ZESZYTY NAUKOWE POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
Nr 1085 BUDOWNICTWO, z. 62 2010

MARCIN KAMIŃSKI
Zakład Konstrukcji Stalowych
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska
Politechniki Łódzkiej
PIOTR ŚWITA
Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska
Politechniki Łódzkiej

ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI WYBRANYCH KONSTRUKCJI INŻYNIERSKICH O PARAMETRACH LOSOWYCH

Opiniodawca: **prof. dr hab. inż. Paweł Śniady**

Tematem niniejszej pracy jest zastosowanie probabilistycznej analizy numerycznej opartej na uogólnionej metodzie perturbacji stochastycznej do wyznaczenia probabilistycznych momentów obciążenia krytycznego. Obciążenia te wyznaczono za pomocą Stochastycznej Metody Elementów Skończonych dla losowo określonych parametrów geometrycznych przekroju. Wykorzystując metodę funkcji odpowiedzi wyznaczano wartości oczekiwane i odchylenia standardowe sił krytycznych dla płaskiej oraz przestrzennej ramy stalowej, które następnie będzie można wykorzystać do wyznaczania ich wskaźników niezawodności.

1. Wstęp

Zastosowanie metod probabilistycznych w rozwiązywaniu problemów inżynierskich polegających na analizie losowej znalazło ostatnio bezpośrednie zastosowanie w normach do projektowania. Jak wiadomo, przekroje stalowe dzieli się na klasy w zależności od ich smukłości w celu określenia, czy zniszczenie następuje przez uplastycznienie, czy też poprzez utratę stateczności. W szczególnych przypadkach zjawiska niestateczności mogą okazać się decydujące, również w przypadku z lokalnymi lub globalnymi parametrami losowymi [1, 2, 3]. Powszechna optymalizacja w budownictwie ma na celu ograniczenie do minimum kosztów konstrukcji, a co się z tym wiąże, prowadzi do redukcji wymiarów przekrojów elementów przy najbardziej optymalnych schematach statycznych ustroju konstrukcyjnego. W ten sposób uzyskuje się możliwie lekki ustrój, w którym rezerwy nośności zostały maksymalnie ograniczone lub też prawie wyczerpane, a systematyczne zmniejszanie przekrojów efektywnych prowadzi do znacznego zwiększenia smukłości kluczowych elementów konstrukcyjnych. Jak dowodzi zagadnienie Eulera, problematyka stateczności konstrukcji wiąże się między innymi ze znajomością podstawowych charakterystyk zarówno materiału, przekroju, jak również wymiarów geometrycznych. Niestety trudne do przewidzenia zmienne parametry materiału i przekroju, szczególnie uwzględniając korozję przekroju stalowego, mogą mieć znaczący wpływ na zjawisko wyboczenia. Dlatego też istnieje konieczność rozwiązywania zagadnień probabilistycznego wyboczenia dla skomplikowanych schematów statycznych konstrukcji oraz różnorodnego sposobu obciążeń. W celu przeprowadzenia ogólnej oceny stateczności zastosowano w pracy metodę perturbacji stochastycznej zrealizowaną numerycznie za pomocą Metody Elementów Skończonych. Za jej pomocą znaleziono i przeanalizowano zmienność wartości oczekiwanych i odchyleń standardowych w funkcji rozrzutu losowego założonych parametrów losowych. Analizę przeprowadzono na przykładzie wybranych stalowych płaskich i przestrzennych konstrukcji prętowych, a w dalszej kolejności będzie można ją bezpośrednio wykorzystać w analizie niezawodności tych struktur [12]. Uzyskane wyniki dowodzą jednoznacznie, że z dobrym przybliżeniem rozrzut losowy obciążenia krytycznego jest równy rozrzutowi wejściowych zmiennych losowych.

2. Stochastyczna metoda perturbacji

Rozważmy zmienną losową $b \equiv b(\omega)$ i jej funkcję gęstości prawdopodobieństwa $p(b)$. Wartości oczekiwane i centralne momenty probabilistyczne tej zmiennej definiujemy jako

$$E[b] \equiv b^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} bp(b)db, \tag{1}$$

i

$$\mu_m(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (b - E[b])^m \, p(b)db. \tag{2}$$

