

AUTOREFERAT

1. IMIĘ I NAZWISKO

Paweł Zaprawa

2. DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

- **doktor nauk matematycznych**

Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej, Politechnika Łódzka (1999)

Tytuł rozprawy: Zagadnienia ekstremalne w klasach funkcji typowo-rzeczywistych

Promotor: Dr hab. Leopold Koczan

- **magister matematyki**

Wydział Matematyczno-Fizyczno-Chemiczny, UMCS (1991)

Tytuł pracy: Obszary Smirnowa

Promotor: Prof. dr hab. Jan Krzyż

3. INFORMACJA O ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- **1991–2000**

asystent, Politechnika Lubelska (Wydział Mechaniczny)

- **2000–**

adiunkt, Politechnika Lubelska (Wydziały: Mechaniczny, Podstaw Techniki)

4. WSKAZANIE OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

4.1 TYTUŁ OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Zbiory Koebego i zbiory pokrycia dla klas funkcji analitycznych

4.2 LISTA PRAC STANOWIĄCYCH OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE

[H1] L.Koczan, P.Zaprawa, On covering problems in the class of typically real functions, (2005) Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A, 59, 51–65.

- [H2] M.Sobczak-Kneć, P.Zaprawa, Covering domains for classes of functions with real coefficients, (2007) *Complex Var. Elliptic Equ.*, 52 (6), 519–535.
- [H3] L.Koczan, P.Zaprawa, Koebe domains for the classes of functions with ranges included in given sets, (2008) *J. Appl. Anal.*, 14 (1), 43–52.
- [H4] L.Koczan, P.Zaprawa, On functions convex in the direction of the real axis with real coefficients. (2011) *Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin*, 18 (2), 321–335.
- [H5] L.Koczan, P.Zaprawa, On functions convex in the direction of the real axis with a fixed second coefficient, (2011) *Appl. Math. Comput.*, 217 (15), 6644–6651.
- [H6] P.Zaprawa, Koebe sets for certain classes of circularly symmetric functions, (2016) *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, 354 (3), 245–252.
- [H7] P.Zaprawa, On Close-to-star functions, (2009) *Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin*, 16 (3), 469–480.
- [H8] L.Koczan, P.Zaprawa, Covering problems for functions n -fold symmetric and convex in the direction of the real axis, (2012) *Appl. Math. Comput.*, 219 (3), 947–958.
- [H9] L.Koczan, P.Zaprawa, Koebe sets for the class of functions convex in two directions, (2017) *Turk. J. Math.*, 41, 282–292.

LISTA PRAC NIE WCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA

PRACE Z ZAKRESU MATEMATYKI

- [P1] L.Koczan, P.Zaprawa, On domains of univalence for the class of typically real odd functions, (2001) *Zesz. Nauk. Politech. Rzesz.*, Mat. 190 (25), 81–89.
- [P2] L.Koczan, P.Zaprawa, Covering domains for the class of convex n -fold symmetric functions with real coefficients, (2002) *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz, Ser. Rech. Deform.*, 37, 129–135.
- [P3] L.Koczan, P.Zaprawa, Domains of univalence for typically-real odd functions, (2003) *Complex Variables, Theory Appl.*, 48 (1), 1–17.
- [P4] L.Koczan, P.Zaprawa, Koebe domains for the class of typically real odd functions, (2005) *Tr. Petrozavodsk. Gos. Univ., Ser. Mat. (Probl. Anal. Issues Anal.)*, 12, 51–70.

- [P5] P.Zaprawa, Covering problems for the class of functions convex in the direction of the imaginary axis, (2006) Scientific Bulletin of Chełm, Sec. of Math. and Comp. Science, 1, 137–143.
- [P6] L.Koczan, P.Zaprawa, Covering domains for the class of typically real odd functions, (2006) Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A, 60, 23–30.
- [P7] M.Sobczak-Kneć, P.Zaprawa, On problems of univalence for the class $TR(1/2)$, (2007) Tr. Petrozavodsk. Gos. Univ., Ser. Mat. (Probl. Anal. Issues Anal.), 14, 67–75.
- [P8] P.Zaprawa, On coefficients' estimates of concave univalent functions, (2010) J. Math. Appl., 32, 109–116.
- [P9] L.Koczan, M.Sobczak-Kneć, P.Zaprawa, On functions convex in the direction of the imaginary axis with real coefficients, (2010) Demonstr. Math., 43 (3), 545–559.
- [P10] P.Zaprawa, Distortion theorems for certain subclasses of typically real functions, (2012), Stud. Univ. Babes-Bolyai Math., 57 (2), 301–308.
- [P11] L.Koczan, P.Zaprawa, Koebe domains for some classes of n -fold symmetric functions , W: 60 years of analytic functions in Lublin in memory of our professors and friends Jan G. Krzyż, Zdzisław Lewandowski and Wojciech Szapiel : Monographs, [Red:] Szynal Jan - Lublin: University of Economics and Innovation , 2012, 127–137.
- [P12] L.Koczan, P.Zaprawa, The new method of determining Koebe domains for the class of typically real functions under Montel's normalization, (2014), Turk. J. Math., 38, 246–251.
- [P13] P.Zaprawa, On the Fekete-Szego problem for classes of bi-univalent functions, (2014), Bull. Belg. Math. Soc. - Simon Stevin, 21 (1) , 169–178.
- [P14] P.Zaprawa, Estimates of initial coefficients for bi-univalent functions, (2014), Abstr. Appl. Anal., 2014, art. 357480.
- [P15] L.Koczan, P.Zaprawa, On circularly symmetric functions, (2014), J. Math. Appl., 37, 59–66.
- [P16] L.Koczan, P.Zaprawa, Covering problems for functions n -fold symmetric and convex in the direction of the real axis II, (2015), Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 38 (4), 1637–1655.

- [P17] P.Zaprawa, Second Hankel determinants for the class of typically real functions, (2016), *Abstr. Appl. Anal.*, Vol. 2016, art. 3792367, 7 pages.
- [P18] L.Koczan, P.Zaprawa, Circularly symmetric locally univalent functions, (2016), *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 39 (4), 1615–1635.
- [P19] H.M.Srivastava, D.Răducanu, P.Zaprawa, A certain subclass of analytic functions defined by means of differential subordination, (2016), *Filomat*, 30, No. 14, 3743–3757.
- [P20] P.Zaprawa, Third Hankel determinants for subclasses of univalent functions, (2017), *Mediterr. J. Math.*, 14 (1), art.19.
- [P21] M.Figiel, A.Futa, P.Zaprawa, On coefficients problems for typically real functions related to Gegenbauer polynomials, (2017), *Mediterr. J. Math.*, 14 (2), art.53.
- [P22] P.Zaprawa, On the conjecture of Hayami and Owa concerning the class $\mathcal{R}(\alpha)$, (2017), *J. Appl. Anal.*, 23 (1), 25–32.
- [P23] H.Orhan, P.Zaprawa, Third Hankel determinants for starlike and convex functions of order alpha, *Bull. Korean Math. Soc.*, doi: 10.4134/BKMS.b160916.
- [P24] D.Răducanu, P.Zaprawa, Second Hankel determinant for close-to-convex functions, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*, doi: 10.1016/j.crma.2017.09.006.
- [P25] P. Zaprawa, On the Fekete-Szegő type functionals for starlike and convex functions, *Turk. J. Math.*, doi: 10.3906/mat-1702-120.

PRACE Z ZAKRESU TECHNIKI

- [T1] T.Klepka, P.Zaprawa, Analiza konstrukcji optotelekomunikacyjnych mikro-kanalów o kształtach złożonych, (2011) *Postępy Nauki i Techniki*, 10, 72–80.
- [T2] J.Szerafin, P.Zaprawa, Analityczny opis przepływu dyspersji cementowej w przewodach kołowych, W: *Projektowanie i sterowanie procesami*, Politechnika Lubelska, 2013, 61–75.
- [T3] J.Szerafin, P.Zaprawa, The analysis of selected rheological models of the cement dispersion in the pipe flow, (2015), *Applied Mechanics and Materials*, 791, 321–327.
- [T4] T.Klepka, P.Zaprawa, The influence of the shape of a polymer wall on selected mechanical properties, (2015), *Applied Mechanics and Materials*, 791, 211–216.

- [T5] D.Ghiculescu, T.Klepka, P.Zaprawa, The concept of robotic station for measurement of the friction force between fibre-optic cable and duct, (2016), Applied Mechanics and Materials, 844, 44–49.

ZBIORY KOEBEGO I ZBIORY POKRYCIA DLA KLAS FUNKCJI ANALITYCZNYCH

1. UWAGI HISTORYCZNE

Zagadnienia związane ze zbiorami wartości przyjmowanych przez funkcje analityczne są głęboko zakorzenione w geometrycznej teorii funkcji analitycznych. Należą, obok problemów współczynnikowych, do klasycznych problemów pojawiających się już w początkowym okresie rozwoju tej teorii. Źródłem tych zagadnień są prace powstałe w pierwszych dwóch dekadach XX wieku.

W 1907 Koebe [32] sformułował hipotezę dotyczącą nieprzyjmowanych wartości przez funkcje analityczne i jednoliste, mające w kole jednostkowym Δ rozwinięcie w szereg Taylora postaci $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$. Klasę takich funkcji oznaczamy przez $\mathcal{S}$. Mianowicie, Koebe przewidywał, że moduł nieprzyjętej wartości musi być niemniejszy niż $1/4$. Dowód tego faktu podał w 1916 Bieberbach w następującym twierdzeniu, zwanym często twierdzeniem Koebe-Bieberbacha.

Twierdzenie 1.1 ([3]). *Jeśli $f \in \mathcal{S}$ i $d \notin f(\Delta)$, to $|d| \geq 1/4$. Co więcej, $d = -e^{-i\alpha}/4$ wtedy i tylko wtedy gdy $f(z) = \frac{z}{(1-e^{i\alpha}z)^2}$.*

Bieberbach w dowodzie wykorzystał operator $f \mapsto df(z)/(d - f(z))$, który przy założeniach powyższego twierdzenia zachowuje jednolistość, oraz udowodniony właśnie fakt, że $|a_2| \leq 2$. W literaturze główną część Twierdzenia 1.1 często formułuje się w następujący sposób.

Twierdzenie 1.2. *Jeśli $f \in \mathcal{S}$, to $\Delta_{1/4} \subset f(\Delta)$.*

W tym samym czasie publikowane są pierwsze twierdzenia dotyczące oszacowania wyrażeń $|f(z)|$ i $|f'(z)|$, gdy f należy do ustalonej klasy funkcji. Autorem wyników dla klasy $\mathcal{S}$ był Koebe. Wykazał, że

Twierdzenie 1.3. *Jeśli $f \in \mathcal{S}$, to*

(1.1)

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{|z|}{(1-|z|)^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}.$$

Także w dowodzie ww. faktów (zwanymi twierdzeniami Koebe o pokryciu i zniekształceniu) wykorzystuje się oszacowanie $|a_2| \leq 2$ dla funkcji należących do $\mathcal{S}$. Jak widać, Twierdzenie 1.3 daje również informacje o wartościach

przyjmowanych, a także nieprzyjmowanych, przez funkcje jednolistne. Biorąc maksimum wyrażenia $|z|/(1 + |z|)^2$ po wszystkich $z \in \Delta$ otrzymujemy stałą $1/4$ występującą w tezie Twierdzenia 1.2.

Z biegiem lat, w geometrycznej teorii funkcji analitycznych zainteresowano się innymi klasami funkcji - zwykle podklasami $\mathcal{S}$, ale także rodzinami funkcji niejednolitych. Pojawiły się nowe problemy badawcze, z których warto wymienić zagadnienia związane z punktami ekstremalnymi i podpierającymi danej klasy, kryteria jednolistości i inne problemy związane z jednolistością i wielolistością, zagadnienia związane z podporządkowaniem (także różniczkowym). Niemniej jednak, klasyczne zagadnienia związane z wartościami przyjmowanymi i nieprzyjmowanymi przez funkcje ustalonej rodziny pozostają w głównym nurcie zainteresowań geometrycznej teorii funkcji analitycznych.

Nieustające zainteresowanie geometryczną teorią funkcji analitycznych wiąże się także z licznymi możliwymi zastosowaniami elementów tej teorii. Należy tu przede wszystkim wspomnieć o znaczeniu odwzorowań konforemnych w rozwiązywaniu licznych problemów mechaniki płynów, termodynamiki czy elektrotechniki związanych z równaniem Laplace'a. W aerodynamice, dzięki metodom geometrycznej teorii funkcji analitycznych badane są przepływy wokół profili stosowanych w lotnictwie. W hydrodynamicznych modelach Hele-Shawa dynamika przepływów opisywana jest równaniem Löwnera; istotne w praktyce są niezmiennie w czasie geometryczne własności obrazów takie jak gwiazdistość czy wypukłość w ustalonym kierunku.

2. PODSTAWOWE DEFINICJE

Ze względu na fundamentalne w geometrycznej teorii funkcji analitycznych twierdzenie Riemanna o odwzorowaniu, będziemy rozważali funkcje analityczne w kole jednostkowym $\Delta \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Funkcje takie mają więc rozwinięcie w szereg Taylora postaci

$$(2.1) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad z \in \Delta.$$

Klasę wszystkich funkcji analitycznych w kole Δ postaci (2.1) będziemy oznaczali symbolem $\tilde{\mathcal{A}}$. Jeśli dodatkowo założymy, że f spełnia warunki klasycznej normalizacji: $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, to funkcje takie mają rozwinięcie w szereg Taylora

$$(2.2) \quad f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots, \quad z \in \Delta,$$

a klasę wszystkich funkcji analitycznych mających powyższe rozwinięcie oznaczamy symbolem $\mathcal{A}$.

Dla ustalonej klasy $A \subset \mathcal{A}$ przyjmujemy następujące określenia.

Definicja 2.1. Zbiór $K_A \equiv \bigcap_{f \in A} f(\Delta)$ nazywamy zbiorem Koebego klasy A .

Definicja 2.2. Zbiór $L_A \equiv \bigcup_{f \in A} f(\Delta)$ nazywamy zbiorem pokrycia klasy A .

Tak zdefiniowane pojęcie zbioru Koebego pojawia się po raz pierwszy w pracy [33] Krzyża i Reade'a z 1967.

Równoległe do nazwy zbiór Koebego (zbiór pokrycia) używana bywa nazwa obszar Koebego (obszar pokrycia). Jednakże można podać przykłady rodzin funkcji analitycznych, dla których zbiory K_A bądź L_A nie są obszarami. Z tego powodu właściwym jest określenie zbiór Koebego (zbiór pokrycia).

W literaturze pojawiają się także pojęcia: stała Koebego i stała pokrycia. Stałą Koebego jest promień największego koła $\Delta_r \equiv \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ zawartego w zbiorze K_A danej klasy A . Podobnie, stałą pokrycia nazywamy promień najmniejszego koła Δ_r zawierającego zbiór pokrycia L_A klasy A . Stałe te, w pewnych przypadkach, mogą być uzyskane w łatwy sposób z twierdzeń o pokryciu dla klasy A , analogicznych do Twierdzenia 1.3.

Definicje 2.1 i 2.2 zostały uogólnione w [H1] w następujący sposób. Niech D będzie niepustym podzbiorem zbioru Δ i niech $A \subset \mathcal{A}$.

Definicja 2.3. Zbiór $K_A(D) \equiv \bigcap_{f \in A} f(D)$ nazywamy zbiorem Koebego klasy A nad zbiorem D .

Definicja 2.4. Zbiór $L_A(D) \equiv \bigcup_{f \in A} f(D)$ nazywamy zbiorem pokrycia klasy A nad zbiorem D .

W szczególności, gdy $D = \Delta$, mamy $K_A(\Delta) = K_A$ oraz $L_A(\Delta) = L_A$.

Podstawowe własności uogólnionych zbiorów Koebego oraz zbiorów pokrycia opisane zostały w następujących twierdzeniach.

Twierdzenie 2.1 (H1, Thm.1). Dla ustalonej klasy $A \subset \mathcal{A}$, zbiór $K_A(D)$ posiada następujące własności:

1. jeśli wszystkie funkcje $f \in A$ mają współczynniki rzeczywiste, a zbiór D jest symetryczny względem osi rzeczywistej, to zbiór $K_A(D)$ jest symetryczny względem osi rzeczywistej,
2. jeśli wszystkie funkcje $f \in A$ są nieparzyste i mają współczynniki rzeczywiste, a zbiór D jest symetryczny względem zarówno osi rzeczywistej, jak i urojonej, to zbiór $K_A(D)$ jest symetryczny względem obu osi płaszczyzny zespolonej,
3. jeśli $D_1 \subset D_2$, to $K_A(D_1) \subset K_A(D_2)$,
4. jeśli $A_1, A_2 \subset \mathcal{A}$ i $A_1 \subset A_2$, to $K_{A_2}(D) \subset K_{A_1}(D)$.

