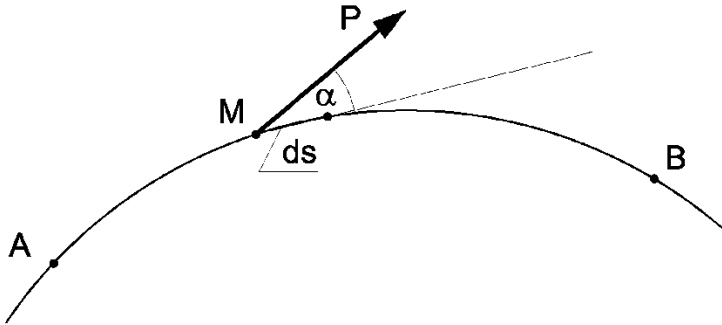
Praca siły wypadkowej, układu sił przyłożonych w jednym punkcie równa jest sumie prac sił składowych.

W przypadku, gdy punkt przyłożenia stałej siły \mathbf{P} doznaje przesunięcia krzywoliniowego, całkowitą pracę tej siły wyznaczamy jako sumę elementarnych prac dL wykonanych na elementarnych przesunięciach ds .

Elementarna praca stałej siły \mathbf{P} na elementarnym przesunięciu ds wynosi:

$$dL = P \cos \alpha \cdot ds \quad (3.83)$$

Jak wynika z rysunku kąt α jest zawarty między kierunkiem siły \mathbf{P} i styczną do toru w punkcie jej przyłożenia.



Rys. 3.59

Praca siły \mathbf{P} na drodze krzywoliniowej AB jest całką krzywoliniową z elementarnej pracy dL wzdłuż łuku AB. Mamy więc:

$$L = \int_{AB} P \cos \alpha \cdot ds \quad (3.84)$$

Jeśli pracę wykonaną przez siłę odniesiemy do jednostki czasu, otrzymamy wielkość, którą nazywamy **mocą tej siły**. Wprowadzając oznaczenie mocy symbolem N , mamy:

$$N = \frac{dL}{dt} = P \cos \alpha \frac{ds}{dt} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} \cdot \cos \alpha \quad (3.85)$$

lub krócej

$$N = \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} \quad (3.86)$$

Moc siły jest iloczynem skalarnym wektora siły i prędkości punktu jej przyłożenia.

Jednostką pracy w układzie SI jest 1 dżul (1 J). Jest to praca siły 1 N na przesunięciu 1 m:

$$1 \text{ J} = 1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ mkg/s}^2 \cdot 1 \text{ m} = 1 \text{ m}^2\text{kg/s}^2 \quad (\text{b})$$

Jednostką mocy w układzie SI jest 1 wat (1 W). Jest to praca 1 J wykonana w czasie 1 s:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J} / 1 \text{ s} = 1 \text{ m}^2\text{kg/s}^3 \quad (\text{c})$$

Wielokrotnością podstawowej jednostki jest kilowat (1 kW) i megawat (1 MW):

$$1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W} \quad 1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W} \quad (\text{d})$$

W technicznym układzie jednostek, w którym jednostką siły jest 1 kG, a jednostką długości 1 m, jednostką pracy jest 1 kilogramometr (1 kGm).

Praktyczną jednostką mocy jest koń mechaniczny:

$$1 \text{ KM} = 75 \text{ kGm/s} \quad (\text{e})$$

Zależności między jednostkami pracy i mocy w układzie technicznym i w układzie SI, są następujące:

$$\begin{aligned} 1 \text{ kGm} &= 1 \text{ kG} \cdot 1 \text{ m} = 9,81 \text{ N} \cdot 1 \text{ m} = 9,81 \text{ J} \\ 1 \text{ KM} &= 75 \text{ kGm/s} = 75 \cdot 9,81 \text{ J/s} = 736 \text{ W} = 0,736 \text{ kW} \end{aligned} \quad (\text{f})$$

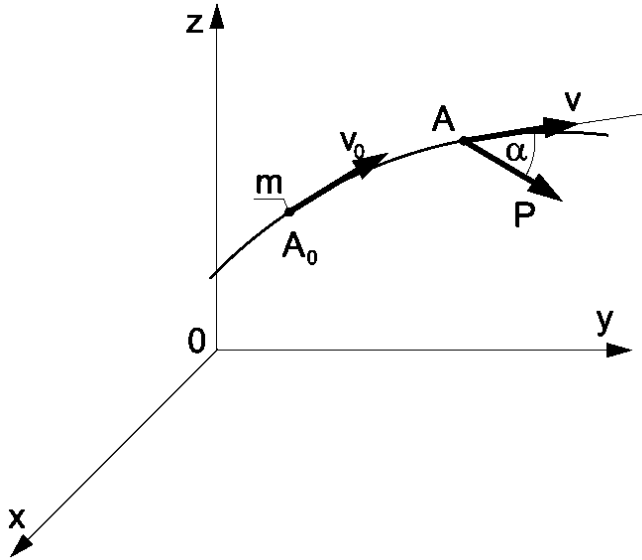
3.10.2. Energia kinetyczna punktu. Prawo zmienności energii kinetycznej punktu materialnego

Niech punkt materialny, na który działa siła \mathbf{P} jako wypadkowa zbieżnego układu sił, wykonuje ruch po dowolnym torze krzywoliniowym. W chwili początkowej punkt znajdował się w położeniu A_0 , a w chwili t w położeniu A . Pamiętając, że przyspieszenie styczne w ruchu punktu po torze wynosi $p_t = dv/dt$, równanie dynamiczne tego punktu na kierunek styczny do toru ma postać:

$$m \frac{dv}{dt} = P \cos \alpha \quad (\text{a})$$

Pomnóżmy obie strony powyższego równania przez v . Otrzymamy:

$$m \cdot v \frac{dv}{dt} = P \cdot v \cdot \cos \alpha \quad (\text{b})$$



Rys. 3.60

Po wymnożeniu równania (b) przez dt i podstawieniu za $v \cdot dt = ds$, otrzymano:

$$mv \cdot dv = P \cos \alpha \cdot ds \quad (c)$$

Całkując wyrażenie (c) stronami w czasie od t_0 do t i biorąc pod uwagę, że w chwili t_0 punkt materialny zajmował położenia A_0 i miał prędkość v_0 , a w chwili t zajmował położenie A i miał prędkość v , otrzymano:

$$m \int_{v_0}^v v dv = \int_{A_0 A} P \cos \alpha \cdot ds \quad (d)$$

po scałkowaniu mamy:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = L \quad (3.87)$$

Po lewej stronie powyższego równania występują wyrazy będące połową iloczynu masy punktu materialnego i kwadratu prędkości tegoż punktu. Wielkości te noszą nazwę **energii kinetycznej** punktu materialnego. Z równania (3.87) wynika następujące twierdzenie:

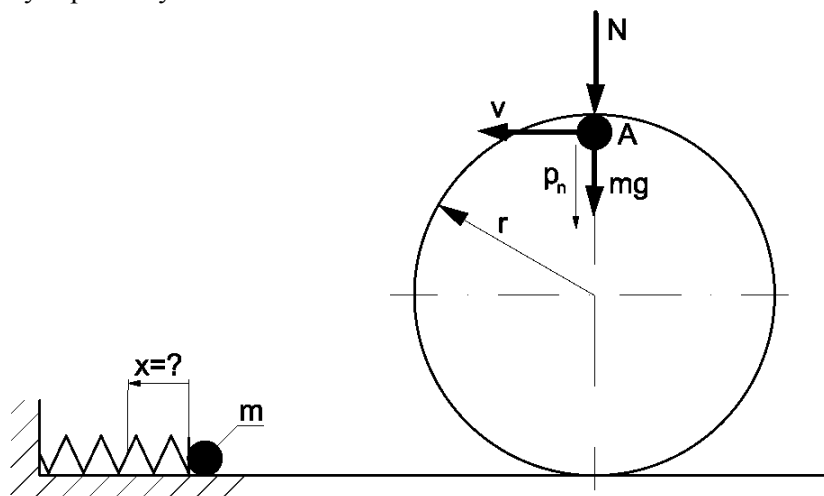
Przyrost energii kinetycznej punktu materialnego w rozważanym przedziale czasu równy jest pracy siły wypadkowej wszystkich sił działających na ten punkt w tym samym przedziale czasu.

Przykład 3.14

Dany jest gładki tor w kształcie płaskiej pętli o promieniu r . Na poziomym odcinku toru ustawiono wyrzutnię w postaci sprężyny o stałej c , jak pokazano na rysunku. Wyznaczyć jakie musi być ugięcie sprężyny, aby wystrzelona kula o masie m obiegła pętlę nigdzie się nie odrywając.

Rozwiązanie

Wystrzelona kula obiegnie pętlę, jeśli w swoim ruchu osiągnie z odpowiednią prędkością wysokość oznaczoną położeniem A. Oznacza to, że w położeniu A musi być spełniony warunek $N \geq 0$.



Rys. 3.61

Z dynamicznego równania ruchu na kierunek normalny mamy:

$$m \cdot p_n = m \cdot g + N$$

czyli:

$$N = (m \cdot p_n - m \cdot g) \geq 0$$

Ostatecznie warunek, jaki musi spełnić poruszająca się po torze kula ma postać $p_n \geq g$. Wstawiając wartość przyspieszenia normalnego, mamy:

$$\frac{V^2}{r} \geq g$$

Prędkość kuli wyrzuczonej z ugiętej sprężyny wyznaczono z twierdzenia o przyroście energii kinetycznej punktu materialnego. Dla rozpatrywanego przypadku przyrost energii kinetycznej kuli w rozważanym przedziale czasu równy jest pracy wykonanej przez siłę ciężkości kuli oraz rozprężającą się sprężynę. Mamy więc:

$$\frac{m \cdot V^2}{2} - 0 = \frac{c \cdot x^2}{2} - m \cdot g \cdot 2r$$

Z równania tego kwadrat prędkości kuli wynosi:

$$V^2 = \frac{c}{m} \cdot x^2 - 4 \cdot g \cdot r$$

Wstawiając wyznaczoną prędkość do warunku związanego z naciskiem normalnym kuli na tor, mamy ostatecznie:

$$x \geq \sqrt{\frac{5 \cdot m \cdot g \cdot r}{c}}$$

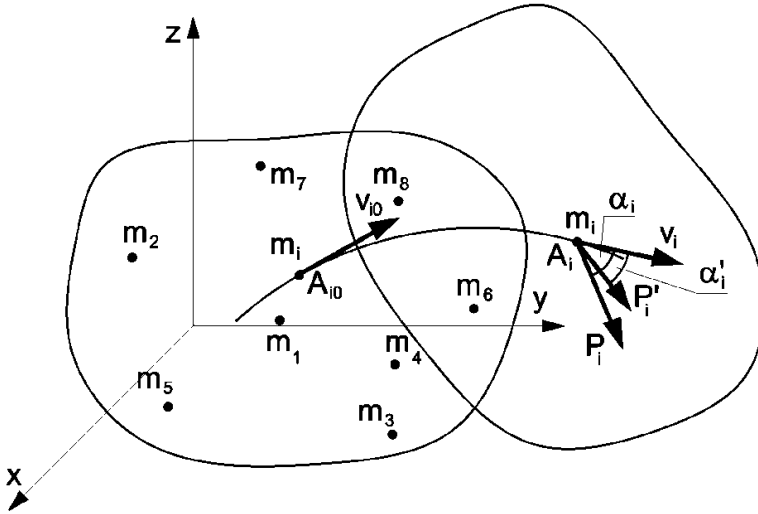
3.10.3. Prawo zmienności energii kinetycznej układu punktów materialnych

Rozpatrzmy układ n punktów materialnych o masach m_1, m_2, \dots, m_n . Uodwodnione powyżej twierdzenie o przyroście energii kinetycznej punktu materialnego zastosujemy do dowolnego punktu o masie m_i , który jest jednym z punktów rozpatrywanego układu materialnego.

Zbadajmy więc punkt o masie m_i , na który działa siła \mathbf{P}_i jako wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych i siła \mathbf{P}_i' jako wypadkowa sił oddziaływania wewnętrznych między punktami. W chwili początkowej punkt ten znajdował się w położeniu A_{i0} , zaś w chwili t w położeniu A_i .

Wykorzystując twierdzenie o przyroście energii kinetycznej tego punktu i sumie prac sił \mathbf{P}_i i \mathbf{P}_i' , otrzymano równanie:

$$\frac{m_i v_i^2}{2} - \frac{m_i v_{i0}^2}{2} = L_i + L_i' \quad (3.88)$$



Rys. 3.62

gdzie L_i i L_i' oznaczają pracę odpowiednio siły \mathbf{P}_i i \mathbf{P}_i' na odcinku toru $A_{i0}A_i$. Mamy więc:

$$L_i = \int_{A_{i0}A_i} \mathbf{P}_i \cos \alpha_i ds_i, \quad L_i' = \int_{A_{i0}A_i} \mathbf{P}_i' \cos \alpha_i' ds_i \quad (e)$$

Równanie typu (3.88) można napisać dla każdego punktu należącego do rozważanego układu. Powstanie w ten sposób układ równań, który dodając stronami można przedstawić w postaci:

$$\sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i0}^2}{2} = \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=1}^n L_i' \quad (3.89)$$

Po lewej stronie otrzymanego równania poszczególne wielkości wyrażają: energię całego układu w chwili końcowej rozpatrywanego przedziału czasu i energię całego układu w chwili początkowej. Po prawej stronie natomiast otrzymaliśmy sumy prac wykonanych odpowiednio przez siły zewnętrzne i siły wewnętrzne w tym samym przedziale czasu.

