

Łukasz Kosiński
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytet Jagielloński

RECENZJA W POSTĘPOWANIU
O NADANIE STOPNIA DOKTORA HABILITOWANEGO
PANU DR. PAWŁOWI ZAPRAWIE

Pan dr Paweł Zaprawa uzyskał tytuł magistra w 1991 roku na Uniwersytecie Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie. Wtedy też, bezpośrednio po studiach, podjął pracę na Politechnice Lubelskiej i kontynuuje ją do dzisiaj. W międzyczasie, w 1999 roku, uzyskał na Politechnice Łódzkiej stopień naukowy doktora. Promotorem jego rozprawy doktorskiej był dr hab. Leopold Koczan.

Przedstawione osiągnięcie naukowe, jak i większość prac pana dr. Zaprawy, dotyczy w zasadzie dwóch klasycznych pojęć: zbioru Koebeego oraz zbioru pokrycia dla pewnej klasy funkcji A nad D . Obszar D jest tutaj zawsze podzbiorem dysku jednostkowego Δ , natomiast A jest podklasą klasy funkcji analitycznych na dysku jednostkowym, znormalizowanych warunkami $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 1$. Poprzez obszar Koebeego klasy A nad zbiorem D rozumiemy

$$K_A(D) = \bigcap \{f(D) : f \in A\},$$

natomiast zbiór pokrycia to

$$L_A(D) = \bigcup \{f(D) : f \in A\}.$$

1. OMÓWIENIE I OCENA NAJWAŻNIEJSZYCH WYNIKÓW Z PRAC STANOWIĄCYCH
OSIĄGNIĘCIE NAUKOWE

Przedstawione osiągnięcie naukowe pana dr. Pawła Zaprawy nosi tytuł „Zbiory Koebeego i zbiory pokrycia dla klas funkcji analitycznych”, a składa się na niego cykl 9 prac. Zostało one podzielone przez autora na trzy następujące części:

- (1) „Klasy funkcji niejednostliwych o współczynnikach rzeczywistych”,
- (2) „Klasy funkcji jednostliwych o współczynnikach rzeczywistych”,
- (3) „Klasy funkcji o współczynnikach dowolnych”.

Pierwsza praca [H1] części (1) dotyczy wyznaczenia obszaru Koebeego i zbioru nakrycia dla klasy funkcji typowo rzeczywistych, oznaczanej w pracach dr. Zaprawy przez $\mathcal{T}$. Od 1932 roku wiadomo (jest to wynik Rogosińskiego), że każdą funkcję $f \in \mathcal{T}$ można przedstawić w postaci

$$f(z) = \int_{[-1,1]} f_t(z) d\mu(t),$$

gdzie $f_t(z) = z(1 - 2tz + z^2)^{-1}$ oraz μ jest miarą probabilistyczną na $[-1, 1]$. Z tej reprezentacji płynie prosty wniosek, wyciągnięty w 1950 roku przez Gołuzina: zbiór $\{f(z) : f \in \mathcal{T}\}$ pokrywa się z obszarem wyznaczonym przez krzywą $\{f_t(z) : t \in [-1, 1]\}$ oraz odcinek $[f_{-1}(z), f_1(z)]$. Ponieważ f_t są szczególnej postaci, zbiór ten jest po prostu wycinkiem koła. Ponadto, $\min\{|f(z)| : f \in \mathcal{T}\}$ jest realizowane przez element odcinka $[f_{-1}(z), f_1(z)]$, natomiast $\max\{|f(z)| : f \in \mathcal{T}\}$ jest realizowane przez $f_t(z)$, dla pewnego $t \in [-1, 1]$. Innymi słowy wyznaczenie obszaru Koebeego sprowadza się do badania odcinków

$$t \frac{z}{(z-1)^2} + (1-t) \frac{z}{(z+1)^2}, \quad t \in [0, 1],$$

natomiast wyznaczenie zbioru nakrywającego, do badania $\frac{z}{1-2tz+z^2}$, $t \in [-1, 1]$. Wspomniane tu badanie odcinków autor nazywa za McGregorem „wyznaczaniem obwiedniej odcinków”.

