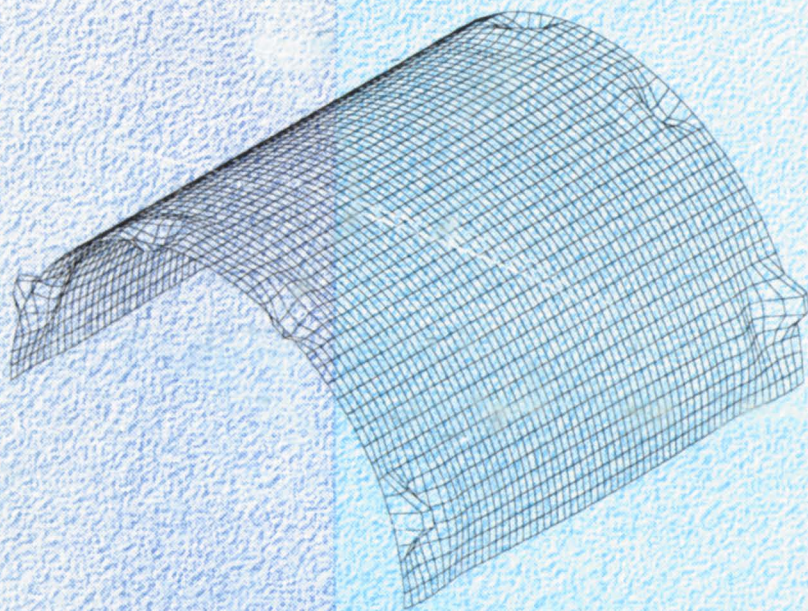


1997

**STABILITY OF STRUCTURES
VIIITH SYMPOSIUM**



**VIII
SYMPOZJUM
STATECZNOŚCI
KONSTRUKCJI**

ZAKOPANE 22 - 26. 09.1997

NG0900181

Biblioteka Główna PŁ
Termin zwrotu książki

22 LIP. 1999

2003 -12- 24

07 WRZ. 2004

16 SIE. 2006

VIII SYMPOZJUM STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI

STABILITY OF STRUCTURES VIIITH SYMPOSIUM

REFERATY

PROCEEDINGS

ZAKOPANE 22-26 IX 1997

BIBLIOTEKA GŁÓWNA
POLITECHNIKA ŁÓDZKA

90181



001-090181-00-0

ORGANIZATORZY:

Katedra Wytrzymałości Materiałów
i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej

Zespół Stateczności Konstrukcji
Komitetu Budowy Maszyn PAN

Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa
Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

ORGANISERS:

*Department of Strength of Materials &
Structures, Technical University of Łódź*

*Division of Stability of Structures,
Committee of Machine Design, PAS*

*Polish Society of Theoretical and
Applied Mechanics, Branch in Łódź*



90181

KOMITET ORGANIZACYJNY

ORGANISING COMMITTEE

Prof. Marian Królak - przewodniczący (*chairman*)

Dr hab. Zbigniew Kołakowski

Dr hab. Katarzyna Kowal - Michalska

Mgr Tomasz Kubiak

Dr Maria Kotełko

Dr Andrzej Żeligowski

Pani Zofia Gałwa

KOMITET NAUKOWY

SCIENTIFIC COMMITTEE

Prof. Marian Królak - przewodniczący (*chairman*)

Prof. Czesław Cichoń

Prof. Stefan Joniak

Dr hab. Katarzyna Kowal-Michalska

Prof. Arkadij Maniewicz, Ukraine

Prof. Wiesław Ostachowicz

Prof. James Rhodes, Scotland UK

Prof. Marek Trombski

Prof. Tadeusz Gałkiewicz

Dr hab. Zbigniew Kołakowski

Prof. Jan Misiak

Prof. Janusz Murzewski

Prof. Franciszek Romanów

Prof. Czesław Szymczak

Referaty (na prawach rękopisu) zostały zakwalifikowane do druku przez członków Komitetu Naukowego.

Papers have been accepted to be published by the members of Scientific Committee



PROFESOR ZW. DR INŻ. JERZY LEYKO
WSPOMNIENIE

Profesor zw. dr inż. Jerzy Leyko - ur. 10 marca 1918 r. w Krakowie - wybitny uczony i wychowawca wielu pokoleń inżynierów mechaników - zmarł w Łodzi 30 maja 1995 r.

Był On twórcą uznanej w kraju, a znanej również za granicą "łódzkiej szkoły stateczności konstrukcji". Zainicjował organizację Sympozjów Stateczności Konstrukcji i przewodniczył komitetom organizacyjnym pierwszych sympozjów. Sympozja te weszły na stałe do kalendarza imprez naukowych organizowanych w kraju. Od roku 1954 profesor nadzwyczajny, a od 1964 r. profesor zwyczajny Politechniki Łódzkiej. W latach 1952 - 56 był prodziekanem, a w latach 1958 - 60 dziekanem Wydziału Mechanicznego Politechniki Łódzkiej. Profesor dr inż. Jerzy Leyko przepracował w Politechniki Łódzkiej 36 lat. W latach 1985 - 88 pracował w Politechnice Lubelskiej. Działalność naukowa Profesora dotyczyła głównie teorii płyt i powłok oraz teorii stateczności konstrukcji cienkościennych. Jego wkład do nauki jest i w przyszłości będzie oceniany jako znaczący.

Profesor Jerzy Leyko znany był jako wspaniały dydaktyk. Jego podręcznik akademicki "Mechanika Ogólna" należy uznać za wzorcowy podręcznik dla wyższych szkół technicznych. Wypromował 22 doktorów nauk technicznych. Był członkiem-założycielem Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Był laureatem Nagrody Miasta Łodzi w 1975 roku.

Profesor był wzorem szlachetnego i skromnego człowieka. Był to człowiek niezwykle, jeżeli chodzi o zalety charakteru, bystrość umysłu i zasady życiowe. Dla swoich uczniów i podwładnych był mistrzem godnym naśladowania. W pamięci Jego uczniów i współpracowników pozostał jako wzór naukowca, dydaktyka, wychowawcy, opiekuna i życzliwego, szlachetnego człowieka.

PROFESSOR JERZY LEYKO IN MEMORIAM

Professor Jerzy Leyko - born on March 10th 1918 in Cracow - an eminent scientist and educator of many generations of mechanical engineers - died on May 30th 1995 in Łódź.

It was he, who created "the school of structures stability of Łódź" which is well known and esteemed not only in Poland but in other countries as well. He initiated Stability of Structures Symposia and also used to be a chairman of the Organizing Committees of some first Symposia. These meetings became regular items in the calendar of scientific events in Poland. Since 1954 he was an assistant professor and since 1964 - a full professor of the Technical University of Łódź. In 1952 - 56 he acted as a Vice-Dean and in 1958 - 60 as a Dean of the Mechanical Engineering Faculty, Technical University of Łódź. Professor Jerzy Leyko had worked at the Technical University of Łódź for 36 years. In 1985 - 88 he acted as professor of the Technical University of Lublin. Professor's scientific activities concerned mainly the theory of plates and shells and the stability theory of thin-walled structures. His contribution to the applied mechanics is estimated as very significant and we do believe that it will be appreciated in the future.

Professor was well known as a magnificent teacher. His text-book "General Mechanics" should be taken as an example among text-books for students of engineering. He graduated 22 of his PhD students. He was a charter member of the Polish Association of Theoretical and Applied Mechanics. In 1975 the City Council of Łódź awarded him an annual prestigious Prize of the City of Łódź.

Professor Jerzy Leyko was an example of a noble and modest character. His virtues, a discernment of intellect and high principles were unusual. He became a deserving of imitation master for his students and subordinates. He is treasured in the memory of his disciples, co-workers and followers not only as an example of a scientist and a teacher but also as a Master and a warm-hearted Patron.

SPIS TREŚCI
LIST OF CONTENTS

1. I. Andrianow, M. Matyash	13
<i>Buckling of cylindrical shells ring-stiffened on the ends under nonuniform external pressure</i>	
Wyboczenie powłoki walcowej wzmocnionej pierścieniowo na brzegach poddanej nierównomiernemu ciśnieniu zewnętrznemu	
2. E. Baron	19
<i>Z zagadnień stateczności płyt o strukturze periodycznej</i>	
<i>Some problems of stability of micro-periodic plates</i>	
3. W. Bodaszewski	25
<i>The software package „KNPN” for approximation of shaping complex plastic structures</i>	
Pakiet programów „KNPN” dla przybliżonego kształtowania złożonych konstrukcji plastycznych	
4. S. Bućko, M.Trzebicki, M. Wojtasiewicz	31
<i>Wybrane zagadnienia stateczności wielospójnych tarcz kołowych</i>	
<i>Selected stability problems of multicoherent disks</i>	
5. M.T.Bourdeix, P. Hémon, F.Santi, D. Giraud, O. Manhes	37
<i>Study of dynamic stability of a beam under aerodynamic load</i>	
Stateczność dynamiczna belki pod obciążeniem aerodynamicznym	
6. C.D. Christensen, E. Byskov, J. Christoffersen	43
<i>An inexpensive model of kinkbands</i>	
Oszczędny model obliczeniowy zagięć kolankowych	

