

MODELOWANIE I SYMULACJA RUCHU NIELINIOWYCH UKŁADÓW MECHANIKI KLASYCZNEJ

Streszczenie: W pracy zaprezentowano badania dynamiki ruchu nieliniowych układów mechanicznych dokonane poprzez komputerową symulację ruchu ich wirtualnych modeli. Dla charakterystycznych układów dynamicznych pokazano możliwości symulacyjne wykorzystywanego do tego celu programu Working Model[®] firmy MSC Working Knowledge Software Corp. Otrzymywane wyniki obliczeń i symulacji zweryfikowano obliczeniami przeprowadzonymi przy pomocy programu Mathematica[®], firmy Wolfram Research.

MODELING & SIMULATION OF MOTIONS OF THE CHOSEN FEW NONLINEAR MECHANICAL SYSTEMS

Abstract: In this paper the virtual simulation for analysis of dynamics of non-linear mechanical systems using Working Model[®] and Mathematica[®] software is presented. Virtual simulations are most efficient methods in analyzing the dynamics of the systems. In this paper some results from numerical simulations for choice non-linear mechanical systems are shown as diagrams.

1. WSTĘP

Podstawowe prawa mechaniki klasycznej zostały wyprowadzone w XVIII i XIX wieku w oparciu o sformułowane wcześniej prawa Isaaca Newtona (1643-1727). Możemy wymienić tu takich odkrywców jak: L. Euler (1707-1783), J. R. d'Alembert (1717-1783), J. L. Lagrange (1736-1813), G. G. Coriolis (1792-1843), W. R. Hamilton (1805-1865). Nadal podstawowymi równaniami w mechanice klasycznej są: równania Newtona, równania Lagrange'a, równania Hamiltona (Jacobiego-Hamiltona). Po tym okresie zaczął upowszechniać się pogląd, że w dziedzinie mechaniki klasycznej, głównie dynamiki układów materialnych (dynamiki punktu i bryły sztywnej), nic nowego nie można odkryć, i że ta część wiedzy staje się dziedziną zamkniętą.

W XX wieku badacze doszli do wniosku, że [1, 2, 6]:

- ♦ istnieją układy dynamiczne, dla których nawet minimalna zmiana warunków początkowych skutkuje skrajnie odmiennymi stanami dynamicznymi, np. uderzenie kuli bilardowej
- ♦ dla układu dynamicznego nie można ustalić warunków początkowych z dowolną dokładnością
- ♦ istnieją układy dynamiczne, dla których przy znanych wartościach położenia, prędkości i sił nań działających nie da się obliczyć (przewidzieć) ich stanu dynamicznego w odległym czasie

- ♦ istnieje klasa takich modeli układów dynamicznych, które opisując „poprawnie” rzeczywistość (pomimo deterministycznego charakteru równań opisujących dynamikę tych układów), wykazują dużą niestabilność po znacznym upływie czasu.

Dalsze prace spowodowały odkrycie nieliniowych układów dynamiki. Należało odrzucić przekonanie, że wyznacznikiem otaczającej rzeczywistości w mechanice klasycznej, fizyce, astronomii jest regularność i uporządkowanie. Liczne doświadczenia nakazywały wysnuć wniosek, że takie myślenie jest iluzją, a układy regularne należą do rzadkości i są jedynie obrazem wyidealizowanym. „Prawie wszystkie” układy dynamiczne wykazują cechy nieregularności i niepowtarzalności. Jeżeli model teoretyczny przewiduje, że wybrane dane początkowe prowadzą, po skończonym czasie, do jednoznacznie określonego stanu fizycznego, to tzw. „wrażliwość na warunki początkowe” powoduje, że w ramach weryfikacji doświadczalnej, gdy dane początkowe są określone z różnym od zera błędem (niepewnością) – ta sama doświadczalna przyczyna może prowadzić do zasadniczo odmiennych skutków.

Tak opisany układ dynamiczny nazywamy układem nieliniowym.

Jednymi z pierwszych badaczy zajmujących się układami nieliniowymi byli:

- ♦ Niemiec – Georg Duffing (1861-1944)

$$\ddot{x} + \varepsilon \dot{x} + (1 + \beta x^2) \omega_o^2 x = \gamma \cos(\omega t + \varphi) \quad - \text{równanie Duffinga}$$

- ♦ Holender – Balthasar van der Pol (1889–1959)

$$\ddot{x} + \mu(1 - x^2)\dot{x} + \omega_o^2 x = \gamma \cos(\omega t + \varphi) \quad - \text{równanie van der Pola}$$

Druga połowa XX wieku to gwałtowny rozwój nowego spojrzenia na dynamikę układów. Pojawia się teoria chaosu. Układy takie były badane od początku istnienia nauki, lecz możliwości ich dokładnego opisu, zrozumienia i przewidywania zachowania były przez wiele stuleci bardzo ograniczone. Gdy badacze chcieli jeszcze dokładniej opisywać lub przewidzieć procesy bardziej skomplikowane, takie jak wiry na wodzie, zjawiska meteorologiczne lub procesy życiowe, szybko dochodzili do granic możliwości klasycznej nauki [2].

2. METODY BADANIA DYNAMIKI NIELINIOWYCH UKŁADÓW MECHANICZNYCH

Istnieją rozmaite klasyfikacje nieliniowych układów mechaniki klasycznej [9-13]. Jednym z podstawowych podziałów jest podział na układy:

- a) o rozwiązaniach jednoznacznych i niejednoznacznych,
- b) o nieliniowościach fizycznych lub geometrycznych.

Do nieliniowości fizycznych zaliczamy:

- nieliniowe związki konstytutywne
- plastyczność
- lepkoplastyczność
- modele zniszczenia materiału

- nieliniowe zagadnienia polowe, jak: przewodnictwo ciepła, przepływy cieczy, zagadnienia elektromechaniczne, itp.

Do nieliniowości geometrycznych zaliczamy natomiast:

- nieliniowe związki geometryczne
- zagadnienia związane ze statecznością.

Wszystkie powyższe zagadnienia można analizować jako quasi-statyczne lub dynamiczne. Dalsza część niniejszej pracy będzie dotyczyć układów mechaniki klasycznej o więzach nieliniowych, opisywanych równaniami różniczkowymi, w których charakterystyki dynamiczne wynikają z właściwości więzów.

Równania różniczkowe opisujące tego rodzaju układy można podzielić na trzy grupy:

- 1° – całkowne, dla których udało się znaleźć rozwiązania analityczne;
- 2° – całkowne warunkowo, dla których istnieją rozwiązania analityczne tylko dla pewnych warunków brzegowych lub współczynników samego równania;
- 3° – niecałkowne, dla których rozwiązań należy poszukiwać głównie poprzez zastosowanie metod przybliżonych.