Podstawowym założeniem perturbacji stochastycznej jest rozwinięcie wszystkich wprowadzanych zmiennych i wszystkich funkcji stanu w szereg Taylora przy założeniu parametru perturbacji w postaci małego $\varepsilon > 0$. W przypadku losowej wielkości siły krytycznej P_{cr} rozwinięcie to dla losowej wielkości b wyraża się następująco [7, 8]:

$$P_{cr} = P_{cr}^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \varepsilon^{n} \frac{\partial^{n} P_{cr}}{\partial b^{n}} (\Delta b)^{n} , \tag{3}$$

gdzie

$$\varepsilon \Delta b = \varepsilon \left(b - b^{0} \right) \tag{4}$$

jest wariacją pierwszego rzędu b w otoczeniu jej wartości oczekiwanej b^0. Wartość oczekiwana P_{cr} będzie więc równa

$$E[P_{cr}] = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{cr}(b)\, p(b)\, db = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P_{cr}^{0} + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \varepsilon^{n} \frac{\partial^{n} P_{cr}}{\partial b^{n}} \Delta b^{n} \right) p(b)\, db \tag{5}$$

Z numerycznego punktu widzenia rozwinięcie (3) jest zapisane jako suma wszystkich składników, ale równanie (5) jako zapis całkowy jest zawsze wyznaczane dla granic skończonych, a dolna i górna granica całkowania musi mieć fizyczne uzasadnienie lub jest określona na drodze eksperymentalnej. Przy zmiennej losowej zgodnej z rozkładem Gaussa lub innym symetrycznym rozkładem prawdopodobieństwa równanie (5) można zapisać jako

$$\begin{aligned} &E[P_{cr}] = \\ &P_{cr}(b^{0}) + \tfrac{1}{2}\varepsilon^{2} \frac{\partial^{2} P_{cr}(b^{0})}{\partial b^{2}} \mu_{2}(b^{0}) + \ldots + \tfrac{1}{2m!}\varepsilon^{m} \frac{\partial^{2m} P_{cr}(b^{0})}{\partial b^{2m}} \mu_{2m}(b^{0}) + \ldots \end{aligned} \tag{6}$$

Wartość oczekiwana może być obliczona analitycznie lub wyznaczona w postaci symbolicznej wtedy i tylko wtedy, gdy znamy funkcję parametru losowego b. Rachunkowa implementacja symboliczna, wprowadzona do programu komputerowego (np. MAPLE), a także połączona z zadawalającą wizualizacją odpowiednich charakterystyk losowych zapewnia szybsze rozwiązanie zadanego problemu i ułatwia analizę jakościową otrzymanych wyników. Znajomość analitycznej funkcji $P_{cr}(b)$, a więc i jej pochodnych, umożliwia bezpośrednio otrzymanie wartości momentów wyższych rzędów również w postaci analitycznej, np. jako funkcji parametru ε oraz rozrzutu losowego zadanej zmiennej losowej.

Wówczas dodatkowo można wybrać rozkład prawdopodobieństwa, zgodnie z którym chcemy analizować wybraną zmienną (norma zaleca tutaj rozkład normalny, logarytmiczno-normalny lub funkcję Gumbela, ale w praktyce inżynierskiej również stosuje się rozkład Weibulla) i analizować charakterystyki losowe siły krytycznej jako kombinacje tych parametrów. Wyniki liczbowe takiej analizy można porównywać z rezultatami dostatecznie licznych symulacji Monte-Carlo lub, w szczególnych przypadkach, wynikami teoretycznymi uzyskanym na drodze bezpośredniego całkowania. Biorąc pod uwagę klasyczny w liniowej teorii stateczności wzór Eulera dla belki swobodnie podpartej na obu końcach [5, 6], wyznaczenie podstawowych momentów siły krytycznej przy zadanym losowym parametrze w postaci długości elementu l, przedstawia się w postaci:

- wartość oczekiwana:

$$
\begin{aligned}
E\left[P_{cr}\left(b^0\right)\right] = {} & \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left(1 + 3\,\varepsilon^2\alpha^2(l) + 15\,\varepsilon^4\alpha^4(l) + 105\,\varepsilon^6\alpha^6(l)\right) + \\
& + \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\left(945\,\varepsilon^8\alpha^8(l) + 10395\,\varepsilon^{10}\alpha^{10}(l)\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

- wariancja:

$$
\mu_2\left(P_{cr}\left(b^0\right)\right) = \frac{\pi^4 (EJ)^2}{l^4}\left(4\,\varepsilon^2\alpha^2(l) + 75\,\varepsilon^4\alpha^4(l) + 1050\,\varepsilon^6\alpha^6(l)\right) \tag{8}
$$

- moment centralny rzędu trzeciego:

$$
\mu_3\left(P_{cr}\left(b^0\right)\right) = \frac{\pi^6 (EJ)^3}{l^6}\left(108\,\varepsilon^4\alpha^4(l) + 405\,\varepsilon^6\alpha^6(l)\right) \tag{9}
$$

