

Wrocław, 20 września 2019r.

Piotr Borodulin-Nadzieja  
Instytut Matematyczny  
Uniwersytetu Wrocławskiego

## Recenzja w postępowaniu habilitacyjnym dr. Tomasza Filipczaka

### 1 Informacje ogólne

Dr. Tomasz Filipczak przedstawił jako osiągnięcie naukowe cykl publikacji pt. „Wybrane własności struktur mierzalnych: otoczki mierzalne, sumy algebraiczne, uogólnione punkty gęstości”. W skład tego cyklu wchodzi siedem publikacji. Większość z nich to publikacje współautorskie; oświadczenia współautorów zostały napisane w sposób pozwalający w miarę precyzyjnie wyodrębnić wkład Habilitanta.

### 2 Omówienie i ocena głównych osiągnięć Habilitanta

W swoim autoreferacie dr Filipczak podzielił cykl na cztery części. Omówienie wyników Habilitanta przedstawię zgodnie z tym podziałem.

#### 2.1 Prace [H2] i [H4]

Ta część osiągnięcia Habilitanta poświęcona jest zagadnieniu otoczek borelowskich w kontekście różnych ideałów. W szczególności badane są możliwości przypisywania ich w sposób monotoniczny (praca [H2]<sup>1</sup>) i niezmienniczy na przesunięcia (praca [H4]).

Praca [H2] opiera się dość ściśle na pracy Elekesa i Mathé [33]. Elekes i Mathé zajmowali się monotonicznymi otoczkami borelowskimi ideału zbiorów miary Lebesgue’a zero. Autorzy pracy [H2] uogólniają niektóre z tych wyników na szerszą klasę ideałów (w szczególności na ideał zbiorów pierwszej kategorii i produkty Fubinię ideałów zbiorów miary zero i pierwszej kategorii). Uogólnienia te są konsekwencją nie tyle użycia zasadniczo nowych pomysłów, co drobiazgową analizą dowodów Elekesa i Mathé.

W pracy [H4], napisanej przez Habilitanta wspólnie z tandemem Rosłanowski-Shelah, pojawia się nowy pomysł: w twierdzeniu 2.2 autorzy zauważają, że istnienie podgrupy  $(\mathbb{R}, +)$ , która jest miary zero, ale nie pierwszej kategorii pociąga za sobą nieistnienie operacji borelowskiej, niezmienniczej na przesunięcia otoczki na ideał  $\mathcal{N}$  (i dualnie dla podgrupy pierwszej kategorii, która nie jest miary zero i ideału  $\mathcal{M}$ ). (Należy tu zaznaczyć, że z oświadczeń współautorów wynika, że pomysł ten jest autorstwa dr. Filipczaka). Jest to bardzo ładne twierdzenie o nietrudnym dowodzie, dzięki któremu można udowodnić, że niesprzecznie nie istnieją niezmiennicze na przesunięcia operacje borelowskiej otoczki na  $\mathcal{N}$  i na  $\mathcal{M}$ . W istocie, istnienie odpowiednich podgrup można wykazać przy założeniach na współczynniki non (to uwaga Szymona Głąba) oraz przy założeniach na współczynniki  $\text{cov}^*$  i  $\text{cov}$  (z kolei dowód tego faktu jest oparty na dowodzie Smitala).

Trzeba zaznaczyć, że badania nad operacjami borelowskiej otoczki były kontynuowane przez Rosłanowskiego i Shelaha. Wydaje się też, że trzeba było twierdzenia 2.2, żeby matematycy zaczęli rozważać jakże naturalny problem istnienia podgrupy  $(\mathbb{R}, +)$ , która jest mała w sensie

<sup>1</sup>Wszystkie cytowania są zgodne z autoreferatem

PB

kategorii, a duża w sensie miary (lub na odwrót). W 2016 roku Rosłanowski i Shelah udowodnili w końcu, że podgrupa miary zero, która nie jest pierwszej kategorii istnieje w ZFC, natomiast „dualna” podgrupa niesprzecznie nie istnieje.