Metody przybliżone dzielą się na:

- ♦ przyrostowe i przyrostowo-iteracyjne, np. metoda Newtona lub Newtona – Raphsona;
- ♦ iteracyjne nieprzyrostowe – metody te są skuteczne jedynie dla ograniczonej klasy zagadnień
- ♦ asymptotyczne bazujące na metodzie perturbacji, np. metoda małego parametru – bardzo skuteczne w badaniach stanów bliskich równowadze
- ♦ metody specjalne – stosowane do określonych klas problemów, polegające na zmianie struktury równań w trakcie obliczeń iteracyjnych
- ♦ metody przybliżone – najczęściej metody linearyzujące analizowane równania.

Rozwój technik komputerowych spowodował, że dla wszystkich wymienionych metod rozwiązywania nieliniowych równań różniczkowych opracowano algorytmy obliczeniowe, które w sposób numeryczny i zautomatyzowany dokonują stosownych obliczeń i podają rozwiązania równań (układów równań) opisujących dynamikę, zarówno dla prostych jak i złożonych układów mechanicznych. Spośród mnóstwa metod numerycznych [2, 7] warto wymienić następujące:

- ♦ metoda łamanych Eulera, mało dokładna, w której błędy mogą się sumować
- ♦ metoda „predyktor - korektor”, będąca wsteczną metodą Eulera
- ♦ metoda różnic skończonych
- ♦ metody Rungego Kuty
- ♦ metoda Bulirsch Stoera
- ♦ metoda Adamsa
- ♦ metody interpolacyjne i ekstrapolacyjne
- ♦ rozmaite metody wielokrokowe.

Na bazie tych metod opracowano ogromną ilość wyspecjalizowanych programów komputerowych, które realizują wymienione metody obliczeniowe. Znane programy do obliczeń symbolicznych równań różniczkowych to:

- ☛ **Mathematica** – opracowana przez S. Wolframa z Wolfram Research, Inc. [5]
- ☛ **Maple** – firmy Waterloo Maple Inc.
- ☛ **Mathcad** – firmy Mathsoft.

Stworzono nową grupę wyspecjalizowanego programowania – **Computer Aided Engineering** (CAE) i **Computer Aided Design** (CAD) – inżynieria i projektowanie wspomagane komputerowo. Opracowano bardzo wyrafinowane procedury numeryczne (oprogramowanie komputerowe) przeznaczone dla konkretnych zagadnień z zakresu mechaniki i wytrzymałości materiałów [12], jak również dla konkretnych rozwiązań inżynierskich, np.:

☛ **MATLAB – MATrix LABoratory** – jest to środowisko obliczeniowe umożliwiające wykonywanie złożonych obliczeń numerycznych i wizualizację danych. Matlab wiąże analizę numeryczną, obliczenia macierzowe, przetwarzanie sygnałów i grafikę w sposób przyjazny dla użytkownika, gdzie zarówno zadania jak i rozwiązania są podawane w standardowej postaci matematycznej – bez tradycyjnego programowania. Matlab pozwala na rozwiązanie wielu zadań numerycznych w czasie znacznie krótszym niż zajęłoby napisanie własnego kodu w C lub Fortranie. Matlab zawiera także wiele narzędzi zgrupowanych w pakiety, ukierunkowanych na konkretne obszary zastosowań.

☛ **SUNDIALS – Suite of Nonlinear and Differential/ALgebraic equation Solvers** – zawiera następujące solwery:

CVODE – zagadnienia początkowe dla układów równań różniczkowych zwyczajnych, CVODES – zagadnienia początkowe dla układów równań różniczkowych zwyczajnych plus analiza wrażliwości,

IDA – zagadnienia początkowe dla układów równań różniczkowo-algebraicznych, KINSOL – nieliniowe zagadnienia algebraiczne.

SUNDIALS wykorzystuje interfejs Matlaba.

☛ **KASKADE – Numerical Analysis and Modelling** – Rozwiązywanie równań różniczkowych cząstkowych w obszarach jedno-, dwu- i trójwymiarowych: liniowe zagadnienia skalarnie, metoda elementu skończonego z adaptacyjną siatką, oparty jest o procedury języka C++ [14].

Programy te tworzą nową jakość – dziedzinę wiedzy zwaną **Mechaniką Komputerową**. Pod tym pojęciem kryje się zbiór zaawansowanych pakietów do modelowania przestrzennego konstrukcji mechanicznych takich jak ANSYS, CATIA, NASTRAN oraz służących do komputerowej symulacji zachowań konstrukcji w warunkach eksploatacji. Pakiety te umożliwiają modelowanie i symulowanie większości zjawisk fizycznych, zachodzących w układach o zróżnicowanym stopniu złożoności – począwszy od prostych brył po skomplikowane układy złożone. Oprogramowanie to umożliwia symulację kinematyki i dynamiki układów mechanicznych, analizę przepływu ciepła i masy, naprężeń i innych cech projektowanych konstrukcji inżynierskich.

Najnowsze programy są wyposażane w rozbudowane moduły do wykonywania bardzo złożonych analiz. Ich duże możliwości obliczeniowe i prezentacyjne powodują, że pobieżny nawet opis daleko wykracza poza ramy niniejszej pracy. Jednakże we wszystkich wymienionych i niewymienionych programach występują te same problemy, które skrótowo można ująć w postaci poniższych pytań:

- ☛ Jaka jest zbieżność stosowanych procedur obliczeniowych?
- ☛ Jak dalece można zmniejszać krok obliczeniowy, wpływający na precyzję rozwiązań, bez generowania nowych błędów numerycznych?
- ☛ Jaka jest stabilność otrzymywanych rozwiązań, zwłaszcza w pobliżu pojawiających się punktów osobliwych rozwiązań, np. w otoczeniu zera występującego w mianowniku?

W dalszej części pracy przedstawiono sposób wykorzystania obiektowego programu *Working Model*[®] firmy MSC Knowledge oraz pakietu obliczeniowego *Mathematica*[®] firmy Wolfram Research do opisanie dynamiki wybranych, silnie nieliniowych układów mechaniki klasycznej oraz do modelowania i zasymulowania ruchu tych układów.