Biorąc pod uwagę fakt, że rozpatrujemy ciało sztywne, w którym odległości między poszczególnymi punktami nie ulegają zmianie, praca sił wewnętrznych na dowolnym przemieszczeniu tego ciała jest równa zero:

$$\sum_{i=1}^n L_i' = 0 \quad (f)$$

Stosując już używane oznaczenia dla energii kinetycznej i sumy prac, mamy:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad T_0 = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i0}^2}{2} \quad (g)$$

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n \int_{A_{i0} A_i} P_i \cos \alpha_i ds_i \quad (h)$$

Podstawiając (g) i (h) do równania (3.89), otrzymano ostatecznie:

$$\Delta T = T - T_0 = L \quad (3.90)$$

Na podstawie równania (3.90) można sformułować następujące twierdzenie:

Przyrost energii kinetycznej ciała sztywnego w rozważanym przedziale czasu równy jest sumie prac wszystkich sił zewnętrznych przyłożonych do tego ciała, w tym samym przedziale czasu.

3.10.4. Energia kinetyczna ciała sztywnego

Jak przedstawiono zależnością (g) w poprzednim punkcie opracowania, energia kinetyczna układu n punktów materialnych wynosi:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2} \quad (a)$$

gdzie v_i oznacza wartość prędkości punktu materialnego o masie m_i .

Wyznamy energię kinetyczną w szczególnych przypadkach ruchu ciała.

Dla **ruchu postępowego** ciała o masie m poruszającego się z prędkością \mathbf{v} mamy:

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v^2}{2} = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^n m_i \quad (b)$$

ponieważ w ruchu postępowym prędkości wszystkich punktów są sobie równe i wynoszą \mathbf{v} . Biorąc pod uwagę, że $\sum_{i=1}^n m_i = m$, otrzymano ostatecznie:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad (3.91)$$

Energia kinetyczna ciała w ruchu postępowym, tak jak dla punktu materialnego, równa jest połowie iloczynu masy tego ciała i kwadratu prędkości ruchu postępowego.

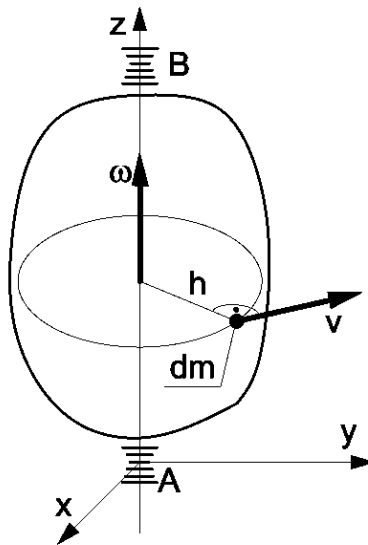
Dla **ruchu obrotowego** ciała, obracającego się względem stałej osi Az z prędkością kątową ω :

Wytnijmy myślowo element o masie dm i rozpatrzmy jego energię kinetyczną. Elementarna energia masy dm w ruchu po okręgu koła o promieniu h wyniesie:

$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 h^2 dm \quad (c)$$

Energia kinetyczna całego ciała będzie sumą energii elementarnych i wyniesie:

$$T = \frac{1}{2} \int_m v^2 dm = \frac{1}{2} \int_m \omega^2 h^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int_m h^2 dm \quad (d)$$



Rys. 3.63

Całka występująca w równaniu (d) jako iloczyn elementarnej masy ciała i kwadratu jej odległości od osi Az jest momentem bezwładności tego ciała względem osi Az . Mamy więc:

$$J_z = \int_m h^2 dm \quad (e)$$

Na podstawie (e) i (d) otrzymano ostatecznie:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad (3.92)$$

Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym dookoła stałej osi równa jest połowie iloczynu momentu bezwładności ciała względem tej osi i kwadratu prędkości kątowej.

Wyznamy teraz energię kinetyczną ciała sztywnego w ruchu dowolnym względem stałego układu odniesienia $Ox_0y_0z_0$.

Wprowadźmy dodatkowo drugi układ odniesienia $Oxyz$, o początku w środku masy C i poruszający się ruchem postępowym względem układu $Ox_0y_0z_0$, jak pokazano na rysunku.

Prędkość \mathbf{v}_i elementarnej masy m_i można przedstawić w postaci sumy prędkości:

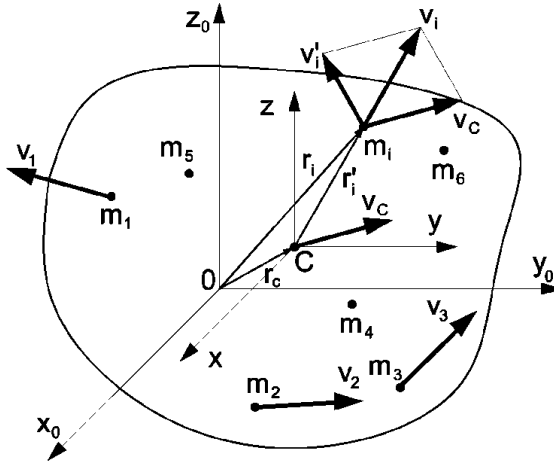
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i \tag{f}$$

Z definicji iloczynu skalarnego, kwadrat wartości wektora \mathbf{v}_i wynosi:

$$\mathbf{v}_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i{}^2 \tag{g}$$

Po uwzględnieniu (g) w równaniu (f) otrzymano:

$$\mathbf{v}_i^2 = \mathbf{v}'_i{}^2 = (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}'_i)^2 = \mathbf{v}_c^2 + 2\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_i{}^2 = \mathbf{v}_c^2 + 2\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_i{}^2$$



Rys. 3.64

Podstawiając powyższe wyrażenie do wzoru (a), wyznaczono:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^n \frac{m_i \mathbf{v}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_c^2 + 2\mathbf{v}_c \cdot \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}'_i{}^2) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{v}_c^2 \sum_{i=1}^n m_i + \mathbf{v}_c \cdot \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i + \sum_{i=1}^n \frac{m_i \mathbf{v}'_i{}^2}{2} \end{aligned} \tag{h}$$

Ponieważ $\sum_{i=1}^n m_i = m$ oraz występująca w drugim wyrazie równania (h) suma geometryczna pędów wszystkich punktów rozważanego ciała względem środka masy $\sum_{i=1}^n m_i v_i'$ jest równa zero, równaniu temu można nadać ostatecznie postać:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i'^2}{2} \quad (3.93)$$

Z równania (3.93) wynika następujące twierdzenie, nazwane **Twierdzeniem Koeniga**:

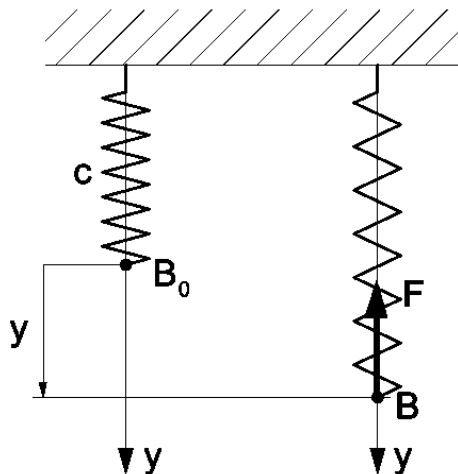
Energia kinetyczna ciała sztywnego równa jest sumie energii kinetycznej tego ciała w ruchu postępowym z prędkością środka masy oraz energii kinetycznej w ruchu względem środka masy.

