

KRZYSZTOF UŁAMEK
WIESŁAW PAWŁOWSKI

Katedra Geodezji, Kartografii Środowiska i Geometrii Wykreślnej
Politechniki Łódzkiej

O PROPORCJACH OSI ELIPS BĘDĄCYCH OBRAZAMI PRZEKROJÓW WALCA W PERSPEKTYWIE PIONOWEJ

Opiniodawca: **dr hab. Edwin Koźniewski**

Jeżeli rozważymy przekroje walca otrzymane z przecięcia płaszczyznami prostopadłymi do jego osi obrotu, to w rzucie środkowym otrzymamy układ stożkowych (elips) będących obrazami okręgów. Sformułowane własności umożliwiają określanie długości osi krótkich tych elips ze względu na ich położenie w stosunku do punktu głównego rzutu. W pracy wskazano pewne proporcje dotyczące osi tych stożkowych w perspektywie pionowej walca w przypadku, gdy oś obrotu walca jest równoległa do rzutni i ma punkt wspólny z promieniem głównym widzenia.

1. Wprowadzenie

Teoria odwzorowań brył obrotowych w perspektywie jest jedną z częściej wykorzystywanych i kluczowych dla wizualizacji obiektów trójwymiarowych. Z punktu widzenia teorii rzutu środkowego w pracy rozważamy jedynie przypadek, w którym oś obrotu walca jest równoległa do rzutni (warunek 1) i przecinana jest promieniem głównym widzenia (warunek 2). Sytuacja taka, szczególnie z punktu widzenia geometrii wykreślnej, jest często wykorzystywana np. w rysunku architektonicznym, ponieważ jest najbliższa perspektywie psychologicznej, która jest złożeniem wielu widoków, z których każdy ma własny punkt główny tła. W przypadku brył obrotowych, w perspektywie psychologicznej, ich widok jest zawsze symetryczny – oś obrotu bryły jest osią symetrii widoku. Tak dzieje się zarówno w przypadku brył o osi prostopadłej, jak i nieprostopadłej do głównego promienia widzenia.

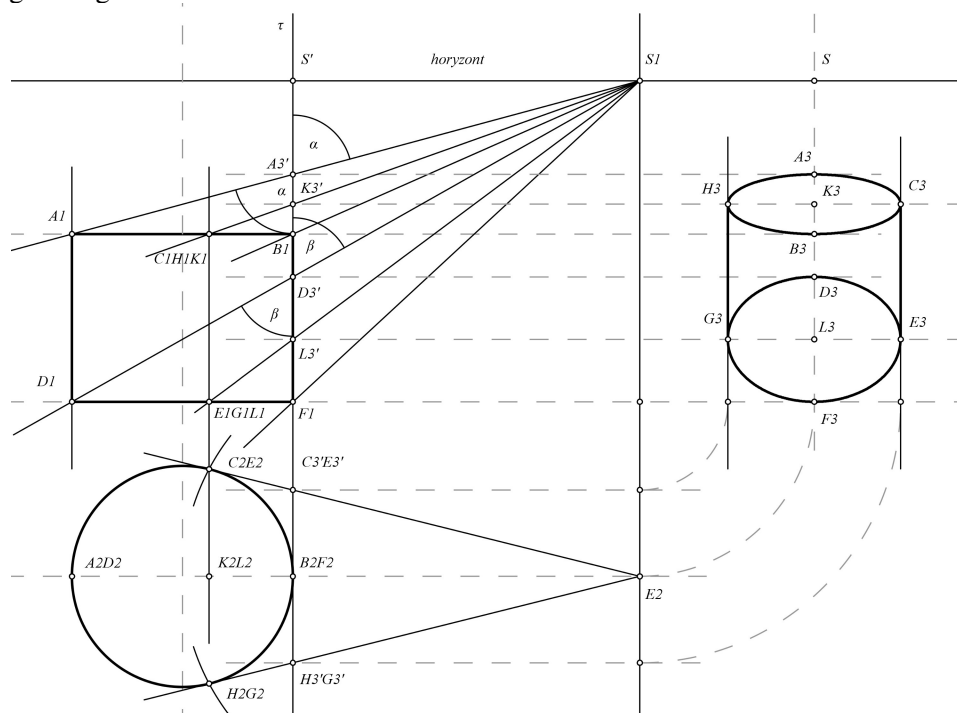
Przytoczone i udowodnione poniżej własności mogą być wykorzystane do usprawnienia rysowania obrazu walca obrotowego w perspektywie pionowej, spełniającego warunki 1 i 2. Sformułujemy teraz dwa zadania.