## 2.2 Prace [H6] i [H7]

Motywacją rozważań zawartych w tych pracach jest problem postawiony przez Tarasa Banakha: czy istnieje zbiór zwarty  $A \subseteq \mathbb{R}$ , którego różnica  $A - A$  jest duża (zawiera otoczenie 0), ale suma  $A + A$  (czy też sumy  $A + A + A$ , etc.) są małe (mają puste wnętrza). Rozważania z prac [H6] i [H7] nie prowadzą do rozwiązania tego problemu (który, jak zauważyli autorzy, został rozwiązany kilkadziesiąt lat przed sformułowaniem go przez Banakha). Problem jest raczej inspiracją dla głównego wyniku. Autorzy znajdują mianowicie cały szereg takich zbiorów borelowskich  $A_p$ , że  $A_p - A_p$  zawiera  $[0, 1)$  natomiast sumy  $A_p + A_p$  i  $A_p + A_p + A_p$  mają puste wnętrza. Zbiory  $A_p$  mają bardzo prosty opis - są to po prostu zbiory tych liczb z przedziału  $[0, 1)$ , w których rozwinięciach dwójkowych jedynek występuje z gęstością (asymptotyczną)  $p$ . Dowód głównego wyniku opiera się na twierdzeniu (głównym twierdzeniu [H6]), mówiącym, że ciągi zerojedynek długości  $n$  można zapisać jako różnicę dwóch ciągów, w których jedynki występują dokładnie na  $m$  miejscach (przy pewnym warunku wiążącym  $n$  i  $m$ ). Ostatni rozdział [H7] jest dość luźno związany z poprzednią częścią. Autorzy dowodzą pewnej interesującej charakterystyki miar borelowskich na  $\mathbb{R}$  w języku własności Steinhausa i Smitała. Charakterystyka bazuje na prostym choć pomysłowym zastosowaniu twierdzenia Fubiniego. Jak przyznają autorzy, Simmons w 1975 ([90]) roku udowodnił takie same charakterystyki miar używając własności Steinhausa (nie rozważając własności Smitała), używając zresztą tego samego pomysłu.

Prace [H6] i [H7] są na tyle blisko ze sobą związane, że powinny być, moim zdaniem, scalone w jedną pracę - główne twierdzenie z [H6] nie byłoby specjalnie interesujące bez zastosowania wykazanego w [H7], a z kolei jądro kombinatoryczne wyniku z [H7] jest udowodnione w [H6]. W pracy [H6] autorzy wydają się sugerować, że fakt, że  $A - A$  zawiera  $[0, 1)$  wynika w prosty sposób z twierdzenia 1 z pracy [H6]. Jednak dowód faktu, że tak w istocie jest, jest dość skomplikowany - zajmuje bez mała pół artykułu [H7]. Wydaje się jednak, że gdyby zamiast

$$A_p = \{x \in [0, 1) : \lim_n \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = p\}$$

autorzy rozważyli zbiory

$$B_p = \{x \in [0, 1) : \lim_n \frac{x_{2^n} + \dots + x_{2^{n+1}-1}}{2^n} = p\},$$

to artykuł [H7] można byłoby skrócić o połowę (i najlepiej włączyć do [H6]). Fakt, że  $[0, 1) \subseteq B_p - B_p$  jest prostą, kilkuliniową konsekwencją twierdzenia 1 z [H6]. Zbiory  $B_p$  są oczywiście borelowskie, a fakt, że dla odpowiednich  $p$  zbiory  $B_p + B_p$  oraz  $B_p + B_p + B_p$  mają puste wnętrza, dowodzi się tak sam sposób, jak w przypadku  $A_p$ . Co więcej,  $B_p$  też są nośnikami (w sensie rozważanym przez autorów) odpowiednich miar Bernoulliego.

Wydaje się, że główną siłą prac [H6] i [H7] jest pomysł, żeby w kontekście pytania Banakha rozważyć zbiory  $A_p$ . Dowód twierdzenia 1 z [H6] jest dość skomplikowany, choć komplikacje te biorą się z konieczności rozważenia wielu przypadków, a nie z użycia zaawansowanych technik (co nie znaczy, że rozważenie akurat takich przypadków jest oczywiste).