Twierdzenie 2.2 (H1, Thm.2). *Dla ustalonej klasy $A \subset \mathcal{A}$, zbiór $L_A(D)$ posiada następujące własności:*

1. *jeśli wszystkie funkcje $f \in A$ mają współczynniki rzeczywiste, a zbiór D jest symetryczny względem osi rzeczywistej, to zbiór $L_A(D)$ jest symetryczny względem osi rzeczywistej,*
2. *jeśli wszystkie funkcje $f \in A$ są nieparzyste i mają współczynniki rzeczywiste, a zbiór D jest symetryczny względem zarówno osi rzeczywistej, jak i urojonej, to zbiór $L_A(D)$ jest symetryczny względem obu osi płaszczyzny zespolonej,*
3. *jeśli $D_1 \subset D_2$, to $L_A(D_1) \subset L_A(D_2)$,*
4. *jeśli $A_1, A_2 \subset \mathcal{A}$ i $A_1 \subset A_2$, to $L_{A_1}(D) \subset L_{A_2}(D)$.*

Ważną rolę przy wyznaczaniu zbiorów Koebeego i pokrycia odgrywa własność niezmienniczości klasy względem obrotu. Mówimy, że klasa $A \subset \mathcal{A}$ jest niezmiennicza względem obrotu jeśli dla każdego $\varphi \in \mathbb{R}$ zachodzi równoważność

$$(2.3) \quad f \in A \Leftrightarrow e^{-i\varphi} f(ze^{i\varphi}) \in A .$$

Wyznaczanie zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia dla klas posiadających własność (2.3) jest często równoważne wyznaczeniu oszacowań modułu funkcji. Mamy (por.[H1])

Twierdzenie 2.3. *Jeśli klasa $A \subset \mathcal{S}$ posiada własność (2.3) i $r \in (0, 1)$, to*

1. $K_A(\Delta_r) = \Delta_{m(r)}$, gdzie $m(r) = \min\{|f(z)| : f \in A, z \in \partial\Delta_r\}$,
2. $L_A(\Delta_r) = \Delta_{M(r)}$, gdzie $M(r) = \max\{|f(z)| : f \in A, z \in \partial\Delta_r\}$.

W przypadku gdy klasa A nie posiada własności (2.3), szczególnie w przypadku gdy funkcje danej klasy mają współczynniki rzeczywiste, wyznaczanie zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia związane jest z wyznaczaniem minimum (w przypadku zbioru Koebeego) bądź maksimum (w przypadku zbiorów pokrycia) modułu wartości nieprzyjmowanych przez funkcje $f \in A$ w ustalonym kierunku.

W pracy [H4] zdefiniowane zostały pojęcia minoranty i majoranty danej klasy A . Mianowicie

Definicja 2.5. *Funkcję analityczną i jednolistną m spełniającą warunki:*

1. $m'(0) > 0$,
2. *dla każdej funkcji $f \in A$ zachodzi $m \prec f$,*
3. *dla każdej funkcji k takiej, że $k(0) = 0$, zachodzi implikacja*

$$\left(\bigwedge_{f \in A} k \prec f \right) \Rightarrow k \prec m ,$$

nazywamy *minorantą* klasy A .

Definicja 2.6. *Funkcję analityczną i jednolistną M spełniającą warunki:*

1. $M'(0) > 0$,
2. *dla każdej funkcji $f \in A$ zachodzi $f \prec M$,*
3. *dla każdej funkcji k takiej, że $k(0) = 0$, zachodzi implikacja*

$$\left(\bigwedge_{f \in A} f \prec k \right) \Rightarrow M \prec k ,$$

nazywamy *majorantą* klasy A .

W sytuacji, gdy K_A i L_A są obszarami, $L_A \neq \mathbb{C}$, istnieją minoranta m i majoranta M klasy A . Co więcej, $m(\Delta) = K_A$ oraz $M(\Delta) = L_A$.

Jak zostało to stwierdzone wcześniej, problematyka zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia należy do klasycznych zagadnień geometrycznej teorii funkcji analitycznych. W ostatnich latach pojawiły się publikacje dotyczące modyfikacji tych klasycznych zagadnień. I tak Netanyahu ([46], [47]) badał maksimum wyrażenia $|a_2| \cdot d_f$ dla funkcji z klasy $\mathcal{S}$ postaci (2.2), gdzie $d_f = \min\{|d| : d \notin f(\Delta)\}$. Analogiczny problem dla klasy $\mathcal{S}^*$, złożonej z funkcji $f \in \mathcal{S}$ które są w Δ gwiazdziste, rozwiązali Bogucki i Waniurski [5]. Bshouty, Hengartner i Schober w [8] wyznaczyli stałe Koebeego oraz zależności tych stałych z oszacowaniami współczynnika a_2 funkcji f mających rozwinięcie (2.2) należących do klasy $\mathcal{S}^p$, $p > 0$, funkcji jednolistnych, dla których funkcje odwrotne f^{-1} mają analityczne przedłużenie do koła Δ_p . Z kolei w pracy [57] Sobczak-Kneć badała zbiory zmienności pary $(|d|, |a_2|)$, gdzie $d \notin f(\Delta)$, a $f \in A$ jest funkcją mającą rozwinięcie (2.2).

Oprócz badań w podklasach klasy $\mathcal{A}$, rozpatrywano analogiczne problemy dla podklas klasy $\mathcal{A}$ przy innym niż klasycznym unormowaniu. Przede wszystkim wykorzystywana była normalizacja Montela $f(0) = 0$, $f(z_0) = z_0$, gdzie z_0 jest ustaloną liczbą z koła Δ różną od 0 (np. prace Reade'a i Złotkiewicza [53], Lewandowskiego i Miazgi [35], Lewandowskiego, Miazgi i Szynala [36]) lub jej modyfikacje (np. prace Krzyża i Złotkiewicza [34], Polatoğlu i Bolcalı [50]).

Z drugiej strony, wielu autorów badało te zagadnienia rozważając zamiast funkcji analitycznych pewne rodziny funkcji meromorficznych (Godula [12], Wirths [62]), quasikonforemnych (Juve [25], Ikoma [22]) czy harmonicznych (Clunie i Sheil-Small [9], [59], Mateljević [40], [41]). Warto w tym miejscu zaznaczyć, że nie jest znany dokładny wynik, analogiczny do Twierdzenia 1.2,

dla funkcji harmoniczných jednolistnych (wiadomo jedynie, że dla wszystkich takich funkcji jest $\Delta_{1/16} \subset f(\Delta)$).

3. OMÓWIENIE PRAC STANOWIĄCYCH OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE

Artykuły wchodzące w skład cyklu przedstawione zostaną w trzech kolejnych podrozdziałach. W pierwszym z nich zaprezentowane zostaną wyniki dotyczące klas funkcji niejednolistnych, mających współczynniki rzeczywiste. Badania te koncentrują się na klasie $\mathcal{T}$ funkcji typowo-rzeczywistych i jej podklasach. Uzyskane wyniki dotyczą uogólnionych zbiorów Koebeego i pokrycia nad ustalonym podzbiorem D koła jednostkowego, przede wszystkim gdy D jest kołem Δ_r lub soczewką H .

Badania opisane w drugim podrozdziale związane są też z funkcjami posiadającymi współczynniki rzeczywiste. Tym razem zakłada się, że funkcje są jednolistne. W dwóch omawianych tu pracach funkcje są wypukłe w kierunku osi rzeczywistej, w trzeciej - kołowo-symetryczne. Rezygnacja z założenia, że współczynniki funkcji są rzeczywiste zwykle skutkuje faktem, że klasa posiada własność (2.3) niezmienniczości względem obrotu. W takim przypadku wyznaczanie zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia jest zwykle mniej skomplikowane. W podrozdziale trzecim rozważane klasy funkcji mają współczynniki dowolne, ale własność niezmienniczości względem obrotu dla tych klas nie zachodzi. Są to m.in. klasy funkcji prawie gwiazdzistych czy wypukłych w dwóch ustalonych kierunkach.

W prezentowanych tu artykułach stosowane są trzy podstawowe metody prowadzące do uzyskania wyników. Jedną z nich jest klasyczna metoda związana z podporządkowaniem i zasadą Lindelöfa. Szczególną rolę w tej metodzie odgrywa wyznaczanie tzw. zbiorów ekstremalnych i związanych z nimi funkcji ekstremalnych. Metoda ta, stosowana przez wielu autorów (por. np.[33, 42]), komplikuje się w przypadku gdy funkcje są n -symetryczne. W takim przypadku, pomimo skomplikowanej geometrii obrazów koła Δ przez funkcje n -symetryczne, skutecznym narzędziem do wyznaczania funkcji ekstremalnych są wzory Schwarza-Christoffela ([H4], [H8]).

Metoda opracowana i wykorzystana w pracach [H1], [H2], [H7] bazuje na pojęciu obwiedni rodziny krzywych. Dzięki wyznaczeniu obwiedni dla stosownie dobranej rodziny krzywych możliwe jest znajdowanie uogólnionych zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia nad ustalonym zbiorem D . Pozwala to rozwiązać wiele tego typu problemów przede wszystkim dla funkcji niejednolistnych (w tym także dla funkcji typowo-rzeczywistych i typowo-rzeczywistych nieparzystych).

Kolejna metoda, która została stworzona i opisana w pracy [H3], także wiąże się z badaniami w klasie $\mathcal{T}$ oraz w klasach pokrewnych. Inspiracją do stworzenia tej metody była praca [16], w której Goodman wyznaczył zbiór Koebego dla klasy $\mathcal{T}$ posługując się podporządkowaniem na powierzchniach Riemanna. Dzięki nowej metodzie możliwe jest prostsze i bardziej przejrzyste uzyskanie tego wyniku. Zaletą nowej metody jest również to, że pozwala rozwiązać analogiczne problemy w podklasach klasy $\mathcal{T}$, m.in. w klasie $\mathcal{T}_M$ funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych, ale również w klasie $\mathcal{T}(r)$ funkcji typowo-rzeczywistych z unormowaniem Montela.

3.1. Klasy funkcji niejednostajnych o współczynnikach rzeczywistych - prace [H1], [H2], [H3]. Prace [H1], [H2], [H3] poświęcone zostały badaniom przedstawionej wyżej problematyki w klasach funkcji o współczynnikach rzeczywistych, które nie są podklasami klasy $\mathcal{S}$. W każdej z ww. prac rozważane funkcje są typowo-rzeczywiste.

Definicję funkcji typowo-rzeczywistej wprowadził Rogosiński w 1932 roku (por. [54]). Funkcja analityczna $f \in \tilde{\mathcal{A}}$ (z dowolną normalizacją) jest typowo-rzeczywista jeśli dla każdego $z \in \Delta$ spełnia warunek

$$(3.1) \quad \operatorname{Im} z \operatorname{Im} f(z) \geq 0 .$$

Zbiór wszystkich funkcji spełniających powyższy warunek i mających rozwinięcie (2.2) oznaczamy symbolem $\mathcal{T}$.

Rogosiński w [54] wykazał także, że każdą funkcję $f \in \mathcal{T}$ można przedstawić całką Riemanna-Stieltjesa

$$(3.2) \quad f(z) = \int_{-1}^1 k_t(z) d\mu(t) ,$$

gdzie

$$(3.3) \quad k_t(z) = \frac{z}{1 - 2tz + z^2} , \quad t \in [-1, 1] ,$$

a μ jest miarą probabilistyczną na przedziale $[-1, 1]$. Zbiór miar probabilistycznych na przedziale $[\alpha, \beta]$ oznaczają będy symbolem $\mathbb{P}_{[\alpha, \beta]}$.

W ostatnich latach obserwuje się wzrost zainteresowania tematyką związaną z funkcjami typowo-rzeczywistymi. Warto tu wspomnieć m.in. liczne prace Gołuziny (m.in. [14], [15]), artykuły Ma [39], Szynala [60], Kanas i Tatarczak [26] czy Dorffa, Nowak i Szapiela [10].

Warunek (3.1) ma prostą interpretację geometryczną. Funkcje typowo-rzeczywiste przekształcają górne półkole Δ^+ w zbiór leżący w górnej półpłaszczyźnie,

zaś dolne półkole Δ^- w zbiór leżący w dolnej półpłaszczyźnie. Z definicji funkcji typowo-rzeczywistej wynika, że współczynniki tej funkcji są rzeczywiste. Oczywiście jest, że $\mathcal{S} \not\subset \mathcal{T}$, gdyż nie każda funkcja klasy $\mathcal{S}$ ma współczynniki rzeczywiste. Podobnie, nieprawdziwa jest inkluzja $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$. Jako przykład funkcji typowo-rzeczywistej niejednostajnej warto wskazać funkcję

$$(3.4) \quad f(z) = \frac{z(1+z^2)}{(1-z^2)^2} = \frac{1}{2} [k_1(z) + k_{-1}(z)] .$$

Ponieważ klasa $\mathcal{T}$ nie jest zawarta w $\mathcal{S}$, naturalnym problemem jest wyznaczenie takich zbiorów D , dla których wszystkie funkcje klasy $\mathcal{T}$ są jednostajne. Fundamentalny wynik opublikowany przez Gołuzina (por. [13]) stanowi, że zbiór H postaci

$$(3.5) \quad H = \{z \in \Delta : |1+z^2| > 2|z|\}$$

jest zbiorem jednostajności klasy $\mathcal{T}$. Oznacza to, że wszystkie funkcje $f \in \mathcal{T}$ są w H jednostajne, a ponadto dla dowolnego zbioru G zawierającego zbiór H , $G \neq H$, istnieją funkcje klasy $\mathcal{T}$, które w zbiorze G nie są jednostajne.

Wyznaczanie zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia w klasie $\mathcal{T}$ zapoczątkowali Brannan i Kirwan. Udowodnili oni twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 1.2.

Twierdzenie 3.1 ([6]). *Jeśli $f \in \mathcal{T}$, to $\Delta_{1/4} \subset f(\Delta)$.*

Powyższe twierdzenie zostało wzmocnione w pracy [H1].

Twierdzenie 3.2 (H1, Thm.8). *$K_{\mathcal{T}}(H) = \Delta_{1/4}$, gdzie H jest zdefiniowane przez (3.5).*

Z twierdzenia tego wynika więc, że

Wniosek 3.1 (H1, Thm.9). *Jeśli $f \in \mathcal{T}$, to $\Delta_{1/4} \subset f(H)$.*

W dowodzie powyższego faktu wykorzystana została metoda obwiedni rodziny krzywych płaskich. Pomimo, że obwódnia należy do klasycznych pojęć geometrii różniczkowej, to nie była wcześniej stosowana do wyznaczania zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia. W metodzie obwiedni zasadnicze znaczenie odgrywa jednostajność funkcji w danym zbiorze. Przedstawimy poniżej zasadnicze etapy rozumowania prowadzące do dowodu Twierdzenia 3.2. Idea ta została wykorzystana w dowodach innych twierdzeń podanych nie tylko w pracy [H1], ale także w [H2] i [H7].

Gołuzin w pracy [13] wykazał, że zbiór $\Omega_{\mathcal{T}}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{T}\}$ dla ustalonego $z \in \Delta$ pokrywa się z otoczką wypukłą krzywej $\{f_t(z) : t \in [-1, 1]\}$. Zatem, gdy $\operatorname{Im} z \neq 0$, zbiór $\Omega_{\mathcal{T}}(z)$ jest odcinkiem koła.

Niech D będzie obszarem jednospójnym zawartym w zbiorze jednolistności klasy $\mathcal{T}$ takim, że $0 \in D$. Ponieważ $\min\{|f(z)| : f \in \mathcal{T}\}$ dla ustalonego $z \in \Delta$ jest realizowane przez funkcje postaci $\alpha k_1(z) + (1 - \alpha)k_{-1}(z)$, $\alpha \in [0, 1]$, gdzie funkcje k_t są zdefiniowane przez (3.3), zatem w celu wyznaczenia zbioru Koebe dla klasy $\mathcal{T}$ nad zbiorem D należy wyznaczyć obwiednię odcinków $[0, 1] \ni \alpha \mapsto \alpha k_1(z) + (1 - \alpha)k_{-1}(z)$, gdy z przebiega cały brzeg zbioru D .