7. J. Chróścielewski	49
Wybrane problemy analizy stateczności powłok wielogałęziowych <i>Some problems of instability of multi shells</i>	
8. J. Chróścielewski, I. Lubowiecka, Cz. Szymczak	55
Wpływ wstępnego wygięcia na siłę krytyczną wyboczenia skrętnego pręta dwuteowego <i>Effect of initial curvature on torsional buckling load of thin-walled columns</i>	
9. D. Dubina, D. Goina	61
<i>Evaluation of ultimate capacity of thin-walled cold-formed steel members</i> Oszacowanie nośności granicznej cienkościennych stalowych elementów formowanych na zimno	
10. D. Dubina, D. Grecea, F. Dinu	67
<i>Influence of structural and seismic characteristics on the behaviour of steel building frames with semi-rigid joints</i> Wpływ charakterystyk konstrukcyjnych i sejsmicznych na zachowanie się stalowych ram budynków z półsztywnymi węzłami	
11. M. Ferdynus, F. Romanów	73
Obciążenia krytyczne i ugięcia ściskanych płyt z dwuteową szczeliną <i>The buckling loads and deflections of compressed plates with I-section shaped slot</i>	
12. R. Grądzki	79
<i>Influence of initial imperfections on the collapse behaviour of box-columns</i> Wpływ początkowych imperfekcji na nośność słupów skrzynkowych	
13. M. Gwóźdź	83
Korelacja nośności sprężystej i plastycznej słupów metalowych ściskanych osiowo <i>Correlation of elastic and plastic resistance of axially loaded metal columns</i>	
14. J. Jędrysiak	89
<i>On a stability of thin microperiodic plates</i> O stateczności cienkich mikroperiodycznych płyt	

15. S. Joniak	95
Wpływ postaci funkcji naprężeń na wyniki rozwiązania zagadnienia dynamicznej utraty stateczności płyty pierścieniowej <i>The influence of the form of stress function on the solution of the nonlinear dynamic elastic stability of a ring-shaped plate loaded by a torque</i>	
16. S. Kędziora	101
Stateczność ortotropowych płyt z wzdłużnymi rozwarstwieniami <i>Stability of orthotropic plates with longitudinal delamination</i>	
17. L. Kielski, S. Stachura, J. Misiak	107
Stateczność statyczna i dynamiczna konstrukcji belkowych obciążonych siłami śledzącymi <i>Static and dynamic stability of beam constructions loaded by the following forces</i>	
18. I. F. Kogemyakina	113
Dynamic stability of elements of structure at action of moving concentrated load Stateczność dynamiczna elementów konstrukcji pod działaniem poruszającego się skupionego obciążenia	
19. Z. Kołakowski, K. Kowal-Michalska	115
Global and local instability of thin-walled columns beyond the proportional limit Globalna i lokalna niestateczność cienkościennych słupów powyżej granicy proporcjonalności	
20. Z. Kołakowski, A. Teter	121
Nośność graniczna cienkościennych słupów z centralnymi żebrami pośrednimi w ramach drugiego rzędu przybliżenia <i>Load carrying capacity for thin-walled elastic beams with central intermediate stiffeners-second order nonlinear approximation</i>	
21. S. Konieczny, Cz. Woźniak, M. Woźniak	127
Internal buckling in the prestrained laminated media Wewnętrzne wyboczenie we wstępnie napiętych warstwowych ośrodkach	

22. S. Konieczny, B. Tomczyk	133
<i>Dynamics and stability of nonperiodic multilayered plates</i>	
Dynamika i stateczność nieperiodycznych wielowarstwowych płyt	
23. M. Kotelko	139
<i>Some contributions into a solution for plastic mechanisms in thin-walled beams</i>	
O pewnych uściśleniach zagadnienia mechanizmów plastycznych w belkach cienkościennych	
24. V. Krasovskij	145
<i>On buckling mechanism of real thin-walled cylinders at axial compression</i>	
O mechanizmie wyboczenia rzeczywistych cienkościennych powłok walcowych poddanych ściskaniu	
25. M. Królak, Z. Kołakowski	151
Sprężone wyboczenie cienkościennych ortotropowych belek-słupów o przekrojach otwartych	
<i>Interactive elastic buckling of thin-walled open orthotropic beam-columns</i>	
26. T. Kubiak, Z. Kołakowski	157
Nośność cienkościennych płyt o zmiennej ortotropii	
<i>Carrying capacity of thin-walled plates with orthotropy varying widthwise</i>	
27. K. Magnucki, P. Stasiewicz	163
Analiza teoretyczna wyboczenia powłoki walcowej wypełnionej cieczą	
<i>Theoretical analysis of buckling of liquid-filled cylindrical shell</i>	
28. K. Magnucki, W. Szyc	169
Stateczność powłoki walcowej zamkniętej dnami elipsoidalnymi obciążonej ciśnieniem zewnętrznym	
<i>Stability of a cylindrical shell closed by ellipsoidal heads under external pressure</i>	

29. K. Magnucki, E. Tertel	175
Dobór optymalnych parametrów geometrycznych trójwarstwowej rury prostokątnej przy uwzględnieniu stateczności lokalnej	
<i>Determination of the optimal geometrical parameters of sandwich pipes of rectangular cross-section under stability constraints consideration</i>	
30. A. Manievich, Z. Kołakowski	181
<i>Multiple interaction of buckling modes in thin-walled members and imperfection sensitivity</i>	
Wielomodalna interakcja wyboczenia cienkościennych elementów konstrukcji i czułość na imperfekcje	
31. K. Mazur-Śniady	187
Efekt skali w zagadnieniach zginania i stateczności belki spoczywającej na podłożu sprężystym o okresowo zmiennej sztywności	
<i>A length-scale effect in bending and stability of a beam interacting with a microperiodic elastic subsoil</i>	
32. B. Michalak	193
<i>Stability of plates with initial geometrical periodical imperfections</i>	
Stateczność płyt z wstępnymi periodycznymi geometrycznymi imperfekcjami	
33. A. Muc	199
<i>Buckling analysis of composite structures- application of the NISA II program</i>	
Analiza wyboczenia konstrukcji kompozytowych - zastosowanie programu NISA II	
34. A. Muc	205
<i>Optimization of composite structures under buckling constraints</i>	
Optymalizacja konstrukcji kompozytowych przy uwzględnieniu wyboczenia	
35. J. Murzewski	211
Stateczność sprężysto-plastyczna stalowych ram z niedokładnościami	
<i>Elastic-plastic instability of steel frames with imperfections</i>	

36. J. Obrębski	217
<i>Uniform criterion for geometrical unchangeability and for instability of structures</i>	
Jednolite kryterium geometrycznej niezmienności i niestateczności konstrukcji	
37. W. Ostachowicz, M.Krawczuk, A.Żak	223
Stateczność wielowarstwowej płyty kompozytowej z włóknami z pamięcią kształtu	
<i>Buckling of multi-layer composite plate with SMA fibres</i>	
38. D. Pawlus	229
Zachowanie liniowo lepko-sprężystych płyt pierścieniowych przy obciążeniach zmiennych	
<i>The behaviour viscoelastic ring-shaped plate under variable load</i>	
39. J. Ravinger	235
<i>Dynamic postbuckling behaviour of thin-walled panel</i>	
Dynamiczny stan zakrytyczny paneli cienkościennej	
40. J.Rhodes, D. Nash, M. MacDonald	241
<i>Some aspects of web crushing behaviour in thin-walled beams</i>	
O pewnych aspektach tarczowego zniszczenia środników w belkach cienkościennych	
41. F. Romanów, M. Malinowski	247
Dynamiczna stateczność płyty warstwowej	
<i>Dynamic stability of sandwich plate under compression</i>	
42. V.N. Shvayko, V. Tarnavskij	253
<i>On bifurcation of the second order deforming process in the theory of stability</i>	
O bifurkacji drugiego rzędu w procesie deformacji w zagadnieniach teorii stateczności	

43. **Cz. Szymczak** 259
 Wpływ przepon na wariację siły krytycznej wyboczenia skrętnego pręta o przekroju bisymetrycznym
Effect of transverse stiffeners on torsional buckling load of thin-walled columns with bi-symmetric cross-section
44. **P. Śniady, W. Glabisz** 265
 Stateczność układu nieliniowego pod stochastycznym obciążeniem niekonserwatywnym
Stability of nonlinear system under stochastic nonconservative loading
45. **M. Taczala** 271
Influence of the lateral loading on the ultimate capacity of ship hull
 Wpływ bocznych obciążeń na nośność graniczną kadłuba statku
46. **L. Tomski, J. Przybylski, I. Podgórska** 277
Stability and vibration of a cantilever column lying on the elastic foundations loaded by a generalised load
 Stateczność i drgania wspornika spoczywającego na sprężystym podłożu pod działaniem siły uogólnionej
47. **L. Tomski, J. Przybylski, M. Gołębiowska - Rozanow** 283
Stability and vibration of a three-rod column of the divergence-pseudoflutter type
 Stateczność i drgania typu dywergencyjno-pseudoflatterowego trójprętowego słupa
48. **M. Wieczorek, E. Szymczak** 287
 Metody szacowania obciążeń niszczących uzwojenia transformatorów w systemie SPN
The estimation of critical loads of transformer windings in SPN system
49. **Sh. Wu, Wei-Wen Yu, R. A. Laboube** 293
Flexural strength of steel panels using high-strength, low ductility steel
 Wytrzymałość giętna paneli ze stali o wysokiej wytrzymałości i niskiej podatności

Stability of an elastic-plastic sandwich cylindrical shell under combined load

Stateczność sprężysto-plastycznej powłoki walcowej
wielowarstwowej pod obciążeniem złożonym

BUCKLING OF CYLINDRICAL SHELL RING-STIFFENED ON THE ENDS UNDER NONUNIFORM EXTERNAL PRESSURE

I.V. ANDRIANOV, M.V. MATYASH

*Department of Higher Mathematics, Prydneprovie State Academy of Civil Engineering and Architecture (PGASA)
24 a Chernyshevskogo, Dnepropetrovsk, 320005, Ukraine*

A cylindrical shell with end rings loaded by nonuniform external pressure. is under consideration. Stability of the structure is analysed by means of the perturbation procedure and Padé approximants.

