

Autoreferat

I. Imię i nazwisko: Tomasz Filipczak

II. Posiadane stopnie i tytuły naukowe:

- 1983 - Dyplom magistra matematyki (z wyróżnieniem) uzyskany na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego. Tytuł pracy magisterskiej: " $\mathcal{A}$ -rodziny i uogólniona własność Baire'a". Promotor: dr hab. Władysław Wilczyński.
- 1987 - Stopień doktora nauk matematycznych w zakresie matematyki uzyskany na Wydziale Matematyki, Fizyki i Chemii Uniwersytetu Łódzkiego. Tytuł rozprawy doktorskiej: "O pewnych przykładach abstrakcyjnych topologii gęstości". Promotor: prof. dr hab. Władysław Wilczyński.

III. Zatrudnienie w jednostkach naukowych:

- Uniwersytet Łódzki (Instytut Matematyki, Wydział Matematyki)
 - asystent stażysta: 1.12.1982 r. – 30.11.1983 r.,
 - asystent: 1.12.1983 r. – 30.11.1986 r.,
 - starszy asystent: 1.12.1986 r. – 28.02.1988 r.,
 - adiunkt: 1.03.1988 r. – 30.09.2000 r.
- Politechnika Łódzka (Instytut Matematyki)
 - adiunkt: od 1.10.2000 r.

IV. Osiągnięcie naukowe w rozumieniu art. 16 ust. 2 Ustawy z dnia 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki.

Cykl siedmiu powiązanych tematycznie publikacji pod tytułem:

Wybrane własności struktur mierzalnych: otoczki mierzalne, sumy algebraiczne, uogólnione punkty gęstości

Cykl składa się z prac:

- [H1] Tomasz Filipczak, *The comparison of f -density and ψ -density*, w: *Real Functions, Density Topology and Related Topics*, Łódź University Press 2011, 23–28.
- [H2] Marek Balcerzak, Tomasz Filipczak, *On monotone hull operations*, *Math. Logic Quarterly* **57** (2011), 186–193.
- [H3] Małgorzata Filipczak, Tomasz Filipczak, *On Δ_2 condition for density-type topologies generated by functions*, *Topology Appl.* **159** (2012), 1838–1846.
- [H4] Tomasz Filipczak, Andrzej Rosłanowski, Saharon Shelah, *On Borel hull operations*, *Real Anal. Exchange* **40** (2014-15), 129–140.
- [H5] Małgorzata Filipczak, Tomasz Filipczak, Grażyna Horbaczewska, Władysław Wilczyński, *Remarks on exceptional points and differentiation bases*, *Acta Math. Hungar.* **148** (2016), 370–385.
- [H6] Małgorzata Filipczak, Tomasz Filipczak, *Some algebraic properties of finite binary sequences*, *Tatra Mt. Math. Publ.* **65** (2016), 93–104.
- [H7] Artur Bartoszewicz, Małgorzata Filipczak, Tomasz Filipczak, *On supports of probability Bernoulli-like measures*, *J. Math. Anal. Appl.* **462** (2018), 26–35.

Poniżej znajduje się omówienie celu naukowego wyżej wymienionych prac i osiągniętych wyników. W całym autoreferacie powyższe prace są cytowane jako [H1] - [H7], moje pozostałe prace - jako [P1] - [P25] (spis na str. 19), a prace innych autorów - jako [1] - [115] (spis na końcu autoreferatu). Dokonałem transliteracji rosyjskich nazwisk i tytułów pisanych cyrylicą.

1. WSTĘP

Precyzyjne pojęcie mierzalności pojawiło się w matematyce stosunkowo niedawno. Pod koniec XIX wieku ukazały się prace C. Jordana i G. Peano dotyczące skończenie addytywnej

miary nazywanej współcześnie miarą Jordana. W roku 1905 G. Vitali udowodnił, że nie istnieje niezerowa miara (przeliczalnie addytywna) określona dla wszystkich podzbiorów prostej, która jest niezmiennicza na przesunięcia i skończona na zbiorach ograniczonych ([102]). Oznacza to, że dla każdej "sensownej" miary na prostej, istnieje zbiór, którego nie potrafi ona zmierzyć - zbiór niemierzalny. Zbiory niemierzalne mają często patologiczne własności. Z tego powodu wiele rozważań ograniczamy do zbiorów mierzalnych.

Struktury mierzalne pojawiły się w związku z problemami dotyczącymi teorii miary. Współczesne badania nad nimi wykraczają jednak poza klasyczną teorię miary. Korzystają one z narzędzi teorii mnogości, topologii, a także algebry. Te trzy kierunki badań - teoriomnogociowy, topologiczny i algebraiczny - występują w pracach składających się na osiągnięcie. Interesujące wyniki dostajemy często dzięki połączeniu tych metod.

Szczególne miejsce w badaniu struktur mierzalnych zajmuje kwestia związku między zbiorami miary zero, a zbiorami pierwszej kategorii, lub ogólniej, między mierzalnością w sensie Lebesgue'a, a własnością Baire'a. W. Sierpiński udowodnił, że przy założeniu hipotezy continuum, istnieje taka wzajemnie jednoznaczna funkcja f z prostej na prostą, która przeprowadza rodzinę zbiorów miary zero na rodzinę zbiorów pierwszej kategorii ([89]). P. Erdős wykazał, że można dodatkowo zażądać, by $f = f^{-1}$ ([34]). Przegląd podobieństw i różnic między miarą Lebesgue'a, a kategorią Baire'a zawiera książka J. C. Oxtoby'ego [76]. Zagadnienia te są nadal badane przez matematyków (porównaj [22, rozdział 7]).

Prace [H2] i [H4] wpisują się w opisany wyżej nurt badań. Zostały one zainspirowane wynikami zawartymi w artykule M. Elekesa i A. Máthé [33] oraz postawionymi tam problemami. Praca [33] dotyczyła istnienia monotonicznego operatora borelowskiej otoczki na rodzinie zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a i na rodzinie zbiorów miary zero. W [H2] rozszerzamy te wyniki na abstrakcyjne σ -ciała i σ -ideały oraz stosujemy otrzymane twierdzenia do σ -ciała zbiorów mających własność Baire'a i σ -ideału zbiorów pierwszej kategorii na prostej. W [H4] badamy istnienie niezmienniczych na przesunięcia operatorów borelowskiej otoczki dla σ -ideału zbiorów miary zero oraz σ -ideału zbiorów pierwszej kategorii. W rozważaniach istotną rolę grają własności algebraiczne prostej - istnienie podgrupy należącej do jednego ideału, a nie należącej do drugiego. W obu pracach, istnienie operatorów otoczki jest, na ogół, uzależnione od dodatkowych założeń teoriomnogociowych.

Badania dotyczące borelowskich otoczek były kontynuowane przez A. Rosłanowskiego i S. Shelaha w [86] i [87]. Pokazali oni (w ZFC), że istnieje podgrupa prostej, która jest miary zero i drugiej kategorii, i w konsekwencji nie istnieje niezmienniczy na przesunięcia operator borelowskiej otoczki na ideałach zbiorów miary zero.

W roku 1920 H. Steinhaus udowodnił, że dla dowolnego podzbioru prostej miary dodatniej, jego różnica algebraiczna $A - A$ jest otoczeniem zera ([93]). Naturalne uogólnienie tego twierdzenia polega na zastąpieniu miary Lebesgue'a na prostej miarą Haara w lokalnie zwartej grupie topologicznej, a z drugiej strony, zastąpieniu zbioru $A - A$ zbiorem $A - B$ ([94], [17]). Z kolei, zastępując zbiory mierzalne i zbiory miary zero, zbiorami o własności Baire'a i zbiorami pierwszej kategorii, dostajemy twierdzenie Piccard i jego uogólnienia ([79], [66], [78], [32], [106]). Lemat Smitała ([56], [55]) mówi, że jeżeli A jest zbiorem miary dodatniej na prostej, natomiast D jest zbiorem gęstym, to zbiór $A + D$ jest pełnej miary Lebesgue'a. W pracy [14] zostały zdefiniowane własności Steinhausa i Smitała dla pary złożonej z ciała $\mathcal{S}$ oraz ideału $\mathcal{I}$ podzbiorów grupy topologicznej. Były też badane związki między różnymi wersjami tych własności, związanych z różnymi uogólnieniami twierdzenia Steinhausa i lematu Smitała.¹

¹Para $(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ ma własność Steinhausa (własność Smitała), jeżeli zachodzi dla niej teza odpowiedniej wersji twierdzenia Steinhausa (lematu Smitała).

W pracy [H7] definiujemy i badamy własności Steinhausa i Smitała dla σ -skończonych miar borelowskich w lokalnie zwartej polskiej grupie abelowej X . Jako wnioski dostajemy twierdzenia charakteryzujące σ -skończone miary borelowskie na X . Bardziej szczegółowo zajmujemy się, określonymi na $[0, 1]$ miarami probabilistycznymi, generowanymi przez miary Bernoulliego. Główne twierdzenie jest poświęcone nośnikom tych miar. Jego dowód jest oparty na twierdzeniu z [H6], dotyczącym algebraicznych sum i różnic podzbiorów grupy reszt modulo 2^m . Wyniki te, zarówno dla przedziału $[0, 1]$, jak i w przypadku dyskretnym, dostajemy badając gęstość jedynek w rozwinięciach dwójkowych liczb z rozważanych zbiorów.

Tematyka związana z twierdzeniem Steinhausa pojawia się w wielu pracach. Wśród najnowszych wyników warto wymienić obszerne artykuły N. H. Bingham i A. J. Ostaszewskiego [19], [20], [75]. Należy też wspomnieć o wykorzystaniu twierdzenia Steinhausa i lematu Smitała w badaniach dotyczących równań i nierówności funkcyjnych (patrz [55]).

Mówimy, że x jest punktem gęstości zbioru mierzalnego A (na prostej), jeżeli średnia miara $\frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h}$ dąży do 1, gdy h dąży do 0. Prawie każdy punkt zbioru mierzalnego jest jego punktem gęstości. Ten dość zaskakujący fakt nosi nazwę twierdzenia Lebesgue'a o punktach gęstości. Twierdzenie to jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Lebesgue'a o różniczkowaniu całki, które zostało udowodnione przez H. Lebesgue'a w roku 1904 ([59]). Oznaczmy przez $\Phi_d(A)$ zbiór punktów gęstości zbioru A . Rodzina $\mathcal{T}_d$ złożona z takich zbiorów mierzalnych A , że $A \subset \Phi_d(A)$, jest topologią nazywaną topologią gęstości. Została ona po raz pierwszy zdefiniowana w pracy O. Haupta i Ch. Pauca [45]. Zainteresowanie topologią gęstości i jej badanie datuje się jednak dopiero od prac C. Goffmana, C. J. Neugebauera i T. Nishiury [40] oraz C. Goffmana i D. Watermana [41]. Pojęcia punktu gęstości i topologii gęstości są ściśle związane z aproksymatywną ciągłością, grającą ważną rolę w wielu zagadnieniach analizy rzeczywistej. Pojęcia te doczekały się licznych uogólnień. Można tu wymienić topologie zdefiniowane w pracach [72], [73], [P1], [P3], [111], [82], [110], [42], [44] i [65]. Osobny rodzaj uogólnień punktu gęstości i topologii gęstości stanowią ich kategoryjne odpowiedniki, czyli takie, w których zbiory mierzalne w sensie Lebesgue'a i zbiory miary zero są zastępowane zbiorami o własności Baire'a i zbiorami pierwszej kategorii. Badania dotyczące topologii gęstości i jej uogólnień, szczególnie związanych z kategorią Baire'a, są od wielu lat prowadzone w ośrodku łódzkim przez W. Wilczyńskiego i współpracowników. Zostały one zapoczątkowane artykułami [107] i [80]. Daleko idącym uogólnieniem topologii gęstości jest abstrakcyjna topologia gęstości rozważana w książce [61] i pracach [112], [47], [48]. Dobrze wprowadzenie w tę tematykę stanowi rozdział W. Wilczyńskiego [109] z monografii Handbook of Measure Theory [77].

Zastępując, w definicji punktu gęstości, warunek $\frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h} \rightarrow 1$ przez $\frac{\lambda([x, x+h] \setminus A)}{f(h)} \rightarrow 0$ i $\frac{\lambda([x-h, x] \setminus A)}{f(h)} \rightarrow 0$, dostajemy definicję punktu f -gęstości (f jest ustaloną "sensowną" funkcją). Postępując tak jak w przypadku topologii gęstości, definiujemy topologię f -gęstości $\mathcal{T}_f$. Pojęcia punktu f -gęstości i topologii f -gęstości zostały wprowadzone w [P13]. Uogólniają one punkt i topologię gęstości, a także ψ -gęstość i $\langle s \rangle$ -gęstość.² Kilka prac z mojego dorobku było poświęconych badaniu topologii f -gęstości. Uzyskane wyniki pokazywały, że topologie f -gęstości istotnie zawarte w topologii gęstości, mają własności takie jak topologie ψ -gęstości. Rodziło to przypuszczenie, że rodziny te są równe. W pracy [H1] pokazujemy, że istnieje topologia f -gęstości mniejsza niż $\mathcal{T}_d$, która nie jest topologią ψ -gęstości. W pracy [H3] zajmujemy się problemem, które topologie f -gęstości są niezmiennicze ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera. Pokazujemy, że zasadniczą rolę gra tu warunek Δ_2 , analogiczny do warunku wykorzystywanego w teorii przestrzeni Orlicza. Z uzyskanych twierdzeń łatwo wynika, że istnieje topologia f -gęstości zawierająca $\mathcal{T}_d$, która nie jest topologią $\langle s \rangle$ -gęstości.

²Definicje tych pojęć pojawiają się w rozdziale 4.

Z twierdzenia Lebesgue’a o punktach gęstości wynika, że dla dowolnego zbioru mierzalnego A , prawie każdy punkt prostej jest punktem gęstości zbioru A lub jego dopełnienia. Z drugiej strony, dla każdego nietrywialnego zbioru mierzalnego³, istnieje punkt, który nie jest punktem gęstości tego zbioru, ani jego dopełnienia. Nazywamy go punktem wyjątkowym. Pierwsze wyniki dotyczące punktów wyjątkowych pochodzą z pracy V. I. Kol’jady [53]. W [95] A. Szenes zainteresował się tym "jak bardzo wyjątkowe" są punkty nietrywialnego zbioru mierzalnego. Granice dolna i górna ilorazu $\frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h}$ są nazywane gęstością dolną i górną zbioru A w punkcie x . A. Szenes pytał, jaki jest kres górny $\delta_{\mathcal{H}}$ takich liczb δ , że dla każdego nietrywialnego zbioru mierzalnego A , istnieje punkt, w którym gęstość dolna i gęstość górna zbioru A należą do przedziału $[\delta, 1 - \delta]$. W swojej pracy wskazał metodę szacowania $\delta_{\mathcal{H}}$, polegającą na badaniu skończonych sum przedziałów otwartych, zwanych konfiguracjami, a także oszacował $\delta_{\mathcal{H}}$ z góry i z dołu. Szacowania te zostały poprawione w [28], a problem rozwiązał O. Kurka w [58].

W cytowanych pracach liczba $\delta_{\mathcal{H}}$ była traktowana jako uniwersalna stała związana z operatorem gęstości Φ_d . Punktem wyjścia pracy [H5] jest spostrzeżenie, że stała ta jest raczej związana z bazą różniczkowania, przy pomocy której definiujemy operator gęstości. Stałą $\delta_{\mathcal{H}}$ dostajemy korzystając z bazy różniczkowania, która składa się ze wszystkich przedziałów o środku w x dla $x \in \mathbb{R}$. W pracy [H5] badamy, analogicznie zdefiniowaną, stałą $\delta_{\mathcal{B}}$ dla dwóch rodzajów baz różniczkowania $\mathcal{B}$. Dla bazy różniczkowania złożonej z przedziałów niesymetrycznych względem x (o ustalonej proporcji) dostajemy kilka prostych oszacowań. Ciekawsze wyniki dotyczą baz różniczkowania złożonych z przedziałów o środku w x , których promienie są wyrazami ustalonego, nierosnącego i zbieżnego do zera ciągu $\langle s \rangle$. W tym przypadku udało się uzyskać, dość trudny w dowodzie, odpowiednik twierdzenia Szenesa. Przy szacowaniu $\delta_{\mathcal{B}}$, możemy więc ograniczyć rozważania do badania konfiguracji. Stosując to twierdzenie, uzyskaliśmy (w przygotowanej do druku pracy [P25]) oszacowanie stałej $\delta_{\mathcal{B}}$ dla baz różniczkowania generowanych przez ciągi.

Literatura nawiązująca do twierdzenia Lebesgue’a o punktach gęstości jest bardzo obszerna i daleko wykracza poza cytowane wyżej prace. W ostatnim czasie pojawiły się artykuły proponujące inne podejście do tego tematu - przenoszące rozważania na grunt deskryptywnej teorii mnogości ([1], [2], [3], [69]). Uogólnienia rozważane w tych pracach dotyczą zarówno pojęcia punktu gęstości jak i pojęcia punktu wyjątkowego.

Prace wchodzące w skład **osiągnięcia** mają dość szeroką tematykę. Centralnym punktem tego cyklu są prace [H2] i [H4] dotyczące mierzalnych otoczek. Spotykają się tu tematy poruszane w pozostałych pracach. Mononicznymi operatorami mierzalnej otoczki dla ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue’a i ciała zbiorów o własności Baire’a są operatory domknięcia w topologii gęstości i jej kategoryjnym odpowiedniku (nie są to jednak operatory borelowskiej otoczki). Z kolei, kluczowym punktem dowodu nieistnienia operatora przesuwalnej otoczki, jest spostrzeżenie, że rozważana para (ciało, ideał) ma własność Steinhausa.

W kolejnych rozdziałach omówię mój dorobek naukowy. Twierdzenia z prac, których jestem autorem lub współautorem są numerowane w każdym rozdziale osobno. Szczególnie istotne twierdzenia z prac innych autorów są oznaczone symbolem $\blacklozenge$. Dotyczy to również twierdzeń z [H4] udowodnionych przez współautorów tej pracy.

W całym autoreferacie będziemy stosować poniższe oznaczenia.

Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru X oznaczamy $\mathcal{P}(X)$, jego moc $|X|$; dopełnienie zbioru $A \subset X$ oznaczamy A^c , a jego funkcję charakterystyczną (indykator) χ_A . Zbiór liczb rzeczywistych oznaczamy przez $\mathbb{R}$, a zbiór liczb naturalnych $\{1, 2, 3, \dots\}$ przez $\mathbb{N}$. Jeżeli $A, B \subset \mathbb{R}$ i $x \in \mathbb{R}$, to przyjmujemy $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$, $A + x := \{a + x : a \in A\}$

³Zbiór nie jest ani miary zero, ani miary pełnej.

oraz $xA := \{xa : a \in A\}$. Analogiczne oznaczenia (dla dodawania) stosujemy w grupie adytywnej. Miarę Lebesgue'a na prostej oznaczamy przez λ , rodzinę zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a przez $\mathcal{L}$, a rodzinę zbiorów miary zero przez $\mathcal{N}$. Topologię naturalną na prostej oznaczamy $\mathcal{T}_{\text{nat}}$. Jeżeli X jest przestrzenią topologiczną, to rodziny zbiorów otwartych, domkniętych, borelowskich, o własności Baire'a i pierwszej kategorii oznaczamy: $\mathcal{G}_X$, $\mathcal{F}_X$, $\mathcal{B}_X$, $\mathcal{Ba}_X$ i $\mathcal{M}_X$ (opuszczamy indeks, jeśli przestrzeń jest ustalona). Niech X będzie zbiorem niepustym, $\mathcal{S}$ - σ -ciałem podzbiorów X oraz $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ - σ -ideałem. Jeżeli $A, B \in \mathcal{S}$ oraz $A \triangle B \in \mathcal{I}$, to piszemy $A \sim_{\mathcal{I}} B$ ($A \sim B$, jeśli $\mathcal{I} = \mathcal{N}$). Funkcję $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{P}(X)$ nazywamy *operatorem dolnej gęstości* w $(X, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, jeżeli dla dowolnych $A, B \in \mathcal{S}$ zachodzą warunki:

- (1) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$ i $\Phi(X) = X$,
- (2) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$,
- (3) jeżeli $A \sim_{\mathcal{I}} B$, to $\Phi(A) = \Phi(B)$,
- (4) $A \sim_{\mathcal{I}} \Phi(A)$.

Z (4) wynika, że $\Phi(A) \in \mathcal{S}$ dla $A \in \mathcal{S}$.

2. OTOCZKI MIERZALNE

Omówimy wyniki zawarte w pracy [H2] napisanej wspólnie z Markiem Balcerzakiem i pracy [H4] napisanej wspólnie z Andrzejem Rosłanowskim i Saharonem Shelahem.

Niech X będzie zbiorem niepustym, $\mathcal{S}$ - σ -ciałem podzbiorów X oraz $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ - σ -ideałem. Mówimy, że zbiór H jest *otoczką* zbioru A względem $(X, \mathcal{S}, \mathcal{I})$, jeżeli $A \subset H$, $H \in \mathcal{S}$ oraz $H \setminus G \in \mathcal{I}$ dla dowolnego zbioru G , takiego że $A \subset G$ i $G \in \mathcal{S}$. Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ i $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$. Funkcję $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$ nazywamy *operatorem $\mathcal{H}$ -otoczki na $\mathcal{A}$* , jeżeli $\varphi(A)$ jest otoczką A dla wszystkich $A \in \mathcal{A}$. Jeżeli dodatkowo $\varphi(A) \subset \varphi(B)$, gdy $A \subset B$, to operator $\mathcal{H}$ -otoczki nazywamy *monotonicznym*. Jeżeli rodzina $\mathcal{H}$ jest zawarta w rodzinie zbiorów borelowskich w przestrzeni topologicznej X ($\mathcal{H} \subset \mathcal{B}_X$), to operator $\mathcal{H}$ -otoczki nazywamy *operatorem borelowskiej otoczki*.

Istnieje, oczywiście, operator $\mathcal{G}_\delta$ -otoczki na $\mathcal{L}$ (względem $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathcal{N})$) oraz operator $\mathcal{F}_\sigma$ -otoczki na $\mathcal{Ba}$ (względem $(\mathbb{R}, \mathcal{Ba}, \mathcal{M})$). W pracy [33] M. Elekes i A. Máthé badali istnienie monotonicznych operatorów $\mathcal{G}_\delta$ -otoczki ($\mathcal{B}$ -otoczki) na $\mathcal{L}$ i na $\mathcal{N}$.⁴ Pytali też o odpowiedniki udowodnionych twierdzeń dla przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{Ba}, \mathcal{M})$. W [H2] odpowiadamy na to pytanie. Część wyników z [33] przenosimy na abstrakcyjne przestrzenie $(X, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ i stosujemy do badania istnienia monotonicznych operatorów borelowskiej otoczki na $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ i $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Niech $\mathcal{I}$ będzie właściwym ideałem podzbiorów X . Rodzinę $\mathcal{D} \subset \mathcal{I}$ nazywamy *bazą $\mathcal{I}$* , jeżeli dla dowolnego $A \in \mathcal{I}$ istnieje $B \in \mathcal{D}$, taki że $A \subset B$. Rozważamy następujące współczynniki kardynalne ideału $\mathcal{I}$ (porównaj [22] i [16]):

$$\begin{aligned} \text{add}(\mathcal{I}) &:= \min \left\{ |\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{F} \notin \mathcal{I} \right\}, \\ \text{cof}(\mathcal{I}) &:= \min \{ |\mathcal{F}| : \mathcal{F} \text{ jest bazą } \mathcal{I} \}, \\ \text{cov}(\mathcal{I}) &:= \min \left\{ |\mathcal{F}| : \mathcal{F} \subset \mathcal{I}, \bigcup \mathcal{F} = X \right\}, \\ \text{non}(\mathcal{I}) &:= \min \{ |A| : A \subset X, A \notin \mathcal{I} \}. \end{aligned}$$

Dla σ -ideałów $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definiujemy ich *produkt Fubiniego*, przyjmując:

$$\mathcal{I} \otimes \mathcal{J} := \{ A \subset \mathbb{R}^2 : \exists B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} (A \subset B \text{ i } \{x \in \mathbb{R} : B(x) \notin \mathcal{J}\} \in \mathcal{I}) \},$$

gdzie $B(x) = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in B\}$ jest cięciem zbioru B elementem x . Jeżeli $\mathcal{S}$ jest σ -ciałem, zaś $\mathcal{I}$ jest σ -ideałem podzbiorów X , to rodzina

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}} := \mathcal{S} \triangle \mathcal{I} := \{A \triangle I : A \in \mathcal{S}, I \in \mathcal{I}\}$$

⁴Wyniki w [33] są sformułowane dla przedziału $[0, 1]$, ale przenoszą się na $\mathbb{R}$.

jest najmniejszym σ -ciałem zawierającym $\mathcal{S} \cup \mathcal{I}$. Mamy oczywiście $\mathcal{L} = \mathcal{B}_{\mathcal{N}} = \mathcal{B} \triangle \mathcal{N}$ i $\mathcal{B}_a = \mathcal{B}_{\mathcal{M}} = \mathcal{B} \triangle \mathcal{M}$. W pracy [H2] rozważamy σ -ideały $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ i $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ oraz odpowiadające im σ -ciała $\mathcal{B}_{\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ (porównaj [67] i [10]).

