

**Recenzja i ocena dorobku naukowo-badawczego,
dydaktycznego i organizacyjnego dra Pawła
Zaprawy w postępowaniu habilitacyjnym
wszczętym w dziedzinie nauk matematycznych w
dyscyplinie naukowej matematyka**

A. RECENZJA I OCENA OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

W skład osiągnięcia naukowego dra Pawła Zaprawy zatytułowanego *Zbiory Koebego i zbiory pokrycia dla klas funkcji analitycznych* wchodzi 9 publikacji, z których pierwsza ukazała się w roku 2005, ostatnia zaś w roku 2017. Siedem z tych prac zamieszczonych zostało w pismach z listy JCR, dwie zaś w pismach z listy B MNiSW. Dwie z tych prac napisane są samodzielnie, pozostałe we współpracy, przy czym w sześciu z nich współautorem jest L. Koczan, jednej zaś M. Sobczak-Kmieć.

Na samym początku zaznaczę, że tak zebrany cykl prac tworzących osiągnięcie naukowe dotyczące problemu wyznaczenia zbiorów Koebego i zbiorów pokrycia dla wybranych klas funkcji analitycznych jest jednolitym, spójnym zbiorem wyników autora, otrzymanych bądź to samodzielnie, bądź to we współpracy. Niech $\tilde{\mathcal{A}}$ będzie klasą funkcji analitycznych w kole jednostkowym $\Delta := \Delta_1$, gdzie $\Delta_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, $r > 0$, zaś $\mathcal{A}$ jej podklasą funkcji f standardowo unormowanych, tj. $f(0) = 0$ i $f'(0) = 1$. Jeśli teraz A jest ustaloną podklasą w $\mathcal{A}$, to zbiorem Koebego klasy A , oznaczanym przez K_A , nazywane jest przecięcie wszystkich zbiorów $f(\Delta)$ po funkcjach f z klasy A , zaś zbiorem pokrycia klasy A , oznaczanym przez L_A , nazywana jest suma wszystkich zbiorów $f(\Delta)$ po funkcjach f z klasy A . Największy promień koła, spośród promieni wszystkich kół, które zawarte są w zbiorze Koebego nazywany jest stałą Koebego, zaś najmniejszy promień koła spośród promieni wszystkich kół, które zawierają zbiór pokrycia L_A nazywany jest promieniem pokrycia.

Pojęcie zbioru Koebego dowolnej klasy funkcji analitycznych w $\tilde{\mathcal{A}}$ pochodzi od Krzyża i Reade'a z roku 1967. Jednakże źródła tej idei sięgają początków geometrycznej teorii funkcji. W roku 1907 Koebe postawił hipotezę, że moduł każdej funkcji z klasy $\mathcal{S}$, tj. z klasy funkcji jednolistnych zawartej w $\mathcal{A}$, jest nie mniejszy niż $1/4$. Bieberbach dowodząc w roku 1916 hipotezę Koebego wykorzystał fakt, że operator $\mathcal{S} \ni f \mapsto df/(d - f)$, gdzie



d jest punktem nieprzyjmowanym przez f , zachowuje klasę $\mathcal{S}$, wiążąc jednocześnie zagadnienie punktu nieprzyjmowanego z drugim współczynnikiem funkcji f .

