Prof. dr hab. Maciej Sablik
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Śląskiego
ul. Bankowa 14
40-007 Katowice

Katowice, 7 maja 2021 r.

Recenzja rozprawy habilitacyjnej
Uogólnione funkcje wypukłe
w kontekście funkcji silnie wypukłych
oraz dorobku naukowego p. doktora Mirosława Adamka

Wstęp

Pan dr Mirosław Adamek urodził się w 1972 r. w Cieszynie. Ukończył w 1996 r. studia na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii, uzyskując tytuł magistra matematyki (opiekunem był prof. dr hab. Janusz Matkowski). W 2005 r. na tym samym Wydziale p. dr Adamek obronił pracę doktorską pt. *Wybrane zagadnienia związane z funkcjami λ- wypukłymi*, którą napisał pod kierunkiem prof. dr. hab. Kazimierza Nikodema. Jeszcze w czasie studiów podjął pracę nauczyciela w ZST w Skoczowie, a od października 1997 r. rozpoczął pracę jako asystent, potem adiunkt w filii Politechniki Łódzkiej w Bielsku-Białej, przekształconej w 2005 r. w Akademię Techniczno-Humanistyczną. Do dziś jest tam zatrudniony, od 2018 r. na stanowisku starszego wykładowcy.

Omówienie rezultatów osiągnięcia naukowego

Osiągnięcie naukowe składa się z 7 prac:

[H1] M. Adamek, *On a problem connected with strongly convex functions,* Math. Inequal. Appl., 19 (2) (2016), 1287-1293.

[H2] M. Adamek, *On a generalization of sandwich type theorems,* Aequat. Math., 92 (4) (2018), 641-647.

[H3] M. Adamek, *Remarks on (F,t)-convex functions,* Aequat. Math., 93 (5) (2019), 851-857.

[H4] M. Adamek, *On Jensen-type inequality for F-convex functions,* Math. Inequal. Appl., 22 (4) (2019), 1355-1364.

[H5] M. Adamek, *Characterization of inner product spaces and quadratic functions by some classes of functions,* Math. Inequal. Appl., 23 (2) (2020), 439-445.

[H6] M. Adamek, *On Hermite-Hadamard type inequalities for F-convex functions,* J. Math. Inequal., 14 (3) (2020), 867-874.

[H7] M. Adamek, *On F-convex functions,* J. Convex Anal., 28 (1) (2021), (final page numbers not yet available).[1]

Wszystkie wymienione publikacje są autorstwa Kandydata, opublikowane są w czasopismach o przyzwoitej randze, choć - być może - nie najwybitniejszych (na ostatniej Liście MEiN wszystkie są wycenione na 70 punktów). Podaję te liczby z recenzenckiego obowiązku, bo osobiście mam dość krytyczny stosunek do punktowania czasopism. Akurat w tym przypadku uważam, że czasopisma są trafnie dobrane z uwagi na grono zainteresowanych tematyką potencjalnych czytelników.

Przejdźmy do omówienia prac stanowiących wg Autora osiągnięcie habilitacyjne. Stwierdzam, że jest to cykl spójny i jednolity, a więc spełniający formalne kryterium zawarte w Ustawie Prawo o Szkolnictwie Wyższym z 18 lipca 2018 r., art. 219, ust. 1, pkt 2 lit. b (por. art. 267, ust. 2 pkt 2 lit. b).

Niech X będzie rzeczywistą przestrzenią liniową, D jej wypukłym podzbiorem, a $G : [0,1] \times D \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ ustaloną funkcją.[2] Rozważmy funkcję $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ spełniającą warunek

$$(W) \qquad f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) + G(t,x,y)$$

dla wszelkich $t \in [0,1]$ oraz $x, y \in D$. Zauważmy, że

- jeśli $G = 0$, to f jest wypukła,
- jeśli $G \leqslant 0$, to f jest wypukła, lecz jest to wypukłość „silniejsza",
- jeśli $G \geqslant 0$, to dopuszczamy, oprócz funkcji wypukłych, szerszą klasę,
- jeśli G zmienia znak - na razie nie ma nazwy dla klasy funkcji o tej wlasności, Habilitant w [H2] proponuje *funkcje wypukłe z kontrolną funkcją G.*

Można pytać o funkcje G zadanej postaci, np. danych wzorem $G(t,x,y) = -t(1-t)F(x-y)$, gdzie $F : D - D \longrightarrow \mathbb{R}$ jest zadaną funkcją.[3] I to właśnie

[1] W rzeczywistości artykuł ukaże się w 3 tomie rocznika 2021 czasopisma, we wrześniu 2021 r.

