

dr Katarzyna Szymańska–Dębowska
Instytut Matematyki
Wydział Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej
Politechnika Łódzka
e-mail : katarzyna.szymanska-debowska@p.lodz.pl

Autoreferat

1 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe.

Tytuł zawodowy magistra matematyki (25.06.1998), Wydział Matematyki Uniwersytetu Łódzkiego.

Tytuł rozprawy: *Rozwiązania typu frontu fali dla uogólnionego równania Kortewega–de Vriesa.*

Promotor: prof. dr hab. Bogdan Przeradzki.

Stopień doktora nauk matematycznych (04.10.2006), Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego.

Tytuł rozprawy doktorskiej: *Wybrane asymptotyczne zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych zwyczajnych.*

Promotor: prof. dr hab. Bogdan Przeradzki.

2 Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu.

01.10.1998 – 22.02.2004 : asystent, Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej;

23.02.2004 – 24.09.2006 : asystent, Centrum Nauczania Matematyki i Fizyki Politechniki Łódzkiej;

25.09.2006 - 30.09.2006 : asystent, Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej;

04.10.2006 – 30.11.2006 : asystent, Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej;

01.12.2006 do chwili obecnej : adiunkt, Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej.

3 Wskazanie osiągnięcia naukowego.

Osiągnięciem naukowym stanowiącym podstawę do ubiegania się o stopień doktora habilitowanego nauk matematycznych jest cykl publikacji zatytułowany

**Nielokalne zagadnienia brzegowe dla równań różniczkowych
zwykłych rzędu drugiego,**

w skład którego wchodzi następujące publikacje:

- [H.1] K. Szymańska-Dębowska, *On the existence of solutions for nonlocal boundary value problems*, Georgian Math. J. 22 (2015), no. 2, 273–279.
(IF: 0.290, 5-year IF: 0.430, 15 p.)
- [H.2] J. Mawhin, K. Szymańska-Dębowska, *Convex sets and second order systems with nonlocal boundary conditions at resonance*, Proc. Amer. Math. Soc. 145 (2017), no. 5, 2023–2032.
(IF: 0.679, 5-year IF: 0.672, 25 p.)
- [H.3] J. Mawhin, B. Przeradzki, K. Szymańska-Dębowska, *Second order systems with nonlinear nonlocal boundary conditions*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. DOI: 10.14232/ejqtde.2018.1.56.
(IF: 0.926, 5-year IF: 0.884, 25 p.)
- [H.4] J. Mawhin, K. Szymańska-Dębowska, *Couples of lower and upper slopes and resonant second order ordinary differential equations with nonlocal boundary conditions*, Math. Bohem. 141 (2016), no. 2, 239–259.
- [H.5] K. Szymańska-Dębowska, *k-dimensional nonlocal boundary-value problems at resonance*, Electron. J. Differential Equations (2015), No. 148, 8 pp.
(IF: 0.769, 5-year IF: 0.618, 25 p.)
- [H.6] K. Szymańska-Dębowska, *On a generalization of the Miranda theorem and its application to boundary value problems*, J. Differential Equations 258 (2015), no. 8, 2686–2700.
(IF: 1,988, 5-year IF: 2.222, 45 p.)
- [H.7] K. Szymańska-Dębowska, *Solutions to nonlocal Neumann boundary value problems*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2018), No. 28, 1–14.
(IF: 0.926, 5-year IF: 0.884, 25 p.)

Powyższe publikacje celowo oznaczono [H.1]–[H.7], aby odróżnić je od innych prac autorki oznaczonych przez [P.1]–[P.22] i wymienionych w rozdziale 5 tego autoreferatu.

4 Szczegółowe omówienie osiągnięcia naukowego.

Prawa fizyki i przyrody są zazwyczaj opisywane za pomocą równań różniczkowych. Rozważane tego typu konkretne zagadnienia od samego początku stymulowały rozwój metod matematycznych. I tak, podstawowe pojęcia w klasycznej teorii zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych rzędu drugiego, wywodzą się z klasycznych zagadnień fizyki matematycznej. Początkowo dodatkowe warunki nakładano lokalnie. Jednak współcześnie rozważane problemy motywują do formułowania i badania pewnych nowych klas warunków brzegowych. Przykładem takiej klasy są nielokalne warunki brzegowe.

Warunki brzegowe nazywamy *nielokalnymi warunkami brzegowymi*, jeśli uwzględniają punkty wewnętrzne danego przedziału, to znaczy, wartość rozwiązania lub/ oraz jego pochodnej jest zadana w kilku punktach lub na całym rozważanym przedziale (zobacz [40, 75]).

Zagadnienia brzegowe z nielokalnymi warunkami brzegowymi pojawiają się w wielu różnych dziedzinach matematyki i fizyki stosowanej. W szczególności zawierają one wielopunktowe warunki brzegowe, które uogólniają zagadnienia interpolacji. Nielokalne warunki brzegowe wynikają również w sposób naturalny z twierdzenia Riesz o reprezentacji dla ciągłych funkcjonałów liniowych. Mogą się również pojawić, gdy trudno jest bezpośrednio zmierzyć dane na brzegu rozpatrywanego zbioru. Na przykład, czasami pomiary otrzymane dla nielokalnych warunków brzegowych mogą być bardziej precyzyjne niż pomiary otrzymane dla warunków lokalnych. Rzeczywiście, w następującym zagadnieniu Robina

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = 0 \quad (1)$$

warunek lokalny $u'(1) = 0$ może być zastąpiony przez warunek nielokalny

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = u(\alpha), \quad (2)$$

gdzie $\alpha \in (0, 1)$. Wykorzystując twierdzenie Rolle'a, można pokazać, że (1) jest wartością graniczną (2), gdy $\alpha \rightarrow 1^-$. Biorąc pod uwagę eksperymenty naukowe i obliczenia numeryczne, znacznie trudniej jest wyznaczyć wartość $u'(1)$ niż $\frac{u(1)-u(\alpha)}{1-\alpha}$ (por. [52]).

Historia nielokalnych zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych zaczyna się w 1908 roku od pracy Picone'a [68]. Późniejsze wyniki dla tego typu zagadnień można znaleźć w pracach Wildera [88], Birkhoffa i Kellogga [6], którzy jako pierwsi rozważyli zagadnienia nieliniowe i uogólnili przy tej okazji twierdzenie Brouwera o punkcie stałym na pewne przestrzenie funkcyjne. Przegląd wczesnej literatury dotyczącej nielokalnych zagadnień brzegowych można znaleźć w publikacjach Whyburna [87], Contiego [9], czy Kralla [44]. Od tamtej pory wielu autorów zaczęło rozważać równania różniczkowe (zwyczajne, eliptyczne, paraboliczne, itd.) z różnymi typami nielokalnych warunków brzegowych. Warto wspomnieć tutaj przynajmniej wyniki Bitsadzego and Samarskiego [7], Cannona [8], Friedmana [20], Il'ina i Moiseeva [32], Ionkina [38] oraz Kamynina [39], którzy wnieśli znaczący wkład w rozwój tej dziedziny równań różniczkowych.

O ile nam wiadomo, nazwa *nielocalne zagadnienia brzegowe* została użyta po raz pierwszy w pracy Ionkina z 1977 roku [37], w której badane było następujące

zagadnienie

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + f(x, t), \quad t \in (0, T), \quad x \in (0, 1) \\u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in [0, 1] \\u(0, t) &= a(t), \quad t \in [0, 1] \\ \int_0^1 u(x, t) dx &= b(t), \quad t \in [0, 1],\end{aligned}$$

gdzie a i b są danymi funkcjami. Tego typu zagadnienia mogą opisywać dyfuzję cząstek w przepływie turbulentnym oraz przepływ ciepła wzdłuż pręta w przypadku gdy rozkład ciepła na całej długości pręta jest znany. Ionkin nazywa całkowity warunek brzegowy *nielokalnym warunkiem brzegowym*. Od tamtej pory zaczęto używać określenia *nielokalne* zagadnienia brzegowe zamiast używanej wcześniej nazwy *nieklasyczne* zagadnienia brzegowe (zobacz, na przykład [14, 33, 80]).

Nielokalne zagadnienia brzegowe zawierają klasę zagadnień, w której warunki brzegowe zadane są przez całki Riemanna–Stieltjesa. Szczególnymi przypadkami tego typu warunków brzegowych są warunki trzypunktowe, wielopunktowe, czy też zawierające całki Riemanna. Jako przykład rozważmy następujące zagadnienie

$$u'' = f(t, u), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s),$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Kładąc $g(s) = 0$ dla $s \in [0, 1]$, otrzymujemy klasyczne zagadnienie Dirichleta

$$u'' = f(t, u), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

W przypadku gdy

$$g(s) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } s \in [0, \alpha] \\ 1 & \text{gdy } s \in (\alpha, 1] \end{cases},$$

$\alpha \in (0, 1)$, dostajemy następujące trzypunktowe zagadnienie brzegowe

$$u'' = f(t, u), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = u(\alpha).$$

Niech $m \in \mathbb{N}$. Weźmy takie liczby $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_m < \alpha_{m+1} = 1$ oraz $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots, a_m > 0$, że

$$\sum_{j=0}^m a_j = 1.$$

Jeśli zdefiniujemy $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$g(s) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } s \in [0, \alpha_1] \\ \sum_{k=1}^j a_k & \text{gdy } s \in (\alpha_j, \alpha_{j+1}], \quad j = 1, \dots, m-1 \\ \sum_{k=1}^m a_k & \text{gdy } s \in (\alpha_m, 1] \end{cases},$$

to można łatwo zauważyć, że w tym przypadku otrzymamy wielopunktowe zagadnienie Dirichleta postaci

$$u'' = f(t, u), \quad u(0) = 0, \quad u(1) = \sum_{j=0}^m a_j u(\alpha_j).$$

Współcześnie wiele uwagi poświęca się badaniu nielokalnych (trypunktowych, wielopunktowych, całkowych, czy też nieliniowych) zagadnień brzegowych dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego. Należy wspomnieć tutaj przynajmniej o pracach Erbe'a [18], Fenga, Ge i Zhanga [19], Gupty [29], Infante i Zimy [35], Karakostas i Tsamatosa [41, 42], Ma [52], Webba i Infante [84, 85], Webba i Zimy [86] oraz Yanga [89]. Takie problemy mają między innymi zastosowania w inżynierii chemicznej, termosprężystości, przepływie wód gruntowych i dynamice populacji (więcej informacji na ten temat można znaleźć na przykład w pracach [15, 19, 34, 62, 63, 82, 83] oraz w zamieszczonej w nich literaturze). Na przykład, nieliniowe równanie różniczkowe rzędu drugiego z nielokalnymi warunkami brzegowymi jest rozważane w [82] jako model rozkładu temperatury na podgrzewanym pręcie z czujnikiem na prawym końcu pręta, który dodaje lub eliminuje ciepło w zależności od temperatury wykrywanej przez czujniki w punktach pośrednich. W [83] nielocalne zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego rzędu drugiego jest modelem termostatu, z czujnikami wyrażonymi przez funkcjonały liniowe. Natomiast w pracy [62] rozważane jest nielocalne zagadnienie brzegowe rzędu drugiego, wraz jego zastosowaniem jako modelu sprężystej membrany.

Głównym celem badań związanych z nielokalnymi zagadnieniami brzegowymi jest otrzymywanie wyników dotyczących istnienia rozwiązań dla rozważanych zagadnień. Metody wykorzystywane do uzyskania twierdzeń o istnieniu rozwiązań zależą od tego, z jakiego typu zagadnieniem mamy do czynienia. Rozważmy następujące abstrakcyjne równanie postaci

$$Lu = Nu, \quad (3)$$

gdzie L jest operatorem fredholmowskim indeksu zero, zaś N operatorem nieliniowym (w odpowiednich przestrzeniach Banacha). Jeśli operator różniczkowy L z pewnymi zadanymi warunkami brzegowymi jest odwracalny, to znaczy $\text{Ker}(L) = \{0\}$, wówczas powiemy, że zagadnienie brzegowe jest *nierezonansowe*. Z drugiej strony, jeśli L nie jest odwracalny, mianowicie, $\dim \text{Ker}(L) \geq 1$, wówczas zagadnienie nazywamy *rezonansowym*. Gdy jądro operatora liniowego zawiera tylko zero, to L jest suriekcją i problem sprowadza się do poszukiwania punktów stałych operatora $L^{-1}N$, który jest przeważnie operatorem zwartym (albo, na przykład, ściągającym, monotonicznym, czy A -właściwym [66]), dla którego może być zastosowana odpowiednia metoda topologiczna (por. [12, 13, 16, 25, 51]). W trudniejszym przypadku, gdy jądro L jest nietrywialne, można wykorzystać inne metody, zaprezentowane na przykład w [3, 21, 22, 70].

Przedłożony cykl publikacji [H.1]–[H.7] zawiera wyniki dotyczące istnienia przynajmniej jednego rozwiązania dla pewnych zagadnień brzegowych z liniowymi i nieliniowymi nielokalnymi warunkami brzegowymi.

Wprowadźmy następujące zagadnienia nielocalne

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = \int_0^1 u'(s)dh(s), \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s), \quad (4)$$

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = \int_0^1 u'(s)dh(s) \quad u(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s), \quad (5)$$

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = \int_0^1 u'(s)dh(s) \quad u'(1) = \int_0^1 u(s)dg(s), \quad (6)$$

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = \int_0^1 u(s)dh(s) \quad u(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s), \quad (7)$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą, zaś funkcje $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $h = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$ mają wahanie skończone, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Istnienie rozwiązań dla zagadnień (4)–(7) jest przedmiotem rozważań w publikacji [H.1].

Niektóre zagadnienia omawiane w [H.1] nigdy nie były rozważane w znanej nam literaturze. Większość ogłoszonych drukiem publikacji zawierających tego rodzaju zagadnienia brzegowe dotyczy jedynie zagadnień trzypunktowych lub wielopunktowych. W przeciwieństwie do znanych wyników dla tego typu zagadnień, które rozważane były tylko w przypadku skalarnym, mamy tu do czynienia z układami równań. Na przykład zagadnienie (4) można zapisać jako układ następujących równań *zależnych*

$$\begin{cases} u_i''(t) = f_i(t, u(t), u'(t)) \\ u_i(0) = \int_0^1 u_i'(s)dg_i(s) \\ u_i'(1) = \int_0^1 u_i'(s)dh_i(s) \end{cases},$$

gdzie $t \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, zaś całki $\int_0^1 u_i'(s)dg_i(s)$, $\int_0^1 u_i'(s)dh_i(s)$ są rozumiane w sensie Riemanna–Stieltjesa. Pragniemy tutaj podkreślić, że przejście od przypadku skalarnego do przypadku wielowymiarowego jest dalekie od rutynowego uogólniania.

Ponadto wcześniejsze wyniki dotyczyły głównie zagadnień, w których prawa strona równania nie zależy od u' . Podsumowując, stwierdzamy że zagadnienia brzegowe (4)–(7) uogólniają i rozszerzają te wcześniej badane. Jako przykład przedstawiamy trzy ostatnio rozważane zagadnienia nielocalne (w [41] i [43] odpowiednio),

$$(p(t)u')' + q(t)f(u) = 0, \quad u(0) = \int_0^1 u'(s)dh(s), \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s),$$

$$(p(t)u')' + q(t)f(u) = 0, \quad u'(0) = \int_0^1 u'(s)dh(s) \quad u(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s),$$

gdzie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \in [0, 1]$, $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz

$$(p(t)u')' + q(t)f(u, u') = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s),$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (więcej informacji na ten temat można znaleźć w [H.1]). Według naszej wiedzy nie ma dalszych uogólnień wyżej wymienionych zagadnień poza naszymi.