Jest zaskakującym, ale naturalne uogólnienie, aby w miejsce koła Δ wziąć jego dowolny niepusty podzbiór D i badać zarówno przecięcie jak i sumę nad zbiorem D po wszystkich funkcjach z klasy A zawartej w $\mathcal{A}$ czekało do roku 2005 tj. do pierwszej pracy dra Zaprawy i Koczana oznaczonej w autoreferacie jako [H1]. Zgodnie z oświadczeniem pomysł ten pochodzi od dra Zaprawy. Niech więc $K_A(D)$ i $L_A(D)$ oznaczają odpowiednio przecięcie i sumę zbiorów $f(D)$ po funkcjach f z klasy A nazywane odpowiednio zbiorem Koebe'go klasy A nad zbiorem D i zbiorem pokrycia klasy A nad zbiorem D . Zdefiniowanie zbiorów $K_A(D)$ i $L_A(D)$ uważam za jeden z najważniejszych wyników osiągnięcia naukowego dra Zaprawy mający istotne znaczenie w geometrycznej teorii funkcji. Wprowadzone uogólnienie jest naturalne a jednocześnie w sposób nietrywialny poszerza tematykę badań. Ponadto pozwala doprecyzować klasyczne rezultaty czego przykładem jest ważny następujący wynik udowodniony w [H1]: $K_{\mathcal{T}}(H) = \Delta_{1/4}$. W równości tej $\mathcal{T}$ oznacza klasę funkcji typowo-rzeczywistych tj. klasę wszystkich funkcji $f \in \tilde{A}$ takich, że $(\operatorname{Im} z)(\operatorname{Im} f(z)) \geq 0$ dla $z \in \Delta$, zaś H jest soczewką Gołuzina w Δ , tj. zbiorem jednolistności klasy $\mathcal{T}$. Wynika więc stąd, że $\Delta_{1/4} \subset f(H)$, co istotnie wzmacnia wynik Brannana i Kirwana z roku 1969: $\Delta_{1/4} \subset f(\Delta)$, i uzasadnia sens badań nad zbiorami $K_A(D)$ i $L_A(D)$. We wspomnianej pracy [H1], oprócz podania ogólnych własności zbiorów $K_A(D)$ i $L_A(D)$ natury topologicznej, znaleziono zbiory $K_{\mathcal{T}}(E_a)$, gdzie $\{E_a : a \geq 1\}$, jest rodziną soczewek w H , i zbiory $K_{\mathcal{T}}(\Delta_r)$ dla $r \in (0, \sqrt{2}-1]$. Ograniczenie na r wynika z metody obwiedni jako metody rachunkowej zawężonej do zbiorów leżących w zbiorze jednolistności klasy $\mathcal{T}$. W [H1] wyznaczono też zbiory $L_{\mathcal{T}}(\Delta_r)$ dla $r \in (0, 1)$. Tematyka ta kontynuowana jest w pracy [H2], w której rozważana jest klasa $\mathcal{T}(1/2)$ złożona z funkcji postaci

$$f(z) = \int_{-1}^1 z \sqrt{k_t(z)} / z d\mu(t), \quad z \in \mathbb{D},$$

gdzie dla $t \in [-1, 1]$, $k_t(z) := z/(1 - 2tz + z^2)$, $z \in \mathbb{D}$, zaś μ jest miarą probabilistyczną na przedziale $[-1, 1]$. Wyznaczone zostały: zbiory $K_{\mathcal{T}(1/2)}(\Delta_r)$ dla wszystkich $r \in (0, 1]$, skąd w szczególności wynika, że $K_{\mathcal{T}(1/2)} = \Delta_{1/2}$, zbiór $K_{\mathcal{T}(1/2)}(H)$ oraz zbiory $L_{\mathcal{T}}(\Delta_r)$ dla $r \in (0, 1)$.

Godna uwagi i podkreślenia jest metoda dowodu w obu pracach [H1] i [H2], którą można nazwać metodą obwiedni. Jest ona bowiem oryginalnym, wartościowym pomysłem dra Zaprawy (zgodnie z oświadczeniem). Wyniki obu prac dobrze uzasadniają skuteczność rachunkową zastosowanej metody obwiedni, która może być również użyta do innych klas nie będących obrotowo niezmienniczymi. Taką jest każda klasa w $\tilde{A}$ o współczynnikach rzeczywistych. W praktyce metoda obwiedni stosowana jest w omawianych

Alce

pracach do zbiorów D w kole Δ , które leżą w zbiorze jednolistności rozważanej klasy. I tak, w przypadku klasy $\mathcal{T}$ zbiorem jednolistności jest soczewka Gołuzina H . Ponieważ dla ustalonego $z \in \Delta$ minimum modułu $|f(z)|$ po funkcjach $f \in \mathcal{T}$ osiągnięte jest przez funkcje postaci $\alpha k_1 + (1 - \alpha)k_{-1}$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$, więc w celu wyznaczenia zbioru $K_{\mathcal{T}}(D)$ należy wyznaczyć obwiednię odcinków $[0, 1] \ni \alpha \mapsto \alpha k_1(z) + (1 - \alpha)k_{-1}(z)$ dla wszystkich punktów z leżących na brzegu zbioru D . Z kolei w przypadku klasy $\mathcal{T}(1/2)$, dla ustalonego $z \in \Delta$ minimum modułu $|f(z)|$ po funkcjach $f \in \mathcal{T}(1/2)$ osiągnięte jest przez funkcje postaci $\alpha f_1 + (1 - \alpha)f_{-1}$, gdzie $\alpha \in [0, 1]$, które są jednoliste, przy czym $f_t(z) := z\sqrt{k_t(z)}/z$, $z \in \Delta$, dla $t \in [-1, 1]$. Tym samym metoda obwiedni w klasie $\mathcal{T}(1/2)$ działa dla każdego zbioru jednospójnego D w kole Δ zawierającego początek układu.