[2] Autor stosuje takie oznaczenie w pracy [H2].

[3] Nawiasem mówiąc, nie mogę się powstrzymać od pewnej uwagi. Dr Adamek w Autoreferacie postuluje ze znanych sobie tylko przyczyn, że F jest określona na D. To oczywisty błąd, który staram się tu poprawić na $D-D$. Niemniej we wszystkich pracach składających na osiągnięcie, Autor zakłada, że F jest określona na całej przestrzeni X. Z punktu widzenia przedstawianych rezultatów i metod ich uzyskiwania jest to podejście poprawne. Nie wiem czemu Habilitant upiera się przy (błędnym) określeniu dziedziny F. Z drugiej strony, zagadnienie wyznaczenia wszystkich funkcji spełniających warunek silnej wypukłości jest bardzo interesujące.

czyni p. dr Adamek w swoich pracach. Dominującą frazą we wszystkich publikacjach składających się na osiągnięcie p. dr. Adamka jest „F-wypukłość". Jest to pojęcie, które nie wzięło się znikąd, aczkolwiek formalnie po raz pierwszy pojawiło się w pracach Habilitanta. Pierwsze badania związane z tematyką poruszaną przez dr. Adamka prowadził matematyk rosyjski B. T. Polyak (por. [65][4]). Polyak wprowadził pojęcie funkcji *silnie wypukłych*, podając nierówność (1) (tu F jest dana wzorem $F(z) = c\|z\|^2$) jako równoważną temu pojęciu (por. [65], Lemma a)). Polyak zajmował się funkcjami spełniającymi (1), motywując to praktycznymi zastosowaniami w zagadnieniach optymalnego sterowania. Pragnę zauważyć, że Polyak wprowadził też warunek *jednostajnej quasi-wypukłości*, tj. własności definiowanej nierównością

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \max(f(x), f(y)) - \delta(\|x-y\|),$$

gdzie δ jest taką funkcją rzeczywistą, że $\delta(0) = 0$ i $\delta|(0,\infty) > 0$. Moim zdaniem w tej, nierozwiniętej przez B. T. Polyaka definicji, leży inspiracja pomysłu zaproponowanego przez dr. M. Adamka. Zaproponował on mianowicie w pracy [H1] definicję (7) z funkcją (w [H1] nieujemną) $F : D^5 \longrightarrow [0,\infty)$. Już to uogólniało szereg poprzednio znanych pojęć jak *c-wypukłość* w sensie J. P. Viala, *słaba wypukłość* w sensie D. Aussela, A. Daniilidisa i L. Thibault, *c-wypukłość* w sensie D. T. Luca, H. V. Ngai'ego i M. Théry, *aproksymatywnej wypukłości rzędu p* w sensie K. Nikodema i Zs. Pálesa, czy *semi-wypukłości* w sensie G. Albertiego, L. Ambrosia i P. Cannarsy (por. uwagi na str. 13 Autoreferatu).

Jak już napisałem wyżej, początkowo Autor zakładał nieujemność funkcjonału F, potem jednak zrezygnował z tego ograniczającego założenia. To - w moim przekonaniu - pokazuje, że idea przedstawienia cyklu prac jest cenna: można bowiem obserwować jak pojęcia ewoluują, czego zapewne nie dostrzeglibyśmy w przypadku jednej rozprawy, zredagowanej po zebraniu doświadczeń.

Przejdźmy jednak do krótkiego omówienia poszczególnych składników osiągnięcia. Już w pracy [H1] dr Adamek wprowadza pojęcie silnej wypukłości (F- wypukłości), które uogólnia pojęcie badane przez K. Nikodema i Zs. Pálesa w pracy [54]. W pracy [H1] Habilitant dowodzi, że można przy ogólniejszej definicji uzyskać równoważności, otrzymane przez autorów [54]. Jest to wynikiem niewinnych zdawałoby się związków w nierówności (7), która - jak to niekiedy bywa w przypadku równań i nierówności funkcyjnych -

[4]Tu i w dalszym ciągu odwołuję się do numerów podanych w Autoreferacie, wersja polskojęzyczna.