3.10.5. Praca siły sprężystej. Praca momentu siły

Wyznamy pracę L siły sprężystej F w przypadku, gdy siła ta jest proporcjonalna do wydłużenia elementu sprężystego. Miara tej siły względem osi Oy wynosi:

$$F_y = -c \cdot y \quad (a)$$

gdzie c oznacza stały współczynnik proporcjonalności, zwany stałą sprężyny.



Rys. 3.65

Elementarna praca siły sprężystej na przesunięciu dy wynosi:

$$dL = F_y \cdot dy = -c \cdot y \cdot dy \quad (b)$$

Całkując powyższe równanie stronami, otrzymano pracę siły F na drodze równej odkształceniu sprężyny:

$$L = -c \int_0^y y \cdot dy = -\frac{c}{2} y^2 \quad (3.94)$$

Dla przedstawionego przypadku, praca siły F jest ujemna, gdyż siła w sprężynie jest zawsze przeciwna do jej odkształcenia.

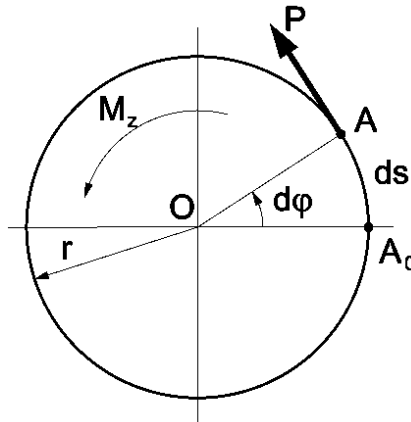
Pracę L od momentu M_z przyłożonego do ciała sztywnego obracającego się wokół nieruchomej osi, wyznaczmy sumując prace elementarne.

Dla momentu:

$$M_z = P \cdot r \quad (c)$$

elementarna praca wynosi:

$$dL = P \cdot ds \quad (d)$$



Rys. 3.66

gdzie $ds = r \cdot d\varphi$ oznacza elementarne przesunięcie punktu A wywołane obrotem ciała o kąt $d\varphi$. Równanie (d) przyjmuje postać:

$$dL = P \cdot r \cdot d\varphi \quad (e)$$

Podstawiając (c) do równania (e), otrzymano:

$$dL = M_z \cdot d\varphi \quad (3.95)$$

Elementarna praca momentu przyłożonego do ciała, które obraca się wokół nieruchomej osi, równa jest iloczynowi momentu i elementarnego obrotu ciała. W przypadku gdy $M_z = \text{const}$, z powyższego równania mamy:

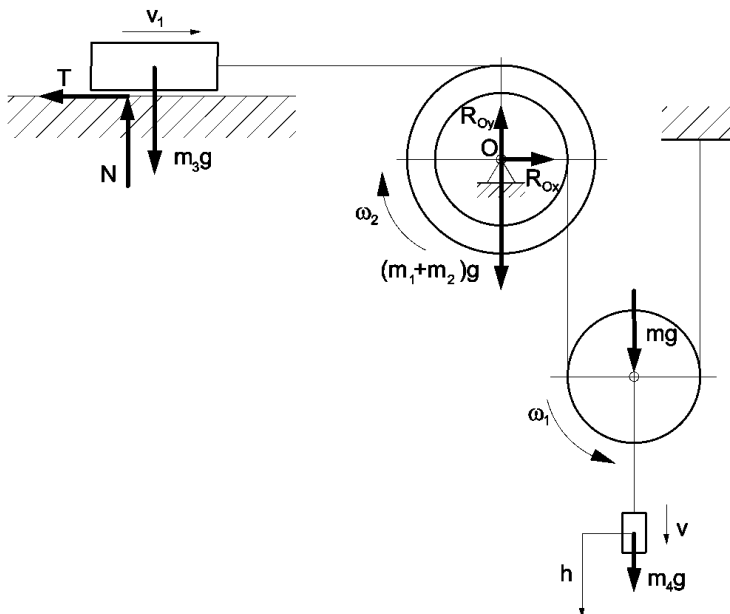
$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi = M_z(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (3.96)$$

Praca momentu przyłożonego do ciała sztywnego obracającego się wokół nieruchomej osi równa jest iloczynowi momentu i kąta obrotu ciała.

Przykład 3.15

Dla układu przedstawionego na rys. 3.67 wyznaczyć prędkość masy m_4 po przebyciu przez nią drogi h . Masa m_3 spoczywa na chropowatej powierzchni, na której współczynnik tarcia wynosi μ i lekką oraz nierozciągliwą liną połączona jest ze szpulą o stałej osi O . W szpuli mały krążek o masie m_1 ma promień r_1 , a duży o masie m_2 ma promień r_2 . Z małego krążka szpuli lina opasuje krążek ruchomy o masie m i promieniu r i jest zamocowana w stałym punkcie. Do osi ruchomego krążka podwieszono masę m_4 , której prędkości poszukujemy. W chwili początkowej cały układ pozostawał w spoczynku.

Rozwiązanie



Rys. 3.67

Do wyznaczenia prędkości masy m_4 po przebyciu drogi h zastosujemy twierdzenie o przyroście energii kinetycznej ciała sztywnego. Mamy więc:

$$\Delta T = \sum L \quad (a)$$

Przyrost energii kinetycznej rozpatrywanego układu wynosi:

$$\Delta T = \left[\frac{m_4 v^2}{2} + \left(\frac{m v^2}{2} + \frac{J \omega_1^2}{2} \right) + \frac{(J_1 + J_2) \omega_2^2}{2} + \frac{m_3 v_1^2}{2} \right] - 0 \quad (b)$$

gdzie: $J = \frac{m r^2}{2}$, $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$, $J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$ oraz z kinematyki:

$$\omega_1 = \frac{v}{r} \quad \omega_2 = \frac{2 \cdot v}{r_1} \quad v_1 = \omega_2 \cdot r_2 = 2 \cdot v \cdot \frac{r_2}{r_1} \quad (c)$$

Suma prac sił zewnętrznych wynosi:

$$\sum L = m_4 \cdot g \cdot h + m \cdot g \cdot h - T \cdot s \quad (d)$$

gdzie $T = \mu N = \mu m_3 g$ jest siłą tarcia rozwinętego, a s jest przesunięciem masy m_3 . Przesunięcie to, w czasie przebywania drogi h przez masę m_4 , wynosi:

$$dh = v \cdot dt$$

$$ds = v_1 \cdot dt = 2 \cdot v \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot dt$$

mamy więc:

$$ds = 2 \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot dh \quad \text{i ostatecznie} \quad s = 2 \cdot \frac{r_2}{r_1} \cdot h \quad (e)$$

