

KRZYSZTOF UŁAMEK
WIESŁAW PAWŁOWSKI

Katedra Geodezji, Kartografii Środowiska i Geometrii Wykreślnej
Politechniki Łódzkiej

KONSTRUOWANIE LINII ZBIEŻNYCH DO DANYCH W RYSUNKU ODRĘCZNYM

Opiniodawca: **dr hab. Edwin Koźniewski**

Tematem pracy jest poszukiwanie konstrukcji linii zbieżnej do danych przechodzącej przez zadany punkt oraz analiza rozwiązań tego zagadnienia pod kątem przydatności w rysunku odręcznym.

1. Wprowadzenie

Od czasu powstania kierunku architektura i urbanistyka na Politechnice Łódzkiej w 1974 roku zajęcia z rysunku odręcznego miały jasno określone założenia programowe. Miały uczyć integrować naukę i sztukę albo inaczej – wiedzę i intuicję. W obszarze nauki należałoby wymienić m.in. wiadomości o perspektywie, o budowie geometrycznej modelu, o technologii rysunkowej i malarskiej. Intuicja jest niezastąpiona w twórczym poszukiwaniu sposobów osiągnięcia równowagi kompozycyjnej, czy też w twórczej interpretacji materiału modelu różnymi fakturami rysunkowymi. Zakres integracji tych dwóch charakterystycznych składowych dla architektury na pewno jest w rysunku odręcznym ograniczony, ale szczególnie ważne jest aby proces ten dokonywał się od samego początku kształcenia, również wtedy gdy ze względu na braki w wiedzy i doświadczeniu nie można liczyć na sukcesy w tym zakresie przy projektowaniu. Tradycją kształcenia rysunku odręcznego na Wydziale Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska PŁ jest dbałość o zachowanie właściwych proporcji między tymi dwoma elementami, tak żeby żaden z nich nie zdominował drugiego i aby się wzajemnie uzupełniały.

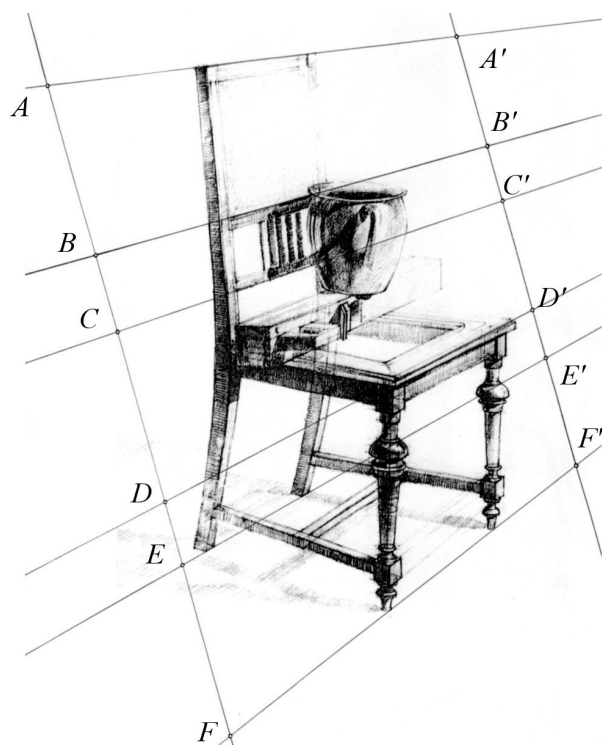
W rysunku odręcznym nie używa się linijek, ekierok, cyrkli i innych narzędzi poza ołówkiem, który zasadniczo traktowany jest jako źródło kreski, czasem tylko służy również do porównywania odcinków na rysunku. Ma to swoje uzasadnienie wynikające z celów jakim służy rysunek odręczny.

Jednym z problemów rysunku odręcznego jest zagadnienie geometrii perspektywy, ale nie jest to cel podstawowy, a właściwie jest to środek do realizacji innych nadrzędnych celów, takich jak ukazanie struktury kompozycji, zaakcentowanie elementów ważnych, pokazanie drugorzędnych oraz tła, a dodatkowo w taki sposób, aby wywołać iluzję przestrzeni, relacje oświetleniowe i właściwości faktury materiałów, z których jest zbudowana kompozycja. Można to ująć obrazowo, że perspektywa jest tym dla rysunku, czym zdrowie dla człowieka. Jest podstawą, na której można budować dalej; od poprawnego perspektywicznie rysunku oczekujemy nie tylko aby był, ale również, by powiedział nam coś dowcipnego albo coś ciekawego, a może mądrego lub nawet przy okazji pięknego.