[5]Por. notkę [3] na poprzedniej stronie

pociąga znaczące skutki dla funkcji F. Okazuje się ona być kwadratowa, a nawet silnie t-afiniczna, jeśli założymy, że funkcje F-wypukłe są sumami pewnej funkcji wypukłej i F. Dowody tych faktów są raczej oczywiste, a na uwagę zasługuje fakt wprowadzenia funkcji $\hat{F}$ wzorem $\hat{F}(x) = \max\{F(x), F(-x)\}$ dla $x \neq 0$ i $\hat{F}(0) = 0$. Okazuje się, że wyniki Habilitanta są analogiczne do tych uzyskanych w [54] dla funkcji $x \longrightarrow c\|x\|^2$. W szczególności F-wypukła funkcja f jest postaci $g + F$, gdzie g jest pewną funkcją wypukłą, wtedy i tylko wtedy, gdy $\hat{F}$ spełnia równanie funkcjonałów kwadratowych. W Autoreferacie wynik ten jest sformułowany dla funkcji F, o której wszelako zakłada się, że jest parzysta i znika w 0 (por. Wnioski 99 i 100 na str. 35 Autoreferatu). Dokładniej, we Wniosku 99 mowa jest o równoważności postaci Jensenowsko F- wypukłej funkcji f i spełnianiu przez F równania funkcjonałów kwadratowych, a we Wniosku 100 postać F-wypukłej funkcji f jest równoważna tzw. F-afiniczności funkcji F, czyli spełnianiu przez nią równania (24). Ponieważ w pracach przedstawionych jako osiągnięcie nigdzie nie jest napisane, że kwadratowość F jest równoważna F-afiniczności, Autor dowodzi tego faktu na str. 35 i 36 Autoreferatu. W szczególności wyniki [H1] uogólniają charakteryzację przestrzeni unitarnych, uzyskaną w [54].

Po uzyskaniu obiecujących rezultatów dotyczących F-wypukłości, dr Adamek poszedł „za ciosem" i rozwijał kolejne wątki istniejące w teorii funkcji wypukłych (Jensenowsko wypukłych), starając się je przenieść na przypadek funkcji F-wypukłych. I tak w pracy [H7] rozważane są kwestie regularności funkcji F-wypukłych oraz porównania z innymi rodzajami „wypukłości", znanymi w literaturze. Nie ukrywa, że pewne zagadnienia pozostają otwarte (por. str. $17^{9,10}$). Wniosek 37 orzeka, że nie istnieje funkcja F-wypukła, jeśli $\liminf_{x\to 0} \frac{F(x)}{x^2} = \infty$. W pracy [H7] Autor ogranicza się do sytuacji $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, za to nie zakłada już nieujemności F. Pokazuje, że w tym przypadku F-wypukłość implikuje ograniczoność z góry $f \leqslant \ell$ przez pewną funkcję kwadratową ℓ postaci $\ell(x) = \gamma x^2 + ax + b$, której wykres przechodzi przez punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$, gdzie $x_1, x_2 \in I$ ($f : I \longrightarrow \mathbb{R}$) i $x_1 \neq x_2$. Ponadto $\gamma = \frac{F(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2}$. Ponadto, jeśli $F(0) \leqslant 0$, to powyższy warunek wymusza F-wypukłość f. Nie rozumiem tu wymagania, że $F(0) \leqslant 0$, które według Stwierdzenia 22 jest skutkiem F-wypukłości. Nawiasem mówiąc, również Stwierdzenie 23 zostało zacytowane błędnie, ponieważ w pracy [H4] wyraźnie jest napisane, że $F(0) = 0$. Z kolei, jeśli w [H1] zakłada się, że $F(x) \geqslant 0$, to musiałoby być $F(0) = 0$. Prawda jest nieco inna: po pierwsze, p. dr Mirosław Adamek nie wspomina o tym, że w tzw. międzyczasie zmienił przeciwdziedzinę F na $\mathbb{R}$. Po drugie, w istocie powinno być $F(0) = 0$ na str. 14^6 (por. [H4]). Takich „usterek" w Autoreferacie jest niestety więcej, co świadczyć może o pośpiesznym przygotowaniu tego najważniejszego

dokumentu we Wniosku.

W pracy [H4] dr Mirosław Adamek porusza kilka zagdanień. Zajmuje się kwestią podparć[6] Wyniki dotyczą funkcji f określonych na przedziale rzeczywistym i F-wypukłych; są one takie jak można się spodziewać (por. Twierdzenie 45 czy Wniosek 47). Podane są również przykłady, że istnienie odpowiednich podparć nie gwarantuje F-wypukłości.