W pracy [H1] oprócz zbioru $K_{\mathcal{T}}(H)$ wyznaczono przy pomocy przedstawionej powyżej metody zbiory Koebe także nad innymi zbiorami: Δ_r , $r \in (0, \sqrt{2} - 1]$ oraz E_a , $a \geq 1$. Dla zbiorów Δ_r naturalnym ograniczeniem możliwości stosowania metody obwiedni jest promień jednolistności klasy $\mathcal{T}$, czyli promień największego koła o środku w 0, w którym wszystkie funkcje klasy $\mathcal{T}$ są jednoliste. Promieniem tym jest liczba $r_{\mathcal{S}}(\mathcal{T}) = \sqrt{2} - 1$. Z kolei zbiory E_a , $a \geq 1$ określone zostały jako zbiory tych $z \in \Delta$, dla których $z + 1/z$ należy do zewnątrz elipsy $u^2 + v^2/a^2 = 4$. W szczególnym przypadku, zbiór E_1 jest postaci $\{z \in \Delta : |z + 1/z| > 2\}$. Mamy więc $E_1 = H$. Udowodniono, że

Twierdzenie 3.3 (H1, Thm.10). *Dla każdego $a \geq 1$ zbiór $K_{\mathcal{T}}(E_a)$ jest zbiorem wypukłym, którego brzegiem jest elipsa $16x^2 + 4(1 + a^2)^2y^2/a^2 = 1$.*

Dla $a = 1$, wynik Twierdzenia 3.3 pokrywa się z wynikiem Twierdzenia 3.2.

Badania nad obszarami pokrycia dla klasy $\mathcal{T}$ z konieczności dotyczyć mogą specjalnie wybranych podzbiorów zbioru Δ . Wykazano bowiem w [H1], że nawet dla zbioru H mamy $L_{\mathcal{T}}(H) = \mathbb{C}$ (por. [H1], Thm. 4). Także dla wszystkich zbiorów E_a , $a \geq 1$ opisanych wyżej ma miejsce równość $L_{\mathcal{T}}(E_a) = \mathbb{C}$ (por. [H1], Thm. 5). Co więcej, wykazano, że nawet dla zbioru $B = \text{cl}(E_{\infty})$ prawdą jest, że $L_{\mathcal{T}}(B) = \mathbb{C}$ (por. [H1], Thm. 6 oraz uwagi do tego twierdzenia). Symbol $\text{cl}(D)$ oznacza domknięcie zbioru D . Dla porównania, ograniczone zbiory pokrycia otrzymujemy w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.4 (H1, Thm.9). *Dla każdego $r \in (0, 1)$ mamy $L_{\mathcal{T}}(\Delta_r) = k_1(\Delta_r) \cup k_{-1}(\Delta_r)$, gdzie k_t jest postaci (3.3).*

W [H1] sformułowany został także problem odwrotny: wyznaczyć zbiór D , dla którego obszar pokrycia dla klasy $\mathcal{T}$ jest zadany z góry zbiorem. Tak postawione zadanie rozwiązane zostało w przypadku, gdy tym z góry danym zbiorem jest koło Δ_M .

Klasą, której dotyczą badania z pracy [H2], jest klasa $\mathcal{T}(1/2)$. Funkcje tej klasy są postaci

$$(3.6) \quad f(z) = \int_{-1}^1 f_t(z) d\mu(t) ,$$

gdzie

$$(3.7) \quad f_t(z) = z \left(\frac{k_t(z)}{z} \right)^{1/2} = \frac{z}{\sqrt{1 - 2tz + z^2}}, \quad t \in [-1, 1],$$

przy czym gałąź pierwiastka jest dobrana tak, by $\sqrt{1} = 1$, zaś k_t jest zdefiniowane wzorem (3.3), a $\mu \in \mathbb{P}_{[-1,1]}$.

Znaczenie klasy $\mathcal{T}(1/2)$ wynika z faktu, że podklasami $\mathcal{T}(1/2)$ są klasy: $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*(1/2)$, $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(i)$ złożone z funkcji o współczynnikach rzeczywistych danych wzorem (2.2), które są odpowiednio: gwiaździste rzędu $1/2$, wypukłe, wypukłe w kierunku osi urojonej.

Jak pokazano w [H2], funkcje klasy $\mathcal{T}(1/2)$ nie muszą być jednoliste. Podobnie jak w klasie $\mathcal{T}$ funkcja (3.4), także w $\mathcal{T}(1/2)$ kombinacje liniowe funkcji f_t danych wzorem (3.7) postaci

$$(3.8) \quad \frac{1}{2} [f_t(z) + f_{-t}(z)] \quad , \quad t \in (0, 1)$$

są niejednoliste w Δ .

Wykorzystując metodę obwiedni, można w $\mathcal{T}(1/2)$ wyznaczyć zbiory Koebeego nad kołami Δ_r . Z analizy zbioru $\Omega_{\mathcal{T}(1/2)}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{T}(1/2)\}$ wynika, że $\min\{|f(z)| : f \in \mathcal{T}(1/2)\}$ dla ustalonego z jest osiągnięte przez funkcje postaci

$$(3.9) \quad F_{\alpha}(z) = \alpha f_1(z) + (1 - \alpha) f_{-1}(z) = \frac{z}{1 - z^2} [1 - (1 - 2\alpha)z] \quad , \quad \alpha \in [0, 1] \quad .$$

Ponieważ $zF'_{\alpha}(z) = \alpha \frac{z}{(1-z)^2} + (1 - \alpha) \frac{z}{(1+z)^2} \in \mathcal{T}$, więc funkcje F_{α} są wypukłe w kierunku osi urojonej (por.[11]); są więc jednoliste.

Fakt ten oznacza, że skuteczność stosowania zaproponowanej metody wyznaczania $K_{\mathcal{T}(1/2)}(D)$ rozciąga się na dowolne obszary jednospójne zawierające punkt 0 i zawarte w Δ . Dzięki temu wyznaczone zostały zbiory $K_{\mathcal{T}(1/2)}(\Delta_r)$ dla $r \in (0, 1]$ (por. [H2], Thm.1). W szczególności, dla $r = 1$, mamy

Twierdzenie 3.5 (H2, Cor.1). $K_{\mathcal{T}(1/2)} = \Delta_{1/2}$.

Ze względu na relację inkluzji $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(i) \subset \mathcal{T}(1/2)$ oraz fakt, że funkcje F_{α} są wypukłe w kierunku osi urojonej, z Twierdzenia 3.5 otrzymujemy natychmiast jako wniosek wynik udowodniony wcześniej przez McGregora.

Wniosek 3.2 ([42]). $K_{\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(i)} = \Delta_{1/2}$.

Zbiór Koebeego w klasie $\mathcal{T}(1/2)$ nad zbiorem H postaci (3.5) opisany został w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 3.6 (H2, Thm.2). *Zbiór $K_{\mathcal{T}(1/2)}(H)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzeg tego zbioru w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej składa się z odcinka AB prostej $x + y = 1/2$, gdzie $A(1/2, 0)$, $B(1/4, 1/4)$ oraz łuku okręgu $x^2 + y^2 = 1/8$ od B do $C(0, 1/2\sqrt{2})$.*

Oprócz zbioru Koebeego, w pracy [H2] zostały wyznaczone zbiory pokrycia dla $\mathcal{T}(1/2)$ nad Δ_r , $r \in (0, 1]$. Wykazano, że zbiór ten, dla $r \in (0, 1)$ jest zawsze dwukątem kołowym. Mamy

Twierdzenie 3.7 (H2, Thm.3). $L_{\mathcal{T}(1/2)}(\Delta_r) = f_1(\Delta_r) \cup f_{-1}(\Delta_r)$ dla $r \in (0, 1]$.

Ze względu na to, że funkcje ekstremalne w powyższym twierdzeniu, to jest f_1 i f_{-1} , są funkcjami wypukłymi, a zatem są również wypukłe w kierunku osi urojonej oraz gwiazdziste rzędu $1/2$, można sformułować analogiczne rezultaty dotyczące zbiorów pokrycia dla klas $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}(i)$, $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*(1/2)$ nad Δ_r (por. [H2], Cor.4). Twierdzenia 3.5, 3.7 prowadzą do oszacowań $|f(z)|$, $|\operatorname{Re} f(z)|$ czy $|\operatorname{Im} f(z)|$ na okręgach $|z| = r$ w wyżej wymienionych klasach (por. [H2], Cor.5, Cor.6).

Problem wyznaczenia zbioru Koebeego dla całej klasy $\mathcal{T}$ (nad zbiorem Δ) został rozwiązany przez Goodmana w [13]. Metoda zaproponowana przez Goodmana polega na wykorzystaniu podporządkowania funkcji typowo-rzeczywistych tak zwanej uniwersalnej funkcji typowo-rzeczywistej F , danej wzorem

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi z}{1 + z^2} \right) .$$

Funkcja F ma szczególne własności: F jest lokalnie jednolistna, nie przyjmuje tylko dwóch wartości: i/π oraz $-i/\pi$, przyjmuje każdą wartość rzeczywistą dokładnie raz, ale każdą wartość $w \notin \mathbb{R}$, $w \neq \pm i/\pi$ przyjmuje nieskończenie wiele razy. Zatem F nie jest funkcją jednolistną. Z tego względu Goodman rozważał funkcję odwrotną do F określoną na powierzchni Riemanna $F(\Delta)$ i podporządkowanie $f \prec F$ dla dowolnego $f \in \mathcal{T}$. W konsekwencji udowodnił następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.8 ([16]). *Zbiór $K_{\mathcal{T}}(\Delta)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzeg tego zbioru w górnej półpłaszczyźnie ma równanie biegunowe $w = \varrho(\theta)e^{i\theta}$, gdzie*

$$(3.10) \quad \varrho(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi \sin \theta}{4\theta(\pi - \theta)} & , \theta \in (0, \pi) \\ \frac{1}{4} & , \theta(\pi - \theta) = 0 . \end{cases}$$

Powyższą metodę Goodman wykorzystał także w pracy [17] do wyznaczenia zbiorów Koebeego dla innych klas złożonych z funkcji analitycznych niejedno-listnych, np. dla funkcji f takich, że $|f(z)| < M$ dla $z \in \Delta$ i spełniających pewien warunek normalizacyjny.

Wynik z Twierdzenia 3.8 jest możliwy do uzyskania bez potrzeby odwoły-wania się do funkcji określonych na powierzchniach Riemanna. W pracy [H3] zaproponowaliśmy nową metodę wyznaczania zbioru $K_{\mathcal{T}}$, skuteczną także dla innych klas pokrewnych.

Rozważmy funkcję $f \in \mathcal{T}$, która nie przyjmuje wartości $\varrho e^{i\theta}$ oraz $\varrho e^{-i\theta}$, gdzie $\varrho > 0$, $\theta \in (0, \pi)$. Funkcja $\frac{f(z) - \varrho e^{i\theta}}{f(z) - \varrho e^{-i\theta}}$ jest analityczna w Δ i nie przyjmuje wartości 0 oraz 1. Zatem funkcja

$$(3.11) \quad h(z) = \frac{1}{i} \log \frac{f(z) - \varrho e^{i\theta}}{f(z) - \varrho e^{-i\theta}},$$

gdzie gałąź logarytmu jest dobrana tak, by $h(0) = 2\theta$, jest także analityczna w Δ .

Łatwo sprawdzić, że h jest też typowo-rzeczywista oraz że $h(z) \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Ten ostatni fakt oznacza dla funkcji typowo-rzeczywistej h , że jeśli $x \in \mathbb{R}$, to $0 < h(x) < 2\pi$. Wystarczy teraz skonstruować funkcję typowo-rzeczywistą H taką, że $H(0) = 2\theta$ i $H(\Delta) = \mathbb{C} \setminus \{p \in \mathbb{R} : p \leq 0 \vee p \geq 2\pi\}$; funkcją tą jest funkcja jednolistna

$$H(z) = 2\theta + \frac{a \cdot z}{1 - 2tz + z^2}, \quad \text{gdzie} \quad a = 8(\pi - \theta)\theta/\pi, \quad t = 1 - 2\theta/\pi.$$

Z wyżej opisanych własności funkcji h i H wynika, że h jest podporządko-wane funkcji H . Z zasady podporządkowania wnioskujemy, że $h'(0) \leq H'(0)$, lub równoważnie, $2 \sin \theta/\varrho \leq 8(\pi - \theta)\theta/\pi$. Stąd otrzymujemy, że $\varrho \geq \varrho(\theta)$, gdzie $\varrho(\theta)$ dane jest wzorem (3.10). Co więcej, analizując przypadek równości $h'(0) = H'(0)$ można wskazać funkcje ekstremalne, tzn. funkcje które wyzna-czają punkty brzegu zbioru Koebeego klasy $\mathcal{T}$.

Ważne jest, że opisaną powyżej metodę wyznaczania zbioru Koebeego można przenieść także na inne podklasy rodziny funkcji typowo-rzeczywistych. W [H3] wyznaczyliśmy tą metodą także zbiór Koebeego dla klasy $\mathcal{T}^{M,k}$ (por. [H3], Thm.2) zdefiniowanej w następujący sposób:

$$(3.12) \quad \mathcal{T}^{M,k} = \{f \in \mathcal{T} : f(\Delta) \subset \mathbb{C} \setminus \{p \in \mathbb{R} : p \leq -M/4\}\},$$

gdzie $M > 1$ i $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Rezultat ten prowadzi do wniosków dotyczących podklas klasy $\mathcal{T}$. Mianowicie, klasa $\mathcal{T}^{M,k}$ jest szczególnym przypadkiem rodziny

$$\mathcal{T}^{M,g} = \{f \in \mathcal{T} : f \prec Mg\} ,$$

gdzie $g \in \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$, $M > 1$. Udowodnione zostało w [H3], że dla dwóch funkcji $g_1, g_2 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$ związek pomiędzy klasami $\mathcal{T}^{M,g_1}$ i $\mathcal{T}^{M,g_2}$ można uzyskać dzięki równoważności

$$(3.13) \quad f \in \mathcal{T}^{M,g_1} \Leftrightarrow Mg_2(g_1^{-1}(f(z)/M)) \in \mathcal{T}^{M,g_2} .$$

Mamy ponadto

Lemat 3.1 (H3, Lem.1). *Niech $g_1, g_2 \in \mathcal{T} \cap \mathcal{S}$. Zbiór D jest zbiorem Koebego klasy $\mathcal{T}^{M,g_1}$ wtedy i tylko wtedy gdy $Mg_2(g_1^{-1}(D/M))$ jest zbiorem Koebego klasy $\mathcal{T}^{M,g_2}$.*

Ponieważ znany jest zbiór $K_{\mathcal{T}^{M,k}}$, wystarczy więc zastosować Twierdzenie 2 z [H3], a także powyższy lemat do funkcji $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ i odpowiednio dobranej funkcji g_2 , aby otrzymać interesujące wnioski. I tak, jeśli $g(z) = z$ lub $g(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$, to klasa $\mathcal{T}^{M,g}$ sprowadza się do klasy

$$\mathcal{T}_M = \{f \in \mathcal{T} : |f(z)| < M, z \in \Delta\}$$

lub

$$\mathcal{T}(M) = \{f \in \mathcal{T} : |\operatorname{Im} f(z)| < M\pi/4, z \in \Delta\} ,$$

odpowiednio.

Niech $r = r(M, \theta)$ będzie jedynym rozwiązaniem równania

$$(3.14) \quad \arg(M + 4re^{i\theta}) - \frac{4r\theta(\pi - \theta) - \pi \sin \theta}{4r(\pi - \theta) - \sin \theta} = 0$$

w zbiorze $(\varrho(\theta), \infty)$, gdzie $\varrho(\theta)$ dane jest wzorem (3.10). Niech ponadto

$$(3.15) \quad \varrho(M, \theta) = \begin{cases} \frac{M}{4(M-1)} & , \theta = 0 \\ r(M, \theta) & , \theta \in (0, \pi) \\ \frac{1}{4} & , \theta = \pi . \end{cases}$$

Mamy wtedy

Wniosek 3.3 (H3, Cor.1). *Zbiór Koebego klasy $\mathcal{T}_M$, $M > 1$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzeg tego zbioru w górnej półpłaszczyźnie ma równanie parametryczne*

$$(3.16) \quad w = \frac{2\varrho(M, \theta)e^{i\theta}}{\frac{2}{M}\varrho(M, \theta)e^{i\theta} + 1 + \sqrt{\frac{4}{M}\varrho(M, \theta)e^{i\theta} + 1}} , \theta \in [0, \pi] .$$

Wniosek 3.4 (H3, Cor.2). *Zbiór Koebego klasy $\mathcal{T}(M)$, $M > 1$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzeg tego zbioru w górnej półpłaszczyźnie ma równanie parametryczne*

$$(3.17) \quad w = \frac{M}{4} \log \left(\frac{4}{M} \varrho(M, \theta) e^{i\theta} + 1 \right), \quad \theta \in [0, \pi].$$

Rezultat opisany we Wniosku 3.3 jest rozwiązaniem jednego z otwartych problemów geometrycznej teorii funkcji analitycznych opisanych w przeglądowym artykule Goodmana ([18], str.183). Warto dodać, że analogiczny rezultat dla klasy $\mathcal{S}_M$ funkcji jednolistnych ograniczonych przez M został uzyskany dokładnie 100 lat temu przez Picka [48].