## 2.3 Praca [H5]

Punktem wyjściowym artykułu [H5] jest zadziwiające twierdzenie Kurki, mówiące, że  $\delta_H$ , tj. supremum tych wartości  $\delta$ , że dla każdego nietrywialnego zbioru mierzalnego istnieje punkt,

P B



którego dolna gęstość jest przynajmniej  $\delta$ , a górna gęstość co najwyżej  $1 - \delta$ , jest jedynym rzeczywistym pierwiastkiem wielomianu  $8x^3 + 8x^2 + x - 1$ .

Głównym celem [H5] jest pokazanie, że owa wartość  $\delta_H$  jest nie tyle atrybutem gęstości Lebesgue'a, co bazy różniczkowania. Tak też autorzy wskazują bazy, w których współczynnik definiowany jak wyżej jest inny. Bazy te są postaci  $\{(x - h, x + rh) : h > 0\} : x \in \mathbb{R}$ . Autorzy podają szacowania, z których wynika, że można znaleźć nieskończenie wiele liczb  $r$  dających parami różne współczynniki. Stawiają także hipotezę, że dla różnych parametrów  $r$ , odpowiedni współczynnik będzie się różnił.

Powyższy przykład ma widoczny „feler”: skonstruowane w ten sposób bazy są niesymetryczne, a przez to nieco patologiczne. W dalszej części pracy autorzy badają przypadek baz symetrycznych, dowodząc paru lematów oraz twierdzenia (które w autoreferacie przedstawione jest jako główne twierdzenie tej pracy) mówiącego, że do zbadania współczynnika tych baz wystarczy badać pewne szczególne podzbiory  $\mathbb{R}$  zwane konfiguracjami. Ostatecznie jednak pytanie, czy współczynnik Kurki jest współczynnikiem wszystkich baz symetrycznych, czy też można znaleźć bazę o wyższym współczynniku, pozostaje otwarte.

Szacowania, z których wynika, że wspomniane wyżej bazy, są oparte na chytrym pomysłe użycia pewnej szczególnej funkcji i znalezienia jej minimum. Pomysł ten pochodzi z pracy Szenesa. Dowód głównego twierdzenia również jest oparty na pracy Szenesa (jedna z nierówności w dość ścisły sposób, druga nierówność wymagała znaczących ulepszeń; dowód tego twierdzenia to ta część pracy, do której przyznają się również współautorzy).

Praca [H5] pozostawia pewien niedosyt: autorzy twierdzą, że jej konsekwencją jest fakt, że „współczynnik Kurki” zależy od bazy różniczkowania i niewątpliwie mają rację. Jeśli jednak okazałoby się, że współczynniki dla wszystkich baz symetrycznych są równe, to znacząco osłabiałoby to wagę powyższego stwierdzenia.

## 2.4 Prace [H1] i [H3]

Artykuły te poświęcone są pewnym naturalnym uogólnieniom pojęcia gęstości Lebesgue'a i topologii gęstości. W pracy [H1] rozważana jest tzw.  $f$ -gęstość (i, odpowiednio, topologia  $f$ -gęstości,  $\mathcal{T}_f$ ). Pojęcie to studiowane było przez Habilitanta w wielu pracach, które nie wchodziły w skład osiągnięcia naukowego. W artykule [H3] autorzy koncentrują się na algebraicznych własnościach topologii  $f$ -gęstości. To, że niezależnie od (sensownego) wyboru funkcji  $f$  jest ona niezmiennicza na przesunięcia i mnożenie przez takie liczby  $\alpha$ , że  $|\alpha| \geq 1$ , jest nietrudne. Autorzy rozważają, które funkcje  $f$  mają taką własność, że topologia  $\mathcal{T}_f$  jest niezmiennicza na mnożenie przez  $\alpha \neq 0$ . Okazuje się, że własność ta jest blisko związana z tzw. warunkiem  $\Delta_2$  wprowadzonym przez Orlicza. Autorzy pokazują np., że jeśli funkcja spełnia warunek  $\Delta_2$ , to topologia  $\mathcal{T}_f$  jest niezmiennicza na mnożenie przez liczby niezerowe i w pewnych naturalnych sytuacjach  $\Delta_2$  charakteryzuje tę niezmienniczość. Twierdzenia okraszają sporą liczbą przykładów.