- moment centralny rzędu czwartego:

$$
\mu_4\left(P_{cr}\left(b^0\right)\right) = \frac{\pi^8 (EJ)^4}{l^8}\left(48\,\varepsilon^4\alpha^4(l) + 3240\,\varepsilon^8\alpha^6(l)\right) \tag{10}
$$

3. Analiza stateczności i elementy skończone

Rozważmy liniowy element skończony w postaci pręta prostego, którego węzły oznaczamy jako *i* oraz *j*. Energię odkształcenia pręta pryzmatycznego dla wyidealizowanego elementu skończonego w zagadnieniach liniowej teorii sprężystości zapisujemy jako [9, 10]

$$\mathrm{U}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\mathbf{q}_{(\alpha)}^{T}\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)}\mathbf{q}_{(\alpha)} + \frac{1}{2}\mathbf{q}_{(\alpha)}^{T}\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)}\mathbf{q}_{(\alpha)} \tag{11}$$

gdzie $\mathbf{q}_{(\alpha)}$ jest następującym wektorem przemieszczeń węzłów

$$\mathbf{q}_{(\alpha)} = \left\{u_{x(\alpha)}^{(i)}, u_{y(\alpha)}^{(i)}, u_{z(\alpha)}^{(i)}, u_{x(\alpha)}^{(j)}, u_{y(\alpha)}^{(j)}, u_{z(\alpha)}^{(j)}\right\}, \tag{12}$$

$\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)}$ jest macierzą sztywności sprężystej elementu oznaczoną jako

$$\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)} = \frac{\mathrm{E}_{(\alpha)}\mathrm{A}_{(\alpha)}}{l_{(\alpha)}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

i $\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)}$ to macierz sztywności geometrycznej elementu skończonego

$$\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)} = \frac{\mathrm{F}_{(\alpha)}}{l_{(\alpha)}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Funkcjonał energii potencjalnej w odniesieniu do elementu skończonego może być przedstawiony jako

$$J_P^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\mathbf{q}_{(\alpha)}^T\left(\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)} + \mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)}\right)\mathbf{q}_{(\alpha)} - \mathbf{R}_{(\alpha)}^T\mathbf{q}_{(\alpha)} \tag{15}$$

co, wykorzystując procedurę jego minimalizacji, daje w rezultacie

$$\left(\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)} + \mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)}\right)\mathbf{q}_{(\alpha)} = \mathbf{R}_{(\alpha)}\,. \tag{16}$$

Procedura agregacji elementów skończonych w jeden układ globalny prowadzi do równania macierzowego postaci

$$\left(\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(s)} + \lambda_{(\alpha)}\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(\sigma)}\left(\hat{\boldsymbol{F}}_{(\alpha)}\right)\right)\mathbf{r}_{(\alpha)} = \lambda_{(\alpha)}\hat{\mathbf{R}}_{(\alpha)} \tag{17}$$

gdzie $\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(\sigma)}\left(\hat{\boldsymbol{F}}_{(\alpha)}\right)$ jest macierzą sztywności geometrycznej, $\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(s)}$ jest macierzą sztywności sprężystej, obciążenie $\mathbf{R}_{(\alpha)}$ ma charakter proporcjonalny typu $\lambda_{(\alpha)}\hat{\mathbf{R}}_{(\alpha)}$, gdzie $\lambda_{(\alpha)}$ to mnożnik obciążenia; $\hat{\mathbf{R}}_{(\alpha)}$ to pewne obciążenie wyjściowe. Warunkiem otrzymania wartości krytycznej $\lambda_{(\alpha)} = \lambda_{cr(\alpha)}$ oraz obciążenia krytycznego $\mathbf{R}_{cr(\alpha)} = \lambda_{cr(\alpha)}\hat{\mathbf{R}}_{(\alpha)}$ jest niezerowe rozwiązanie równania:

$$\det\left(\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(s)} + \lambda_{(\alpha)}\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(\sigma)}\left(\hat{\boldsymbol{F}}_{(\alpha)}\right)\right) = 0\,. \tag{18}$$