3.2. Klasy funkcji jednolistnych o współczynnikach rzeczywistych - prace [H4], [H5], [H6]. W odróżnieniu od prac [H1-H3], rezultaty omawiane w tym rozdziale dotyczą klas funkcji, które są jednolistne i mają współczynniki rzeczywiste. Jednolistność funkcji występujących w tych badaniach pozwala na wykorzystanie zasady podporządkowania jako podstawowego narzędzia służącego do wyznaczania zbiorów Koebego. Idea wyznaczania tą metodą zbiorów Koebego oraz zbiorów pokrycia dla ustalonej klasy $A \subset \mathcal{A}$ złożonej z funkcji jednolistnych przedstawia się następująco.

Weźmy dowolną funkcję $f \in A$ i punkt brzegowy zbioru $f(\Delta)$ leżący na półprostej wychodzącej z punktu $w = 0$, o zadanym kierunku $e^{i\theta}$. Oznaczmy ten punkt przez $\varrho e^{i\theta}$. Wyznaczamy rodzinę zbiorów ekstremalnych $\tilde{D}_{\varrho, \theta}$ klasy A takich, że $f(\Delta) \subset \tilde{D}_{\varrho, \theta}$ i $\varrho e^{i\theta} \in \partial \tilde{D}_{\varrho, \theta}$. Pojęcie “zbiory ekstremalne” rozumiane jest zależnie od konkretnej klasy A ; ich kształt zależy od geometrycznych własności funkcji z tej klasy. Następnie wyznaczamy funkcje $\tilde{F}_{\varrho, \theta} \in \tilde{A}$ takie, że $\tilde{F}_{\varrho, \theta}(\Delta) = \tilde{D}_{\varrho, \theta}$ (klasa $\tilde{A}$ rozumiana jest jako zbiór $\tilde{A} = k \cdot A$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

Niech $F_\theta = \frac{\varrho(\theta)}{\varrho} \cdot \tilde{F}_{\varrho, \theta}$, gdzie $\varrho(\theta)$ jest tak dobrane, aby $F'_\theta(0) = 1$. Mamy więc $F_\theta(\Delta) = \frac{\varrho(\theta)}{\varrho} \cdot \tilde{D}_{\varrho, \theta}$. Ponieważ funkcje klasy A są jednolistne, to $f \prec \frac{\varrho}{\varrho(\theta)} \cdot F_\theta$, co z zasady podporządkowania skutkuje nierównością

$$1 = f'(0) \leq \frac{\varrho}{\varrho(\theta)} \cdot F'_\theta(0) = \frac{\varrho}{\varrho(\theta)}.$$

Mamy więc $\varrho \geq \varrho(\theta)$, przy czym równość zachodzi o ile $f = F_\theta$. Oznacza to, że F_θ jest rzeczywiście funkcją ekstremalną w diskutowanym problemie, zaś punkty $\varrho(\theta) e^{i\theta}$ wyznaczają brzeg zbioru Koebego klasy A .

W świetle opisanej w zarysie powyższej metody, kluczowe znaczenie ma poprawne wytypowanie zbiorów ekstremalnych i wyznaczenie funkcji ekstremalnych. Co więcej, nie zawsze dla ustalonego punktu $\varrho e^{i\theta}$ istnieje dokładnie jeden

zbiór ekstremalny (tak właśnie dzieje się np. w przypadku wyników prezentowanych w [H6]). W [H4] opisana została sytuacja, gdy takich zbiorów jest więcej.

Prace [H4] i [H5] poświęcone są funkcjom wypukłym w kierunku osi rzeczywistej, o współczynnikach rzeczywistych. O funkcji f mówimy, że jest wypukła w kierunku ustalonej prostej l jeśli zbiór $f(\Delta) \cap l$ jest zbiorem zwartym (zbiorem pustym, odcinkiem lub półprostą zawartą w l , całą prostą). W przypadku pracy [H4] dodatkowym założeniem jest tzw. n -symetria funkcji.

Dla ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$, niech $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$. O funkcji f mówimy, że jest n -symetryczna, jeśli dla każdego $z \in \Delta$ zachodzi warunek $f(\varepsilon z) = \varepsilon f(z)$. Geometrycznie, warunek ten oznacza niezmienniczość zbioru $f(\Delta)$ względem obrotu o całkowitą wielokrotność kąta o mierze $2\pi/n$, co można zapisać równością $f(\Delta) = \varepsilon f(\Delta)$. W przypadku gdy $n = 2$ warunek ten sprowadza się do warunku na nieparzystość funkcji f . Jak wiadomo, jeśli f jest postaci (2.2), to funkcjonał $f \mapsto \sqrt[n]{f(z^n)}$, gdzie $\sqrt[n]{f(z^n)} = z \sqrt[n]{\frac{f(z^n)}{z^n}}$, generuje funkcje n -symetryczne. Warto wspomnieć, że badaniami funkcji n -symetrycznych i ich rozkładu na składowe (j, k) -symetryczne zajmowali się Liczberski i Pałubiński w [38].

Oznaczmy klasę wszystkich funkcji jednolistnych, wypukłych w kierunku osi rzeczywistej, o współczynnikach rzeczywistych symbolem $\mathcal{X}^{(n)}$. Jak pokazano w [H4], zbiorami ekstremalnymi klasy $\mathcal{X}^{(n)}$ są wielokąty posiadające $4n$ boków (w granicznych przypadkach mogą to być $2n$ -kąty). W przypadku gdy $n \in \{2, 3, 4\}$ są to wielokąty uogólnione, których wybrane wierzchołki leżą w nieskończoności. Pomimo tych różnic funkcje ekstremalne można zawsze wyznaczyć przy pomocy wzorów Schwarza-Chrisoffela.

Podstawowe wyniki pracy [H4] przedstawione zostaną w kolejnych twierdzeniach.

Twierdzenie 3.9 (H4, Thm.2, Thm.3). *Dla ustalonej liczby nieparzystej n , $n \geq 3$, mamy $K_{\mathcal{X}^{(n)}} = F_1(\Delta) \cap F_2(\Delta)$, gdzie*

$$F_1(z) = z \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{(1-t^n)(1-t^n z^{2n})}{(1+t^n z^n)^3(1-t^n z^n)}} dt,$$

$$F_2(z) = z \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{(1-t^n)(1-t^n z^{2n})}{(1+t^n z^n)(1-t^n z^n)^3}} dt.$$

Twierdzenie 3.10 (H4, Cor.4, Cor.5). *Dla ustalonej liczby parzystej n mamy*

1. $K_{\mathcal{X}^{(n)}} = G_1(\Delta)$ gdy $n = 4k - 2$, $k \in \mathbb{N}$,

2. $K_{\mathcal{X}^{(n)}} = G_2(\Delta)$ gdy $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$,

gdzie

$$G_1(z) = z \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{(1-t^n)^2(1-t^n z^{2n})^2}{(1+t^n z^n)^4(1-t^n z^n)^2}} dt ,$$

$$G_2(z) = z \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{(1-t^n)^2(1-t^n z^{2n})^2}{(1-t^n z^n)^4(1+t^n z^n)^2}} dt .$$

Twierdzenie 3.11 (H4, Thm.6). *Dla ustalonej liczby nieparzystej n , $n \geq 3$, mamy $L_{\mathcal{X}^{(n)}} = G(\Delta)$, gdzie*

$$G(z) = z \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{(1+t^n z^n)(1-t^n z^n)}{(1-t^n)^2(1-t^n z^{2n})^2}} dt .$$

Twierdzenie 3.12 (H4, Cor.4, Cor.5, Thm.8). *Dla ustalonej liczby parzystej n mamy*

1. $L_{\mathcal{X}^{(n)}} = H_1(\Delta)$ gdy $n = 4k - 2$, $k \geq 2$,

2. $L_{\mathcal{X}^{(n)}} = H_2(\Delta)$ gdy $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$,

3. $L_{\mathcal{X}^{(2)}} = \mathbb{C}$,

gdzie

$$H_1(z) = z \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{(1-t^n z^n)^2}{(1-t^n)^2(1-t^n z^{2n})^2}} dt ,$$

$$H_2(z) = z \int_0^1 \sqrt[n]{\frac{(1+t^n z^n)^2}{(1-t^n)^2(1-t^n z^{2n})^2}} dt .$$

Co więcej, zbiory $L_{\mathcal{X}^{(n)}}$ dla $n \in \{2, 3, 4\}$ są nieograniczone. Ponadto pokazano, że dla $n \geq 5$ mamy

$$\sup \{ |f(z)| : f \in \mathcal{X}^{(n)}, z \in \Delta \} = \begin{cases} B\left(\frac{1}{n}, \frac{n-3}{2n}\right) / n \sqrt[n]{4} & \text{gdy } n = 2k + 1, k \geq 2 \\ B\left(\frac{1}{n}, \frac{n-4}{2n}\right) / n \sqrt[n]{4} & \text{gdy } n = 2k, k \geq 3, \end{cases}$$

gdzie $B(p, q)$ oznacza funkcję beta Eulera.

Wobec określeń z rozdziału 2 (Definicje 2.5 i 2.6) mamy zatem

Wniosek 3.5. *Dla klasy $\mathcal{X}^{(n)}$*

1. *minorantą jest funkcja G_1 gdy $n = 4k - 2$, $k \in \mathbb{N}$,*
2. *minorantą jest funkcja G_2 gdy $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$,*
3. *majorantą jest funkcja H_1 gdy $n = 4k - 2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,*
4. *majorantą jest funkcja H_2 gdy $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$,*
5. *majorantą jest funkcja G gdy $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$.*

Badania opisane w pracy [H5] koncentrują się również na klasie funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych (ze względu na stosowane wcześniej w literaturze oznaczenia używany jest w [H5] symbol Γ , por. [30]). Punktem wyjścia jest następujący wynik uzyskany w pracy Koczana.

Twierdzenie 3.13 ([30]). $K_\Gamma = \left\{ (x, y) : |x| < \left| \frac{y}{\pi} \right| \ln \left(-1 + \frac{\pi}{4|y|} \right) + \frac{1}{4}, |y| < \frac{\pi\lambda_0}{4} \right\}$, gdzie $\lambda_0 = 0.782 \dots$ jest jedynym pierwiastkiem równania $\ln\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) + \frac{1}{\lambda} = 0$ w $[0, 1]$.

Funkcjami ekstremalnymi są funkcje

$$(3.18) \quad G_\lambda(z) = \frac{\lambda}{2} \log \frac{1+z}{1-z} + (1-\lambda) \frac{z}{(1+z)^2}, \quad \lambda \in [0, 1]$$

i

$$(3.19) \quad H_\lambda(z) = -G_\lambda(-z), \quad \lambda \in [0, 1],$$

które przekształcają koło Δ na dopełnienie pary półprostych równoległych do osi rzeczywistej i wzajemnie symetrycznych względem tej osi.

Niech

$$(3.20) \quad \varrho(\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , \lambda = 0 \\ \frac{\lambda}{4} \left(\pi^2 + \left(\ln \left(\frac{1}{\lambda} - 1 \right) + \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right)^{1/2} & , \lambda \in (0, 1) \end{cases}$$

i

$$(3.21) \quad \psi(\lambda) = \begin{cases} 0 & , \lambda = 0 \\ \psi^*(\lambda) & , \lambda \in (0, 1) \\ \pi & , \lambda = 1. \end{cases}$$

Funkcja ψ jest ciągła i rosnąca w $[0, 1]$. Ponadto, $\psi([0, 1]) = [0, \pi]$. Przy tych oznaczeniach brzeg zbioru Koebego K_Γ w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej można zapisać równaniem parametrycznym $w = \varrho(\lambda)e^{i\psi(\lambda)}$, $\lambda \in [0, \lambda_0]$.

W klasie Γ wyróżniamy dwa niepuste podzbiory Γ^+ i Γ^- . Mówimy, że $f \in \Gamma^+$ ($f \in \Gamma^-$) jeśli $f \in \Gamma$ i dla każdego $w \in \partial f(\Delta)$, $\operatorname{Im} w \neq 0$, zbiory $f(\Delta)$ i półprosta $\{w + t : t \geq 0\}$ ($\{w - t : t \geq 0\}$) są rozłączne. Funkcje ekstremalne z Twierdzenia 3.13, to jest G_λ i H_λ , $\lambda \in [0, 1]$, należą odpowiednio do Γ^+ i Γ^- .

W [H5] udowodnione zostały dwa kluczowe lematy dotyczące funkcji w klasach Γ^+ i Γ^- , które nie przyjmują wartości $\varrho e^{i\theta}$, $\varrho > 0$, $\theta \in [0, \pi)$.

Lemat 3.2 (H5, Lem.2, Lem.4). *Niech $\varrho > 0$, $\theta \in [0, \pi)$ będą ustalone, a $\varrho(\lambda)$ i $\psi(\lambda)$ będą dane wzorami (3.20) i (3.21).*

1. *Jeśli $f \in \Gamma^+$ i $\varrho e^{i\theta} \in \partial f(\Delta)$, to $f \prec \frac{\varrho}{\varrho(\lambda)} G_\lambda$, gdzie $\lambda = \psi^{-1}(\theta)$.*
2. *Jeśli $f \in \Gamma^-$ i $\varrho e^{i\theta} \in \partial f(\Delta)$, to $f \prec \frac{\varrho}{\varrho(\tau)} H_\tau$, gdzie $\tau = \psi^{-1}(\pi - \theta)$.*

Dzięki temu funkcję $f \in \Gamma^+$ można zapisać w postaci $f(z) = M G_\lambda \left(\frac{h(z)}{M} \right)$, gdzie $M = \varrho/\varrho(\lambda) \geq 1$, zaś h jest funkcją jednolistną o współczynnikach rzeczywistych taką, że $|h(z)| < M$ dla $z \in \Delta$. Rozwijając funkcje f , G_λ i h w szeregi Taylora otrzymujemy oszacowanie drugiego współczynnika funkcji f .

Twierdzenie 3.14 (H5, Thm.1). *Niech $f \in \Gamma^+$, $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. Jeśli $\varrho e^{i\theta} \in \partial f(\Delta)$, $\varrho > 0$, $\theta \in [0, \pi)$, to*

$$(3.22) \quad 2 \left(-1 + \frac{\varrho(\psi^{-1}(\theta))}{\varrho} \psi^{-1}(\theta) \right) \leq a_2 \leq 2 \left(1 - \frac{\varrho(\psi^{-1}(\theta))}{\varrho} (2 - \psi^{-1}(\theta)) \right).$$

Analogiczne twierdzenie uzyskano dla funkcji z klasy Γ^- (por. [H5], Thm.2).

Wystarczy teraz wykorzystać fakt, że pomiędzy nieprzyjmowanymi wartościami przez daną funkcję a jej drugim współczynnikiem zachodzi ścisły związek, aby uzyskać główny wynik pracy [H5]. W tym celu oznaczmy przez $\Gamma(c)$ (ogólnie: $A(c)$) podklasę klasy Γ (ogólnie: A) złożoną z tych funkcji, które mają drugi współczynnik rozwinięcia w szereg Taylora równy c . Jak wiadomo (por. [30]), jeśli $f \in \Gamma$, to $c \in [-2, 2]$.

Badania klas funkcji z ustalonym drugim współczynnikiem były prowadzone przez wielu autorów. W interesującym nas zakresie warto zwrócić uwagę na wynik będący uogólnieniem Twierdzenia 1.1. W analogiczny sposób jak to zrobił Bieberbach, można także dowieść, że dla $c \in (-2, 2)$ jest

$$(3.23) \quad K_{\mathcal{S}(c)} = \left\{ w \in \mathbb{C} : \left| w - \frac{c}{4 - c^2} \right| < \frac{2}{4 - c^2} \right\}$$

(por. także [44]). W klasie $\mathcal{S}^*(c)$ funkcji gwiazdzystych z ustalonym drugim współczynnikiem zbiór Koebeego wyznaczył Rogosiński [55]. W pracy [57] Sobczak-Kneć uzyskała zbiór Koebeego przy dodatkowym założeniu, że współczynniki funkcji $f \in \mathcal{S}^*(c)$ są rzeczywiste.