Przy rysowaniu odręcznym form z natury lub takich, które istnieją tylko w naszej wyobraźni, ale chcemy, aby się zmaterializowały (projekty) nie używamy przyborów geometrycznych, by uniknąć braku autentyczności właściwej obrazom geometrycznie wyidealizowanych form, które w rzeczywistości (materiałnie wykonane) są o wiele mniej doskonałe. W rysunku odręcznym niedoskonałość prowadzenia linii jest traktowana jako wartość, ponieważ wprowadza wrażenie występowania faktury na rysowanych krawędziach i powierzchniach. Dzięki temu rysunek odręczny staje się bardziej zhumanizowaną formą odwzorowania rzeczywistości. Dzieje się tak również dlatego, że w sposobie zapisu graficznego (w rodzaju kreski) możemy odnaleźć subiektywne odczucia autora dotyczące tematu pracy.

W tym kontekście problemem o wiele szerszym, niż temat poruszany w artykule jest użyteczność dorobku teorii rzutowania w pracy artystycznej. Girard Desargues, architekt, nazywany przez niektórych ojcem geometrii rzutowej, pisał ponoć swoje prace na potrzeby swoich znajomych artystów [7]. Obecnie zauważyć można raczej brak zainteresowania wykorzystaniem tej wiedzy ze strony rysowników, a także brak prac teoretycznych, które uwzględniałyby poziom użyteczności konstrukcji geometrycznych w tym specyficznym zastosowaniu. Celem tej pracy jest analiza jednego z podstawowych zagadnień geometrycznych stosowanych w rysunku odręcznym właśnie pod kątem użyteczności.

Zagadnienie poruszane w tej pracy jest zagadnieniem geometrycznym, ale intencją autorów jest przedstawienie go w tym szerszym kontekście, aby łatwiejsze było zrozumienie oceny przyjętych rozwiązań.



Rys.1. Wykonany odręcznie rysunek krzesła z podkreślonymi liniami zbieżnymi do punktu Z, który nie mieści się w obrębie rysunku (rys. K. Ułamek)

Fig.1. Freehand drawing chairs highlighted lines to the convergent point Z, which does not fall within the drawing (by K. Ułamek)

Rysunek 1 pokazuje typowy problem, z jakim stykają się studenci: trzeba narysować z widoku obiekt, który ma wiele linii, o których wiemy z obserwacji, że są równoległe, ale na rysunku nie mieszczą się żadne punkty zbiegu dla nich. Nie ma też możliwości skorzystania z horyzontu, który np. z powodów kompozycyjnych znalazł się poza arkuszem. Natomiast można z obserwacji przenieść na rysunek co najmniej dwie spośród wielu linii równoległych do danego kierunku.

W tym przypadku można wykorzystać własności podobieństwa trójkątów. Proporcje odpowiadających sobie odcinków są równe skali podobieństwa tych trójkątów.