W przypadku losowym chcemy ustalić zależność pomiędzy wielkością krytyczną λ_{cr} i zmienną losową *b*, którą proponujemy w postaci wielomianowej jako

$$\lambda_{cr}^{(m)} = D_{mk}b^k\,. \tag{19}$$

Współczynniki D_{mk} są określone numerycznie w zależności od serii deterministycznych rozwiązań problemu stateczności za pomocą modelu MES z parametrem losowym o wartości iterowanej wewnątrz przedziału $b = \left[b^0 - \Delta b, b^0 + \Delta b\right]$. Ostateczną postać funkcji znajdujemy za pomocą metody najmniejszych kwadratów i ostatecznie obliczamy pochodne cząstkowe funkcji (19) z następującego równania:

$$\frac{\partial^k \lambda_{cr}^{(m)}}{\partial b^k} = \prod_{j=1}^{k} (n-j) D_{m1} b^{n-k} + \prod_{j=2}^{k} (n-j) D_{m2} b^{n-(k+1)} + \ldots + D_{m\,n-k} \,. \tag{20}$$

W przypadku zdefiniowania obciążenia krytycznego jako wielomianu

$$\lambda_{(cr)} = \sum_{k=0}^{9} D_k b^k \tag{21}$$

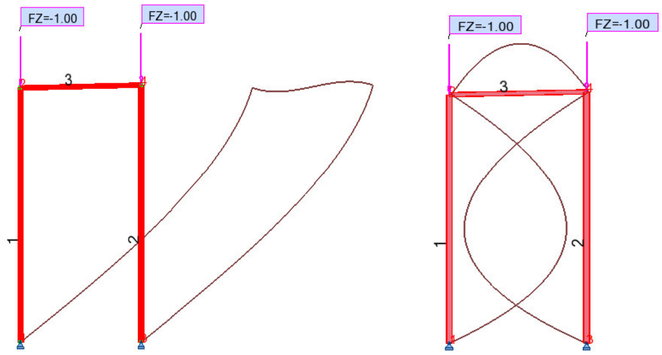
wartość oczekiwana siły krytycznej jest obliczana z zależności

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\lambda_{(cr)}\right] = {} & \sum_{k=1}^{9} \mathrm{D}_k \mathrm{b}^k + \mathrm{D}_0 + 4374\,\alpha^8 \varepsilon^8 \left(3.6288\,\mathrm{D}_9 \mathrm{b} + 40320\,\mathrm{D}_8\right) + \\ & + 972\,\alpha^6 \varepsilon^6 \left(60480\,\mathrm{D}_9 \mathrm{b}^3 + 20160\,\mathrm{D}_8 \mathrm{b}^2 + 5040\,\mathrm{D}_7 \mathrm{b} + 720\,\mathrm{D}_6\right) + \\ & + 162\,\alpha^4 \varepsilon^4 \begin{pmatrix} 3024\,\mathrm{D}_9 \mathrm{b}^5 + 1680\,\mathrm{D}_8 \mathrm{b}^4 + 840\,\mathrm{D}_7 \mathrm{b}^3 + \\ + 360\,\mathrm{D}_6 \mathrm{b}^2 + 120\,\mathrm{D}_5 \mathrm{b} + 24\,\mathrm{D}_4 \end{pmatrix} + \\ & + 18\,\alpha^2 \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 72\,\mathrm{D}_9 \mathrm{b}^7 + 56\,\mathrm{D}_8 \mathrm{b}^6 + 42\,\mathrm{D}_7 \mathrm{b}^5 + 30\,\mathrm{D}_6 \mathrm{b}^4 + 20\,\mathrm{D}_5 \mathrm{b}^3 + \\ + 12\,\mathrm{D}_4 \mathrm{b}^2 + 6\,\mathrm{D}_3 \mathrm{b} + 2\,\mathrm{D}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{22}$$