Ponieważ $\Gamma(c)$ jest podklasą klasy $\mathcal{S}(c)$, zatem $K_{\mathcal{S}(c)} \subset K_{\Gamma(c)}$. W granicznych przypadkach jest $\Gamma(-2) = \{k_{-1}\}$ i $\Gamma(2) = \{k_1\}$, skąd wynika oczywisty wniosek, że $K_{\Gamma(-2)} = k_{-1}(\Delta)$ i $K_{\Gamma(2)} = k_1(\Delta)$. Z tego powodu ograniczymy w dalszym ciągu zakres zmienności c do przedziału $(-2, 2)$.

Podobnie jak w całej klasie Γ , także w $\Gamma(c)$, $c \in (-2, 2)$ wyróżniamy dwie niepuste podklasy $\Gamma^+(c) = \Gamma^+ \cap \Gamma(c)$ oraz $\Gamma^-(c) = \Gamma^- \cap \Gamma(c)$. Wykorzystując Twierdzenie 3.14 i jego odpowiednik dla klasy Γ^- otrzymujemy następujące twierdzenia.

Niech

$$(3.24) \quad u_+(t) = r_+(t)e^{i\psi(t)}, \quad t \in [0, 1)$$

i

$$(3.25) \quad u_-(t) = r_-(t)e^{i(\pi-\psi(t))}, \quad t \in [0, 1),$$

gdzie $\psi(t)$ jest zdefiniowane wzorem (3.21).

Twierdzenie 3.15 (H5, Thm.3). *Zbiór Koebeego klasy $\Gamma^+(c)$, $c \in (-2, 2)$ jest obszarem nieograniczonym i symetrycznym względem osi rzeczywistej. Ponadto, $\partial K_{\Gamma^+(c)} \cap \{w : \operatorname{Im} w \geq 0\} = u_+([0, 1)) \cup \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{2+c}\}$, gdzie u_+ jest dane wzorem (3.24) i*

$$\begin{aligned} 1. \quad r_+(\lambda) &= \begin{cases} \varrho(\lambda)^{\frac{2(2-\lambda)}{2-c}} & , \quad \lambda \in [0, 1 + \frac{c}{2}] \\ \varrho(\lambda)^{\frac{2\lambda}{2+c}} & , \quad \lambda \in (1 + \frac{c}{2}, 1) \end{cases} & \text{gdys} \quad c \in (-2, 0), \\ 2. \quad r_+(\lambda) &= \varrho(\lambda)^{\frac{2(2-\lambda)}{2-c}} & , \quad \lambda \in [0, 1) & \text{gdys} \quad c \in [0, 2). \end{aligned}$$

Twierdzenie 3.16 (H5, Thm.4). *Zbiór Koebeego klasy $\Gamma^-(c)$, $c \in (-2, 2)$ jest obszarem nieograniczonym i symetrycznym względem osi rzeczywistej. Ponadto, $\partial K_{\Gamma^-(c)} \cap \{w : \operatorname{Im} w \geq 0\} = u_-([0, 1)) \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{2-c}\}$, gdzie u_- jest dane wzorem (3.25) i*

$$\begin{aligned} 1. \quad r_-(\tau) &= \varrho(\tau)^{\frac{2(2-\tau)}{2+c}} & , \quad \tau \in [0, 1) & \text{gdys} \quad c \in (-2, 0), \\ 2. \quad r_-(\tau) &= \begin{cases} \varrho(\tau)^{\frac{2(2-\tau)}{2+c}} & , \quad \tau \in [0, 1 - \frac{c}{2}] \\ \varrho(\tau)^{\frac{2\tau}{2-c}} & , \quad \tau \in (1 - \frac{c}{2}, 1) \end{cases} & \text{gdys} \quad c \in [0, 2). \end{aligned}$$

Łącząc wyniki z Twierdzenia 3.15 i Twierdzenia 3.16 dowodzimy, że

Twierdzenie 3.17 (H5, Thm.5). *Dla $c \in (-2, 2)$ mamy $K_{\Gamma(c)} = K_{\Gamma^+(c)} \cap K_{\Gamma^-(c)}$.*

Jak łatwo sprawdzić, brzegi zbiorów $K_{\Gamma(c)}$ i $K_{\mathcal{S}(c)}$ mają jedynie dwa punkty wspólne. Są to punkty leżące na osi rzeczywistej: $-1/(2+c)$ i $1/(2-c)$, z których wychodzą półproste będące dopełnieniem zbioru $f_{c/2}(\Delta)$.

Podobnie jak w [H4], także w pracy [H6] kluczem do uzyskania podstawowych wyników było wytypowanie zbiorów ekstremalnych i znalezienie odpowiednich funkcji ekstremalnych. W pracy tej badane są funkcje kołowo-symetryczne, spełniające dodatkowe założenia.

O funkcji f mówimy, że jest kołowo-symetryczna, jeśli $f(\Delta)$ jest zbiorem kołowo-symetrycznym, czyli zbiorem którego przecięcie z okręgiem $|z| = \varrho$, gdy $\varrho \in \mathbb{R}_+$, jest całym okręgiem, jego łukiem symetrycznym względem osi rzeczywistej zawierającym ϱ lub zbiorem pustym. Definicja i podstawowe własności funkcji kołowo-symetrycznych zostały przedstawione w pracy [24] przez Jenkinsa. Wykazał on m.in., że funkcje kołowo-symetryczne mają wszystkie współczynniki rzeczywiste. Jenkins udowodnił także, że dla ustalonej funkcji f i liczby $r \in (0, 1)$ funkcja $\theta \rightarrow |f(re^{i\theta})|$ jest nierosnąca dla $\theta \in (0, \pi)$ i niemalejąca dla $\theta \in (\pi, 2\pi)$. Klasę wszystkich funkcji kołowo-symetrycznych jednolistnych i unormowanych klasycznie oznaczamy symbolem $\mathcal{Y}$.

Krzyż i Reade w pracy [33] wyznaczyli zbiór Koebeego dla klasy $\mathcal{Y}$. Wykazali następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.18 ([33]). *Zbiór $K_{\mathcal{Y}}$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem osi rzeczywistej. Brzeg tego zbioru ma równanie biegunowe $w = \varrho(\theta)e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, gdzie $\varrho(\theta) = (1 + \cos(\theta/2))^2/4$.*

Kontynuując badania przeprowadzone przez Krzyża i Reade'a, w pracy [H6] wyznaczone zostały zbiory Koebeego dla klas $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}^*$ oraz $\mathcal{Y} \cap \mathcal{K}(i)$ złożonych odpowiednio z funkcji kołowo-symetrycznych gwiazdzistych oraz z funkcji kołowo-symetrycznych wypukłych w kierunku osi urojonej. Zbiorami ekstremalnymi dla klasy $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}^*$ są zbiory postaci $\tilde{E}_{\varrho, \theta} = \Delta_{\varrho} \cup \{w : |\arg w| < \theta\}$, $\varrho > 0$, $\theta \in [0, \pi]$, przy czym $\tilde{E}_{\varrho, 0} = \Delta_{\varrho}$, $\tilde{E}_{\varrho, \pi} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq -\varrho\}$, zaś dla klasy $\mathcal{Y} \cap \mathcal{K}(i)$ - zbiory $\tilde{D}_{\varrho, \theta} = \Delta_{\varrho} \cup \{w : \operatorname{Re} w > \varrho \cos \theta\}$ gdy $\theta \in (0, \pi]$ oraz $\tilde{D}_{\varrho, 0} = \Delta_{\varrho}$. W konsekwencji w [H6] udowodnione zostały dwa następujące twierdzenia.

Twierdzenie 3.19 (H6, Thm.1). *Zbiór $K_{\mathcal{Y} \cap \mathcal{K}(i)}$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem osi rzeczywistej. Brzeg tego zbioru ma równanie biegunowe $w = \varrho_1(|\theta|)e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, gdzie*

$$(3.26) \quad \varrho_1(\theta) = \begin{cases} 1 & , \theta = 0 \\ \frac{\pi \sin \theta}{(2\pi - \theta) \sin \frac{\pi\theta}{2\pi - \theta}} & , \theta \in (0, \pi) \\ 1/2 & , \theta = \pi . \end{cases}$$

Twierdzenie 3.20 (H6, Thm.2). *Zbiór $K_{\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}^*}$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem osi rzeczywistej. Brzeg tego zbioru ma równanie biegunowe $w = \varrho_2(|\theta|)e^{i\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, gdzie*

$$(3.27) \quad \varrho_2(\theta) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2\right)^{-1} \left(\frac{\pi - \theta}{\pi + \theta}\right)^{\frac{\theta}{\pi}} & , \theta \in [0, \pi) \\ 1/4 & , \theta = \pi . \end{cases}$$

Rozważmy część wspólną obu wyżej dyskutowanych klas. Tego typu łączenie warunków geometrycznych prowadzi zwykle do dużych komplikacji przy badaniu własności funkcji spełniających te warunki. W przypadku klasy $\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}^* \cap \mathcal{K}(i)$ dowodzimy, że zbiorami ekstremalnymi są zbiory $\tilde{E}_{\varrho, \theta}$ gdy $\theta \in [0, \pi/2]$ oraz $\tilde{D}_{\varrho, \theta}$ gdy $\theta \in [\pi/2, \pi]$. Dzięki temu otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.21 (H6, Thm.3). *Zbiór $K_{\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}^* \cap \mathcal{K}(i)}$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem osi rzeczywistej. Brzeg tego zbioru ma równanie biegunowe $w = \varrho(|\theta|)e^{i\theta}$ $\theta \in [-\pi, \pi]$, gdzie*

$$(3.28) \quad \varrho(\theta) = \begin{cases} \left(1 - \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2\right)^{-1} \left(\frac{\pi - \theta}{\pi + \theta}\right)^{\frac{\theta}{\pi}} & , \theta \in [0, \pi/2] \\ \frac{\pi \sin \theta}{(2\pi - \theta) \sin \frac{\pi\theta}{2\pi - \theta}} & , \theta \in [\pi/2, \pi) \\ 1/2 & , \theta = \pi . \end{cases}$$

Innymi słowy wykazane zostało, że

$$K_{\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}^* \cap \mathcal{K}(i)} = K_{\mathcal{Y} \cap \mathcal{S}^*} \cup K_{\mathcal{Y} \cap \mathcal{K}(i)} .$$

3.3. Klasy funkcji o współczynnikach dowolnych - prace [H7], [H8], [H9]. W dwóch poprzednich rozdziałach rozważane były klasy funkcji o współczynnikach rzeczywistych. Z oczywistych więc względów klasy te nie posiadają własności niezmienniczości względem obrotu (własności (2.3)). W tej części autoreferatu rozpatrywane będą klasy funkcji o współczynnikach dowolnych. Niemniej jednak także i tu, ze względu na definicje klas omawianych poniżej, własność (2.3) nie zachodzi. Z tego powodu, przy wyznaczaniu zbiorów

Koebeego i zbiorów pokrycia posługiwać się będziemy metodami omówionymi szczegółowo w poprzednich rozdziałach.

Praca [H7] poświęcona jest klasie $\mathcal{CS}^*$ złożonej z funkcji prawie gwiazdzistych oraz szczególnym jej podklasom. O funkcji f mówimy, że jest prawie gwiazdzista jeśli istnieją: liczba rzeczywista $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ oraz funkcja $g \in \mathcal{S}^*$ takie, że nierówność $\operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{e^{i\beta}g(z)} \right) > 0$ zachodzi dla każdego $z \in \Delta$. Definicja powyższa wprowadzona przez Reade'a (por. [52]) stanowi analogię definicji znanej i często badanej klasy $\mathcal{C}$ funkcji prawie wypukłych (por. np. [27]). Przez $\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*$ oznaczamy rodzinę funkcji $\{f \in \mathcal{CS}^* : \operatorname{Re} \left(\frac{f(z)}{g(z)} \right) > 0, g \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*\}$. Wobec powyższej definicji można funkcję $f \in \mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*$ zapisać w postaci $f(z) = g(z)p(z)$, gdzie $g \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*$, $p \in \mathcal{P}$.

W [H7] rozważane są dwie szczególne podklasy $\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*$ generowane przez odpowiednio wybrane funkcje gwiazdziste. I tak mamy

$$(3.29) \quad \mathcal{Q} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} p(z), p \in \mathcal{P} \right\}$$

oraz

$$(3.30) \quad \mathcal{H} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z) = \frac{z}{1-z^2} p(z), p \in \mathcal{P} \right\}.$$

Oprócz dwóch wymienionych rodzin funkcji, rozważana jest także klasa $\mathcal{H}^{(2)}$ złożona z tych funkcji klasy $\mathcal{H}$, które są nieparzyste.

Warto zwrócić uwagę na uzasadnienie takiego wyboru funkcji gwiazdzistych. Otóż, jak zostanie to pokazane w dalszej części tego rozdziału, wyniki z klasy $\mathcal{Q}$ będzie można przenieść na całą klasę $\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*$. Z kolei $\mathcal{H}$ jest pewnym uogólnieniem klasy $\mathcal{T}$ funkcji typowo-rzeczywistych rozważanym przez Hengartnera i Schobera w [21] oraz Bogowskiego i Burniaka w [4]. Klasę $\mathcal{T}$ można bowiem przedstawić w postaci

$$(3.31) \quad \mathcal{T} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z) = \frac{z}{1-z^2} p(z), p \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}} \right\}.$$

Istotne jest, że funkcje należące do wszystkich wymienionych podklas $\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*$ nie muszą być jednoliste.

Otrzymane w [H7] wyniki dotyczą zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia nad kołami Δ_r . Aby uzyskać wyniki tego typu należy znać zbiory $\Omega(z)$ zmienności $f(z)$ przy ustalonym $z \in \Delta$, gdy f przebiega daną klasę. Zbiory takie, dla każdej rodziny typu $\{g(z)p(z) : p \in \mathcal{P}\}$ przy ustalonej funkcji gwiazdzistej g , są kołami postaci $g(z) \cdot \Delta(\frac{1+r^2}{1-r^2}, \frac{2r}{1-r^2})$, gdzie $|z| = r \in (0, 1)$. Co więcej, każdy

punkt brzegu zbioru $\Omega(z)$ jest wartością funkcji $f_{g,\theta}$ danej wzorem $f_{g,\theta}(z) = g(z) \cdot \frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}$.

Z tego powodu, przy wyznaczaniu zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia nad Δ_r wystarczy wyznaczyć minimum bądź maksimum wyrażenia $|f_{g,\theta}(re^{i\varphi})|$ w ustalonym kierunku, gdzie r jest ustalone, zaś $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$. Należy więc znaleźć obwiednię rodziny krzywych $\{F(\theta, \varphi) : \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$, gdzie $F(\theta, \varphi) = g(re^{i\varphi}) \cdot \frac{1+re^{i(\varphi-\theta)}}{1-re^{i(\varphi-\theta)}}$. Ze względu na to, że funkcje $f_{g,\theta}$ nie są jednoliste, naturalnym ograniczeniem stosowania tej metody w przypadku wyznaczania zbiorów Koebeego są koła jednolistości danej klasy. Koczan w [29] (por. także [4]) udowodnił, że dla klasy $\mathcal{H}$ promień jednolistości wynosi $r_{\mathcal{S}}(\mathcal{H}) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0.346 \dots$

Niech

$$(3.32) \quad F_K : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \frac{re^{i\varphi}}{1-r^2e^{2i\varphi}} \frac{1-re^{i\alpha(\varphi)}}{1+re^{i\alpha(\varphi)}} ,$$

$$(3.33) \quad F_L : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \frac{re^{i\varphi}}{1-r^2e^{2i\varphi}} \frac{1+re^{i\alpha(\varphi)}}{1-re^{i\alpha(\varphi)}} ,$$

gdzie

$$(3.34) \quad \alpha : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \arctg \left(\frac{2r^2 \sin(2\varphi)}{(1+r^2)^2} \right) .$$

Twierdzenie 3.22 (H7, Thm.2). *Niech $r_1 = 0.455 \dots$.*

1. *Zbiór $K_{\mathcal{H}}(\Delta_r)$, $r \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzegiem tego zbioru jest krzywa $F_K([0, 2\pi])$.*
2. *Zbiór $L_{\mathcal{H}}(\Delta_r)$, $r \in (0, 1)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzegiem tego zbioru w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej jest krzywa $F_L([0, \pi/2])$ dla $0 < r \leq r_1$ oraz $F_L([0, \varphi_1])$ dla $r_1 < r < 1$ i pewnej liczby φ_1 z przedziału $(0, \pi/2)$.*

Ponieważ promień jednolistości klasy $\mathcal{H}^{(2)}$ wynosi $r_{\mathcal{S}}(\mathcal{H}^{(2)}) = \sqrt{2} - 1$ (por. [H7], Lem.6), zatem zbiór Koebeego klasy $\mathcal{H}^{(2)}$ nad zbiorami Δ_r można wyznaczyć metodą obwiedni tylko dla $r \in (0, \sqrt{2} - 1)$.