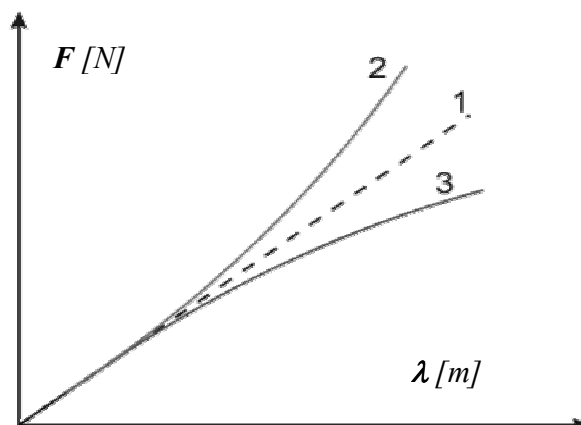
W bogatym wachlarzu oprogramowania znajdującego się w dyspozycji badaczy i inżynierów, program *Working Model*[®] jest jednym z łatwiejszych w obsłudze i interpretacji otrzymywanych wyników [8, 9, 15]. Możliwości symulacyjne wirtualnego środowiska, stwarzanego przez *Working Model*[®], zaprezentowano dla wybranych przykładów, rozwiązanych wcześniej innymi metodami. Program *Mathematica*[®], istniejący na rynku od ponad 20 lat, jest programem dość znanym i nie wymaga szerszej rekomendacji [5].

3. SYMULACJA DYNAMIKI RUCHU CIAŁA OPISANEJ RÓWNANIEM DUFFINGA–VAN DER POLA

Znaczna część układów mechanicznych posiada więzy utworzone przez elementy sprężyste i tłumiące ruch. Rzeczywiste charakterystyki tych więzów przeważnie są nieliniowe. Takie charakterystyki dla nieliniowej sprężyny pokazano na rysunku 1.

Nieliniowość sprężyny jest definiowana poprzez określenie funkcji jej sztywności w zależności od odkształcenia λ . Sztywność sprężyny opisana jest zależnością:

$$k = \frac{dF}{d\lambda} \quad (1)$$



Rys. 1. Przykładowe charakterystyki sprężyn: 1 – idealna liniowa, (liniowa), 2 – progresywna (o wzrastającej sztywności); 3 – regresywna (o malejącej sztywności)

W nieliniowych układach mechaniki, najczęściej pojawiającym się równaniem dynamiki ruchu jest równanie Duffinga – van der Pola (DvdP), [1, 6, 12, 13].

Ogólna postać takiego różniczkowego równania ruchu dla układu o jednym stopniu swobody jest przedstawiana w następującej formie:

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon(1 - x(t)^2) \cdot \dot{x}(t) + \mu \cdot \operatorname{sgn} \dot{x}(t) + (1 + \beta \cdot x(t)^2) \cdot \omega_o^2 \cdot x(t) = \gamma \cos(\Omega t + \varphi) \quad (2)$$

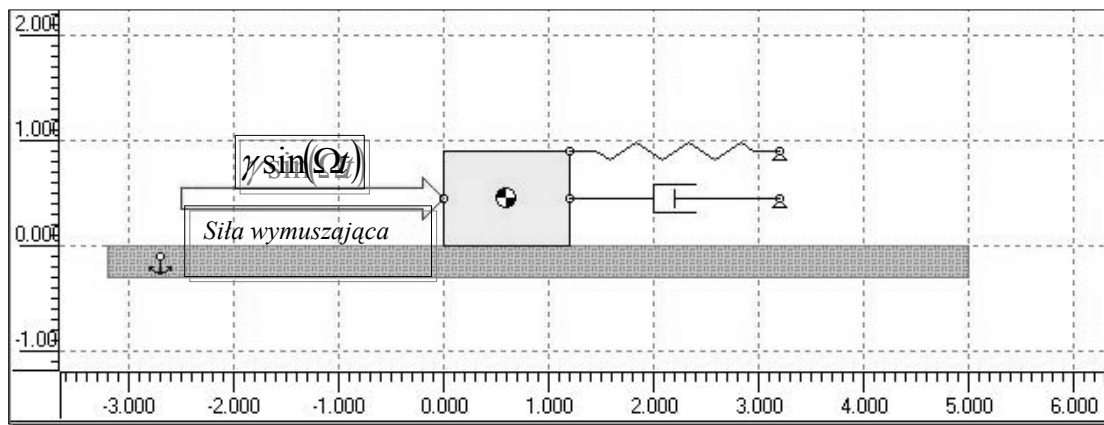
gdzie:

$x(t)$ – współrzędna uogólniona (przemieszczenie);

$\beta, \varepsilon, \mu, \varphi, \omega_o, \gamma, \Omega$ – odpowiednie współczynniki równania, określające cechy dynamiczne układu mechanicznego.

Funkcja „*sgn*” pojawia się wówczas, gdy należy uwzględnić więzy tarcia zależne od zwrotu wektora prędkości.

Na rys. 2 przedstawiono układ mechaniczny będący ciałem sztywnym wykonującym ruch drgający, opisany różniczkowym równaniem ruchu (3) mającym formę równania DvdP (2).



Rys. 2. Ciało poruszające się pod wpływem wymuszenia siłą harmonicznego i o silnie nieliniowych więzach

Więzy (sprężyna i tłumik) wpływające na ruch tego ciała, będącego bryłą sztywną, są silnie nieliniowe. Dane fizyczne analizowanego układu:

masa ciała – $m = 1,0$ [kg];

stała więzów sprężystych – $\beta = 1,0$ [kg·m⁻²·s⁻²];

więzy tłumienia, realizowane poprzez złożony tłumik – $\varepsilon = 0,2$ [kg·m⁻²·s⁻¹];