Skupmy naszą uwagę na zagadnieniu (4) i załóżmy, że

$$\int_0^1 dg_i(s) \neq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Biorąc pod uwagę abstrakcyjne równanie (3), można zauważyć, że jeśli zachodzi warunek (8), to zagadnienie brzegowe (4) jest nierezonansowe, ponieważ odpowiadające mu jednorodne zagadnienie liniowe

$$u'' = 0, \quad u(0) = \int_0^1 u'(s)dh(s), \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s)dg(s),$$

posiada tylko rozwiązanie trywialne. Jak wspomniano wcześniej, przypadek, gdy zagadnienie (4) jest nierezonansowe, prowadzi do abstrakcyjnego równania operatorowego. Zatem pytanie o istnienie rozwiązań zagadnienia (4) redukuje się do pytania o istnienie punktów stałych pewnego operatora pełnociągłego.

Twierdzenie 1. [H.1, Theorem 1] *Założmy, że spełnione są następujące warunki:*

- (i) $f = (f_1, \dots, f_n) : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą;
- (ii) istnieje takie $M > 0$, że $\langle v, f(t, u, v) \rangle > 0$ dla $t \in [0, 1]$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ i $|v| \geq M$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^n$ odpowiadający normie euklidesowej $|\cdot|$;
- (iii) dla funkcji $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$ oraz $h = \text{diag}(h_1, \dots, h_n)$, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ zachodzi $\text{Var}(g) < 1$, $\text{Var}(h) < 1$, gdzie $\text{Var}(g)$ ($\text{Var}(h)$ odpowiednio) oznacza wahanie funkcji g (h) na przedziale $[0, 1]$.

Wówczas zagadnienie nielocalne (4) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

W 1934 roku Leray i Schauder opublikowali swój przełomowy artykuł [49], którego wpływ na rozwój teorii równań różniczkowych jest bardzo znaczący (konsekwencje i uogólnienia [49] można znaleźć w [46, 55, 56, 57] oraz w cytowanej tam literaturze). Pewne zastosowania twierdzenia kontynuacyjnego Leraya–Schaudera [49, Proposition 2.1] dla nielokalnych zagadnień brzegowych będą również podane w tej prezentacji.

Główną trudnością tej metody jest znalezienie ciągłej deformacji rozważanego zagadnienia do prostszej postaci, dla której można obliczyć odpowiedni stopień topologiczny, oraz takiej, aby możliwe było oszacowanie a priori wszystkich możliwych rozwiązań całej deformacji (por. [56]). Innymi słowy, należy wykazać, że rozważana w dowodzie twierdzenia 1 homotopia nie znika na brzegu zbioru Ω , gdzie $\Omega := B(0, M)$ jest kulą otwartą w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ o środku 0 i promieniu $M > 0$ (M jest dodatnią stałą z założenia (ii)). Największą trudność stanowi tutaj sama przestrzeń $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, w której należy znaleźć wymagane oszacowania a priori wszystkich możliwych rozwiązań. Pierwszą nowością, pozwalającą otrzymać te oszacowania, jest wprowadzenie w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ normy innej niż standardowa, to znaczy

$$\|u\| = \max \{|u(0)|, \|u'\|_\infty\} = \max \left\{ |u(0)|, \sup_{t \in [0, 1]} |u'(t)| \right\}.$$

Udowodnienie, iż rozwiązania są ograniczone wymaga dodatkowych nietrywialnych rozważań. Pomysł polega na nałożeniu pewnych dodatkowych warunków na wahanie funkcji g oraz h (założenie (iii)). To podejście pozwala otrzymać twierdzenie o istnieniu nakładając tylko warunki znakowe na funkcję f (założenie (ii)) i ograniczając

wahanie funkcji g oraz h . W przeciwieństwie do wielu wyników dotyczących nielokalnych zagadnień brzegowych, założenia te są łatwo sprawdzalne i nie wymagają warunków wzrostu na funkcję f , co jest bardzo ważne z punktu widzenia przyszłych możliwych zastosowań.

Zagadnienie (6) może być zbadane w podobny sposób (por. [H.1, Theorem 3]). Wykorzystując podstawienie $\bar{u}(t) = u(1 - t)$, otrzymujemy warunki na istnienie rozwiązań dla zagadnień (5) i (7) [H.1, Theorems 2 i 4].

Warto podkreślić, że rozważane nielocalne zagadnienia brzegowe można również interpretować jako model termostatu. W tym przypadku kontrolujemy ciepło na brzegach przedziału, w zależności od tego, co dzieje się na całej długości pręta. Ponadto, rozważamy tutaj uogólnione zagadnienie, uwzględniające równanie ciepła z nieliniowym gradientowym źródłem ciepła, które zmienia się w czasie [H.1, Example].

Zauważmy, że jeśli $h \equiv 0$, to zagadnienie (4) redukuje się do następującego nielokalnego zagadnienia brzegowego

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s), \quad (9)$$

które jest przedmiotem badań w publikacji [H.2]. Rozważamy to zagadnienie w przypadku rezonansowym, tzn. gdy

$$\int_0^1 dg_i(s) = 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Wówczas, gdy $f \equiv 0$, zagadnienie posiada n -wymiarową rodzinę rozwiązań $u(t) = tc$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Głównym celem jest tutaj podanie warunków wystarczających dla istnienia rozwiązań zagadnienia (9), wykorzystując pewną modyfikację twierdzenia kontynuacyjnego Leraya–Schaudera. W nawiązaniu do naszych wcześniejszych komentarzy dotyczących przypadku, gdy abstrakcyjne równanie (3) jest rezonansowe, równoważne równanie całkowe zagadnienia (9) ma bardziej skomplikowaną strukturę. Aby rozwiązać ten problem, przeformułujemy zagadnienie (9) do nieco innej postaci.

Rozważmy przestrzeń Banacha

$$U = \left\{ u \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) : u(0) = 0, u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s) \right\}$$

z normą

$$\|u\| = \max \{ \|u'_1\|_\infty, \dots, \|u'_n\|_\infty \}. \quad (11)$$

Wprowadźmy następujące założenia dotyczące funkcji $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$:

(G1) dla każdego $i = 1, \dots, n$, g_i ma ograniczone wahanie,

$$\int_0^1 dg_i(s) = 1 \quad \text{oraz} \quad \int_0^1 e^s dg_i(s) \neq e. \quad (12)$$

(F1) f jest funkcją ciągłą.

Zdefiniujemy odwzorowanie liniowe $L : \text{Dom}(L) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ kładąc

$$\text{Dom}(L) := U \cap C^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$$

oraz dla każdego $u \in \text{Dom}(L)$

$$Lu = u'' - u'.$$

Można pokazać, że operator odwrotny $L^{-1} : C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow U \cap C^2([0, 1], \mathbb{R}^n)$ istnieje oraz $L^{-1} : C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow U$ jest zwarty [H.2, Lemma 2.1]. Ponadto, definiujemy nieliniowe odwzorowanie $N : U \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ następująco

$$Nu = f(\cdot, u(\cdot), u'(\cdot)) - u'(\cdot), \quad \forall u \in U.$$

Operator N jest ciągły na U i przekształca zbiory ograniczone w U na zbiory ograniczone w $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Zatem operator $L^{-1}N : U \rightarrow U$ jest zwarty na dowolnym podzbiórze ograniczonym przestrzeni U . Zauważmy, że zagadnienie (9) jest równoważne równaniu operatorowemu (3) na U , tzn. następującemu równaniu

$$u = L^{-1}Nu, \quad u \in \text{Dom}(L). \quad (13)$$

Aby otrzymać wyniki zaprezentowane w [H.2], zastosowano do (13) poniższe twierdzenie, które łatwo wynika z twierdzenia kontynuacyjnego Leraya-Schaudera [49] (por. [55, Corollary IV.7]).

Stwierdzenie 1. [H.2, Proposition 2.2] *Niech Y, Z będą przestrzeniami unormowanymi, $L : \text{Dom}(L) \subset Y \rightarrow Z$ będzie liniowy i odwracalny, $\Omega \subset Y$ będzie otwartym, ograniczonym otoczeniem 0, zaś $N : \overline{\Omega} \rightarrow Z$ będzie taki, że $L^{-1}N : \overline{\Omega} \rightarrow Y$ jest zwarty. Jeśli*

$$Lu \neq \lambda Nu$$

dla każdego $(u, \lambda) \in (\text{Dom}(L) \cap \partial\Omega) \times (0, 1)$, to równanie $Lu = Nu$ posiada przynajmniej jedno rozwiązanie w $\text{Dom}(L) \cap \overline{\Omega}$.

Żądane oszacowania a priori zostały sformułowane w języku klasycznej teorii analizy wypukłej w głównym twierdzeniu o istnieniu dla zagadnienia (9) [H.2, Theorem 3.1] i zainspirowane przez te wprowadzone przez Gustafsona i Schmitta [30] w roku 1974 do badania istnienia okresowych rozwiązań dla układu równań rzędu pierwszego z opóźnieniem. Przypomnijmy, że jeśli $C \subset \mathbb{R}^n$ jest otwartym i wypukłym otoczeniem $0 \in \mathbb{R}^n$, to dla każdego $v_0 \in \partial C$ istnieje takie $\nu(v_0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, że

$$(a) \quad \langle \nu(v_0), v_0 \rangle > 0;$$

$$(b) \quad C \subset \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nu(v_0), v - v_0 \rangle < 0\},$$

przy czym $\nu(v_0)$ nazywamy wektorem normalnym zewnętrznym do ∂C w v_0 . Warunek (b) oznacza, że wektor $\nu(v_0)$ jest prostopadły do płaszczyzny podpierającej C w v_0 [17, 31]. Ponadto mamy, że

$$\overline{C} \subset \{v \in \mathbb{R}^n : \langle \nu(v_0), v - v_0 \rangle \leq 0\}.$$

Twierdzenie 2. [H.2, Theorem 3.1] *Założmy, że funkcje f i g spełniają założenia (F1) i (G1). Przypuśćmy, że istnieje takie otwarte, ograniczone, wypukłe otoczenie C wektora 0 w $\mathbb{R}^n$, że spełnione są następujące warunki:*

(F2) *dla każdego $v \in \partial C$, istnieje taki wektor normalny zewnętrzny $\nu(v)$ do ∂C w v , że*

$$\langle \nu(v), f(t, u, v) \rangle \geq 0$$

dla każdego $t \in [0, 1]$ oraz $u \in \overline{C}$;

(G2) *dla każdego $u \in X$, takiego że $u(t) \in \overline{C}$, dla wszystkich $t \in [0, 1]$ i $u'(1) \in \partial C$, mamy*

$$\mathcal{M} := \left\{ t \in [0, 1] : \langle \nu(u'(1)), u'(t) \rangle = \max_{s \in [0, 1]} \langle \nu(u'(1)), u'(s) \rangle \right\} \neq \{1\}.$$

Wówczas zagadnienie (9) posiada przynajmniej jedno takie rozwiązanie u , że $u'(t) \in \overline{C}$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$.

Wykorzystując stwierdzenie 1, wykazaliśmy, że istnieje rozwiązanie równania $Lu = Nu$ w $\overline{\Omega}$, tzn. takie rozwiązanie zagadnienia (9), że $u'(t) \in \overline{C}$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$, gdzie

$$\Omega = \{u \in U : u'(t) \in C, \forall t \in [0, 1]\}. \quad (14)$$

Dokładniej, pokazaliśmy że dla każdego $\lambda \in (0, 1)$ żadne rozwiązanie zagadnienia

$$u'' - u' = \lambda[f(t, u, u') - u'], \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s),$$

tzn. zagadnienia

$$u'' = (1 - \lambda)u' + \lambda f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s), \quad (15)$$

nie leży na brzegu zbioru Ω , gdzie

$$\partial\Omega = \{u \in \overline{\Omega} : \exists t_0 \in [0, 1] : u'(t_0) \in \partial C\}.$$

Aby to wykazać, wystarczy zaobserwować, że jeśli założymy, że $u(t) \in \partial\Omega$ jest możliwym rozwiązaniem (15), to otrzymamy sprzeczność wobec faktu, że funkcja rzeczywista $\xi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$\xi(t) := \langle \nu(u'(t_0)), u'(t) - u'(t_0) \rangle,$$

osiąga maksimum równe 0 w punkcie t_0 .

Zauważmy, że istnienie rozwiązań dla zagadnienia (9) jest zapewnione, gdy na brzegu zbioru C , który jest otwartym oraz wypukłym otoczeniem zera, pole wektorowe $f(t, \cdot)$ ($t \in [0, 1]$) nie jest skierowane do wewnątrz tego zbioru. Pokazano, że klasa funkcji g , dla których spełnione są założenia (G1) i (G2) jest niepusta. W

szczegółności, założenia te są spełnione, gdy wszystkie współrzędne funkcji wektorowej g są równe tej samej funkcji rosnącej (zobacz założenie (G3) [H.2, Proposition 3.1]).

Rozważyliśmy również przypadki szczególne, gdy C jest kulą lub równoległobokiem. Jeśli $C = B(0, M)$ jest kulą otwartą w $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu $M > 0$, to można przyjąć

$$\nu(v) = v,$$

dla każdego $v \in \partial B(0, M)$. W przypadku gdy zbiór wypukły C jest iloczynem kartezjańskim przedziałów, tzn. $C = \prod_{i=1}^n (-M_i, M_i)$ dla pewnych $M_i > 0$, to dla dowolnego $v \in \partial C$, można położyć

$$\nu(v) = v_i e_i,$$

przy czym tylko i -ta współrzędna v_i wektora v jest taka, że $|v_i| = M_i$. Jeśli v należy do więcej niż jednej ściany C , to i może zostać wybrane dowolnie ze wszystkich takich j , że $|v_j| = M_j$. Wektor e_i oznacza tu i -ty element bazy kanonicznej w $\mathbb{R}^n$ ($i = 1, \dots, n$).

W szczególności, w [H.2, Corollary 4.1] sformułowano warunki gwarantujące istnienie rozwiązań w przypadku kuli. Rezultaty dla równoległoboku, które również wynikają z twierdzenia 2, pozwalają rozważać bardziej ogólną klasę funkcji g niż ta wprowadzona w założeniu (G3) (zobacz [H.2, Theorem 4.1]).

Następujące uogólnienie zagadnienia (9)

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = a, \quad u'(1) = N(u'), \quad (16)$$

gdzie $a \in \mathbb{R}^n$ jest ustalone, $t \in [0, 1]$, $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $N : C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest niekoniecznie liniowym odwzorowaniem, było przedmiotem dyskusji w publikacji [H.3].

Skupmy naszą uwagę na przypadku, gdy operator N jest nieliniowy. Wówczas zagadnienie (4) pozostaje nielokalne, jednakże nie można go już rozpatrywać w kategorii zagadnień nierezonansowych czy też rezonansowych, ponieważ drugi z zadanych warunków brzegowych jest nieliniowy.

Poczyniliśmy następujące założenia:

- (F) $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą;
- (N) $N : C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest ciągłym, niekoniecznie liniowym odwzorowaniem, przekształcającym zbiory ograniczone na zbiory ograniczone.