Twierdzenie 2.1 ([H2, Fact 1.3]). (1) *Istnieje monotoniczny operator $\mathcal{B}_a$ -otoczki na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (względem $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_a, \mathcal{M})$).*
 (2) *Założmy, że $\mathcal{I} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ lub $\mathcal{I} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$. Istnieje monotoniczny operator $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ -otoczki na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ (względem $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{I}}, \mathcal{I})$).*

W [33] został udowodniony analogiczny wynik dla $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathcal{N})$. Monotonicznym operatorem $\mathcal{L}$ -otoczki na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ jest operator domknięcia w topologii gęstości $\mathcal{T}_d$. Dla $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{M})$ i $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$ odpowiednimi operatorami są operatory domknięcia w uogólnionych topologiach gęstości rozważanych w [11]. Dla $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_a, \mathcal{M})$ monotonicznym operatorem $\mathcal{B}_a$ -otoczki na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ jest $\varphi(A) := A \cup D(A)$, gdzie

$$D(A) := \{x \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ A \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \notin \mathcal{M}\}$$

(porównaj [57, §10]). Łatwo sprawdzić, że $\varphi(A)$ jest operatorem domknięcia w topologii $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}^* := \{U \setminus M : U \in \mathcal{T}_{\text{nat}}, M \in \mathcal{M}\}$, nazywanej topologią Hashimoto dla kategorii ([44]).

W [33] zostało udowodnione, że istnieje model ZFC, w którym nie ma monotonicznego operatora borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$. W podobny sposób dostajemy negatywne wyniki dla $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ i $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.

Twierdzenie 2.2 ([H2, Theorem 2.2]). *W modelu ZFC otrzymanym przez dodanie ω_2 liczb losowych do modelu spełniającego hipotezę continuum CH nie istnieje monotoniczny operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{M}$.*

Wniosek 2.3 ([H2, Corollary 2.3]). *Rozważmy model ZFC otrzymany przez dodanie ω_2 liczb losowych lub ω_2 liczb Cohena do modelu spełniającego hipotezę continuum CH. W modelu tym nie istnieje monotoniczny operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ ani monotoniczny operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.*

Pozytywny wynik dotyczący istnienia monotonicznych operatorów borelowskiej otoczki na σ -ideałach także opiera się na pomysłach z [33].

Twierdzenie 2.4 ([H2, Proposition 2.4]). *Jeżeli $\mathcal{I}$ jest takim ideałem, że $\text{cof}(\mathcal{I}) = \text{add}(\mathcal{I})$ oraz $\mathcal{H}$ jest bazą $\mathcal{I}$, to istnieje monotoniczny operator $\mathcal{H}$ -otoczki na $\mathcal{I}$.*

Jeżeli $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ są rodzinami zbiorów, to przyjmujemy $\mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} := \{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$.

Wniosek 2.5 ([H2, Corollary 2.5, 2.6]). (1) *Jeżeli $\text{cof}(\mathcal{M}) = \text{add}(\mathcal{M})$, to istnieje monotoniczny operator $\mathcal{F}_{\sigma}$ -otoczki na $\mathcal{M}$.*

(2) *Założmy, że $\mathcal{I} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ lub $\mathcal{I} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ oraz $\text{cof}(\mathcal{I}) = \text{add}(\mathcal{I})$. Istnieje wtedy monotoniczny operator $(\mathcal{F}_{\sigma} \sqcup \mathcal{G}_{\delta})$ -otoczki na $\mathcal{I}$.*

Jeżeli $\mathcal{I}$ ma bazę złożoną ze zbiorów borelowskich, to równość $\text{cof}(\mathcal{I}) = \text{add}(\mathcal{I})$ wynika z hipotezy continuum. W [33] zostało pokazane, że nie istnieje silnie monotoniczny operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$ ($\varphi(A) \subsetneq \varphi(B)$, gdy $A \subsetneq B$). Analiza dowodu wskazuje, że jest to również prawda dla dowolnego ideału zawierającego zbiór mocy continuum, w szczególności dla $\mathcal{M}$, $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ i $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ ([H2, str. 189]).

Główny wynik pracy [H2] dotyczy monotonicznych operatorów otoczki na σ -ciałach. Przez $\mathcal{H}_c$, $\mathcal{H}_{\sigma}$ i $\mathcal{H}_{\delta}$ oznaczamy rodzinę wszystkich dopełnień, przeliczalnych sum i przeliczalnych przekrojów zbiorów z $\mathcal{H}$.

Twierdzenie 2.6 ([H2, Theorem 2.10]). *Niech $\mathcal{H}$ będzie skończenie addytywną i przeliczalnie multiplikatywną rodziną podzbiorów X , taką że $\emptyset \in \mathcal{H}$, $|\mathcal{H}| \leq \aleph_1$ i $\mathcal{H}_c \subset \mathcal{H}_\sigma$ oraz niech $\mathcal{I}$ będzie σ -ideałem podzbiorów X , takim że $\mathcal{S} := \mathcal{H} \triangle \mathcal{I}$ jest σ -ciałem. Jeżeli $\mathcal{I}$ ma bazę zawartą w $\mathcal{H}$, to istnieje monotoniczny operator $\mathcal{H}_{c\delta\sigma}$ -otoczki na $\mathcal{S}$.*

Dla $\mathcal{I} = \mathcal{N}$ i $\mathcal{H} = \mathcal{G}_\delta$ wynika stąd [33, Theorem 3.4 (Remark 3.9)]. Korzystając z twierdzenia 2.6 (lub powtarzając dowód w celu uzyskania lepszej klasy borelowskiej), dostajemy twierdzenia o istnieniu monotonicznego operatora borelowskiej otoczki na $\mathcal{B}_a$, $\mathcal{B}_{\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}}$ i $\mathcal{B}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}$ (przy założeniu hipotezy continuum). Z twierdzenia 2.1 wynika, że jest to równoważne istnieniu takiego operatora, odpowiednio, na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.

Twierdzenie 2.7 ([H2, Theorem 2.13]). (CH) *Istnieje monotoniczny operator $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ -otoczki na $\mathcal{B}_a$ i na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

Twierdzenie 2.8 ([H2, Theorem 2.12]). (CH) *Jeżeli $\mathcal{I} = \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ lub $\mathcal{I} = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$, to istnieje monotoniczny operator $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}$ -otoczki na $\mathcal{B}_{\mathcal{I}}$ i na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$.*

Z powyższych twierdzeń wnioskujemy istnienie monotonicznych operatorów borelowskiej otoczki dla przekrojów rozważanych σ -ciał i σ -ideałów.

Wniosek 2.9 ([H2, str. 192]). (CH)

- (1) *Istnieje monotoniczny operator $\mathcal{F}_{\sigma\delta\sigma}$ -otoczki na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ względem $(\mathbb{R}, \mathcal{L} \cap \mathcal{B}_a, \mathcal{N} \cap \mathcal{M})$.*
- (2) *Istnieje monotoniczny operator $\mathcal{G}_{\delta\sigma\delta\sigma}$ -otoczki na $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ względem $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{M} \cap \mathcal{M} \otimes \mathcal{N})$.*

W [H2] uogólniamy również twierdzenia dotyczące monotonicznych operatorów otoczki na łańcuchach zbiorów. Dowody naśladują te z [33]. Niech $\mathcal{S}$ będzie σ -ciałem, a $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ - σ -ideałem podzbiorów X . Mówimy, że przestrzeń $(X, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ spełnia *warunek przeliczalnego łańcucha (ccc)*, jeżeli każda rozłączna podrodzina rodziny $\mathcal{S} \setminus \mathcal{I}$ jest przeliczalna.

Twierdzenie 2.10 ([H2, Theorem 2.14]). *Założmy, że przestrzeń $(X, \mathcal{S}, \mathcal{I})$ spełnia ccc, rodzina $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$ jest skończenie addytywna, przeliczalnie multiplikatywna i każdy zbiór z $\mathcal{S}$ ma $\mathcal{H}$ -otoczkę. Jeżeli istnieje monotoniczny operator $\mathcal{H}$ -otoczki na $\mathcal{I}$, to dla dowolnego łańcucha $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ istnieje monotoniczny operator $\mathcal{H}$ -otoczki na $\mathcal{C}$.*

Wniosek 2.11 ([H2, Corollary 2.15]). *Założmy, że $\mathcal{I} \in \{\mathcal{M}, \mathcal{N} \otimes \mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}\}$. Jeżeli istnieje monotoniczny operator $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -otoczki na $\mathcal{I}$, to dla dowolnego łańcucha $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$) istnieje monotoniczny operator $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -otoczki na $\mathcal{C}$. W szczególności, jeżeli $\text{cof}(\mathcal{I}) = \text{add}(\mathcal{I})$, to istnieje monotoniczny operator $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -otoczki na $\mathcal{C}$.*

Niech η będzie liczbą porządkową. Indeksowaną rodzinę zbiorów $\{C_\alpha : \alpha < \eta\}$ nazywamy *wstępującą*, jeżeli $C_\alpha \subset C_\beta$, gdy $\alpha < \beta < \eta$.

Twierdzenie 2.12 ([H2, Theorem 2.17]). *Założmy, że $\mathcal{S}$ jest σ -ciałem, $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$ - σ -ideałem, $\eta < \text{add}(\mathcal{I})^+$ oraz rodzina $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha < \eta\} \subset \mathcal{S}$ jest wstępująca. Jeżeli rodzina $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$ jest skończenie addytywna, skończenie multiplikatywna oraz każdy zbiór w $\mathcal{S}$ ma $\mathcal{H}$ -otoczkę, to istnieje monotoniczny operator $\mathcal{H}$ -otoczki na $\mathcal{C}$.*

Wniosek 2.13 ([H2, Corollary 2.18, 2.19]). (1) *Założmy, że $\eta < \text{add}(\mathcal{M})^+$. Dla dowolnej wstępującej rodziny $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha < \eta\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ istnieje monotoniczny operator $\mathcal{F}_\sigma$ -otoczki na $\mathcal{C}$.*

- (2) *Założmy, że $\mathcal{I} \in \{\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}, \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}\}$ oraz $\eta < \text{add}(\mathcal{I})^+$. Dla dowolnej wstępującej rodziny $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha < \eta\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ istnieje monotoniczny operator $(\mathcal{F}_{\sigma\delta} \cap \mathcal{G}_{\delta\sigma})$ -otoczki na $\mathcal{C}$.*

Omówimy teraz wyniki z [H4]. Druga część pracy dotyczy monotonicznych operatorów borelowskiej otoczki względem $(X, \mathcal{B}a, \mathcal{M})$, gdzie X jest przestrzenią polską. Jest ona dziełem współautorów: A. Rosłanowskiego i S. Shelaha. Wspomnę krótko o wynikach, które bezpośrednio nawiązują do [H2]. Główne twierdzenie w tej części pracy jest następujące:

♦ Niech X będzie przestrzenią polską. Istnieje monotoniczny operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje monotoniczny operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{B}a$.⁵

Twierdzenie to daje częściową odpowiedź na pytanie [H2, Question 2.23]. Można też dokładnie określić związek między monotonicznymi operatorami borelowskiej otoczki na $\mathcal{M}$ i na $\mathcal{B}a$.

♦ Niech X będzie przestrzenią polską oraz $2 \leq \xi < \omega$. Jeżeli istnieje monotoniczny operator Σ_ξ^0 -otoczki (Π_ξ^0 -otoczki) na $\mathcal{M}$, to istnieje monotoniczny operator $\Pi_{\xi+1}^0$ -otoczki (Π_ξ^0 -otoczki) na $\mathcal{B}a$.

♦ Niech $X = \mathbb{R}$. Jeżeli $\text{cof}(\mathcal{M}) = \text{add}(\mathcal{M})$, to istnieje monotoniczny operator $\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ -otoczki na $\mathcal{B}a$.

Rodzinę $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ nazywamy *niezmienniczą na przesunięcia*, jeżeli $A + x \in \mathcal{A}$ dla $A \in \mathcal{A}$ i $x \in \mathbb{R}^n$. Załóżmy, że $\mathcal{I}$ jest niezmienniczym na przesunięcia σ -ideałem w $\mathbb{R}^n$. Mówimy, że operator borelowskiej otoczki $\varphi : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{B} \cap \mathcal{I}$ jest *niezmienniczy na przesunięcia*, jeżeli $\varphi(A + x) = \varphi(A) + x$ dla $A \in \mathcal{I}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

W [33] autorzy pytali, czy istnieje monotoniczny i niezmienniczy na przesunięcia operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$. W pierwszej części pracy [H4] pokazujemy, że z pewnych założeń teoriomnogościowych (np. aksjomatu Martina MA) wynika, że nie istnieją niezmiennicze na przesunięcia operatory borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$ i na $\mathcal{M}$ (nawet bez zakładania monotoniczności). Zasadniczą rolę w naszych rozważaniach gra poniższe twierdzenie. Jest ono konsekwencją tego, że pary $(\mathcal{L}, \mathcal{N})$ i $(\mathcal{B}a, \mathcal{M})$ mają własność Steinhaus, tj. dla dowolnych zbiorów $A \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{N}$, $B \notin \mathcal{N}$ (odpowiednio, $A \in \mathcal{B}a \setminus \mathcal{M}$, $B \notin \mathcal{M}$) zbiór $A + B$ ma punkt wewnętrzny.

Twierdzenie 2.14 ([H4, Theorem 2.2]). (1) *Jeżeli w $\mathbb{R}^n$ istnieje podgrupa $G \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$, to nie istnieje niezmienniczy na przesunięcia operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$.*
 (2) *Jeżeli w $\mathbb{R}^n$ istnieje podgrupa $G \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$, to nie istnieje niezmienniczy na przesunięcia operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{M}$.*

Kolejne twierdzenia pokazują, że przy pewnych założeniach teoriomnogościowych, przestrzeń liniowa $\mathbb{R}^n$ (nad ciałem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych) posiada podprzestrzeń należącą do $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ ($\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$). Pierwsze, w prywatnej rozmowie, zasugerował Sz. Głęb.

Twierdzenie 2.15 ([H4, Theorem 2.3]). (1) *Jeżeli $\text{non}(\mathcal{N}) > \text{non}(\mathcal{M})$, to istnieje podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ należąca do $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$.*
 (2) *Jeżeli $\text{non}(\mathcal{M}) > \text{non}(\mathcal{N})$, to istnieje podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$ należąca do $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$.*

Istnieje model ZFC, w którym zachodzi nierówność $\text{non}(\mathcal{N}) > \text{non}(\mathcal{M})$ oraz model, w którym zachodzi nierówność $\text{non}(\mathcal{M}) > \text{non}(\mathcal{N})$ ([16]).

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem w $\mathbb{R}^n$ oraz κ będzie liczbą kardynalną. Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem κ -Łuzina względem $\mathcal{I}$, jeżeli $|A| \geq \kappa$ oraz $|A \cap B| < \kappa$ dla $B \in \mathcal{I}$ ([22], [25]). Jeżeli ideał $\mathcal{I}$ jest niezmienniczy na przesunięcia, to przyjmujemy:

$$\text{cov}^*(\mathcal{I}) := \min \{|A| : A \subset \mathbb{R}^n \wedge \exists B \in \mathcal{I} (A + B = \mathbb{R}^n)\}.$$

⁵W twierdzeniu jest jeszcze trzeci warunek równoważny, który pominęliśmy.

J. Smítal udowodnił, że przy założeniu hipotezy continuum, istnieje podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^n$, która jest zbiorem Luzina, tj. zbiorem $\aleph_1$ -Luzina względem $\mathcal{M}$ ([92, Lemma 1]). Modyfikując dowód tego twierdzenia można, przy słabszych założeniach, wskazać podprzestrzenie przestrzeni $\mathbb{R}^n$ należące do $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ i $\mathcal{M} \setminus \mathcal{N}$. Drugi podpunkt twierdzenia był sformułowany jako ćwiczenie (bez dowodu) w [22, Exercise 8.7(b)].

Twierdzenie 2.16 ([H4, Theorem 2.5]). *Niech $\{\mathcal{I}, \mathcal{J}\} = \{\mathcal{N}, \mathcal{M}\}$.*

- (1) *Jeżeli $\text{cov}^*(\mathcal{I}) \geq \text{cof}(\mathcal{I})$, to istnieje podprzestrzeń liniowa H przestrzeni $\mathbb{R}^n$, taka że $H \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$.*
- (2) *Jeżeli $\text{cov}(\mathcal{I}) = \text{cof}(\mathcal{I}) = \kappa$, to istnieje podprzestrzeń liniowa H przestrzeni $\mathbb{R}^n$, która jest zbiorem κ -Luzina względem $\mathcal{I}$.*

Ponieważ $\text{cov}^*(\mathcal{N}) \leq \text{non}(\mathcal{M}) \leq \text{cof}(\mathcal{N})$, więc dla $\mathcal{I} = \mathcal{N}$, założenie twierdzenia 2.16(1) ma w istocie postać $\text{cov}^*(\mathcal{N}) = \text{cof}(\mathcal{N})$. W twierdzeniu 2.16(2) mamy $\kappa = \text{cov}(\mathcal{I}) \leq \text{non}(\mathcal{J})$, i z [22, Theorem 8.28] wnioskujemy, że $H \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{I}$. Zauważmy też, że jeżeli $\mathcal{I} \in \{\mathcal{N}, \mathcal{M}\}$, to z aksjomatu Martina dostajemy $\text{add}(\mathcal{I}) = \text{cov}(\mathcal{I}) = \text{cov}^*(\mathcal{I}) = \text{non}(\mathcal{I}) = \text{cof}(\mathcal{I}) = 2^{\aleph_0}$. Wynika stąd:

Twierdzenie 2.17 ([H4, Corollary 2.7]). (1) *Jeżeli zachodzi MA lub $\text{non}(\mathcal{N}) > \text{non}(\mathcal{M})$ lub $\text{cov}^*(\mathcal{M}) \geq \text{cof}(\mathcal{M})$, to nie istnieje niezmienniczy na przesunięcia operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$.*

(2) *Jeżeli zachodzi MA lub $\text{non}(\mathcal{M}) > \text{non}(\mathcal{N})$ lub $\text{cov}^*(\mathcal{N}) = \text{cof}(\mathcal{N})$, to nie istnieje niezmienniczy na przesunięcia operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{M}$.*

W pracach [H2] i [H4] sformułowaliśmy kilka problemów. Niektóre z nich zostały rozwiązane. A. Rosłanowski i S. Shelah pokazali, że niesprzeczne z ZFC jest nieistnienie monotonicznego operatora otoczki na $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$ ([86]). Ci sami autorzy udowodnili (w ZFC) istnienie podgrupy grupy $(\mathbb{R}, +)$ należącej do $\mathcal{N} \setminus \mathcal{M}$ oraz niesprzeczność tego że każda podgrupa pierwszej kategorii jest miary zero ([87]). Z pierwszego faktu wynika, że nie istnieje niezmienniczy na przesunięcia operator borelowskiej otoczki na $\mathcal{N}$.

3. WŁASNOŚCI STEINHAUSA I SMITALA DLA MIAR

Omówimy wyniki zawarte w pracy [H7] napisanej wspólnie z Arturem Bartoszewiczem i Małgorzatą Filipczak oraz pracy [H6] napisanej wspólnie z Małgorzatą Filipczak.

Ustalmy liczbę $p \in (0, 1)$ i rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$, gdzie $\Omega := \{0, 1\}$, $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$ oraz $P_p(\{1\}) = p$. Niech $\hat{\mu}_p$ będzie przeliczalnym produktem miar P_p . Miary $\hat{\mu}_p$ są nazywane *miarami Bernoulliego*. Przez μ_p oznaczamy miarę borelowską na $[0, 1]$ generowaną przez zmienną losową $F : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \ni (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$, tj. miarę określoną wzorem $\mu_p(B) = \hat{\mu}_p(F^{-1}(B))$. Przyjmijmy

$$A_p := \left\{ x \in [0, 1) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = p \right\},$$

gdzie $0, x_1 x_2 x_3 \dots$ oznacza rozwinięcie dwójkowe liczby x zawierające nieskończenie wiele zer.

Wiadomo, że μ_p są ciągłymi miarami probabilistycznymi, dodatnimi na niepustych przedziałach otwartych oraz $\mu_{1/2} = \lambda$. Z Mocnego Prawa Wielkich Liczb łatwo wynika, że $\mu_p(A_p) = 1$ ([18]). Miary μ_{p_1} i μ_{p_2} są więc wzajemnie osobiwe, gdy $p_1 \neq p_2$. Ponieważ $\mu_{1/2}$ jest miarą Lebesgue'a, więc $A_{1/2} \cap (A_{1/2} + t) \neq \emptyset$ i $A_{1/2} \cap (t - A_{1/2}) \neq \emptyset$ dla $t \in [0, 1)$. W konsekwencji $[0, 1) \subset A_{1/2} - A_{1/2}$ oraz $[0, 1) \subset A_{1/2} + A_{1/2}$.

W [13] T. Banach pytał, czy istnieje zwarty zbiór $A \subset \mathbb{R}$, taki że $A - A$ jest otoczeniem zera, natomiast $A + A$ ($A + A + \dots + A$) ma puste wnętrze. Podobne pytanie zadane przez

R. Gera było rozważane w [27].⁶ Praca [H7] nawiązuje do tych problemów. Jej pierwsza część jest poświęcona badaniu zbiorów $A_p - A_p$ i $A_p + A_p$ ($A_p + A_p + A_p$) dla $p \neq \frac{1}{2}$.

Rozważmy grupę topologiczną $([0, 1], \oplus)$, gdzie $\oplus$ oznacza dodawanie modulo 1. Dla dowolnej liczby $x = 0, x_1 x_2 x_3 \dots$ (rozwiniecie dwójkowe z nieskończoną liczbą zer) oznaczmy $J(x) := \{n \in \mathbb{N} : x_n = 1\}$, $j(x) := |J(x)|$, $x \upharpoonright n := 0, x_1 \dots x_n$, $\bar{d}(x) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{j(x \upharpoonright n)}{n}$, $\underline{d}(x) := \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{j(x \upharpoonright n)}{n}$ i $d(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{j(x \upharpoonright n)}{n}$. Oczywiście, $A_p = \{x \in [0, 1] : d(x) = p\}$.