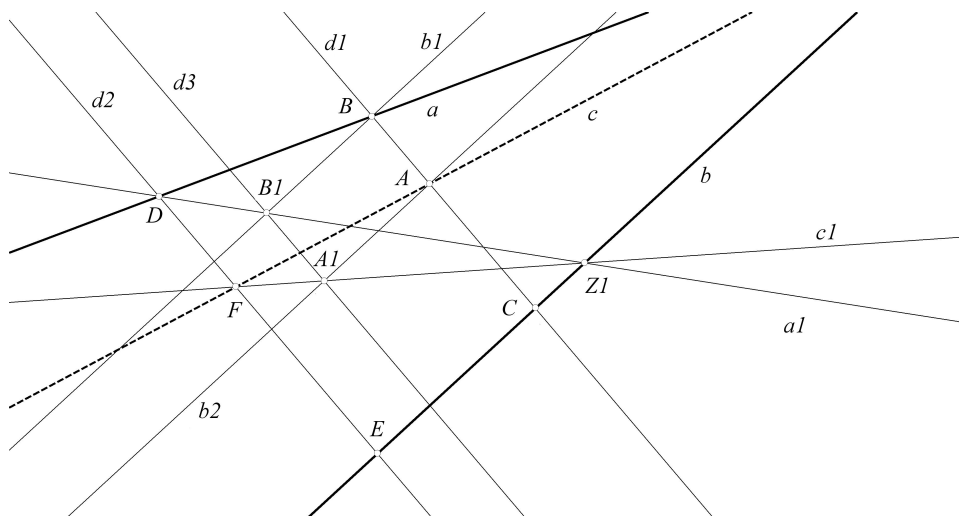
$$\triangle ABZ \sim \triangle A'B'Z$$

$$\triangle BCZ \sim \triangle B'C'Z$$

$$\triangle CDZ \sim \triangle C'D'Z$$

$$|AB| / |A'B'| = |BC| / |B'C'| = |CD| / |C'D'| \quad (1)$$

2. Konstrukcja poszukiwania półprostej zbieżnej do dwóch półprostych a i b przechodzącej przez punkt A



Rys. 2. Konstrukcja wyznaczania prostej zbieżnej do dwóch prostych a i b przechodzącej przez punkt A

Fig.2. The construction of setting a straight line convergent on two straight lines a and b and crossing point A

Dane mamy dwie półproste a i b mające swój początek w punkcie Z , który nie mieści się w granicach rysunku oraz punkt A leżący poza nimi (rys. 2). Rysujemy dowolną prostą $d1$ przez punkt A , tak aby przecinała ona półproste a i b w granicach naszego rysunku. Otrzymujemy punkt B na przecięciu $d1$ z a i punkt C na przecięciu $d1$ z b . Obierzmy na półprostej b dowolny punkt E różny od C . Rysujemy prostą równoległą do $d1$ przechodzącą przez E . Nazwijmy ją $d2$. Punkt wspólny tej prostej i półprostej a nazwijmy punktem D . Obierzmy na półprostej b dowolny punkt $Z1$ różny od E . Rysujemy prostą $a1$ przez D i $Z1$. Rysujemy prostą $b1$ przechodzącą przez punkt B i równoległą do b . Otrzymujemy punkt $B1$ na przecięciu $a1$ z $b1$. Rysujemy prostą $d3$ przechodzącą przez $B1$ i równoległą do $d1$. Rysujemy prostą $b2$ przechodzącą przez A i równoległą do b . Otrzymujemy punkt $A1$ na przecięciu prostej $b2$ z $d3$. Rysujemy prostą $c1$ przechodzącą przez punkty $A1$ i $Z1$. Otrzymujemy punkt F na przecięciu tej prostej z prostą $d2$. Półprosta c przechodząca przez A i F jest szukaną półprostą, ponieważ:

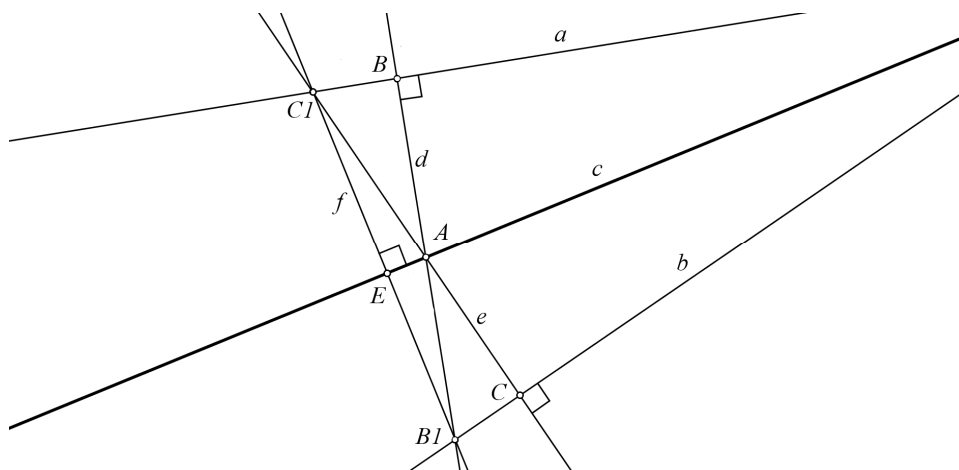
$$|DF| / |FE| = |BA| / |AC| \quad (2)$$

Konstrukcję tę można przedstawić również w formie zastosowania twierdzenia Desarguesa. Twierdzenie to mówi nam, że jeżeli dwa trójkąty położone są na płaszczyźnie w taki sposób, że proste wyznaczone przez odpowiednie pary ich wierzchołków przynależą do jednego pęku, to proste zawierające boki trójkąta