Rozważane przez autorów pytanie jest naturalne i związek z  $\Delta_2$  ciekawy (choć do pomysłu rozważenia tego warunku przyznała się współautorka pracy; brakowało mi też dyskusji, czy związek z teorią przestrzeni Orlicza jest tu przypadkowy czy może świadczyć o jakichś głębszych powiązaniach). W dowodach autorzy często korzystają z faktów udowodnionych przez Habilitanta we wcześniejszych pracach i widać, że omawiany artykuł jest częścią większej teorii uogólnionych topologii gęstości. Brakowało mi nieco motywacji do rozważania topologii  $f$ -gęstości, np. przykładów ich zastosowań. To akurat nie tyle zarzut do pracy [H3] (być może motywacje te znajdują się we wcześniejszych pracach), co do autoreferatu.

Krótką pracę [H1] poświęconą jest rozwiązaniu dość technicznego problemu, który nie przemówił do mojej wyobraźni. Być może aby docenić jego wagę mogłyby osoby mające doświadczenie w teorii topologii gęstości.

P. Bor



## 2.5 Podsumowanie

Rozumowania Habilitanta często są odtwórcze i polegają na ulepszeniu czyjegoś dowodu<sup>2</sup>. Samo w sobie nie jest to takie złe i ulepszanie rozumowań innych matematyków może być dość efektywną metodą, prowadzącą do ciekawych wyników. Z drugiej jednak strony od rozprawy habilitacyjnej należałoby wymagać większej liczby oryginalnych rozumowań, czy wręcz nowych technik dowodowych.

Inny zarzut, który nasuwa mi się po lekturze prac Habilitanta, to pewna elementarność rozumowań. Nie twierdzę, że rozumowania są trywialne. Chodzi raczej o brak używania bardziej zaawansowanych technik czy głębokich twierdzeń. W jednej z prac pojawia się co prawda forcing, ale akurat w części, za którą odpowiedzialność wziął jeden ze współautorów.

To, co podobało mi się pracach składających się na osiągnięcie, to fakt, że dotyczyły one ciekawych zagadnień. Wszystkie prace (może poza [H1]) czytałem z zainteresowaniem i patrząc na tę część jego dorobku naukowego, wydaje mi się, że Habilitant jest obdarzony matematycznym smakiem. Z drugiej strony, Habilitant rzadko kusi się na próby umiejscowienia swoich wyników w szerszym kontekście i czasami brakuje argumentacji, dlaczego uważa dany problem za ważny dla matematyki. Chlubnym wyjątkiem jest tutaj praca [H4] z bardzo ładnie napisanym wstępem (nie wiem jednak, czy autorem wstępu jest Habilitant czy Andrzej Rosłanowski).

Wymaganiem ustawowym stawianym osiągnięciom habilitacyjnym jest *znaczący* wkład w rozwój matematyki. To, jak bardzo znaczące są dane wyniki, najlepiej ocenia się z perspektywy czasu. W wypadku oceny prac, które opublikowane zostały parę lat temu, takiej perspektywy nie ma. Pokusiłbym się jednak o stwierdzenie, że prace [H1], [H3] i [H5], choć mogą mieć znaczący wpływ na teorię topologii gęstości, to jednak są interesujące dla dość wąskiego kręgu matematyków. Prace [H6] i [H7] poświęcone nośnikom miar Bernoulliego, choć ciekawe, stanowią raczej zamknięty temat. Natomiast opisywany powyżej pomysł Habilitanta z pracy [H4] dotyczący otoczek borelowskich niezmienniczych na przesunięcia, dość szybko doprowadził do powstania ciekawych prac: artykułu Rosłanowskiego i Shelaha o małych podgrupach  $(\mathbb{R}, +)$ , który to z kolei zainspirował kolejne prace młodych i zdolnych matematyków: Marka Poora i Ziemowita Kostany. Jest wielce prawdopodobne, że problemy związane z małymi podgrupami grup topologicznych będą przyciągać uwagę kolejnych matematyków, co, przynajmniej pośrednio, będzie zasługą Habilitanta.