Aby uniknąć rozważania zagadnienia (16) w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, zapiszemy je w nieco zmienionej formie. Ponieważ dowolna funkcja $u \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ spełniająca warunek $u(0) = a$ może być dla $v = u'$ przedstawiona w postaci

$$u(t) = a + \int_0^t v(s) ds,$$

więc zagadnienie (16) jest równoważne następującemu całkowo-różniczkowemu zagadnieniu

$$v'(t) = f\left(t, a + \int_0^t v(s) ds, v(t)\right), \quad v(1) = N(v), \quad (17)$$

$t \in [0, 1]$. Zauważmy, że rozwiązania zagadnienia (17) są punktami stałymi operatora $T : C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ danego wzorem

$$T(v)(t) := N(v) - \int_t^1 f\left(s, a + \int_0^s v, v(s)\right) ds, \quad (18)$$

który, wobec założeń (F)–(N), jest pełnociągły.

Oznaczmy przez $B(0, |a|)$ kulę w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu $|a|$. Dla $a = 0$, $B(0, 0) = \overline{B}(0, 0) := \{0\}$. Prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. [H.3, Theorem 2.1] *Niech będą spełnione założenia (F) i (N). Ponadto przypuśćmy, że istnieje takie otwarte, ograniczone i wypukłe otoczenie C wektora $0 \in \mathbb{R}^n$, że $\overline{B}(0, |a|) \subset C$ i zachodzą następujące warunki:*

(A) *dla każdego $v \in \partial C$ istnieje taki wektor normalny zewnętrzny $\nu(v)$ do ∂C w v , że*

$$\langle \nu(v), f(t, u, v) \rangle \geq 0, \quad (19)$$

dla wszystkich $t \in [0, 1]$ i $u - a \in \overline{C}$;

(B) *dla każdego $v \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$, dla którego $v(t) \in \overline{C}$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$ oraz $v(1) \in \partial C$, mamy*

$$v(1) \neq N(v);$$

(C) *dla stopnia Brouwera odwzorowania $I - N$ obciętego do funkcji stałych na zbiorze C w punkcie 0, następujący warunek jest spełniony*

$$\deg_B(I - N|_{\text{const}}, C, 0) \neq 0.$$

Wówczas zagadnienie (16) posiada takie rozwiązanie u , że $u(t) - a \in \overline{C}$ oraz $u'(t) \in \overline{C}$ dla każdego $t \in [0, 1]$.

Podobnie jak poprzednio istnienie przynajmniej jednego rozwiązania zagadnienia (16) udowodniliśmy wykorzystując własności stopnia topologicznego Leraya–Schaudera. Niemniej jednak, nieliniowy charakter warunku brzegowego powoduje pewne dodatkowe trudności. Założenie (B) nałożone na operator N jest dość ogólne. Dwa pierwsze założenia nie wystarczą tu więc do uzyskania tezy twierdzenia, potrzebny jest jeszcze dodatkowy warunek, czyli założenie o nietrywialności stopnia topologicznego Brouwera dla odwzorowania $I - N$ na zbiorze funkcji stałych (założenie (C)).

Głównym problemem jest tutaj znalezienie ciągłej deformacji zagadnienia do pewnej prostszej postaci, której stopień topologiczny jest łatwy do wyznaczenia. Na szczególną uwagę zasługuje tu rozważona w dowodzie twierdzenia 3 homotopia, która nie jest standardowa. Mianowicie, $\mathcal{H} : [0, 1] \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ jest postaci

$$\mathcal{H}(\lambda, v)(t) := v(t) - T_\lambda(v)(t),$$

gdzie

$$T_\lambda(v)(t) = N(v) - \lambda \int_t^1 \left[f\left(s, a + \int_0^s v, v(s)\right) + (1 - \lambda)v(s) \right] ds. \quad (20)$$

Powyższą homotopię rozważamy na zbiorze otwartym i ograniczonym Ω zdefiniowanym w (14). Zauważmy, że $T_1 = T$. Ponadto zwróćmy uwagę na fakt, że wyrażenie $\lambda(1 - \lambda) \int_t^1 v(s)ds$ pozwala na to, by rozważona w założeniu (A) nierówność była słaba. Taka homotopia może być również zastosowana do innych tego typu zagadnień. Założenia (A) i (B) implikują, że wymagane oszacowania a priori zachodzą dla wszystkich możliwych rozwiązań rozważanej deformacji. W konsekwencji, z homotopijnej niezmienniczości stopnia topologicznego Leraya–Schaudera wynika równość

$$\deg_{\text{LS}}(I - T, \Omega, 0) = \deg_{\text{LS}}(I - N, \Omega, 0).$$

Aby obliczyć $\deg_{\text{LS}}(I - N, \Omega, 0)$ wystarczy zauważyć, że skoro N przekształca przestrzeń $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$ na jej podprzestrzeń ciągłych i izomorficznych odwzorowań z $\mathbb{R}^n$, to

$$\deg_{\text{LS}}(I - N, \Omega, 0) = \deg_{\text{B}}(I - N|_{\text{const}}, C, 0),$$

gdzie w drugim członie mamy stopień Brouwera odwzorowania określonego na $\mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}^n$.

Warto tu podkreślić, że w przypadku, gdy N jest odwzorowaniem liniowym założenia twierdzenia 3 implikują, że zagadnienie brzegowe jest nierezonansowe.

Zwróćmy uwagę również na rozważony w pracy przykład [H.3, Example 3.2]. Dotyczy on zagadnienia, którego równoważna postać operatorowa ma stopień topologiczny Leraya–Schaudera równy 2. To pokazuje, że twierdzenie 3 dotyczy innej sytuacji niż ta rozważana w twierdzeniu o istnieniu rozwiązań w [H.1], gdyż w rozważanym tam zagadnieniu stopień topologiczny Leraya–Schaudera wynosi 1.

W publikacji [H.3] udowodniono również następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4. [H.3, Theorem 2.2] *Niech będą spełnione założenia (F), (N) i (A). Ponadto założymy, że istnieje takie otwarte, ograniczone i wypukłe otoczenie C wektora $0 \in \mathbb{R}^n$, że $\overline{B}(0, |a|) \subset C$ i zachodzi następujący warunek*

(B') *dla dowolnych $\lambda \in [0, 1]$ i $v \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$, jeśli $v(t) \in C$ dla wszystkich $t \in [0, 1)$ oraz $v(1) \in \partial C$, to*

$$v(1) \neq \lambda N(v).$$

Wówczas zagadnienie (16) posiada przynajmniej jedno takie rozwiązanie u , że $u(t) - a \in \overline{C}$ oraz $u'(t) \in \overline{C}$ dla każdego $t \in [0, 1]$.

Aby udowodnić twierdzenie 4, wystarczy rozważyć następującą niestandardową homotopię $\mathcal{H} : [0, 1] \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n)$,

$$\mathcal{H}(\lambda, y)(t) := y(t) - \lambda T(y)(t) + \lambda(1 - \lambda) \int_t^1 y(s) ds,$$

gdzie T jest zdefiniowane w (18). Dla $\lambda = 0$ homotopia redukuje się tutaj do przypadku trywialnego, czyli mamy to do czynienia ze stopniem topologicznym Leraya–Schaudera identyczności.

W przypadku gdy $C := B(0, M)$ jest kulą otwartą w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ o środku 0 i promieniu $M > |a|$, w oparciu o twierdzenie 3, podaliśmy również warunki istnienia rozwiązań (por. [H.3, Corollary 3.1]). Ponadto, jako szczególny przypadek twierdzenia 4, otrzymaliśmy warunki na istnienie przynajmniej jednego rozwiązania zagadnienia (16) [H.3, Corollary 3.4], w których założenie (B) zastąpiono przez

(B'1) dla każdego $v \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$, jeśli $|v(t)| < M$ dla wszystkich $t \in [0, 1)$ oraz $|v(1)| = M$, to

$$\langle v(1), N(v) \rangle \leq 0.$$

Pokazaliśmy również [H.3, Corollary 3.7], że jeśli spełnione są pewne odpowiednie założenia, to nielocalne zagadnienie (16) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie, w przypadku gdy C jest iloczynem kartezjańskim przedziałów, tzn. $C = \prod_{i=1}^n (-M_i, M_i)$ dla pewnych $M_i > |a_i|$, $i = 1, \dots, n$.

Wnioski [H.3, Corollaries 3.10, 3.11], które wynikają z twierdzenia 4, są związane z zagadnieniem (16), w którym drugi z warunków brzegowych jest liniowy, mianowicie

$$N(v) := \int_0^1 v(s) dg(s),$$

gdzie $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$. Zawierają one pewne uogólnienia i rozszerzenia wyników zaprezentowanych w [H.1, H.2].

Zanim zaprezentujemy nasze kolejne wyniki, omówimy krótko problem związany z tak zwanymi pod- i nadrozwiązaniami. Idee tu omawiane sięgają 1893 roku i pracy Picarda [67]. Poszukiwał on rozwiązań następującego zagadnienia brzegowego

$$u'' + f(t, u) = 0, \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0,$$

zakładając, że $u = 0$ jest jego rozwiązaniem, zaś funkcja $f(t, \cdot)$ jest rosnąca. Głównym celem było zbudowanie takiego niemalejącego ciągu kolejnych przybliżeń $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$, gdzie $\alpha_0(t) > 0$ na (a, b) , który zbiega do rozwiązania u powyższego zagadnienia. Przy pewnych dodatkowych założeniach Picard udowodnił istnienie takiego pierwszego przybliżenia α_0 , że

$$\alpha_0'' + f(t, \alpha_0) > 0, \quad \alpha_0(a) = 0, \quad \alpha_0(b) = 0,$$

$t \in (a, b)$. Współcześnie takie funkcje nazywamy *podrozwiązaniami*. Aby mówić o *nadrozwiązaniu*, należy w powyższej nierówności zmienić znak. W późniejszych pracach, Perron [65] (1915) oraz Müller [59] (1926) udowodnili istnienie rozwiązań dla zagadnienia Cauchy'ego rzędu pierwszego, wraz z jego lokalizacją pomiędzy pod- i nadrozwiązaniami α i β , które spełniają nierówność $\alpha \leq \beta$. W roku 1931 Scorza Dragoni [76, 77] rozważał następujące zagadnienie Dirichleta

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(a) = A, \quad u(b) = B,$$

przy założeniu, że istnieją takie funkcje $\alpha, \beta \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, że $\alpha(t) \leq \beta(t)$ na $[a, b]$, wraz z pewnymi dodatkowymi nierównościami różniczkowymi i odpowiednimi nierównościami dotyczącymi warunków brzegowych, i udowodnił istnienie rozwiązania u rozważanego zagadnienia wraz z jego lokalizacją $\alpha \leq u \leq \beta$. Opisywane wyżej wyniki pokazały ważną rolę odgrywaną przez funkcje α i β , które nazywamy dzisiaj *pod-* i *nadrozwiązaniami*, i stworzyły podwaliny tej metody.

W roku 1937 Nagumo wprowadził nowy warunek, który nazywamy dzisiaj warunkiem Nagumo [60]. Nowością w tej pracy jest to, że odpowiednie nierówności różniczkowe muszą być spełnione pomiędzy funkcjami α i β , nie zaś jak w publikacjach Scorzy Dragoniego, dla większych zbiorów wartości u' . Ponadto, rozważając funkcje, które nie są klasy C^2 , ale C^1 z lewo- i prawostronnymi drugimi pochodnymi, Nagumo rozszerzył klasę funkcji *pod-* i *nadrozwiązań*. Zapoczątkowany przez Nagumo proces trwa do dziś, dzięki czemu coraz łatwiej wskazać takie funkcje (więcej informacji dotyczących tego zagadnienia można znaleźć w [10]).

Metoda *pod-* i *nadrozwiązań* jest skutecznym narzędziem w dowodzeniu twierdzeń o istnieniu rozwiązań dla równań różniczkowych. W przypadku dwupunktowych warunków brzegowych istnieje obszerna literatura związana z istnieniem jednego lub wielu rozwiązań, wykorzystująca pojęcia *pod-* i *nadrozwiązań*. Odsyłamy do monografii [11] oraz [74] w celu uzyskania szczegółowych opisów uzyskanych wyników, szerszego opisu historycznego i obszerniejszej literatury. Podejście to zostało również zastosowane do pewnych całkowych warunków brzegowych przez następujących autorów: Benchohra i Ouahaba [4], Benchohra, Hamani i Nieto [5], oraz Panga, Lu i Cai [64]. Należy również wspomnieć o pionierskim wyniku Amanna [1, 2] dotyczącym istnienia trzech rozwiązań dla abstrakcyjnych równań w przestrzeniach uporządkowanych i dla zagadnienia brzegowego Dirichleta dla równań eliptycznych, oraz prace Rachunkovej na temat rozwiązań okresowych dla równań różniczkowych zwyczajnych [72, 73].

Rozważmy zagadnienie nielokalne (9) w przypadku skalarnym, tzn.

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s), \quad (21)$$

$f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ i przypomnijmy, że jeśli

$$\int_0^1 dg = 1, \quad (22)$$

to zagadnienie (21) jest rezonansowe.

Wyniki zaprezentowane w pracy [H.4] oparte są na wprowadzonym tam pojęciu pary *pod-* i *nadprędkości* dla zagadnienia (21) (a couple of lower and upper slopes).

Definicja 1. [H.4, Definition 3.1] *Powiemy, że para (σ, τ) jest parą pod- i nadprędkości dla zagadnienia (21), jeśli $\sigma, \tau \in C^1([0, 1], \mathbb{R})$ oraz dla każdego $t \in [0, 1]$ spełnione są następujące nierówności*

$$\sigma(t) \leq \tau(t),$$

i

$$\sigma'(t) \geq f(t, u, \sigma(t)), \quad \sigma(1) \leq \int_0^1 \sigma(s) dg(s), \quad (23)$$

$$\tau'(t) \leq f(t, u, \tau(t)), \quad \tau(1) \geq \int_0^1 \tau(s) dg(s), \quad (24)$$

dla wszystkich $(t, u) \in S_{\Sigma, T}$, gdzie

$$\Sigma(t) := \int_0^t \sigma(s) ds, \quad T(t) := \int_0^t \tau(s) ds, \quad \forall t \in [0, 1] \quad (25)$$

oraz

$$\begin{aligned} S_{\Sigma, T} &= \{(t, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R} : \Sigma(t) \leq u \leq T(t)\} \\ &= \bigcup_{t \in [0, 1]} (\{t\} \times [\Sigma(t), T(t)]). \end{aligned} \quad (26)$$

W przypadku gdy para pod- i nadprędkości (σ, τ) jest parą funkcji *stałych*, warunki brzegowe są automatycznie spełnione ze względu na równość (22), zaś warunki w definicji 1 redukują się do następujących

$$\sigma \leq \tau, \quad f(t, u, \sigma) \leq 0 \leq f(t, u, \tau), \quad \forall (t, u) \in [0, 1] \times [\sigma t, \tau t].$$

W przypadku szczególnym, gdy funkcja f nie zależy od u , zagadnienie (21) redukuje się do następującego nielokalnego zagadnienia rzędu pierwszego (dla $v = u'$)

$$v' = f(t, v), \quad v(1) = \int_0^1 v(s) dg(s). \quad (27)$$

Wówczas definicja pod- i nadprędkości staje się klasyczną definicją uporządkowanej pary pod- i nadrozwiązań dla zagadnienia brzegowego rzędu pierwszego (27), to znaczy, funkcje σ oraz τ z przestrzeni $C^1([0, 1])$ spełniają dla każdego $t \in [0, 1]$ nierówności

$$\begin{aligned} \sigma(t) &\leq \tau(t), \\ \sigma'(t) &\geq f(t, \sigma(t)), \quad \sigma(1) \leq \int_0^1 \sigma(s) dg(s), \\ \tau'(t) &\leq f(t, \tau(t)), \quad \tau(1) \geq \int_0^1 \tau(s) dg(s). \end{aligned}$$

Jeśli (σ, τ) jest parą pod- i nadprędkości dla zagadnienia (21) i jeśli Σ and T są zdefiniowane jak w (25), to warunki z definicji 1 wyrażone za pomocą Σ i T są następujące

$$\begin{aligned} \Sigma'(t) &\leq T'(t), \quad \Sigma''(t) \geq f(t, u, \Sigma'(t)), \quad T''(t) \leq f(t, u, T'(t)), \quad \forall t \in [0, 1], \\ \Sigma(0) &= 0 = T(0), \quad \Sigma'(1) \leq \int_0^1 \Sigma'(s) dg(s), \quad T(1) \geq \int_0^1 T'(s) dg(s). \end{aligned}$$

Natomiast klasyczne pod- i nadrozwiązania $\alpha, \beta \in C^2([0, 1])$ zagadnienia (21) definiuje się następująco

$$\begin{aligned} \alpha(t) &\leq \beta(t), \quad \alpha''(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t)), \quad \beta''(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t)), \quad \forall t \in [0, 1], \\ \alpha(0) &\leq 0 \leq \beta(0), \quad \alpha'(1) \leq \int_0^1 \alpha'(s) dg(s), \quad \beta(1) \geq \int_0^1 \beta'(s) dg(s). \end{aligned}$$

Można pokazać, że istnienie pary (σ, τ) pod- i nadprędkości dla zagadnienia (21) pociąga za sobą istnienie i lokalizację rozwiązań tego zagadnienia.