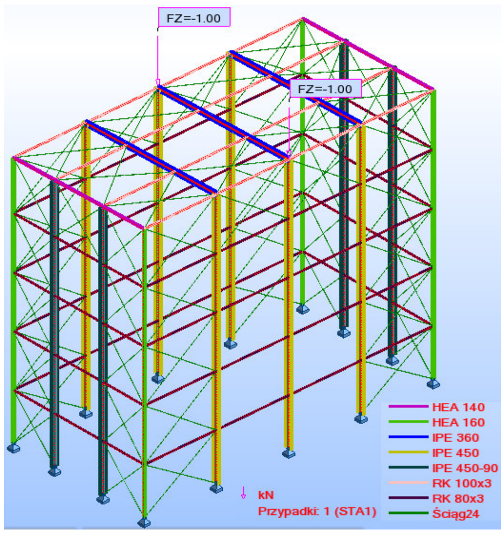
4. Analiza numeryczna

4.1. Stalowa rama jednonawowa, model 2 i 3D

Głównym celem pierwszego przykładu obliczeniowego jest porównanie obciążenia krytycznego obliczonego dla dwu- (rys. 1) i trójwymiarowego modelu (rys. 2) tej samej stalowej ramy, w kontekście jego charakterystyk losowych. W tym celu ramy zostały obciążone jednostkowymi siłami skupionymi, przyłożonymi osiowo do odpowiednich słupów. Znajomość poszukiwanych charakterystyk losowych jest jak wiadomo konieczna do analizy niezawodności konstrukcji, której zdjęcie zostało przedstawione na rys. 3. Do stworzenia aproksymacji wielomianowych dla obydwu modeli (rys. 4) wykorzystano komercyjny program MES ROBOT, natomiast obliczenia algebraiczne przeprowadzono za pomocą programu MAPLE. W obliczeniach wybrano moment bezwładności przekroju słupów jako wielkość losową, dla której przeanalizowano wartości oczekiwane i odchylenia standardowe obciążenia krytycznego. Z porównania wielomianowych funkcji odpowiedzi wynika, iż model 3D jest sztywniejszy od modelu 2D, co niewątpliwie jest zgodne z intuicją i praktyką inżynierską. Wybór momentu bezwładności jako wielkości losowej ma aspekt praktyczny, biorąc pod uwagę procesy korozji [4] niebezpieczne dla konstrukcji stalowych.



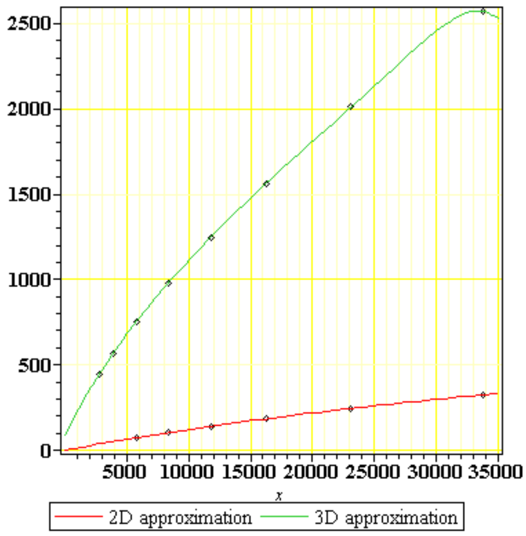
Rys. 1. Model 2D ramy stalowej (pierwsza i druga postać wyboczeniowa)
Fig. 1. 2D FEM model of the steel frame (first and second buckling configuration)



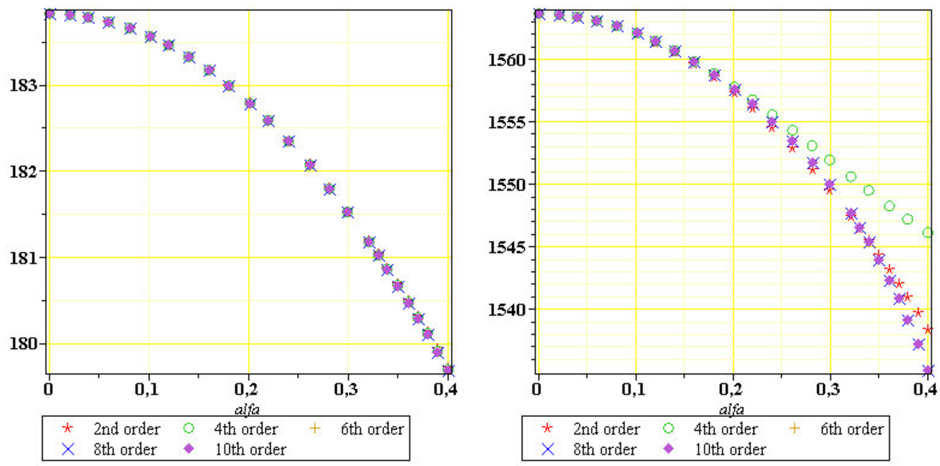
Rys. 2. Model 3D ramy stalowej
Fig. 2. 3D FEM model of the steel frame