## 3 Ocena aktywności naukowej, dydaktycznej i organizacyjnej Habilitanta

Z powodu ograniczeń czasowych nie miałem szans zapoznać się lepiej z dorobkiem Habilitanta, który nie wchodzi w skład osiągnięcia habilitacyjnego. Jest to dorobek dość bogaty, liczący 25 publikacji. Wśród czasopism, w których Habilitant publikował te artykuły, przewija się głównie Real Analysis Exchange i Tatra Mountains Mathematical Publications. Pięć artykułów przyjęto w wydawnictwach łódzkich, jedno w Topology and its Applications, jeden w Journal of Mathematical Analysis and its Applications. Jednym słowem, w dobie fetyszyzmu bibliometrycznego, politykę publikacyjną Habilitanta należy określić jako katastrofalną. Nie jest to czynnik, który zaważyłby na mojej ocenie, ale niezależnie od względów bibliometrycznych uważam, że Habilitant powinien częściej próbować publikować w lepszych czasopismach.

Z pobieżnego oglądu publikacji spoza cyklu wyłania się obraz Habilitanta jako niekwestionowanego specjalisty w dziedzinie topologii gęstości. Trzeba jednak powiedzieć, że topologie gęstości to jednak tematyka dość niszowa. Wskazuje na to analiza bibliografii i cytowań rzeczonych

<sup>2</sup>Żeby uniknąć nieporozumień podkreślę, że jeśli rozumowanie jest oparte na cudzych pomysłach, Habilitant wyraźnie to zaznacza.

artykułów. Bardzo duża część prac, do których odwołuje się Habilitant, to prace z ośrodka łódzkiego. Podobnie ma się rzecz z cytowaniami - prace Habilitanta są cytowane głównie przez osoby związane ze szkołą profesora Wilczyńskiego.

Habilitant ostatnio dość aktywnie uczestniczy w konferencjach międzynarodowych, choć z przedstawionych dokumentów wynika, że terytorialnie ogranicza się tylko do państw grupy wyszehradzkiej, a tematycznie do konferencji z funkcji rzeczywistych. Trochę szkoda, wydaje mi się, że niektóre wyniki Habilitanta zyskałyby zainteresowanie również poza społecznością regularnych uczestników konferencji z funkcji rzeczywistych.

Dokonania Habilitanta na polu organizacyjnym są raczej nieliczne - dr Filipczak był kierownikiem tylko jednego grantu (wewnętrznego grantu Politechniki Łódzkiej), nie współorganizował konferencji. Pełnił funkcję zastępcy kierownika studiów zamawianych.

Habilitant dość sucho pisze też o swojej działalności dydaktycznej, choć skądinąd wiem, że na tym polu jest osobą wyróżniającą się, zwłaszcza jeśli chodzi o czas, który poświęca dla swoich studentów, licencjantów i magistrantów.

#### 4 Konkluzja

Habilitant przez wiele lat specjalizował się w tematyce topologii gęstości i nie wątpię, że wpływ jego dokonań na tę część matematyki jest znaczący. Tematyka ta jest jednak zbyt niszowa, żeby dokonania te stanowiły podstawę do nadania stopnia doktora habilitowanego. Habilitant w ostatnim czasie wyraźnie poszerzył jednak obszar swoich matematycznych zainteresowań. Uważam, że to dobre posunięcie, w dodatku dokonane z pewnymi sukcesami (aczkolwiek moja ocena osiągnięcia naukowego, opisana powyżej, nie jest entuzjastyczna). Aktywność naukowa, dydaktyczna i organizacyjna Habilitanta również pozostawia pewien niedosyt, choć sądzę, że jest wystarczająca.

Ostatecznie, biorąc pod uwagę wszystkie powyższe względy, popieram wniosek o nadanie dr. Tomaszowi Filipczakowi stopnia naukowego doktora habilitowanego nauk matematycznych.

Piotr Boroński-Natziem