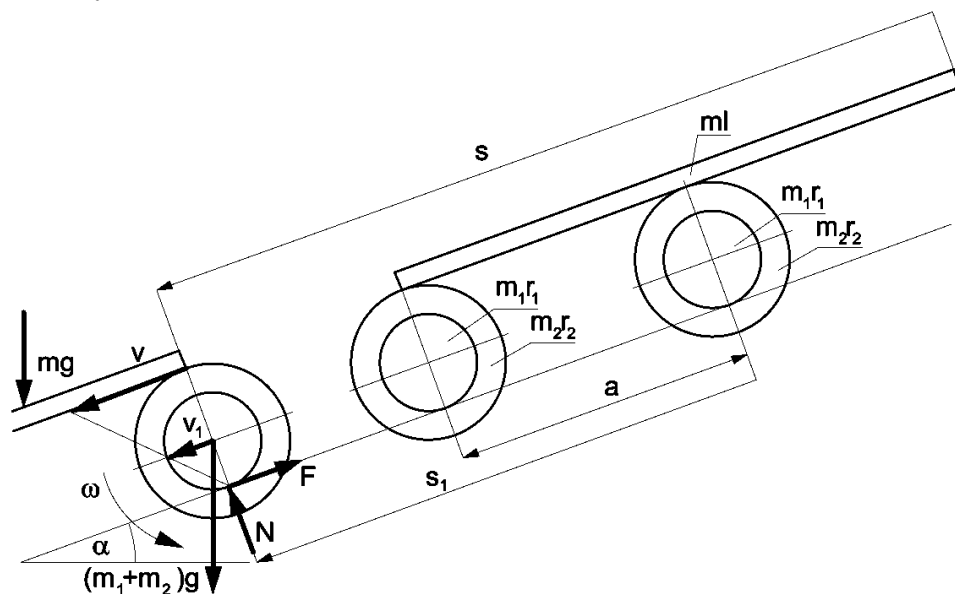
Wstawiając zależności kinematyczne do przyrostu energii oraz wartość przesunięcia s masy m_3 do sumy prac i przyrównując do siebie przyrost energii kinetycznej i pracę sił zewnętrznych, otrzymano prędkość masy m_4 po przebyciu drogi h . Mamy:

$$v = \sqrt{g \cdot h \frac{m + m_4 - 2 \cdot \mu \cdot m_3 \frac{r_2}{r_1}}{2 \cdot m_4 + 3 \cdot m + 4 \cdot m_1 + 4 \cdot (m_2 + 2 \cdot m_3) \frac{r_2^2}{r_1^2}}} \quad (f)$$

Przykład 3.16

Na dwu szpulach ustawionych w odległości a na równi pochyłej pod kątem α i mogących toczyć się po równi bez poślizgu, ułożono listwę o masie m i długości l . Listwę położono tak, że w chwili początkowej jej początek znajdował się nad dolną szpulą. Wyznaczyć prędkość listwy po zwolnieniu układu w chwili, kiedy koniec listwy znajdzie się nad górną szpulą. Listwa po szpulach toczy się bez poślizgu.

Rozwiązanie



Rys. 3.68

W chwili początkowej układ pozostawał w spoczynku, jego energia kinetyczna była równa zero. Prędkość listwy w chwili, gdy jej koniec znajdzie się nad górną szpulą wyznaczono z twierdzenia o zmianie energii kinetycznej układu materialnego. Oznaczając prędkość szpuli w ruchu płaskim oraz listwy w ruchu postępowym (jak na rysunku) w chwili końcowej, przyrost energii kinetycznej rozpatrywanego układu wynosi:

$$\Delta T = \left[\frac{m \cdot V^2}{2} + 2 \cdot \left(\frac{(m_1 + m_2) \cdot V_1^2}{2} + \frac{(J_1 + J_2) \cdot \omega^2}{2} \right) \right] - 0$$

gdzie: $J_1 = \frac{m_1 \cdot r_1^2}{2}$ $J_2 = \frac{m_2 \cdot r_2^2}{2}$

Ponieważ listwa po szpulach toczy się bez poślizgu oraz szpule po równi toczą się również bez poślizgu, z kinematyki mamy:

$$\omega = \frac{V_1}{r_1} = \frac{V}{r_1 + r_2}$$

Po wstawieniu zależności kinematycznych, przyrost energii kinetycznej układu wynosi:

$$\Delta T = \left[\frac{1}{2} \cdot m + \frac{3 \cdot m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot (2 \cdot r_1^2 + r_2^2)}{2 \cdot (r_1 + r_2)^2} \right] \cdot V^2$$

Suma prac sił zewnętrznych działających na układ będzie miała wartość:

$$\sum L = m \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot s + 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot s_1$$

Reakcje normalne N są prostopadłe do przemieszczenia szpuli i nie wykonują pracy. Siły tarcia F przyłożone są w chwilowym środku obrotu (chwilowa prędkość punktów styku szpuli z równią jest równa zero) i również nie wykonują pracy. Tak więc pracę wykonują jedynie siły ciężkości listwy i szpul na przemieszczeniach odpowiednio s i s_1 .

Wartości tych przemieszczeń wynikają z kinematyki ruchu układu i wynoszą:

$$ds = V \cdot dt \quad ds_1 = V_1 \cdot dt = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot V \cdot dt = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot ds$$

ostatecznie mamy:
$$s_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} \cdot s$$

Z geometrii ruchu układu mamy (patrz rysunek) $s = (1 - a) + s_1$. Ostatecznie przemieszczenia listwy i szpuli wynoszą:

$$s = \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot (1 - a) \quad s_1 = \frac{r_1}{r_2} \cdot (1 - a)$$

Wstawiając otrzymane przemieszczenia do sumy prac sił zewnętrznych układu, otrzymano:

$$\sum L = \frac{1 - a}{r_2} \cdot g \cdot \sin \alpha \cdot \left[m \cdot (r_1 + r_2) + 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot r_1 \right]$$

Podstawiając otrzymane wartości przyrostu energii kinetycznej układu oraz sumy prac sił zewnętrznych, do twierdzenia o zmianie energii kinetycznej układu materialnego, wyznaczono prędkość listwy:

$$V = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot (1-a) \cdot (r_1 + r_2)^2 \cdot [m \cdot (r_1 + r_2) + 2 \cdot (m_1 + m_2) \cdot r_1] \cdot \sin \alpha}{r_2 \cdot [m \cdot (r_1 + r_2)^2 + 3 \cdot m_1 \cdot r_1^2 + m_2 \cdot (2 \cdot r_1^2 + r_2^2)]}}$$

3.11. PODSTAWY TEORII UDERZENIA

W dynamice układów materialnych bywają takie przypadki, w których działanie sił trwa skończony, lecz bardzo krótki przedział czasu. Te siły chwilowe, jak już podano w punkcie 3.3.1, nazywamy impulsem siły. Impuls siły wynosi:

$$\mathbf{S} = \int_{t_0}^t \mathbf{P} \cdot dt \quad (\text{a})$$

Wykorzystując pojęcie impulsu siły, sformułujmy twierdzenia dotyczące pochodnej pędu układu materialnego wyrażonego równaniem (3.32) oraz krętu tego układu wyrażonego równaniem (3.67).

Dla pędu układu materialnego z równania (3.32) mamy:

$$d\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{P}_i \cdot dt \quad (\text{b})$$

Po podstawieniu otrzymano ostatecznie:

$$\mathbf{Q} - \mathbf{Q}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_i \quad (\text{c})$$

gdzie \mathbf{Q} jest pędem układu chwili t , natomiast \mathbf{Q}_0 jest pędem układu w chwili t_0 .