Własność 3.1 ([H7, Proposition 2]). *Niech $x, y \in [0, 1]$. Wtedy*

- (1) $\bar{d}(x \oplus y) \leq \bar{d}(x) + \bar{d}(y)$.
- (2) *Jeżeli $J(x)$ jest nieskończony, to $\bar{d}(1 - x) = 1 - \underline{d}(x)$ i $\underline{d}(1 - x) = 1 - \bar{d}(x)$.*

Z powyższej własności łatwo dostajemy następujące dwa twierdzenia. Symbol $\ominus$ oznacza odejmowanie modulo 1.

Twierdzenie 3.2 ([H7, Theorem 1]). *Jeżeli $p < \frac{1}{2}$ lub $p > \frac{1}{2}$, to $\text{int}(A_p \oplus A_p) = \emptyset$. Jeżeli $p < \frac{1}{3}$ lub $p > \frac{2}{3}$, to $\text{int}(A_p \oplus A_p \oplus A_p) = \emptyset$.*

Twierdzenie 3.3 ([H7, Theorem 5]). *Jeżeli $p \in [0, \frac{1}{4}] \cup (\frac{3}{4}, 1]$, to $\text{int}(A_p \ominus A_p) = \emptyset$.*

Głównym wynikiem dotyczącym zbiorów A_p jest poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 3.4 ([H7, Theorem 4]). *Jeżeli $p \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, to $A_p \ominus A_p = [0, 1]$.*

Wniosek 3.5 ([H7, Corollary 1]). *Jeżeli $p \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, to $A_p - A_p = (-1, 1)$.*

Dowód twierdzenia 3.4 opiera się na twierdzeniu z pracy [H6] dotyczącym działań na skończonych ciągach binarnych. Przyjmijmy $X_m := \{0, 1\}^m$ dla $m \in \mathbb{N}$. Utożsamiając ciąg $(x_1, \dots, x_m) \in X_m$ z liczbą $2^{m-1}x_1 + \dots + 2^1x_{m-1} + x_m$ ze zbioru $\mathbb{Z}_{2^m} = \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$, możemy zdefiniować dodawanie w X_m , jako dodawanie modulo 2^m w $\mathbb{Z}_{2^m}$. Tak jak poprzednio, $J(x)$ oznacza położenie jedynek, a $j(x)$ - liczbę jedynek w ciągu x .

Twierdzenie 3.6 ([H6, Theorem 1]). *Załóżmy, że $m, n \in \mathbb{N}$ oraz $\frac{1}{4}m < n < \frac{3}{4}m$. Dla dowolnego ciągu $x \in X_m \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\}$ istnieje ciąg $a \in X_m$, taki że $j(a) = j(x + a) = n$.*

Innymi słowy, jeżeli $\frac{1}{4}m < n < \frac{3}{4}m$, to dowolny ciąg binarny długości m , oprócz $(1, 0, \dots, 0)$, można przedstawić jako różnicę ciągów mających dokładnie n jedynek. Ciąg $(1, 0, \dots, 0)$ jest, oczywiście, różnicą ciągu o $n + 1$ jedynekach i ciągu o n jedynekach.

Przedstawimy ideę dowodu twierdzenia 3.4. Z własności 3.1 wynika, że dowód wystarczy przeprowadzić dla $p \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$. Bierzemy dowolną liczbę $x \in [0, 1]$. Dzielimy jej rozwinięcie binarne na, zaczynające się od 0, skończone ciągi $x^1, x^2, x^3, \dots$ o długościach dążących do ∞ . Korzystając z twierdzenia 3.6, przedstawiamy ciągi x^i jako różnice $b^i - a^i$ ciągów o gęstości jedynek bliskiej p . Sklejamy ciągi a_i oraz ciągi b_i , dostając rozwinięcia dwójkowe liczb a i b , takich że $x = b - a$ oraz $d(a) = d(b) = p$.

Twierdzenie 3.6 jest głównym wynikiem pracy [H6]. Przedstawimy szkic dowodu. Łatwo sprawdzamy, że wystarczy udowodnić twierdzenie w przypadku, gdy $\frac{1}{4}m < n \leq \frac{1}{2}m$ oraz $x \in X_m^0 := \{x \in X_m : x_1 = 0\}$. Szukając ciągu a , takiego że $j(a) = j(x + a) = n$, korzystamy z dwóch lematów.

Lemat 3.7 ([H6, Lemma 2]). *Załóżmy, że $n \leq \frac{1}{2}m$ oraz $x \in X_m^0$. Jeżeli istnieje ciąg $b \in X_m^0$, taki że $j(b) \leq n$ oraz $j(x + b) \leq n$, to istnieje ciąg $a \in X_m^0$, dla którego $j(a) = j(x + a) = n$.*

⁶Pozytywna odpowiedź na te pytania wynika z prac [43] i [26]. Pokazane tam jest, że istnieje zbiór zwarty $A \subset [0, 1]$, taki że $A - A \supset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, natomiast k -suma $A + A + \dots + A$ jest miary zero dla dowolnej liczby k . Wynik ten jest wnioskiem z rozważań dotyczących różnic i k -sum podzbiorów grup $\mathbb{Z}_q$ reszt modulo q .

Kolejny lemat pozwala sprowadzić szukanie ciągu a do badania położenia jedynek i zer w ciągu x . Termin przedział oznacza przedział w zbiorze liczb naturalnych. Dla $U \subset \mathbb{N}$ oznaczamy $j_U(x) := |\{n \in U : x_n = 1\}|$ i $z_U(x) := |\{n \in U : x_n = 0\}|$.

Lemat 3.8 ([H6, Lemma 3]). *Założmy, że $n \leq \frac{1}{2}m$, $x \in X_m^0$ oraz $j(x) = n + k$, $k \in \mathbb{N}$. Jeżeli istnieje przedział $U \subset [2, m]$, taki że*

$$j_U(x) \geq k + 1 \text{ i } z_U(x) \leq n - 1$$

lub istnieją rozłączne przedziały $U, V \subset [2, m]$, takie że

$$j_U(x) + j_V(x) \geq k + 2 \text{ i } z_U(x) + z_V(x) \leq n - 2,$$

to istnieje ciąg $a \in X_m^0$, taki że $j(a) = j(x + a) = n$.

Zasadnicza część dowodu twierdzenia 3.6 wygląda następująco. Zakładamy, że $x \in X_0^m$ oraz $\frac{1}{4}m < n \leq \frac{1}{2}m$. Zauważamy, że wystarczy przeprowadzić dowód dla $m = 4n - 1$. Rozważamy przypadki w zależności od liczby $j(x)$ jedynek w ciągu x . Jeżeli $j(x) \leq n$ lub $j(x) \geq 3n - 1$, to ciąg a wskazujemy bezpośrednio. Jeżeli $n + 1 \leq j(x) \leq 2n - 2$, to definiujemy podprzedziały $L = [2, n + k + 1]$, $M = [n + k + 2, 3n - k - 1]$ i $R = [3n - k, 4n - 1]$ przedziału $[2, 4n - 1]$. Rozważamy liczbę jedynek i liczbę zer, jakie ciąg x ma na pozycjach z tych przedziałów. Rozpatrując szereg podprzypadków, znajdujemy przedział U lub przedziały U, V spełniające założenia lematu 3.8. Jeżeli $2n - 1 \leq j(x) \leq 3n - 2$, to postępujemy podobnie, jedynie zamiast trzech podprzedziałów rozważamy dwa: $L = [2, 2n]$ i $R = [2n + 1, 4n - 1]$.

Z twierdzenia 3.6 wynika, że jeżeli $m \geq 7$ oraz A jest zbiorem tych liczb z $\mathbb{Z}_{2^m}$, które na ostatnich siedmiu pozycjach w rozwinięciu dwójkowym mają co najwyżej dwie jedynki, to $A - A = \mathbb{Z}_{2^m}$ i $A + A + A \neq \mathbb{Z}_{2^m}$ ([H6, Proposition 1]).⁷

Dla $p \in (0, 1)$ mamy $\mu_p(A_p) = 1$. Z drugiej strony, $A_p \ominus A_p = [0, 1)$, gdy $p \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ oraz $\text{int}(A_p \ominus A_p) = \emptyset$, gdy $p \notin [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Pojawia się pytanie: czy dla $p \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ istnieje zbiór B , taki że $\mu_p(B) = 1$ i $\text{int}(B \ominus B) = \emptyset$? Druga część pracy [H7] daje odpowiedź na to pytanie w ogólniejszej sytuacji.

Niech $\mathcal{A}$ będzie ciałem, a $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ - ideałem podzbiorów abelowej grupy topologicznej X . W pracy [14] były badane różne rodzaje własności Steinhausa i własności Smitała dla pary $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$.⁸ Mówimy, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ ma *klasyczną własność Steinhausa*, jeżeli $\text{int}(A - A) \neq \emptyset$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$; *własność Steinhausa*, jeżeli $\text{int}(A - B) \neq \emptyset$ dla dowolnych zbiorów $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ oraz $B \notin \mathcal{I}$; *własność Smitała*, jeżeli $(A + D)^c \in \mathcal{I}$ dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ i dowolnego zbioru gęstego D . W [14] zostało pokazane, że $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ ma własność Steinhausa wtedy i tylko wtedy, gdy ma własność Smitała; natomiast para $(\mathcal{L} \cap \mathcal{B}a, \mathcal{N} \cap \mathcal{M})$ ma klasyczną własność Steinhausa, ale nie ma własności Smitała. Badając analogiczne pojęcia dla miar borelowskich w grupach topologicznych dostajemy odmienne wyniki.

Niech $(X, +)$ będzie lokalnie zwartą polską grupą abelową, λ_X - miarą Haara w X oraz μ - σ -skończoną miarą borelowską. *Nośnikiem* miary μ nazywamy dowolny zbiór miary μ -pełnej. Mówimy, że miara μ :

- ma *klasyczną własność Steinhausa*, jeżeli $\text{int}(A - A) \neq \emptyset$ dla dowolnego zbioru A , takiego że $\mu(A) > 0$,
- ma *własność Smitała*, jeżeli dla dowolnego zbioru A , takiego że $\mu(A) > 0$ i dowolnego zbioru gęstego D , zbiór $A + D$ zawiera zbiór pełnej miary,
- jest *całkowicie bez własności Steinhausa*, jeżeli istnieje nośnik A , taki że $\text{int}(A - A) = \emptyset$,

⁷W pracy [50] zostało udowodnione, że dla $q = 29, 31, 33$ oraz $q \geq 35$ istnieje zbiór $A \subset \mathbb{Z}_q$, taki że $A - A = \mathbb{Z}_q$, natomiast $A + A + A \neq \mathbb{Z}_q$. R. Augustyniak, w napisanej pod moją opieką pracy magisterskiej [7], pokazał, że warunek zachodzi dla $q = 24$ oraz $q \geq 28$.

⁸W [14] nie była zakładana przemienność grupy.

– jest całkowicie bez własności Smitala, jeżeli istnieje nośnik A oraz zbiór gęsty D , taki że $\mu(A + D) = 0$.

Twierdzenie 3.9 ([H7, Theorem 7]). *Jeżeli μ jest osobliwa względem λ_X oraz B jest nośnikiem μ , takim że $\lambda_X(B) = 0$, to istnieje nośnik T miary λ_X , taki że $\mu(B + t) = 0$ dla $t \in T$. W szczególności, μ jest całkowicie bez własności Smitala.*

Wniosek 3.10 ([H7, Corollary 2]). *Dla dowolnej liczby $p \neq \frac{1}{2}$ istnieje zbiór gęsty D , taki że $\mu_p(A_p \oplus D) = 0$.*

Twierdzenie 3.11 ([H7, Theorem 8]). *Jeżeli μ jest osobliwa względem λ_X , to istnieje nośnik B miary μ , taki że $\text{int}(B - B) = \emptyset$ (μ jest całkowicie bez własności Steinhausa).*

Wniosek 3.12 ([H7, Corollary 2]). *Dla dowolnej liczby $p \neq \frac{1}{2}$ istnieje nośnik B miary μ_p , taki że $\text{int}(B \ominus B) = \emptyset$.*

Dowolna σ -skończona miara borelowska na X jest sumą miary absolutnie ciągłej i miary osobliwej względem miary Haara λ_X . Ponieważ λ_X ma własność Steinhausa i ma własność Smitala, więc z ostatnich twierdzeń dostajemy charakteryzację σ -skończonych miar borelowskich na X .

Twierdzenie 3.13 ([H7, Theorem 9]). *Załóżmy, że X jest lokalnie zwartą polską grupą abelową, zaś μ jest σ -skończoną miarą borelowską na X . Następujące warunki są równoważne:*

- (1) μ jest osobliwa względem λ_X ,
- (2) μ jest całkowicie bez własności Steinhausa,
- (3) μ jest całkowicie bez własności Smitala.

Twierdzenie 3.14 ([H7, Theorem 10]). *Załóżmy, że X jest lokalnie zwartą polską grupą abelową, zaś μ jest σ -skończoną miarą borelowską na X . Następujące warunki są równoważne:*

- (1) μ jest absolutnie ciągła względem λ_X ,
- (2) μ ma klasyczną własność Steinhausa,
- (3) μ ma własność Smitala.

Tematyka podobna do rozważanej w [H7] była badana w [90], [83] i [68]. Kontynuacją [H7] jest praca [P23], gdzie rozważamy własności Steinhausa i Smitala dla zbiorów. Do twierdzenia Steinhausa nawiązują też wymienione we wstępie artykuły [19], [20] i [75].

4. ALGEBRAICZNE WŁASNOŚCI TOPOLOGII f -GĘSTOŚCI I WARUNEK Δ_2

Omówimy wyniki zawarte w pracy [H3] napisanej wspólnie z Małgorzatą Filipczak oraz w pracy [H1].

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem mierzalnym w sensie Lebesgue’a oraz $x \in \mathbb{R}$. Jeżeli istnieje granica $d(A, x) := \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h}$, to nazywamy ją *gęstością zbioru A w punkcie x* . Mówimy, że x jest *punktem gęstości* zbioru A , jeżeli $d(A, x) = 1$. Zbiór wszystkich punktów gęstości zbioru A oznaczamy $\Phi_d(A)$.

◆ Φ_d jest operatorem dolnej gęstości w $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathcal{N})$, a rodzina $\mathcal{T}_d := \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_d(A)\}$ jest topologią oraz $\mathcal{T}_{\text{nat}} \subsetneq \mathcal{T}_d = \{\Phi_d(A) \setminus N : A \in \mathcal{L}, N \in \mathcal{N}\}$.

Dowód twierdzenia można znaleźć w [109]. Warunek (4) definicji operatora dolnej gęstości, czyli $A \sim \Phi_d(A)$ dla $A \in \mathcal{L}$, to *twierdzenie Lebesgue’a o punktach gęstości*. Topologię $\mathcal{T}_d$ nazywamy *topologią gęstości*. Łatwo sprawdzić, że x jest punktem gęstości zbioru A wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(A \cap [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}])}{\frac{2}{n}} = 1$.

Oznaczmy przez $\mathcal{S}$ rodzinę wszystkich zbieżnych do 0 nierosnących ciągów liczb dodatnich. Ustalmy ciąg $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$. Mówimy, że x jest *punktem $\langle s \rangle$ -gęstości* zbioru mierzalnego A , jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(A \cap [x - s_n, x + s_n])}{2s_n} = 1.$$

Zbiór wszystkich punktów $\langle s \rangle$ -gęstości zbioru A oznaczamy $\Phi_{\langle s \rangle}(A)$. Funkcja $\Phi_{\langle s \rangle}$ jest operatorem dolnej gęstości, a rodzina $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} := \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\langle s \rangle}(A)\}$ jest topologią, nazywaną *topologią $\langle s \rangle$ -gęstości*. Oczywiście, $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\langle s \rangle}$ dla $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$. Równość $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{\langle s \rangle}$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0$. Pojęcia punktu i topologii $\langle s \rangle$ -gęstości zostały wprowadzone przez M. Filipczak i J. Hejduka w [36].⁹ Były badane w [P12], [37] i [60].

Rozwiązując problem S. Ulama z Księgi Szkockiej, S. J. Taylor udowodnił, że dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$ istnieje ciągła i niemalejąca funkcja $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, taka że $\lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = 0$ oraz $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda([x-h, x+h] \setminus A)}{2h \cdot \psi(2h)} = 0$ dla prawie wszystkich $x \in A$. Jednocześnie pokazał, że nie da się znaleźć funkcji, która jest dobra dla wszystkich zbiorów mierzalnych ([98]):

♦ Dla dowolnej liczby $\alpha \in (0, 1)$ oraz ciągłej i niemalejącej funkcji $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ spełniającej warunek $\lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = 0$, istnieje zbiór doskonały $A \subset [0, 1]$, taki że $\lambda(A) = \alpha$ oraz $\limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda([x-h, x+h] \setminus A)}{2h \cdot \psi(2h)} = \infty$ dla każdego $x \in A$.

Powyższe twierdzenia są nazywane twierdzeniami Taylora.¹⁰

Niech $\mathcal{C}$ będzie rodziną ciągłych i niemalejących funkcji $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, takich że $\lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = 0$. Ustalmy funkcję $\psi \in \mathcal{C}$. Mówimy, że x jest *punktem ψ -gęstości* zbioru mierzalnego A , jeżeli

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda([x-h, x+h] \setminus A)}{2h \cdot \psi(2h)} = 0.$$

Przez $\Phi_\psi(A)$ oznaczamy zbiór wszystkich punktów ψ -gęstości zbioru A oraz przyjmujemy $\mathcal{T}_\psi := \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_\psi(A)\}$. Funkcja Φ_ψ spełnia warunki (1) - (3) definicji operatora dolnej gęstości. Z twierdzenia Taylora wynika, że nie spełnia warunku (4), czyli odpowiednika twierdzenia Lebesgue'a o punktach gęstości. Rodzina $\mathcal{T}_\psi$ jest topologią, nazywaną *topologią ψ -gęstości*. Oczywiście są inkluzje $\mathcal{T}_{\text{nat}} \subset \mathcal{T}_\psi \subset \mathcal{T}_d$ dla $\psi \in \mathcal{C}$. Topologie ψ -gęstości różnią się w istotny sposób od topologii gęstości $\mathcal{T}_d$. Przykładowo, $\mathcal{T}_\psi$ nie jest topologią Baire'a ([103]) i nie jest regularna ([35]).¹¹ Pojęcia punktu ψ -gęstości i topologii ψ -gęstości zostały wprowadzone przez M. Terepetę i E. Wagner-Bojakowską w [99]. Były badane w [35], [39], [103], [104] i [105]. Szczególnym przypadkiem topologii ψ -gęstości jest topologia supergęstości rozważana w [61].

Niech $\mathcal{A}$ będzie rodziną funkcji $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, takich że

- (A1) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0$,
- (A2) $\liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} < \infty$,
- (A3) f jest niemalejąca.

Ustalmy funkcję $f \in \mathcal{A}$. Mówimy, że x jest *punktem prawostronnej f -gęstości* zbioru mierzalnego A , jeżeli

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda([x, x+h] \setminus A)}{f(h)} = 0.$$

⁹W [36] autorzy używali ciągów niemalejących dążących do ∞ oraz $\frac{1}{s_n}$ zamiast s_n .

¹⁰Oryginalne sformułowania twierdzeń Taylora są trochę inne. S. J. Taylor rozważał "niesymetryczną" wersję badanej gęstości, tj. granicę $\lim_{I \ni x, \lambda(I) \rightarrow 0+} \frac{\lambda(I \setminus A)}{\lambda(I) \cdot \psi(\lambda(I))} = 0$ i analogiczną granicę górną.

¹¹Topologia gęstości jest całkowicie regularna.

Analogicznie definiujemy *punkt lewostronnej f -gęstości*. Jeżeli x jest punktem prawostronnej i lewostronnej f -gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, to nazywamy go *punktem f -gęstości* tego zbioru.¹² Zbiór wszystkich punktów f -gęstości (prawostronnej f -gęstości, lewostronnej f -gęstości) zbioru A oznaczamy przez $\Phi_f(A)$ ($\Phi_f^+(A)$, $\Phi_f^-(A)$). Przyjmujemy też

$$\mathcal{T}_f := \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_f(A)\}.$$

Rodzina $\mathcal{T}_f$ jest topologią zawierającą topologię naturalną. Nazywamy ją *topologią f -gęstości*. Zdefiniowane powyżej pojęcia pochodzą z pracy [P13].¹³

Pojęcie punktu f -gęstości rozszerza pojęcia punktu gęstości i punktu ψ -gęstości. Okazało się, że uogólnia ono również pojęcie punktu $\langle s \rangle$ -gęstości ([P16]). Szukanie uogólnienia dla kilku rodzajów punktów gęstości, nie nazbyt jednak abstrakcyjnego, było jedną z motywacji zdefiniowania f -gęstości. Inną motywacją była nadzieja uzyskania prostszych dowodów w rozważaniach dotyczących ψ -gęstości.

Będziemy często porównywać operatory gęstości oraz topologie gęstości generowane przez różne funkcje. Ponieważ $\mathcal{T}_{f_1} \subset \mathcal{T}_{f_2}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Phi_{f_1}(A) \subset \Phi_{f_2}(A)$ dla $A \in \mathcal{L}$ ([P16]), więc można porównywać tylko operatory lub tylko topologie.

Oczywistym warunkiem dostatecznym inkluzji $\mathcal{T}_{f_1} \subset \mathcal{T}_{f_2}$ jest $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \infty$. Nie jest to jednak warunek konieczny ([P13]). W [H3, Theorem 1] pokazaliśmy, że staje się on warunkiem koniecznym, jeśli jedną z porównywanych topologii jest topologia gęstości $\mathcal{T}_d$.

Twierdzenie 4.1 ([H3, Corollary 1]). *Niech $f \in \mathcal{A}$.*

- (1) $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < \liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} < \infty$.
- (2) $\mathcal{T}_f \subsetneq \mathcal{T}_d$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = \liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} < \infty$.
- (3) $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy $0 < \liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} < \limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \infty$.
- (4) Topologie $\mathcal{T}_f$ i $\mathcal{T}_d$ są nieporównywalne w sensie inkluzji wtedy i tylko wtedy, gdy $0 = \liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} < \limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \infty$.

Bezpośrednio z definicji wynika, że topologie f -gęstości są niezmiennicze ze względu na izometrię, tzn. zbiory $A + x$ i $-A$ należą do $\mathcal{T}_f$ dla dowolnych $A \in \mathcal{T}_f$, $x \in \mathbb{R}$. W [P13] zostało pokazane, że topologie $\mathcal{T}_f$ są niezmiennicze ze względu na mnożenie przez liczby $\alpha \geq 1$, natomiast dla każdej liczby $\alpha \in (0, 1)$ istnieje taka funkcja $f \in \mathcal{A}$, że topologia $\mathcal{T}_f$ nie jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez α . W pracy [H3] badamy, dla jakich funkcji f , odpowiadające im topologie $\mathcal{T}_f$ są niezmiennicze ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera. Pokazujemy, że istotną rolę odgrywa spełnianie przez funkcję f warunku Δ_2 , podobnego do rozważanego w teorii przestrzeni Orlicza warunku (Δ_2) (porównaj [74], [64], [85]). Warunek Δ_2 , dla funkcji generujących topologie ψ -gęstości, zdefiniowały M. Filipczak i M. Terepeta ([39]). Definicja przenosi się bez zmian na funkcje z rodziny $\mathcal{A}$.

Mówimy, że funkcja $f \in \mathcal{A}$ spełnia *warunek Δ_2* ($f \in \Delta_2$), jeżeli $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(2x)}{f(x)} < \infty$.

Własność 4.2 ([H3, Proposition 3]). *Założmy, że $f \in \mathcal{A}$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) $f \in \Delta_2$,
- (2) dla dowolnej liczby $\beta > 0$, $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(\beta x)}{\varphi(x)} < \infty$,
- (3) istnieje liczba $\beta > 1$, taka że $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{\varphi(\beta x)}{\varphi(x)} < \infty$.

¹²Definiując punkty f -gęstości użyliśmy terminologii takiej jak przy definiowaniu punktów ψ -gęstości. Pojęcia te będziemy rozróżniać oznaczając funkcje generujące f -gęstość literami alfabetu łacińskiego, a funkcje generujące ψ -gęstość - literami alfabetu greckiego.