Interesującą i ważną pod względem technicznym jest praca [H3], w której zaproponowana została nowa metoda znalezienia zbioru Koebeego dla klasy funkcji typowo-rzeczywistych $\mathcal{T}$. Zbiór ten został wyznaczony przez Goodmana metodą, która oparta jest na tzw. uniwersalnej funkcji typowo-rzeczywistej. W pracy [H3] powtórzony został wynik Goodmana przy zastosowaniu nowej, prostszej metody, mającej tę zaletę, że można ją stosować do innych podklas klasy funkcji typowo-rzeczywistych. Jest to znaczące osiągnięcie dra Zaprawy. W ten sposób uzyskano bowiem zbiór Koebeego dla klasy $\mathcal{T}^{M,k}$ tych funkcji typowo-rzeczywistych, które koło Δ przekształcają na płaszczyznę z usuniętą półprostą rzeczywistą $(-\infty, -M/4]$, gdzie $M > 1$. Użyta w oznaczeniu litera k oznacza funkcję Koebeego i odnosi się do ogólniejszego oznaczenia $\mathcal{T}^{M,g}$, przez które rozumiana jest podklasa funkcji typowo-rzeczywistych podporządkowanych funkcji Mg , przy założeniu, że g jest funkcją typowo-rzeczywistą jednolistną. Specyfikując funkcję g uzyskano zbiory Koebeego dla klasy funkcji typowo-rzeczywistych ograniczonych i klasy funkcji typowo-rzeczywistych, które koło Δ przekształcają w zbiór leżący w poziomym pasie o ustalonej z góry szerokości. Wracając do samej metody dowodu dla klasy $\mathcal{T}$, pomysł oparty jest na następującej konstrukcji. Przyjmijmy, że funkcja typowo-rzeczywista f nie przyjmuje wartości d leżącej w górnej półpłaszczyźnie. Przez symetrię funkcja f nie przyjmuje wartości $\bar{d}$. Homografia $g := (f - d)/(f - \bar{d})$ nie przyjmuje wartości 0 i 1. W konsekwencji funkcja $h := (1/2) \log g$ normowana tak, że $h(0) = 2 \operatorname{Arg} d$, jest funkcją typowo-rzeczywistą przekształcającą oś rzeczywistą w odcinek $(0, 2\pi)$. W kolejnym kroku skonstruowana została funkcja H , która jest wspólną dominantą dla wszystkich funkcji h . Nierówność $h'(0) \leq H'(0)$, prowadzi do szukanego równania brzegu dla zbioru Koebeego.

Kolejne prace cyklu tj. [H4]-[H6] dotyczą klas funkcji, które są jednoliste o współczynnikach rzeczywistych. I tak, w pracy [H4] znaleziony został zbiór Koebeego i zbiór pokrycia dla klasy funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych n -symetrycznych. Z kolei w pracy [H6] wyznaczony został zbiór Koebeego dla klasy funkcji kołowo-symetrycznych gwiazdzystych i kołowo-symetrycznych wypukłych w

Sheel

kierunku osi urojonej. Należy podkreślić, że dla całej klasy funkcji kołowo-symetrycznych zbiór Koebeego wyznaczony został przez Krzyża i Reade'go w roku 1967. W głównym wyniku w pracy [H5] podane zostały zbiory Koebeego dla dwóch klas $\Gamma^+(c)$ i $\Gamma^-(c)$ z ustalonym drugim współczynnikiem $c := a_2$ będących podklasami w klasie Γ funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej o współczynnikach rzeczywistych. O związku zagadnienia punktu nieprzyjmowanego z drugim współczynnikiem już wspominałem, więc wyznaczanie zbiorów Koebeego, a także badanie innych zagadnień ekstremalnych w klasach o ustalonym drugim współczynniku jest naturalne i ma swoją długą historię.