przecinają się w punktach, które są współliniowe. Środek pęku, do którego należą proste oparte na wierzchołkach trójkątów Desargues nazwał środkiem perspektywy dla trójkątów, a prosta, na której leżą punkty przecięcia przedłużeń odpowiednich boków, została nazwana osią perspektywy. W naszym przypadku mamy trójkąty $DBIB$ i $FAIA$, których wierzchołki należą do prostych d_2 , d_3 , d_1 . Proste te są równoległe, a więc środkiem perspektywy jest punkt niewłaściwy. Ośią perspektywy w naszym przypadku jest prosta b , ponieważ proste a_1 i c_1 mają z prostą b punkt wspólny (ZI), także proste b_1 i b_2 mają z b w punkcie niewłaściwym punkt wspólny. W tej sytuacji z twierdzenia wynika już bezpośrednio, że proste a i c również przecinają się w punkcie na prostej b .

3. Konstrukcja poszukiwania prostej zbieżnej do półprostych a i b przechodzącej przez punkt A – metoda przy użyciu ekierki

Mamy dwie półproste a i b mające swój początek w Z , który nie mieści się na rysunku i punkt A leżący poza nimi. Rysujemy prostą prostopadłą do a przechodzącą przez A . Na przecięciu z półprostą b otrzymujemy punkt B_1 . Rysujemy prostą prostopadłą do b przechodzącą przez A . Na przecięciu z półprostą a otrzymujemy punkt C_1 . Przez punkty B_1 i C_1 rysujemy prostą f , a następnie do niej prostopadłą przechodzącą przez A . Otrzymana półprosta c jest szukaną. Ta prosta konstrukcja oparta jest o twierdzenie, że wszystkie trzy wysokości w trójkącie (w naszym przypadku jest to trójkąt B_1C_1Z) przecinają się w jednym punkcie. Ma ona tylko jedną wadę: trzykrotnie wymaga narysowania kąta prostego. Zrobienie tego „na oko” bez ekierki dawałoby wynik zdecydowanie gorszy niż metody poprzednie. Wynika to z tego, że oko nie widzi wymiarów poziomych i pionowych tak samo. Wymiary pionowe są widziane jako dłuższe o około 3% niż poziome i dlatego np. jeżeli narysujemy poprawny dla oka kwadrat z przekątną ustawioną w pionie, to w takim kwadracie okaże się po wykonaniu pomiarów, że wewnętrzne kąty górny i dolny są rozwarte, a lewy i prawy ostre. Ze względu na to ta metoda może być stosowana raczej przy użyciu ekierki (fizycznie ekierką może być np. czysta prostokątna kartka papieru).



Rys. 4. Konstrukcja poszukiwania prostej zbieżnej do a i b przechodzącej przez punkt A oparta na twierdzeniu o wysokościach w trójkącie

Fig. 4. The construction of setting a straight line convergent on two straight lines a and b and crossing point A based on the theorem that the three altitudes intersect in a single point, called the orthocenter of the triangle

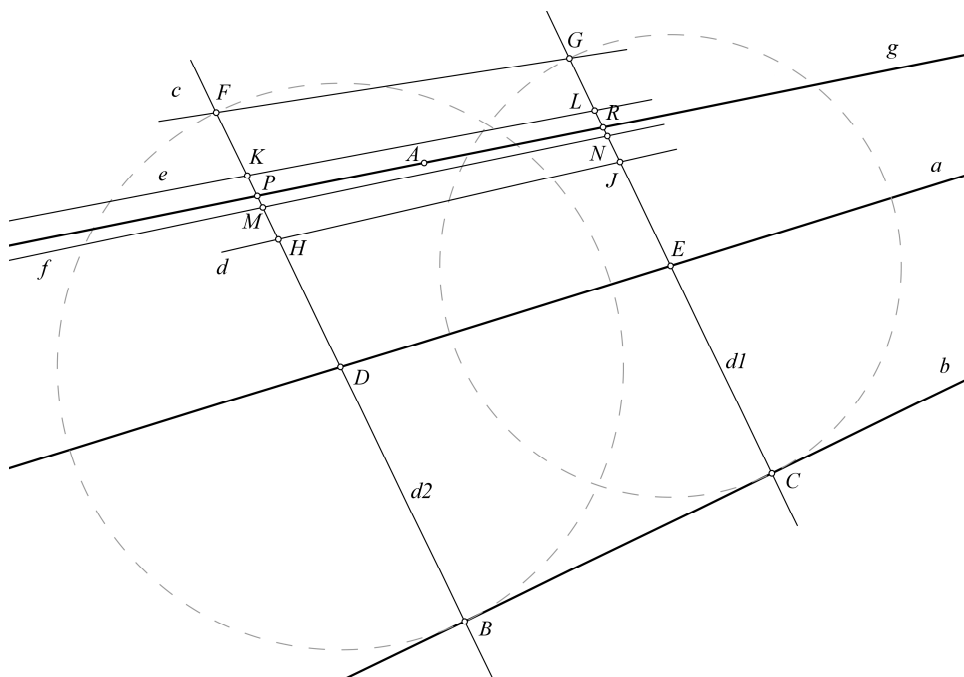
4. Uproszczona konstrukcja poszukiwania półprostej zbieżnej do dwóch półprostych a i b przez punkt A