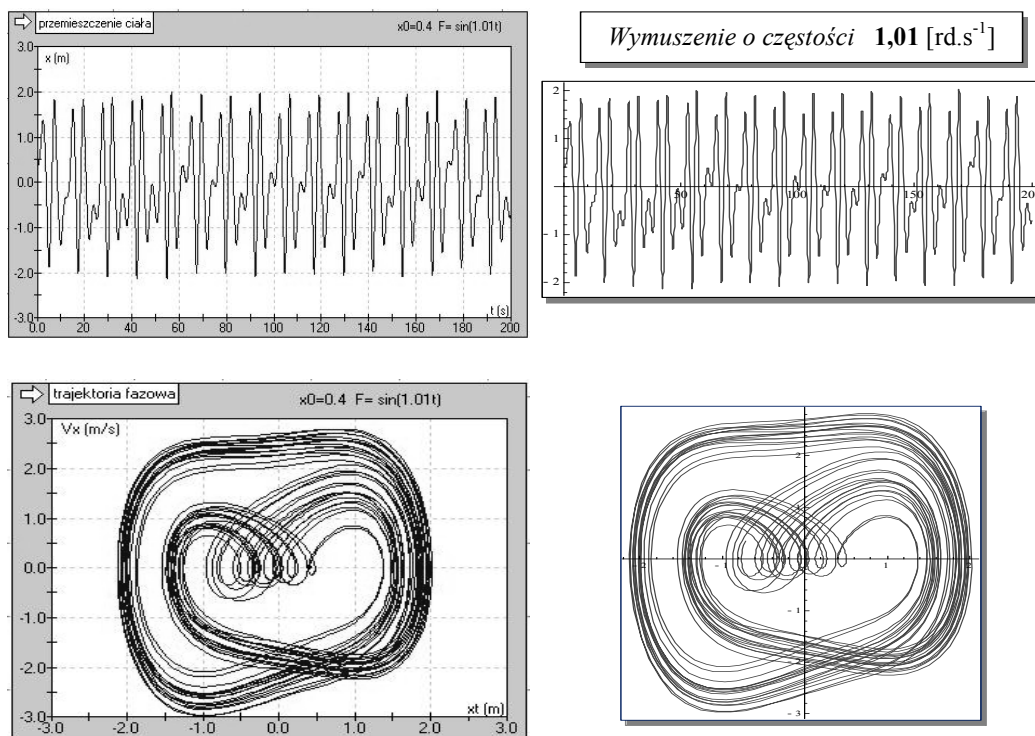
amplituda siły wymuszającej – $\gamma = 1,0$ [N];

częstość siły wymuszającej – $\Omega = (0,9-1,0)$ [rd·s⁻¹].

Po przekształceniach, końcowa postać różniczkowego równania ruchu dla tego ciała ma postać:

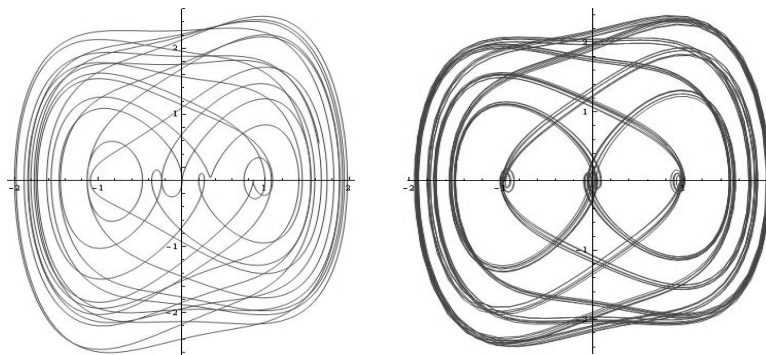
$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \varepsilon(1 - x(t)^2) \cdot \frac{dx(t)}{dt} + \beta \cdot x(t)^3 = \gamma \sin(\Omega t) \quad (3)$$

W środowisku komputerowym *Working Model*[®] wykonano model wirtualny układu mechanicznego z rysunku 2. Przeprowadzono dla tego modelu symulacje dynamiki jego ruchu oraz rozwiązano nieliniowe równanie (3) za pomocą programu *Mathematica*[®]. Otrzymane wyniki porównano celem weryfikacji dokonanej analizy. Rezultaty pokazano na odpowiednich wykresach.



Rys. 3. Wykresy przemieszczenia ciała w funkcji czasu (górne) i trajektorie fazowe (dolne) przy częstości wymuszającej $\Omega = 1,01 [\text{rd.s}^{-1}]$. Pokazano pierwszych 200 s ruchu. Po lewej wyniki symulacji uzyskane w programie *Working Model*[®]; po prawej weryfikacja wyników za pomocą programu *Mathematica*[®]

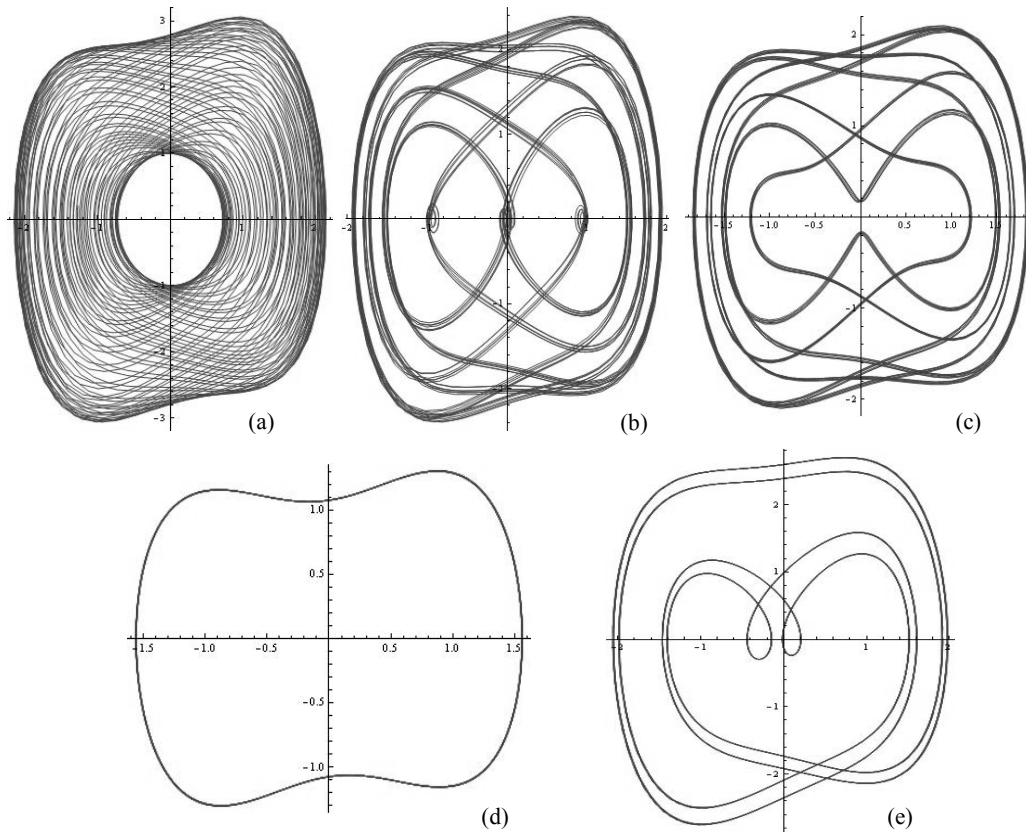
Na rysunku 4 pokazano trajektorie fazowe obrazujące zmiany charakteru ruchu ciała tuż po jego rozpoczęciu (pierwsze 200 s) i po blisko trzech godzinach, dla częstości wymuszenia $\Omega = 0,95 [\text{rd.s}^{-1}]$.