1. Governing relations

Below we use equations of "semimomentous" theory

$$D \frac{\partial^8 W^s}{\partial y^8} + q(y)R \frac{\partial^6 W^s}{\partial y^6} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 W^s}{\partial x^4} = 0 \quad (1)$$

and edge effect [1, 2]

$$D \frac{\partial^4 W^e}{\partial x^4} + \frac{Eh}{(1-\nu^2)R^2} W^e = 0 \quad (2)$$

Here W - normal displacement; $q(y)$ - normal pressure; $q(y) = q(1 + \varepsilon \cos \varphi)$; $\varphi = y/R$; $\varepsilon \ll 1$; E, ν - Young moduli and Poisson ratio; h, R - thickness of shell and its radius; $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$.

End rings don't give possibility to split boundary conditions. We have after neglecting insufficient addends and taking into account conditions of unextension in ring direction and absence of shear the following relations for $x=0, l$ ($l = L/R$, L - length of shell)

$$0 = \frac{Eh}{1-\nu^2} \iiint W_{xxx}^s dy dy dy - EF_w \frac{\partial W^s}{\partial y} - \frac{EI_{xx}}{R} \frac{\partial W_x^s}{\partial y} - \frac{EF_w}{R} \frac{\partial (W^s + W^e)}{\partial y} - \frac{EI_{xx}}{R^3} \frac{\partial W_x^e}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{Eh}{1-\nu^2} \iint W_{xx}^s dy dy - EI_z \frac{\partial^2 W_x^s}{\partial y^2} + \frac{GI_d}{R^2} W_x^s + \\
&\quad EI_{zx} \frac{\partial^4 (W^s + W^e)}{\partial y^4} - \left(\frac{EI_z}{R^2} + \frac{GI_d}{R^2} \right) \frac{\partial^2 W_x^e}{\partial y^2} \\
0 &= D \frac{\partial^3 W^e}{\partial x^3} + \frac{EF_u}{R^2} (W^s + W^e) - \frac{EI_{zx}}{R^2} \frac{\partial^2 W_x^e}{\partial y^2} \\
0 &= D \frac{\partial^2 W^e}{\partial x^2} + \frac{EI_z}{R^2} W_x^e - \frac{GI_d}{R} \frac{\partial^2 W_x^e}{\partial y^2} \quad (3)
\end{aligned}$$

Here GI_d ; F_u ; I_{zx} , I_z - torsional rigidity, area of cross-section; inertia moments of end rings.

2. Asymptotic solution - first approximation

Eigenvalue and eigenfunction may be assumed in the form

$$\begin{aligned}
W^s &\approx W_0^s + \varepsilon W_1^s + \varepsilon^2 W_2^s, & W^e &\approx W_0^e + \varepsilon W_1^e + \varepsilon^2 W_2^e, \\
q &\approx q_0 + \varepsilon q_1 + \varepsilon^2 q_2
\end{aligned}$$

Let us choose approximate solutions of Eq. (1),(2) as follows

$$W_0^s = \theta(x) \cos \varphi, \quad W_0^e = \psi(x) \cos \varphi$$

Symmetric in respect to the origin of coordinates solution of Eq. (1) for $\alpha < 0$ (this condition is natural for practically interesting value of geometrical and physical parameters of system) is

$$W_0^s = \cos \varphi \left[C_1 \cos \sqrt{2k}x + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{2k}x \right] \quad (4)$$

$$\text{Here } 4k^4 = \alpha(n) = \frac{n^6}{R} \left(\frac{n^2}{4(1-\nu^2)\gamma^4} - \frac{q_0}{hR^2} \right); \quad \gamma^4 = \frac{3}{h^2 R^2}$$

For edge effect near the end $x = -l/2$ (due to symmetry we may taking into account only one end) one of $W_0^e = \cos \varphi [C_5 \cos \gamma(x + l/2) + C_6 \sin \gamma(x + l/2)] e^{-\gamma(x+l/2)}$ (5)

After substituting Eq. (4), (5) into Eq. (3) we obtain transcendental equation as condition of eigenvalue problem solution existence. It worth noting that we search minimal in respect to n value of $q(n)$. As for eigenvalue function we may taking into account only semimomentous components, because edge effect components is localized near the ends and don't give essential contribution to the eigenvalue. From the equation of the first approximation we have $q_1 = 0$, and eigenvalue function W_1^s must be defined from the nonuniform equation

$$L_1(W_1) \equiv D \frac{\partial^8 W_1^s}{\partial y^8} + Rq_0 \frac{\partial^6 W_1^s}{\partial y^6} + \frac{Eh}{R^2} \frac{\partial^4 W_1^s}{\partial x^4} + Rq_0 \frac{\partial^6 W_0^s}{\partial y^6} = 0 \quad (6)$$

Solution of Eq. (6) may be sought in the form

$$W_1^s = F_1(x) \cos \varphi(n-1) + F_2(x) \cos \varphi(n+1)$$

For F_1 one obtains the following equation:

$$F_1^{(4)}(x) + \alpha_1 F_1(x) = \frac{q_0 n^6}{2} [C_1 \cos \sqrt{2} kx + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{2} kx] \quad (7)$$

Here $4k_1^4 = \alpha_1(n-1)$.

Solution of nonuniform differential Eq. (7) may be written as follows

$$F_1 = \overline{F}_1 + \overline{\overline{F}}_1 \quad (8)$$

Here $\overline{F}_1 = D_3 \cos \sqrt{2} k_1 x + D_4 \operatorname{ch} \sqrt{2} k_1 x$, $\overline{\overline{F}}_1 = D_1 \cos \sqrt{2} kx + D_2 \operatorname{ch} \sqrt{2} kx$

$$D_i = \frac{0.5 C_i q_0 n^6}{(\alpha + \alpha_1) h R^3}; \quad i = 1, 2$$

Edge effect solution W^e we may find in the following form

$$W_1^e = \cos(\varphi(n-1)) [D_5 \cos \gamma(x + l/2) + D_6 \sin \gamma(x + l/2)] e^{-\gamma(x+l/2)} \quad (9)$$

Using Eq. (8), (9) and Eq. (3) one obtains

$$D_4 = \frac{a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} \quad D_3 = \frac{a_{23} - D_4a_{22}}{a_{21}} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{Here } a_{11} &= -\left(Z_1\sqrt{2}\frac{k_1R}{n-1} + Z_2\right)\sin\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + 2F_n(n-1)\cos\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + g_1Z_3 \\ a_{12} &= \left(-Z_1\sqrt{2}\frac{k_1R}{n-1} + Z_2\right)sh\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + 2F_n(n-1)ch\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + g_2Z_3 \\ a_{13} &= \left[\left(Z_1\sqrt{2}\frac{k_1R}{n-1} + Z_2\right)\sin\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} - 2F_n(n-1)\cos\frac{\sqrt{2}k_1l}{2}\right]D_3 + \\ &\quad \left[\left(Z_1\sqrt{2}\frac{k_1R}{n-1} - Z_2\right)sh\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} - 2F_n(n-1)ch\frac{\sqrt{2}k_1l}{2}\right]D_4 - g_3Z_3 \\ a_{21} &= (-Z_1 + Z_4)\cos\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} - Z_5\sin\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + g_1Z_6 \\ a_{22} &= (Z_1 + Z_4)ch\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + Z_5sh\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + g_2Z_6 \\ a_{23} &= \left[(Z_1 + Z_4)\cos\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + Z_5\sin\frac{\sqrt{2}k_1l}{2}\right]D_3 - \\ &\quad \left[(Z_1 + Z_4)ch\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} + Z_5sh\frac{\sqrt{2}k_1l}{2}\right]D_4 - g_3Z_6 \\ Z_1 &= \frac{2}{1-\nu^2}\left(\frac{k_1R}{n-1}\right)^2 \quad Z_2 = I_2k_1R(n-1)\sqrt{2} \quad Z_3 = F_n(n-1) + I_2\gamma R(a_{s6} - 1) \\ Z_4 &= I_2(n-1)^4 \quad Z_5 = (I_1(n-1)^2 + G_1)k_1R\sqrt{2} \\ Z_6 &= Z_4 + (I_1 + G_1)(n-1)^2\gamma R(a_{s6} - 1) \quad g_1 = Z_7\cos\frac{\sqrt{2}k_1l}{2} \end{aligned}$$

$$g_2 = Z_7 ch \frac{\sqrt{2}k_1 l}{2} \quad g_3 = Z_7 \left(D_3 \cos \frac{\sqrt{2}k_1 l}{2} + D_4 ch \frac{\sqrt{2}k_1 l}{2} \right)$$

$$Z_7 = \frac{-F_n \left(\frac{R}{h} \right)^2}{F_n \left(\frac{R}{h} \right)^2 + (1 - a_{56}) \left(\frac{(\gamma R)^3}{6(1 - \nu^2)} - I_2 \gamma R \left(\frac{R}{h} \right)^2 (n-1)^2 \right)}$$

$$a_{56} = \frac{I_1 + G_1 (n-1)^2}{-\frac{\gamma R}{6(1 - \nu^2)} \left(\frac{R}{h} \right)^2 + I_1 + G_1 (n-1)^2}$$

$$F_n = \frac{F_w}{Rh}; \quad I_1 = \frac{I_z}{R^3 h}; \quad I_2 = \frac{I_{zx}}{R^3 h}; \quad G_1 = \frac{GI_d}{R^3 h}$$

Coefficients for solution $F_2(x)$ and corresponding edge effect solution B_i ($i = 1-6$) may be obtained after replacement $(n-1)$ on $(n+1)$ in Eq. (10).