W pracy [H1] wchodzącej w skład części (1) dr Zaprawa, stosując opisany powyżej sposób, wyznacza zbiory Koebeego i nakrywające rodziny $\mathcal{T}$ nad $H = \{z \in \Delta : |z^2+1| > 2|z|\}$ oraz dyskami $r\Delta$, gdzie $r < 1$ (oraz $r \leq \sqrt{2}-1$ w przypadku problemu dla obszaru Koebeego). Rozważanie tutaj obszaru H wydaje się naturalne o tyle, że wszystkie funkcje z klasy $\mathcal{T}$ w restrykcji do H są iniektywne (jest to także wynik Gołuzina z 1950 roku). Stąd także wynika zawężenie odpowiednich rozważań do $r \leq \sqrt{2}-1$ — dla takich r dyski $r\Delta$ są zawarte w H , a więc funkcje są tam iniektywne. Problem jest bez wątpienia elementarny a potrzebne narzędzia nie wykraczają poza standardowy kurs analizy matematycznej (współrzędne biegunowe, mnożniki Lagrange’a).

Kolejna praca, [H2], z części (1) dotyczy tego samego zagadnienia dla klasy $\mathcal{T}_{1/2}$, wprowadzonej w 1994 przez Szynalą, składającej się z funkcji postaci $f(z) = \int_{[-1,1]} f_t(z) d\mu(t)$, gdzie, podobnie jak wcześniej, μ jest miarą probabilistyczną na odcinku $[-1, 1]$, natomiast funkcje f_t są dane wzorem

$$f_t(z) = \frac{z}{\sqrt{1-2tz+z^2}}.$$

Ta reprezentacja całkowa pozwala uzyskać podobne własności dotyczące $\min_{\mathcal{T}_{1/2}} \{|f(z)|\}$ oraz $\max_{\mathcal{T}_{1/2}} \{|f(z)|\}$. Wymaga to pewnych żmudnych obliczeń, na przykład trzeba pokazać, że krzywa $t \mapsto f_t(z)$ ogranicza obszar wypukły. Ze względu na kształt tej krzywej, rachunki przeprowadzone tutaj są trudniejsze. Pomaga fakt, że funkcja $tf_{-1}(z) + (1-t)f_1(z)$ jest iniektywna w Δ . Autor uzyskuje tu opisy $L_{\mathcal{T}_{1/2}}(r\Delta)$, $L_{\mathcal{T}_{1/2}}(H)$ oraz $K_{\mathcal{T}_{1/2}}(r\Delta)$, $K_{\mathcal{T}_{1/2}}(H)$. Zastosowanie przedostatniego wyniku dla $r = 1$ daje wynik McGregora z 1964 roku.

Ostatnią pracą wchodzącą w skład części (1) jest [H3], napisana wspólnie z Koczarnem. Jak już zostało wspomniane, w pracy [H1] dr Zaprawa wyznaczył $K_{\mathcal{T}}(r\Delta)$, gdy $r \leq \sqrt{2}-1$. [H3] dotyczy zagadnienia dla $r = 1$. Problem ten został rozwiązany przez Goodmana w 1977 roku w pracy [16] wymienionej w bibliografii w autoreferacie dr. Zaprawy. W abstrakcie [H3] autorzy piszą: ... *we present a new method ... We apply this method by giving a new proof of the well-known theorem of A. W. Goodman.* Postaram się po części wytłumaczyć ideę Goodmana. Wyjściową funkcją rozważaną przez Goodmana jest

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \left(\pi z / (1 + z^2) \right),$$

tnz. złożenie funkcji $\frac{1}{i} \frac{e^\eta - 1}{e^\eta + 1}$ oraz $2i\pi z / (1 + z^2)$. Aby wyznaczyć obszar Koebeego bierzemy funkcję $f \in \mathcal{T}$ omijającą punkt ib . Zawężamy się do górnej półpłaszczyzny, ponieważ $f(\Delta)$ jest symetryczny. Wtedy $f(z)/\pi b$ omija punkt i/π . Funkcja F zawężona do górnego półokręgu jest nakryciem rozgałęzionym $\mathbb{C} \setminus \{i/\pi\}$, więc możemy rozważać $H(z) := F^{-1}(f(z)/\pi b)$. Jest to równoważne z wzięciem gałęzi logarytmu funkcji f złożonej z pewną funkcją homograficzną. Goodman rozszerza tę funkcję na dolną półpłaszczyznę i stosuje następnie lemat Schwarza do funkcji H . Postępuje podobnie, gdy f omija punkty $a + ib$ oraz $a - ib$, $a \neq 0$ (składa wtedy z odpowiednią homografią i przesunięciem).