¹³W pracy tej definicja rodziny $\mathcal{A}$ była trochę inna. Oprócz warunków (A1) - (A3) był też warunek (A4) mówiący, że funkcje z $\mathcal{A}$ są ciągłe. W [P16] zostało pokazane, że dla dowolnej funkcji f spełniającej (A1) - (A3) istnieje funkcja g spełniająca (A1) - (A4), taka że $\Phi_f = \Phi_g$. Pozwoliło to zrezygnować z wymagania ciągłości.

Z powyższej własności dostajemy:

Twierdzenie 4.3 ([H3, Theorem 4]). *Jeżeli f spełnia Δ_2 , to topologia $\mathcal{T}_f$ jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera.*

Różne funkcje z rodziny $\mathcal{A}$ mogą generować tę samą topologię f -gęstości. Może się zdarzyć, że topologia jest generowana zarówno przez funkcję spełniającą Δ_2 , jak i funkcję, która tego warunku nie spełnia. W pracy [H3] badamy, kiedy można odwrócić implikację z ostatniego twierdzenia, a dokładniej, dla jakich topologii f -gęstości, z niezmienniczości ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera wynika, że topologia jest generowana wyłącznie przez funkcje spełniające warunek Δ_2 .

Twierdzenie 4.4 ([H3, Theorem 5]). *Założmy, że $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_d$. Topologia $\mathcal{T}_f$ jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera wtedy i tylko wtedy, gdy $f \in \Delta_2$.*

Dowód twierdzenia opiera się na lemacie, w którym dla funkcji f , takiej że $\mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_d$ i $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(\alpha x)}{f(x)} = \infty$ konstruujemy zbiór E , dla którego $0 \in \Phi_f(\alpha^2 E^c) \setminus \Phi_f(\alpha E^c)$ ([H3, Lemma 2]). W [39] było udowodnione analogiczne twierdzenie dla topologii ψ -gęstości.

Twierdzenie 4.5 ([H3, Theorem 6]). *Jeżeli $\mathcal{T}_f \not\subseteq \mathcal{T}_d$, to istnieje taka funkcja $g \notin \Delta_2$, że $\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_g$.*

Powyższe twierdzenia można podsumować następująco. Dla dowolnej topologii f -gęstości τ , równoważne są warunki:

- $\tau \subset \mathcal{T}_d$,
- τ jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana wyłącznie przez funkcje spełniające Δ_2 .¹⁴

Pojawia się pytanie: czy topologia f -gęstości, która nie jest zawarta w topologii gęstości, może być generowana przez funkcję spełniającą Δ_2 (a więc być niezmiennicza ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera)? Odpowiedź wynika z kolejnego twierdzenia, opisującego sposób konstruowanie funkcji spełniających warunek Δ_2 .

Twierdzenie 4.6 ([H3, Lemma 1]). *Jeżeli $(a_n)_{n \geq 0}$ jest malejącym ciągiem zbieżnym do zera i $b_n := \sqrt{a_n \cdot a_{n-1}}$, to funkcje*

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{a_n} & \text{dla } x \in [a_n, b_n] \\ a_{n-1} & \text{dla } x \in [b_n, a_{n-1}] \\ a_0 & \text{dla } x \geq a_0 \end{cases} \quad i \quad g(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{a_{2n-1}} & \text{dla } x \in [b_{2n}, b_{2n-1}] \\ a_{2n} & \text{dla } x \in [b_{2n+1}, b_{2n}] \\ a_0 & \text{dla } x \geq b_1 \end{cases}$$

są ciągłe, należą do $\mathcal{A}$ oraz spełniają warunek Δ_2 .

Przyjmując w powyższym twierdzeniu $a_n = \frac{1}{n!}$, dostajemy funkcje f i g spełniające warunek Δ_2 i takie że $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_f$, zaś $\mathcal{T}_d$ i $\mathcal{T}_g$ są nieporównywalne w sensie inkluzji ([H3, Example 1]). Każda topologia $\langle s \rangle$ -gęstości jest topologią f -gęstości, tzn. dla dowolnego $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ istnieje taka funkcja $f \in \mathcal{A}$, że $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} = \mathcal{T}_f$ ([P16]). Z drugiej strony, $\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}_{\langle s \rangle}$ dla $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ oraz $\mathcal{T}_{\langle s \rangle}$ nie jest niezmiennicza ze względu na mnożenie przez liczby różne od zera, gdy $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} \neq \mathcal{T}_d$ ([36]). Dla funkcji f z ostatniego twierdzenia (przy $a_n = \frac{1}{n!}$) mamy więc $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_f$ i $\mathcal{T}_f \neq \mathcal{T}_{\langle s \rangle}$ dla $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ ([H3, Example 2]). Przykład takiej funkcji był wcześniej podany w [P16]. Był on jednak bardziej skomplikowany, a dowód poprawności był długi i techniczny.

W [H3] badamy też kiedy można odwrócić implikację: $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \infty \Rightarrow \mathcal{T}_{f_1} \subset \mathcal{T}_{f_2}$. Z twierdzenia 4.1 wynika, że jeśli jedną z topologii jest topologia gęstości, to implikacja odwrotna jest prawdziwa. Nie wystarczy natomiast założyć, że $f_1, f_2 \in \Delta_2$ ([H3, Example 3]).

¹⁴W [H3] wniosek ten został sformułowany niepoprawnie.

Twierdzenie 4.7 ([H3, Theorem 7]). *Jeżeli $f_1 \in \Delta_2$, $\mathcal{T}_{f_1} \subset \mathcal{T}_d$ oraz $\mathcal{T}_{f_1} \subset \mathcal{T}_{f_2}$, to*
 $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \infty$.

Pojęcie punktu f -gęstości uogólnia pojęcia: punktu gęstości, punktu ψ -gęstości oraz punktu $\langle s \rangle$ -gęstości. Rodzina wszystkich topologii f -gęstości rozpada się na cztery podrodziny (twierdzenie 4.1). Pierwsza z nich to jednoelementowa rodzina złożona z topologii gęstości $\mathcal{T}_d$, kolejne składają się, odpowiednio, z topologii f -gęstości istotnie zawartych w $\mathcal{T}_d$ ($\mathcal{T}_f \subsetneq \mathcal{T}_d$), topologii f -gęstości istotnie zawierających $\mathcal{T}_d$ ($\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_f$) oraz topologii gęstości nieporównywalnych z $\mathcal{T}_d$. Topologie istotnie zawarte w $\mathcal{T}_d$ mają własności podobne do własności topologii ψ -gęstości, zaś topologie istotnie zawierające $\mathcal{T}_d$ - własności podobne do własności topologii $\langle s \rangle$ -gęstości (różnych od $\mathcal{T}_d$). Naturalne są pytania: czy każda topologia f -gęstości zawierająca $\mathcal{T}_d$ jest topologią $\langle s \rangle$ -gęstości oraz czy każda topologia f -gęstości istotnie zawarta w $\mathcal{T}_d$ jest topologią ψ -gęstości? Negatywna odpowiedź na pierwsze pytanie została sformułowana w [P16]. Prostszy przykład dostaliśmy w twierdzeniu 4.6. Praca [H1] zawiera negatywną odpowiedź na drugie pytanie.

Pierwszym problemem pojawiającym się gdy chcemy porównać f -gęstość i ψ -gęstość jest różny charakter obu definicji. Punkty f -gęstości zdefiniowaliśmy używając gęstości jednostronnych, natomiast definicja punktu ψ -gęstości ma postać "symetryczną". W związku z tym w [H1] definiujemy symetryczną wersję f -gęstości. Załóżmy, że $f \in \mathcal{A}$. Mówimy, że x jest *punktem symetrycznej f -gęstości* zbioru mierzalnego A , jeżeli

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda([x-h, x+h] \setminus A)}{f(2h)} = 0.$$

Zbiór wszystkich punktów symetrycznej f -gęstości zbioru A oznaczamy przez $\Phi_f^s(A)$. Wprost z definicji mamy $\Phi_f^s = \Phi_{f^*}$, gdzie $f^*(x) = f(2x)$ ([H1, Proposition 1.1]). Stąd

$$\{\mathcal{T}_f : f \in \mathcal{A}\} = \{\mathcal{T}_{f^*} : f \in \mathcal{A}\} = \{\mathcal{T}_f^s : f \in \mathcal{A}\},$$

gdzie $\mathcal{T}_f^s$ oznacza topologię generowaną przez Φ_f^s ([H1, Corollary 1.1]).

Przypomnijmy, że $\mathcal{C}$ oznacza rodzinę ciągłych i niemalejących funkcji $\psi : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, takich że $\lim_{t \rightarrow 0+} \psi(t) = 0$. Dla dowolnej funkcji $\psi \in \mathcal{C}$ mamy więc $\Phi_\psi = \Phi_{f_\psi}^s$, gdzie $f_\psi(x) = x\psi(x)$. Korzystając z twierdzenia 4.1 dostajemy:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_\psi : \psi \in \mathcal{C}\} &\subset \left\{ \mathcal{T}_f : f \in \mathcal{A}, \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 0, f \text{ - ciągła} \right\} \subset \\ &\subset \left\{ \mathcal{T}_f : f \in \mathcal{A}, 0 = \liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} \leq \limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} < \infty \right\} = \{\mathcal{T}_f : f \in \mathcal{A}, \mathcal{T}_f \subsetneq \mathcal{T}_d\}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 4.8 ([H1, Theorem 1.3]).

$$\{\mathcal{T}_\psi : \psi \in \mathcal{C}\} \subsetneq \left\{ \mathcal{T}_f : f \in \mathcal{A}, \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 0, f \text{ - ciągła} \right\}.$$

Z twierdzenia wynika, że w definicji ψ -gęstości, monotoniczność funkcji ψ nie może być zastąpiona słabszym założeniem monotoniczności funkcji $x\psi(x)$. Twierdzenia dotyczące topologii f -gęstości, takich że $\mathcal{T}_f \subsetneq \mathcal{T}_d$, wzmacniają więc analogiczne wyniki dla ψ -gęstości. Natomiast ich dowody są prostsze.

Twierdzenie 4.9 ([H1, Theorem 1.4]). *Jeżeli $\psi \in \mathcal{C}$, $f \in \mathcal{A}$ oraz $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} > 0$, to*
 $\mathcal{T}_f \not\subseteq \mathcal{T}_\psi$.

5. PUNKTY WYJĄTKOWE

Omówimy wyniki zawarte w pracy [H5] napisanej wspólnie z Małgorzatą Filipczak, Grażyną Horbaczewską i Władysławem Wilczyńskim.

Jeżeli $\lambda(A) > 0$ i $\lambda(A^c) > 0$, to A nazywamy *nietrywialnym zbiorem mierzalnym*. Rodzinę wszystkich takich zbiorów oznaczamy $\mathcal{L}^*$. Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem wyjątkowym* zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeżeli x nie jest punktem gęstości zbioru A ani jego dopełnienia. Z twierdzenia Lebesgue'a o punktach gęstości wynika, że zbiór punktów wyjątkowych zbioru mierzalnego ma miarę zero. Łatwo jednak sprawdzić, że każdy nietrywialny zbiór mierzalny posiada punkt wyjątkowy.

Gęstość dolną i *gęstość górną* zbioru mierzalnego A w punkcie x definiujemy przyjmując:

$$\underline{d}(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h}, \quad \bar{d}(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda(A \cap [x-h, x+h])}{2h}.$$

Niech $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$. Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}$ jest δ -*wyjątkowy* dla zbioru mierzalnego A , jeżeli

$$\delta \leq \underline{d}(A, x) \leq \bar{d}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Rozważmy warunek $\mathcal{H}(\delta)$ oraz stałą $\delta_{\mathcal{H}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\delta) &: \forall_{A \in \mathcal{L}^*} A \text{ posiada punkt } \delta\text{-wyjątkowy,} \\ \delta_{\mathcal{H}} &:= \sup \{ \delta : \mathcal{H}(\delta) \} = \inf \{ \delta : \neg \mathcal{H}(\delta) \}. \end{aligned}$$

V. I. Kol'jada udowodnił, że $\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{H}} \leq \frac{\sqrt{17}-3}{4} \approx 0,2808$ ([53]). A. Szenes ([95]) oraz M. Csörnyei, J. Grahl i T. C. O'Neil ([28]) poprawili te szacowania. Wreszcie, O. Kurka udowodnił, że $\delta_{\mathcal{H}}$ jest rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu $8x^3 + 8x^2 + x - 1$, czyli $\delta_{\mathcal{H}} \approx 0,2685$ ([58]).

W cytowanych pracach liczba $\delta_{\mathcal{H}}$ była traktowana jako uniwersalna stała związana z operatorem gęstości Φ_d . Praca [H5] wychodzi od spostrzeżenia, że stała $\delta_{\mathcal{H}}$ jest związana raczej z bazą różniczkowania, przy pomocy której definiujemy Φ_d . Definicja $\delta_{\mathcal{H}}$ wykorzystuje gęstość dolną i gęstość górną. Zmieniając bazę różniczkowania, możemy zmienić punkty gęstości dolnej i punkty gęstości górnej zbioru, nie zmieniając jego punktów gęstości.

Bazę różniczkowania na prostej nazywamy rodziną $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}^x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie $\mathcal{B}^x$ jest rodziną przedziałów zawierających x , kres dolny długości których jest równy 0 (porównaj [21]). Niech F będzie funkcją przedziału oraz $x \in \mathbb{R}$. Liczbę g nazywamy *granicą* F w punkcie x ze względu na bazę różniczkowania $\mathcal{B}$, jeżeli

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \forall_{I \in \mathcal{B}^x} (\lambda(I) < \delta \Rightarrow |F(I) - g| < \varepsilon).$$

Piszemy wtedy $\lim_{I \in \mathcal{B}^x, I \Rightarrow x} F(I) = g$. Analogicznie definiujemy granicę dolną i granicę górną względem bazy różniczkowania. Liczby

$$\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \liminf_{I \in \mathcal{B}^x, I \Rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)} \quad \text{ i } \quad \bar{d}_{\mathcal{B}}(A, x) := \limsup_{I \in \mathcal{B}^x, I \Rightarrow x} \frac{\lambda(A \cap I)}{\lambda(I)}$$

nazywamy *gęstość dolną* i *gęstość górną* zbioru A w punkcie x względem $\mathcal{B}$. Jeżeli $\underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) = \bar{d}_{\mathcal{B}}(A, x)$, to wspólną wartość oznaczamy $d_{\mathcal{B}}(A, x)$ i nazywamy *gęstością* zbioru A w punkcie x względem bazy $\mathcal{B}$. Bazy różniczkowania $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ nazywamy *równoważnymi* ($\mathcal{B}_1 \approx \mathcal{B}_2$) jeżeli $\{x : d_{\mathcal{B}_1}(A, x) = 1\} = \{x : d_{\mathcal{B}_2}(A, x) = 1\}$ dla $A \in \mathcal{L}$. Niech $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$ oraz $\mathcal{B}$ będzie bazą różniczkowania. Mówimy, że punkt $x \in \mathbb{R}$ jest δ - *$\mathcal{B}$ -wyjątkowy* dla zbioru mierzalnego A , jeżeli

$$\delta \leq \underline{d}_{\mathcal{B}}(A, x) \leq \bar{d}_{\mathcal{B}}(A, x) \leq 1 - \delta.$$

Warunek $\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\delta)$ oraz stałą $\delta_{\mathcal{B}}$ definiujemy, przyjmując:¹⁵

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\delta) &: \forall_{A \in \mathcal{L}^*} A \text{ posiada punkt } \delta\text{-}\mathcal{B}\text{-wyjątkowy,} \\ \delta_{\mathcal{B}} &:= \sup \{ \delta : \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\delta) \} = \inf \{ \delta : \neg \mathcal{H}_{\mathcal{B}}(\delta) \}.\end{aligned}$$

Przyjmując $\mathcal{B}_o = \{ \{ (x-h, x+h) : h > 0 \} : x \in \mathbb{R} \}$ dostajemy $\delta_{\mathcal{B}_o} = \delta_{\mathcal{H}}$. Z drugiej strony, dla $\widehat{\mathcal{B}} = \{ \{ (x-h, x+k) : h, k > 0 \} : x \in \mathbb{R} \}$ mamy $\widehat{\mathcal{B}} \approx \mathcal{B}_o$, ale $\delta_{\widehat{\mathcal{B}}} = 0$ ([H5, str. 372]). Bazy różniczkowania generujące ten sam operator gęstości dają więc różne stałe $\delta_{\mathcal{B}}$.

W pracy [H5] badamy stałą $\delta_{\mathcal{B}}$ dla dwóch rodzajów baz różniczkowania:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_r &:= \{ \{ (x-h, x+rh) : h > 0 \} : x \in \mathbb{R} \} \text{ dla } r > 0, \\ \mathcal{B}_{\langle s \rangle} &:= \{ \{ (x-s_n, x+s_n) : n \in \mathbb{N} \} : x \in \mathbb{R} \} \text{ dla } \langle s \rangle \in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Dla niesymetrycznych baz $\mathcal{B}_r$ zachodzi:

Twierdzenie 5.1 ([H5, Proposition 1]). *Jeżeli $r \geq 1$, to $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{B}_r} \leq \frac{1}{r+1}$.*¹⁶

Jeżeli $r = 1$, to $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_o$. Dostajemy więc nierówność $\frac{1}{4} \leq \delta_{\mathcal{B}_1} \leq \frac{1}{2}$, znaną z pracy [53]. Ponieważ $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta_{\mathcal{B}_r} = 0$, więc stałe $\delta_{\mathcal{B}_r}$ przyjmują nieskończenie wiele wartości dla $r \geq 1$. Przyjmując $\mathcal{B}'_r = \{ \{ (x-rh, x+h) : h > 0 \} : x \in \mathbb{R} \}$ dostajemy $\delta_{\mathcal{B}'_r} = \delta_{\mathcal{B}_r}$. Jeśli natomiast $\mathcal{B}''_r = \{ \mathcal{B}_r(x) \cup \mathcal{B}'_r(x) : x \in \mathbb{R} \}$, to $\frac{1}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{B}''_r} \leq \frac{1}{r+1}$. Dla $r \in (0, 1)$ powyższe wzory przyjmują postać $\frac{r}{(r+1)^2} \leq \delta_{\mathcal{B}_r} = \delta_{\mathcal{B}'_r} \leq \frac{1}{r+1}$ oraz $\frac{1}{2(r+1)} \leq \delta_{\mathcal{B}''_r} \leq \frac{1}{r+1}$ ([H5, str. 374]).

Dla symetrycznych baz generowanych przez ciągi mamy $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}} \geq \delta_{\mathcal{H}}$.¹⁷ Nie wiemy, czy istnieje ciąg $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$, taki że $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}} > \delta_{\mathcal{H}}$.

Własność 5.2 ([H5, Corollary 3]). *Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 1$, to $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{H}}$.*

Własność 5.3 ([H5, Proposition 4]). *Założmy, że $\delta \in (0, \frac{1}{2}]$, $A \in \mathcal{L}^*$, $x \in \mathbb{R}$ oraz $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ są ciągami, takimi że $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$. Punkt x jest δ - $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$ -wyjątkowy dla A wtedy i tylko wtedy, gdy x jest δ - $\mathcal{B}_{\langle t \rangle}$ -wyjątkowy dla A .*

Zatem $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{B}_{\langle t \rangle}}$, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{t_n} = 1$ ([H5, Corollary 5]).

Własność 5.4 ([H5, Proposition 6]). *Jeżeli $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ i $\alpha > 1$, to $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{B}_{\alpha \cdot \langle s \rangle}}$.*

Zasadniczą rolę w badaniu warunku $\mathcal{H}(\delta)$ pełni twierdzenie Szenesa ([95, Proposition 1.3]). Pozwala ono rozważać zbiory otwarte zwane konfiguracjami zamiast nietrywialnych zbiorów mierzalnych. Pomysł ten udało się też zastosować przy badaniu warunku $\mathcal{H}_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(\delta)$.

Konfiguracją nazywamy zbiór postaci:

$$C := (-\infty, 0) \cup \bigcup_{i=1}^k (a_i, b_i),$$

gdzie $0 < a_1 < b_1 < \dots < a_k < b_k$. Punkty a_i, b_i oraz 0 nazywamy *wierzchołkami konfiguracji*. Zbiór wszystkich wierzchołków konfiguracji C oznaczamy $v(C)$. W sformułowaniach następnych twierdzeń, litera C oznacza konfigurację.

◆ (*Twierdzenie Szenesa*) $\mathcal{H}(\delta) \Leftrightarrow \forall_C \exists_{v \in v(C)} \forall_{r > 0} \frac{\lambda(C \cap [v-r, v+r])}{2r} \in [\delta, 1-\delta]$.¹⁸

Głównym wynikiem w [H5] jest odpowiednik twierdzenia Szenesa dla $\mathcal{H}_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(\delta)$.¹⁹

¹⁵W [H5] używane jest oznaczenie $\delta_{\mathcal{H}_{\mathcal{B}}}$ zamiast $\delta_{\mathcal{B}}$.

¹⁶W [H5] używane jest oznaczenie $\delta_{\mathcal{H}_r}$ zamiast $\delta_{\mathcal{B}_r}$.

¹⁷W [H5] używane jest oznaczenie $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}$ zamiast $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}$.

¹⁸W [95] twierdzenie ma postać: " $\delta_{\mathcal{H}} = \delta_{\mathcal{K}}$ ", gdzie $\delta_{\mathcal{K}}$ oznacza kres górny liczb δ spełniających prawą stronę równoważności.

¹⁹W [H5] twierdzenie ma postać: " $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}}$ ", gdzie $\delta_{\mathcal{K}_{\langle s \rangle}}$ oznacza kres górny liczb δ spełniających prawą stronę równoważności, natomiast $\delta_{\mathcal{H}_{\langle s \rangle}}$ jest, stosowanym w [H5], oznaczeniem stałej $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}$.

Twierdzenie 5.5 ([H5, Theorem 7]). *Dla dowolnego ciągu $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ mamy:*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}}(\delta) \Leftrightarrow \forall_{\varepsilon > 0} \forall_{C \subset (-\infty, \varepsilon)} \exists_{v \in v(C)} \forall_{n \in \mathbb{N}} \frac{\lambda(C \cap [v - s_n, v + s_n])}{2s_n} \in [\delta, 1 - \delta].$$

Dowód implikacji " $\Leftarrow$ " jest wzorowany na dowodzie twierdzenia Szenesa. Dowód implikacji " $\Rightarrow$ " jest znacznie bardziej skomplikowany i wykorzystuje inne metody.

W pracy [H5] nie zostały podane przykłady zastosowania twierdzenia 5.5. Przykłady takie można znaleźć w przygotowanej do druku pracy [P25] (napisanej wspólnie z G. Horbaczewską). Dowodzimy tam, że $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}} \leq \frac{33 - \sqrt{577}}{32} \approx 0,28060$ dla dowolnego $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$. Pokazujemy też, że istnieje ciąg $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$, dla którego baza $\mathcal{B}_{\langle s \rangle}$ nie jest równoważna $\mathcal{B}_o$, ale $\delta_{\mathcal{B}_{\langle s \rangle}} = \delta_{\mathcal{B}_o} = \delta_{\mathcal{H}}$.

Punkty wyjątkowe, z punktu widzenia deskryptywnej teorii mnogości, są badane w [3].

V. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze.