Twierdzenie 5. [H.4, Theorem 4.1] *Niech $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą, zaś $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją rosnącą spełniającą warunek (22). Jeśli zagadnienie (21) posiada parę (σ, τ) pod- i nadprędkości, to posiada ono przynajmniej jedno takie rozwiązanie u , że $\sigma(t) \leq u'(t) \leq \tau(t)$ oraz $\Sigma(t) \leq u(t) \leq T(t)$ dla każdego $t \in [0, 1]$.*

Aby udowodnić to twierdzenie wystarczy zdefiniować funkcje $\gamma : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $\delta : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \gamma(t, v) &= \begin{cases} \sigma(t) & \text{gdy } v < \sigma(t), \\ v & \text{gdy } \sigma(t) \leq v \leq \tau(t), \\ \tau(t) & \text{gdy } v > \tau(t), \end{cases} \\ \delta(t, u) &= \begin{cases} \Sigma(t) & \text{gdy } u < \Sigma(t), \\ u & \text{gdy } \Sigma(t) \leq u \leq T(t), \\ T(t) & \text{gdy } u > T(t) \end{cases} \end{aligned}$$

oraz rozważyć następujące zagadnienie brzegowe

$$\begin{aligned} u'' &= u' - \gamma(t, u') + f(t, \delta(t, u), \gamma(t, u')), \\ u(0) &= 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s). \end{aligned} \tag{28}$$

Można pokazać, że jeśli u jest możliwym rozwiązaniem (28), to

$$\sigma(t) \leq u'(t) \leq \tau(t), \quad \forall t \in [0, 1].$$

W konsekwencji każde możliwe rozwiązanie u zagadnienia (28) spełnia nierówność

$$\Sigma(t) \leq u(t) \leq T(t), \quad \forall t \in [0, 1],$$

więc, z definicji γ i δ , u jest rozwiązaniem (21).

Wobec powyższego, każde możliwe rozwiązanie zagadnienia (21) jest ograniczone, więc rozważając przestrzeń

$$U = \left\{ u \in C^1([0, 1]) : u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s) \right\}$$

z normą $\|u\| = \|u'\|_\infty$ oraz operatory $L : D(L) \subset U \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$, $F : U \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$ zdefiniowane jako

$$Lu = u'' - u', \quad D(L) = U \cap C^2([0, 1], \mathbb{R}),$$

i

$$Fu = -\gamma(\cdot, u'(\cdot)) + f(\cdot, \delta(\cdot, u(\cdot)), \gamma(\cdot, u'(\cdot))),$$

zagadnienie (28) może być badane jako pewne równanie abstrakcyjne $u = L^{-1}Fu$, gdzie $L^{-1}F$ jest zwartym odwzorowaniem na U przekształcającym U na kulę domkniętą w U (zobacz [H.4, Section 2]). Zatem z twierdzenia Schaudera o punkcie stałym wynika, że $L^{-1}F$ ma punkt stały w U , to znaczy zagadnienie (28) posiada rozwiązanie, które jest również rozwiązaniem (21).

Zauważmy, że skoro warunki $\Sigma'(t) \leq T'(t)$ i $\Sigma(0) = 0 = T(0)$ implikują, że $\Sigma(t) \leq T(t)$ dla każdego $t \in [0, 1]$, więc można natychmiast zauważyć, że jeśli (σ, τ) jest parą pod- i nadprędkości dla zagadnienia (21), to (Σ, T) jest uporządkowaną parą pod- i nadrozwiązań dla zagadnienia (21). W tym sensie, twierdzenie 5 może być postrzegane jako warunek konieczny i dostateczny istnienia rozwiązania dla zagadnienia (21).

Jak wspomniano wcześniej w krótkiej dyskusji na temat historii metody pod- i nadrozwiązań, istnienie rozwiązań zagadnienia w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R})$ w przypadku, gdy istnieje uporządkowana para pod- i nadrozwiązań, wymaga pewnych dodatkowych założeń (na przykład warunków typu Nagumo), które dostarczą odpowiednich oszacowań dla pochodnej możliwego rozwiązania (na przykład [50, Theorem 3.1] obrazuje, co mamy na myśli, mówiąc o dodatkowych warunkach typu Nagumo). Natomiast metoda pod- i nadprędkości pozwala na otrzymanie wyników o istnieniu bez żadnych innych dodatkowych założeń, jak pokazano w twierdzeniu 5.

Rozważenie ostrych nierówności różniczkowych dla ściśle uporządkowanej pary funkcji w definicji pod- i nadprędkości, prowadzi do wprowadzonego w rozdziale 5 w [H.4] pojęcia ścisłej pary pod- i nadprędkości. Pokazano, że istnienie takiej pary daje lokalizację rozwiązań jak i ich pochodnych z nierównościami ostrymi [H.4, Corollary 5.1].

W twierdzeniu 5 ukryta jest trudność polegająca na znalezieniu pod- i nadprędkości. Podobnie jak w przypadku pod- i nadrozwiązań, zastosowanie twierdzenia 5 (oraz Corollary 5.1) polega na konstrukcji pary pod- i nadprędkości. Pewne wyniki w tym zakresie, jak również powiązane przykłady, zawarte są w rozdziale 6 w [H.4] (zobacz Lemmas 6.3 i 6.4, Theorem 6.1).

Ponadto, udowodniono wynik dotyczący istnienia trzech rozwiązań w ujęciu pod- i nadprędkości. Dla dwóch funkcji ciągłych u_1 i u_2 na $[0, 1]$, definiujemy relację $u_1 \leq u_2$ jako $u_1(t) \leq u_2(t)$ dla $t \in [0, 1]$.

Twierdzenie 6. [H.4, Theorem 7.1] *Niech $\sigma_i \in C^1([0, 1])$ i $\tau_i \in C^1([0, 1])$ ($i = 1, 2$) spełniają następujące nierówności*

$$\sigma_1(t) \leq \sigma_2(t) \leq \tau_2(t), \quad \sigma_1(t) \leq \tau_1(t) \leq \tau_2(t), \quad \forall t \in [0, 1], \quad \sigma_2 \not\leq \tau_1. \quad (29)$$

Ponadto niech (σ_1, τ_1) , (σ_2, τ_2) oraz (σ_1, τ_2) będą parami ścisłych pod- i nadprędkości dla zagadnienia (21). Wówczas zagadnienie (21) posiada przynajmniej trzy takie rozwiązania u_1 , u_2 i u_3 , że

$$\sigma_1(t) \leq u'_1(t) \leq \tau_1(t), \quad \sigma_2(t) \leq u'_2(t) \leq \tau_2(t), \quad \forall t \in [0, 1],$$

oraz

$$u'_3 \not\leq \tau_1, \quad u'_3 \not\leq \sigma_2.$$

W publikacji [H.4] zawarto również wnioski dotyczące specjalnego przypadku, gdy σ i τ są funkcjami stałymi. Ponadto w przypadku gdy funkcja f nie zależy od u , udowodniono wyniki dla powiązanej rodziny równań różniczkowych rzędu pierwszego (27).

Kolejna praca z wybranego cyklu publikacji dotyczy nielokalnego zagadnienia brzegowego Neumanna. W [H.5] badane jest następujące zagadnienie

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s), \quad (30)$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dla $i = 1, \dots, n$. Zauważmy, że zagadnienie (30) jest zawsze rezonansowe, ponieważ funkcje $u(t) \equiv b \in \mathbb{R}^n$ są rozwiązaniami jednorodnego zagadnienia liniowego

$$u'' = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s).$$

O ile nam wiadomo, nielocalne zagadnienie brzegowe (30) nie było do tej pory rozważane w takiej ogólności. Inne niż podane w (30) uogólnienia zagadnienia brzegowego Neumanna z całkami Riemanna–Stieltjesa można znaleźć w pracach [36, P.14]. W przypadku $g \equiv 0$, zagadnienie (30) redukuje się do klasycznego zagadnienia brzegowego Neumanna, które zostało obszernie zbadane (odsyłamy na przykład do prac [24, 26, 54, 78, 81] i umieszczonej w nich literatury).

Potrzebne będą następujące założenia:

- (i) $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą;
- (ii) $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$ ma ograniczone wahanie, gdzie $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$;
- (iii) istnieje granica

$$\mathcal{F}(t, \xi) := \lim_{\lambda \rightarrow \infty} f(t, \lambda \xi) \quad (31)$$

jednostajnie ze względu na t oraz $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$;

- (iv) przyjmując

$$\mathcal{F}_0(\xi) := \int_0^1 \mathcal{F}(z, \xi) dz - \int_0^1 \int_0^s \mathcal{F}(z, \xi) dz dg(s),$$

dla każdego $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$, mamy, że

$$\langle \xi, \mathcal{F}_0(\xi) \rangle < 0. \quad (32)$$

Głównym celem pracy [H.5] jest wykazanie, że zagadnienie (30) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że założenia (iii)–(iv) są typu Nirenberga. Tego typu warunki zależą od wymiaru jądra operatora liniowego L zdefiniowanego w (3). Jeśli $\dim \text{Ker } L = 1$, można wykorzystać podejście Landesmana–Lazera [48]. Warto tutaj podkreślić, że metoda Landesmana–Lazera nie działa, gdy wymiar jądra operatora liniowego L jest większy niż 1. Choćby z tego powodu, rozpatrywanie układów równań różniczkowych zamiast równań skalarnych zawsze generuje dodatkowe trudności. Nirenberg, badając eliptyczne zagadnienia brzegowe, sformułował w 1971 roku nowe warunki typu Landesmana–Lazera w przypadku, gdy $\dim \text{Ker } L = n$, [61].

W naszym przypadku z faktu, że funkcje $u(t) \equiv b \in \mathbb{R}^n$ są rozwiązaniami odpowiedniego jednorodnego zagadnienia liniowego wynika, że $\dim \text{Ker } L = n$. Warunki typu Nirenberga dla równania (30) mogą być zapisane następująco:

- (N1) $\mathcal{F}_0(\xi) \neq 0$ dla dowolnego $\xi \in S^{n-1}$, gdzie S^{n-1} jest sferą jednostkową w $\mathbb{R}^n$;
 (N2) stopień Brouwera $\deg_B(\theta) \neq 0$, gdzie $\theta : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ jest odwzorowaniem danym wzorem $\theta(\xi) = \frac{\mathcal{F}_0(\xi)}{|\mathcal{F}_0(\xi)|}$.

Zauważmy, że jeśli warunek (32) zachodzi, to założenie (N1) jest spełnione. Ponadto rozważając następującą homotopię

$$\mathcal{H}(\mu, \xi) = -\mu x + (1 - \mu) \frac{\mathcal{F}_0(\xi)}{|\mathcal{F}_0(\xi)|}$$

można zaobserwować, że warunek (N2) wynika z (32). Rzeczywiście, ponieważ dla każdego $\xi \in \mathbb{R}^n$, $|\xi| = 1$ i $\mu \in [0, 1]$ dostajemy

$$\langle \xi, \mathcal{H}(\mu, \xi) \rangle = -\mu |\xi|^2 + \frac{(1 - \mu)}{|\mathcal{F}_0(\xi)|} \langle \xi, \mathcal{F}_0(\xi) \rangle < 0,$$

więc stopień Brouwera jest dobrze zdefiniowany oraz, z definicji homotopii, różny od zera. W konsekwencji warunki znakowe (iii)–(iv) są typu Nirenberga.

Możemy teraz sformułować nasz główny rezultat.

Twierdzenie 7. [H.5, Theorem 3.3] *Jeśli spełnione są założenia (i)–(iv), to zagadnienie (30) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.*

Dowód twierdzenia 7 podany w [H.5] różni się w istotny sposób od zaproponowanego przez Nirenberga. Wykorzystano tu pewien pomysł zastosowany przez Przeradzkiego [71] do badania istnienia rozwiązań okresowych zagadnienia rzędu pierwszego postaci $u' = f(t, u)$.

Mianowicie, rozważmy następujące zaburzone zagadnienie brzegowe

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s) + \alpha_k u(0), \quad (33)$$

gdzie $\alpha_k \in (0, 1)$ i $\alpha_k \rightarrow 0$. Zagadnienie (33) jest zawsze nierezonansowe, co oznacza, że może zostać zapisane w postaci pewnego równania operatorowego.

Dla $x \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ i ustalonego $k \in \mathbb{N}$ definiujemy

$$\begin{aligned} (A_k u)(t) &= \int_0^t \int_0^s f(z, u(z)) dz ds \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_k} \left[\int_0^1 f(z, u(z)) dz - \int_0^1 \int_0^s f(z, u(z)) dz dg(s) \right]. \end{aligned}$$

Zauważmy, że z założenia (iii) wynika, że funkcja f jest *ograniczona*. W konsekwencji, wykorzystując twierdzenie Schaudera o punkcie stałym, można pokazać, że jeśli spełnione są założenia (i)–(iii), to A_k ma punkt stały, tzn. zagadnienie (33) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie dla każdego $k \in \mathbb{N}$ (por. [H.5, Lemma 2.4]).

Niech φ_k będzie rozwiązaniem zagadnienia (33) dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wystarczy teraz pokazać, że zbiór $Z = \{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ jest względnie zwarty w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, z czego wynika, że (φ_k) posiada podciąg zbieżny (φ_{k_l}) , $\varphi_{k_l} \rightarrow \varphi$ na $[0, 1]$. Ponadto funkcja $\varphi \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (30) (por. [H.5, Theorem 3.3]).