Metoda dr. Zaprawy opisana w autoreferacie jest z kolei następująca (używam oznaczeń z tegoż autoreferatu): Autor bierze $f \in \mathcal{T}$ nie przyjmującą wartości $\rho e^{i\theta}$ oraz $\rho e^{-i\theta}$ ($f(\Delta)$ jest symetryczny). Następnie rozważa $(f(z) - \rho e^{i\theta})(f(z) - \rho e^{-i\theta})^{-1}$. Funkcja ta nie przyjmuje 0 i 1, więc

$$h(z) = -i \log \frac{f(z) - \rho e^{i\theta}}{f(z) - \rho e^{-i\theta}},$$

gdzie gałąź jest wzięta tak by $h(0) = \theta$, jest analityczna w Δ (czyli tak jak Goodman bierze gałąź F^{-1} złożoną z f). Dr Zaprawa następnie pokazuje, że $h \prec H$, gdzie $H(z) = 2\theta + a \frac{z}{1-2tz+z^2}$ (złożenie tych funkcji z odpowiednimi automorfizmami daje funkcję F występującą u Goodmana). Stąd wnioskuję, że $h'(0) \leq H'(0)$. Symbol $h \prec H$, gdzie H jest iniektywne, oznacza, że $H^{-1} \circ h$ jest odwzorowaniem z Δ w Δ zachowującym 0. Tak więc nierówność $h'(0) \leq H'(0)$ jest po prostu zastosowaniem lematu Schwarza (więc znowu jak u Goodmana).

Nie widzę istotnych różnic pomiędzy dowodem Goodmana a tym przedstawionym przez dr. Zaprawę. Wydaje mi się, że myli się autor pisząc w autoreferacie: *Wynik (...) jest możliwy do uzyskania bez odwoływania się do funkcji określonych na powierzchniach Riemanna*. Czym innym jest wzięcie gałęzi logarytmu?

Dalsza część pracy [H3] stanowi kontynuację badań obszarów Koebeego (w tym przypadku jedynie nad dyskiem jednostkowym) dla innych klas funkcji. Głównym wynikiem jest zastosowanie opisanej wyżej metody do rodziny znormalizowanych funkcji typowo rzeczywistych f takich, że $f(\Delta) \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, -M/4]$. Składając funkcje z tej klasy z odpowiednimi funkcjami (iniektynymi, znormalizowanymi i typowo rzeczywistymi) między odpowiednimi obszarami dr Zaprawa uzyskuje w prosty sposób opis obszarów Koebeego innych, równoważnych klas funkcji. Wspomniane tu składanie funkcji zostało opisane w pracy Koczana z 1998 roku.

Przekształcenie tej klasy przez funkcję $k(z) = z/(1-z)^2$ daje opis obszaru Koebeego dla klasy $\mathcal{T}_M = \{f \in \mathcal{T} : |f(z)| \leq M\}$, co daje odpowiedź na jedno z pytań postawionych przez Goodmana w przeglądowej pracy z 1979 roku. Warto tu wspomnieć, że Goodman także stosował „swoją metodę” (tj. metodę opisaną powyżej) w podobny sposób dla znormalizowanych i iniektywnych funkcji ograniczonych przez stałą M , uzyskując uproszczenie wyniku Picka.

Część (2). Praca [H4] dotyczy opisu obszaru Koebeego w klasie n -symetrycznych funkcji, o współczynnikach rzeczywistych i wypukłych w kierunku osi rzeczywistej. Staralem się prześledzić historię problemu. Poza [H4] najważniejsze wydają się dwie pozycje. I tak McGregor rozwiązał problem bez zakładania n -symetrii i przy założeniu wypukłości w kierunku osi urojonej. W pracy Koczana, Sobczak-Kneć i Zaprawy, niewchodzącej w skład osiągnięcia naukowego, oznaczanej w autoreferacie przez [P9], problem został rozwiązany już w klasie n -symetrycznych funkcji i założeniu wypukłości w kierunku osi urojonej.

Idea jest ciekawa i polega na aproksymacji bardziej elementarnymi obszarami. Niemniej jednak idea ta pochodzi od McGregora (pojawia się ona także w wielu publikacjach dr. Zaprawy). I brakuje mi w pracy [H4] przede wszystkim nawiązania lub przynajmniej zacytowania jego pracy z 1964 roku. Brakuje tym bardziej, że, w moim odczuciu, dr Zaprawa modyfikuje metodę z tej pracy jedynie w technicznych aspektach. I tak na przykład, u McGregora obszary, którymi aproksymujemy, są bardziej elementarne. Podobnie, wzory Schwarza-Christoffela są prostsze u McGregora (w szczególności dają efektywne wzory), ale konstrukcja funkcji ekstremalnej podobna. Dr Zaprawa cytuję pracę McGregora w konferencyjnej pracy [P2] (również dotyczącej podobnego problemu) oraz we wspomnianej pracy [P9].