Rys. 4. Trajektorie fazowe przy częstości wymuszającej $\Omega = 0,95 [\text{rd.s}^{-1}]$: po lewej pierwsze 200 s ruchu, po prawej po 10000 s ruchu

W układach o silnej nieliniowości niewielka zmiana parametrów może powodować diametralnie różne zachowanie się dynamiczne tego układu.

Na kolejnych rysunkach pokazano wpływ 10% zmiany częstości wymuszenia Ω na zachowanie się dynamiczne badanego ciała po upływie 10000 sekund ruchu ciała; należy przy tym podkreślić fakt, że początkowe formy ruchu tak bardzo się od siebie nie różnią.



Rys. 5. Trajektorie fazowe dla różnych częstości siły wymuszającej Ω po 10000 s ruchu: (a) – 0,93; (b) – 0,95; (c) – 0,97; (d) – 0,99; (e) – 1,01 [rd.s⁻¹]

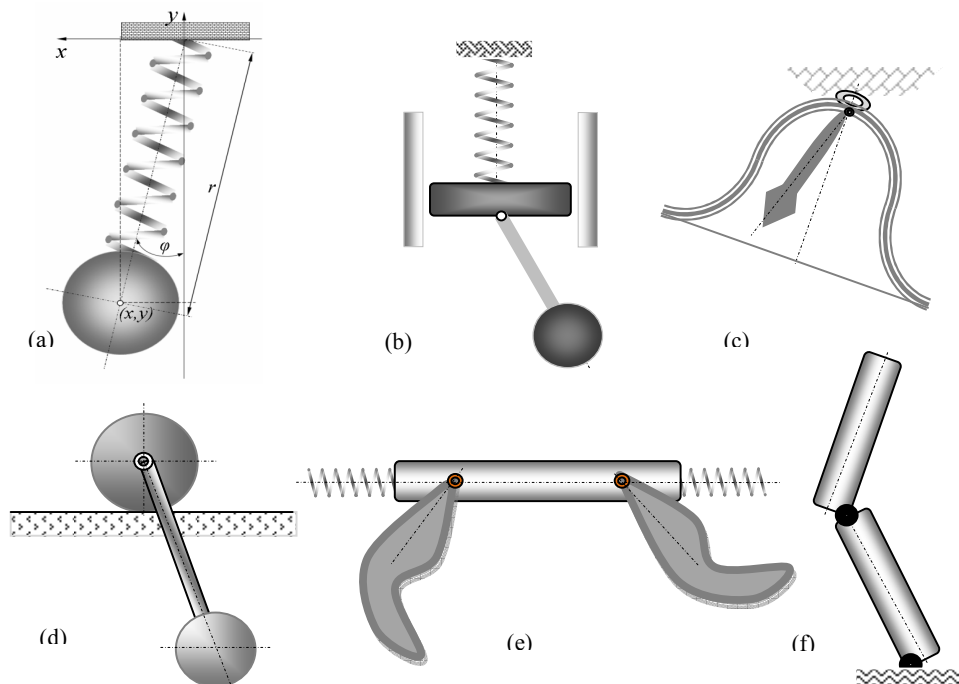
Zmiany innych parametrów układu (równania (3)) mogą prowadzić do rozwiązań bifurkacyjnych lub określonych w dziedzinie chaosu [2, 6, 13].

4. SYMULACJA DYNAMIKI RUCHU UKŁADU WIELOMASOWEGO – PODWÓJNE WAHADŁO FIZYCZNE

Analiza dynamiki złożonych, wielomasowych układów mechanicznych należy do grupy zagadnień charakteryzujących się znaczną praco- i czasochłonnością. Złożone układy dynamiczne, mające wiele stopni swobody, i przyjmowane do ich analizy modele matematyczne opisywane są proporcjonalną do tej liczby ilością różniczkowych równań.

Równania te są najczęściej sprzężone i nieliniowe, a ich rozwiązanie wymaga zaangażowania rozbudowanego aparatu matematycznego [2, 7, 12, 13].

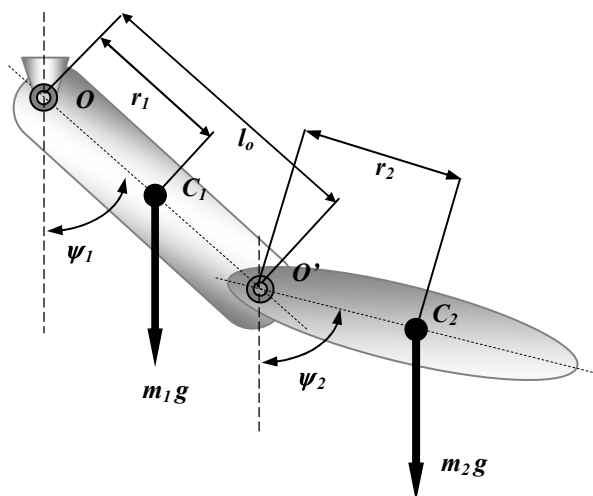
Do takich układów należą wahadła o więcej niż jednym stopniu swobody – rysunek 6.



Rys. 6. Przykłady wahadeł o dwóch stopniach swobody: (a) – wahadło o zmiennej długości; (b) – wahadło o ruchomym punkcie zawieszenia; (c) – wahadło typu dzwon; (d) – wahadło na toczącym się okręgu; (e) – wahadła w układzie kroczącym (*zjawisko synchronizacji*); (f) – odwrotne wahadło podwójne

Analizą dynamiki wahadła podwójnego zajmowało się wielu badaczy, a mimo to nie została ona w pełni poznana, zwłaszcza dla dużych wartości kątów wychyleń początkowych [4, 13]. Analiza takich układów jest istotna między innymi z punktu widzenia badania dynamiki układów kroczących, robotów z wieloprzegubowymi ramionami manipulacyjnymi lub przy konstruowaniu nowoczesnych protez kończyn.

Na rysunku 7 przedstawiono konwencjonalny układ podwójnego wahadła fizycznego [3, 12].



Rys. 7. Podwójne wahadło fizyczne

Dynamika wahadła podwójnego została opisana poprzez wprowadzenie dwóch współrzędnych uogólnionych: ψ_1 i ψ_2 , określających położenie jego elementów tak jak pokazano na rys. 7.