Na pozostały dorobek naukowy składają się następujące publikacje:

- [P1] M. Filipczak, T. Filipczak, *On some topology related to metric density*, Radovi Matematički **4** (1988), 299–307.
- [P2] T. Filipczak, *A note on the recurrence theorem*, Acta Univ. Lodz. Folia Math. **3** (1989), 39–40.
- [P3] T. Filipczak, *On some abstract density topologies*, Real Anal. Exchange **14** (1988-89), 140–166.
- [P4] T. Filipczak, *Intersection conditions for some density and I-density local systems*, Real Anal. Exchange **15** (1989-90), 170–192.
- [P5] T. Filipczak, *A note on topologies related to (x^α) -porosity*, Real Anal. Exchange **16** (1990-91), 284–291.
- [P6] T. Filipczak, *Topologies related to (x^α) -porosity*, Acta Univ. Lodz. Folia Math. **5** (1992), 15–29.
- [P7] T. Filipczak, *A note on the system of complements of sets sparse at a point*, Acta Univ. Lodz. Folia Math. **5** (1992), 9–14.
- [P8] T. Filipczak, *Monotonicity theorems for some local systems*, Real Anal. Exchange **19** (1993-94), 114–120.
- [P9] T. Filipczak, *A relationship between intersection conditions and porosity conditions for local systems*, Math. Slovaca **44** (1994), 95–98.
- [P10] T. Filipczak, *Monotonicity theorems for the I-proximal local system*, Demonstratio Math. **27** (1994), 517–520.
- [P11] M. Filipczak, T. Filipczak, *Monotonicity theorems for *-strong porosity topology*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena **50** (2002), 187–194.
- [P12] M. Filipczak, T. Filipczak, J. Hejduk, *On the comparison of the density type topologies*, Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia **52** (2004), 37–46.
- [P13] M. Filipczak, T. Filipczak, *A generalization of the density topology*, Tatra Mt. Math. Publ. **34** (2006), 37–47.
- [P14] M. Filipczak, T. Filipczak, *Remarks on f-density and ψ -density*, Tatra Mt. Math. Publ. **34** (2006), 141–149.
- [P15] T. Filipczak, *On sparse sets and density points defined by families of sequences*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, New Series **3** (2008), 339–346.
- [P16] M. Filipczak, T. Filipczak, *Density topologies generated by functions and by sequences*, Tatra Mt. Math. Publ. **40** (2008), 103–115.
- [P17] M. Filipczak, T. Filipczak, *On f-density topologies*, Topology Appl. **155** (2008), 1980–1989.
- [P18] M. Filipczak, T. Filipczak, *On the comparison of the density type topologies generated by sequences and by functions*, Comment. Math. **49**, (2009), 161–170.
- [P19] M. Filipczak, T. Filipczak, *On homeomorphisms of density type topologies generated by functions*, Tatra Mt. Math. Publ. **46** (2010), 7–13.
- [P20] M. Filipczak, T. Filipczak, *On the comparison of density type topologies generated by functions*, Real Anal. Exchange **36** (2011), 341–352.
- [P21] T. Filipczak, *Density type topologies generated by functions. f-density as a generalization of $\langle s \rangle$ -density and ψ -density*, rozdział w: *Traditional and present-day topics in real analysis*, Łódź University Press 2013, 389–409.
- [P22] M. Filipczak, T. Filipczak, *Density type topologies generated by functions. Properties of f-density*, rozdział w: *Traditional and present-day topics in real analysis*, Łódź University Press 2013, 411–430.

- [P23] M. Filipczak, T. Filipczak, R. Knapik, *Sets with Steinhaus and Smital properties*, J. Math. Anal. Appl. **472** (2019), 1167–1174.
- [P24] M. Balcerzak, T. Filipczak, P. Nowakowski, *Families of symmetric Cantor sets from the category and measure viewpoints*, Georgian Math. J., przyjęta do druku.
- [P25] T. Filipczak, G. Horbaczewska, *Exceptional points for densities generated by sequences*, wysłana do recenzji.

Praca [P2] została przyjęta do druku przed uzyskaniem stopnia doktora.

Poniżej przedstawię omówienie wyników uzyskanych w wyżej wymienionych pracach.

6. Pozostałe wyniki

Praca [P2] zawiera drobny wynik związany z twierdzeniem rekurencyjnym udowodnionym w [96]. Tematyka prac [P1] i [P3] - [P22] koncentruje się wokół zagadnień związanych z punktami gęstości i topologią gęstości oraz uogólnieniami tych pojęć i ich zastosowaniami. Badane są też uogólnienia ciągłości, granic i pochodnych oparte na różnych rodzajach porowatości, a także wpływ warunków przecięcia i warunków związanych z porowatością na własności uogólnionych granic i pochodnych. W pracach [P23] - [P25] rozważane są inne zagadnienia. Praca [P23], nawiązująca do [H7], dotyczy własności Steinhausa i własności Smitala dla zbiorów. W pracy [P24] badane są miarowe i topologiczne własności podrodzin rodziny symetrycznych (centralnych) zbiorów Cantora. W przygotowanej do druku pracy [P25], wykorzystując wyniki z [H5], badamy punkty wyjątkowe względem baz różniczkowania generowanych przez jeden ciąg.

- Praca [P1] (napisana wspólnie z Małgorzatą Filipczak).

W pracy są badane własności topologii:

$$\mathcal{T}_{op} := \{\Phi_d(U) \setminus N : U \in \mathcal{T}_{nat}, N \in \mathcal{N}\}.$$

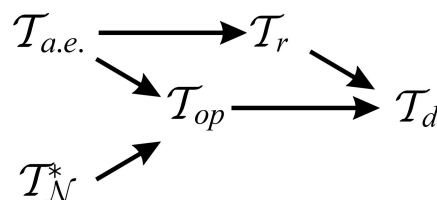
Jest też ona porównywana z topologią gęstości $\mathcal{T}_d = \{\Phi_d(A) \setminus N : A \in \mathcal{L}, N \in \mathcal{N}\}$ oraz *a.e.-topologią* $\mathcal{T}_{a.e.}$, *r-topologią* $\mathcal{T}_r$ i *topologią Hashimoto dla miary* $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}^*$.²⁰ Topologie te są zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{a.e.} &:= \{A \in \mathcal{T}_d : A = U \cup N, U \in \mathcal{T}_{nat}, N \in \mathcal{N}\}, \\ \mathcal{T}_r &:= \left\{ \bigcup_t U_t : U_t \in \mathcal{T}_d \cap \mathcal{G}_\delta \cap \mathcal{F}_\sigma \right\}, \\ \mathcal{T}_{\mathcal{N}}^* &:= \{U \setminus N : U \in \mathcal{T}_{nat}, N \in \mathcal{N}\}, \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{G}_\delta$ i $\mathcal{F}_\sigma$ to odpowiednie rodziny w topologii naturalnej. Topologie $\mathcal{T}_{a.e.}$ i $\mathcal{T}_r$ zostały zdefiniowane przez R. O'Malleya w [72] i były też badane w [73] i [71]. Topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}^*$ pochodzi z pracy H. Hashimoto [44], gdzie jest nazywana *topologią. Topologie tego rodzaju były wcześniej badane przez N. F. G. Martina w [65].

Poniższe twierdzenie opisuje inkluzje między wymienionymi topologiami. Strzałka oznacza właściwe zawieranie. Jeśli topologii nie da się połączyć strzałkami, to są nieporównywalne w sensie inkluzji. Zawierania $\mathcal{T}_{a.e.} \subsetneq \mathcal{T}_r$ i $\mathcal{T}_r \subsetneq \mathcal{T}_d$ były udowodnione w [72].

Twierdzenie 6.1 ([P1]).



²⁰W [P1] topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{N}}^*$ jest oznaczona $\mathcal{T}_M$.

Twierdzenie 6.2 ([P1, Theorem 2]). $\mathcal{T}_{op} = \{U \setminus N : U \in \mathcal{T}_{a.e.}, N \in \mathcal{N}\}$.

Wniosek 6.3 ([P1]). (1) *Niech $(Y, \mathcal{O})$ będzie regularną przestrzenią topologiczną. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow Y$ jest $\mathcal{T}_{a.e.}$ -ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest $\mathcal{T}_{op}$ -ciągła.*

(2) *Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{T}_{op}$ -ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest aproksymatywnie ciągła i prawie wszędzie ciągła.*

(3) *Topologia $\mathcal{T}_{op}$ nie jest regularna.*

(4) *Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathcal{T}_{op}$ -różniczkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest $\mathcal{T}_{a.e.}$ -różniczkowalna. Ponadto $\mathcal{T}_{op}$ -pochodna i $\mathcal{T}_{a.e.}$ -pochodna są równe.*

• Praca [P3].

W pracy [P3] definiujemy pojęcie zbioru I -rzadkiego w punkcie. Jest ono oparte na pojęciu punktu I -rozrzedzenia ([107]) oraz pojęciu zbioru rzadkiego w punkcie wprowadzonym przez D. N. Sarkhela i A. K. De w [88]. Przy pomocy zbiorów rzadkich oraz I -rzadkich definiujemy operatory dolnej gęstości oraz odpowiadające im topologie. Badamy podstawowe własności tych topologii oraz własności określonych na nich funkcji ciągłych.

W. Wilczyński ([107]) zdefiniował pojęcia punktu I -gęstości oraz topologii I -gęstości, które można traktować jako odpowiedniki punktu gęstości i topologii gęstości dla kategorii Baire'a. Własności topologii I -gęstości oraz związane z nią zagadnienia były badane w wielu artykułach, m.in. w [107], [80], [81], [9], [62], [63], [108], [112] i [115].

Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem I -gęstości* zbioru $A \in \mathcal{B}_a$, jeżeli dla dowolnego rozbieżnego do ∞ ciągu liczb dodatnich $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ istnieje podciąg $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, taki że

$$\chi_{(t_{n_k} \cdot (A-x)) \cap [-1,1]} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \chi_{[-1,1]} \quad \mathcal{M}\text{-p.w.}$$

(tj. zbieżność zachodzi poza zbiorem pierwszej kategorii). Zbiór wszystkich punktów I -gęstości zbioru A oznaczamy $\Phi_I(A)$. Funkcja Φ_I jest operatorem dolnej gęstości w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_a, \mathcal{M})$, natomiast rodzina $\mathcal{T}_I := \{A \in \mathcal{B}_a : A \subset \Phi_I(A)\}$ jest topologią na prostej zawierającą topologię naturalną ([107], [80]). Topologię $\mathcal{T}_I$ nazywamy *topologią I -gęstości*. Zastępując przedział $[-1, 1]$ przedziałami $[0, 1]$ i $[-1, 0]$, dostajemy definicje *punktu prawostronnej i lewostronnej I -gęstości* oraz funkcji Φ_I^+ i Φ_I^- .

Zdefiniowaliśmy wcześniej gęstość $d(A, x)$ oraz gęstość górną $\bar{d}(A, x)$ i gęstość dolną $\underline{d}(A, x)$ zbioru $A \in \mathcal{L}$ w punkcie $x \in \mathbb{R}$. Analogicznie definiujemy gęstości prawostronne i lewostronne, tj. przyjmujemy $d^+(A, x) := \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda(A \cap [x, x+h])}{h}$, $\bar{d}^+(A, x) := \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda(A \cap [x, x+h])}{h}$, $\underline{d}^+(A, x) := \liminf_{h \rightarrow 0+} \frac{\lambda(A \cap [x, x+h])}{h}$ etc.

W [88] zostało wprowadzone pojęcie zbioru rzadkiego. Korzystając z niego, autorzy zdefiniowali pojęcia proksymalnej granicy, ciągłości i pochodnej, uogólniające aproksymatywną granicę, ciągłość i pochodną. Pozwoliło to zdefiniować całkę typu Perrona, a także uzyskać interesujące twierdzenie o monotoniczności. Punktem wyjścia rozważań było poniższe twierdzenie.

♦ Niech $A \in \mathcal{L}$ i $x \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $\forall B \in \mathcal{L} \quad (\bar{d}^+(B, x) < 1 \Rightarrow \bar{d}^+(A \cup B, x) < 1),$
- (2) $\forall B \in \mathcal{L} \quad (\underline{d}^+(B, x) = 0 \Rightarrow \underline{d}^+(A \cup B, x) = 0),$
- (3) $\forall B \in \mathcal{L} \quad ((\bar{d}^+(B, x) < 1 \wedge \underline{d}^+(B, x) = 0) \Rightarrow (\bar{d}^+(A \cup B, x) < 1 \wedge \underline{d}^+(A \cup B, x) = 0)).$

Jeżeli zbiór $A \in \mathcal{L}$ spełnia warunki powyższego twierdzenia, to nazywamy go *prawostronnie rzadkim* w punkcie x .²¹ Analogicznie definiujemy zbiór *lewostronnie rzadki*. Mówimy, że zbiór jest *rzadki* w punkcie, jeżeli jest w tym punkcie prawostronnie i lewostronnie rzadki.

²¹W [88] autorzy rozważali dowolne podzbiory prostej, a twierdzenie zawierało jeszcze jeden warunek, który był oryginalną definicją zbioru prawostronnie rzadkiego.

Jeżeli $d^+(A, x) = 0$, to A jest prawostronnie rzadki w x . Łatwo sprawdzić, że jeśli A jest prawostronnie rzadki w x , to $\bar{d}^+(A, x) < 1$ i $\underline{d}^+(A, x) = 0$ oraz że suma dwóch zbiorów prawostronnie rzadkich w x jest zbiorem prawostronnie rzadkim w x ([88]).

Niech $A \in \mathcal{B}a$ i $x \in \mathbb{R}$. Mówimy, że x jest *prawostronnym punktem górnej I-gęstości* zbioru A , jeżeli istnieje rozbieżny do ∞ ciąg $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liczb dodatnich, taki że

$$\chi_{(t_{n_k} \cdot (A-x)) \cap [0,1]} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \chi_{[0,1]} \quad \mathcal{M}\text{-p.w.}$$

Zbiór wszystkich takich punktów oznaczamy $\bar{\Phi}_I^+(A)$. Jeżeli x jest prawostronnym punktem górnej I-gęstości zbioru A^c , to mówimy, że x jest *prawostronnym punktem dolnego I-rozrzedzenia* zbioru A . Zatem $\underline{\Phi}_I^+(A) := \bar{\Phi}_I^+(A^c)$ jest zbiorem wszystkich prawostronnych punktów dolnego I-rozrzedzenia zbioru A .²² Analogiczne definicje i oznaczenia stosujemy w przypadku lewostronnym.

Twierdzenie 6.4 ([P3, Proposition 2]). *Niech $A \in \mathcal{B}a$ i $x \in \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:*

- (1) $\forall_{B \in \mathcal{B}a} \left(x \notin \bar{\Phi}_I^+(B) \Rightarrow x \notin \bar{\Phi}_I^+(A \cup B) \right),$
- (2) $\forall_{B \in \mathcal{B}a} \left(x \in \underline{\Phi}_I^+(B) \Rightarrow x \in \underline{\Phi}_I^+(A \cup B) \right),$
- (3) $\forall_{B \in \mathcal{B}a} \left(\left(x \notin \bar{\Phi}_I^+(B) \wedge x \in \underline{\Phi}_I^+(B) \right) \Rightarrow \left(x \notin \bar{\Phi}_I^+(A \cup B) \wedge x \in \underline{\Phi}_I^+(A \cup B) \right) \right).$

Jeśli zbiór $A \in \mathcal{B}a$ spełnia warunki powyższego twierdzenia, to nazywamy go *prawostronnie I-rzadkim* w punkcie x . Analogicznie definiujemy zbiór *lewostronnie I-rzadki*. Mówimy, że zbiór jest *I-rzadki* w punkcie, jeżeli jest w tym punkcie prawostronnie i lewostronnie I-rzadki.

Własność 6.5 ([P3, Proposition 2, Example 3]). (1) *Jeżeli x jest punktem prawostronnego I-rozrzedzenia zbioru A (tzn. $x \in \Phi_I^+(A^c)$), to A jest prawostronnie I-rzadki w x .*

- (2) *Jeżeli A jest prawostronnie I-rzadki w x , to $x \in \underline{\Phi}_I^+(A) \setminus \bar{\Phi}_I^+(A)$.*
- (3) *Jeżeli A i B są prawostronnie I-rzadkie w x , to $A \cup B$ jest prawostronnie I-rzadki w x .*
- (4) *Istnieje taki zbiór domknięty A , że $\bar{d}^+(A, 0) < 1$, $\underline{d}^+(A, 0) = 0$, $0 \in \underline{\Phi}_I^+(A) \setminus \bar{\Phi}_I^+(A)$, ale A nie jest ani prawostronnie rzadki w 0 , ani prawostronnie I-rzadki w 0 .*

Przyjmijmy:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{pr}}^+(A) &:= \{x \in \mathbb{R} : A^c \text{ jest prawostronnie rzadki w } x\} \text{ dla } A \in \mathcal{L}, \\ \Phi_{I\text{-pr}}^+(A) &:= \{x \in \mathbb{R} : A^c \text{ jest prawostronnie I-rzadki w } x\} \text{ dla } A \in \mathcal{B}a. \end{aligned}$$

Analogicznie definiujemy $\Phi_{\text{pr}}^-(A)$ i $\Phi_{I\text{-pr}}^-(A)$ oraz przyjmujemy:²³

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{pr}}(A) &:= \Phi_{\text{pr}}^+(A) \cap \Phi_{\text{pr}}^-(A), \quad \mathcal{T}_{\text{pr}} := \{\Phi_{\text{pr}}(A) \setminus N : A \in \mathcal{L}, N \in \mathcal{N}\}, \\ \Phi_{I\text{-pr}}(A) &:= \Phi_{I\text{-pr}}^+(A) \cap \Phi_{I\text{-pr}}^-(A), \quad \mathcal{T}_{I\text{-pr}} := \{\Phi_{I\text{-pr}}(A) \setminus M : A \in \mathcal{B}a, M \in \mathcal{M}\}. \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że $\mathcal{T}_{\text{pr}} = \{A \in \mathcal{L} : A \subset \Phi_{\text{pr}}(A)\}$ i $\mathcal{T}_{I\text{-pr}} = \{A \in \mathcal{B}a : A \subset \Phi_{I\text{-pr}}(A)\}$.

Twierdzenie 6.6 ([P3, Proposition 6, Theorem 5]). (1) Φ_{pr} jest operatorem dolnej gęstości w $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathcal{N})$, a $\mathcal{T}_{\text{pr}}$ jest topologią, taką że $\mathcal{T}_d \subsetneq \mathcal{T}_{\text{pr}}$.

- (2) $\Phi_{I\text{-pr}}$ jest operatorem dolnej gęstości w $(\mathbb{R}, \mathcal{B}a, \mathcal{M})$, a $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$ jest topologią, taką że $\mathcal{T}_I \subsetneq \mathcal{T}_{I\text{-pr}}$.

²²W [P3] były używane oznaczenia: $d_I^+(A, x) = 1$, gdy $x \in \bar{\Phi}_I^+(A)$; $d_I^+(A, x) < 1$, gdy $x \notin \bar{\Phi}_I^+(A)$; $d_{I+}(A, x) = 0$, gdy $x \in \underline{\Phi}_I^+(A)$ oraz $d_{I+}(A, x) > 0$, gdy $x \notin \underline{\Phi}_I^+(A)$.

²³W [P3] zamiast Φ_{pr} , $\Phi_{I\text{-pr}}$, $\mathcal{T}_{\text{pr}}$ i $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$ były używane oznaczenia Φ^* , Φ_I^* , $\mathcal{T}^*$ i $\mathcal{T}_I^*$.

W pracy [P3] opisane są własności topologii $\mathcal{T}_{\text{pr}}$ i $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$. Wynikają one z ogólnych twierdzeń dotyczących topologii tego typu (porównaj [61]) lub ich dowody są takie jak dowody dla topologii gęstości lub topologii I -gęstości. Podamy dwa twierdzenia dotyczące aksjomatów oddzielania dla $\mathcal{T}_{\text{pr}}$ i $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$.

Twierdzenie 6.7 ([P3, Theorem 12, Theorem 13]). *Przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{pr}})$ jest całkowicie regularna, ale nie jest normalna.*

Twierdzenie 6.8 ([P3, Theorem 14]). *Przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{I\text{-pr}})$ nie jest regularna.*

Niech τ będzie topologią w $\mathbb{R}$ zawierającą topologię naturalną oraz $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Mówimy, że funkcja f jest τ -ciągła, jeżeli jest ciągła jako funkcja z $(\mathbb{R}, \tau)$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{nat}})$, natomiast f jest obcięciowo τ -ciągła, jeżeli dowolny punkt x ma τ -otoczenie U , takie że funkcja obcięta $f|_U$ jest ciągła w x jako funkcja z $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{nat}})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{nat}})$. Łatwo sprawdzić, że funkcja obcięciowo τ -ciągła jest τ -ciągła. Dla $\tau = \mathcal{T}_d$ definicje te są równoważne i oznaczają aproksymatywną ciągłość. Dla $\tau = \mathcal{T}_I$ definicje nie są równoważne ([81]).

Twierdzenie 6.9 ([P3, Theorem 15]). (1) $\mathcal{T}_{\text{pr}}$ -ciągłość i obcięciowa $\mathcal{T}_{\text{pr}}$ -ciągłość nie są równoważne.

(2) $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$ -ciągłość i obcięciowa $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$ -ciągłość nie są równoważne.

Funkcje $\mathcal{T}_I$ -ciągłe są nazywane I -aproksymatywnie ciągłymi, funkcje $\mathcal{T}_{\text{pr}}$ -ciągłe - proksymalnie ciągłymi, a $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$ -ciągłe - I -proksymalnie ciągłymi. Z twierdzenia 6.6 wynika, że funkcja aproksymatywnie ciągła jest proksymalnie ciągła, a funkcja I -aproksymatywnie ciągła jest I -proksymalnie ciągła.

Twierdzenie 6.10 ([P3, Theorem 10]). *Istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która jest proksymalnie ciągła oraz I -proksymalnie ciągła, ale nie jest ani aproksymatywnie ciągła, ani I -aproksymatywnie ciągła.*

Opierając się na wynikach z [88] i [91] łatwo pokazujemy, że każda funkcja proksymalnie ciągła jest pierwszej klasy Baire'a i ma własność Darboux ([P3, Theorem 9]).

- Prace [P4] - [P11].

Podstawą rozważań w książce B. S. Thomsona [101] jest pojęcie lokalnego systemu. Pojęcie to pozwoliło ujednolicić badanie uogólnionych granic, ciągłości i pochodnych. Wiele dowodów w [101] opiera się na spostrzeżeniu, że rozważany lokalny system spełnia pewien "warunek przecięcia" lub pewien "warunek porowatości". Omawiane prace wykorzystują te idee. W [P4] i [P7] badamy warunki przecięcia dla lokalnych systemów związanych z topologiami $\mathcal{T}_{\text{pr}}$, $\mathcal{T}_{I\text{-pr}}$ oraz $\mathcal{T}_I$. Prace [P5] i [P6] dotyczą topologii zdefiniowanych przy pomocy różnych rodzajów porowatości. W [P9] omawiamy związek między warunkami przecięcia, a warunkami porowatości dla lokalnych systemów. Prace [P8], [P10] i [P11] są poświęcone twierdzeniom o monotoniczności. Badamy, przy jakich warunkach spełnianych przez lokalny system, odpowiednie twierdzenia zachodzą. Formułujemy też twierdzenia dla systemu I -proksymalnego oraz systemu $*$ -silnej porowatości.

Lokalnym systemem nazywamy rodzinę $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(x) : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie $\mathbf{S}(x)$ jest niepustą rodziną podzbiorów prostej, taką że: (i) $\{x\} \notin \mathbf{S}(x)$; (ii) jeżeli $S \in \mathbf{S}(x)$, to $x \in S$; (iii) jeżeli $S \in \mathbf{S}(x)$ i $S' \supset S$, to $S' \in \mathbf{S}(x)$; (iv) jeżeli $S \in \mathbf{S}(x)$ i $\delta > 0$, to $S \cap (x - \delta, x + \delta) \in \mathbf{S}(x)$.

Niech $\mathbf{S}$ będzie lokalnym systemem. Mówimy, że funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest $(\mathbf{S})$ -ciągła w punkcie x_0 , jeżeli $\{x : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\} \in \mathbf{S}(x)$ dla $\varepsilon > 0$.

- Prace [P4] i [P7].