Kolejna praca z cyklu, [H5], dotyczy wyznaczania obszarów Koebeego w podklasach klasy Γ składającej się z funkcji typowo rzeczywistych, znormalizowanych, iniektywnych i wypukłych w kierunku osi rzeczywistej. Obszar Koebeego dla tej klasy został wyznaczony w 1989 roku przez Koczana. Wspomniane podklasy rozważane przez dr. Zaprawę to $\Gamma(c) = \{f \in \Gamma : f''(0) = 2c\}$ oraz $\Gamma^+(c) = \{f \in \Gamma(c) : f(x) + i\mathbb{R}_{\leq 0} \subset f(\Delta), x \in \Delta\}$. Idea przedstawionych tu dowodów polega na zastosowaniu wyniku Picka oraz użyciu funkcji ekstremalnej dla klasy Γ . Praca jest techniczna, dowody elementarne i na tyle szczegółowe, że, w moim odczuciu, część z nich nie powinna się znaleźć w publikacji naukowej (na

przykład Lemat 8). Podobnie jest zresztą z kolejną pracą [H6]. Celem jej jest wyznaczenie obszaru Koebeego w jeszcze innej klasie funkcji analitycznych. Jej własności pozwalają w prosty, moim zdaniem narzucający się sposób (przy użyciu prostych przekształceń konforemnych), skonstruować funkcje ekstremalne, które, jak zwykle, pozwalają uzyskać wzór na obszar Koebeego, zapisany we współrzędnych biegunowych. Muszę przyznać, że po przeczytaniu wcześniejszych prac nie za bardzo widzę nowych idei w tej pracy, jedyna trudność polega na wykonaniu żmudnych obliczeń.

Pierwsza praca części (3), [H7], dotyczy wyznaczania obszaru Koebeego i zbioru nakrycia w dwóch klasach $Q = \{z(1-z)^{-2}p(z) : p \in P\}$ oraz $H = \{z(1-z^2)^{-1}p(z) : p \in P\}$, gdzie P jest klasą Carathéodory'ego, tzn. $P = \{p \in \mathcal{O}(\Delta, \mathbb{C}) : p(0) = 1, \operatorname{Re} p > 0\}$. Idea dowodu dla klasy H (dla klasy Q jest podobnie) jest następująca: Pokazujemy, że $\max\{|f(z)| : f \in H, |z| = r\}$ to $\max\{|f_\theta(re^{i\varphi})| : \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$, gdzie

$$f_\theta(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \frac{1+ze^{i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}$$

(to znany wynik, niemniej jednak narzuca się tutaj związek z [H1], gdy reprezentację całkową zastępujemy reprezentacją Riesza-Herglotza). Analogiczna własność zachodzi, gdy maksimum powyżej zostanie zastąpione przez minimum. I do wyliczenia tego maksimum (i minimum) sprowadza się w zasadzie pozostała część pracy. Jest tak dlatego, że autor wyznacza zbiór Koebeego jedynie nad tymi dyskami $r\Delta$, dla których każda funkcja z klasy H jest iniekcją (takie $r \ll 1$ zostały wyznaczone przez Koczana w 1979 roku). Obliczenia tutaj przeprowadzone polegają m.in. na skorzystaniu z warunku koniecznego dla istnienia ekstremum funkcji dwóch zmiennych i zbadaniu monotoniczności odpowiednich funkcji.

Metody z pracy [H8] przypominają te z [H4] a praca dotyczy podobnej klasy (dokładniej z pominiętym założeniem, że współczynniki funkcji z niej są rzeczywiste). Są tam oczywiście pewne różnice, niemniej jednak są one, w moim odczuciu, natury technicznej, a główna idea jest podobna.

Ostatnia praca z cyklu, [H9], dotyczy wyznaczania obszaru Koebeego znormalizowanych funkcji iniektywnych na dysku jednostkowym, wypukłych w dwóch, symetrycznych względem osi rzeczywistej, kierunkach (jest to klasa nierozważana wcześniej w literaturze, wprowadzona przez autorów w tejże pracy). Idea zastosowana tutaj jest praktycznie taka jak w poprzednich pracach i naturalna. Bez problemu, korzystając z definicji klasy funkcji, znajdujemy obszar ekstremalny (jest to płaszczyzna z wyrzuconym kątem wyznaczonym przez kierunki w definicji $e^{\pm i\alpha}$). Przekształcamy go konforemnie na dysk jednostkowy. Wypisując trywialnie wzór otrzymujemy odwzorowania ekstremalne. I w ten sposób dostajemy opis obszaru Koebeego. Podobnie jak wcześniej, różnice w dowodzie są natury technicznej.