Funkcje wartości oczekiwanej zgromadzone (rys. 5) zostały przedstawione w funkcji współczynnika wariancji α należącego do przedziału [0, 0.4]. Porównując oba modele, można zauważyć, że wartość oczekiwana siły krytycznej dla modelu 3D jest około dziesięć razy większa od wartości krytycznej uzyskanej dla modelu 2D. Wartości oczekiwane rzędów drugiego, czwartego, szóstego, ósmego i dziesiątego mają w całym zakresie zmienności parametru α prawie identyczne wartości w modelu płaskim, natomiast dla modelu 3D dla wartości tego parametru powyżej 0.2 różnice pomiędzy rezultatami dla poszczególnych rzędów perturbacji są znaczące. Ogólnie można stwierdzić, że im większy współczynnik wariancji tym mniejsza wartość oczekiwana obciążenia krytycznego – zmiany te są jednak bardziej widoczne w modelu płaskim rozpatrywanej konstrukcji. Na rysunku 6 zestawiono współczynniki wariancji obliczone w obydwu modelach i zestawione porównawczo na jednym wykresie, także w funkcji wejściowego współczynnika wariancji. Współczynniki dla obu modeli wyznaczono, wykorzystując technikę perturbacji rzędu drugiego, czwartego i szóstego. Z analizy wykresu wynika jednoznacznie, że współczynniki wariancji w modelu 2D są nieco większe, niż te obliczone w modelu 3D. Jednocześnie można zauważyć istotne różnice pomiędzy wynikami uzyskanymi dla różnych rzędów metody perturbacji dla zagadnienia płaskiego, natomiast w modelu przestrzennym różnice pomiędzy poszczególnymi rzędami wzrastają wraz ze wzrostem współczynnika wejściowego.

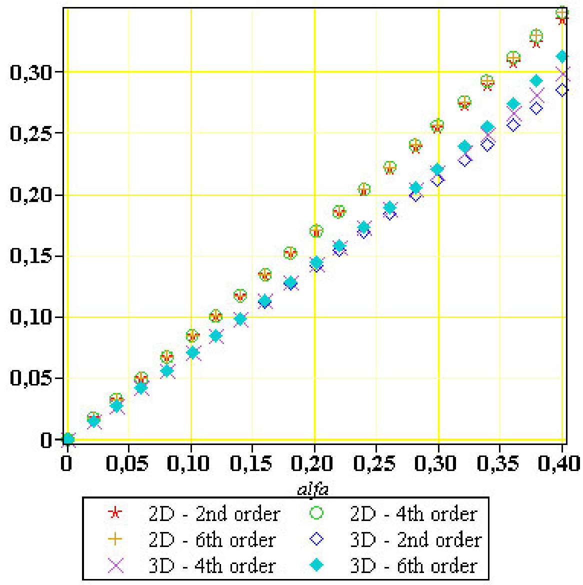
Rys. 3. Montaż konstrukcji
Fig. 3. Building site



Rys. 4. Funkcja wielomianowa dla siły krytycznej przy zmiennym momencie bezwładności przekroju
Fig. 4. Polynomial approximations for the critical force vs. inertia moment



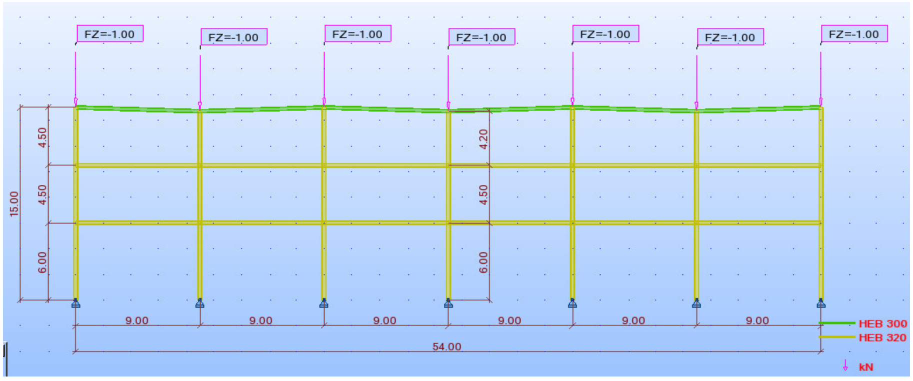
Rys. 5. Wartość oczekiwana siły krytycznej, model 2D (po lewej) i 3D (po prawej)
Fig. 5. The expected values for the critical force, 2D (left) vs. 3D (right) model



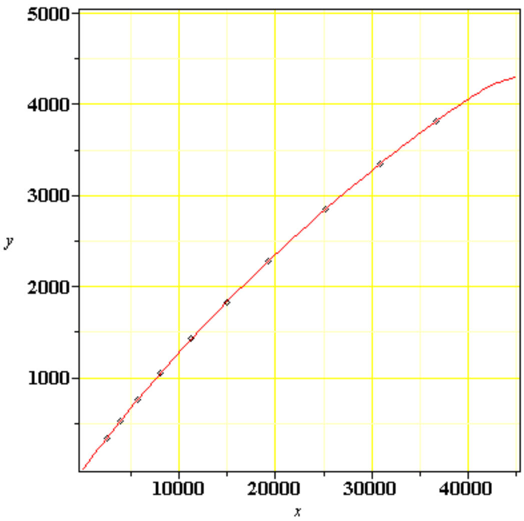
Rys. 6. Współczynniki wariancji siły krytycznej dla modelu 2D i 3D
Fig. 6. The variation coefficient of the critical force, 2D vs. 3D model