Mówimy, że lokalny system $\mathbf{S}$ spełnia *warunek przecięcia typu* $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, jeżeli dla dowolnej rodziny zbiorów $\{S_x : x \in \mathbb{R}\}$, gdzie $S_x \in \mathbf{S}(x)$, istnieje funkcja $\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, dla której $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, gdy $0 < y - x < \min\{\delta(x), \delta(y)\}$. Podobnie definiujemy warunki przecięcia innych typów. W [101] B. S. Thomson rozważał warunki przecięcia typu $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, $S_x \cap S_y \cap [x, y] \neq \emptyset$, $S_x \cap S_y \cap (x, y) \neq \emptyset$ oraz parametryczne $S_x \cap S_y \cap (x + \alpha_1(y - x), x + \alpha_2(y - x)) \neq \emptyset$ dla ustalonych $-\infty \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \infty$.

Jeżeli lokalny system spełnia odpowiedni warunek przecięcia, to funkcje $(\mathbf{S})$ -ciągłe oraz $(\mathbf{S})$ -pochodne mają "dobre" własności. Jednym z najważniejszych twierdzeń tego rodzaju jest [101, Theorem 33.1]:

♦ Jeżeli lokalny system $\mathbf{S}$ spełnia warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, to dowolna funkcja $(\mathbf{S})$ -ciągła jest pierwszej klasy Baire'a.

Wybierając promień δ dla każdego zbioru S osobno, dostajemy silniejszą wersję warunku przecięcia. Mówimy, że lokalny system $\mathbf{S}$ spełnia *silny warunek przecięcia typu* $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, jeżeli dla dowolnych $x \in \mathbb{R}$, $S_x \in \mathbf{S}(x)$ istnieje liczba dodatnia $\delta(x, S_x)$, taka że $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, gdy $S_x \in \mathbf{S}(x)$, $S_y \in \mathbf{S}(y)$ i $0 < y - x < \min\{\delta(x, S_x), \delta(y, S_y)\}$. Analogicznie definiujemy silne warunki przecięcia innych typów. Silny warunek przecięcia jest ściśle związany z warunkiem istotnego promienia ([61], [112]) oraz warunkiem O'Malleya ([100]).

Zdefiniujmy lokalne systemy, przyjmując:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_o^+(x) &:= \left\{ A : x \in A \wedge \exists_{E \subset A, E \in \mathcal{L}} \left(\underline{d}^+(E, x) > 0 \wedge \bar{d}^+(E, x) = 1 \right) \right\}, \\ \mathbf{S}_{\text{pr}}^+(x) &:= \left\{ A : x \in A \wedge \exists_{E \subset A, E \in \mathcal{L}} x \in \Phi_{\text{pr}}^+(E) \right\}, \\ \mathbf{S}_I^+(x) &:= \left\{ A : x \in A \wedge \exists_{E \subset A, E \in \mathcal{B}_a} x \in \Phi_I^+(E) \right\}, \\ \mathbf{S}_{I-\text{pr}}^+(x) &:= \left\{ A : x \in A \wedge \exists_{E \subset A, E \in \mathcal{B}_a} x \in \Phi_{I-\text{pr}}^+(E) \right\}, \\ \mathbf{S}_{\text{pr}}(x) &:= \mathbf{S}_{\text{pr}}^+(x) \cap \mathbf{S}_{\text{pr}}^-(x), \mathbf{S}_I(x) := \mathbf{S}_I^+(x) \cap \mathbf{S}_I^-(x) \text{ i } \mathbf{S}_{I-\text{pr}}(x) := \mathbf{S}_{I-\text{pr}}^+(x) \cap \mathbf{S}_{I-\text{pr}}^-(x). \end{aligned}$$

Opierając się na wynikach z [91], dostajemy:

Twierdzenie 6.11 ([P4, Theorem 1]). *Lokalny system $\mathbf{S}_o^+$ spełnia silny warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \neq \emptyset$.*

Ponieważ $\mathbf{S}_{\text{pr}}^+(x) \subset \mathbf{S}_o^+(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, więc również $\mathbf{S}_{\text{pr}}^+$ spełnia silny warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \neq \emptyset$. W [P7] udowodniliśmy trochę więcej: $\mathbf{S}_{\text{pr}}^+$ spełnia silny warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \cap (y, y + (y - x)^\alpha) \neq \emptyset$ dla $\alpha > 0$.

Z [63, Theorem 2] wynika, że lokalny system $\mathbf{S}_I$ spełnia silny warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \cap (x, y) \neq \emptyset$. W [P4] udowodniliśmy więcej.

Twierdzenie 6.12 ([P4, Theorem 5]). *Dla dowolnych liczb $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, lokalny system $\mathbf{S}_I$ spełnia silny warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \cap (x + \alpha_1(y - x), x + \alpha_2(y - x)) \neq \emptyset$.*

Twierdzenie 6.13 ([P4, Theorem 6]). *Dla dowolnych liczb $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \infty$, lokalny system $\mathbf{S}_I^+$ spełnia silny warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \cap (y + \alpha_1(y - x), y + \alpha_2(y - x)) \neq \emptyset$.*

Podobne twierdzenie uzyskał L. Zajíček w [112]. W metrycznej przestrzeni Baire'a zdefiniował topologię $*$ -porowatości, podobną do topologii I -gęstości. Udowodnił, że lokalny system związany z tą topologią spełnia warunek istotnego promienia, analogiczny do silnego warunku przecięcia typu $S_x \cap S_y \neq \emptyset$.

Twierdzenie 6.14 ([P4, Theorem 7]). *Lokalny system $\mathbf{S}_{I-\text{pr}}^+$ spełnia silny warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \neq \emptyset$.*

Twierdzenie 6.15 ([P4, Theorem 7 - Corollary]). *Jeżeli funkcja jest prawostronnie I -proksymalnie ciągła (tj. $\mathbf{S}_{I-\text{pr}}^+$ -ciągła), to jest pierwszej klasy Baire'a.*

W [80] zostało pokazane, że dowolna funkcja I -aproksymatywnie ciągła jest pierwszej klasy Baire'a. Poprzednie twierdzenie jest istotnym wzmocnieniem tego wyniku.

Twierdzenie 6.16 ([P4, Theorem 2, Theorem 8]). *Niech $\alpha \geq 0$. Lokalne systemy $\mathbf{S}_{\text{pr}}$ i $\mathbf{S}_{I\text{-pr}}$ nie spełniają warunku przecięcia typu $S_x \cap S_y \cap [x - \alpha(y - x), x + \alpha(y - x)] \neq \emptyset$.*

- Prace [P5] i [P6].

W [112] L. Zajíček badał topologie zdefiniowane za pomocą operatora dolnej gęstości. Nazywał je *abstrakcyjnymi topologiami gęstości* lub *kategoryjnymi topologiami gęstości*, gdy operator dolnej gęstości był określony w $(X, \mathcal{B}_X, \mathcal{M}_X)$. Główną część rozważań poświęcił kategoryjnym topologiom gęstości zdefiniowanym przy użyciu porowatości.

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, $A \subset X$, $z \in X$ i $r > 0$. Przyjmijmy:

$$\gamma(z, r, A) := \sup \{ \varepsilon > 0 : \exists_{y \in X} B(y, \varepsilon) \subset B(z, r) \setminus A \}.$$

Jeżeli $\limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{\gamma(z, r, A)}{r} > 0$, to zbiór A nazywamy *porowatym w punkcie z* , jeżeli natomiast $\limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{\gamma(z, r, A)}{r} \geq \frac{1}{2}$, to A nazywamy *silnie porowatym w z* . Mówimy, że A jest *porowaty* (*silnie porowaty*), jeżeli jest porowaty (silnie porowaty) w każdym swoim punkcie. Pojęcie zbioru porowatego wprowadził E. P. Dolženko w [31]. Obszerny przegląd zagadnień związanych z porowatością można znaleźć w artykule L. Zajíčka [113].²⁴

Mówimy, że zbiór $A \subset X$ jest *superporowaty w z* , jeżeli $A \cup B$ jest porowaty w z dla dowolnego zbioru B porowatego w z . Podobnie definiujemy zbiór *super silnie porowaty w z* . Przyjmijmy:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_X &:= \{U \subset X : \forall_{z \in U} U^c \text{ jest superporowaty w } z\}, \\ \mathbf{p}_X^* &:= \{U \setminus N : U \in \mathbf{p}_X, N \in \mathcal{N}\}. \end{aligned}$$

W [112] jest pokazane, że $\mathbf{p}_X$ jest topologią w X zawierającą topologię przestrzeni metrycznej, a $\mathbf{p}_X^*$ jest kategoryjną topologią gęstości, gdy (X, ρ) jest przestrzenią Baire'a. Topologię $\mathbf{p}_X$ nazywamy *topologią porowatości*, a $\mathbf{p}_X^*$ *topologią *-porowatości*. Jeżeli (X, ρ) jest prostą z metryką euklidesową, to $\mathbf{p}_X^* = \mathcal{T}_I$. Zatem topologię I -gęstości można zdefiniować używając pojęć topologicznych oraz porowatości, choć oryginalna definicja wykorzystuje strukturę algebraiczną prostej (porównaj [115]). Jeżeli w definicjach $\mathbf{p}_X$ i $\mathbf{p}_X^*$ zastąpimy superporowatość przez super silną porowatość, to dostaniemy definicje topologii silnej porowatości $\mathbf{s}_X$ i topologii *-silnej porowatości $\mathbf{s}_X^*$. Były one badane w [52] i [P11].

Prace [P5] i [P6] dotyczą uogólnień topologii porowatości i topologii *-porowatości.

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną, $A \subset X$, $z \in X$ oraz $\alpha \in (0, 1)$. Jeżeli $\limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{\gamma(z, r, A)^\alpha}{r} > 0$, to zbiór A nazywamy (x^α) -*porowatym w punkcie z* , jeżeli natomiast $\limsup_{r \rightarrow 0+} \frac{\gamma(z, r, A)^\alpha}{r} = \infty$, to A nazywamy (x^α) -*silnie porowatym w z* . Dodatkowo przyjmujemy, że A jest (x^1) -*porowaty w z* gdy jest porowaty w z oraz jest (x^1) -*silnie porowaty w z* gdy jest silnie porowaty w z . Mówimy, że zbiór A jest (x^α) -*superporowaty w z* ($\alpha \in (0, 1]$), jeżeli $A \cup B$ jest (x^α) -porowaty w z dla dowolnego (x^α) -porowatego w z zbioru B . Analogicznie definiujemy zbiór (x^α) -*super silnie porowaty w z* . Przyjmijmy:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\alpha &:= \{U \subset X : \forall_{z \in U} U^c \text{ jest } (x^\alpha)\text{-superporowaty w } z\}, \\ \tau_\alpha &:= \{U \subset X : \forall_{z \in U} U^c \text{ jest } (x^\alpha)\text{-super silnie porowaty w } z\}, \\ \mathcal{T}_\alpha^* &:= \{U \setminus N : U \in \mathcal{T}_\alpha, N \in \mathcal{N}\}, \quad \tau_\alpha^* := \{U \setminus N : U \in \tau_\alpha, N \in \mathcal{N}\}. \end{aligned}$$

²⁴Jeśli w definicji porowatości użyjemy granicy dolnej zamiast granicy górnej, to dostaniemy definicję dolnej porowatości. W związku z tym termin "porowaty" bywa zastępowany terminem "górnie porowaty" (porównaj [114]).

Wtedy $\mathcal{T}_1 = \mathfrak{p}_X$, $\mathcal{T}_1^* = \mathfrak{p}_X^*$, $\tau_1 = \mathfrak{s}_X$ i $\tau_1^* = \mathfrak{s}_X^*$. Tak jak w [112] wnioskujemy, że $\mathcal{T}_\alpha$ i τ_α są topologiami w X .

Twierdzenie 6.17 ([P5, Proposition 5, Remark 1]). *Jeżeli (X, ρ) jest przestrzenią Baire'a i $\alpha \in (0, 1]$, to $\mathcal{T}_\alpha^*$ i τ_α^* są kategoriowymi topologiami gęstości.*

Głównym wynikiem pracy [P5] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 6.18 ([P5, Theorem 1]). *Dla dowolnej liczby $\alpha \in (0, 1]$, topologie $\mathcal{T}_\alpha$ i τ_α są całkowicie regularne.*²⁵

W pracy [P6] porównujemy (w sensie zawierania) topologie $\mathcal{T}_\alpha$ i τ_α oraz $\mathcal{T}_\alpha^*$ i τ_α^* (na prostej). Stosujemy inne oznaczenia i nieco inne (ale równoważne) definicje.²⁶

Twierdzenie 6.19 ([P6, Theorem 2, Theorem 3]). *Założmy, że (X, ρ) jest prostą z metryką euklidesową.*

- (1) *Żadna topologia z rodziny $\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in (0, 1]\} \cup \{\tau_\alpha : \alpha \in (0, 1]\}$ nie jest zawarta w żadnej innej topologii z tej rodziny.*
- (2) *Żadna topologia z rodziny $\{\mathcal{T}_\alpha^* : \alpha \in (0, 1]\} \cup \{\tau_\alpha^* : \alpha \in (0, 1]\}$ nie jest zawarta w żadnej innej topologii z tej rodziny.*

Topologia I -gęstości $\mathcal{T}_I = \mathfrak{p}_\mathbb{R}^* = \mathcal{T}_1^*$ jest jedną z rozważanych kategoriowych topologii gęstości. Dostaliśmy więc continuum nieporównywalnych (w sensie inkluzji) topologii "podobnych" do topologii I -gęstości.

- Praca [P9].

W monografii [101] B. S. Thomson badał lokalne systemy korzystając z warunków przecięcia i warunków porowatości. Praca [P9] podaje związek między warunkami tego typu, a dokładniej pokazuje (przy naturalnych założeniach), że jeśli lokalny system spełnia parametryczny warunek przecięcia, to można oszacować z góry porowatość zbiorów do niego należących.

Niech $A \subset \mathbb{R}$, $x, a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Przyjmijmy:

$$\begin{aligned} A^+ &:= A \cap [0, \infty), \quad A^- := A \cap (-\infty, 0], \\ \gamma_0(A, a, b) &:= \sup \{ \varepsilon > 0 : \exists y \in \mathbb{R} \ (y, y + \varepsilon) \subset (a, b) \setminus A \}, \\ p^+(A, x) &:= \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\gamma_0(A, x, x + h)}{h}, \\ p^-(A, x) &:= \limsup_{h \rightarrow 0+} \frac{\gamma_0(A, x - h, x)}{h}. \end{aligned}$$

Liczby $p^+(A, x)$ i $p^-(A, x)$ są nazywane *prawostronną i lewostronną porowatością zbioru A w punkcie x* . Łatwo sprawdzić, że A jest porowaty w x wtedy i tylko wtedy, gdy $p^+(A, x) > 0$ lub $p^-(A, x) > 0$.

Twierdzenie 6.20 ([P9]). *Założmy, że $\alpha > -\frac{1}{2}$ oraz $\mathbf{S}$ jest lokalnym systemem, takim że:*

- (1) $\mathbf{S}(x) = \{x + S : S \in \mathbf{S}(0)\}$ dla $x \in \mathbb{R}$.
- (2) *Jeżeli $S \in \mathbf{S}(0)$, to $S^+ \cup (-S^+) \in \mathbf{S}(0)$ i $S^- \cup (-S^-) \in \mathbf{S}(0)$.*
- (3) $\mathbf{S}$ spełnia parametryczny warunek przecięcia typu

$$S_x \cap S_y \cap [x - \alpha(y - x), y + \alpha(y - x)] \neq \emptyset.$$

Wtedy dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ i dowolnego $S \in \mathbf{S}(x)$ zachodzą nierówności:

$$p^+(S, x) \leq \frac{\frac{1}{2} + \alpha}{1 + \alpha} \quad \text{ i } \quad p^-(S, x) \leq \frac{\frac{1}{2} + \alpha}{1 + \alpha}.$$

²⁵Analogiczny wynik był niezależnie udowodniony w [52].

²⁶Dla $\alpha \in (0, 1)$ topologie τ_α są oznaczane $T_{\alpha, \infty}$, natomiast topologia τ_1 jest oznaczana $T_{1, 1}$.

Jeżeli lokalny system jest *filtrujący* (tzn. $S_1 \cap S_2 \in \mathbf{S}(x)$, gdy $S_1, S_2 \in \mathbf{S}(x)$), to warunek (2) można zastąpić warunkiem "jeśli $S \in \mathbf{S}(0)$, to $-S \in \mathbf{S}(0)$ ".

- Prace [P8], [P10] oraz [P11] (napisana wspólnie z Małgorzatą Filipczak).

W [101] B. S. Thomson pokazał, że wiele twierdzeń o monotoniczności dla uogólnionych pochodnych i uogólnionych granic, zachodzi przy założeniu, że lokalny system spełnia określony warunek przecięcia. Z drugiej strony, D. N. Sarkhel i A. K. De udowodnili interesujące twierdzenie o monotoniczności, korzystając z własności innego typu ([88]). W pracy [P8] definiujemy własność lokalnych systemów odpowiadającą warunkowi rozważanemu przez D. N. Sarkhela i A. K. De. Nazywamy ją własnością (SD). Dowodzimy, że dla lokalnego systemu mającego własność (SD), zachodzą twierdzenia o monotoniczności będące odpowiednikami twierdzeń z [101] i [88]. Pokazujemy wreszcie, że własność (SD) wynika z warunku przecięcia, ale nie jest mu równoważna. W pracy [P10] dowodzimy, że system I -proksymalny $\mathbf{S}_{I\text{-pr}}$ ma własność (SD), a w pracy [P11], że własność tę ma system s^* otoczeń w topologii $*$ -silnej porowatości na prostej. W konsekwencji, zachodzą dla nich odpowiednie twierdzenia o monotoniczności.

Niech $\mathbf{S}$ będzie lokalnym systemem, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}$. Liczby

$$\begin{aligned} (\mathbf{S})\text{-}\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &:= \sup \{t : \{x_0\} \cup f^{-1}(t, \infty) \in \mathbf{S}(x_0)\}, \\ (\mathbf{S})\text{-}\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) &:= \inf \{t : \{x_0\} \cup f^{-1}(-\infty, t) \in \mathbf{S}(x_0)\}, \\ (\mathbf{S})\text{-}\underline{D}f(x) &:= (\mathbf{S})\text{-}\liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

nazywamy $(\mathbf{S})$ -granicą dolną, $(\mathbf{S})$ -granicą górną i $(\mathbf{S})$ -pochodną dolną funkcji f w punkcie x_0 .

W pracy [88] zostało udowodnione następujące twierdzenie:

◆ Niech $A \subset [a, b]$ i $B = [a, b] \setminus A$. Jeżeli (i) $a \in A$, (ii) $\underline{d}_i^+(A, x) > 0$ dla $x \in A \setminus \{b\}$ oraz (iii) $\underline{d}_i^-(B, x) > 0$ dla $x \in B$, to $B = \emptyset$.

W twierdzeniu tym $\underline{d}_i^+(A, x)$ oznacza prawostronną dolną gęstość wewnętrzną zbioru A w punkcie x (w definicji $\underline{d}_i^+(A, x)$, miarę zastępujemy miarą wewnętrzną).

Lokalny system $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(x) : x \in \mathbb{R}\}$ nazywamy *obustronnym*, jeżeli x jest obustronnym punktem skupienia każdego zbioru z $\mathbf{S}(x)$. Dla obustronnego lokalnego systemu $\mathbf{S}$ definiujemy lokalne systemy $\mathbf{S}^+$ i $\mathbf{S}^-$ przyjmując:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^+(x) &:= \{A \subset \mathbb{R} : A \cup (-\infty, x) \in \mathbf{S}(x)\}, \\ \mathbf{S}^-(x) &:= \{A \subset \mathbb{R} : A \cup (x, \infty) \in \mathbf{S}(x)\}. \end{aligned}$$

Mówimy, że lokalny system $\mathbf{S}$ ma *własność (SD)*, jeżeli jest obustronny i dla dowolnego przedziału domkniętego $[a, b]$ i zbiorów $A \subset [a, b]$, $B = [a, b] \setminus A$, z warunków

- (1) $a \in A$,
- (2) $A \in \mathbf{S}^+(x)$ dla $x \in A \setminus \{b\}$,
- (3) $B \in \mathbf{S}^-(x)$ dla $x \in B$,

wynika, że $B = \emptyset$.

Twierdzenie 6.21 ([P8, Theorem 2]). Niech $\mathbf{S}$ będzie lokalnym systemem mającym własność (SD) oraz $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jeżeli

- (1) $(\mathbf{S}^-)\text{-}\limsup_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x)$ dla każdego x ,
- (2) $(\mathbf{S}^+)\text{-}\underline{D}f \geq 0$ prawie wszędzie,
- (3) $(\mathbf{S}^+)\text{-}\underline{D}f > -\infty$ wszędzie oprócz przeliczalnej liczby punktów, w których spełniona jest nierówność $f(x) \leq (\mathbf{S}^+)\text{-}\liminf_{y \rightarrow x} f(y)$,

to f jest niemalejąca.

Wniosek 6.22 ([P8, Corollary 3]). *Jeżeli lokalny system $\mathbf{S}$ ma własność (SD) oraz*

- (1) $(\mathbf{S}^-)$ - $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x)$ dla każdego x ,
 - (2) $(\mathbf{S}^+)$ - $\underline{D}f \geq 0$ prawie wszędzie,
 - (3) $(\mathbf{S}^+)$ - $\underline{D}f > -\infty$ wszędzie,
- to f jest niemalejąca.*

Wniosek 6.23 ([P8, Corollary 4]). *Jeżeli lokalny system $\mathbf{S}$ ma własność (SD) oraz*

- (1) $(\mathbf{S}^-)$ - $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x) \leq (\mathbf{S}^+)$ - $\liminf_{y \rightarrow x} f(y)$ dla każdego x ,
 - (2) $(\mathbf{S}^+)$ - $\underline{D}f \geq 0$ prawie wszędzie,
 - (3) $(\mathbf{S}^+)$ - $\underline{D}f > -\infty$ niemal wszędzie (poza zbiorem przeliczalnym),
- to f jest niemalejąca.*

Wniosek 6.24 ([P8, Corollary 5]). *Jeżeli lokalny system $\mathbf{S}$ ma własność (SD) oraz $(\mathbf{S})$ - $\underline{D}f(x) \geq 0$ dla wszystkich x , to f jest niemalejąca.*

Powyższe twierdzenia są uogólnieniami klasycznych twierdzeń o monotoniczności dotyczących zwykłych granic i pochodnych oraz aproksymatywnych granic i pochodnych (patrz [101, §55]). Następne twierdzenie jest wzmocnieniem [88, Theorem 4.3].

Twierdzenie 6.25 ([P8, Theorem 6]). *Niech $\mathbf{S}$ będzie lokalnym systemem mającym własność (SD) oraz $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Jeżeli*

- (1) $(\mathbf{S}^-)$ - $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x) \leq (\mathbf{S}^+)$ - $\liminf_{y \rightarrow x} f(y)$ dla każdego x ,
 - (2) $f(E)$ ma puste wnętrze, gdzie $E := \{x : (\mathbf{S}^+) - \underline{D}f(x) \leq 0 \wedge (\mathbf{S}^-) - \underline{D}f(x) \leq 0\}$,
- to f jest niemalejąca.*

Twierdzenie 6.26 ([P8, Theorem 7]). *Jeżeli lokalny system $\mathbf{S}$ jest obustronny i spełnia warunek przecięcia typu $S_x \cap S_y \cap [x, y] \neq \emptyset$, to $\mathbf{S}$ ma własność (SD).*

W [P8] zostało pokazane, że istnieje obustronny lokalny system, który ma własność (SD), ale nie spełnia warunku przecięcia z ostatniego twierdzenia.