Przyrost pędu układu materialnego równy jest sumie impulsów sił działających na rozpatrywany układ.

Dla krętu układu materialnego na podstawie równania (3.67) można napisać:

$$d\mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{P}_i) \cdot dt \quad (\text{d})$$

Po uwzględnieniu impulsu siły mamy:

$$\mathbf{K}'_0 - \mathbf{K}''_0 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \times \mathbf{S}_i) \quad (\text{e})$$

gdzie \mathbf{K}'_0 jest krętem układu w chwili t , natomiast \mathbf{K}''_0 jest krętem układu w chwili t_0 .

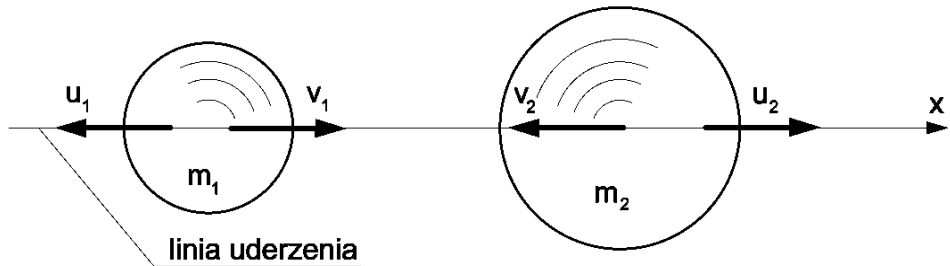
Przyrost krętu układu materialnego względem stałego bieguna równy jest sumie momentów impulsów sił działających na rozpatrywany układ.

Czas trwania sił chwilowych jest bardzo krótki i w związku z tym siły te powodują nagłą zmianę prędkości, przy praktycznym braku zmiany położenia rozpatrywanego układu.

Praktycznie zjawisko uderzenia można podzielić na dwa zasadnicze przypadki: uderzenie swobodne związane z wykorzystaniem zmiany pędu oraz uderzenie nieswobodne związane z wykorzystaniem zmiany krętu układu w czasie zderzenia.

3.11.1. Uderzenie swobodne

Przypadek uderzenia swobodnego zostanie przedstawiony na przykładzie zderzenia dwu gładkich kul, o masach m_1 i m_2 , oraz prędkościach odpowiednio v_1 v_2 , jak przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 3.69

W czasie zderzenia tych kul impuls reakcji w miejscu uderzenia jest siłą wewnętrzną układu i w związku z tym prawa strona równania (c) jest równa zero. Wynika z tego, że pęd układu przed uderzeniem jest równy pędowi układu po uderzeniu. Dla oznaczeń przedstawionych na rys. 3.69 wektorowe równanie (c) rzutowane na oś x ma postać:

$$m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2 = -m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2 \quad (f)$$

gdzie u_1 i u_2 są prędkościami odpowiednio masy m_1 i m_2 po uderzeniu.

Założono, że masy po uderzeniu będą miały prędkości skierowane jak na rysunku; jeśli założymy inne zwroty, należy to uwzględnić w znakach równania (f). W równaniu tym są dwie niewiadome prędkości kul po uderzeniu. Aby je wyzna-

czyć, potrzebny jest dodatkowy warunek. Warunek ten, określony doświadczalnie przez Newtona, wyznacza stosunek prędkości względnych po i przed uderzeniem na kierunku linii uderzenia, gdzie linia uderzenia jest to prostopadła do wspólnej stycznej w miejscu styku ciał w czasie zderzenia.

Hipoteza Newtona dla zderzenia rozpatrywanych kul ma postać:

$$-k = \frac{(-u_1) - u_2}{v_1 - (-v_2)} \quad (g)$$

gdzie k jest współczynnikiem restytucji zależnym od materiału, z którego wykonano uderzające się kule. Wartość współczynnika restytucji wynosi 0 dla kul idealnie plastycznych i 1 dla kul idealnie sprężystych:

$$0 \leq k \leq 1 \quad (h)$$

Przykładowe współczynniki restytucji w zależności od rodzaju materiału wynoszą:

| | |
|---------------------|------------|
| dla drewna | $k = 0,26$ |
| dla stali | $k = 0,56$ |
| dla żeliwa | $k = 0,66$ |
| dla kości słoniowej | $k = 0,80$ |
| dla szkła | $k = 0,95$ |
| dla ołowiu | $k = 0,20$ |

Jeśli prędkości kul przed uderzeniem leżą na linii uderzenia, mówimy że uderzenie jest centralne. Gdy kierunki prędkości kul przed uderzeniem są dowolne, uderzenie takie nazywamy ukośnym.

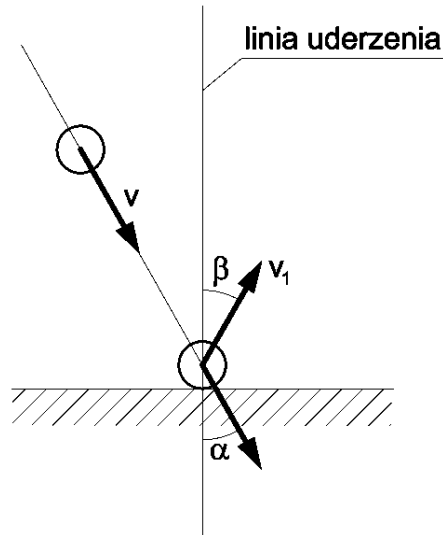
Przykład 3.17

Gładka kula spada ukośnie na nieruchomą powierzchnię z prędkością V pod kątem $\alpha = \frac{\pi}{6}$ do pionu.

Wyznaczyć kąt odbicia kuli β oraz jej prędkość po odbiciu, jeśli współczynnik restytucji wynosi $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Rozwiązanie

Rozpatrywany przypadek dotyczy uderzenia swobodnego jednego ciała. Nieruchoma powierzchnia, na którą spada kula ma nieskończenie dużą masę oraz prędkość przed uderzeniem i po uderzeniu równą zero. Dla takiego przypadku uderzenia nie można napisać równania wynikającego z zasady zachowania pędu. Można wykorzystać jedynie hipotezę Newtona.



Rys. 3.70

Mamy więc:

$$-k = \frac{V_1 \cdot \cos \beta - 0}{-V \cdot \cos \alpha - 0}$$

Ponieważ rozpatrujemy uderzenie gładkiej kuli, składowa styczna prędkości w chwili uderzenia nie ulega zmianie. Mamy zatem $V \cdot \sin \alpha = V_1 \cdot \sin \beta$.

Wstawiając ten warunek do hipotezy Newtona, otrzymano wartość kąta odbicia kuli oraz jej prędkość po uderzeniu.

Kąt odbicia kuli po uderzeniu wynosi: $\operatorname{ctg} \beta = k \cdot \operatorname{ctg} \alpha$. Dla $\alpha = \frac{\pi}{6}$, kąt $\beta = \frac{\pi}{4}$.