3. Asymptotic solution - second approximation

Component q_2 is the coefficient in the equation of the second approximation of semimomentous theory

$$L_1(W_2^s) + q_2 R \frac{\partial^6 W_0^s}{\partial y^6} + R q_0 \cos \varphi \frac{\partial^6 W_1^s}{\partial y^6} = 0$$

Using rougtin perturbation technique one obtains

$$q_2 = - \frac{q_0 \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^6 q^- + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^6 q^+ \right)}{C_1^2 \left(l + \frac{\sin 2\sqrt{2}kl}{2\sqrt{2}k} \right) + C_4^2 \left(l + \frac{sh 2\sqrt{2}kl}{2\sqrt{2}k} \right) + \frac{2C_1 C_4}{\sqrt{2}k} S}$$

Here $S = sh\sqrt{2}kl \cos \sqrt{2}kl + ch\sqrt{2}kl \sin \sqrt{2}kl$

$$\begin{aligned}
q^- = & \frac{D_3 C_1}{2\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \sqrt{2}(k_1 + k)l}{k_1 + k} + \frac{\sin \sqrt{2}(k_1 - k)l}{k_1 - k} \right] + \\
& \frac{D_4 C_1}{\sqrt{2}(k_1^2 + k^2)} \left[k_1 sh \sqrt{2} k_1 l \cos \sqrt{2} k l + k ch \sqrt{2} k_1 l \sin \sqrt{2} k l \right] + \\
& \frac{D_1 C_1}{2} \left(l + \frac{\sin 2\sqrt{2} k l}{2\sqrt{2} k} \right) + \frac{D_2 C_1 + D_1 C_4}{2\sqrt{2} k} S + \\
& \frac{D_4 C_4}{2\sqrt{2}} \left[\frac{sh \sqrt{2}(k_1 + k)l}{k_1 + k} + \frac{sh \sqrt{2}(k_1 - k)l}{k_1 - k} \right] + \frac{D_2 C_4}{2} \left(l + \frac{sh 2\sqrt{2} k l}{2\sqrt{2} k} \right) + \\
& \frac{D_3 C_4}{\sqrt{2}(k_1^2 + k^2)} \left[k sh \sqrt{2} k l \cos \sqrt{2} k_1 l + k_1 ch \sqrt{2} k l \sin \sqrt{2} k_1 l \right]
\end{aligned}$$

Component q^+ is obtaining after replacement D_i on B_i and k_1 on k_2 .

After using Padé approximats procedure [1] to the truncated perturbation series for q we have

$$\frac{q}{q_0} = \frac{q_0}{q_0 - \varepsilon^2 q_2} \quad (11)$$

Solution (11) is justified due to passage to the limit cases (simple support, clamped and free ends) and by comparison with known numerical results.

4. References

1. Obratsov I.F., Nerubaylo B.V. and Andrianov I.V., *Asymptotic Methods in Structural Mechanics of Thin-Walled Structures* (Mashinostroyenie, Moscow, 1991), 1 - 416 (in Russian).
2. Andrianov I.V., Lesnichaya V.A., Loboda V.V. and Manevich L.I., *Calculation of Engineering Construction Ribbed Shells Strength* (Naukova Dumka, Kiev-Donetsk, 1986), 1 - 104 (in Russian).

Z ZAGADNIENÍ STATECZNOŚCI PŁYT O STRUKTURZE PERIODYCZNEJ

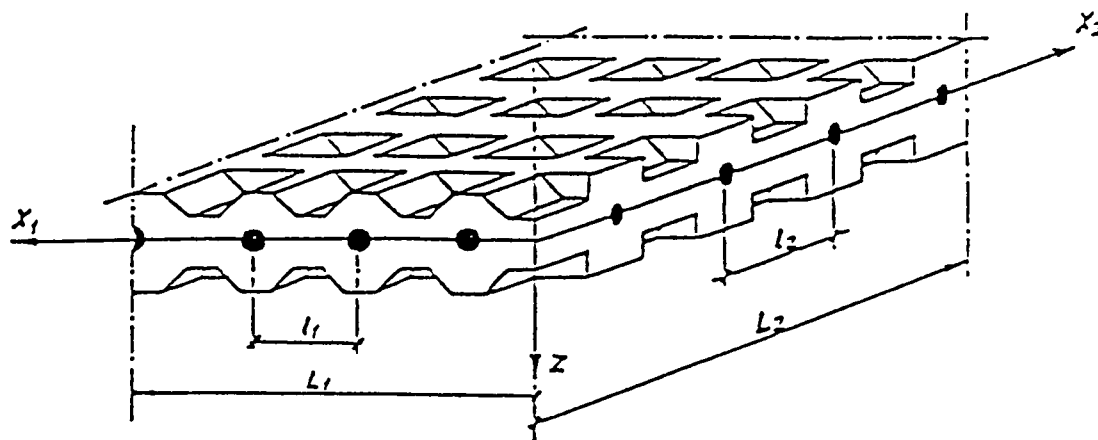
E. BARON

*Katedra Mechaniki Teoretycznej Politechniki Śląskiej
Krzywoustego 7, 44100 Gliwice, Poland*

Artykuł prezentuje zastosowania ulepszonej makrodynamiki mikroperiodycznych struktur materiałowych do analizy stateczności dynamicznej płyt na modelu Hencky-Reissnera. Jako przypadek szczególny przedstawiono rozwiązanie zagadnienia kiedy mikroperiodyczność płyty jest związana z rozkładem obciążających ją mas. Wyprowadzono równania opisujące problem stateczności dynamicznej ortotropowej, swobodnie podpartej, płyty prostokątnej o strukturze periodycznej.

1. Wstęp

Płyta o strukturze periodycznej to płyta składająca się z wielu powtarzających się elementów w kierunkach równoległych do płaszczyzny środkowej. Jest to więc płaska struktura periodyczna. Fragment takiej płyty przedstawiono na rys.1.



Rys.1 Płyta o strukturze periodycznej
Fig.1. Plate with a periodic microstructure

Rozwiązanie zagadnień dynamicznych dla płyt periodycznych napotyka na znaczne trudności analityczne co wynika z faktu, że funkcje materiałowe i rozkład masy są silnie oscylujące, a w wielu miejscach nieciągłe. Proponuje się więc modele uproszczone, w których własności płyt reprezentują uśrednione i stałe co do wartości moduły efektywne. Moduły te uzyskuje się m. in. przez podejście asymptotyczne,

które pomija jednak efekt skali periodyczności (tzn. wpływ wielkości powtarzalnego elementu płyty) na makromechaniczne własności ciała.

Niniejsze opracowanie dotyczy zagadnienia stateczności płyt o strukturze periodycznej z uwzględnieniem efektu skali. Punktem wyjścia jest nieasymptotyczna, ulepszona makrodynamika mikrookresowych struktur materiałowych. [3,2,1]. Korzystając z założeń tej teorii, wyprowadzono w pracy [4] równania ruchu płyt o strukturze periodycznej, wg modelu Hencky-Reissnera. W następnym etapie równania te przekształcono do postaci dogodnej do analizy zagadnienia stateczności. Celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie równań opisujących problem stateczności dynamicznej swobodnie podpartych, prostokątnych płyt ortotropowych, dla których mikroperiodyczność jest związana z rozkładem obciążających ją mas.

Wskaźniki $\alpha, \beta, \gamma \dots (i, j, k \dots)$ przyjmują wartości 1, 2 (1, 2, 3) natomiast wskaźniki $a, b, c \dots$ oraz $A, B, C \dots$ przebiegają ciąg 1, 2, ..., n i odpowiednio 1, 2, ..., N. Obowiązuje konwencja sumacyjna. Ujęcie pary wskaźników w nawias oznacza ich symetryzację.

2. Podstawowe równania

W przestrzeni fizycznej parametryzowanej prostokątnym, kartezjańskim układem współrzędnych Ox_1x_2z płyta zajmuje obszar w którym $x = (x_1, x_2) \in \Pi$ oraz $z \in (\delta^-(x), \delta^+(x))$, gdzie Π jest prostokątem o wymiarach L_1 i L_2 na płaszczyźnie Ox_1x_2 , natomiast $\delta^- < 0$ i $\delta^+ > 0$ są funkcjami określającymi powierzchnie ograniczające płytę od dołu i od góry.

Wymiary komórki periodyczności w obszarze Π wynoszą l_1 i l_2 , a parametrem mikrostruktury jest $l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, przy czym $l \ll \max\{L_1, L_2\}$.

Niech t będzie współrzędną czasową, $t > 0$, natomiast p^+, p^- obciążeniem (wzdłuż osi z) odpowiednio górnej i dolnej powierzchni płyty. Ponadto b jest stałą siłą masową (wzdłuż osi z) a ρ jest gęstością masy. Dla dowolnej A -periodycznej funkcji $f = f(x)$, gdzie $A = (0, l_1) \times (0, l_2)$, zdefiniowano operator uśredniający

$$\langle f \rangle := \frac{1}{l_1 l_2} \int_A f(x) dx_1 dx_2, \text{ gdzie } \langle f \rangle \text{ jest stałą.}$$

Założono ponadto, że każda płaszczyzna $z = \text{const}$ jest płaszczyzną symetrii sprężystej i zdefiniowano pole: $A_{\alpha\beta\gamma\delta} := C_{\alpha\beta\gamma\delta} - C_{\alpha\beta 33} C_{\gamma\delta 33} (C_{3333})^{-1}$, gdzie C_{ijkl} jest tensorem sztywności sprężystej materiału płyty. Pola C_{ijkl} oraz ρ są parzystymi funkcjami zmiennej z i są A -periodycznymi funkcjami zmiennych x_1 i x_2 .