Zadanie 1. W perspektywie pionowej mamy dane:

punkt główny S tła τ i jedną elipsę, będącą odwzorowaniem przekroju walca płaszczyzną prostopadłą do jego osi obrotu. Szukamy innych elips będących obrazami okręgów, odpowiadających przekrojom walca obrotowego innymi płaszczyznami prostopadłymi do jego osi obrotu.

Zadanie 2. W perspektywie pionowej mamy dane:

dwie elipsy, będące obrazami przekrojów walca płaszczyznami prostopadłymi do jego osi obrotu, a o punkcie głównym S wiemy dodatkowo, że nie leży pomiędzy środkami tych elips. Szukamy elips będących obrazami innych okręgów należących do tego walca, odpowiadających przekrojom walca obrotowego płaszczyznami prostopadłymi do jego osi obrotu oraz położenia punktu głównego S .



Rys. 1. Własności proporcji osi krótkich elips w rysunku perspektywnym walca

Fig. 1. The ratios properties of the minor axes of ellipses in a perspective drawing of a cylinder

2. Pierwsza własność dotycząca proporcji osi elips w rysunku perspektywicznym walca

Jeżeli rzutujemy w rzucie środkowym na płaszczyznę walec o osi równoległej do rzutni i na tej rzutni punkt główny S należy do obrazu tej osi, to obrazem przekroju walca płaszczyzną prostopadłą do jego osi obrotu jest każdorazowo elipsa, której długość krótkiej osi jest wprost proporcjonalna do odległości punktu S od tego końca krótkiej osi, który jest bliższy punktowi S .

Według oznaczeń z rysunku 1 mamy:

$$|A_3B_3| / |SA_3| = |D_3F_3| / |SD_3|. \quad (1)$$

Uzasadnienie

Zauważmy podobieństwo trójkątów (rys. 1):

$$\triangle A_1B_1A_3' \sim \triangle S_1S_1'A_3',$$

$$\triangle D_1F_1D_3' \sim \triangle S_1S_1'D_3'.$$

Z właściwości trójkątów podobnych wynika, że:

$$|A_3'B_1| / |S_1'A_3'| = |A_1B_1| / |S_1S_1'|,$$

$$|D_3'F_1| / |S_1'D_3'| = |A_1B_1| / |S_1S_1'|.$$

Z czego bezpośrednio można wywnioskować, że:

$$|A_3'B_1| / |S_1'A_3'| = |D_3'F_1| / |S_1'D_3'|,$$

ale

$$|A_3'B_1| = |A_3B_3|, \quad |S_1'A_3'| = |SA_3|,$$

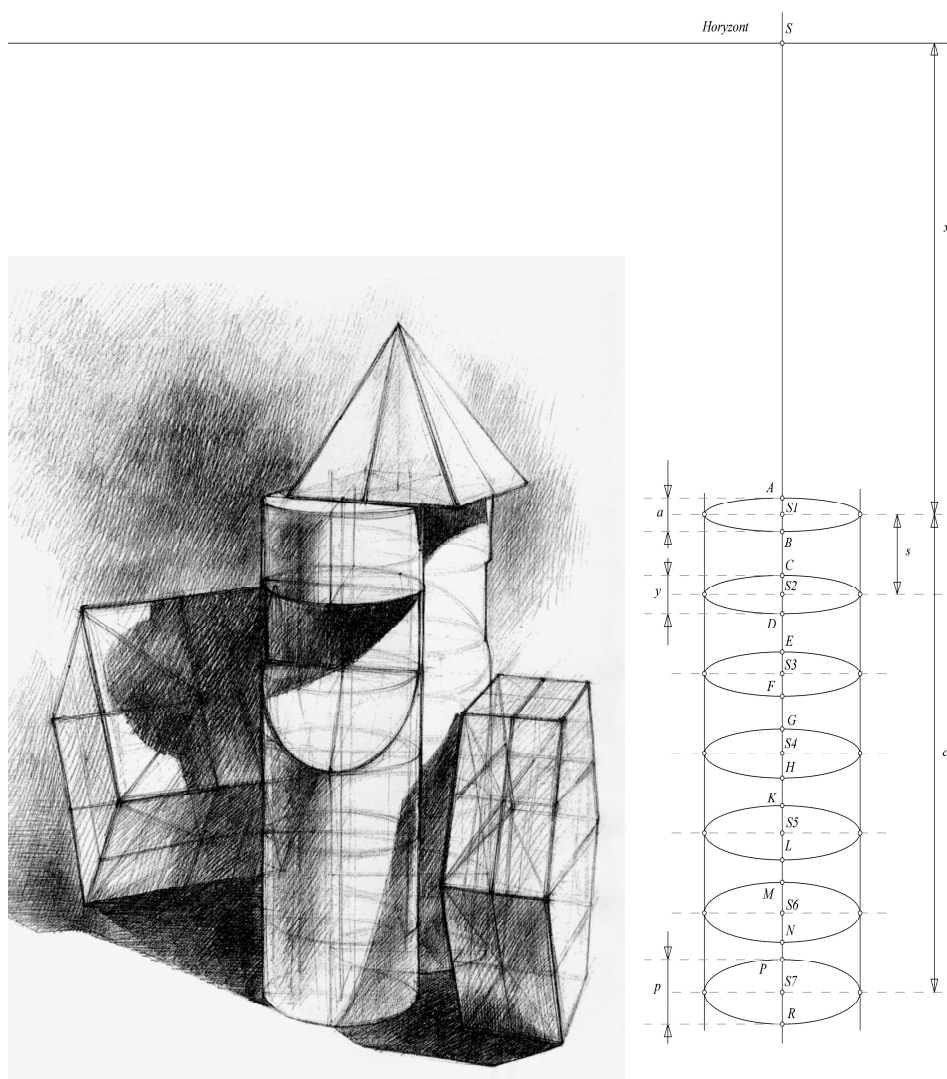
$$|D_3'F_1| = |A_1B_1|, \quad |S_1'D_3'| = |A_1B_1|.$$

Po zamianie otrzymamy proporcję (1):

$$|A_3B_3| / |SA_3| = |D_3F_3| / |SD_3|.$$

Gdy będziemy porównywać każdorazowo długość krótkiej osi elipsy i odległość punktu S od punktu B_3 - końca osi krótkiej, który jest dalej położony od punktu S niż A_3 i zastosujemy znaną własność proporcji ($a/b = c/d \Rightarrow (a+c)/(b+d) = c/d$), otrzymamy proporcję

$$|A_3B_3| / |SB_3| = |D_3F_3| / |SF_3|. \quad (2)$$



Rys. 2. Przykład zastosowania drugiej własności osi elips w rysunku odręcznym walca (rysował K. Ułamek)

Fig. 2. Example of application of the second property during free-hand drawing of cylinder (by K. Ułamek)

Podobnie, gdy będziemy porównywać długość osi krótkiej z odległością punktu S od środka elipsy i skorzystamy z cytowanej wyżej znanej własności proporcji, otrzymamy proporcję

$$|A3B3| / |SK3| = |D3F3| / |SL3|. \quad (3)$$

Proporcje (1), (2), (3) są więc równoważne.

3. Druga własność dotycząca proporcji osi elips w rysunku perspektywicznym walca

Założmy, że w perspektywie pionowej na płaszczyznę rysujemy walec o osi równoległej do rzutni i na tej rzutni punkt główny tła S należy do rzutu tej osi, ale nie znamy jego położenia. Założmy dalej, że mamy dwie elipsy będące obrazami w perspektywie pionowej przekrojów walca płaszczyznami prostopadłymi do jego osi obrotu. O punkcie głównym S wiemy dodatkowo, że nie leży pomiędzy środkami danych elips. Możemy dla dowolnego punktu (np. jako środka elipsy) leżącego na osi pomiędzy środkami elips danych narysować kolejną elipsę będącą zobrazowaniem kolejnego, prostopadłego do osi, przekroju walca poprzez określenie położenia krótkiej osi tej elipsy. Jest to możliwe, gdyż długość powyższej osi jest równa sumie długości krótkiej osi mniejszej elipsy i takiej części różnicy pomiędzy długością krótkiej osi elipsy większej i mniejszej, jaka wynika ze stosunku odległości środka szukanej elipsy względem środka elipsy mniejszej do odległości wzajemnej środków elips mniejszej i większej.