Dane mamy dwie półproste a i b mające swój początek w punkcie Z , który nie mieści się w granicach rysunku oraz punkt A nie leżący pomiędzy nimi¹. W takim przypadku na początku chcemy przekształcić tę sytuację na taką, w której punkt A będzie się znajdował pomiędzy prostymi zbieżnymi do Z . Aby to uzyskać rysujemy dwie proste wzajemnie równoległe $d1$ i $d2$, takie, które w granicach naszego rysunku przecinają się z półprostymi a i b w punktach B , C , D i E . Rysujemy okrąg o środku w punkcie E i promieniu równym odcinkowi EC . Otrzymujemy punkt G na przecięciu prostej $d1$ z tym okręgiem. Rysujemy okrąg o środku w punkcie D i promieniu równym odcinkowi DB . Otrzymujemy punkt F na przecięciu prostej $d2$ z tym okręgiem. Rysujemy półprostą c przez punkty F i G (ma ona początek również w punkcie Z).

¹ Dla jasności zapisu definiuję, że punkt A leży pomiędzy dwiema półprostymi o jednym punkcie początkowym Z wtedy, gdy jest możliwe utworzenie takiego odcinka, do którego należałby punkt A , którego początek należałby do jednej, a koniec do drugiej półprostej.

Jeżeli po wykonaniu tej konstrukcji nadal punkt A nie leży pomiędzy półprostą c i półprostą a , to konstrukcję należy powtórzyć, przyjmując zamiast promienia EC jego wielokrotność analogicznie należy zwielokrotnić promień DB , przy czym każdorazowo wykorzystujemy tę samą wielokrotność.

Jeżeli mamy już półproste c i a oraz punkt A pomiędzy nimi, to wyznaczamy środek odcinka FD (oznaczymy go jako H) i środek odcinka GE (oznaczymy go jako J). Przez H i J możemy narysować półprostą d , która również ma początek w Z . Analogicznie przez środek odcinka HF (punkt K) i środek odcinka JG (punkt L) możemy narysować prostą e . W ten sposób poprzez kolejne połówkowe podziały (możliwe są oczywiście również inne podziały, ale ze względów praktycznych rzadko stosowane) możemy otrzymywać kolejne półproste zbieżne do danych, przy czym zagęszczenie podziałów wprowadzamy tak, aby były one coraz bliżej punktu A . W naszym przykładzie tak powstały półproste e i f , które uznajemy, że są już na tyle blisko punktu A , aby przez niego narysować półprostą szukaną. Staramy się wówczas przeciąć nią odcinki KM i LN w zbliżonych proporcjach.



Rys. 3. Uproszczona konstrukcja wyznaczania prostej zbieżnej do danych prostych a i b przechodzącej przez punkt A

Fig. 3. A simplified construction of setting a straight line convergent on straight lines a and b and crossing point A

Od dokładności tego ostatniego podziału zależy oczywiście wielkość błędu jaki otrzymamy, ale zauważmy, że gdyby kąt pomiędzy półprostymi, pomiędzy którymi leży punkt A wynosił np. 40° , to już 6 podział daje nam błąd mniejszy

od 1° , nawet gdyby przyjąć, że ostatnia półprosta, do której należy punkt A jest narysowana dokładnie równoległe do tej sąsiedniej, która jest bliżej A. Taki błąd w rysunku odręcznym jest zupełnie niewidoczny.