Niech

$$(3.35) \quad G_K : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \frac{re^{i\varphi}}{1-r^2e^{2i\varphi}} \frac{1-r^2e^{i\beta(\varphi)}}{1+r^2e^{i\beta(\varphi)}} ,$$

$$(3.36) \quad G_L : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \frac{re^{i\varphi}}{1 - r^2e^{2i\varphi}} \frac{1 + r^2e^{i\beta(\varphi)}}{1 - r^2e^{i\beta(\varphi)}} ,$$

gdzie

$$(3.37) \quad \beta : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \arctg \left(\frac{2r^2 \sin(2\varphi)}{1 + r^4} \right) .$$

Twierdzenie 3.23 (H7, Thm.3). *Niech $r_2 = (\sqrt{3} - 1)/\sqrt{2} = 0.517\dots$.*

1. *Zbiór $K_{\mathcal{H}(2)}(\Delta_r)$, $r \in (0, \sqrt{2} - 1)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzegiem tego zbioru jest krzywa $G_K([0, 2\pi])$.*
2. *Zbiór $L_{\mathcal{H}(2)}(\Delta_r)$, $r \in (0, 1)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzegiem tego zbioru w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej jest krzywa $G_L([0, \pi/2])$ dla $0 < r \leq r_2$ oraz $G_L([0, \varphi_2])$ dla $r_2 < r < 1$ i pewnej liczby φ_2 z przedziału $(0, \pi/2)$.*

Z kolei dla całej klasy $\mathcal{CS}^*$ promień jednolistości wyznaczył Sakaguchi [56]; promień ten jest równy $r_{\mathcal{S}}(\mathcal{CS}^*) = 2 - \sqrt{3}$. Funkcją ekstremalną jest tu funkcja $f(z) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3} = \frac{z}{(1-z)^2} \cdot \frac{1+z}{1-z}$. Ponieważ funkcja ta należy również do klasy $\mathcal{Q}$, mamy zatem $r_{\mathcal{S}}(\mathcal{Q}) = 2 - \sqrt{3}$.

Niech

$$(3.38) \quad H_K : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \frac{re^{i\varphi}}{(1 - re^{i\varphi})^2} \frac{1 - re^{i\gamma(\varphi)}}{1 + re^{i\gamma(\varphi)}} ,$$

$$(3.39) \quad H_L : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \frac{re^{i\varphi}}{(1 - re^{i\varphi})^2} \frac{1 + re^{i\gamma(\varphi)}}{1 - re^{i\gamma(\varphi)}} ,$$

gdzie

$$(3.40) \quad \gamma : \mathbb{R} \ni \varphi \mapsto \arctg \left(\frac{2r \sin(\varphi)}{1 + r^2} \right) .$$

Twierdzenie 3.24 (H7, Thm.4). *Niech $r_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.*

1. *Zbiór $K_{\mathcal{Q}}(\Delta_r)$, $r \in (0, 2 - \sqrt{3})$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzegiem tego zbioru jest krzywa $H_K([0, 2\pi])$.*
2. *Zbiór $L_{\mathcal{Q}}(\Delta_r)$, $r \in (0, 1)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzegiem tego zbioru w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej jest krzywa $H_L([0, \pi/2])$ dla $0 <$*

$r \leq r_3$ oraz $H_L([0, \varphi_3])$ dla $r_3 < r < 1$ i pewnej liczby φ_3 z przedziału $(0, \pi/2)$.

Wiadomo, że $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^* \subset \mathcal{T}$. Z własności zbiorów pokrycia (Twierdzenie 2.2, pkt 4) wynika, że $L_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*}(\Delta_r) \subset L_{\mathcal{T}}(\Delta_r)$. Ponieważ $L_{\mathcal{T}}(\Delta_r) = k_1(\Delta_r) \cup k_{-1}(\Delta_r)$, gdzie k_t jest postaci (3.3), a funkcje k_t należą do $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*$, zatem $L_{\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*}(\Delta_r) = k_1(\Delta_r) \cup k_{-1}(\Delta_r)$. Dla każdej funkcji $g \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*$ mamy ponadto $g(\Delta_r) \cap \{w : \operatorname{Re} w \geq 0\} \subset k_1(\Delta_r) \cap \{w : \operatorname{Re} w \geq 0\}$. Zatem w celu wyznaczenia zbioru pokrycia dla całej klasy $\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*$, zamiast szukać maksimum $|f(z)| = |g(z)p(z)|$, gdy g i p przebiegają zbiory odpowiednio $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}^*$ i $\mathcal{P}$, przy ustalonym $a = \arg f(z)$, wystarczy rozważać maksimum $|k_1(z)p(z)|$, gdy p przebiega zbiór $\mathcal{P}$, przy założeniu, że $a = \arg f(z)$. Stąd otrzymujemy

Twierdzenie 3.25 (H7, Thm.5). *Zbiór $L_{\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*}(\Delta_r)$, $r \in (0, 1)$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Ponadto*

$$L_{\mathcal{CS}_{\mathbb{R}}^*}(\Delta_r) \cap \{w : \operatorname{Re} w \geq 0\} = L_{\mathcal{Q}}(\Delta_r) \cap \{w : \operatorname{Re} w \geq 0\}.$$

Wyniki omawiane w Rozdziale 4 dla klasy $\mathcal{X}^{(n)}$ złożonej z funkcji n -symetrycznych, wypukłych w kierunku osi rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych warto zestawzić z wynikami dla pokrewnej klasy $\mathcal{F}^{(n)}$ prezentowanymi w [H8]. Do tej klasy należą wszystkie funkcje n -symetryczne i wypukłe w kierunku osi rzeczywistej. Nie wymagane jest, by funkcje te miały współczynniki rzeczywiste. Rezygnacja z tego założenia skutkuje tym, że zbiory ekstremalne typowane przy wyznaczaniu zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia nie muszą już być symetryczne względem osi rzeczywistej. Powoduje to z kolei, że w klasie $\mathcal{F}^{(n)}$ zbiory Koebeego i zbiory pokrycia mają tylko n osi symetrii, a nie $2n$ jak to było dla klasy $\mathcal{X}^{(n)}$.

Jak pokazano w [H8], zbiory ekstremalne są $2n$ -kątami, przy czym w szczególnych przypadkach są to wielokąty uogólnione (wielokąty nieograniczone). Ze względu na konieczność rozważania innych wielokątów ekstremalnych ze względu na zbiory Koebeego, a innych ze względu na zbiory pokrycia, ale także różnych wielokątów ze względu nie tylko na parzystość n , ale nawet ze względu na resztę z dzielenia n przez 4, część badań i wyników została zaprezentowana w pracy [P16]. Ponieważ metoda stosowana w [P16] jest analogiczna jak w [H8], praca ta nie została włączona do cyklu stanowiącego osiągnięcie habilitacyjne. W [H8] zakłada się, że n jest liczbą parzystą, zaś w [P16] - n jest liczbą nieparzystą.

Główne wyniki prezentowane w [H8] przedstawione zostały w poniższych twierdzeniach.

Twierdzenie 3.26 (H8, Cor.1, Cor.2, Cor.4). *Dla ustalonej liczby parzystej n mamy*

1. $K_{\mathcal{F}(n)} = H_1(\Delta) \cap H_2(\Delta)$ gdy $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$,
2. $K_{\mathcal{F}(n)} = H_3(\Delta) \cap H_4(\Delta)$ gdy $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$,
3. $K_{\mathcal{F}(2)} = H_5(\Delta) \cap H_6(\Delta)$.

gdzie

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \int_0^1 z(1-t^n)^{\frac{2}{n}}(1-it^n z^{n/2})^{-\frac{4}{n}} dt, \\ H_3(z) &= \int_0^1 z(1-t^n)^{\frac{2}{n}}(1-t^n z^{n/2})^{-\frac{4}{n}} dt, \\ H_5(z^2) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1-z^2}{z} \arctg(z) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{2j}{4j^2-1} z^{2j}, \end{aligned}$$

oraz $H_2(z) = \varepsilon^{-1} H_1(\varepsilon z)$, $H_4(z) = \varepsilon^{-1} H_3(\varepsilon z)$, $H_6(z) = -H_5(-z)$, zaś $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Twierdzenie 3.27 (H8, Thm.7, Thm.9). *Niech $c = \Gamma(\frac{1}{4})^2/8\sqrt{\pi}$.*

1. $L_{\mathcal{F}(2)} = \mathbb{C}$,
2. $L_{\mathcal{F}(4)} = \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} w| < c\} \cup \{w \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} w| < c\}$.

Zbiory pokrycia dla pozostałych n parzystych zostały również wyznaczone ([H8], Thm.8, Thm.9). Ponadto, wykazaliśmy że dla $n \geq 6$ mamy

$$\sup \{|f(z)| : f \in \mathcal{F}^{(n)}, z \in \Delta\} = B\left(\frac{1}{n}, \frac{n-4}{2n}\right) / n \sqrt[n]{4}.$$

W powyższych rezultatach $\Gamma(x)$ i $B(p, q)$ oznaczają odpowiednio funkcje gamma i beta Eulera.

Naturalnym uogólnieniem wypukłości w kierunku osi rzeczywistej dyskutowanej w pracach [H4], [H6], [H8] jest wypukłość w dowolnie ustalonym kierunku $e^{i\alpha\pi}$, $\alpha \in [0, 1]$. W [H9] proponujemy inne sposoby uogólnienia tego pojęcia. Najpierw rozpatrywana jest klasa $\mathcal{K}_\alpha$ funkcji jednolistnych $f \in \mathcal{A}$, które są wypukłe w dwóch symetrycznych kierunkach $e^{i\alpha\pi/2}$ i $e^{-i\alpha\pi/2}$, $\alpha \in [0, 1]$. Oczywiście, $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}(1)$ jest klasą funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej, zaś $\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}(i)$ jest klasą funkcji wypukłych w kierunku osi urojonej. Kolejnym uogólnieniem jest klasa $\mathcal{K}_{\beta, \gamma}$ złożona z funkcji wypukłych w dwóch kierunkach $e^{i\beta\pi/2}$ i $e^{i\gamma\pi/2}$, gdzie $-1 \leq \beta \leq \gamma \leq 1$. W szczególnym przypadku, gdy $\beta = -\gamma$, otrzymujemy $\mathcal{K}_{-\gamma, \gamma} = \mathcal{K}_\gamma$, $\gamma \in [0, 1]$. Inną szczególną sytuację otrzymujemy gdy $\beta = \gamma$. Mamy wtedy klasę $\mathcal{K}_{\gamma, \gamma}$ złożoną z funkcji jednolistnych, które są wypukłe w kierunku $e^{i\gamma\pi}$.

W [H9] wyznaczone zostały zbiory Koebe dla wszystkich ww. klas. W przypadku klasy $\mathcal{K}_\alpha$ pokazane zostało, że zbiorami ekstremalnymi mogą być tylko dopełnienia zbiorów D_j , $j = 1, 2, 3, 4$ postaci

$$\begin{aligned} D_1 &= \{w \in \mathbb{C} : -\alpha\pi/2 \leq \arg(w - w_0) \leq \alpha\pi/2\} , \\ D_2 &= \{w \in \mathbb{C} : \alpha\pi/2 \leq \arg(w - w_0) \leq (2 - \alpha)\pi/2\} , \\ D_3 &= \{w \in \mathbb{C} : (2 - \alpha)\pi/2 \leq \arg(w - w_0) \leq (2 + \alpha)\pi/2\} , \\ D_4 &= \{w \in \mathbb{C} : -(2 - \alpha)\pi/2 \leq \arg(w - w_0) \leq -\alpha\pi/2\} . \end{aligned}$$

Zbiory D_1, D_3 są sektorami o mierze $\alpha\pi$, których dwusieczne są równoległe do osi rzeczywistej. Z kolei zbiory D_2, D_4 są sektorami o mierze $(1 - \alpha)\pi$; ich dwusieczne są równoległe do osi urojonej.

Ponieważ każdy ze zbiorów postaci $(D_j)^c$, $j = 1, 2, 3, 4$ (D^c oznacza dopełnienie zbioru D) można uzyskać ze zbioru $\{w \in \mathbb{C} : |\arg(w - a)| \leq \alpha\pi/2\}$, $a = 1/2(2 - \alpha)$ stosując odpowiednio dobrane przesunięcie i obrót (w przypadku zbiorów $(D_2)^c, (D_4)^c$ trzeba dodatkowo zastąpić α przez $1 - \alpha$), zatem funkcje ekstremalne można uzyskać składając funkcję $f(z) = a \left[1 - \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^{2-\alpha}\right]$

z transformacją Möbiusa $f_t(z) = \frac{f\left(\frac{z-it}{1+itz}\right) - f(-it)}{(1-t^2)f'(-it)}$, $t \in (-1, 1)$ i obrotem o kąt $\theta \in [-\pi, \pi]$, z odpowiednio dobranymi parametrami t, θ . Jak pokazano w dowodzie Twierdzenia 1 w [H9], wierzchołki sektorów generują brzeg zbioru Koebe klasy $\mathcal{K}_\alpha$.

Niech $r_1(\theta) = \left[2(2 - \alpha) \cos \frac{\theta}{2-\alpha}\right]^{-1}$, $r_2(\theta) = \left[2(1 + \alpha) \cos \frac{\theta-\pi/2}{1+\alpha}\right]^{-1}$ i niech α_1 będzie jedynym rozwiązaniem równania $(2 - \alpha) \left(\cos \frac{\pi}{2(2-\alpha)} - 1\right) + 1 - 2\alpha = 0$ w przedziale $[0, 1]$, zaś $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$.

Twierdzenie 3.28 (H9, Thm.1). *Zbiór $K_{\mathcal{K}_\alpha}$, $\alpha \in [0, 1]$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Istnieje liczba $\theta_\alpha \in (0, \pi/2)$ taka, że brzeg tego zbioru w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej ma równanie biegunowe $w = r(\theta)e^{i\theta}$, gdzie*

$$\begin{aligned} 1. \quad & r(\theta) = r_1(\theta) , \quad \theta \in [0, \pi/2] && \text{dla } \alpha \in [0, \alpha_1] , \\ 2.) \quad & r(\theta) = \begin{cases} r_1(\theta) , & \theta \in [0, \theta_\alpha] \\ r_2(\theta) , & \theta \in [\theta_\alpha, \pi/2] \end{cases} && \text{dla } \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2] , \\ 3. \quad & r(\theta) = r_2(\theta) , \quad \theta \in [0, \pi/2] && \text{dla } \alpha \in [\alpha_2, 1] . \end{aligned}$$

Powyższy rezultat uogólnia znane wyniki uzyskane przez Reade'a i Złotkiewicza w [53] oraz, niezależnie, przez Goodmana i Saffa [19]. Mianowicie, dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 1$ mamy

Wniosek 3.6 (H9, Cor.2). *Zbiór Koebeego $K_{\mathcal{K}(i)}$ jest obszarem ograniczonym i symetrycznym względem obu osi płaszczyzny zespolonej. Brzeg tego zbioru w pierwszej ćwiartce płaszczyzny zespolonej ma równanie biegunowe*

$$w = \frac{1}{4 \cos(\theta/2 - \pi/4)} e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, \pi/2].$$

Wniosek 3.7 (H9, Cor.3). $K_{\mathcal{K}(1)} = iK_{\mathcal{K}(i)}$.