Dynamiczne, różniczkowe równania ruchu ramion wahadła podwójnego wyprowadzono wykorzystując równania Lagrange'a II rodzaju i mają one następującą postać:

$$(J_1 + m_2 l_o^2) \cdot \ddot{\psi}_1 + m_2 l_o r_2 \ddot{\psi}_2 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1) - m_2 l_o r_2 \dot{\psi}_2^2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + (m_1 r_1 + m_2 l_o) g \sin \psi_1 = 0 \quad (4a)$$

$$J_2 \ddot{\psi}_2 + m_2 l_o r_2 \ddot{\psi}_1 \cdot \cos(\psi_2 - \psi_1) + m_2 l_o r_2 \dot{\psi}_1^2 \sin(\psi_2 - \psi_1) + m_2 g r_2 \sin \psi_2 = 0 \quad (4b)$$

gdzie: m_1, m_2 – odpowiednio masy górnego i dolnego ramienia wahadła,

J_1 – moment bezwładności górnego ramienia (belki) wahadła względem przegubu O ,

J_2 – moment bezwładności dolnego ramienia (belki) wahadła względem przegubu O' ,

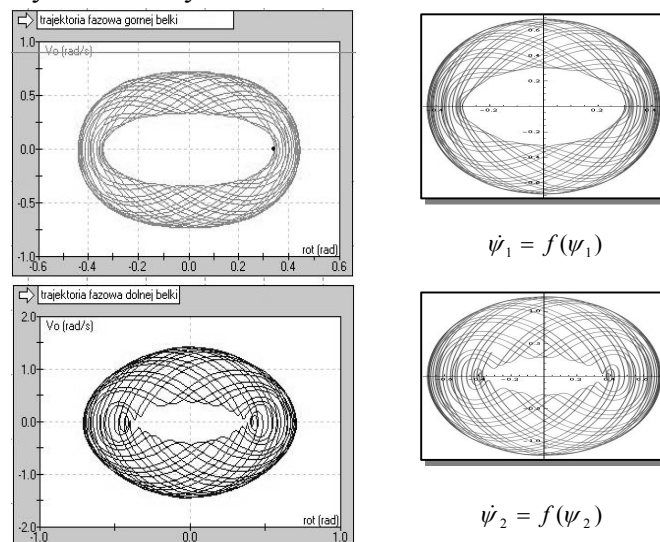
r_1, r_2 – odległości środków masy ramion wahadła od ich przegubów,

l_o – rozstaw przegubów ramion wahadła.

W środowisku komputerowym **Working Model**[®] wykonano model wirtualny układu mechanicznego z rysunku 7. Przeprowadzono dla tego modelu symulacje dynamiki jego ruchu oraz rozwiązano nieliniowe równanie (4) za pomocą programu **Mathematica**[®]. Parametry modelu wirtualnego:

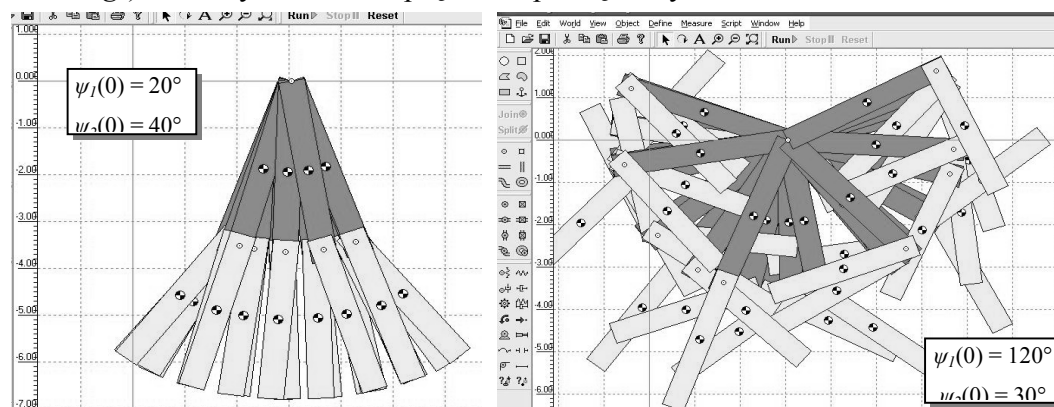
- masa górnego ramienia wahadła (belki) – $m_1 = 2,0$ [kg];
- masa dolnego ramienia wahadła (belki) – $m_2 = 1,7$ [kg];
- odległość środka masy górnego ramienia wahadła od przegubu O – $r_1 = 1,45$ [m];
- odległość środka masy dolnego ramienia wahadła od przegubu O' – $r_2 = 1,50$ [m];
- rozstaw przegubów ramion wahadła (odległość OO') – $l_o = 3,7$ [m].

Otrzymane wyniki porównano celem weryfikacji dokonanej analizy. Rezultaty pokazano na odpowiednich wykresach – rysunki 8-11.



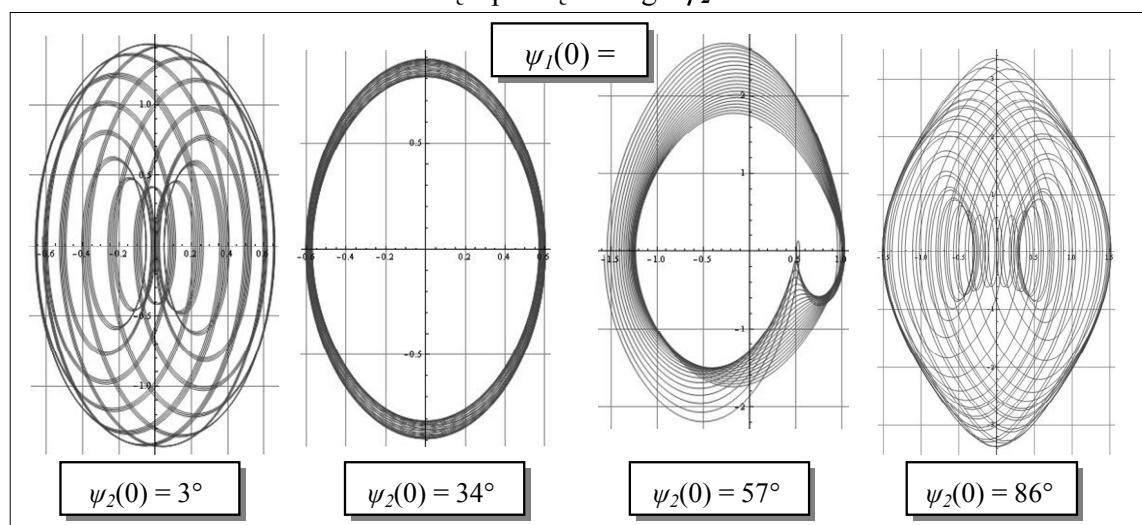
Rys. 8. Trajektorie fazowe ruchu górnego i dolnego ramienia wahadła podwójnego. Wartości początkowe: $\psi_1(0) = 20^\circ$; $\dot{\psi}_1(0) = 0$; oraz $\psi_2(0) = 40^\circ$; $\dot{\psi}_2(0) = 0$. Po lewej portrety uzyskane jako wynik symulacji ruchu wahadła w programie **Working Model**[®], po prawej weryfikacja wyników za pomocą programu **Mathematica**[®]

Na rysunku 9 pokazano symulacje faz ruchu wahadła podwójnego dla niewielkich i dużych wartości początkowych kątów wychylenia ramion wahadła (względem położenia równowagi) i zerowych wartości prędkości początkowych.