Wiele krytycznych uwag dotyczących przedstawionego cyklu prac zawarłem powyżej. W tym miejscu dodam do nich kolejne. Pierwszym, narzucającym się, pytaniem jest cel wyznaczania obszarów Koebeego w tak licznych klasach funkcji. Zasadność tego pytania dobrze jest odzwierciedlona w autoreferacie, którego większą część stanowią absolutnie nie niemówiące opisy tychże zbiorów. Analizując dokładnie prace z cyklu odnosiłem wrażenie, że autor rozważa coraz to dziwniejsze klasy funkcji po to tylko, by stosować wypracowane techniki i wyznaczać w nich obszary Koebeego i zbiory nakrycia. Kolejnym zarzutem jest wąski wachlarz stosowanych metod. Nie dość, że jest ich niewiele, często powtarzają się w pracach, a większość nie jest oryginalna, to polegają na wykonaniu obliczeń przy użyciu narzędzi ze standardowego kursu analizy matematycznej i zespolonej. Przyznać tutaj muszę, że obliczenia te nie są proste i wymagają dużej biegłości rachunkowej, niemniej jednak są elementarne.

2. OMÓWIENIE POZOSTAŁEGO DOROBKU NAUKOWEGO

Pozostały dorobek dr. Zaprawy nie jest dużo bogatszy, praktycznie nowymi elementami, niemniej jednak bardzo skorelowanymi, jest badanie wyznaczników Hankela i szacowanie współczynników w pewnych klasach funkcji. Moim zdaniem obszar zainteresowań dr. Zaprawy jest bardzo wąski i oscyluje wokół problemów, które były istotne przynajmniej kilkadziesiąt lat temu. Wiele z prac jest podobnych (na przykład [H4] i [P9]).

3. OMÓWIENIE ISTOTNEJ EFEKTYWNOŚCI NAUKOWEJ

Dr Zaprawa jest autorem 34 prac matematycznych oraz 5 prac z zakresu techniki. Dwukrotnie otrzymał nagrodę Rektora Politechniki Lubelskiej za działalność naukową.

Prace ukazują się w większości w słabych czasopismach matematycznych, kilka z nich ukazało się w dobrych czasopismach (ale nawet w tych przypadkach recenzja w bazie MathScinet polega zwykle na podaniu „Summary”). Według bazy MathScinet liczba cytowań, bez autocytowań, wynosi 15 (w autoreferacie jest podana liczba z autocytowaniami), przy czym prace z przedstawionego cyklu były cytowane łącznie 3 razy (ponownie, nie wliczając autocytowań).

4. UDZIAŁ W KONFERENCJACH NAUKOWYCH

Dr Zaprawa zwykle raz w roku wygłasza referat na konferencji międzynarodowej (w Polsce, Rumunii, Bułgarii). Ten punkt oceniam dostatecznie.

5. POBYTY W ZEWNĘTRZNYCH OŚRODKACH NAUKOWYCH

Dr Zaprawa praktycznie nie współpracuje naukowo z nielokalnymi matematykami. Ma to także odbicie w braku pobytów (poza jednym, dwutygodniowym) w zewnętrznych ośrodkach naukowych.

6. DOROBK DYDAKTYCZNY I POPULARYZATORSKI

Dorobek dydaktyczny niczym się nie wyróżnia, jest raczej typowy dla nauczyciela akademickiego z odpowiednim stażem pracy.

7. UDZIAŁ W PROJEKTACH BADAWCZYCH

Dr Zaprawa nie był kierownikiem ani wykonawcą w żadnym grantie z dziedziny *matematyka*.

Był wykonawcą w dwóch grantach z dziedzin technicznych.

8. KONKLUZJA

Wartym podkreślenia jest, że dr Zaprawa stara się być aktywny naukowo, co przejawia się zarówno poprzez pisanie prac jak i referowanie ich na konferencjach. Bez wątpienia prace wymagają dużej biegłości obliczeniowej. Jednak, w moim odczuciu, przedstawione osiągnięcie naukowe nie stanowi istotnego wkładu w rozwój matematyki.

Moja opinia w sprawie nadania stopnia doktora habilitowanego jest więc negatywna.

Lukasz Kosiński