Kolejnym zagadnieniem poruszanym w pracy [H4] są tzw. *nierówności typu Jensena* czyli - w przypadku funkcji wypukłej f - nierówności (4), a w przypadku funkcji F-wypukłych nierówności typu

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} t_i \hat{F}\left(x_i - \sum_{j=1}^{n} t_j x_j\right).$$

W dowodach Autor wykorzystuje wyniki o podparciach. Również w [H4] znajdziemy całkowe wersje nierówności typu Jensena (Twierdzenie 64), a wreszcie wersje operatorowe (Twierdzenie 69, Wniosek 70 oraz następujące po nich Uwagi).

Kolejną tematyką, niezwykle intensywnie rozwijaną przez matematyków, są tzw. nierówności typu Hermite'a-Hadamarda. W Annales Mathematicae Silesianae niemal co tydzień wpływają składane do publikacji prace poświęcone tej tematyce. Dla funkcji wypukłych klasyczne nierówności Hermite'a-Hadamarda to nierówności postaci (2). W [45] N. Merentes i K. Nikodem udowodnili wersję (3) dla funkcji silnie wypukłych z modułem $c > 0$. P. dr Mirosław Adamek dowodzi w pracy [H6] analogonu dla funkcji F-wypukłych (Twierdzenie 53). Dla nieujemnych funkcji F Autor dowodzi Wniosku 55. Przeprowadza też dyskusję założeń i potencjalnych zastosowań (Uwagi 54, 56, 57). Rozdział 4. kończy Twierdzenie 58, w którym podaje się nierówność (19).

Rozdział 6 Autoreferatu poświęcony jest analogonom bardzo ważnych w przypadku funkcji wypukłych twierdzeń typu Bernsteina-Doetscha. Rozdział ten zawiera wyniki z pracy [H3]. Tak jak w klasycznym przypadku, uzyskuje się implikacje typu „f, która jest F-wypukła w sensie Jensena i lokalnie ograniczona z góry, jest już F-wypukła." Oczywiście takie stwierdzenie nie oddaje w żadnej mierze trudności dowodowych.

Wreszcie Rozdział 8 zatytułowany „Uogólnione twierdzenia kanapkowe" - dotyczy on wyników pochodzących z pracy [H2]. Tu zamiast F-wypukłości,

[6]Nawiasem mówiąc w Rozdziale 1, chyba przez nieuwagę, Autor pisze, że *f jest podpierana w punkcie x_0 przez funkcję p wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = p(x_0)$ oraz $f \leqslant p$.*

pojawia się *wypukłość z kontrolną funkcją* G, opisaną wyżej. Pojawia się też pojęcie funkcji G-afinicznej, czyli funkcji $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, spełniającej równość

$$\bigwedge_{t\in[0,1]} \bigwedge_{x,y\in I} (f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) + G(t,x,y)).$$

Twierdzenie 102 podaje strukturę rodziny $\mathcal{F}$ wszystkich funkcji G-afinicznych. Twierdzenia 113 (114) podają warunki wystarczające i konieczne na to, by między dwie funkcje f i g spełniające warunek (26) można było „wstawić" G-afiniczną funkcję h (między funkcje spełniające warunek (26) i

$$\bigwedge_{t\in[0,1]} \bigwedge_{x,y\in I} (g(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y) + G(t,x,y))$$

można było „wstawić" funkcję G-afiniczną).

Podsumowując, uważam, że przedstawione prace stanowią monografię funkcji F-wypukłych, podając interesujące warunki ich istnienia, związki z dotychczas znanymi funkcjami wypukłymi w rozmaitych sensach, a także uogólniając wiele spośród znanych już twierdzeń na przypadek funkcji F-wypukłych. Wydaje się, że dotychczas jest to najdalej idące uogólnienie zwykłej wypukłości, co więcej - ponieważ geneza związana jest z optymalizacją i sterowaniem, niewykluczone, że wyniki te znajdą zastosowanie w cytowanych dziedzinach. Może nie jest to kamień milowy w rozwoju matematyki, ale z pewnością wyniki p. dr. Mirosława Adamka rzucają nowe światło na szereg otrzymywanych dotychczas rezultatów. Jak sądzę, p. dr Adamek jest już ekspertem w dziedzinie odwzorowań F-wypukłych i ponieważ - jak sam zauważa - nie wszystkie pytania uzyskały odpowiedzi, będzie dążył do wyjaśnienia wszelkich wątpliwości.