Przemieszczenia $u_i(\mathbf{x}, z, t)$ dowolnego punktu niezdeformowanej płyty są określone poprzez relacje:

$$u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) = v_\alpha(\mathbf{x}, t) + f^m(\mathbf{x})V_\alpha^m(\mathbf{x}, t) + z[\vartheta_\alpha(\mathbf{x}, t) + h^a\Theta_\alpha^a(\mathbf{x}, t)],$$

$$u_3(\mathbf{x}, z, t) = w(\mathbf{x}, t) + g^A(\mathbf{x})W^A(\mathbf{x}, t),$$

gdzie: $w(\cdot), v_\alpha(\cdot), \vartheta_\alpha(\cdot)$ nazywamy makroprzemieszczeniami i makroobrotami, $V_\alpha^m(\cdot), W^A(\cdot), \Theta_\alpha^a(\cdot)$ są funkcjami korygującymi oraz $f^m(\cdot), h^a(\cdot), g^A(\cdot)$ to postulowane *a priori* A - periodyczne funkcje kształtu, które wyznaczają klasę badanych ruchów.

Makroprzemieszczenia i makroobroty oraz funkcje korygujące są tzw. makrofunkcjami [3], co oznacza, że przy obliczaniu całek po komórce A (komórce periodyczności) można pominąć wahania ich wartości. Zależności między tensorem naprężenia i odkształcenia mają postać $\sigma_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta}\varepsilon_{\gamma\delta}$, $\sigma_{\alpha 3} = 2C_{\alpha 3\beta 3}\varepsilon_{\beta 3}$, natomiast związki geometryczne przyjęto w poniższej formie:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{(\alpha,\beta)} + \frac{1}{2}w_{,\alpha}w_{,\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha 3} = u_{(\alpha,3)}, \quad \varepsilon_{33} = 0,$$

czyli z uwzględnieniem członu nieliniowego.

W pracy [4], wychodząc z zasady prac wirtualnych, po formalnych przekształceniach wyprowadzono równania ruchu, równania konstytutywne oraz kinematyczne warunki brzegowe dla płyt o strukturze periodycznej z uwzględnieniem efektu skali. Po pewnych uproszczeniach postać równań ruchu jest następująca:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta,\beta} &= 0, \quad M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha - \langle Jh^a \rangle \ddot{\Theta}_\alpha^a = 0, \\ M_\alpha^a + \langle Jh^a \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha + \langle Jh^a h^b \rangle \ddot{\Theta}_\alpha^b &= 0, \\ (N_{\alpha\beta}w_{,\alpha})_{,\beta} + Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{w} - \langle \mu g^A \rangle \ddot{W}^A + p &= 0, \\ Q^A + \langle \mu g^A \rangle \ddot{w} + \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{W}^B &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

natomiast niektórymi równaniami konstytutywnymi są:

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)} + \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} h_\gamma^a \rangle \Theta_\delta^a, \\ Q_\alpha &= \langle C_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta + w_{,\beta}) + \langle C_{\alpha\beta} g_{\beta}^A \rangle W^A. \end{aligned}$$

$$\text{W równaniach tych: } \mu := \int_{\delta^-}^{\delta^+} \rho dz, \quad J := \int_{\delta^-}^{\delta^+} z^2 \rho dz, \quad p := p^+ + p^- + b\langle \mu \rangle,$$

$$G_{\alpha\beta\gamma\delta} := \int_{\delta-}^{\delta+} z^2 A_{\alpha\beta\gamma\delta} dz, \quad C_{\alpha\beta} := \int_{\delta-}^{\delta+} C_{\alpha\beta\gamma\gamma} dz.$$

3. Płyta ortotropowa obciążona periodycznym obciążeniem inercyjnym

Płyta ma stałą grubość d . Przyjmując ponadto tylko jedną funkcję kształtu $f(x) := f^1(x)$, $g(x) := g^1(x)$, $h(x) := h^1(x)$ oraz zakładając, iż obciążenie wzbudzające ma postać $p = \bar{p}(x) \cos \omega t$, będziemy poszukiwać składowych stanu przemieszczenia w formie: $\vartheta_\alpha = \bar{\vartheta}_\alpha(x) \cos \omega t$, $\Theta_\alpha = \bar{\Theta}_\alpha(x) \cos \omega t$, $w = \bar{w}(x) \cos \omega t$, $W = \bar{W}(x) \cos \omega t$. Po podstawieniu tych zależności do równań ruchu (1) i wyrugowaniu amplitud $\bar{\Theta}_\alpha$ i $\bar{W}$ uzyskano równania dla amplitud $\bar{w}$ oraz $\bar{\vartheta}_\alpha$:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\beta} \bar{w}_{,\alpha\beta} + E_{\alpha\beta} \left[\bar{\vartheta}_{(\alpha,\beta)} + \bar{w}_{,\alpha\beta} \right] + m^\omega \omega^2 \bar{w} + \bar{p} &= 0, \\ K_{\alpha\beta\gamma\delta} \bar{\vartheta}_{(\gamma,\beta\delta)} - E_{\alpha\beta} \left(\bar{\vartheta}_\beta + \bar{w}_{,\beta} \right) + j_{\alpha\beta}^\omega \omega^2 \bar{\vartheta}_\beta &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

W powyższych równaniach: $K_{\alpha\beta\gamma\delta} := \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle$, $E_{\alpha\beta} := \langle C_{\alpha\beta} \rangle$, $m^\omega = m + \frac{(m^1)^2 \omega^2}{C - m^{11} \omega^2}$, $j_{\alpha\beta}^\omega = \delta_{\alpha\beta} j + (L^\omega)_{\alpha\beta}^{-1} (j^1)^2 \omega^2$, gdzie: $L_{\alpha\beta}^\omega = G_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} j^{11} \omega^2$ i $L_{\alpha\gamma}^\omega (L^\omega)_{\beta\gamma}^{-1} = \delta_{\alpha\beta}$.

Ponadto oznaczono: $m := \langle \mu \rangle$, $m^1 := \langle \mu g \rangle$, $m^{11} := \langle \mu (g)^2 \rangle$, $C := \langle C_{\alpha\beta} g_{,\alpha} g_{,\beta} \rangle$, $j := \langle J \rangle$, $j^1 := \langle J h \rangle$, $j^{11} := \langle J (h)^2 \rangle$, $G_{\alpha\beta} := \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\gamma} h_{,\delta} \rangle$.

Równania (2) są równaniami wyjściowymi do analizy stateczności płyt o strukturze periodycznej warunkowanej obciążeniem inercyjnym.

Jako jedno z możliwych zastosowań przeanalizowano zagadnienie stateczności dynamicznej płyty ortotropowej, swobodnie podpartej na wszystkich brzegach, charakteryzującej się periodycznym rozkładem mas.

Przyjęto następującą postać rozwiązania układu równań (2):

$$\begin{aligned} \bar{\vartheta}_1 &= \sum_m \sum_n b_{mn} \cos \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \quad \bar{\vartheta}_2 = \sum_m \sum_n c_{mn} \sin \alpha_m x_1 \cos \beta_n x_2, \\ \bar{w} &= \sum_m \sum_n a_{mn} \sin \alpha_m x_1 \sin \beta_n x_2, \quad \text{gdzie: } \alpha_m = \frac{m\pi}{L_1}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{L_2}, \quad m, n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned}$$

Z założenia ortotropowości płyty wynika, że niezerowe są jedynie następujące składowe tensora sztywności sprężystej: A_{1111} , A_{1122} , A_{2222} , A_{1212} , C_{1313} , C_{2323} .

Przy równomiernym rozciąganiu płyty, oznaczając: $N_1 := N_{11}$, $N_2 := N_{22}$ ($N_{12} = 0$), uzyskano układ równań dla stałych a_{mn} , b_{mn} i c_{mn} .

Kryterium stateczności dynamicznej jest zerowanie się następującego wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} (-\bar{N}_1 + E_1)\alpha_m^2 + (-\bar{N}_2 + E_2)\beta_n^2 - m^\omega \omega^2 & E_1 \alpha_m & E_2 \beta_n \\ E \alpha_m & K_{11} \alpha_m^2 + K \beta_n^2 + E_1 - j^\omega \omega^2 & (K_{12} + K) \alpha_m \beta_n \\ E_2 \beta_n & (K_{12} + K) \alpha_m \beta_n & K_{22} \beta_n^2 + K \alpha_m^2 + E_2 - j^\omega \omega^2 \end{vmatrix} \quad (3)$$

gdzie oznaczono: $K_{11} := K_{1111}$, $K_{22} := K_{2222}$, $K_{12} := K_{1122}$, $K := K_{1212}$, $E_1 := E_{11}$, $E_2 := E_{22}$, natomiast $\bar{N}_1, \bar{N}_2$ są krytycznymi wartościami sił ściskających działających w płaszczyźnie środkowej płyty.

W wyznaczniku (3) parametr mikrostruktury jest zawarty w członach inercyjnych m^ω i j^ω bowiem j^{11} , $(j^1)^2$, m^{11} , $(m^1)^2 \in O(l^2)$.