W pracach [P10] i [P11] dowodzimy, że dwa spośród badanych we wcześniejszych pracach lokalnych systemów mają własność (SD). W [P10] badamy system I -proksymalny $\mathbf{S}_{I\text{-pr}}$. Praca [P11] dotyczy lokalnego systemu s^* , takiego że $s^*(x) = \left\{ U \subset \mathbb{R} : x \in \text{int}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}^*} U \right\}$, gdzie $\text{int}_{\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}^*} U$ oznacza wnętrze zbioru U w topologii $*$ -silnej porowatości $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}^*$. Topologia $\mathfrak{s}_{\mathbb{R}}^*$ jest blisko związana z topologią I -gęstości $\mathcal{T}_I = \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}^*$. Powstaje ona przez zastąpienie porowatości silną porowatością w definicji $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}^*$. Topologie $\mathfrak{s}_X^*$ (w przestrzeniach metrycznych) były badane w [52].

Twierdzenie 6.27 ([P10, Theorem 1]). *Lokalny system $\mathbf{S}_{I\text{-pr}}$ ma własność (SD).*

Twierdzenie 6.28 ([P11, Theorem 2, Proposition 8]). *Lokalny system s^* ma własność (SD).*

Wynika stąd, że dla lokalnych systemów $\mathbf{S}_{I\text{-pr}}$ i s^* zachodzą twierdzenia 6.21 i 6.25 oraz wnioski 6.22, 6.23 i 6.24. Ponieważ $\mathbf{S}_I(x) \subset \mathbf{S}_{I\text{-pr}}(x)$ dla $x \in \mathbb{R}$, więc również lokalny system $\mathbf{S}_I$ ma własność (SD). Zatem odpowiednie twierdzenia o monotoniczności zachodzą dla granic i pochodnych I -aproksymatywnych.

- Prace [P12] (napisana wspólnie z Małgorzatą Filipczak i Jackiem Hejdukiem) i [P15].

Praca [P12] dotyczy porównywania topologii $\langle s \rangle$ -gęstości. W [P15] badamy operator zdefiniowany przez rodzinę ciągów, będący uogólnieniem operatorów $\Phi_{\langle s \rangle}$ i Φ_{pr} .

Przypomnijmy, że $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę nierosnących ciągów zbieżnych do 0.²⁷ Dla $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$ mamy $T_d \subset \mathcal{T}_{\langle s \rangle}$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0$ ([36]). Oznaczmy $\mathcal{S}_0 := \left\{ s \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} = 0 \right\}$.

²⁷W [P12] zamiast ciągów nierosnących zbieżnych do 0 używane są ciągi niemalejące rozbieżne do ∞ .

Twierdzenie 6.29 ([P12, Theorem 5, 4, 6]). (1) $\forall \langle t \rangle \in \mathcal{S} \exists \langle s \rangle \in \mathcal{S} \mathcal{T}_{\langle t \rangle} \subsetneq \mathcal{T}_{\langle s \rangle}$,
 (2) $\forall \langle t \rangle \in \mathcal{S}_0 \exists \langle s \rangle \in \mathcal{S}_0 \mathcal{T}_{\langle s \rangle} \subsetneq \mathcal{T}_{\langle t \rangle}$,
 (3) $\exists \langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}_0 (\mathcal{T}_{\langle s \rangle} \not\subseteq \mathcal{T}_{\langle t \rangle} \text{ i } \mathcal{T}_{\langle t \rangle} \not\subseteq \mathcal{T}_{\langle s \rangle})$.

Kolejnym wynikiem jest charakteryzacja zawierania $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} \subset \mathcal{T}_{\langle t \rangle}$. Jest ona używana w [P16] i [P18] do pokazania, że pewne topologie nie są topologiami $\langle s \rangle$ -gęstości. Ustalmy $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$. Niech $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem indeksów, takim że $t_n \in [s_{k_n+1}, s_{k_n})$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie 6.30 ([P12, Theorem 7]). Niech $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} \subset \mathcal{T}_{\langle t \rangle}$.
- (2) Dla dowolnego rosnącego ciągu $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ liczb naturalnych

$$\liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{s_{k_{n_i}}}{t_{n_i}} < \infty \text{ lub } \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{t_{n_i}}{s_{k_{n_i}+1}} = 1.$$

Oznaczmy przez $C(\mathcal{T}_{\langle s \rangle})$ rodzinę funkcji ciągłych z $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\langle s \rangle})$ w $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{\text{nat}})$.

Twierdzenie 6.31 ([P12, Theorem 12]). Niech $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$. $C(\mathcal{T}_{\langle s \rangle}) = C(\mathcal{T}_{\langle t \rangle})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} = \mathcal{T}_{\langle t \rangle}$.

Założmy, że zbiór $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ spełnia warunek $\inf \{s_1 : \langle s \rangle \in \mathcal{C}\} = 0$. Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest punktem $\mathcal{C}$ -gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \langle s \rangle \in \mathcal{C} \forall n \in \mathbb{N} \frac{\lambda(A \cap (x - s_n, x + s_n))}{2s_n} > 1 - \varepsilon.$$

Zbiór wszystkich punktów $\mathcal{C}$ -gęstości zbioru A oznaczamy $\Phi_{\mathcal{C}}(A)$. Analogicznie definiujemy $\Phi_{\mathcal{C}}^+(A)$ i $\Phi_{\mathcal{C}}^-(A)$. Operator $\Phi_{\mathcal{C}}$ spełnia warunki (1), (3), (4) definicji operatora dolnej gęstości i warunek $\Phi_{\mathcal{C}}(A) \subset \Phi_{\mathcal{C}}(B)$ dla $A \subset B$. Nie musi jednak spełniać warunku $\Phi_{\mathcal{C}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{C}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{C}}(B)$. Przyjmijmy:

$$\mathcal{C}_0 := \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_0 = \left\{ s \in \mathcal{S} : \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{n+1}}{s_n} > 0 \right\} \text{ oraz } \mathcal{C}_{\langle s \rangle} = \{(s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, \dots) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 6.32 ([P15, Theorem 1, Corollary 1]). $\Phi_{\mathcal{C}_0}^+ = \Phi_{\text{pr}}^+$.

Własność 6.33 ([P15, Proposition 4]). $\Phi_{\mathcal{C}_{\langle s \rangle}} = \Phi_{\langle s \rangle}$ dla $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$.

Pojęcie punktu $\mathcal{C}$ -gęstości uogólnia więc dwa rodzaje punktów gęstości: $\langle s \rangle$ -gęstość i proksymalną gęstość. Z kolejnego twierdzenia wynika, że pojęcia te są istotnie różne.

Twierdzenie 6.34 ([P15, Theorem 2]). $\Phi_{\text{pr}} \neq \Phi_{\langle s \rangle}$ dla $\langle s \rangle \in \mathcal{S}$.

- Prace [P13], [P14] i [P16] - [P20] (wszystkie napisane z Małgorzatą Filipczak).

Prace dotyczą operatorów f -gęstości i topologii f -gęstości zdefiniowanych w rozdziale 4.

Twierdzenie 6.35 ([P13]). Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{A}$, Φ_f spełnia warunki (1) - (3) definicji operatora dolnej gęstości. Ponadto $\lambda(\Phi_f(A) \setminus A) = 0$ i $\Phi_f(A) \in F_{\sigma\delta}$ dla $A \in \mathcal{L}$.

Z twierdzenia Taylora (str. 13) wynika, że jeżeli $f(x) = x\psi(x)$, gdzie $\psi \in \mathcal{C}$, to Φ_f nie jest operatorem dolnej gęstości.

Twierdzenie 6.36 ([P13]). $\mathcal{T}_f$ jest topologią i $\mathcal{T}_{\text{nat}} \subsetneq \mathcal{T}_{\mathcal{N}}^* \subsetneq \mathcal{T}_f$ dla $f \in \mathcal{A}$.

Jeżeli Φ spełnia warunki (1) - (3) definicji operatora dolnej gęstości i $\lambda(\Phi(A) \setminus A) = 0$ dla $A \in \mathcal{L}$, to Φ jest nazywany operatorem prawie dolnej gęstości. Niektóre własności topologii generowanych przez operatory prawie dolnej gęstości są takie jak własności topologii gęstości ([P21, Theorem 23.4], [48]). Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{A}$ topologia $\mathcal{T}_f$ nie jest ani normalna,

ani ośrodkowa, ani Lindelöfa, ani nie spełnia pierwszego aksjomatu przeliczalności. Jedynymi zbiorami zwartymi w $\mathcal{T}_f$ są zbiory skończone. Zbiory miary zero są domknięte, nigdziegęste i dyskretne. Rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a pokrywa się z rodziną zbiorów borelowskich w $\mathcal{T}_f$. Mamy też:

Twierdzenie 6.37 ([P19]). *Niech $f \in \mathcal{A}$. Zbiór jest spójny w $\mathcal{T}_f$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest spójny w topologii naturalnej.*

Oznaczmy przez $\mathcal{A}_c$ rodzinę wszystkich funkcji ciągłych należących do $\mathcal{A}$ oraz przez $\mathcal{A}_s$ rodzinę funkcji należących do $\mathcal{A}$, dla których istnieją malejące i zbieżne do zera ciągi (a_n) , (x_n) , takie że $f(x) = a_n$ dla $x \in (x_{n+1}, x_n]$.

Twierdzenie 6.38 ([P16]). $\{\Phi_f : f \in \mathcal{A}\} = \{\Phi_f : f \in \mathcal{A}_c\} = \{\Phi_f : f \in \mathcal{A}_s\}$.

W pracy [P13], f -gęstość zdefiniowaliśmy dla funkcji z $\mathcal{A}_c$. Powyższe twierdzenie pozwoliło zrezygnować z założenia ciągłości w tej definicji.

W twierdzeniu 4.1, rodzina wszystkich topologii f -gęstości została podzielona na cztery podrodziny. Na ogół wystarczy rozważać dwie podrodziny. Przyjmijmy:

$$\mathcal{A}_0 := \left\{ f \in \mathcal{A} : \liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 0 \right\}, \quad \mathcal{A}_1 := \left\{ f \in \mathcal{A} : \liminf_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} > 0 \right\}.$$

Topologie f -gęstości generowane przez funkcje z $\mathcal{A}_1$ zawierają topologię gęstości $\mathcal{T}_d$, a topologie generowane przez funkcje z $\mathcal{A}_0$ są istotnie zawarte lub nieporównywalne z $\mathcal{T}_d$.

Twierdzenie 6.39 ([P14]). *Jeżeli $f \in \mathcal{A}_1$, to Φ_f jest operatorem dolnej gęstości.*

Własności topologii f -gęstości dla $f \in \mathcal{A}_1$ wynikają z ogólnych twierdzeń dotyczących topologii generowanych przez operator dolnej gęstości ([P21, Theorem 23.6], [48]). W szczególności, $\mathcal{T}_f$ jest topologią Baire'a; zbiory pierwszej kategorii w $\mathcal{T}_f$ są miary zero (a więc nigdziegęste w $\mathcal{T}_f$); rodzina zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a pokrywa się z rodziną zbiorów o własności Baire'a w $\mathcal{T}_f$. Mamy też $\mathcal{T}_f = \{\Phi_f(A) \setminus N : A \in \mathcal{L}, N \in \mathcal{N}\}$, $\Phi_f(\Phi_f(A)) = \Phi_f(A)$ i $\text{int}_{\mathcal{T}_f} A \sim A \sim \text{cl}_{\mathcal{T}_f} A$ dla $A \in \mathcal{L}$.

Twierdzenie 6.40 ([P17]). *Jeżeli $f \in \mathcal{A}_1$, to $\mathcal{T}_f$ jest całkowicie regularna.*

W [P16] zostało pokazane, że $\{\mathcal{T}_{\langle s \rangle} : \langle s \rangle \in \mathcal{S}\} \subset \{\mathcal{T}_f : f \in \mathcal{A}_1\}$ oraz został skonstruowany przykład pokazujący, że równość nie zachodzi. Korzystając z tego przykładu, można udowodnić więcej.

Twierdzenie 6.41 ([P18]). *Jeżeli $\langle s \rangle, \langle t \rangle \in \mathcal{S}$ oraz $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} \subsetneq \mathcal{T}_{\langle t \rangle}$, to istnieje taka funkcja $f \in \mathcal{A}_1$, że $\mathcal{T}_{\langle s \rangle} \subset \mathcal{T}_f \subset \mathcal{T}_{\langle t \rangle}$ i $\mathcal{T}_f \neq \mathcal{T}_{\langle a \rangle}$ dla $\langle a \rangle \in \mathcal{S}$.*

Jeżeli $f \in \mathcal{A}_0$, to własności operatorów i topologii f -gęstości są podobne do własności operatorów i topologii ψ -gęstości. Zachodzi odpowiednik twierdzenia Taylora.

Twierdzenie 6.42 ([P14]). *Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{A}_0$ istnieje nigdziegęsty i domknięty zbiór $F \subset [0, 1]$, taki że $\lambda(F) > 0$ i $F \cap \Phi_f(F) = \emptyset$.*

Twierdzenie 6.43 ([P14]). *Jeżeli $f \in \mathcal{A}_0$, to przestrzeń $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_f)$ jest pierwszej kategorii.*

Twierdzenie 6.44 ([P17]). *Jeżeli $f \in \mathcal{A}_0$, to topologia $\mathcal{T}_f$ nie jest regularna.*

Tematem pracy [P20] jest porównywanie topologii f -gęstości. Niektóre pomysły pochodzą z prac o ψ -gęstości. Dowody są jednak prostsze, mimo że dotyczą ogólniejszej sytuacji.

Z definicji punktu f -gęstości natychmiast wynika, że $\mathcal{T}_{f_1} \subset \mathcal{T}_{f_2}$ gdy $\limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \infty$ ([P13]). W [P16] zostało pokazane, że odwrotna implikacja nie zachodzi.

Twierdzenie 6.45 ([P20]). *Jeżeli $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ i $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = 0$, to $\mathcal{T}_{f_1} \subsetneq \mathcal{T}_{f_2}$.*

Głównym wynikiem pracy jest twierdzenie charakteryzujące zawieranie topologii f -gęstości, podobne do twierdzenia dla ψ -gęstości ze [104]. Dla $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ i $n \in \mathbb{N}$ przyjmujemy:

$$\varepsilon_{nf_1f_2} := \limsup_{x \rightarrow 0+} \frac{\lambda(\{t \in (0, x) : f_1(t) < \frac{1}{n}f_2(t)\})}{f_1(x)}.$$

Twierdzenie 6.46 ([P20]). *$\mathcal{T}_{f_2} \subset \mathcal{T}_{f_1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{nf_1f_2} = 0$.*

Twierdzenie to jest wykorzystywane w pracach [H1] i [H3]. Można z niego również wywnioskować twierdzenie 6.30.

W pracy [P19] badamy homeomorfizmy między topologiami f -gęstości.

Twierdzenie 6.47 ([P19]). *Jeżeli $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ i $h : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{f_1}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{f_2})$ jest homeomorfizmem, to:*

- (1) *h i h^{-1} są ciągłe (w zwykłym sensie), monotoniczne i spełniają warunek (N) Luzina,*
- (2) *zbiory $A := \{x : \text{istnieje pochodna } h'(x)\}$*
 $B := \left\{x : \text{istnieje pochodna } \left(h^{-1}\right)'(h(x))\right\}$ są pełnej miary,
- (3) *jeżeli $h'(x) = 1$ dla $x \in A \cap B$, to $\mathcal{T}_{f_1} = \mathcal{T}_{f_2}$.*

Dla funkcji z $\mathcal{A}_1$, nieporównywalne topologie f -gęstości nie mogą być homeomorficzne.

Twierdzenie 6.48 ([P19]). *Załóżmy, że $f_1, f_2 \in \mathcal{A}_1$. Jeżeli przestrzenie topologiczne $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{f_1})$ i $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{f_2})$ są homeomorficzne, to $\mathcal{T}_{f_1} \subset \mathcal{T}_{f_2}$ lub $\mathcal{T}_{f_2} \subset \mathcal{T}_{f_1}$.*

Twierdzenie 6.49 ([P19]). *Topologia gęstości $\mathcal{T}_d$ nie jest homeomorficzna z żadną inną topologią f -gęstości.*

Topologie f -gęstości były też badane w [38]. W [46] J. Hejduk rozważał uogólnienie, w którym używał funkcji spełniających jedynie warunek (A2) z definicji.

- Prace [P21] i [P22] (napisana wspólnie z Małgorzatą Filipczak).

Są to prace przeglądowe dotyczące topologii f -gęstości i ich związków z topologiami $\langle s \rangle$ -gęstości i ψ -gęstości. Zawierają wyniki z opublikowanych wcześniej prac. Część twierdzeń jest podana z dowodami. Praca [P21] opisuje dodatkowo własności topologii generowanych przez operatory dolnej gęstości i operatory niemal dolnej gęstości w $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathcal{N})$ (przy założeniu, że $\mathcal{T}_{\text{nat}} \subset \mathcal{T}_{\Phi}$). Dowody tych własności opierają się głównie na literaturze dotyczącej punktów gęstości. Topologie generowane przez operatory dolnej gęstości i niemal dolnej gęstości były też badane w [48].

- Praca [P23] (napisana wspólnie z Małgorzatą Filipczak i Rafałem Knapikiem).

W pracy opisujemy zbiory mające własność Steinhausa i zbiory mające własność Smitala w grupach topologicznych. Rozważamy też własność Smitala względem różnych ideałów.

W pracy [14] były badane własności Steinhausa i Smitala dla ciała i ideału podzbiorów grupy topologicznej. W [H7] rozważane były własności tego typu w lokalnie zwartej polskiej grupie abelowej (patrz rozdział 3). Praca [P23] dotyczy "lokalnej" wersji tych własności, tj. badamy zbiory mające własność Steinhausa i zbiory mające własność Smitala.

Niech $(X, +)$ będzie lokalnie zwartą grupą abelową oraz λ_X uzupełnioną miarą Haara w X . Mówimy, że zbiór $A \subset X$ ma:

- *własność Steinhausa* ($A \in \mathcal{SP}$), jeżeli $\text{int}(A - A) \neq \emptyset$,
- *własność Smitala* ($A \in \mathcal{SmP}$), jeżeli $\lambda_X((A + D)^c) = 0$ dla dowolnego zbioru gęstego D ,
- *rozszerzoną własność Smitala* ($A \in \mathcal{ESmP}$), jeżeli dla dowolnego zbioru gęstego D , zbiór $(A + D)^c$ nie zawiera zbioru o dodatniej mierze Haara.

Mamy oczywiście $\mathcal{S}m\mathcal{P} \subset \mathcal{ES}m\mathcal{P}$. Jeżeli grupa X jest dyskretna, to $\mathcal{SP} = \mathcal{S}m\mathcal{P} = \mathcal{ES}m\mathcal{P} = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

Własność 6.50 ([P23, Proposition 3, 4]). *Niech X będzie lokalnie zwartą grupą abelową. Wtedy*

- (1) $\mathcal{ES}m\mathcal{P} \subset \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{N}_{\lambda_X}$.
- (2) *Jeżeli X jest ośrodkowa, to $\mathcal{ES}m\mathcal{P} = \mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{N}_{\lambda_X}$ i $\mathcal{S}m\mathcal{P} \subset \mathcal{SP}$.*
- (3) *Jeżeli X jest σ -zwarta i nie jest dyskretna, to $\mathcal{S}m\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{SP}$.*

Przykładem zbioru należącego do $\mathcal{SP} \setminus \mathcal{S}m\mathcal{P}$ jest klasyczny zbiór Cantora. Z lematu Smitała wynika, że $\mathcal{L} \setminus \mathcal{N} \subset \mathcal{S}m\mathcal{P}$, czyli zbiory mieralne bez własności Smitała (lub Steinhausa) są miary zero. Rezygnacja z mierzalności zmienia diametralnie sytuację.

Twierdzenie 6.51 ([P23, Theorem 2]). (1) *Istnieją zbiory $A \in \mathcal{SP} \setminus \mathcal{S}m\mathcal{P}$ i $B \notin \mathcal{SP}$, takie że $A \cup B = \mathbb{R}$.*

(2) *Istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{SP} \setminus \mathcal{S}m\mathcal{P}$, takie że $A \cup B = \mathbb{R}$.*

(3) *Istnieją zbiory $A, B \notin \mathcal{SP}$, takie że $A \cup B = \mathbb{R}$.*

Zatem, na prostej, rodziny $\mathcal{SP}$ i $\mathcal{ES}m\mathcal{P}$ są nieporównywalne w sensie inkluzji oraz $\mathcal{S}m\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{ES}m\mathcal{P}$ ([P23, Corollary 2]). Poprzednie twierdzenie pokazuje, że zbiory "duże" mogą nie mieć własności Smitała. Z następnego wynika, że własność tę mogą mieć zbiory "małe". Symbol λ_* oznacza miarę wewnętrzną Lebesgue'a.

Twierdzenie 6.52 ([P23, Theorem 3]). *Istnieje zbiór $A \subset \mathbb{R}$, taki że $\lambda_*(A) = 0$ i A ma własność Smitała.*

W drugiej części pracy uogólniamy własność Smitała, zastępując ideał zbiorów miary zero innym ideałem. Niech $\mathcal{I}$ będzie właściwym ideałem podzbiorów abelowej grupy topologicznej X . Mówimy, że zbiór $A \subset X$ ma *własność Smitała względem $\mathcal{I}$* ($A \in \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{I}}$), jeżeli $(A + D)^c \in \mathcal{I}$ dla dowolnego zbioru gęstego D .

Jeżeli grupa topologiczna X jest ośrodkowa, a ideał $\mathcal{I}$ jest niezmienniczy na przesunięcia, to $\mathcal{I} \cap \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{I}} = \emptyset$ oraz $\mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{I}} \subset \mathcal{SP}$ ([P23, Proposition 5]). Oznaczmy przez $\mathcal{F}in$ ($Count$) ideał zbiorów skończonych (przeliczalnych).

Twierdzenie 6.53 ([P23, Theorem 4, Corollary 4]). *W grupie $(\mathbb{R}, +)$ zachodzą inkluzje*

- (1) $\mathcal{S}m\mathcal{P}_{\{\emptyset\}} \subsetneq \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{F}in} \subsetneq \mathcal{S}m\mathcal{P}_{Count} \subsetneq \mathcal{S}m\mathcal{P}$.
- (2) $\mathcal{L} \cap \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\{\emptyset\}} \subsetneq \mathcal{L} \cap \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{F}in} \subsetneq \mathcal{L} \cap \mathcal{S}m\mathcal{P}_{Count} \subsetneq \mathcal{L} \cap \mathcal{S}m\mathcal{P}$.

Dla zbiorów pierwszej kategorii dostajemy wyniki podobne jak dla zbiorów miary zero.

Twierdzenie 6.54 ([P23, Theorem 6]). *Założmy, że X jest abelową grupą topologiczną. Wtedy*

- (1) $\mathcal{B}a \setminus \mathcal{M} \subset \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$.
- (2) *Jeżeli X jest ośrodkową przestrzenią Baire'a, to $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}} = \emptyset$ i $\mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}} \subset \mathcal{SP}$.*
- (3) *Jeżeli X jest lokalnie zwarta, σ -zwarta i nie jest dyskretna, to rodzina $\mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$ jest nieporównywalna (w sensie inkluzji) z $\mathcal{S}m\mathcal{P}$ oraz $\mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}} \subsetneq \mathcal{SP}$.*

Twierdzenie 6.55 ([P23, Theorem 7]). *W grupie $(\mathbb{R}, +)$:*

- (1) *Istnieją zbiory $A, B \in \mathcal{SP} \setminus \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$, takie że $A \cup B = \mathbb{R}$.*
- (2) *Istnieją takie zbiory $A \notin \mathcal{SP}$ i $B \in \mathcal{SP} \setminus \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}}$, że $A \cup B = \mathbb{R}$.*

Oznaczmy przez $\mathcal{M}ic$ ideał zbiorów mikroskopijnych na prostej (patrz [P24] poniżej).