Metoda dowodu w pracach [H4]-[H6] opiera się na pojęciu podporządkowania dwóch funkcji analitycznych i konstrukcji funkcji ekstremalnych, które są dominantami w tym podporządkowaniu. Biorąc dowolny punkt $\varrho e^{i\theta}$ na brzegu zbioru $f(\Delta)$ konstruuje się funkcję ekstremalną $(\varrho/\varrho(\theta))F_\theta$, przy czym $\varrho(\theta)$ ustala się przyjmując $F'_\theta(0) = 1$, w taki sposób, że $f \prec (\varrho/\varrho(\theta))F_\theta$, co ostatecznie prowadzi do nierówności $\varrho \geq \varrho(\theta)$ określającej zbiór Koebeego. Metody tej używali MacGregor (1964) oraz wspomniany Krzyż i Reade (1967). Pomimo, że metoda dowodowa nie jest twórczym wkładem dra Zaprawy wyniki z omawianych prac uważam za wartościowe. Istotną trudnością jest bowiem skonstruowanie dominant, które prowadzą do wyznaczenia zbiorów Koebeego i jednocześnie są funkcjami ekstremalnymi, co w omawianych pracach technicznie zostało zrobione bez zarzutu. Warto dodać, że rozważane klasy są trudne do badania, ale może i dlatego zainteresowanie nimi nie słabnie.

W pracach [H7]-[H9] zagadnienie zbiorów Koebeego i zbiorów pokrycia badane jest nad szeregiem klas o dowolnych współczynnikach, które nie są obrotowe. I tak, w pracy [H7] rozważane są dwie klasy oznaczone przez $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{H}$ funkcji $f \in \mathcal{A}$ spełniających odpowiednio warunki

$$\operatorname{Re} \left\{ (1-z)^2 \frac{f(z)}{z} \right\} > 0, \quad \operatorname{Re} \left\{ (1-z^2) \frac{f(z)}{z} \right\} > 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

oraz podklasa $\mathcal{H}^{(2)}$ funkcji parzystych w $\mathcal{H}$. W obu klasach wyznaczone zostały zbiory Koebeego i zbiory pokrycia nad kołami Δ_r , przy czym w przypadku zbiorów Koebeego, o czym już wcześniej wspomniano, promień r ograniczony jest z góry promieniem jednolistności w każdej z klas. Obie klasy $\mathcal{Q}$ i $\mathcal{H}$ mają swoje umocowanie w literaturze jako szczególne przypadki klas funkcji prawie gwiazdzystych pochodzących od Reade'a z roku 1956. W pracy [H8] wyznaczono zbiory Koebeego i zbiory pokrycia w klasie funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej $2n$ -symetrycznych bez ograniczeń na współczynniki. Przypadek nieparzysty opublikowany w [P16] nie został dołączony do osiągnięcia naukowego z uwagi na analogiczną metodę dowodową jak w [H8], co zaznaczono w autoreferacie. W ostatniej pracy cyklu tj. w pracy [H9] wyznaczone zostały zbiory Koebeego dla funkcji które są wypukłe w dwóch symetrycznych kierunkach $e^{i\alpha\pi/2}$ i $e^{-i\alpha\pi/2}$ a następnie, korzystając z

Slade

otrzymanego wyniku, wyznaczono zbiory Koebe dla funkcji które są wypukłe w dwóch dowolnych kierunkach. Praca ta jest o tyle interesująca, że nie jest znany warunek analityczny charakteryzujący takie klasy. Niemniej informacje o zbiorach Koebe w tych klasach udało się uzyskać i jest to ważny wynik.

Ostatnie trzy prace dobrze ilustrują efektywność metody obwiedni i metody podporządkowania jako skutecznych narzędzi do znajdowania zbiorów Koebe.

A1. Najważniejsze wyniki.

- Wprowadzenie pojęcia zbiorów Koebe i zbiorów pokrycia nad dowolnym zbiorem w kole jednostkowym.
- Opracowanie metody obwiedni do wyznaczania zbiorów Koebe.
- Znalezienie nowego dowodu twierdzenia Goodmana o zbiorze Koebe w klasie funkcji typowo-rzeczywistych.
- Wzmocnienie wyniku Brannana i Kirwana.
- Klasyfikacja zbiorów Koebe w klasach funkcji wypukłych w kierunku osi rzeczywistej n -symetrycznych w zależności od n .
- Wyznaczenie zbiorów Koebe w klasie funkcji wypukłych w dwóch kierunkach.