5. Podsumowanie

Brak przyrządów geometrycznych wprowadza przy wykonywaniu niektórych elementarnych konstrukcji element ryzyka, na ile ta konstrukcja będzie dokładnie wykonana. Pojawiają się pytania: jakie pojawią się błędy i jak je minimalizować. W omawianych konstrukcjach mamy właściwie cztery elementarne konstrukcje: prostopadłość prostych, równoległość prostych, podział odcinka na pół oraz przeniesienie odcinka w inne miejsce na rysunku. Problem odręcznego rysowania prostych prostopadłych omówiono w punkcie 3. Przeniesienie odcinka nie nastręcza trudności; możemy odpowiedni odcinek odmierzyć na ołówku i przenieść w inne miejsce. Jeżeli jest on dłuższy możemy go podzielić na mniejsze i przenieść części. Podział odcinka na części też nie jest obciążony dużym błędem. Możemy nawet długi odcinek podzielić dość dokładnie na połowę przez odejmowanie od jego końców każdorazowo odcinków równych. W ten sposób zmniejszamy ewentualny błąd podziału do minimum. Standardowo na zajęciach z rysunku odręcznego używane są arkusze o wymiarach 50 na 70 cm. Na takim arkuszu długie odcinki mogące wystąpić w konstrukcji mają maksymalnie około 70 cm. Błąd, jaki się może pojawić zwykle nie przekracza 2 mm. To bardzo mało w skali tego rysunku. Natomiast problemem jest narysowanie dwóch prostych równoległych. Rysowanie "na oko" dwóch prostych, które mają być do siebie równoległe z naszego doświadczenia jest najczęściej obciążone dużym błędem. Stosunkowo łatwo jest narysować proste równoległe poziome lub pionowe, ale już skośne do krawędzi arkusza nie. Dodatkowym utrudnieniem, czego nie widać na dołączonych rysunkach, jest występowanie w przypadku zaawansowanej pracy nad skomplikowanym modelem złudzeń optycznych (np. złudzenia Heringa, Zöllnera) [5].

W pracy przedstawiono trzy konstrukcje rozwiązujące problem wyznaczania linii zbieżnej do dwóch danych przez określony punkt. Dwie pierwsze dają nam wyniki jednoznaczne, natomiast trzecia wynik przybliżony. Pomimo tego trzecia konstrukcja jest najczęściej wybierana podczas wykonywania rysunków odręcznych. Wpływ mają na to trzy czynniki:

1. prostota samej konstrukcji,
2. skromny zestaw narzędzi jaki jest nam potrzebny – do wykonania jej z dostateczną precyzją wystarczą dwa ołówki, z których jeden jest traktowany jak linijka,
3. uniwersalność wykorzystania elementów pośrednich konstrukcji; w trakcie wykonywania konstrukcji dla danego układu linii zbieżnych i danego punktu otrzymujemy również pośrednie linie zbieżne, które możemy wykorzystać przy rysowaniu kolejnej linii przez inny punkt, a takie sytuacje zdarzają się bardzo często.

Literatura

- [1] **Andrzejowski Z., Pawłowski W., Przewłocki S.:** Geometria wykreślna, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź 1998.
- [2] **Bartel K.:** Perspektywa malarska, Tom I, Książnica-Atlas, Lwów Warszawa 1928.
- [3] **Grochowski B.:** Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną, PWN, Warszawa 1988.
- [4] **Przewłocki S.:** Geometria wykreślna w budownictwie, Arkady, Warszawa 1997.
- [5] **Suzin L. M.:** Perspektywa wykresowa dla architektów, Arkady, Warszawa 1998.
- [6] **Ułamek K.:** Three constructions useful during free-hand drawing of geometrical forms based of the Thales' theorem and triangle similarity properties. Proceedings of 6-th Conference "Geometry and Graphics", Ustroń 2009.
- [7] **Ciesielski K., Pogoda Z.:** Diamenty matematyki, Pruszyński i S-ka, Warszawa 1997.

THE CONSTRUCTION OF SETTING A STRAIGHT LINE CONVERGENT ON TWO STRAIGHT LINES IN FREE-HAND DRAWING

Summary

The constructions show the problem that the students face: they have to draw a still life object which has many lines that we know are parallel. In the drawing, however, there are not any vanishing points and it is not possible to make use of the horizon which, for compositional reason, is located out of the drawing. Anyway, thanks to observation, we can place at least two from many lines parallel to a given direction into a drawing. This article discusses the various geometric designs solve this problem.