Kluczowym i jednocześnie najtrudniejszym fragmentem dowodu jest pokazanie, że zbiór Z jest ograniczony w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$. Ponieważ f jest ograniczona oraz dla dowolnego możliwego rozwiązania zagadnienia (33) mamy

$$\varphi'_k(t) = \int_0^t f(z, \varphi_k(z)) dz,$$

więc, gdy $k \rightarrow \infty$, ciąg (φ'_k) jest ograniczony. Z drugiej strony, dla dowolnego rozwiązania zagadnienia (33), dostajemy

$$\begin{aligned} \varphi_k(t) &= \int_0^t \int_0^s f(z, \varphi_k(z)) dz ds \\ &+ \frac{1}{\alpha_k} \left[\int_0^1 f(z, \varphi_k(z)) dz - \int_0^1 \int_0^s f(z, \varphi_k(z)) dz dg(s) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Z (34) można odnieść mylne wrażenie, że jeśli $\alpha_k \rightarrow 0$ i f jest ograniczona, to $\sup_{t \in [0, 1]} |\varphi_k(t)| \rightarrow \infty$, przy $k \rightarrow \infty$. Jednakże nie jest to prawdą. Gdy $\alpha_k \rightarrow 0$, wówczas zagadnienie (33) staje się zagadnieniem (30) i łatwo sprawdzić, że scałkowanie równania (30) i wykorzystanie warunków brzegowych prowadzi do równości

$$\int_0^1 f(z, u(z)) dz - \int_0^1 \int_0^s f(z, u(z)) dz dg(s) = 0,$$

która w tym podejściu jest kluczowa.

Aby pokazać, że ciąg (φ_k) jest ograniczony w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, zakładamy nie wprost, że jest on nieograniczony. Wówczas przechodząc do podciągu, jeśli jest to konieczne, dostajemy, że $\|\varphi_k\| \rightarrow \infty$. Ponieważ ciąg pochodnych jest ograniczony, więc $\sup_{t \in [0, 1]} |\varphi_k(t)| \rightarrow \infty$, przy $k \rightarrow \infty$. Dalej, rozważamy następujący ciąg $(\frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|}) \subset C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$, który posiada podciąg zbieżny. Dla uproszczenia notacji oznaczamy go $(\frac{\varphi_k}{\|\varphi_k\|})$. Teraz, z jednej strony otrzymujemy, że

$$\frac{\varphi_k(t)}{\|\varphi_k\|} \rightarrow \xi,$$

gdzie $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ nie zależy od t oraz $|\xi| = 1$ (por. dowód [H.5, Lemma 3.1]). Z drugiej strony, zauważamy, że skoro

$$f(t, \varphi_k(t)) = f\left(t, \|\varphi_k\| \frac{\varphi_k(t)}{\|\varphi_k\|}\right),$$

to, wykorzystując założenie (iii), dostajemy

$$\xi = \gamma \left[\int_0^1 \mathcal{F}(z, \xi) dz - \int_0^1 \int_0^s \mathcal{F}(z, \xi) dz dg(s) \right] = \gamma \mathcal{F}_0(\xi),$$

gdzie γ jest pewną dodatnią stałą. W konsekwencji, z założenia (iv), dostajemy następującą sprzeczność

$$1 = \langle \xi, \xi \rangle = \gamma \langle \xi, \mathcal{F}_0(\xi) \rangle < 0.$$

O ile nam wiadomo, zagadnienie (30) było rozważane do tej pory tylko w publikacjach [H.5] i [P.12]. Jednakże, w obu pracach zakłada się, że funkcja f jest

ograniczona. Aby osłabić założenie nałożone na funkcję f w wyżej wspomnianych pracach, należy zastosować do badania tego zagadnienia inne podejście. W tym celu wykorzystamy pewne uogólnione twierdzenie Mirandy.

Twierdzenia typu Poincaré–Mirandy są n -wymiarowymi uogólnieniami klasycznego twierdzenia Bolzano, które zostało udowodnione w 1817 roku.

Twierdzenie 8. *Niech $F : [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą oraz $F(-M)F(M) < 0$. Wówczas istnieje takie $x \in (-M, M)$, że $F(x) = 0$.*

Poniższe uogólnienie twierdzenia Bolzano zostało podane wraz ze szkicem dowodu przez Poincaré w roku 1883, [69].

Twierdzenie 9. *Niech $F : [-M, M]^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (F_1, \dots, F_n)$ będzie funkcją ciągłą spełniającą następujące warunki:*

$$F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, M, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$$

oraz

$$F_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -M, x_{i+1}, \dots, x_n) \leq 0$$

dla $i = 1, \dots, n$. Wówczas istnieje takie $x \in [-M, M]^n$, że $F(x) = 0$.

Twierdzenie Poincaré zostało ponownie odkryte przez Mirandę, który w 1940 roku pokazał, że jest ono równoważne twierdzeniu Brouwera o punkcie stałym. Twierdzenie to stało się znane jako twierdzenie Mirandy, [58].

Ostatnio w [P.3] udowodniono następujące uogólnienie twierdzenia 9.

Twierdzenie 10. *Niech F będzie odwzorowaniem półciągłym z góry przekształcającym zbiór $[-M, M]^n$ na wypukłe zwarte podzbiory $\mathbb{R}^n$ oraz spełniającym dla $d = (d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ następujące warunki:*

$$\text{jeśli } d \in F(x_1, \dots, x_{i-1}, M, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad \text{to } d_i \geq 0$$

oraz

$$\text{jeśli } d \in F(x_1, \dots, x_{i-1}, -M, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad \text{to } d_i \leq 0,$$

dla każdego $i = 1, \dots, n$. Wówczas istnieje takie $x \in [-M, M]^n$, że $0 \in F(x)$.

Twierdzenia Mirandy mogą być z powodzeniem zastosowane w teorii równań różniczkowych. Można je wykorzystać do otrzymywania warunków dotyczących istnienia rozwiązań zagadnień brzegowych. Warto tu nadmienić, że twierdzenie 10 zostało udowodnione, aby pokazać, iż pewne asymptotyczne zagadnienie brzegowe posiada przynajmniej jedno rozwiązanie (więcej szczegółów można znaleźć w [P.3]).

Jednakże, twierdzenie 10 ma pewną wadę. Może zostać zastosowane tylko do zagadnień skalarnych. Jak zobaczymy później, wykorzystanie tego podejścia wymaga rozważenia pewnego zagadnienia początkowego. W przypadku jednowymiarowym, aby pokazać, że zbiór rozwiązań zagadnienia początkowego w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej jest zwarty i wypukły, wystarczy zauważyć, że jest on zwarty i

spójny. Jednak tego podejścia nie można wykorzystać w przypadku układów równań różniczkowych. W konsekwencji, przyszłe uogólnienia twierdzenia Mirandy będą wymagały rozważenia innej klasy zbioru wartości odwzorowania F , klasy związanej z tym co wiemy o zbiorze rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej.

Najpierw przypomnijmy pewne oznaczenia i terminologię potrzebne w dalszej części tego omówienia. Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi. Przestrzeń X nazywamy *absolutnym retraktem otoczeniowym* (zapisujemy ANR), jeśli dla dowolnej przestrzeni Y i homeomorficznego włożenia $i : X \rightarrow Y$ przestrzeni X na domknięte podzbiory $i(X) \subset Y$, $i(X)$ jest otoczeniowym retraktem Y , tzn. istnieje otwarte otoczenie U zbioru $i(X)$ w Y i retrakcja $r : U \rightarrow i(X)$. Powiemy, że przestrzeń X jest *ściągalna*, jeśli istnieją takie $x_0 \in X$ i homotopia $\mathcal{H} : X \times [0, 1] \rightarrow X$, że $\mathcal{H}(x, 0) = x$ oraz $\mathcal{H}(x, 1) = x_0$ dla każdego $x \in X$. Zwarta przestrzeń X jest zbiorem typu R_δ (zapisujemy $X \in R_\delta$), jeśli istnieje taki malejący ciąg (X_n) zwartych, ściąganych podprzestrzeni, że $X = \bigcap_{n \geq 1} X_n$. Powiemy, że $H : X \multimap Y$ jest odwzorowaniem wielowartościowym typu R_δ , jeśli jest półciągłe z góry oraz dla każdego $x \in X$ zachodzi $H(x) \in R_\delta$.

Możemy teraz sformułować następujące

Twierdzenie 11. [H.6, Theorem 5] *Niech $A_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, zaś F będzie odwzorowaniem dopuszczalnym przeprowadzającym $\prod_{i=1}^n [-A_i, A_i]$ na $\mathbb{R}^n$, tzn. istnieją przestrzeń Banacha E , $\dim E \geq n$, odwzorowanie $h : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ liniowe, ograniczone i suriektywne oraz takie odwzorowanie $H : \prod_{i=1}^n [-A_i, A_i] \rightarrow E$ typu R_δ , że $F = h \circ H$. Jeśli dla dowolnego $i = 1, \dots, n$ i dowolnego $y \in F(a)$, gdzie $|a_i| = A_i$, zachodzi albo*

$$a_i \cdot y_i \geq 0 \quad (35)$$

albo

$$a_i \cdot y_i \leq 0, \quad (36)$$

to istnieje takie $\bar{a} \in \prod_{i=1}^n [-A_i, A_i]$, że $0 \in F(\bar{a})$.

Dla dowodu twierdzenia 11 kluczowe znaczenie ma wynik Kryszewskiego i Płaskacza dotyczący istnienia punktu stałego odwzorowań rozkładalnych [47]. Odwzorowaniem rozkładalnym nazywamy parę (D, F) składającą się z odwzorowania wielowartościowego $F : X \multimap Y$ i diagramu $D : X \xrightarrow{H} Z \xrightarrow{h} Y$, gdzie $Z \in \text{ANR}$, $H : X \multimap Z$ jest odwzorowaniem typu R_δ , zaś $h : Z \rightarrow Y$ jest takim jednowartościowym odwzorowaniem ciągłym, że $F = h \circ H$.

Złożenie odwzorowania wielowartościowego o wartościach zwartych z funkcją ciągłą jest półciągłe z góry, więc każde odwzorowanie rozkładalne jest półciągłe z góry. W naszym przypadku Z jest przestrzenią Banacha, a więc jest ANR-em. Ponadto, zauważmy, że odwzorowanie rozkładalne (D, F) jest dopuszczalne w sensie Górniewicza (por. [27]).

Powiemy, że dwa odwzorowania rozkładalne (D_0, F_0) , (D_1, F_1) gdzie $D_k : X \xrightarrow{\Phi_k} Z_k \xrightarrow{\varphi_k} Y$, $k = 0, 1$ są homotopijne (zapisujemy $(D_0, F_0) \simeq (D_1, F_1)$), jeśli istnieje odwzorowanie rozkładalne $(\check{D}, \check{F})$, gdzie $\check{D} : X \times [0, 1] \xrightarrow{\check{\Phi}} \check{Z} \xrightarrow{\check{\varphi}} Y$ i takie odwzorowania

$j_k : Z_k \rightarrow Z$, $k = 0, 1$, że diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\Phi_0} & Z_0 & & \\
 \downarrow i_0 & & \downarrow j_0 & \searrow \varphi_0 & \\
 X \times [0, 1] & \xrightarrow{\tilde{\Phi}} & Z & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & Y \\
 \uparrow i_1 & & \uparrow j_1 & \nearrow \varphi_1 & \\
 X & \xrightarrow{\Phi_1} & Z_1 & &
 \end{array}$$

gdzie $i_k(x) = (x, k)$ dla $x \in X$, $k = 0, 1$, jest przemienny.

Twierdzenie 12. [47, p.1798] *Jeśli odwzorowanie rozkładalne $(D, F) : X \multimap X$, gdzie X jest zwartym ANR-em z nietrywialną charakterystyką Eulera $\chi(X) \neq 0$, jest homotopijne z identycznością, tzn., istnieje takie rozkładalne odwzorowanie $(D', F') : X \multimap X$, że $(D, F) \simeq (D', F')$ i $F'(x) = x$ dla $x \in X$, to $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$.*

Biorąc pod uwagę założenia twierdzenia 11, twierdzenie 12 może być zapisane w następującej prostszej postaci.

Wniosek 1. [H.6, Corollary 1] *Niech Q będzie zwartym równoległobokiem, z nietrywialną charakterystyką Eulera $\chi(Q) \neq 0$. Jeśli odwzorowanie rozkładalne $(D, F) : Q \multimap Q$ jest homotopijne z identycznością, to $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$.*

Szczegółowy dowód twierdzenia 11 jest podany w pracy [H.6]. Jednakże chcielibyśmy zwrócić tutaj uwagę na rozbieżność pomiędzy sformułowaniem twierdzenia 11 przedstawionego tutaj, a oryginalnym wynikiem. Twierdzenie 11 różni się od twierdzenia 5 udowodnionego w [H.6] warunkiem (36). Aby pokazać, że twierdzenie 11 jest prawdziwe, gdy zachodzi warunek (36), wystarczy w dowodzie twierdzenia podanego w [H.6] rozważyć następujące odwzorowanie wielowartościowe $G : \prod_{i=1}^n [-A_i, A_i] \multimap \prod_{i=1}^n [-A_i, A_i]$ oraz diagram

$$D : \prod_{i=1}^n [-A_i, A_i] \xrightarrow{\Phi_0} E \xrightarrow{h} \prod_{i=1}^n [-A_i, A_i],$$

gdzie $G = h \circ \Phi_0$, $\Phi_0(q) := \{x \in E \mid x = j(q) + \varepsilon z, z \in H(q)\}$, z odpowiednio małym $\varepsilon > 0$, oraz $j : \mathbb{R}^n \rightarrow E$ danym wzorem

$$j(q) = \sum_{i=1}^n q_i e_i,$$

gdzie e_i jest takim elementem przestrzeni E , że $h_j(e_i) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Zauważmy, że aby udowodnić twierdzenie 11 z warunkiem (36), wystarczy zmienić jedynie definicję odwzorowania Φ_0 , pozostała część dowodu pozostaje taka sama (por. [H.7, Remark 1.2]).

Uogólnione twierdzenie Mirandy (Twierdzenie 11) można zastosować do układów równań różniczkowych, zarówno w przypadku nierezonansowym jak i rezonansowym. W pracy [H.6] podano przykłady wykorzystania tego twierdzenia do układów n równań różniczkowych postaci $u'' = f(t, u, u')$ z różnymi lokalnymi warunkami brzegowymi określonymi na przedziale ograniczonym oraz na półprostej. Założono

tam, że funkcja f ma wzrost liniowy (zob. [H.6, Examples 1–4]). Bez wchodzenia w szczegóły, ponieważ metoda zaprezentowana w [H.6] będzie dokładnie omówiona później w przypadku nielokalnego zagadnienia brzegowego, aby pokazać, że zagadnienia brzegowe omawiane w [H.6] (z warunkami brzegowymi określonymi na przedziale) posiadają rozwiązania, wystarczy rozważyć najpierw pewne zagadnienie Cauchy’ego. Jeśli oznaczymy przez (S, t_0, u_0) zbiór wszystkich rozwiązań zagadnienia Cauchy’ego

$$u' = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0 \in \mathbb{R}^n,$$

wówczas wiadomo, że jeśli $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T > 0$, jest funkcją ciągłą i posiada wzrost co najwyżej liniowy, to (S, t_0, u_0) jest zbiorem typu R_δ (por. [28, Corollary 7.7]). Ta charakteryzacja zbioru wszystkich rozwiązań zagadnienia początkowego jest kluczowa w pracy [H.6].