Na podstawie Twierdzenia 3.28 można również wyznaczyć zbiory Koebeego dla klasy $\mathcal{K}_{\beta,\gamma}$, $-1 \leq \beta \leq \gamma \leq 1$. Warto zauważyć, że jeśli $f \in \mathcal{K}_\alpha$, to $F(z) = e^{-i\delta\pi/2} f(e^{i\delta\pi/2} z)$, gdzie $\delta = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$, należy do $\mathcal{K}_{\beta,\gamma}$. Spostrzeżenie to pozwala przekształcić zbiory ekstremalne w klasie $\mathcal{K}_\alpha$ w zbiory, które są ekstremalne w klasie $\mathcal{K}_{\beta,\gamma}$. Dzięki temu mamy

Twierdzenie 3.29 (H9, Thm.1). *Niech β i γ będą ustalonymi liczbami takimi, że $-1 \leq \beta \leq \gamma \leq 1$. Wtedy $K_{\mathcal{K}_{\beta,\gamma}} = e^{i\delta\pi/2} K_{\mathcal{K}_\alpha}$, gdzie $\delta = \frac{1}{2}(\beta + \gamma)$ i $\alpha = \frac{1}{2}(\gamma - \beta)$.*

Gdy $\beta = -\gamma$, to $\delta = 0$ i $\alpha = \gamma$ i wtedy Twierdzenie 3.29 sprowadza się do Twierdzenia 3.28. Jeśli zaś $\gamma = \beta$, to $\delta = \beta$ i $\alpha = 0$. Otrzymujemy stąd zbiór Koebeego klasy $\mathcal{K}_{\beta,\beta}$ funkcji jednolistnych, wypukłych w kierunku $e^{i\beta\pi/2}$, $\beta \in [-1, 1]$.

Wniosek 3.8. *Niech $\beta \in [-1, 1]$ będzie ustaloną liczbą. Wtedy*

$$K_{\mathcal{K}_{\beta,\beta}} = e^{i\beta\pi/2} K_{\mathcal{K}(1)}.$$

4. OMÓWIENIE POZOSTAŁYCH OSIĄGNIĘĆ NAUKOWO-BADAWCZYCH

Prace, które nie zostały włączone do osiągnięcia habilitacyjnego dotyczą następujących zagadnień:

- zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia - [P2], [P4], [P5], [P6], [P9], [P11], [P12], [P16],
- problemów jednolistości dla funkcji typowo-rzeczywistych - [P1], [P3], [P7],
- funkcji bi-jednolistnych - [P13], [P14],
- funkcji kołowo-symetrycznych - [P15], [P18],
- wyznaczników Hankela dla funkcji analitycznych - [P17], [P20], [P21], [P22],
- innych zagadnień dotyczących funkcji analitycznych - [P8], [P10], [P19].

Wyniki uzyskane w pracach [H1-H9] stanowią najważniejszą część głównego nurtu badań związanych z wyznaczaniem zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia. Jednakże część wyników opublikowanych w pracach [P2], [P4], [P5], [P6], [P9], [P11], [P12], [P16] nie została włączona do cyklu prac stanowiących osiągnięcie habilitacyjne.

Badania nad zbiorami Koebeego w klasie $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ funkcji wypukłych o współczynnikach rzeczywistych prowadził McGregor [42]. W podklasie $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}$ złożonej z funkcji nieparzystych zbiór Koebeego wyznaczony został przez Krzyża i Read'e'a [33]. Wyniki w [P2] uogólniają powyższe rezultaty. Opisano w tej pracy zbiory ekstremalne i funkcje ekstremalne dla klasy $\mathcal{K}_{\mathbb{R}}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ złożonej z tych funkcji $f \in \mathcal{K}_{\mathbb{R}}$, które są n -symetryczne. Dzięki temu wyznaczone zostały zbiory zarówno Koebeego, jak i pokrycia w tej klasie.

W artykule [18] Goodman stwierdził, że wyznaczenie zbioru Koebeego dla klasy $\mathcal{T}^{(2)}$ funkcji typowo-rzeczywistych nieparzystych jest bardzo trudnym wyzwaniem (por. także komentarz w [17]). Jak dotąd nie udało się tego zbioru wyznaczyć. Znane są jedynie pewne nadzbiory zbioru $K_{\mathcal{T}^{(2)}}$ (por. [58]). Przy wykorzystaniu metody obwiedni, w pracach [P4] i [P6] badane były zbiory Koebeego, ale też zbiory pokrycia, w $\mathcal{T}^{(2)}$ nad pewnymi zbiorami D .

W przypadku zbiorów Koebeego rozważano rodzinę zbiorów Ω_{α} , $\alpha \leq 4/3$ związanych z obszarami jednolistości klasy $\mathcal{T}^{(2)}$. Jako szczególny przypadek otrzymano zbiór Koebeego klasy $\mathcal{T}^{(2)}$, nad zbiorem $\Omega_0 = H$, gdzie H jest zdefiniowany przez (3.5). Uzyskany wynik w [P4] naprawia błąd z pracy Merkesa [43]. Największym zbiorem rodziny Ω_{α} , dla którego można było wyznaczyć zbiór Koebeego jest $\Omega_{4/3}$. Zbiór ten jest nadzbiorem zbioru lokalnej jednolistości klasy $\mathcal{T}^{(2)}$. Bardziej precyzyjnie, zbiór lokalnej jednolistości jest postaci

$\Omega_{4/3} \setminus \{\pm ip : p \geq \sqrt{2} - 1\}$. Z kolei zbiory pokrycia badane były nad zbiorami Δ_r , $r \in (0, 1)$.

Okazuje się, że dla $r \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$ jest $L_{\mathcal{T}(2)}(\Delta_r) = g_1(\Delta_r) \cup g_0(\Delta_r)$, gdzie $g_t(z) = \frac{z(1+z^2)}{(1+z^2)^2 - 4tz^2}$, $t \in [0, 1]$ (dla porównania, w klasie $\mathcal{T}$ jest $L_{\mathcal{T}}(\Delta_r) = k_1(\Delta_r) \cup k_{-1}(\Delta_r)$, gdzie $k_t(z) = \frac{z}{1-2tz+z^2}$, $t \in [-1, 1]$). Jednak dla dużych r (tj. $r \in ((\sqrt{5} - 1)/2, 1)$) tylko jedna funkcja jest ekstremalna. Mamy wtedy $L_{\mathcal{T}(2)}(\Delta_r) = g_1(\Delta_r)$.

Podobne zagadnienia rozważano także w pracy [P5] dla klasy $\mathcal{TM}$ złożonej z funkcji postaci $f(z) = \int_0^1 \frac{z}{1-tz} d\mu(t)$, gdzie $\mu \in \mathbb{P}_{[0,1]}$.

Badania opisane w pracach [P9] i [P16] dotyczą funkcji z ustalonym kierunkiem wypukłości. W przypadku [P9] jest to wypukłość w kierunku osi urojonej. Dla klasy takich funkcji, posiadających rzeczywiste współczynniki, wyznaczono zbiory Koebeego i zbiory pokrycia, a także minoranty i majoranty. Wyniki zależą od parzystości n . Rozważania przedstawione w pracy [P16] są kontynuacją rozważań opisanych w [H8] dla klasy $\mathcal{F}^{(n)}$, gdzie n jest nieparzyste.

Także z klasą funkcji typowo-rzeczywistych związana jest praca [P12]. Funkcje typowo-rzeczywiste z inną normalizacją niż klasyczna rozważała jako pierwsza Piłat w [49]. Przedstawiła w tej pracy podstawowe własności klasy $\mathcal{T}(r)$, złożonej z funkcji typowo-rzeczywistych z unormowaniem Montela $f(0) = 0$, $f(r) = r$, $r \in (0, 1)$. Posługując się ideą Goodmana z pracy [16], Lewandowski i Miazga [35] wyznaczyli zbiór $K_{\mathcal{T}(r)}$. Wspomniana idea bazowała na podporządkowaniu funkcji klasy $\mathcal{T}$ tzw. uniwersalnej funkcji typowo-rzeczywistej, która nie jest jednolistna. W [H3] opisana została koncepcja innej metody, prowadzącej do wyznaczenia zbioru $K_{\mathcal{T}}$, bez potrzeby odwoływania się do podporządkowania z wielolistną funkcją majoryzującą. Analogiczną metodę można zastosować do klasy $\mathcal{T}(r)$. Dzięki temu uzyskane zostały zbiory $K_{\mathcal{T}(r)}$ dla $r \in (0, 1)$.

Pewnym podsumowaniem badań dotyczących zbiorów Koebeego dla klas funkcji jednolistnych n -symetrycznych, spełniających dodatkowe warunki geometryczne są rezultaty zaprezentowane w [P11]. Powyżej wspomniane warunki geometryczne to: wypukłość, wypukłość w kierunku osi rzeczywistej oraz wypukłość w kierunku osi urojonej. Drugim kryterium różnicującym wyniki to fakt, czy współczynniki są rzeczywiste czy dowolne. Wykazano m.in. że dla klasy $\mathcal{K}^{(n)}$ funkcji wypukłych n -symetrycznych jest $K_{\mathcal{K}^{(n)}} = \Delta_{r_n}$, gdzie $r_n = \Gamma(1/n)^2 / 2n\Gamma(2/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Problemy związane z jednolistością funkcji typowo-rzeczywistych były badane w pracach [P1] i [P3]. Gołuzin wykazał [13], że wszystkie funkcje typowo-rzeczywiste są jednoliste w zbiorze H postaci (3.5). Co więcej, zbioru tego nie można powiększyć w taki sposób, by nadal wszystkie funkcje klasy $\mathcal{T}$ były jednoliste.

Z pracy Gołuzina wiadomo, że dla $\mathcal{T}$ zbiór lokalnej jednolistości jest identyczny jak zbiór jednolistości, czyli jest równy H . Okazuje się, że zbiory lokalnej jednolistości i jednolistości dla klasy $\mathcal{T}^{(2)}$ różnią się. Zbiór lokalnej jednolistości został wyznaczony w pracy [31]. Jest on postaci $G(\mathcal{T}^{(2)}) = \{z \in \Delta : |z^4 + \frac{2}{3}z^2 + 1| > \frac{8}{3}|z|^2\} \setminus \{\pm ip : p \geq \sqrt{2} - 1\}$. Oczywiście, $H \subset G(\mathcal{T}^{(2)})$. Z drugiej strony, zbiorem jednolistości klasy $\mathcal{T}^{(2)}$ jest, podobnie jak dla klasy $\mathcal{T}$, zbiór H . Fakt, że zbiory lokalnej jednolistości i jednolistości dla $\mathcal{T}^{(2)}$ się różnią, pozwala znajdować inne niż H zbiory jednolistości w tej klasie.

W [P1] wykazano, że zbiór $D = D_1 \cup D_2$, gdzie

$$D_1 = \left\{ z \in \Delta : |z^4 + \frac{2}{3}z^2 + 1| > \frac{8}{3}|z|^2, \operatorname{Re} z > 0 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ z \in \Delta : \left| \frac{12z^2}{(1+z^2)^2} - 1 \right| < 2, \operatorname{Re} z \leq 0 \right\},$$

też jest zbiorem jednolistości klasy $\mathcal{T}^{(2)}$. Wynik ten został uogólniony w [P3], gdzie uzyskano dwuparametrową rodzinę zbiorów jednolistości klasy $\mathcal{T}^{(2)}$.

Jednolistość funkcji klasy $\mathcal{T}(1/2)$ była przedmiotem rozważań w [P7]. Wyznaczone zostały promienie: lokalnej jednolistości i wypukłości w kierunku osi urojonej oraz oszacowane zostały promienie: gwiaździstości, wypukłości w kierunku osi rzeczywistej oraz wypukłości.

Prace [P13] i [P14] poświęcone są oszacowaniom współczynników w pewnych podklasach funkcji bi-jednolistnych. O funkcji f mówimy, że jest bi-jednolista jeśli f oraz f^{-1} są jednoliste w Δ . Z jednolistości f wynika oczywiście jednolistość f^{-1} . Z drugiej strony, nie dla każdej funkcji f , funkcja f^{-1} jest analityczna w całym kole Δ . Jako przykłady funkcji które są bi-jednoliste można podać: $\frac{z}{1-z}$, $\frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z}$ czy $\log \frac{1}{1-z}$. Z drugiej strony funkcje takie jak $\frac{z}{(1-z)^2}$ czy $z + z^2/2$ nie są bi-jednoliste. Klasę wszystkich funkcji $f \in \mathcal{A}$, które są bi-jednolite oznaczamy symbolem $\mathcal{S}_\sigma$. Problematyka dotycząca podklas klasy $\mathcal{S}_\sigma$ jest ostatnio intensywnie podejmowana. Niestety, dokładnych wyników dotyczących oszacowań współczynników funkcji bi-jednolistnych w zasadzie brak. Jedynym znanym dokładnym oszacowaniem jest nierówność $|a_n| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$

prawdziwa dla funkcji bi-jednolistnych wypukłych (por. [7]). Nawet oszacowania współczynnika a_2 są niedokładne. Mamy np. $|a_2| < 1.51$ dla $\mathcal{S}_\sigma$ (por. [37]), czy $|a_2| \leq \sqrt{2}$ dla klasy $\mathcal{S}_\sigma^*$ funkcji bi-jednolistnych gwiazdzystych (por. [28]).

W [P13] zaproponowaliśmy wykorzystanie do oszacowań współczynnika a_3 w różnych podklasach klasy $\mathcal{S}_\sigma$ funkcjonału Fekete-Szegö. Dzięki temu możliwe było poprawienie oszacowań podanych w pracach [1] (Ali *et al*) oraz [7] (Brannan, Taha). Oszacowania w [P14] poprawiają wyniki z prac [1] oraz [45], dotyczące a_3 dla funkcji z $\mathcal{S}_\sigma$, które są gwiazdziste rzędu α i silnie gwiazdziste rzędu α oraz wypukłe rzędu α i silnie wypukłe rzędu α .

Funkcje kołowo-symetryczne rozpatrywane były w [H5], ale także w dwóch artykułach: [P15] i [P18]. W [P15] analizowane były własności funkcji kołowo-symetrycznych z ustalonym drugim współczynnikiem oraz funkcje kołowo-symetryczne gwiazdziste. W [P18] badana była klasa $\mathcal{X}'$ funkcji kołowo-symetrycznych lokalnie jednolistnych. Przeanalizowane zostały własności dwóch rodzin funkcji należących do $\mathcal{X}'$, a posiadających istotne znaczenie dla całej klasy $\mathcal{X}'$. Rozwiązane zostały problemy dotyczące oszacowania współczynników tej klasy ($|a_n| \leq \sum_{j=1}^{n-1} \frac{4^j}{j!} \binom{n-2}{j-1}$), funkcja ekstremalna $f(z) = z \exp \frac{4z}{1-z}$). Wykazano m.in., że dla funkcji $f \in \mathcal{X}'$ i $z \in H$, gdzie H jest postaci (3.5), jest $\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} \geq 0$. Jest to o tyle ciekawe, że identyczna własność zachodzi dla klasy $\mathcal{T}$ funkcji typowo-rzeczywistych. W [P18] wyznaczono również promienie gwiazdzistości, wypukłości i jednolistności dla klasy $\mathcal{X}'$.

Tematyka związana z wyznacznikami Hankela stała się popularna w literaturze matematycznej ostatnich lat. Większość badań koncentruje się na wyznacznikach $H_2(2)$ oraz $H_3(1)$. Wyznaczniki te są postaci $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ oraz $H_3(1) = (a_3a_5 - a_4^2) + a_2(a_3a_4 - a_2a_5) + a_3(a_2a_4 - a_3^2)$. Badań dotyczących oszacowań $H_2(2)$ i $H_3(1)$ w klasach funkcji niejednolistnych dotąd nie prowadzono.

W artykule [P17] rozważaliśmy wyznaczniki $H_2(n) = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2$ w klasie $\mathcal{T}$ funkcji typowo-rzeczywistych. W odróżnieniu od wyników w podklasach klasy $\mathcal{S}$, gdzie wyrażenie $|H_2(2)|$ jest ograniczone przez 1, w klasie $\mathcal{T}$ wartość tego wyznacznika przekracza tę liczbę. Mamy bowiem dokładne oszacowanie $-9 \leq H_2(2) \leq 1$. Wykazano w [P17] także dokładne oszacowanie $-4(3 - \sqrt{6})/9 \leq H_2(3) \leq 15$. Co więcej, uzyskano ogólne nierówności dla $H_2(n)$, $n \geq 4$ w $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}^{(2)}$.