W przypadku gdy rozpatrujemy jednowymiarowe zagadnienie ortotropowego pasma płytowego, uzyskujemy następującą relację określającą siłę krytyczną

$$\bar{N}_1 = E_1 \left[1 - \frac{E_1}{K_{11} \alpha_m^2 + E_1 - j^\omega \omega^2} \right] - \frac{m^\omega}{\alpha_m^2} \omega^2. \quad (4)$$

4. Uwagi końcowe

Relacje (3) i (4) umożliwiają analizę zagadnienia stateczności dynamicznej płyt ortotropowych wg modelu Hencky-Reissnera, charakteryzujących się periodycznym obciążeniem inercyjnym. Relacje te mają niezbyt skomplikowaną budowę matematyczną, a jednocześnie pozwalają na uwzględnienie wielu zagadnień inżynierskich. Rezultaty obliczeń numerycznych zostaną przedstawione w trakcie prezentacji referatu.

Literatura

1. Baron E, Woźniak Cz.: *On the microdynamics of composite plates*. Arch. of Appl. Mech. 66, Springer-Verlag 1995, s. 126-133.
2. Konieczny S., Woźniak Cz., Woźniak M.: *Dynamics and stability of laminated plates with interlaminar imperfections*. Eur. J. Mech. A/Solids, Gauthier-Vilars 1995, s. 277-285.
3. Woźniak Cz.: *Refined macrodynamics of periodic structures*. Arch. Mech. 45, Warszawa 1993, s. 295-304.
4. Baron E.: *On the microdynamics of microstructured plates*. (w przygotowaniu).

Summary

SOME PROBLEMS OF STABILITY OF MICRO-PERIODIC PLATES

The plates with the periodic structure consist of many repeatable volumetric elements so called periodical cells. The volumetric elements have length dimensions much smaller than every characteristic dimension of midplane of the plate.

We assume simultaneously that each cell is a cuboid with a height equal to a thickness of the plate. Solving problems for such plates on the basis of the known equations of thin plates meets large analytical difficulties. It results of a fact that material functions and distribution of are strongly oscillating and non-continuous.

This makes it impossible to obtain solutions for many engineering problems. Thus, in the framework of micromechanics of materials, simplified models are proposed in which averaged (and constant) material stiffness are introduced. However, such an approach neglects the effect of a microstructure scale of the plate (i. e. dimensions of a periodic cell) on its dynamics.

Since in many engineering problems an influence of the periodic scale can not be neglected, then in [3] a non asymptotic, refined macrodynamics of microperiodical material structures was proposed.

The subject of this paper is to show some applications of refined macrodynamics of microperiodic plates. This modelling approach to elastic plates, having microperiodic structure in planes parallel to the midplane, is based on the assumptions given in [1,2] and describes the effect of the microstructure length dimension on the dynamics and stability of plates.

The presented research utilises results of [1,2] and generalized them to non-linear problems in order to analyse the effect of the microstructure size on the dynamic stability of a Hencky-Reissner type plate. In the research one can find the underlying assumptions of the proposed approach, the basic foundations and equations of the proposed non-linear theory of plates with a periodic structure and the example of application to the dynamic stability of plates subjected to periodically distributed inertial loadings.

WITOLD BODASZEWSKI
Department of Strength of Materials, Kielce University of Technology
Tysiąclecia PP 7, 25-314 Kielce, Poland

THE SOFTWARE PACKAGE 'KNPN' FOR APPROXIMATION OF SHAPING COMPLEX PLASTIC STRUCTURES

The work presents the latest version of the software package KNPn aiding the approximate solution of the shape problems for plastic structures based on the statically admissible stress fields method /SADSF/. Algorithm realized in this program is first full implementation of approach based on the mathematical complete system of conditions SADSF method, together with conditions of the existence of solution. The solving of the complex fields is based on operating on catalogized set of ready partial solutions, what it allows to omit the most difficult stage of SADSF method and to concentrate only on selection and joining of mentioned partial solutions in various complex systems, both plain or spatial.

Features of program are illustrated by examples of shaping thin-walled structures.

1. Introduction

The SADSF method is based on the limit analysis, assumes the rigid-plastic physical model of material and uses classical results of the lower bound theorem. According to this theorem a real limit loading of a structure, contour of which have been determined by statically admissible stress field /continuous or discrete/, is no lower than loading assumed for this field.

Thus the shaping problems may be formulated as the problems of finding of the admissible stress fields which determine the criterion of minimum volume. In version of SADSF method, which is treated by the paper, the mentioned criterion is replaced with weakened criterion of uniform effort in limit state and the problem is formulated on discontinuous parameters stress fields in which discontinuity lines $\mathcal{L}$ are linear segments. These assumptions, amongst others, lead to the homogeneity of stress field in each subregion of net created in this manner and certain over-dimensional estimation of contours.

Parameters describing such a stress field, may be presented in the form:

$$\{ \overset{(\alpha)}{\sigma}_{mn}, x^i[j], D=\text{const}; \quad \alpha=1..T; m,n=1,2; i=1,2,3; j=1..W \}$$

where:

- coordinates of stress discontinuity line node $x^i[j]$;
- stress $\overset{(\alpha)}{\sigma}_{mn}$ in each homogeneous region ' α ';

- a certain structural object D describing link system of $\mathcal{L}$ /topology/; in general the system does not show any regularities.

In general, all mentioned above parameters may be unknowns for a problem and must be found by the solving system of conditions which contains / [1,2] /: equilibrium equations for each line $\mathcal{L}$, assumed yield condition in each ' α ' /or weak inequality/ and boundary conditions given on S_u and S_p .

As a result we obtain very complex, non-linear system of equations and inequalities usually determined on functions given in algorithm forms, which not contains any condition for coordinates of object D . Moreover it appears that for arbitrary assumed link system $\mathcal{L}$, the solution of boundary problem in general not exists. Such solution exists only for particular link system, which is not explicit given and has not might be arbitrary assumed. In the begining we do not know neither how many unknowns, nor even how many equations /and inequalities/ system has for a particular problem. In the physical space this corresponds to unknown discretization.

This brief specification describes the scale of difficulties, which must be conquered for obtaining a solution of every particular problem by SADSf method and explains why in literature and in described programme, the complex fields are constructed by joining of the properly choosed particular solutions - whose link systems are known. Each such particular solution is on intermediate level of agregation homogeneous regions and is treated as a certain partially autonomous subsystem of complex field interacting with his neighbouring subsystems by his external parameters - analogously as superelement in FEM.

The relative simplicity of this application oriented method was achieved mainly by simplifications and constraints imposed on solutions. In this approach in its essence it needs not to solve any new statically admissible stress field, and thus it allows to omit the most difficulty of SADSf method. It needs only the proper choice from early given explicite component fields collection and the joining them according to admissibility conditions.

It should be emphasized, that SADSf method is completely different than FEM and is lower spread, however, delivers shapes and dimmensions of structures, and therefore the range of applicability may be compared only with this method.

The fundamental paper for SADSf method was presented by W. Szczepiński / [1] /. The background for algorithmization - and for study of this method, in general - appeared with formulation of the condition of the existence solution / [4] /, which avoids making of inadmissible numerical operation.

2. Destination of program, their general organisation and examples of shaping problems

The formulation and solution of a typical problem solved by method and presented programme is shown in visual fashion in fig. 1.

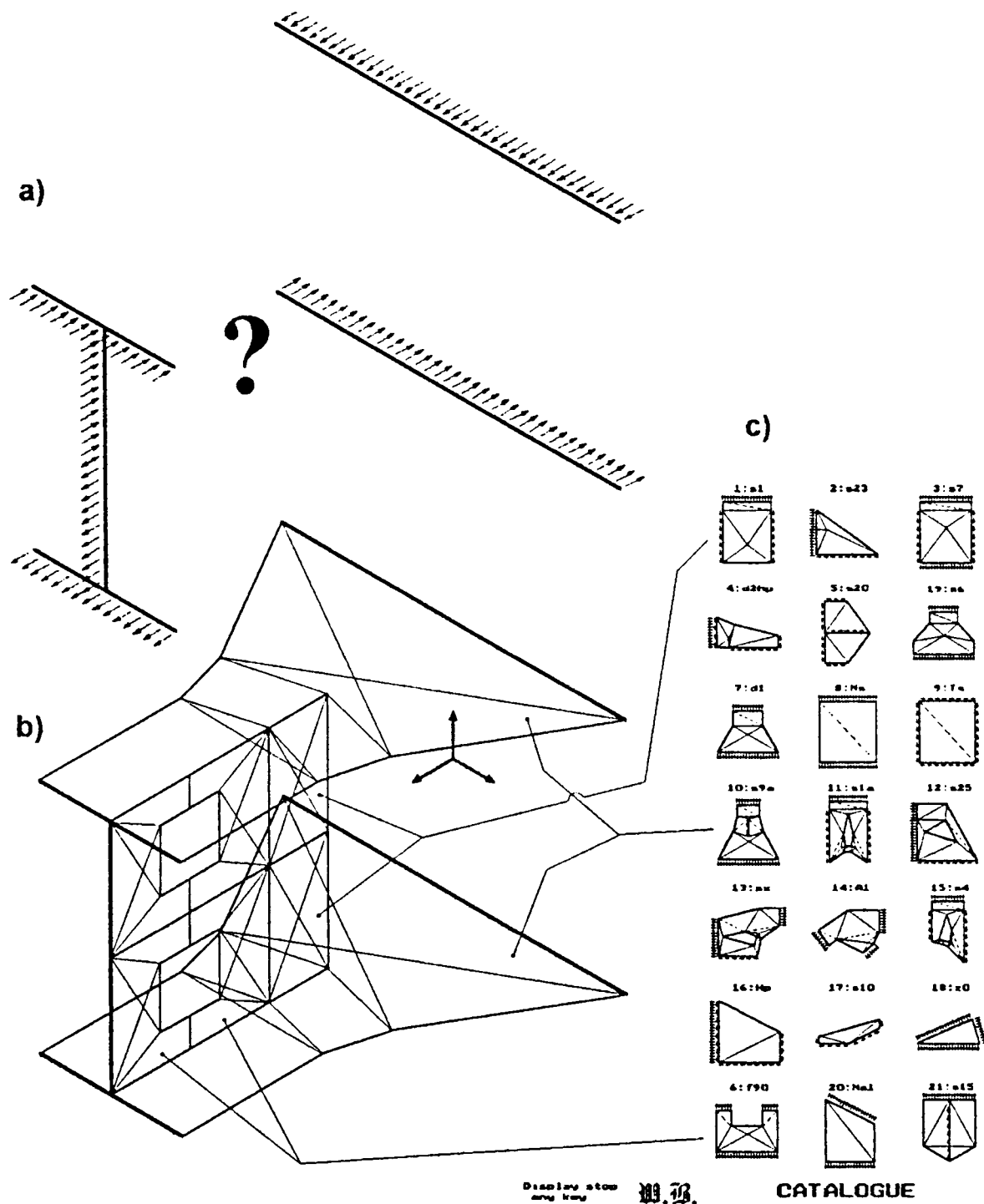


Fig.1. Example 1 /figures are hard copies of screens edited by KNP/.

a) Figure visually illustrates boundary conditions and problem formulation; b) The solution of complex 3D field, which determines the shell contour /referencing lines show the location of particular catalogized solutions in complex 3D field/; c) Catalogue of ready-made particular solutions.