Powróćmy teraz do nielokalnego zagadnienia brzegowego (30), które, w przypadku gdy f zależy od u' , może być zapisane w postaci

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u'(s) dg(s), \quad (37)$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ oraz $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dla $i = 1, \dots, n$.

Jak wspomniano wcześniej, zagadnienia (30) i (37) były rozważane tylko w pracach [H.5] i [P.12], w których zakłada się, że funkcja f jest ograniczona. Teraz, wykorzystując uogólnione twierdzenie Mirandy (Twierdzenie 11), osłabimy założenia nałożone na funkcję f . Z jednej strony, to podejście pozwala rozważać funkcje f , które mogą być nieograniczone, z drugiej zaś strony, w przeciwieństwie do poprzednich wyników, w których g miała wahanie skończone (por. [H.5, P.12]), będziemy musieli poczynić pewne dodatkowe założenia dotyczące funkcji g .

Aby zastosować twierdzenie 11, zdefiniujemy pomocnicze zagadnienie początkowe oraz potrzebne odwzorowania. Rozważmy następującą rodzinę zagadnień początkowych

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = a, \quad u'(0) = 0, \quad (38)$$

gdzie $a \in \mathbb{R}^n$ i $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Zdefiniujemy operator $T : \mathbb{R}^n \times C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ wzorem

$$T_a(u)(t) = a + \int_0^t (t-s)f(s, u(s), u'(s))ds. \quad (39)$$

Niech teraz $a \in \mathbb{R}^n$ będzie ustalone. Połóżmy

$$\text{Fix } T_a := \{u \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \mid T_a u = u\}.$$

Zauważmy, że $u \in \text{Fix } T_a$ wtedy i tylko wtedy, gdy u jest rozwiązaniem zagadnienia (38).

Rozważmy odwzorowanie $H : \mathbb{R}^n \rightarrow C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$ dane wzorem

$$H(a) = \text{Fix } T_a \quad (40)$$

i zdefiniujmy odwzorowanie $h : C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ jako

$$h(u) = u'(1) - \int_0^1 u'(s) dg(s). \quad (41)$$

Niech teraz multifunkcja $F : \mathbb{R}^n \multimap \mathbb{R}^n$ będzie określona następująco $F = h \circ H$, tzn.

$$F(a) = \left\{ u'(1) - \int_0^1 u'(s) dg(s) \mid u \in \text{Fix } T_a \right\}. \quad (42)$$

Biorąc pod uwagę powyższe oznaczenia, możemy teraz sformułować jeden z głównych wyników zawartych w pracy [H.7].

Twierdzenie 13. [H.7, Theorem 2.1] *Niech będą spełnione następujące założenia:*

- (F1) $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą;
- (T1) (oszacowanie a priori) dla każdego $a \in \mathbb{R}^n$ wszystkie możliwe rozwiązania zagadnienia początkowego (38) są wspólnie ograniczone w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$;
- (G) dla każdego $i = 1, \dots, k$, g_i jest niemalejąca, $0 \leq \int_0^1 dg_i(s) \leq 1$ oraz, jeśli $\int_0^1 dg_i(s) = 1$, to g_i nie jest stała na $[0, 1]$.

Ponadto założmy, że istnieją takie stałe $A_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, że

- (A1) jeśli $u \in \text{Fix } T_a$ dla $a_i := A_i$, to funkcje u'_i są niemalejące na $[0, 1]$, $i = 1, \dots, n$;
- (A2) jeśli $u \in \text{Fix } T_a$ dla $a_i := -A_i$, to funkcje u'_i są nierosnące na $[0, 1]$, $i = 1, \dots, n$.

Wówczas zagadnienie (37) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie.

Zagadnienie początkowe (38) jest tutaj kluczowe. Na początku zauważmy, że zagadnienie początkowe (38) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie dla każdego ustalonego $a \in \mathbb{R}^n$ i wszystkie takie rozwiązania są globalne, tzn. są określone na całym przedziale $[0, 1]$. Istotnie, z (F1), wykorzystując twierdzenie o istnieniu rozwiązań, wnioskujemy że zagadnienie (38) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie lokalne. Wiedząc, że rozwiązania lokalne istnieją, wystarczy wiedzieć, że wszystkie możliwe rozwiązania globalne są ograniczone, aby stwierdzić, że one istnieją (por. założenie (T1)). Oznacza to, że operator T jest dobrze zdefiniowany i jego punkty stałe są rozwiązaniami zagadnienia (38).

Rozważmy teraz odwzorowanie H , które każdemu warunkowi początkowemu $a \in \mathbb{R}^n$ przyporządkowuje zbiór rozwiązań zagadnienia (38). Można pokazać, że H jest półciągłe z góry o wartościach zwartych. Ponadto, wykorzystując pojęcie funkcji całkownie ograniczonych, otrzymujemy, że H jest odwzorowaniem typu R_δ (więcej szczegółów znajduje się w dowodzie twierdzenia 13 w [H.7]). Można również pokazać, że h jest liniowa, ciągła i suriektywna. Ponadto zauważmy, że definicja h w (41) jest powiązana z drugim nielokalnym warunkiem brzegowym zagadnienia (37).

Teraz wystarczy tylko pokazać, że multifunkcja F zdefiniowana w (42) spełnia warunek (35) twierdzenia 11. W tym celu należy wykorzystać założenia (A1), (A2) oraz (G).

Z twierdzenia 11, otrzymujemy, że istnieje takie $\bar{a} \in \prod_{i=1}^n [-A_i, A_i]$, że $0 \in F(\bar{a})$, co oznacza, że istnieje $\bar{a}$, dla którego rozwiązanie u zagadnienia (38) jest również rozwiązaniem zagadnienia (37), tzn., u spełnia drugi nielokalny warunek brzegowy zagadnienia (37). Innymi słowy, w zbiorze wszystkich rozwiązań rodziny zagadnień początkowych (38) znajdziemy przynajmniej jedno takie rozwiązanie, które jest poszukiwanym rozwiązaniem zagadnienia (37).

W [H.7] rozważono również przypadek, gdy miara dg_i , $i = 1, \dots, n$, jest ujemna [H.7, Theorem 2.2]. Ponadto podano również warunki istnienia rozwiązań w przypadku, gdy punktacja f nie zależy od u' , tzn. kiedy zagadnienie (37) jest zdefiniowane w (30) [H.7, Theorems 2.3–2.4].

Rozważono również szczególne przypadki i podano przykłady, dla których abstrakcyjne założenia podanych twierdzeń [H.7, Theorems 2.1–2.4] są spełnione. Na przykład, jeśli prawdziwe jest następujące założenie

(F4) dla każdego $i = 1, \dots, k$ istnieje takie $M_i > 0$, że $u_i f_i(t, u, v) \geq 0$ dla wszystkich $t \in [0, 1]$, $v \in \mathbb{R}^k$, $u \in \mathbb{R}^k$, gdzie $|u_i| \geq M_i$,

to dla $|a_i| = M_i + 1$ założenia (A1) oraz (A2) są spełnione (por. [H.7, Lemmas 3.1 i 3.2]).

Podano również dodatkowe warunki, przy których inne założenia twierdzeń [H.7, Theorems 2.1–2.4] są spełnione. Można zauważyć, że kluczowy jest tutaj warunek o oszacowaniu a priori (zobacz założenia (T1) i (T2) w [H.7]). Z tych założeń wynika, że rozwiązania zagadnień początkowych rozważonych w [H.7] są globalne i dodatkowo dostarczają one istotnych informacji na temat topologicznej struktury zbioru rozwiązań tych zagadnień, dokładniej zbiór ten jest zbiorem typu R_δ w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej.

Najpierw rozważono przypadek, gdy funkcja f ma wzrost liniowy, przy którym istnieją rozwiązania nielokalnego zagadnienia brzegowego niezależnie od tego, czy funkcja f zależy, czy też nie zależy od u' (por. [H.7, Corollaries 3.3–3.9]).

W przypadku, gdy $n = 1$, omawiane są pewne uogólnienia przypadku subliniowego. Jeżeli założymy, że

(F7) $|f(t, u, v)| \leq c_1 \omega(|v|) + c_2$, $t \in [0, 1]$, $u, v \in \mathbb{R}$, gdzie $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ jest ciągłą niemalejącą funkcją,

to, wykorzystując uogólnienie Bihari lematu Gronwalla, otrzymamy wspólną ograniczoność zbioru rozwiązań zagadnienia początkowego (38). Podobnie, jeśli spełniony jest warunek

(F9) $|f(t, u, v)| \leq c_1 + c_2|v| + c_3|v|^p$, gdzie $t \in [0, 1]$, $u, v \in \mathbb{R}$, $p \geq 0$, $c_1 > 0$ i $c_2, c_3 \geq 0$,

to wykorzystując podejście Lakshmikanthama, można udowodnić, że założenie (T1) zachodzi. Wyniki dotyczące założeń (F7) i (F9) podano w odpowiednich wnioskach [H.7, Corollaries 3.8–3.13].

Zauważmy, że zamiast warunków podanych powyżej, można nałożyć na funkcję f dowolne warunki, które zagwarantują *wspólną ograniczoność* rozwiązań zagadnień początkowych rozważonych w [H.7].

5 Omówienie wyników pozostałych prac naukowych.

W tym rozdziale omówimy krótko wyniki zawarte w pozostałych pracach autorki, które nie zostały uwzględnione w osiągnięciu naukowym wskazanym w rozdziale 3.

Spis pozostałych publikacji

- [P.18] M. Krukowski, K. Szymańska-Dębowska, *Solutions for second order nonlocal BVPs via the generalized Miranda theorem*, Rocky Mountain J. Math. 48 (2018), no. 2, 519–528.
- [P.17] I. Kossowski, K. Szymańska-Dębowska, *Solutions to resonant boundary value problem with boundary conditions involving Riemann-Stieltjes integrals*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 23 (2018), no. 1, 275–281.
- [P.16] J. Mawhin, K. Szymańska-Dębowska, *The sharpness of some existences statements for differential systems with nonlocal boundary conditions*, Mem. Differential Equations Math. Phys. 72 (2017), 79–90.
- [P.15] J. Mawhin, K. Szymańska-Dębowska, *Convex sets, fixed points and first order systems with nonlocal boundary conditions at resonance*, J. Nonlinear Convex Anal. 18 (2017), no. 1, 149–160.
- [P.14] K. Szymańska-Dębowska, *On second order nonlocal boundary value problem at resonance*, Fasc. Math. 56 (2016), 143–153.
- [P.13] K. Szymańska-Dębowska, *Existence results for a second order nonlocal boundary value problem at resonance*, Studia Sci. Math. Hungar. 53 (2016), no. 1, 42–52.
- [P.12] J. Mawhin, K. Szymańska-Dębowska, *Second-order ordinary differential systems with nonlocal Neumann conditions at resonance*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 195 (2016), no. 5, 1605–1617.
- [P.11] K. Szymańska-Dębowska, *Existence theorems of nonlinear asymptotic BVP for a homeomorphism*, Opuscula Math. 36 (2016), no. 3, 399–407.
- [P.10] K. Szymańska-Dębowska, *The solvability of a nonlocal boundary value problem*, Math. Slovaca 65 (2015), no. 5, 1027–1034.
- [P.9] K. Szymańska-Dębowska, *Existence result for a non-resonant nonlocal boundary value problems*, Miskolc Math. Notes 16 (2015), no. 1, 517–525.
- [P.8] B. Przeradzki, K. Szymańska-Dębowska, *Wave fronts to some modifications of Korteweg-de Vries and Burgers-Korteweg-de Vries equations*, Calculus of variations and PDEs, 163–168, Banach Center Publ., 101, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2014.
- [P.7] A. Lipowski, B. Przeradzki, K. Szymańska-Dębowska, *Periodic solutions to differential equations with a generalized p -Laplacian*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 19 (2014), no. 8, 2593–2601.

- [P.6] K. Szymańska–Dębowska, *On two systems of non-resonant nonlocal boundary value problems*, An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta, Ser. Mat. 21 (2013), no. 3, 257–267.
- [P.5] K. Szymańska–Dębowska, *On some resonant boundary value problem on an infinite interval*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 36 (2010), no. 1, 119–127.
- [P.4] T. Moussaoui, K. Szymańska–Dębowska, *Resonant problem for a class of BVPs on the half-line*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. (2009), No. 53, 10 pp.
- [P.3] K. Szymańska, *Resonant problem for some second-order differential equation on the half-line*, Electron. J. Differential Equations (2007), No. 160, 9 pp.
- [P.2] K. Szymańska, *On an asymptotic boundary value problem for second order differential equation*, J. Appl. Anal. 12 (2006), no. 1, 109–118.
- [P.1] M. Kałuszka, A. Okolewski, K. Szymańska, *Sharp bounds for L -statistics from dependent samples of random length*, J. Statist. Plann. Inference 127 (2005), no. 1-2, 71–89.

Spis prac, które zostały przyjęte do publikacji

- [P.19] K. Szymańska–Dębowska, *Solutions to Neumann boundary value problems with a generalized p -Laplacian*, Georgian Math. J.
- [P.20] K. Szymańska–Dębowska, *System of nonlocal resonant boundary value problems involving p -Laplacian*, Math. Slovaca.

Spis prac, które zostały przedłożone do publikacji

- [P.21] E. Kulesza, K. Szymańska–Dębowska, *On the Lebesgue and Sobolev spaces on a time-scale*.
- [P.22] J. Banasiak, M.S. Seuneu Tchamga, K. Szymańska–Dębowska, *Canard solutions in equations with backward bifurcations*.

W artykule [P.1] uogólniamy nierówność Arnolda–Groenevelde–Papadatosa (AGP) w przypadku, gdy liczność próby jest dowolną zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych. Część uzyskanych oszacowań rozszerza znane wyniki dla prób o losowej liczności. Pozostałe – w tym nierówności AGP typu logarytmicznego – są nowe nawet dla prób o liczności deterministycznej. W pracy podajemy również przykłady zastosowania przedstawionych oszacowań dla konkretnych L -statystyk.

Niektóre wyniki zawarte w rozprawie doktorskiej zostały przedstawione w publikacjach [P.2]–[P.3]. W pracy [P.2] rozważono następujące asymptotyczne zagadnienia brzegowe

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0 \quad (43)$$

($f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą) oraz

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0 \quad (44)$$

($f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją lipschitzowsko ciągłą). Pierwsze zagadnienie jest nierezonansowe, a więc możemy rozważać odpowiadający mu operator, którego punkty stałe są rozwiązaniami zagadnienia (43). Zakładając, że f ma wzrost liniowy i nakładając na f pewien dodatkowy warunek znakowy, pokazano, że zagadnienie (43) posiada przynajmniej jedno rozwiązanie. Interesujący jest tu dobór przestrzeni. Pracujemy w przestrzeni Banacha

$$\mathbb{U} = \left\{ u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \mid u \in C^1([0, \infty), \mathbb{R}^n), \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0 \right\} \quad (45)$$

z normą

$$\|u\|_{\mathbb{U}} = \max \left\{ |u(0)|, \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |u'(t)| \right\}.$$

Podano kryterium zwartości podzbiorów z tej przestrzeni [P.2, Theorem 2.1]. Zagadnienie (44) jest zawsze rezonansowe. To do niego właśnie po raz pierwszy zastosowano twierdzenie Mirandy – w wersji klasycznej (twierdzenie 9 z rozdziału 4). W tym celu musieliśmy założyć, że f jest funkcją lipschitzowsko ciągłą ze względu na drugą i trzecią zmienną. W ten sposób odpowiednie odwzorowanie jest jednowartościowe.