Omówienie pozostałego dorobku

Oprócz prac stanowiących osiągnięcie habilitacyjne, w skład dorobku dr. Adamka wchodzi jeszcze 10 prac napisanych wcześniej lub równolegle. Należy zauważyć, że w karierze naukowej p. dr. M. Adamka można zaobserwować okresy stabilności publikacyjnej (tym eufemizmem określam całkowity brak publikacji w danych latach) na przemian z okresami wzmożenia publikacyjnego. Ostatnio p. dr Adamek publikuje znacznie więcej, nie znam przyczyn takiego stanu rzeczy, ale po prostu taka jest moja obserwacja i wnioski płynące z dostarczonej dokumentacji. Jedną z prac opublikowanych niedawno, która nie znalazła się w zestawie habilitacyjnym, mimo że tytuł sugeruje bliski związek z pracami [H1] - [H7], jest praca [P9]. Być może p. dr Adamek nie włączył jej do osiągnięcia, ponieważ ukazała się w piśmie, którego nie

potrafiłem odnaleźć na liście MEiN. Niemniej praca ta jest recenzowana i omawiana w MR. Porusza się tam zupełnie nową tematykę funkcji nazywanych *quasi-arithmetic F-convex functions* i traktuje o funkcjach spełniających nierówność (28). Głównym wynikiem jest Twierdzenie 118, analogiczne do wyników pracy [H1].

Ponadto Habilitant dużą uwagę poświęcał w szeregu prac warunkom charakteryzującym przetrzenie unitarne ([P8]) oraz uogólnieniom pojęcia wypukłości (λ-wypukłość, wypukłość w sensie Wrighta) - są to prace [P2], [P3] i [P4]. Wyniki w nich zawarte są poprawne. Pragnę zwrócić na współpracę dr. Adamka z uznanymi matematykami zagranicznymi, Zs. Pálesem i A. Gilányim. O współpracy z K. Nikodemem nie wspominam - dr Adamek jest zatrudniony w Bielsku-Białej i należy do zespołu kierowanego przez prof. Nikodema.

Ogólna uwaga. Niestety, w Autoreferacie zauważyłem bardzo wiele literówek, co może świadczyć o roztargnieniu Habilitanta. Literówki występują też w publikacjach, a więc artykułach, które już się ukazały. Oczywiście nie ma to znaczenia dla poprawności i prawdziwości wyników (zwłaszcza jeśli czytelnik wie, o co Autorowi chodziło - por. przypis [6] na str. 5), ale jest raczej męczące.

Pozostałe kryteria

Zazwyczaj w tym miejscu pisze się o działalności społecznej, popularyzatorskiej i dydaktycznej. P. dr Mirosław Adamek przedstawił dokumenty świadczące o jego udziale w wielu międzynarodowych konferencjach. Zazwyczaj wygłaszal odczyty na temat wyników wlasnych badań. W kilku był współorganizatorem, a w jednej (45th ISFE) pelnił funkcję sekretarza.

Dr. Adamek jest też aktywnym uczestnikiem seminariów naukowych w Bielsku-Białej (52 odczyty), Katowicach (w sumie 5 odczytów na dwóch seminariach), Debreczynie (1 odczyt), Łodzi (1 odczyt na Politechnice Łódzkiej) i Bydgoszczy (1 odczyt). Habilitant przebywał też w Uniwersytecie w Debreczynie w 2005 r.

Habilitant był dwukrotnie nagradzany przez Rektora Akademii Techniczno-Humanistycznej.

Jest cenionym dydaktykiem ATH, wykładał też w Wyższej Szkole Finansów i Prawa. W ankietach studenckich jest oceniany wysoko.

Udziela się jako popularyzator nauki podczas Dni Otwartych, Festiwali Nauki i Sztuki oraz wykładów w szkołach średnich.

Konkluzja

Długo walczyłem z wątpliwościami, w moim przekonaniu osiągnięcie nie jest mocne, raczej plasuje się w *dolnych rejonach stanów średnich.* Niemniej, bio-

rąc pod uwagę wzmiankowane już „wzmożenie" aktywności w ostatnich latach proponuję konkluzję pozytywną dla p. dr. Mirosława Adamka. Uważam, że **dorobek naukowy, dydaktyczny i organizacyjny habilitanta spełnia wymagania ustawowe. Popieram wniosek p. dr. Mirosława Adamka o nadanie mu stopnia doktora habilitowanego.**

Maciej Sablik