W naszym przypadku (rys. 2) możemy zapisać:

$$|CD| = |AB| + [(|PR| - |AB|) (|SIS2| / |SIS7|)]. \quad (4)$$

Uzasadnienie

Przyjmujemy oznaczenia jak na rysunku 2.

Założmy, że mamy dany walec z wrysowanymi dwiema elipsami: $e1$ (do niej należą punkty A, B , środek $S1$) i $e7$ (do niej należą punkty P, R , środek $S7$). Szukamy na przykład długości osi krótkiej elipsy $e2$ o środku w $S2$ leżącym pomiędzy $S1$ i $S7$. Nie znamy natomiast położenia punktu S , ale wiemy, że punkt ten, leżąc na osi, nie leży pomiędzy punktami $S1$ i $S7$. Niech x będzie odległością środka $S1$ elipsy $e1$ od punktu S (odcinek ten ma swój początek w środku tej elipsy z dwóch danych, która ma mniejszą oś krótką), czyli $x = |S1S|$, a y będzie długością osi krótkiej szukanej elipsy $e2$, tzn. $y = |CD|$. To dwie niewiadome. Oznaczmy dodatkowo długość krótkiej osi elipsy $e1$ jako a ($a = |AB|$), długość osi krótkiej elipsy $e7$ jako p ($p = |PR|$) oraz odległość od $S1$ do $S2$ jako s ($s = |S1S2|$), zaś odległość $S1$ od $S7$ jako c ($c = |S1S7|$). Te wartości mamy dane. Wykorzystując proporcję (3), możemy stworzyć układ równań:

$$a/x = p/(x + c) \quad \text{oraz} \quad a/x = y/(x + s)$$

Z pierwszego równania po przekształceniach otrzymujemy:

$$x = c a / (p - a),$$

zaś z drugiego po przekształceniu i podstawieniu x mamy:

$$y = a + [(p - a) s / c] \quad (5)$$

i po podstawieniu odpowiednich odległości punktów za zmienne występujące w (5) otrzymujemy ostatecznie nierówność (4).

4. Zakończenie

Przedstawione w tej pracy własności osi elips mają swoją genezę w dydaktyce rysunku odręcznego architektonicznego i tam z całą pewnością znajdują swoje naturalne zastosowanie. Przykładem tego jest rysunek 2, na którym, w perspektywie pionowej, ukazany jest zestaw brył geometrycznych, w tym zmodyfikowany walec. Ze względów kompozycyjnych w granicach arkusza rysunkowego nie znajdował się punkt główny rzutu. Wykorzystanie omówionych w pracy proporcji znacznie ułatwiło konstruowanie perspektywy walca i jego pochodnych.

Literatura

- [1] **Bartel K.:** Perspektywa malarska, Tom I, Książnica-Atlas, Lwów Warszawa 1928.
- [2] **Czech L.:** Uniwersalna konstrukcja stożkowych, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2001.
- [3] **Grochowski B.:** Geometria wykreślna z perspektywą stosowaną, PWN, Warszawa 1988.
- [4] **Suzin L.M.:** Perspektywa wykresowa dla architektów, Arkady, Warszawa 1998.
- [5] **Szerszeń S.:** Nauka i rzutach, PWN, Warszawa 1978.
- [6] **Ułamek K.M.:** Three constructions useful during free-hand drawing of geometrical forms based of the Thales' theorem and triangle similarity properties. Proceedings of 6-th Conference "Geometry and Graphics", Ustroń 2009.

THE PROPORTION PROPERTIES OF ELLIPSES' AXES IN THE PERSPECTIVE DRAWING OF A CYLINDER

Summary

This article concerns one of the most common drawing problems; the problem of drawing a cylinder and its derivatives. How can we configure the proportions of upper and lower ellipse properly, if we can place the horizon in the picture and we assume that we know the location and proportions of one of them? How to find additional ellipses if cylinder cross-section with their planes parallel to the base? Answers to those questions can be found in form of a formula (1), (2), (3), (4).