Prędkość kuli po uderzeniu ma wartość:

$$V_1 = V \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = V \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3.11.2. Uderzenie nieswobodne

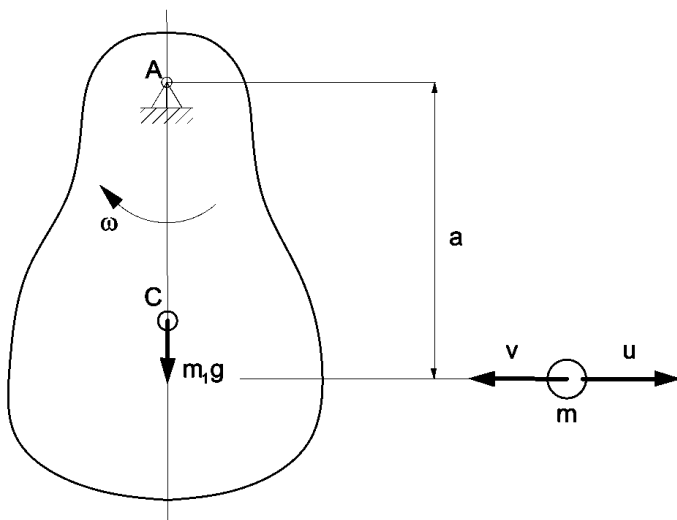
Uderzeniem nieswobodnym nazywamy uderzenie ciała, które jest osadzone obrotowo w stałym przegubie, tworząc wahadło fizyczne. Przykład takiego wahadła przedstawiono na rysunku poniżej.

Rozpatrzmy układ składający się z wahadła fizycznego, w które uderza kula z prędkością v w odległości a od przegubu A.

W czasie uderzenia kuli w wahadło powstaje impuls siły uderzenia w miejscu styku kuli z wahadłem oraz impuls reakcji w przegubie A. Impuls siły uderzenia

jest siłą wewnętrzną układu i w momencie uderzenia pozostaje tylko reakcja przegubowego zamocowania wahadła.

Wybierając za biegun przegub A, względem którego suma momentów impulsów sił jest równa zero, możemy na podstawie równania (e) wnioskować, że kręt rozpatrywanego układu względem tego bieguna przed uderzeniem jest równy krętowi po uderzeniu.



Rys. 3.71

Dla przedstawionego układu mamy:

$$m \cdot v \cdot a = J_A \omega - m \cdot u \cdot a \quad (i)$$

gdzie J_A jest momentem bezwładności wahadła względem osi obrotu, ω jest prędkością kątową wahadła po uderzeniu i u jest prędkością kuli po uderzeniu.

Otrzymano równanie, w którym są dwie niewiadome. Prędkość kuli i prędkość kątową wahadła po uderzeniu. Dodatkowy warunek umożliwiający wyznaczenie prędkości po uderzeniu, tak jak w przypadku uderzenia swobodnego, można wyznaczyć z hipotezy Newtona dla prędkości punktów styku ciał w miejscu zderzenia. Dla rozważanego wahadła mamy:

$$-k = \frac{\omega \cdot a - (-u)}{0 - v} \quad (j)$$

Układ równań (i) i (j) pozwala wyznaczyć prędkości obu ciał po uderzeniu.

Omawiając uderzenie swobodne, ograniczono się do zderzenia kul gładkich, czyli takich ciał, które przed i po uderzeniu poruszają się ruchem postępowym.

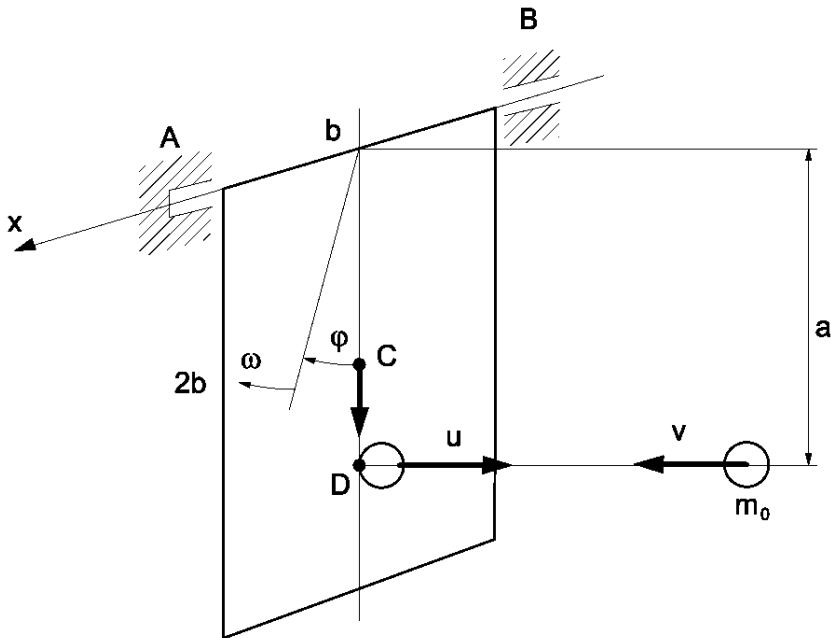
Jeśli chcielibyśmy rozpatrzyć uderzenie dowolnych ciał gładkich poruszających się ruchem płaskim, należy po zderzeniu wyznaczyć również zmianę prędkościątowej tych ciał wywołane uderzeniem. Zainteresowanych takim rodzajem uderzenia odsyłamy do literatury [3]. Dowolne uderzenie ciał poruszających się ruchem płaskim nazywamy mimośrodowym.

Przykład 3.18

Cienką płytę prostokątną o masie m i bokach b i $2b$, mogącą obracać się dookoła boku AB , ustawiono w położeniu pionowym. W środek uderzenia płyty uderza prostopadle do niej kula o masie m_0 z prędkością v . Wyznaczyć kąt o jaki odchyli się płyta po uderzeniu, jeśli współczynnik restytucji wynosi k . Opór rotu płyty w łożyskach A i B pominąć.

Rozwiązanie

Jest to uderzenie nieswobodne układu złożonego z prostokątnej płyty jako wahadła fizycznego i swobodnie poruszającej się kuli.



Rys. 3.72

W chwili uderzenia kuli w płytę powstanie w miejscu styku kuli z płytą impuls siły skierowany prostopadle do płyty. Impuls ten, działający jednocześnie na

płyte i na kulę, spowoduje wystąpienie impulsu reakcji w łożyskach A i B mocujących płytę. Traktując rozpatrywany układ złożony z płyty i kuli w całości, można przyjąć, że impuls siły powstały w miejscu uderzenia jest wewnętrznym impulsem sił i wykorzystać niezmiennosc krętu całego układu przed i po uderzeniu względem osi x przechodzącej przez łożyska A i B (w chwili uderzenia $\sum M_{ix} = 0$). Mamy zatem:

$$m_o \cdot v \cdot a = J_x \cdot \omega - m_o \cdot u \cdot a$$

gdzie $J_x = \frac{4}{3} m \cdot b^2$

Rozpatrywana płyta ma płaszczyznę symetrii, a więc środek uderzenia leży w tej płaszczyźnie w odległości a od osi obrotu:

$$a = \frac{J_x}{m \cdot y_c} = \frac{4 \cdot m \cdot b^2}{3 \cdot m \cdot b} = \frac{4}{3} \cdot b$$