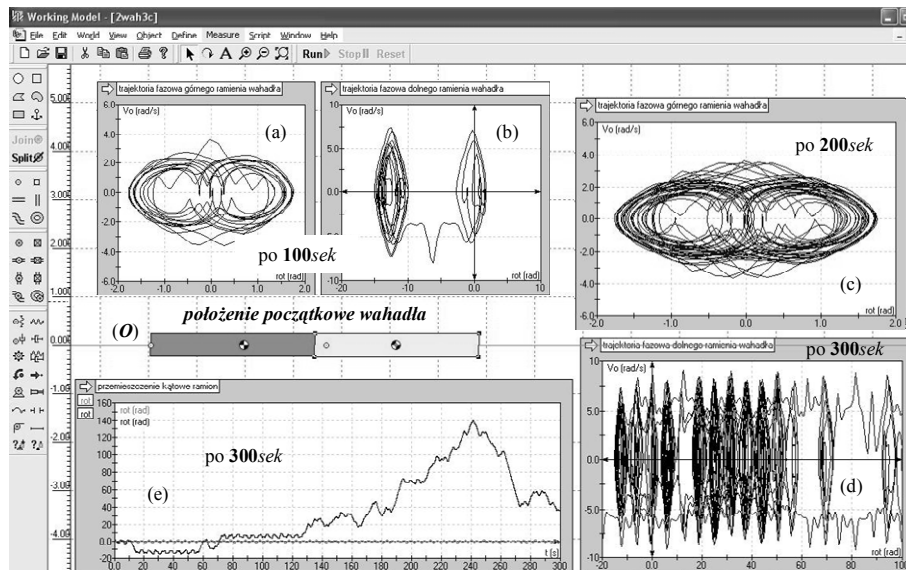
Rys. 9. Symulacja faz ruchu ramion wahadła dla niewielkich i dużych wartości początkowych kątów wychylenia. Wahadło na prawym rysunku wykonuje ruch chaotyczny

Na rysunku 10 przedstawiono portrety fazowe pierwszych 100 s ruchu dolnego ramienia wahadła w zależności od wartości kąta początkowego ψ_2



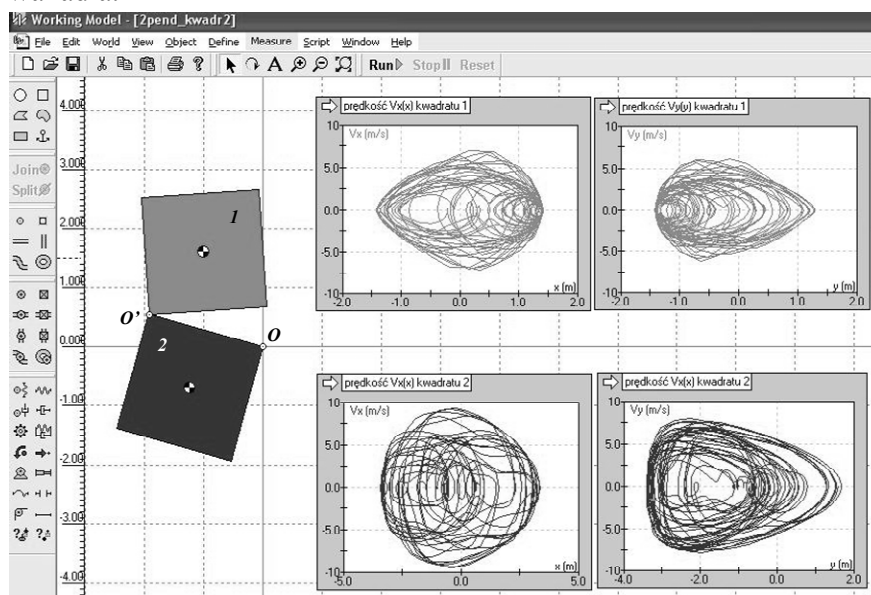
Rys. 10. Trajektorie fazowe ruchu dolnego ramienia wahadła – pierwsze 100 s ruchu – dla różnych wartości początkowych kąta $\psi_2(0)$; wartość początkowa kąta $\psi_1(0) = 20^\circ$. Na rys. 10 pokazano wyniki symulacji ruchu, przeprowadzonej za pomocą programu **Working Model**[®], obrazujące ruch chaotyczny wahadła. Na rysunku przedstawiono portrety fazowe ruchu ramion wahadła po różnych czasach ruchu.

Na rysunku 11 pokazano wyniki symulacji ruchu, przeprowadzonej za pomocą programu **Working Model**[®], obrazujące ruch chaotyczny wahadła. Na rysunku przedstawiono portrety fazowe ruchu ramion wahadła po różnych czasach ruchu.



Rys. 11. Trajektorie fazowe ruchu ramion wahała wykonującego ruch chaotyczny: a) trajektoria fazowa górnego ramienia wahała po pierwszych 100 s ruchu; b) trajektoria fazowa dolnego ramienia wahała po pierwszych 100 s ruchu; c) trajektoria fazowa górnego ramienia wahała po 200 s ruchu; d) trajektoria fazowa dolnego ramienia wahała po 300 s ruchu; e) przemieszczenia kątowe ramion wahała w funkcji czasu

Na kolejnym rysunku (rys. 12) pokazano model podwójnego wahała niesymetrycznego. Model ten składa się z dwóch płyt kwadratowych o masach 4,0 kg i krawędzi 2 m. Górny element wahała (1) może obracać się dookoła stałego przegubu O i jest połączony z drugim elementem wahała (2) ruchomym przegubem O' . Równania różniczkowe opisujące taki układ mechaniczny mają postać analogiczną do równań (4). Na rysunku 12 pokazano trajektorie fazowe dla współrzędnych kartezjańskich wektorów prędkości środków mas obu elementów wahała.