A2. Znaczenie.

- Tematyka zbiorów Koebe i punktów nieprzyjmowanych jest trwale wpisana w geometryczną teorię funkcji od jej początków do dzisiaj. Zajmowali się nią m.in.: Koebe (1907), Bieberbach (1916), Krzyż, Reade (1967), Natanyahu (1969), Goodman (1979), Bshouty, Hengartner, Schober (1980), Wirths (2003).
- Zagadnienie to rozważane jest również w klasie odwzorowań quasi-konforemnych i odwzorowań harmonicznych, np. Ikoma (1970), Clunie, Sheil-Small (1984), Meteljević (2008).
- Klasy funkcji rozważane w pracach przedstawionego osiągnięcia naukowego są znane, badane przez innych autorów i mają trwale miejsce w teorii.

A3. Ocena. Podsumowując, moja ocena osiągnięcia naukowego dra Zaprawy jest pozytywna.

B. RECENZJA I OCENA POZOSTAŁEGO DOROBKU NAUKOWO-BADAWCZEGO, DYDAKTYCZNEGO I ORGANIZACYJNEGO

B1. Dr Zaprawa jest autorem 11 prac z listy A MNiSW (4 samodzielne, 7 we współautorstwie) i 14 prac w czasopismach spoza bazy JCR (5 samodzielnych, 9 we współautorstwie) nie wchodzących w skład osiągnięcia naukowego. Łączna liczba publikacji 33 (w tym 18 prac z listy A MNiSW) świadczy o dużej i stabilnej aktywności naukowej dra Zaprawy. Spora ilość

prac napisanych we współautorstwie dobrze świadczy o umiejętności współpracy dra Zaprawy z innymi matematykami, w tym również z matematykami zagranicznymi.

Dr Zaprawa uczestniczył czynnie w 14 konferencjach, na których wygłosił referaty w języku angielskim, i na 12 konferencjach, na których referaty głosił w języku polskim.

Dr Zaprawa był recenzentem 24 prac dla czasopism, w tym również do czasopism z listy A MNiSW. Oznacza to, że dr Zaprawa i jego dorobek naukowy jest widoczny i doceniany na rynku matematycznym.

Dr. Zaprawa brał udział jako wykonawca w dwóch grantach badawczych MNiSW.

W roku 2016 był na stażu naukowym w Alba Iulia w Rumunii.

Podsumowując, moja ocena **pozostałego dorobku naukowo-badawczego** i jednocześnie **całego dorobku naukowo-badawczego** dra Zaprawy jest pozytywna.

B2. W zakresie dydaktyki na szczególną uwagę zasługuje prowadzenie zajęć przez dra Zaprawę w języku angielskim dla studentów programu Erasmus.

Na podkreślenie zasługuje również prowadzenie zajęć popularyzatorskich dla uczniów szkół średnich.

Dr Zaprawa był promotorem 10 prac magisterskich i 7 prac licencjackich.

Podsumowując, moja ocena **dorobku dydaktycznego** dra Zaprawy jest pozytywna.

B3. Trzy Nagrody Rektora Politechniki Lubelskiej I stopnia kolejno za lata 2012/2013, 2013/2014, 2015/2016 za działalność organizacyjną dla dra Zaprawy są wystarczającą rekomendacją dla mojej pozytywnej oceny dla dra Zaprawy w zakresie tej działalności.

Można jeszcze zauważyć, że dr Zaprawa był członkiem Komitetu Organizacyjnego International Conference CMFT, 2017, Lublin. Ponadto jest redaktorem statystycznym w trzech czasopismach naukowych.

Podsumowując, moja ocena **dorobku organizacyjnego** dra Zaprawy jest pozytywna.

C. KONKLUZJA

Reasumując, stwierdzam, że osiągnięcie naukowe, cały dorobek naukowo-badawczy, dorobek dydaktyczny i organizacyjny dra Pawła Zaprawy spełniają wymagania ustawy o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu habilitacyjnego.