Innym przykładem klasy złożonej z funkcji niejednolistnych, dla której uzyskane zostały oszacowania pewnych funkcjonałów współczynnikowych, jest klasa $\mathcal{T}(\lambda)$ zdefiniowana przez Szynala w [60]. Mianowicie, $f \in \mathcal{T}(\lambda)$, $\lambda \geq 0$

jeśli f jest analityczna w Δ i ma postać $f(z) = \int_{-1}^1 \frac{z}{(1-2tz+z^2)^\lambda} d\mu(t)$, gdzie $\mu \in \mathbb{P}_{[-1,1]}$. Oczywiście, $\mathcal{T}(1) = \mathcal{T}$. Współczynniki funkcji tej klasy wyrażają się przy pomocy wielomianów Gegenbauera $C_n^{(\lambda)}$. Wykorzystując własności tych wielomianów, w [P21] wyznaczone zostały zbiory zmienności par współczynników funkcji z klasy $\mathcal{T}(\lambda)$: (a_2, a_3) , (a_3, a_5) oraz (a_2, a_4) . Dzięki temu rozwiązane zostały problemy dotyczące oszacowań funkcjonałów takich jak: $a_3 - \mu a_2^2$, $a_5 - \mu a_3^2$, $a_4 - a_2 a_3$ czy $H_2(2) = a_2 a_4 - a_3^2$.

Skomplikowaną sprawą jest wyznaczenie dokładnego oszacowania wyznacznika $H_2(2)$ w klasie funkcji prawie wypukłych $\mathcal{C}$. Wynika to z faktu, że funkcja $f \in \mathcal{C}$, jeśli istnieją funkcja gwiazdzista g , funkcja $p \in \mathcal{P}$ i liczba rzeczywista $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ takie, że $e^{i\beta} z f'(z)/g(z) = p(z) \cos \beta + i \sin \beta$. Oznacza to, że współczynniki funkcji f zależą od współczynników funkcji p i g oraz liczby β . Najlepszym znanym do tej pory oszacowaniem $H_2(2)$, ale dla klasy $\mathcal{C}_0$, to jest w przypadku gdy $\beta = 0$, jest wynik opublikowany w [51]; udowodniono, że $|H_2(2)| \leq 85/36$. W pracy [P24] udowodniliśmy, że dla $\mathcal{C}_0$ jest prawdziwa nierówność $|H_2(2)| \leq 1.242 \dots$. Co więcej, wykazaliśmy, że w klasie $\mathcal{S}$ funkcji jednolistnych, w odróżnieniu od klasy $\mathcal{S}^*$ funkcji gwiazdzistych, moduł drugiego wyznacznika Hankela może przekraczać liczbę 1.

Innym problemem pojawiającym się w literaturze dotyczącej wyznaczników Hankela jest dokładne oszacowanie wyznacznika $H_3(1)$ choćby dla najważniejszych podklas funkcji jednolistnych. Takie dokładne oszacowania nie są znane, a próby zbliżenia się do tych dokładnych oszacowań przynoszą efekty raczej niesatysfakcjonujące.

Kierując się tą motywacją, w [P20] uzyskaliśmy oszacowania dość bliskie hipotetycznym dokładnym oszacowaniom dla trzech klas: $\mathcal{S}^*$, $\mathcal{K}$ oraz $\mathcal{R}$ złożonej z funkcji analitycznych f , dla których $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ w kole Δ . Uzyskano następujące wyniki: $|H_3(1)| \leq 1$ dla $f \in \mathcal{S}^*$, $|H_3(1)| \leq 0.09 \dots$ dla $f \in \mathcal{K}$ i $|H_3(1)| \leq 0.68 \dots$ dla $f \in \mathcal{R}$, ale także dokładne oszacowania tego wyznacznika w podklasach ww. klas złożonych z funkcji 2-symetrycznych (czyli nieparzystych) i 3-symetrycznych. I tak np. dla $\mathcal{S}^{*(3)}$ i $\mathcal{R}^{(3)}$ uzyskano oszacowania: $4/9$ i $1/4$. Można sformułować hipotezę, że liczby te są dokładnymi ograniczeniami $|H_3(1)|$ w klasach $\mathcal{S}^*$ i $\mathcal{R}$. Wśród dokładnych oszacowań uzyskanych dla $\mathcal{S}^{*(2)}$, $\mathcal{K}^{(2)}$ oraz $\mathcal{R}^{(2)}$ warto wymienić oszacowanie dla funkcji wypukłych, nieparzystych, tj. $|H_3(1)| \leq 4/135$. W przypadku wyników dokładnych wskazane zostały funkcje ekstremalne, czyli te, które realizują równość w tych oszacowaniach.

Kontynuację badań opisanych w [P20] stanowią rozważania w [P23] dotyczące trzeciego wyznacznika Hankela dla klas $\mathcal{S}^*(\alpha)$ i $\mathcal{K}(\alpha)$, $\alpha < 1$, odpowiednio funkcji gwiaździstych rzędu α i funkcji wypukłych rzędu α . Użyte zostały oszacowania $H_3(1)$, także w podklasach złożonych z funkcji 2-symetrycznych i 3-symetrycznych. Poprawione zostało przy okazji znane wcześniej oszacowanie (podane w [2]) dla klasy $\mathcal{K}(-1/2)$ złożonej z funkcji prawie wypukłych (por. [61]).

Funkcjonał $\Phi(\mu) = a_2a_4 - \mu a_3^2$, będący uogólnieniem wyznacznika $H_2(2)$, dla funkcji $f \in \mathcal{A}$ takich, że $\operatorname{Re} f'(z) > \alpha$, $\alpha \in [0, 1)$, badany był w pracy [20]. Autorzy znaleźli dokładne oszacowania tego funkcyjonału dla $\mu \leq 0$ i $\mu \geq 9/8$. Co więcej, postawili hipotezę dotyczącą dokładnego oszacowania $\Phi(\mu)$ dla $\mu \in [0, 9/8]$. W [P22] wykazano, że hipoteza jest fałszywa i znaleziono oszacowania, które w pewnym zakresie parametru μ są dokładne.

Autorzy pracy [23] wykazali, że dla klas $\mathcal{S}^*$ oraz $\mathcal{K}$ prawdziwe są nierówności $|H_2(2)| \leq 1$ i $|H_2(2)| \leq 1/8$, odpowiednio. W [P25] ten wynik został uogólniony; podane zostało dokładne oszacowanie funkcyjonału $\Phi(\mu)$. Wyznaczone zostały także oszacowania funkcyjonału $\Theta(\mu) = a_4 - \mu a_2a_3$ dla obu wyżej wymienionych klas.

W pozostałych opublikowanych artykułach poruszane są też inne zagadnienia z zakresu geometrycznej teorii funkcji analitycznych. Są to m.in. oszacowania początkowych współczynników oraz wartości residuów funkcji meromorficznych wkłęsłych [P8], czy twierdzeń o zniekształceniu funkcji z klasy $\mathcal{T}(1/2)$ [P10]. W [P19] rozważaliśmy klasę $\mathcal{R}_\alpha(\phi)$ funkcji $f \in \mathcal{A}$ zdefiniowanych następującym warunkiem: $f'(z) + \frac{1+e^{i\alpha}}{2}zf''(z) \prec \phi$, gdzie ϕ jest ustaloną funkcją analityczną taką, że $\phi(0) = 1$, zaś $\alpha \in (-\pi, \pi]$. Dla tak określonej klasy $\mathcal{R}_\alpha(\phi)$ uzyskany został warunek konieczny i dostateczny przynależności do klasy. Otrzymano także oszacowania współczynników i funkcyjonałów typu Fekete-Szegő oraz pewne wyniki dotyczące podporządkowania. W [P19] rozważano także klasę funkcji bi-jednolistnych takich, że $f \in \mathcal{R}_\alpha(\phi)$ oraz $f^{-1} \in \mathcal{R}_\alpha(\phi)$.

LITERATURA

- [1] Ali, R.M., Lee, S.K., Ravichandran, V., Supramaniam, S., Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions, *Appl. Math. Lett.* 25(3), (2012), 344–351.
- [2] Bansal, D., Maharana, S., Prajapat, J.K., Third order Hankel determinant for certain univalent functions, *J. Korean Math. Soc.* 52(6), (2015), 1139–1148.

- [3] Bieberbach L., Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, *Berl. Ber.* 1916, (1916), 940–955.
- [4] Bogowski, F., Burniak, C., On the domain of local univalence and starlikeness in a certain class of holomorphic functions, *Demonstr. Math.* 20(3–4), (1987), 519–536.
- [5] Bogucki, Z., Waniurski, J., On univalent functions whose values cover a fixed disk, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska* 22-24, (1968-1970), 39–43.
- [6] Brannan, D.A., Kirwan, W.E., A covering theorem for typically real functions, *Glasg. Math. J.* 10, (1969), 153–155.
- [7] Brannan, D.A., Taha, T.S., On some classes of bi-univalent functions, *Stud. Univ. Babes-Bolyai, Math.* 31(2), (1986), 70–77.
- [8] Bshouty, D., Hengartner, W., Schober, G., Estimates for the Koebe constant and the second coefficient for some classes of univalent functions, *Can. J. Math.* 32, (1980), 1311–1324.
- [9] Clunie J., Sheil-Small T., Harmonic univalent functions, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I* 9, (1984), 3–25.
- [10] Dorff, M., Nowak, M., Szapiel, W., Typically real harmonic functions, *Rocky Mt. J. Math.* 42, (2012), 567–581.
- [11] Fejér, L., Neue Eigenschaften der Mittelwerte bei den Fourierreihen, *J. London Math. Soc.* 8, (1933), 53–62.
- [12] Godula, J., The Koebe set for the class of meromorphic and univalent functions with Montel’s normalization, *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser.* 35, (1986) 112–117.
- [13] Goluzin, G., On typically real functions, *Mat. Sb. N. S.* 27(69), (1950), 201–218.
- [14] Goluzina, E.G. On the set of values of initial coefficients in a class of typically real functions, *J. Math. Sci. (N.Y.)* 110, (2002), 3052–3057.
- [15] Goluzina, E.G. Some sharp estimates for typically real functions, *J. Math. Sci. (N.Y.)* 207, (2015), 718–723.
- [16] Goodman, A.W., The domain covered by a typically real function, *Proc. Am. Math. Soc.* 64, (1977), 233–237.
- [17] Goodman, A.W., Koebe domains for certain families, *Proc. Am. Math. Soc.* 74, (1979), 87–94.
- [18] Goodman, A.W., An invitation to the study of univalent and multivalent functions, *Int. J. Math. Math. Sci.* 2, (1979), 163–186.

- [19] Goodman, A.W., Saff E.B., On univalent functions convex in one direction, *Proc. Am. Math. Soc.* 73, (1979), 183–187.
- [20] Hayami, T., Owa S., Generalized Hankel determinant for certain classes, *Int. J. Math. Anal.* 4(52), (2010), 2573–2585.
- [21] Hengartner, W., Schober, G., A remark on level curves for domains convex in one direction, *Appl. Analysis* 3, (1973), 101–106.
- [22] Ikoma, K., On a Theorem of Koebe for Quasiconformal Mappings, *Proc. Japan Acad.* 46, (1970), 763–765.
- [23] Janteng, A., Halim, S.A., Darus, M., Hankel determinant for starlike and convex functions, *Int. J. Math. Anal.* 1, (2007), 619–625.
- [24] Jenkins, J.A., On circularly symmetric functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 6, (1955), 620–624.
- [25] Juve, Y., Über gewisse Verzerrungseigenschaften konformer und quasikonformer Abbildungen, *Ann. Acad. Sci. Fenn. A I* 174, 1954, 1–40.
- [26] Kanas, S., Tatarczak, A., Generalized typically real functions, *Filomat* 30, (2016), 1697–1710.
- [27] Kaplan, W., Close-to-convex schlicht functions, *Mich. Math. J.* 1, (1952), 169–185.
- [28] Kędzierawski, A.W., Some remarks on bi-univalent functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska* 39, (1985), 77–81.
- [29] Koczan, L., Promienie jednolistności w pewnych klasach wypukłych funkcji holomorficznych, *Prace Inst. Mat., Fiz. i Chemii Politechniki Lubelskiej Sect. C* No.1, (1979), 25–28.
- [30] Koczan L., Typically real functions convex in the direction of the real axis, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska* 43, (1989), 23–29.
- [31] Koczan L., Zaprawa P., On typically real functions with n -fold symmetry, *Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska* 52(2), (1998), 103–112.
- [32] Koebe P., Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurve, *Gött. Nachr.* 2 (1907), 191–210.
- [33] Krzyż, J., Reade, M.O., Koebe domains for certain classes of analytic functions, *J. Anal. Math.* 18, (1967), 185–195.
- [34] Krzyż, J., Złotkiewicz E., Koebe sets for univalent functions with two preassigned values, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 487, 12 p. (1971).
- [35] Lewandowski, Z., Miazga, J., The Koebe domain for the class of typically-real functions under Montel’s normalization, *Bull. Acad. Pol. Sci.* 28, (1980) 465–470.

- [36] Lewandowski, Z., Miazga, J., Szynal, J., Koebe domains for univalent functions with real coefficients under Montel's normalization, *Ann. Pol. Math.* 30, (1975) 333–336.
- [37] Lewin, M., On a coefficient problem for bi-univalent functions, *Proc. Am. Math. Soc.* 18, (1967), 63–68.
- [38] Liczberski, P., Polubinski, J., On (j, k) -symmetrical functions, *Math. Bohem.* 120, (1995), 13–25.
- [39] Ma, W., Generalized Zalcman conjecture for starlike and typically real functions, *J. Math. Anal. Appl.* 234, (1999), 328–339.
- [40] Mateljević, M., Quasiconformal and Quasiregular harmonic analogues of Koebe's Theorem and Applications, *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 32, (2007), 301–315.
- [41] Mateljević, M., Versions of Koebe $1/4$ theorem for analytic and quasiregular harmonic functions and applications, *Publ. Inst. Math., Nouv. Sér.* 84, (2008), 61–72.
- [42] McGregor, M.T., On three classes of univalent functions with real coefficients, *J. Lond. Math. Soc.* 39, (1964), 43–50.
- [43] Merkes, E.P., A covering theorem for odd typically-real functions, *Int. J. Math. Math. Sci.* 3, (1980), 189–192.
- [44] Merkes, E.P., Scott, W.T., Covering theorems for univalent functions, *Mich. Math. J.* 13, (1966), 41–47.
- [45] Murugusundaramoorthy G., Magesh N., Prameela V., Coefficient Bounds for Certain Subclasses of Bi-Univalent Function, *Abstr. Appl. Anal.* (2013), art. 573017.
- [46] Netanyahu, E., The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 32, (1969), 100–112.
- [47] Netanyahu, E., On univalent functions in the unit disk whose image contains a given disk, *J. Anal. Math.* 23, (1970), 305–322.
- [48] Pick, G., Über die konforme Abbildung eines Kreises auf ein schlichtes und zugleich beschränktes Gebiet, *Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften, Vienna* 126 (1917), 247–263.
- [49] Piłat B., On typically real functions with Montel's normalization, *Ann. Univ. Mariae Curie Skłodowska* 18, (1964), 53–72.
- [50] Polatoğlu, Y., Bolcal, M., Koebe domain for certain analytic functions in the unit disc under the Montel normalization, *Math. Pannonica* 14, (2003), 283–291.

- [51] Prajapat, J.K., Bansal, D., Singh, A., Mishra, A.K., Bounds on third Hankel determinant for close-to-convex functions, *Acta Univ. Sapientiae, Math.* 7(2), (2015), 210–219.
- [52] Reade, M.O., On close-to-convex univalent functions, *Mich. Math. J.* 3, (1956), 59–62.
- [53] Reade, M.O., Złotkiewicz E., On univalent functions with two preassigned values, *Proc. Am. Math. Soc.* 30, (1971), 539–544.
- [54] Rogosiński, W.W., Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reele Potenzreihen, *Math. Z.* 35, (1932), 93–121.
- [55] Rogosiński, W.W., On subordinate functions, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 35, (1939), 1–26.
- [56] Sakaguchi, K., A variational method for functions with positive real part, *J. Math. Soc. Japan* 16, (1964), 287–297.
- [57] Sobczak-Kneć, M., Koebe domains for certain subclasses of starlike functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska* 61, (2007) 129–135.
- [58] Sobczak-Kneć, M., On typically real functions which omit two conjugated values, *Demonstr. Math.* 41, (2008), 833–844.
- [59] Sheil-Small T., Constants for planar harmonic mappings, *J. London Math. Soc.* 42, (1990), 237–248.
- [60] Szynal, J., An Extension of Typically Real Functions, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska* 48, (1994), 193–201.
- [61] Umezawa, T., Analytic functions convex in one direction, *J. Math. Soc. Japan* 4, (1952), 194–202.
- [62] Wirths, K.-J., The Koebe domain for concave univalent functions, *Serdica Math. J.* 29(4), (2003), 355–360.