Rys. 12. Portrety fazowe dla środków mas elementów niesymetrycznego wahała podwójnego

5. PODSUMOWANIE

Analiza dynamiki nieliniowych układów mechanicznych należy do grupy zagadnień charakteryzujących się znaczną praco- i czasochłonnością. Złożone układy nieliniowe, mające wiele stopni swobody, opisywane są proporcjonalną do tej liczby ilością różniczkowych równań. Ich rozwiązanie wymaga zaangażowania rozbudowanego aparatu matematycznego oraz odpowiednich programów komputerowych.

Bez względu na to, jaką metodę zastosuje się do rozwiązywania równań, konieczna jest weryfikacja poprawności otrzymanych wyników.

W pracy zaprezentowano układy mechaniczne, którymi zajmowali się także inni badacze, lecz głównym jej celem było pokazanie możliwości wykorzystania programu **Working Model**[®] firmy MSC Knowledge do modelowania i symulowania dynamiki układów mechanicznych, który jest jednym z łatwiejszych w obsłudze i interpretacji otrzymywanych wyników [8, 9]. Otrzymywane wyniki były weryfikowane za pomocą programu **Mathematica**[®].

Główną zaletą programu **Working Model**[®] jest szybkość konstruowania i modyfikacji modeli wirtualnych bez konieczności szczegółowego podawania wielu danych, takich jak np. momenty bezwładności, środki mas.

Główną natomiast jego wadą jest niemożność badania ruchu w bardzo długich przedziałach czasowych ze względu na przepełnienie buforów pamięciowych programu liczącego.

Stosując do obliczeń mechanicznych układów nieliniowych program **Mathematica**[®], mamy do czynienia z sytuacją dokładnie odwrotną. Wszystkie parametry fizyczne wpływające na ruch muszą być obliczone wcześniej lub bardzo precyzyjnie zdefiniowane odpowiednimi zależnościami, przez co bardzo rozbudowują się wstępne procedury obliczeniowe. Znaczniejsze zmiany konstrukcyjne w modelu wirtualnym powodują konieczność ponownego (od nowa) sformułowania opisujących je zależności. To poważna wada tego programu. Natomiast główną zaletą programu **Mathematica**[®] jest niespotykana dokładność obliczeń; możliwość prowadzenia ich dla bardzo długich interwałów czasowych oraz opracowywanie wyników praktycznie w dowolnej formie. Możliwości tworzenia w tym programie animacji ruchu należy uznać za wysoce niewystarczające, ponieważ modele geometryczne są zbyt uproszczone (za bardzo zgeometryzowane).

Końcowy wniosek, jaki nasuwa się w wyniku przeprowadzonych badań symulacji dynamiki ruchu wybranych układów mechaniki nieliniowej, jest taki, że należy:

- za pomocą programu **Working Model**[®] przeprowadzić badania i symulacje wstępne
- po dokonaniu wstępnej analizy wykonać obliczenia za pomocą programu **Mathematica**[®] o podwyższonej dokładności, dla precyzyjnie zdefiniowanych modeli
- obie prowadzone analizy pozwalają określić czy po zaniknięciu ruchów przejściowych (nieustalonych) układ mechaniczny osiągnie stabilny stan dynamiczny, czy też jego ruch będzie zmierzał do chaosu.

Taki sposób wykorzystania wirtualnej rzeczywistości czynią z zastosowanego oprogramowania dobre narzędzie dla inżynierów, badaczy i studentów.

(Wszystkie rysunki zawierające wykresy, panele danych oraz modeli podnośników są oryginalnymi kopiami obrazów ekranowych otrzymywanych przez autora podczas przeprowadzanych symulacji dynamiki analizowanych układów mechanicznych.)

Więcej przykładów zostanie przedstawionych podczas XIV Szkoły.

LITERATURA

- [1] Arczewski K., Pietrucha J., Szuster J. T.: *Drgania układów fizycznych*, s. 474. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2008.
- [2] Awrejcewicz J.: *Matematyczne metody mechaniki*, Łódź 1995, s. 251.
- [3] Awrejcewicz J., Sendkowski D., Kaźmierczak M.: *Geometrical approach to the swinging pendulum dynamice*, Computers and Structures, 84 (2006), s. 577–1583.
- [4] Baker G. L., Blackburn J. A.: *The Pendulum. A Case Study in Physics*, Oxford University Press, 2005, s. 594.
- [5] Grzymkowski R., Kapusta A., Kuboszek T., Słota D.: *Mathematica 6*. Wyd. Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2008, s. 718.
- [6] Lakshmanan M., Murali K.: *Chaos in nonlinear oscillators: controlling and synchronization*, „World Scientific Series on Nonlinear Science Series A”, Vol. 13, s. 235.
- [7] Lubowiecka I.: *Całkowanie nieliniowych równań dynamiki ciała sztywnego i powłok sprężystych*, Wyd. Politechnika Gdańska, s. 177.
- [8] Lubnauer W. A.: *Wykorzystanie programu Working Model® do symulacji ruchu układów mechanicznych*, Materiały XIII-tej Szkoły Komputerowego Wspomagania Projektowania, Wytwarzania i Eksploatacji, Jurata 2009.
- [9] Lubnauer W. A.: *Wirtualne modelowanie układów mechanicznych z wykorzystaniem środowiska komputerowego*, V Konferencja Naukowa „Modelowanie i Symulacja” MiS-5, Kościelisko, 2008.
- [10] Morrison F.: *Sztuka modelowania układów dynamicznych*, WNT, Warszawa, 1996, s. 432.
- [11] Nusse H. E., Yorke J. A.: *Dynamics: Numerical Explorations (Applied Mathematical Sciences)*, Springer-Verlag, 2nd rev 1998, s. 609.
- [12] Supeł B.: *Badania eksperymentalne i analiza numeryczna prostych chaotycznych modeli mechanicznych*, rozprawa doktorska, Politechnika Łódzka, Łódź 2005.
- [13] Taylor J. R.: *Mechanika klasyczna*, PWN SA, Warszawa 2006, t. I, s. 486 i t. II, s. 310.
- [14] KASKADE, *Numerical Analysis and Modelling* – KASKADE 3.1, <http://www.zib.de/Numerik/numsoft/kaskade>.
- [15] WORKING MODEL, *Tutorial Guide*, Knowledge Revolution, Redwood City, 2005.