Twierdzenie 6.56 ([P23, Proposition 7]). *W grupie $(\mathbb{R}, +)$:*

- (1) $\mathcal{S}m\mathcal{P}_{Count} \subsetneq \mathcal{S}m\mathcal{P}_{\mathcal{M}ic} \subsetneq \mathcal{S}m\mathcal{P}$.

- (2) Rodzina $\mathcal{SmP}_{\mathcal{Mic}}$ jest nieporównywalna z $\mathcal{SmP}_{\mathcal{M}}$.
- (3) Rodzina $\mathcal{SmP}_{\mathcal{Mic}}$ jest nieporównywalna z $\mathcal{SmP}_{\mathcal{M} \cap \mathcal{N}}$.

• Praca [P24] (napisana wspólnie z Markiem Balcerzakiem i Piotrem Nowakowskim).

Używając narzędzi miarowych i topologicznych, badamy jak duże są pewne podrodziny rodziny symetrycznych (centralnych) zbiorów Cantora.

Ustalmy ciąg $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ liczb z przedziału $(0, 1)$. Przyjmijmy $I = [0, 1]$ i odejmijmy od I koncentryczny z nim przedział otwarty P długości $a_1 |I| = a_1$. Lewą składową różnicy $I \setminus P$ oznaczmy I_0 , a prawą I_1 . Indukcyjnie, dla $i \in \mathbb{N}$, $s \in \{0, 1\}^i$ odejmujemy od przedziału I_s koncentryczny z nim przedział otwarty P_s długości $a_{i+1} |I_s|$. Lewą składową różnicy $I_s \setminus P_s$ oznaczamy I_{s0} , a prawą I_{s1} . W n -tym kroku otrzymujemy 2^n przedziałów bazowych I_s , $s \in \{0, 1\}^n$, długości

$$d_n := d_n(a) = \frac{1}{2^n} (1 - a_1) \dots (1 - a_n).$$

Zbiór

$$C(a) := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{s \in \{0,1\}^n} I_s$$

nazywamy *symetrycznym* (lub *centralnym*) *zbiorem Cantora*. Rodzinę wszystkich symetrycznych zbiorów Cantora oznaczamy $\mathcal{CS}$.

Rozważmy $X := (0, 1)^{\mathbb{N}}$ z topologią produktową i z miarą probabilistyczną μ będącą produktem miar Lebesgue'a na $(0, 1)$. Funkcja $X \ni a \mapsto C(a) \in \mathcal{CS}$ jest bijekcją z X na $\mathcal{CS}$. Utożsamiając zbiór $\mathcal{A} \subset \mathcal{CS}$ ze zbiorem $\mathcal{A}^* := \{a \in X : C(a) \in \mathcal{A}\}$ możemy badać jego miarę i kategorię Baire'a.

Mówimy, że zbiór $A \subset \mathbb{R}$ jest *mikroskopijny*, jeżeli dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taki ciąg przedziałów $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokrywający A , że $\lambda(J_n) < \varepsilon^n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Definicję tę wprowadził J. Appell w [5]. Własności zbiorów mikroskopijnych były badane m.in. w [6] i [49]. Rodzina zbiorów mikroskopijnych jest σ -ideałem. Oznaczamy ją $\mathcal{Mic}$.

W [P24] badamy przekroje rodziny $\mathcal{CS}$ z rodzinami: $\mathcal{Mic}$ - zbiorów mikroskopijnych, $\mathcal{H}_0$ - zbiorów wymiaru Hausdorffa zero, $\mathcal{Por}$ - zbiorów porowatych, $\mathcal{SPor}$ - zbiorów silnie porowatych i $\mathcal{N}$ - zbiorów miary zero. Przekroje te oznaczamy $\widehat{\mathcal{Mic}}$, $\widehat{\mathcal{H}}_0$, $\widehat{\mathcal{Por}}$, $\widehat{\mathcal{SPor}}$ i $\widehat{\mathcal{N}}$. Wiadomo, że $\mathcal{Mic} \subsetneq \mathcal{H}_0 \subsetneq \mathcal{N}$ i $\mathcal{SPor} \subsetneq \mathcal{Por} \subsetneq \mathcal{N}$ ([6], [49], [101] i [113]).

Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$. Przyjmijmy

$$\mathcal{M}(f) := \left\{ C(a) \in \mathcal{CS} : \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n \in \mathbb{N}} d_n < \varepsilon^{f(n)} \right\}.$$

Własność 6.57 ([P24]). Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$ i $C(a) \in \mathcal{CS}$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $C(a) \in \mathcal{M}(f)$,
- (2) $\forall_{\varepsilon > 0} \forall_{m \in \mathbb{N}} \exists_{n \geq m} d_n < \varepsilon^{f(n)}$,
- (3) $\liminf_{n \rightarrow \infty} (d_n)^{1/f(n)} = 0$,
- (4) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{-\ln d_n} = 0$.

Mamy oczywiście $\mathcal{M}(g) \subset \mathcal{M}(f)$, gdy $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

Twierdzenie 6.58 ([P24]). Niech $f : \mathbb{N} \rightarrow [1, \infty)$. Wtedy:

- (1) $\mathcal{M}(f) \subset \mathcal{M}(n)$ albo $\mathcal{M}(f) = \mathcal{CS}$.
- (2) Zbiór $\mathcal{M}(f)^*$ jest rezydualny i typu $\mathcal{G}_\delta$ w X .
- (3) $\mu(\mathcal{M}(n)^*) = 0$.

Twierdzenie 6.59 ([P24]). $\mathcal{M}(2^n) \subsetneq \widehat{\mathcal{Mic}} \subset \bigcap_{p \in (1,2)} \mathcal{M}(p^n)$.

Twierdzenie 6.60 ([P24]). $\bigcup_{p>1} \mathcal{M}(p^n) \subsetneq \mathcal{M}(n) = \widehat{\mathcal{H}}_0$.

W dowodzie ostatniego twierdzenia był użyty wzór na wymiar Hausdorffa symetrycznego zbioru Cantora: $\dim_H C(a) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{-\ln d_n}$ ([51]). Przy badaniu porowatych i superporowatych zbiorów z $\mathcal{CS}$ wykorzystujemy twierdzenie mówiące, że zbiór $C(a)$ jest porowaty (silnie porowaty) wtedy i tylko wtedy, gdy $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$ ($\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$) ([101]).

Własność 6.61 ([P24]). $\widehat{\mathcal{H}}_0 \subset \widehat{\mathcal{S}Por}$.

Twierdzenie 6.62 ([P24]). (1) $\widehat{\mathcal{S}Por} \subsetneq \widehat{\mathcal{P}or} \subsetneq \widehat{\mathcal{N}}$.

(2) $\mu(\widehat{\mathcal{S}Por}^*) = 1$.

(3) Zbiory $\widehat{\mathcal{S}Por}^*$ i $\widehat{\mathcal{N}}^*$ są typu $\mathcal{G}_\delta$, a zbiór $\widehat{\mathcal{P}or}^*$ jest typu $\mathcal{G}_{\delta\sigma}$ w X .

Pracę [P24] można podsumować następująco:

– $\mathcal{M}(2^n) \subsetneq \widehat{\mathcal{M}ic} \subsetneq \widehat{\mathcal{H}}_0 \subsetneq \widehat{\mathcal{S}Por} \subsetneq \widehat{\mathcal{P}or} \subsetneq \widehat{\mathcal{N}}$,

– $\mathcal{M}(2^n)^*$ jest rezydualny, $\mu(\widehat{\mathcal{H}}_0^*) = 0$ i $\mu(\widehat{\mathcal{S}Por}^*) = 1$.

Zbiór Cantora i jego uogólnienia należą do najpopularniejszych zbiorów badanych przez matematyków, a literatura im poświęcona jest bardzo obszerna. W [P24] korzystaliśmy z artykułów [51] i [24]. Bardzo interesującym kierunkiem w studiach nad zbiorami Cantora jest badanie ich algebraicznych sum, różnic, a także iloczynów. Następuje tu połączenie tematyki dotyczącej zbiorów Cantora, zbiorów podsum szeregów oraz twierdzenia Steinhausa ([23], [4], [84] i [15]). Tematyka ta wiąże się też z zastosowaniem zbiorów Cantora w teorii układów dynamicznych, krystalografii i fizyce (porównaj [70], [54], [97]).

- Praca [P25] (napisana wspólnie z Grażyną Horbaczewską) - wysłana do recenzji.

Wyniki z tej pracy zostały krótko omówione na końcu rozdziału 5.

LITERATURA

- [1] A. Andretta, R. Camerlo, *The descriptive set theory of the Lebesgue density theorem*, Adv. Math. **234** (2013), 1–42.
- [2] A. Andretta, R. Camerlo, *Analytic sets of reals and the density function in the Cantor space*, Eur. J. Math. **5** (2019), 49–80.
- [3] A. Andretta, R. Camerlo, C. Costantini, *Lebesgue density and exceptional points*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **118** (2019), 103–142.
- [4] R. Anisca, M. Ilie, *A technique of studying sums of central Cantor sets*, Canad. Math. Bull. **44** (2001), 12–18.
- [5] J. Appell, *Insemi et operatori "piccoli" in analisi funzionale*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **33** (2001), 127–199.
- [6] J. Appell, E. D'Aniello, M. Văth, *Some remarks on small sets*, Ric. Math. **50** (2001), 255–274.
- [7] R. Augustyniak, *Różnice i k-sumy w grupach reszt modulo q*, Praca magisterska, Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej, 2018.
- [8] V. Aversa, W. Wilczyński, *Simple density topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II **53** (2004), 344–352.
- [9] V. Aversa, W. Wilczyński, *Some remarks on I-approximately continuous functions*, Ricerche Mat. **33** (1984), 63–79.
- [10] M. Balcerzak, S. Głąb, *Measure-category properties of Borel plane sets and Borel functions of two variables*, Acta Math. Hungar. **126** (2010), 241–252.
- [11] M. Balcerzak, J. Hejduk, *Density topologies for products of σ -ideals*, Real Anal. Exchange **20** (1994-95), 163–177.
- [12] T. Banakh, A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik, *Topological and measure properties of some self-similar sets*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **46** (2015), 1013–1028.
- [13] T. Banakh, M. Choban, I. Guran, I. Protasov, *Some open problems in topological algebra*, Visnyk Lviv Univ. **61** (2003), 13–20, arXiv:1202.1619v1.

- [14] A. Bartoszewicz, M. Filipczak, T. Natkaniec, *On Smital properties*, Topology Appl. **158** (2011), 2066–2075.
- [15] A. Bartoszewicz, S. Głab, J. Marchwicki, *Recovering a purely atomic finite measure from its range*, J. Math. Anal. Appl. **467** (2018), 825–841.
- [16] T. Bartoszyński, H. Judah, *Set Theory: On the Structure of the Real Line*, A K Peters, Wellesley, 1995.
- [17] A. Beck, H. H. Corson, A. B. Simon, *The interior points of the product of two subsets of a locally compact group*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 648–652.
- [18] P. Billingsley, *Probability and Measure*, John Wiley & Sons, New York-Chichester-Brisbane-Toronto, 1979.
- [19] N. H. Bingham, A. J. Ostaszewski, *The Steinhaus-Weil property: Its converse, Solecki amenability and subcontinuity*, arXiv:1607.00049.
- [20] N. H. Bingham, A. J. Ostaszewski, *Beyond Lebesgue and Baire IV: Density topologies and a converse Steinhaus-Weil theorem*, Topology Appl. **239** (2018), 274–292.
- [21] A. M. Bruckner, *Differentiation of Integrals*, Amer. Math. Monthly **78** (1971).
- [22] L. Bukovský, *The Structure of the Real Line*, Birkhäuser, Basel, 2011.
- [23] C. A. Carbelli, K. E. Hare, U. M. Molter, *Sums of Cantor sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems **17**(1997), 1299–1313.
- [24] Cheng Qin Qu, Hui Rao, Wei Yi Su, *Hausdorff measure of homogeneous Cantor set*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), 15–20.
- [25] J. Cichoń, *On two-cardinal properties of ideals*, Trans. Amer. Math. Soc. **314** (1989), 693–708.
- [26] D. Connolly, J. H. Williamson, *Difference-covers that are not k -sum-covers. II*, Proc. Camb. Phil. Soc. **75** (1974), 63–73.
- [27] M. Crnjac, B. Guljaš, H. I. Miller, *On some questions of Ger, Grub and Kraljević*, Acta Math. Hungar. **57** (1991), 253–257.
- [28] M. Csörnyei, J. Grahl, T. C. O’Neil, *Points of middle density in the real line*, Real Anal. Exchange, **37** (2012), 243–248.
- [29] A. Denjoy, *Mémoire sur les dérivés des fonctions continues*, J. Math. Pures Appl. **1** (1915), 105–240.
- [30] A. Denjoy, *Sur les fonctions dérivées sommables*, Bull. Soc. Math. France **43** (1916), 161–248.
- [31] E. P. Dolženko, *Graničnye svojstva proizvol’nych funkcij*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **31** (1967), 3–14.
- [32] L. Dubikajtis, C. Ferens, R. Ger, M. Kuczma, *On Mikusiński’s functional equation*, Ann. Polon. Math. **28** (1973), 39–47.
- [33] M. Elekes, A. Máthé, *Can we assign the Borel hulls in a monotone way?*, Fund. Math. **205** (2009), 105–115.
- [34] P. Erdős, *Some remarks on set theory*, Ann. of Math. (2) **44** (1943), 643–646.
- [35] M. Filipczak, *ψ -density topology is not regular*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Ser. Rech. Déform. **43** (2004), 21–25.
- [36] M. Filipczak, J. Hejduk, *On topologies associated with the Lebesgue measure*, Tatra Mt. Math. Publ. **28** (2004), 187–197.
- [37] M. Filipczak, J. Hejduk, W. Wilczyński, *On homeomorphisms of the density type topologies*, Annales Societatis Mathematicae Polonae **45** (2005), 151–159.
- [38] M. Filipczak, E. Wagner-Bojakowska, *The interior operation in f -density topology*, Tatra Mt. Math. Publ. **35** (2007), 51–64.
- [39] M. Filipczak, M. Terepeta, *On Δ_2 -condition in density-type topologies*, Demonstratio Math. **44** (2011), 423–432.
- [40] C. Goffman, C.J. Neugebauer, T. Nishiura, *The density topology and approximate continuity*, Duke Math. J. **28** (1961), 497–505.
- [41] C. Goffman, D. Waterman, *Approximately continuous transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 116–121.
- [42] M. Górajka, W. Wilczyński, *Density topology generated by the convergence everywhere except for a finite set*, Demonstratio Math. **46** (2013), 197–208.
- [43] J. A. Haight, *Difference covers which have small k -sums for any k* , Mathematika **20** (1973), 109–118.
- [44] H. Hashimoto, *On the $\ast$ -topology and its application*, Fund. Math. **91** (1976), 5–10.
- [45] O. Haupt, Ch. Pauc, *La topologie approximative de Denjoy envisagée comme vraie topologie*, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 390–392.
- [46] J. Hejduk, *On the density topologies generated by functions*, Tatra Mt. Math. Publ. **40** (2008), 133–141.
- [47] J. Hejduk, *On the abstract density topologies*, Selected Papers of the 2010 International Conference on Topology and its Applications, 2012, 79–85.

- [48] J. Hejduk, R. Wiertelak, *On the abstract density topologies generated by lower and almost lower density operators*, rozdział w: *Traditional and present-day topics in real analysis*, Łódź University Press 2013, 431–447.
- [49] G. Horbaczewska, A. Karasińska, E. Wagner-Bojakowska, *Properties of the σ -ideal of microscopic sets*, rozdział w: *Traditional and present-day topics in real analysis*, Łódź University Press 2013, 325–343.
- [50] T. H. Jackson, J. H. Williamson, D. R. Woodall, *Difference-covers that are not k -sum-covers. I*, Proc. Camb. Phil. Soc. **72** (1972), 425–438.
- [51] J. Kardos, *Hausdorff dimension of symmetric Cantor sets*, Acta Math. Hungar. **84** (1999), 257–266.
- [52] V. Kelar, *Topologies generated by porosity and strong porosity*, Real Anal. Exchange **16** (1990-91), 255–267.
- [53] V. I. Kol'jada, *O metričeskom svojstve Darbu*, Analysis Math. **9** (1983), 291–312.
- [54] R. L. Kraft, *Random inrersections of thick Cantor sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1315–1328.
- [55] M. Kuczma, *An Introduction to the Theory of Functional Equations and Inequalities*, PWN, Warszawa, Katowice, 1985.
- [56] M. Kuczma, J. Smítal, *On measures connected with the Cauchy equation*, Aequationes Math. **14** (1976), 421–428.
- [57] K. Kuratowski, *Topology*, vol. 1, Academic Press, 1966.
- [58] O. Kurka, *Optimal quality of exceptional points for the Lebesgue density theorem*, Acta Math. Hungar. **134** (2012), 209–268.
- [59] H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.
- [60] A. Loranty, *Separation axioms of the density type topologies*, Reports on Real Analysis Conference Rowy 2003, Łódź, 2004, 119–128.
- [61] J. Lukeš, J. Malý, L. Zajíček, *Fine topology methods in Real Analysis and Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [62] E. Lazarow, *On the Baire class of I -approximate derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 667–674.
- [63] E. Lazarow, W. Wilczyński, *I -approximate derivatives*, Radovi Matematički **5** (1989), 15–27.
- [64] L. Maligranda, *Orlicz Spaces and Interpolation*, Seminários de Matemática, Univ. Estadual de Campinas, 1989.
- [65] N. F. G. Martin, *Generalized condensation points*, Duke Math. J. **28** (1961), 507–514.
- [66] E. J. McShane, *Images of sets satisfying the condition of Baire*, Ann. of Math. **51**(1950), 380–386.
- [67] C. G. Mendez, *On sigma-ideals of sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **60** (1976), 124–128.
- [68] Y. V. Mospan, *A converse to a theorem of Steinhaus*, Real Anal. Exchange **31** (2005-06), 291–294.
- [69] S. Müller, P. Schlicht, D. Schritterser, T. Weinert, *Lebesgue's Density Theorem and definable selectors for ideals*, arXiv:1811.06489v2.
- [70] S. E. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **50** (1979), 101–151.
- [71] T. Nishiura, *The topology of almost everywhere continuous, approximately continuous functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar **37** (1981), 317–328.
- [72] R. J. O'Malley, *Approximately differentiable functions: the r topology*, Pacific J. Math. **72** (1977), 207–222.
- [73] R. J. O'Malley, *Approximately continuous functions which are continuous almost everywhere*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **33** (1979), 395–404.
- [74] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom typus B* , Bull. Acad. Polon. Ser. A **8** (1932), 207–220; przedruk w *Collected Papers*, PWN, Warszawa 1988, 217–230.
- [75] A. J. Ostaszewski, *Effros, Baire, Steinhaus and non-separability*, Topology Appl. **195** (2015), 265–274.
- [76] J. C. Oxtoby, *Measure and Category*, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [77] E. Pap (ed.), *Handbook of Measure Theory*, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [78] B. J. Pettis, *Remarks on a theorem of E. J. McShane*, Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 166–171.
- [79] S. Piccard, *Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien*, Mémoires de l'Université de Neuchâtel **13**, Paris, 1939.
- [80] W. Poreda, E. Wagner-Bojakowska, W. Wilczyński, *A category analogue of the density topology*, Fund. Math. **125** (1985), 167–173.
- [81] W. Poreda, E. Wagner-Bojakowska, W. Wilczyński, *Remarks on I -density and I -approximately continuous functions*, Comment. Math. Univ. Carolin. **26** (1985), 553–563.
- [82] W. Poreda, W. Wilczyński, *Topology similar to the density topology*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź Sér. Rech. Déform. **34** (2001), 55–60.
- [83] V. Prokaj, *A characterization of singular measures*, Real Anal. Exchange, **29** (2003-04), 805–812.

- [84] F. Prus-Wisniowski, F. Tulone, *The arithmetic decomposition of central Cantor sets*, J. Math. Anal. Appl. **467** (2018), 26–31.
- [85] M. M. Rao, Z. D. Ren, *Theory of Orlicz Spaces*, Marcel Dekker, Inc., 1991.
- [86] A. Rosłanowski, S. Shelah, *Monotone hulls for $\mathcal{N} \cap \mathcal{M}$* , Period. Math. Hungar. **69** (2014), 79–95.
- [87] A. Rosłanowski, S. Shelah, *Small-large subgroups of the reals*, Math. Slovaca **68** (2018), 473–484.
- [88] D. N. Sarkhel, A. K. De, *The proximally continuous integrals*, J. Austral. Math. Soc. (Series A) **31** (1981), 26–45.
- [89] W. Sierpiński, *Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle*, Fund. Math. **22** (1934), 276–280.
- [90] S. M. Simmons, *A converse Steinhaus theorem for locally compact groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), 383–386.
- [91] N. Sinharoy, *Remarks on Darboux and Mean Value properties of approximate derivatives*, Ann. Soc. Math. Polon. Ser. I, Comment. Math. **23** (1983), 315–324.
- [92] J. Smítal, *On the functional equation $f(x+y) = f(x) + f(y)$* , Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **13** (1968), 555–561.
- [93] H. Steinhaus, *Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive*, Fund. Math. **1** (1920), 93–104.
- [94] K. Stromberg, *An elementary proof of Steinhaus's theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **36** (1972), 308.
- [95] A. Szenes, *Exceptional points for Lebesgue density theorem on the real line*, Adv. Math. **226** (2011), 764–778.
- [96] C. T. Taam, *Recurrent Properties of Conservative Measurable Transformations*, Duke Math. J. **28** (1961), 277–279.
- [97] Y. Takahashi, *Products of two Cantor sets*, Nonlinearity **30** (2017), 2114–2137.
- [98] S. J. Taylor, *On strengthening the Lebesgue Density Theorem*, Fund. Math. **46** (1959), 305–315.
- [99] M. Terepeta, E. Wagner-Bojakowska, *ψ -density topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo **48** (1999), 451–476.
- [100] B. S. Thomson, *Derivation bases on the real line. II*, Real Anal. Exchange **8** (1982–83), 278–442.
- [101] B. S. Thomson, *Real Functions*, Lecture Notes in Math. 1170, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
- [102] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Gamberini e Parmeggiani, Bologna, 1905.
- [103] E. Wagner-Bojakowska, *Remarks on ψ -density topology*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **49** (2001), 79–87.
- [104] E. Wagner-Bojakowska, W. Wilczyński, *Comparison of ψ -density topologies*, Real Anal. Exchange **25** (1999–2000), 661–672.
- [105] E. Wagner-Bojakowska, W. Wilczyński, *The interior operation in a ψ -density topology*, Rend. Circ. Mat. Palermo **49** (2000), 5–26.
- [106] H. Weber, E. Zoli, *On the Steinhaus property in topological groups*, Topology Appl. **153** (2006), 2035–2046.
- [107] W. Wilczyński, *A category analogue of the density topology, approximate continuity and the approximate derivative*, Real Anal. Exchange **10** (1984–85), 241–265.
- [108] W. Wilczyński, *O'Malley property for category density*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **35** (1987), 141–145.
- [109] W. Wilczyński, *Density topologies*, rozdział w: *Handbook of Measure Theory*, North-Holland, Amsterdam, 2002, 675–702.
- [110] W. Wilczyński, W. Wojdowski, *Complete density topology*, Indag. Math. (N.S.) **18** (2007), 295–303.
- [111] W. Wojdowski, *Density topology involving measure and category*, Demonstratio Math. **22** (1989), 793–812.
- [112] L. Zajíček, *Porosity, I-density topology and abstract density topologies*, Real Anal. Exchange **12** (1986–87), 313–326.
- [113] L. Zajíček, *Porosity and σ -porosity*, Real Anal. Exchange **13** (1987–88), 314–350.
- [114] L. Zajíček, *On σ -porous sets in abstract spaces*, Abstr. Appl. Anal. **2005** (2005), 509–534.
- [115] L. Zajíček, *Alternative definitions of J-density topology*, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **28** (1987), 57–61.

Tomasz Filipczak