Rys.1. Przykład 1 /kopie obrazów na ekranie monitora - edytowanych przez program KNP/

a) Poglądowa ilustracja warunków brzegowych oraz sformułowania zadania; b) Rozwiązanie pola złożonego, które wyznacza kontury powłoki /odnośnikami zaznaczono położenia szczególnych rozwiązań katalogowych w przestrzennym polu złożonym/; c) Katalog gotowych rozwiązań szczególnych;

The input data /Fig. 1a/ consists of: limit load capacity of a part of contour S_p /loaded contour/, contour geometry $S_u + S_p$ / S_u - e.g. supported contour/ and material of the shell. Choosing properly the limit /ready-made/ component fields from catalogue /Fig. 1c/ and joining them in arbitrary admissible configurations, it should be found statically admissible stress field, which satisfies the given boundary conditions /Fig. 1b/. It is assumed, that every field in catalogue of program KNPN was solved for Tresca yield condition.

Each particular catalogized solution is defined in the own /local/ coordinates system $\{a\}$ and their individual properties may be symbolically expressed in the form: $\{h, z, A, D\}_k$, where h, z are horizontal matrix, in which are specified mentioned above external parameters, A - dependly on version defines less or more individualized algorithm of calculation of field parameters, and D is object describing the link system $\mathcal{L}$; $k=1,2,\dots$ is an index of field in catalogue.

In the KNPN programme the following assumptions have been posed:

- elements of matrix h are stress parameters, being dimensionless /relative to $k=\sigma_{pl}/2$ / coordinates of stresses on boundary of field S ; only not explicitly settled coordinates are specified in h ;
- elements of matrix z are geometric parameters; these are linear dimensions, choosed in such manner that it will be possible to define boundaries S_u and S_p in a local coordinates system.

Because the loading applied to each component field must satisfy, amongst others, the global equilibrium conditions, not all parameters h and z are independent. Independent elements are assigned by h° and z° .

In order to construct complex field we define global system $\{x\}$ /associated with this field/ depending on class of problem - plain or spatial and component fields we distinguish by indexes: $s=1,2,\dots$. In order to build complex field from admissible components saving admissibility, the equal mutually interaction conditions must be satisfied on common boundaries of each neighbouring fields. We call them joining conditions and construct them in each case individually. The joining conditions contain also mappings: $\{x\} \leftarrow \{a\}^{(s)}$, which are admissible if each component field has guaranteed physical place in space $\{x\}$. These conditions are characterized by simple linear forms and therefore their presentation is omitted. However, values of h_i, z_i for each component field 's' must be included within the domain of solution. So the domain of complex field is logical product of domains of component fields. Contents in domain is in programme permanently checked.

According to assumed notation, the problems of determining of parameters for each component field /selected from catalogue/ and placing them in the complex field, program KNPN makes in the following steps:

$$\{h^\circ, z^\circ\}_k^{(s)} \rightarrow \{h, z, A, D\}_k^{(s)} \rightarrow \{\sigma_{mn}^{(\alpha)}, a^i[j], D\}^{(s)} \xrightarrow{\{a\}^{(s)} \rightarrow \{x\}} \{\sigma_{mn}^{(\alpha)}, x^i[j], D\}^{(s)}$$

$$(\alpha=1..T; m,n,l=1,2; i=1..3; j=1..W)^{(s)}$$

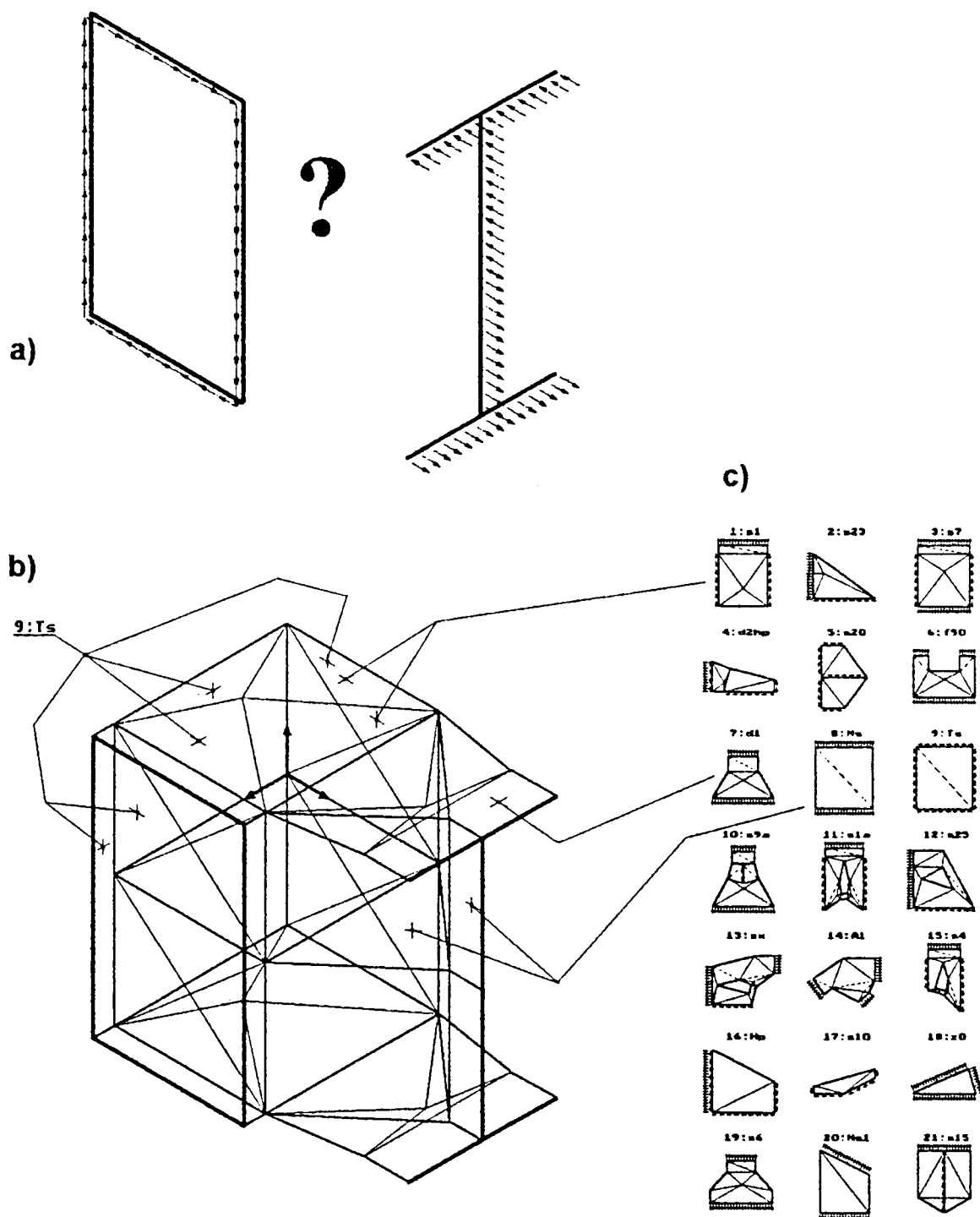


Fig.2. Example2 /description and meaning of figures analogously as in fig.1/
Rys.2. Przykład 2 /opis oraz znaczenie rysunków analogiczne jak na rys.1/.

Program works in graphic mode 1024x768 and requires min 2MB RAM. First version of KNPN had been created in 1984 and had possibilities adequate for computers and compilers at that times. At present moment program has catalogue with dozen particular component solutions in such manner selected, so it is possible to solve the wide range of typical boundary problems encountered during shaping shells built with 2D elements.

The approach based on choice and joining ready particular solutions is employed in all variants of application of method / [1,3] / and also in other parallel program named SDNPN - [2] / which aides the solutions of 2D problems. These two programs are now integrated.

In figure 2 is shown next example, representing the visual formulation and solution of shape and dimensions of shell created in region surrounding knot of frame, in which torsioned box profile is joining with 2T profile loaded by bending moment. Figures are hard copies of screens edited by KNPN.

Further examples will be shown during presentation.

Note, that for shells of this class, the theorem of de Saint Venant usually is not standing, therefore the iterative correction is in most cases divergent, and the fundamental carrying properties of structure /load capacity/ must be achieved in the first step. The shown approach and method enable such shaping.