4.2. Analiza ramy wielonawowej

Stosując tę samą metodę analizy losowej zamodelowano ramę płaską sześcionawową i dwukondygnacyjną; obliczenia mnożnika siły krytycznej przeprowadzono dla modelu pokazanego na rys. 7. Jako parametr losowy zgodny z rozkładem Gaussa przyjęto moment bezwładności przekroju, a skupione pionowe ściskające obciążenie jednostkowe przyłożono do górnych końców wszystkich słupów; wszystkie węzły konstrukcji są idealnie sztywne. Zjawisko rzeczywistej podatności węzłów jest niewątpliwie ważne z inżynierskiego punktu widzenia, a jego wpływ na losowość uzyskanych wyników wymaga dalszych dokładnych studiów. Aproksymacja wielomianowa funkcji odpowiedzi została przedstawiona na rysunku 8, gdzie na osi pionowej odłożono wartości siły krytycznej, natomiast na osi poziomej moment bezwładności przekroju; funkcja ta ma wyraźny charakter nieliniowy i jest wklęsła. Na jej podstawie wyznaczono zgromadzone na rysunku 9 wartości oczekiwane obciążenia krytycznego oraz jego współczynnik wariancji. Na podkreślenie zasługuje fakt, iż dyskretyzacja przedziału zmienności momentu bezwładności nie jest równomierna, a obliczenia przeprowadza się dla wartości odpowiadających konkretnym profilom stalowym (zasadnicza różnica w stosunku np. do modułu Younga, gdzie podział jest równomierny).



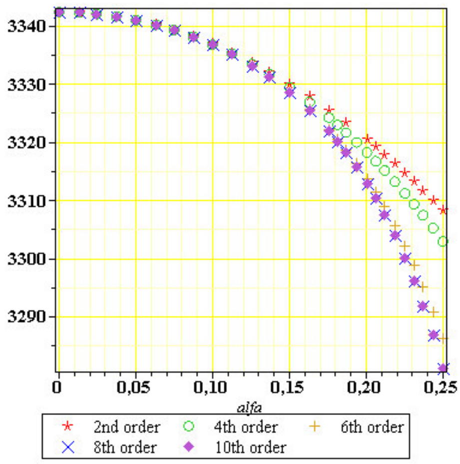
Rys. 7. Model ramy stalowej wielonawowej
Fig. 7. FEM model of the multi-aisle steel frame

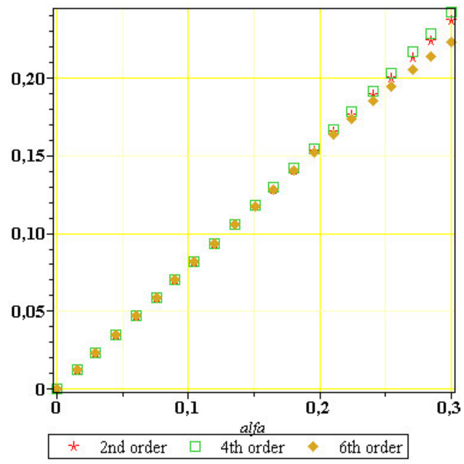


Przekrój słupa	J_y [cm^4]	Współczynnik siły krytycznej
HEB160	2490	340,60
HEB180	3830	516,83
HEB200	5700	755,31
HEB220	8090	1048,38
HEB240	11260	1418,54
HEB260	14920	1822,04
HEB280	19270	2271,68
HEB300	25170	2835,49
HEB320	**30820**	**3331,64**
HEB340	36660	3804,68

Rys. 8. Funkcja wielomianowa siły krytycznej przy zmiennym momencie bezwładności przekroju
Fig. 8. Polynomial approximations for the critical force vs. inertia moment

Jak wynika z rysunku 9 różnice pomiędzy wartościami obliczonymi dla kolejnych rzędów perturbacji są nieznaczne przy wejściowym współczynniku wariancji należącym do przedziału [0.0,0.25]; zwiększenie rzędu perturbacji prowadzi do zmniejszania się wartości oczekiwanej. Probabilistyczna zbieżność w odniesieniu do współczynnika wariancji ma charakter asymptotyczny, ponieważ krzywa rzędu drugiego jest krzywą pośrednią pomiędzy krzywą rzędu czwartego, która ma wartość maksymalną, a krzywą rzędu szóstego, która osiąga najmniejsze wartości. Ogólnie wynikowe współczynniki wariancji są nieznacznie mniejsze od odpowiedniego współczynnika zmienności momentu bezwładności przekroju.