Aby pokazać, że zagadnienie (44) posiada rozwiązanie w przypadku, gdy f jest tylko funkcją ciągłą, udowodniono w [P.3] uogólnione twierdzenie Mirandy dla odwzorowań wielowartościowych półciągłych z góry o wartościach zwartych i wypukłych (twierdzenie 10 w rozdziale 4). Aby wykorzystać to twierdzenie, należy pokazać, że zbiór rozwiązań pomocniczego zagadnienia Cauchy’ego jest zwarty i wypukły w odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej. Jak powiedziano wcześniej, wykazano tu, że zbiór rozwiązań jest zwarty i spójny. Aby to pokazać musieliśmy jednak założyć, że $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. W konsekwencji, warunki na istnienie rozwiązań zostały otrzymane tylko w przypadku, gdy zagadnienie brzegowe (44) jest skalarne.

Dalsze publikacje nie dotyczą już wyników zawartych w rozprawie doktorskiej. W pracy [P.4], zmieniono warunek dotyczący wzrostu liniowego funkcji f . Założono tam, że funkcja f spełnia warunek Nagumo (uogólnienie przypadku subliniowego). Jednakże, wyniki zaprezentowane w tej publikacji w dalszym ciągu dotyczą przypadku jednowymiarowego (a nie układów równań różniczkowych).

Układ równań różniczkowych z warunkami brzegowymi zdefiniowanymi w (44) jest przedmiotem rozważań w publikacji [P.5]. Pracujemy tu w przestrzeni Banacha $BCL(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ (zapisujemy BCL) wszystkich funkcji ciągłych i ograniczonych, które mają skończone granice w $+\infty$. Pokazano tu, że zbiór wszystkich rozwiązań odpowiedniego zagadnienia Cauchy’ego w przestrzeni funkcji BCL jest zbiorem typu R_δ [P.5, Lemma 3]. Udowodniono uogólnienie twierdzenia 10 (patrz rozdział 4) dla pewnego odwzorowania rozkładalnego, dla którego odpowiednie odwzorowanie wielowartościowe przyjmuje wartości w przestrzeni BCL [P.5, Lemma 4]. Idea zawarta w tej pracy została wykorzystana później do otrzymania twierdzenia typu Mirandy,

w którym odpowiednie odwzorowanie wielowartościowe przyjmuje wartości w dowolnej przestrzeni Banacha (twierdzenie 11, rozdział 4).

Nierezonansowe zagadnienia brzegowe z różnymi nielokalnymi warunkami brzegowymi dla równań różniczkowych zwyczajnych rzędu drugiego były przedmiotem badań w publikacjach [P.6], [P.9] oraz [P.10]. Nielocalne warunki brzegowe dotyczą tutaj całek Riemanna–Stieltjesa i są postawione na przedziale $[0, 1]$. Zagadnienia rozważane w tych pracach uogólniają wcześniejsze znane wyniki, zarówno pod względem rozpatrywania układów równań różniczkowych, jak i samych warunków brzegowych. Wykorzystując własności stopnia topologicznego Leraya–Schaudera, wykazaliśmy istnienie przynajmniej jednego rozwiązania dla rozważanych zagadnień. Ponadto, dopuszczamy słabsze założenia, tylko warunki znakowe dla funkcji f . Oczywiście, nałożyliśmy pewne dodatkowe ograniczenia na miarę dg (występującą w rozważanych w warunkach brzegowych całkach Riemanna–Stieltjesa).

Istnienie T –okresowych rozwiązań dla następującego układu n równań

$$(\varphi(u'))' + f(t, u, u') = 0,$$

gdzie $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą i T –okresową ze względu na t ,

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{\beta(|s|)}{|s|}s, & s \neq 0 \\ 0, & s = 0 \end{cases}, \quad (46)$$

$\beta : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ jest ciągłą i rosnącą, $\beta(0) = 0$, $\beta(\infty) = \infty$, jest przedmiotem badań w [P.8]. Ponieważ $Lu = (\varphi(u'))'$ nie jest liniowy, wykorzystano tutaj pewne uogólnienie twierdzenia kontynuacyjnego Mawhina dla tego typu zagadnień okresowych, zaprezentowanego przez Manásevicha i Mawhina w [53]. Przypadek gdy f nie zależy od u' jest również rozważany. Nałożone na funkcję f założenia gwarantujące istnienie przynajmniej jednego rozwiązania okresowego, w przeciwieństwie do wcześniejszych znanych wyników, nie są związane z nieznanym rozwiązaniem u . Podano również zastosowania rozważanego zagadnienia do relatywistycznego równania wahadła w postaci ogólnej.

Następujące zmodyfikowane równanie Kortewega–de Vriesa (KdV)

$$u_{xxx} + u_t + f(u)u_x = 0$$

oraz równanie Burgersa–Kortewega–de Vriesa (BKdV)

$$u_{xxx} + u_t + f(u)u_x + \mu u_{xx} = 0$$

są rozważane w [P.7]. Nakładając na funkcję f odpowiednie warunki (inne dla każdego z równań), udowodniono istnienie rozwiązania w postaci fali wędrującej. Pokazano, że istnieje taka prędkość fali $v > 0$, że równanie KdVa posiada przynajmniej jeden front fali. Ponadto pokazano, że dla każdego $v \in (0, v_0)$, gdzie $v_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) \in (0, +\infty]$, równanie BKdVa posiada przynajmniej jeden front fali albo falę wierzgającą (a kick-profile wave solution). W dowodach wykorzystano metody zaczerpnięte z teorii układów dynamicznych.

Istnienie rozwiązań następującego zagadnienia brzegowego

$$(\varphi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u(0) = 0, \quad u'(\infty) = 0,$$

gdzie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą jest przedmiotem rozważań w pracy [P.11]. Funkcja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiuje różne zagadnienia brzegowe powiązane z operatorem typu Laplace’a. Najpierw zakładamy, że φ jest dane wzorem (46). W tym przypadku φ jest uogólnieniem operatora p -Laplace’a postaci: $\psi_p(s) = |s|^{p-2}s$, dla $s \neq 0$, $\psi_p(0) = 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, $p > 1$. W drugim przypadku, $\varphi(s) = (\varphi_1(s_1), \dots, \varphi_n(s_n))$ jest określone następująco: φ_i jest jednowymiarowym rosnącym homeomorfizmem oraz $\varphi_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$. W tym przypadku φ uogólnia następującą wersję p -laplasjanu: $\varphi(s) = (\varphi_{p_1}(s_1), \dots, \varphi_{p_n}(s_n))$, $i = 1, \dots, n$, $s \in \mathbb{R}^n$, $p_i > 1$ oraz $\varphi_{p_i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednowymiarowym p_i -laplasjanem. Zagadnienie to nie było w takiej ogólności badane do tej pory. Znane wyniki odnoszą się do przypadku skalarnego. Najważniejszy jest tu dobór przestrzeni, odmienny niż w innych pracach dotyczących tego typu problemów (por. (45)). To podejście umożliwia otrzymanie istnienia rozwiązań tylko przy dwóch warunkach nałożonych na funkcję f dotyczących wzrostu liniowego i warunku znakowego.

Używając argumentów związanych ze stopniem topologicznym, w [P.12] udowodniono twierdzenia o istnieniu rozwiązań dla nielokalnych rezonansowych zagadnień brzegowych (30) oraz (37). W tej pracy pokazano, że wyniki zawarte w [H.5] dla zagadnienia (30) wynikają z innej postaci twierdzenia kontynuacyjnego Leraya-Schaudera (twierdzenie Schaefera o punkcie stałym) dla pewnego operatora w przestrzeni $C^1([0, 1], \mathbb{R}^n)$. To podejście pozwala uogólnić wyniki zaprezentowane w [H.5] na funkcje f , które mogą zależeć od u' , a nie należą do klasy Landesmana-Lazera-Nirenberga, ale spełniają pewne warunki typu Villariego [79]. Wykorzystanie technik zaczerpniętych z teorii stopnia koincydencji [55] pozwoliło zaproponować inne warunki dla istnienia rozwiązań zagadnienia (30) odnoszące się do nieznikającego stopnia Brouwera pewnego odwzorowania w $\mathbb{R}^n$ zależnego od f i g [P.12, Theorem 6.1]. Z tego rezultatu wynika również istnienie rozwiązań zagadnienia (30) z nieliniowościami typu Landesmana-Lazera-Nirenberga, a które dotyczą nieznikania stopnia Brouwera pewnego odwzorowania w $\mathbb{R}^n$ zależnego od $\mathcal{F}$ zdefiniowanego w (31) oraz g [P.12, Theorem 7.1]. Należy podkreślić, że granica (31) jest rozważana tutaj w sensie słabszym, oznacza to iż dla każdego t granica (31) istnieje jednostajnie dla $\xi \in S^{n-1}$. Jednakże, w obu pracach [H.5] oraz [P.12] zakłada się, że funkcja f jest ograniczona.

Publikacje [P.13] oraz [P.14] dotyczą dwóch zagadnień brzegowych z nielokalnymi warunkami brzegowymi, mianowicie

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s)dg(s)$$

oraz

$$u'' = f(t, u), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u(s)dg(s),$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą, zaś $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma wahanie skończone. Metody zaprezentowane tutaj są podobne do tych rozważanych w [H.5]. Nakładając pewne warunki typu Nirenberga oraz wykorzystując metodę perturbacyjną pokazano, że powyższe problemy posiadają przynajmniej jedno rozwiązanie. W pracy [P.13] granica (31) istnieje jednostajnie ze względu na t oraz $\xi \in S^{n-1}$, podczas gdy w publikacji [P.14] zakłada się, że dla każdego t istnieje taka jednostajna granica (31) ze względu na $\xi \in S^{n-1}$, że $\mathcal{F}$ jest ograniczona na $[0, 1] \times S^{k-1}$.

Warto zauważyć, że w metodzie perturbacyjnej zazwyczaj zaburza się równania różniczkowe, nie zaś warunki brzegowe, co prowadzi do wyznaczania funkcji Greena. Nowością w [H.5], [P.13] i [P.14] jest zaburzanie warunków brzegowych. W ten sposób równoważna postać całkowa dla zagadnienia zaburzonego jest łatwa do wyznaczenia.

W porównaniu do zagadnień rzędu drugiego, teoria zagadnień rzędu pierwszego z warunkami nielokalnymi jest mniej rozwinięta. Istnienie rozwiązań dla następujących rezonansowych nielokalnych zagadnień (czasami nazywanych odpowiednio zagadnieniami końcowymi i początkowymi),

$$u' = f(t, u), \quad u(1) = \int_0^1 u(s)dg(s)$$

oraz

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = \int_0^1 u(s)dg(s),$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest ciągła, zaś $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ma wahanie skończone, $\int_0^1 dg_i(s) = 1$ ($i = 1, \dots, n$), jest przedmiotem badań w pracach [P.15] oraz [P.16]. W [P.15], oszacowania a priori wynikają z istnienia takiego otwartego, ograniczonego i wypukłego zbioru $C \subset \mathbb{R}^n$, że dla każdego $t \in [0, 1]$ i $u \in \overline{C}$, pole wektorowe $f(t, \cdot)$ spełnia odpowiednie geometryczne warunki na ∂C (pewne warunki znakowe). Rozważone są również szczególne przypadki, gdy C jest kulą oraz równoległobokiem.

Zagadnienia rozważane w [P.15] są pewnym uogólnieniem wyników Krasnosielskiego [45] i Gustafsona–Schmitta [30] dla zagadnień postaci $u' = f(t, u)$ z okresowymi warunkami brzegowymi $u(0) = u(1)$. Treść twierdzenia Gustafsona–Schmitta jest następująca: jeśli istnieje takie ograniczone i wypukłe otoczenie C wektora 0 w $\mathbb{R}^n$ oraz taki wektor normalny zewnętrzny ν do ∂C , że albo

$$\langle \nu(u) | f(t, u) \rangle > 0, \quad \forall (t, u) \in [0, 1] \times \partial C,$$

albo

$$\langle \nu(u), f(t, u) \rangle < 0, \quad \forall (t, u) \in [0, 1] \times \partial C,$$

to zagadnienie okresowe rzędu pierwszego posiada przynajmniej jedno takie rozwiązanie, że $u([0, 1]) \subset C$. W sposób naturalny pojawia się zatem pytanie, czy tezy twierdzeń udowodnionych w [P.15] będą dalej zachodzić, jeśli w założeniach zmienimy znaki w odpowiednich nierównościach dotyczących funkcji f (w warunkach znakowych). Celem pracy [P.16] jest podanie kontrprzykładów, pokazujących, że w ogólności odpowiedź na to pytanie jest negatywna. W tym sensie, warunki gwarantujące istnienie rozwiązań podane w [P.15] są ostre. Do skonstruowania kontrprzykładów wykorzystano odpowiednie zagadnienia dotyczące zespolonych wartości własnych oraz alternatywę Fredholma dla pewnych odpowiednich zagadnień wielopunktowych. Ponadto w analogiczny sposób skonstruowano kontrprzykład związany z nielokalnym zagadnieniem brzegowym rozważanym w [H.2].

W pracach [P.17] oraz [P.18] zastosowano uogólnione twierdzenie Mirandy (twierdzenie 11) do układów równań rzędu drugiego z warunkami brzegowymi zadanymi

za pomocą całek Riemanna–Stieltjesa postaci

$$u'' = f(t, u, u') \quad u(0) = 0, \quad u'(1) = \int_0^1 u(s) dg(s)$$

oraz

$$u'' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s),$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą, zaś $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją o wahanu skończonym. Nakładając odpowiednie założenia na funkcje f i g wykazano istnienie przynajmniej jednego rozwiązania dla tak postawionych zagadnień.

Natomiast w [P.19] rozważamy następujący układ n zależnych zagadnień Neumanna

$$(\varphi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u'(1) = 0,$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest funkcją ciągłą. Funkcja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiuje różne zagadnienia Neumanna powiązane z operatorami typu Laplace’a. Rozważamy dwa przypadki: w pierwszym φ jest dana przez (46). W drugim przypadku $\varphi(s) = (\varphi_1(s_1), \dots, \varphi_n(s_n))$ jest dana wzorem

$$\varphi_i(s_i) = \begin{cases} \frac{\beta_i(|s_i|)}{|s_i|} s_i, & s_i \neq 0 \\ 0, & s_i = 0 \end{cases},$$

gdzie $\beta_i : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ są ciągłe, rosnące, $\beta_i(0) = 0$ oraz $\beta_i(\infty) = \infty$, $i = 1, \dots, n$. Następujące zagadnienie brzegowe

$$(\varphi(u'))' = f(t, u, u'), \quad u'(0) = 0, \quad u(1) = \int_0^1 u(s) dg(s),$$

gdzie $f : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, $g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, jest przedmiotem badań w [P.20]. Tutaj funkcja $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jest określona następująco $\varphi(s) = (\phi_{p_1}(s_1), \dots, \phi_{p_n}(s_n))$, gdzie $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, $p_i > 1$ oraz $\phi_{p_i} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest jednowymiarowym p_i -laplasjanem, tzn., $\phi_{p_i}(s_i) = s_i |s_i|^{p_i-2}$, $i = 1, \dots, n$. Głównym celem publikacji [P.19] i [P.20] jest uzyskanie warunków gwarantujących istnienie rozwiązań powyższych zagadnień, wykorzystując pewne uogólnienie twierdzenia kontynuacyjnego Mawhina dla operatorów quasi-liniowych autorstwa Ge oraz Ren [23].