Równanie wynikające z hipotezy Newtona dla prędkości punktów ciał w miejscu uderzenia ma postać:

$$-k = \frac{\omega \cdot a - (-u)}{0 - v}$$

Rozwiązując równania krętu i hipotezy Newtona względem prędkości kątowej płyty po uderzeniu, otrzymano:

$$\omega = \frac{m_o \cdot (1+k) \cdot v}{\left(m + \frac{4}{3} \cdot m_o\right) \cdot b}$$

Z twierdzenia o zmianie energii kinetycznej układu materialnego wyznaczono odchylenie prostokątnej płyty po uderzeniu:

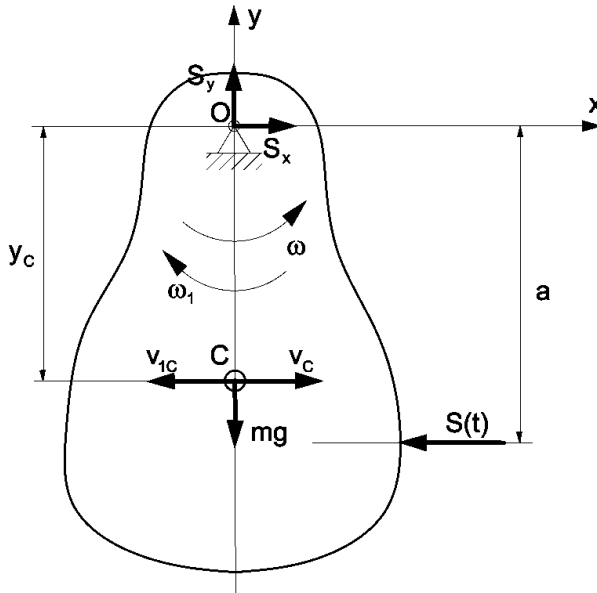
$$0 - \frac{J_x \cdot \omega^2}{2} = -m \cdot g \cdot (b - b \cdot \cos \varphi)$$

i ostatecznie:

$$\cos \varphi = 1 - \frac{2 \cdot m_o^2 \cdot (1+k)^2 \cdot v^2}{3 \cdot g \cdot b \cdot \left(m + \frac{4}{3} \cdot m_o\right)^2}$$

3.11.3. Środek uderzenia

Rozpatrzmy szczególny przypadek uderzenia dotyczący wahadła fizycznego. Niech wahadło posiada płaszczyznę symetrii prostopadłą do osi obrotu tego wahadła, w której znajduje się jego środek masy, jak przedstawiono na rysunku poniżej.



Rys. 3.73

Rozpatrując ruch wahadła pod wpływem impulsu siły $S(t)$, przyłożonej w odległości a od przegubu O , możemy zgodnie z równaniami (c) i (e) zapisać przyrost pędu i krętu tego wahadła. Oznaczmy prędkość kątową wahadła przed uderzeniem ω , a po uderzeniu ω_1 . Prędkość jego środka masy odpowiednio v_c i v_{1c} . Dla przyrostu pędu równanie (c) zrzutowane na oś x ma postać:

$$m \cdot (-v_{1c}) - m \cdot v_c = S_x - S \quad (k)$$

Dla przyrostu krętu względem przegubu O mamy:

$$-J \cdot \omega_1 - J \cdot \omega = -S \cdot a \quad (l)$$

gdzie J jest momentem bezwładności wahadła względem osi obrotu.

Po wstawieniu prędkości środka masy wahadła wynikającej z jego obrotu przed uderzeniem i po uderzeniu mamy:

$$\begin{aligned}v_c &= \omega \cdot y_c \\v_{1c} &= \omega_1 \cdot y_c\end{aligned}\tag{m}$$

Wstawiając (m) do równania (k) i wykorzystując równanie (l), wyznaczono impuls reakcji S_x powstający w przegubie O w czasie uderzenia. Impuls ten wynosi:

$$S_x = \left(\frac{J}{a} - m \cdot y_c \right) \cdot (\omega + \omega_1)\tag{n}$$

Wyznamy odległość „a” przyłożenia impulsu siły S , aby składowa impulsu reakcji S_x była równa zero. Na podstawie równania (n) mamy:

$$a = \frac{J}{m \cdot y_c}\tag{3.97}$$

gdzie J jest momentem bezwładności wahadła względem osi obrotu, m jego masą, a y_c odległością środka masy wahadła od osi obrotu.

Otrzymana zależność (3.97) opisuje **położenie środka uderzenia** wahadła, czyli punktu przyłożenia impulsu siły, który nie wywołuje impulsu reakcji w przegubie.

Należy zaznaczyć, że zależność (3.97) dotyczy wahadła posiadającego płaszczyzną symetrii. Dla wahadła o dowolnym kształcie należy przeprowadzić rozwiązanie bardziej ogólne i wyznaczyć dwie współrzędne środka uderzenia.

3.12. ZAKOŃCZENIE

Przedstawiony skrypt zawiera treści wykładów prowadzonych na wybranych kierunkach Wydziału Mechanicznego Politechniki Łódzkiej. Zakres tematyczny wykładów jest zgodny z przyjętym programem nauczania na tych kierunkach. Obecny program *mechaniki* jest dostosowany do wyznaczonego przez Ministerstwo minimum programowego i nie obejmuje zagadnień związanych z analizą dynamiczną ruchu kulistego ciała sztywnego oraz podstaw *mechaniki analitycznej*, w zakresie zasady prac przygotowanych i równań Lagrange'a dla układów holonomicznych. Szczególnie podstawy *mechaniki analitycznej*, które dawniej były w programie nauczania na wszystkich uczelniach technicznych są ważnym działem *mechaniki*, umożliwiającym rozwiązywanie poważnych zagadnień naukowych oraz inżynierskich. Z uwagi na brak omówienia tych zagadnień w przedstawionym skrypcie, czuję się w obowiązku podać literaturę dla chętnych pogłębienia wiedzy o ten dział *mechaniki*. Zaznaczam, że studiowanie ze zrozumieniem podanej przeze mnie literatury wymaga dobrej znajomości materiału zawartego w skrypcie oraz działów matematyki wyższej zawartych w programie studiów magisterskich.

Literatura uzupełniająca to pozycje w spisie literatury [3], [5], [6], [7].

Bibliografia

- [1] Huber M.T., Mechanika ogólna i techniczna. PWN, Warszawa 1956.
- [2] Engel Z., Giergiel J., Mechanika ogólna. PWN, Warszawa 1990.
- [3] Leyko J., Dynamika układów materialnych. PWN, Warszawa 1961.
- [4] Misiak J., Mechanika techniczna. WNT, Warszawa 1996.
- [5] Osiński Z., Mechanika ogólna. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1997.
- [6] Gutowski R., Mechanika analityczna. PWN, Warszawa 1971.
- [7] Skalmierski B., Mechanika. PWN, Warszawa 1977.
- [8] Mieszczerski I., Zbiór zadań z mechaniki. PWN, Warszawa 1959.

ISBN 978-83-7283-829-2