Rys. 9. Wartość oczekiwana i współczynnik wariancji siły krytycznej
Fig. 9. The expected values and coefficients of variation for the critical force

5. Wnioski

W niniejszej pracy zastosowano uogólnioną stochastyczną metodę elementów skończonych w połączeniu z techniką funkcji odpowiedzi do analizy zagadnień stateczności, a jako przykład posłużyły wybrane płaskie i przestrzenne konstrukcje prętowe, często spotykane w bieżących realizacjach inżynierskich. Analiza została wykonana za pomocą programu komercyjnego MES ROBOT i programu do obliczeń symbolicznych MAPLE. Jak wiadomo, znajomość wartości oczekiwanych, wariancji, czy też odchyleń standardowych jest bardzo istotna, gdyż rezultaty przedstawionej analizy mogą zostać bezpośrednio wykorzystane do określania wskaźnika niezawodności zgodnie z Eurocode 0. Porównanie prostego modelu 2D i bardziej realistycznego modelu 3D tej samej konstrukcji stalowej pokazuje, iż w wyniku istniejących rezerw nośności przekroje poszczególnych elementów tej konstrukcji można byłoby dalej optymalizować ze względu na globalny wskaźnik niezawodności. Niezwykle interesującym problemem w zakresie analizy stateczności przy użyciu MES jest stan nadkrytyczny i jego analiza w ujęciu probabilistycznym, a także – modelowanie podatności poszczególnych połączeń w konstrukcjach stalowych [11].

Literatura

[1] **Elishakoff I.:** Probabilistic Methods in the Theory of Structures. New York, Wiley-Interscience 1983.
[2] **Elishakoff I.**, **Li Y.W.**, **Starnes J.H.:** Nonclassical Problems in the Theory of Elastic Stability. Cambridge, Cambridge University Press 2001.
[3] **Papadopoulos V.**, **Charmpis V.**, **Papadrakakis M.:** A computationally efficient method for the buckling analysis of shells with stochastic imperfections. Comput. Mech. 43, 2009, s. 687-700.
[4] **Sadovský Z.**, **Drdácký M.:** Buckling of plate strip subjected to localised corrosion—a stochastic model, J. Thin-Walled Struct. 39, 2001, s. 247-259.
[5] **Jones R.M.:** Buckling of Bars, Plates and Shells. Blackburg, Bull Ridge Publishing, Virginia 2006.
[6] **Timoshenko S.P.**, **Gere J.M.:** Theory of Elastic Stability (second ed.). New York, McGraw-Hill 1961.
[7] **Kamiński M.:** Generalized perturbation-based stochastic finite element method in elastostatics. Comput. Struct. 85, 2007, s. 586-594.
[8] **Kamiński M.:** Potential problems with random parameters by the generalized perturbation-based stochastic finite element method. Comput. Struct. 88, 2010, s. 437-445.
[9] **Bathe K.J.:** Finite Element Procedures. Prentice Hall 1996.
[10] **Kleiber M.:** Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych. Warszawa--Poznań, Polish Scientific Publishers 1986.
[11] **Hadianfard M. A.**, **Razani R.:** Effects of semi-rigid behavior of connections in the reliability of steel frames. Struct. Safety 25, 2003, s. 123-138.
[12] **Melchers R.E.:** Structural Reliability. Analysis and Prediction. Ellis Horwood Ltd. 1987.

STABILITY ANALYSIS OF SOME STEEL FRAME STRUCTURES WITH RANDOM PARAMETERS

Summary

The main aim of this paper is the stability analysis of elastic frame systems with random parameters using the Generalized Stochastic Finite Element Method. The Taylor expansion with random coefficients of *n*th order is used to express all random functions and to determine the basic probabilistic moments of the critical load. The Response Function Method assists to determine higher order partial derivatives of the structural response instead of the Direct Differentiation Method employed widely before and is sufficient to assure high quality of the resulting moments. This approach is examined on the examples of 2 and 3D steel frames with some geometrical parameters defined as the Gaussian variables. Further application of this methodology is of course in the reliability analysis and reliability-based optimization of the steel engineering structures.