Tematem pracy [P.21] są uogólnione przestrzenie Lebesgue’a i Sobolewa na ograniczonych skalach czasowych. Badamy tu standardowe własności tych przestrzeni i porównujemy je z klasycznymi znanymi wynikami dla przestrzeni Lebesgue’a i Sobolewa na przedziale ograniczonym. Ponadto rozważono tu pewne zastosowania dla operatora Nemytskiego i problemu Dirichleta.

W pracy [P.22] rozważamy opóźnioną wymianę stabilności dla rozwiązań osobliwie zaburzonego równania nieautonomicznego w przypadku, gdy zachodzi bifurkacja wsteczna jego rozmaitości quasi-stacjonarnych (krytycznych). Wyniki tej pracy zostały wykorzystane do dokładnego opisu rozwiązań typu canard dla osobliwie zaburzonych modeli typu drapieźnik–ofiara typu Rosenzweiga–MacArthura oraz Lesliego–Gowersa.

Bibliografia

- [1] H. Amann, *On the number of solutions of nonlinear equations in ordered Banach spaces*, J. Funct. Anal. 11 (1972), 346–384.
- [2] H. Amann, *Existence of multiple solutions for nonlinear elliptic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. 21 (1972), 925–935.
- [3] P. Amster, *Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems*, Universitext. Springer, New York, 2014.
- [4] M. Benchohra, A. Ouahab, *Upper and lower solution methods for differential inclusion with integral boundary conditions*, J. Appl. Math. Stoch. Anal. (2006), ID 10490, 10 pp.
- [5] M. Benchohra, S. Hamani, J. J. Nieto, *The method of upper and lower solutions for second order differential inclusions with integral boundary conditions*, Rocky Mountain J. Math. 40 (2010), no. 1, 13–26.
- [6] G. D. Birkhoff, O. D. Kellogg, *Invariant points in function space*, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), no. 1, 96–115.
- [7] A. V. Bitsadze, A. A. Samarskii, *Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 185 (1969), 739–740.
- [8] J. R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math. 21 (1963), 155–160.
- [9] R. Conti, *Recent trends in the theory of boundary value problems for ordinary differential equations*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 22 (1967), 135–178.
- [10] C. De Coster, P. Habets, *The Lower and Upper Solutions Method for Boundary Value Problems*. Handbook of Differential Equations, 69–160, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2004.
- [11] C. De Coster, P. Habets, *Two-Point Boundary Value Problems. Lower and Upper Solutions*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [12] J. L. Dalecki, M. G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space*, Nauka, Moscow, 1970.
- [13] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1980.
- [14] D. Dialetis, *Equivalence of the Ewald-Oseen extinction theorem as a nonlocal boundary-value problem with Maxwell's equations and boundary conditions*, J. Opt. Soc. Amer. 68 (1978), no. 5, 602–610.
- [15] M. A. Dominguez-Pérez, R. Rodríguez-López, *Multipoint boundary value problems of Neumann type for functional differential equations*, Nonlinear Anal. -Real World Appl. 13 (2012), 1662–1675.

- [16] J. Dugundji, A. Granas, *Fixed Point Theory*, vol. I, PWN, Warsaw, 1981.
- [17] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland, Amsterdam, 1976.
- [18] L. H. Erbe, *Existence of solutions to boundary value problems for ordinary differential equations*, *Nonlinear Anal.* 6 (1982), 1155–1162.
- [19] M. Feng, W. Ge, X. Zhang, *Existence result of second-order differential equations with integral boundary conditions at resonance*, *J. Math. Anal. Appl.* 353 (2009), 311–319.
- [20] A. Friedman, *Monotonic decay of solutions of parabolic equations with nonlocal boundary conditions*, *Quart. Appl. Math.* 44 (1986), no. 3, 401–407.
- [21] R. E. Gaines, J. Mawhin, *Ordinary differential equations with nonlinear boundary conditions*, *J. Differential Equations* 26 (1977), no. 2, 200–222.
- [22] R. E. Gaines, J. L. Mawhin, *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations*, *Lecture Notes in Math.*, vol. 568, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.
- [23] W. Ge, J. Ren, *An extension of Mawhin's continuation theorem and its application to boundary value problems with a p -Laplacian*, *Nonlinear Anal. TMA* 58 (2004), 477–488.
- [24] A. Granas, R. Guenther, J. Lee, *Nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations*, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 244 (1985), 128 pp.
- [25] D. Guo, V. Lakshmikantham, *Nonlinear problems in abstract cones*, Academic Press, Inc., Boston, 1988.
- [26] G. A. Harris, *On multiple solutions of a nonlinear Neumann problem*, *J. Differential Equations* 95 (1992), no. 1, 75–104.
- [27] L. Górniewicz, *Homological methods in fixed point theory of multi-valued maps*, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* 129 (1976), 71 pp.
- [28] L. Górniewicz, *Topological Approach to Differential Inclusions*, *Topological Methods in Differential Equations and Inclusions* (Montreal, PQ, 1994), 129–190, *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, 472, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995.
- [29] Ch. P. Gupta, *Solvability of a generalized multi-point boundary value problem of mixed type for second order ordinary differential equations*, *Proceedings of Dynamic Systems and Applications* 2 (1995), 215–222.
- [30] G. B. Gustafson, K. Schmitt, *A note on periodic solutions for delay-differential systems*, *Proc. Amer. Math. Soc.* 42 (1974), 161–166.

- [31] J. B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*, Springer, Berlin, 1993.
- [32] V. A. Il'in, E. I. Moiseev, *Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator in its differential and finite difference aspects*, Differ. Equ. 23 (1987), 803–810.
- [33] V. S. Il'kiv, V. M. Poliscuk, *A Boundary Value Problem with Nonlocal Conditions for Differential Operators with Constant Real Coefficients. (Ukrainian) Studies in the Qualitative Theory of Differential Equations and its Applications (Ukrainian)*, pp. 15–16, 71, Akad. Nauk Ukrain. SSR, Inst. Mat., Kiev, 1978.
- [34] G. Infante, J. R. L. Webb, *Loss of positivity in a nonlinear scalar heat equation*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 13 (2006), 249–261.
- [35] G. Infante, M. Zima, *Positive solutions of multi-point boundary value problems at resonance*, Nonlinear Anal. 69 (2008), no. 8, 2458–2465.
- [36] G. Infante, P. Pietramala, F. A. F. Tojo, *Non-trivial solutions of local and non-local Neumann boundary-value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 146 (2016), no. 2, 337–369.
- [37] N. I. Ionkin, *The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Differentsial'nye Uravneniya 13 (1977), no. 2, 294–304, 381.
- [38] N. I. Ionkin, *The stability of a problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary conditions*, Differentsial'nye Uravneniya 15 (1979), no. 7, 1279–1283, 1343.
- [39] L. I. Kamynin, *A boundary-value problem in the theory of heat conduction with non-classical boundary conditions*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. 4 (1964), 1006–1024.
- [40] M. Kandemir, *Nonlocal boundary value problems with transmission conditions*, Gulf J. Math. 3 (2015), no. 1, 1–17.
- [41] G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, *Sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of a nonlocal boundary value problem*, Appl. Math. Letters 15 (2002), 401–407.
- [42] G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, *Positive solutions and nonlinear eigenvalue problems for retarded second order differential equations*, Electron. J. Differential Equations 59 (2002), 1–11.
- [43] G. L. Karakostas, P. Ch. Tsamatos, *Multiple positive solutions of some Fredholm integral equations arisen from nonlocal boundary-value problems*, Electron. J. Differential Equations 30 (2002), 1–17.
- [44] A. M. Krall, *The development of general differential and general differential-boundary systems*, Rocky Mountain J. Math. 5 (1975), no. 4, 493–542.

- [45] M. A. Krasnosel'skii, *The Operator of Translation along the Trajectories of Differential Equations* (Russian), Nauka, Moscow, 1966. English translation: Amer. Math. Soc., Providence RI, 1968.
- [46] M. A. Krasnosel'skii, P. P. Zabreiko, *Geometrical Methods of Nonlinear Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [47] W. Kryszewski, S. Plaskacz, *Periodic solutions to impulsive differential inclusions with constraints*, Nonlinear Anal. 65 (2006), no. 9, 1794–1804.
- [48] E. M. Landesman, A. C. Lazer, *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value at resonance*, J. Math. Mech. 19 (1970), 609–623.
- [49] J. Leray, J. Schauder, *Topologie et équations fonctionnelles*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 51 (1934), no. 3, 45–78.
- [50] H. Lian, F. Geng, *Multiple unbounded solutions for a boundary value problem on infinite intervals*, Bound. Value Probl. (2011), No. 51, 8 pp.
- [51] N. G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, London–New York–Melbourne, 1978.
- [52] R. Ma, *A survey on nonlocal boundary value problems*, Appl. Math. E-Notes 7 (2007), 257–279.
- [53] R. Manásevich, J. Mawhin, *Periodic solutions for nonlinear systems with p -Laplacian-like operators*, J. Differential Equations, 145 (1998), 367–393.
- [54] J. Mawhin, *Problèmes aux Limites du Type de Neumann pour Certaines Équations Différentielles ou aux Dérivées Partielles non Linéaires*, Equations Différentielles et Fonctionnelles non Linéaires, (Actes Conf. Internat. Équa-Diff 73", Brussels/Louvain-la-Neuve, 1973), pp. 123–134, Hermann, Paris, 1973.
- [55] J. Mawhin, *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.
- [56] J. Mawhin, *Topological Degree and Boundary Value Problems for Nonlinear Differential Equations*. Topological Methods for Ordinary Differential Equations (Montecatini Terme, 1991), 74–142, Lecture Notes in Math., 1537, Springer, Berlin, 1993.
- [57] J. Mawhin, *Leray-Schauder degree: a half century of extensions and applications*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 14 (1999), no. 2, 195–228.
- [58] C. Miranda, *Un' osservazione su un teorema di Brouwer*, Bol. Un. Mat. Ital. 3 (1940), 5–7.
- [59] M. Müller, *Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Math. Z. 26 (1926), 619–649.

- [60] M. Nagumo, *Über die Differentialgleichung $y'' = f(t, y, y')$* , Proc. Phys-Math. Soc. Japan 19 (1937), 861–866.
- [61] L. Nirenberg, *An application of generalized degree to a class of nonlinear problems*, in Troisième Colloque du C.B.R.M. d'analyse fonctionnelle, Vander, Louvain, 1971, 57–74.
- [62] P. K. Palamides, *Boundary value problems for shallow elastic membrane caps*, IMA J. Appl. Math. 67 (2002), 281–299.
- [63] P. K. Palamides, G. Infante, P. Pietramala, *Nontrivial solutions of a nonlinear heat flow problem via Sperner's lemma*, Appl. Math. Lett. 22 (2009), no. 9, 1444–1450.
- [64] H. H. Pang, M. Lu, C. Cai, *The method of upper and lower solutions to impulsive differential equations with integral boundary conditions*, Adv. Difference Equ. (2014), No. 183, 11 pp.
- [65] O. Perron, *Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$* , Math. Ann. 76 (1915), 471–484.
- [66] W. V. Petryshyn, *On the approximation-solvability of equations involving A -proper and pseudo- A -proper mappings*, Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975), 223–312.
- [67] E. Picard, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires*, J. de Math. 9 (1893), 217–271.
- [68] M. Picone, *Su un problema al contorno nelle equazioni differenziali lineari ordinarie del secondo ordine*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 10 (1908), 1–95.
- [69] H. Poincaré, *Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps*, C. R. Acad. Sci. Paris 91 (1883), 251–252.
- [70] B. Przeradzki, *Badanie Rozwiązalności Równań Nieliniowych z Nieodwracalną Częścią Liniową, rozprawa habilitacyjna*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 1993.
- [71] B. Przeradzki, *Teoria i Praktyka Równań Różniczkowych Zwyczajnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, 2003.
- [72] I. Rachůnková, *Upper and lower solutions and topological degree*, J. Math. Anal. Appl. 234 (1999), no. 1, 311–327.
- [73] I. Rachůnková, *Upper and lower solutions and multiplicity results*, J. Math. Anal. Appl. 246 (2000), no. 2, 446–464.
- [74] I. Rachůnková, M. Tvrdý, S. Staněk, *Solvability of Nonlinear Singular Problems for Ordinary Differential Equations. Contemporary Mathematics and Its Applications*, 5. Hindawi Publishing Corporation, New York, 2008.

- [75] S. Roman, A. Štikonas, *Green's function for discrete second-order problems with nonlocal boundary conditions*, Bound. Value Probl. (2011), No. 767024, 23 pp.
- [76] G. Scorza Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per le equazioni differenziali del secondo ordine*, Math. Ann. 105 (1931), 133–143.
- [77] G. Scorza Dragoni, *Il problema dei valori ai limiti studiato in grande per gli integrali di una equazione differenziale del secondo ordine*, Giornale di Mat (Battaglini) 69 (1931), 77–112.
- [78] Y. Sun, Y. J. Cho, D. O'Regan, *Positive solutions for singular second order Neumann boundary value problems via a cone fixed point theorem*, Appl. Math. Comput. 210 (2009), no. 1, 80–86.
- [79] G. Villari, *Soluzioni periodiche di una classe di equazioni differenziali del terzo ordine quasi lineari*, Ann. Mat. Pura Appl. 73 (1966), no. 4, 103–110.
- [80] R. B. Vinter, *Semigroups on Product Spaces with Application to Initial Value Problems with Nonlocal Boundary Conditions. Control of Distributed Parameter Systems (Proc. Second IFAC Sympos., Coventry, 1977)*, pp. 91–98, IFAC, Düsseldorf, 1978.
- [81] F. Wang, F. Zhang, *Existence of positive solutions of Neumann boundary value problem via a cone compression-expansion fixed point theorem of functional type*, J. Appl. Math. Comput. 35 (2011), no. 1–2, 341–349.
- [82] J. R. L. Webb, *Optimal constants in a nonlocal boundary value problem*, Nonlinear Anal. 63 (2005), 672–685.
- [83] J. R. L. Webb, *Existence of positive solutions for a thermostat model*, Nonlinear Anal. RWA 13 (2012), 923–938.
- [84] J. R. L. Webb, G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems: a unified approach*, J. London Math. Soc. (2) 74 (2006), no. 3, 673–693.
- [85] J. R. L. Webb, G. Infante, *Positive solutions of nonlocal boundary value problems involving integral conditions*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. 15 (2008), no. 1–2, 45–67.
- [86] J. R. L. Webb, M. Zima, *Multiple positive solutions of resonant and non-resonant nonlocal boundary value problems*, Nonlinear Anal. 71 (2009), 1369–1378.
- [87] W. M. Whyburn, *Differential equations with general boundary conditions*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 692–704.
- [88] C. E. Wilder, *Expansion problems of ordinary linear differential equations with auxiliary conditions at more than two points*, Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917), no. 4, 415–442.
- [89] Z. Yang, *Positive solutions to a system of second-order nonlocal boundary value problems*, Nonlinear Anal. 62 (2005), 1251–1265.

Katarzyna Szymańska-Dębowska