It is obvious, that general constrains associated with the method SADSf retain the validity because the method deals only with limit state of structure - adequate for starting phase of expansion of large plastic strain. As it was shown in many of experimental and numerical researches / [1,3] / the construction created in such a way often has surprisingly good properties even with loading lower than limit. Stability of these structures has been studied in little range.

There is a conception of using SADSf method for preliminary designing, for obtaining shape and dimensions analized later by FEM method / [2,3] /.

References

1. W. Szczepiński: *Projektowanie elementów maszyn metodą nośności granicznej*, PWN Warszawa 1968;
2. P. Gomoliński, J. Szlagowski: *The software package to the method of statically admissible stress fields*, Proc. of Conf. on CAD, Miskolc 1991;
3. W. Bodaszewski, Z. Tereszowski: *Powłoki brył cienkościennych. Projektowanie struktur, kształtu i wymiarów*, KN IMB Warszawa, 1990 /s.357/;
4. W. Bodaszewski: *Struktury układów linii nieciągłości naprężeń w polach granicznych spełniających warunek Hubera-Misesa* ; R.Inż. 1/88, 3/89.

WYBRANE ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI WIELOSPÓJNYCH TARCZ KOŁOWYCH

S.BUĆKO, M.TRZEBICKI

*Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn
Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków*

M.WOJTASIEWICZ

*Instytut Metod Komputerowych w Inżynierii Lądowej
Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków*

Praca dotyczy stateczności tarcz, analizowanej Metodą Elementów Skończonych. W pierwszej części przedstawiono analizę stateczności tarczy kołowej z otworami, będącej elementem czterolinowego bębna pędnego. Dla jednego z położenia otrzymano niesymetryczną formę wyboczenia mimo spełnienia warunków symetrii. W części drugiej przeprowadzono - na uproszczonym modelu MES - pogłębioną analizę przyczyn warunkujących występowanie niesymetrycznych form wyboczenia symetrycznych elementów tarczowych.

1. Wstęp.

Zastosowanie MES do analizy stateczności konstrukcji ułatwia i przyspiesza określanie obciążeń krytycznych. Pozwala również na prezentację formy utraty stateczności, co ma duże znaczenie w procesie kształtowania rozwiązań konstrukcji. Z uwagi na przybliżony charakter MES oraz uproszczenia wykonywane przy tworzeniu modeli obliczeniowych, dużego znaczenia nabiera interpretacja i analiza wyników obliczeń. Rolę weryfikatora obliczeń najlepiej spełniają badania doświadczalne, jednak eksperymenty dotyczące utraty stateczności są trudne i kosztowne.

W analizie zachowania się konstrukcji symetrycznych oczekuje się symetrycznego rozkładu odkształceń i naprężeń a także symetrycznej lub rzadziej asymetrycznej formy wyboczenia. Niesymetryczne formy wyboczenia występują rzadko jako pierwsze (2) i ich pojawienie się wymaga zawsze starannej weryfikacji. Inspiracją niniejszej pracy była przeprowadzona analiza stateczności tarczy bocznej wielolinowego bębna pędnego nowego typu (2), gdzie w jednym z położenia wystąpiła niesymetryczna forma wyboczenia tarczy w warunkach symetrii kształtu i obciążenia.

W pracy przedstawiono wybrane fragmenty analizy stateczności tarczy bocznej (p.2) oraz pogłębioną analizę nietypowego przypadku niesymetrycznej formy

wyboczenia, przeprowadzoną na uproszczonym modelu obliczeniowym. Analizę realizowano przy wykorzystaniu systemu MES Algor umożliwiającego określanie obciążenia krytycznego w sensie Eulera.

2. Przykładowe formy utraty stateczności tarczy kołowej.

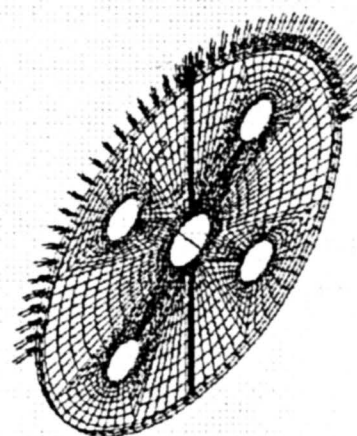
W niektórych rozwiązaniach konstrukcyjnych wielolinowych bębnow pędnych dwie liny nośne położone są w płaszczyznach tarcz bocznych. Tarcze te ze względów konstrukcyjnych, mogą posiadać usztywniony pas średnicowy (grubość około dwukrotnie większa od grubości tarczy). W takim przypadku nacisk promieniowy liny przekazywany jest w dużym stopniu na tarczę i należy rozpatrywać utratę jej stateczności jako jeden z istotnych schematów zniszczenia. Dla analizy „stateczności lokalnej” tarczy bocznej - przy zachowaniu stateczności całego bębna - przyjęto uproszczony model obliczeniowy w postaci tarczy z odcinkiem powłoki obciążonym bezpośrednio naciskiem liny nośnej oraz warunkami brzegowymi ($u_x=0$) wynikającymi z symetrii całej konstrukcji. W celu zilustrowania charakterystycznych zjawisk przedstawiono poniżej wyniki obliczeń MES dla dwóch położów tarczy bocznej :

1. Pas usztywniony wzdłuż średnicy poziomej.
2. Pas usztywniony wzdłuż średnicy pionowej.

W położeniu 1, postać wyboczenia pokazana na rys. 2 spełnia warunek symetrii względem osi symetrii tarczy (oś Z) - występujące różnice przemieszczeń po obu stronach osi Z mieszczą się w granicach technicznej dokładności obliczeń.

W położeniu 2 występuje niesymetryczna - (względem osi symetrii konstrukcji) - forma wyboczenia, którą pokazano na rys.3. Obciążenie krytyczne w przypadku 2 jest wyższe o 15 %, zatem z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji jest to przypadek o mniejszym znaczeniu. Dla sprawdzenia, czy asymetria nie jest związana z dyskretyzacją przeprowadzono obliczenia dla tarczy w położeniu 2 pozbawionej usztywnienia. Otrzymano symetryczną formę wyboczenia.

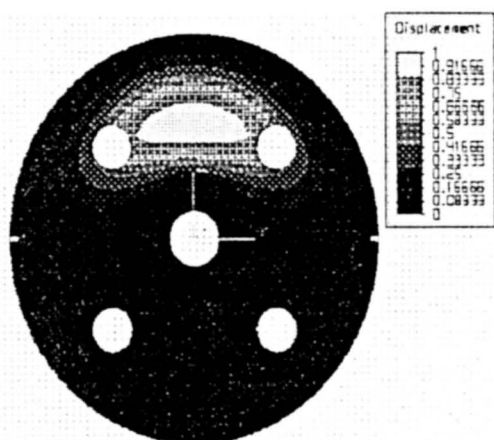
Można zatem wnioskować, że asymetria wyboczenia tarczy w położeniu 2 związana jest z lokalnym usztywnieniem mimo iż jest ono zlokalizowane na osi symetrii.



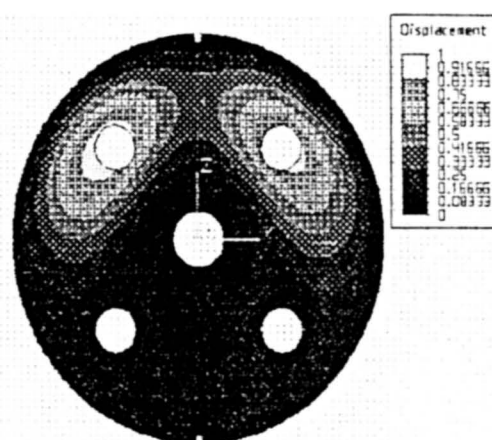
Rys.1 Model obliczeniowy tarczy bocznej bębna pędnego.

Fig.1 Computational model of the drive-drum side disk.

Dla weryfikacji przedstawionej interpretacji przeprowadzono eksperyment numeryczny na prostszym modelu obliczeniowym. Model i wyniki obliczeń przedstawiono w p.3



Rys.2 Symetryczna postać wyboczenia tarczy bocznej.
Fig. 2 Symetrical shape of the side disk buckling



Rys.3 Asymetryczna postać wyboczenia tarczy bocznej.
Fig.3 Asymetrical shape of the side disk buckling.

3. Poglębiona analiza niesymetrycznych form wyboczenia.

Jako model obliczeniowy, dla wyjaśnienia asymetrycznej formy wyboczenia tarczy kołowej, przyjęto tarczę kwadratową z pionowym pasem o zwiększonej sztywności, obciążoną siłami ściskającymi na górnym półobwodzie (lub jego części) i utwierdzonej w 4 węzłach - wierzchołkach elementu środkowego.

Model obliczeniowy pokazano na rysunku 4 przy czym pas elementów, których grubość zmieniano w czasie weryfikacji zaznaczono ciemniejszym kolorem.

Prosty model obliczeniowy umożliwił przeprowadzenie wielu cykli obliczeń dla różnych sztywności (grubości) wzmocnienia przy obciążeniu przyłożonym na całym półobwodzie i dla przypadku obciążeń w kierunku osi x (poziomo). W pierwszej fazie weryfikacji badano formy wyboczenia tarczy gładkiej i usztywnionej obciążonej siłami poziomymi (P_x) - górna krawędź tarczy bez obciążenia. Otrzymano asymetryczne formy wyboczenia dla tarczy jednorodnej i dla grubości pasa środkowego $h_1 < 1,5 h$. Przy większej grubości h_1 występują różnice ugięć ekstremalnych po obu stronach usztywnienia - dla $h_1=1, h$ różnica ugięć wynosi $\sim 15\%$. Sąsiednią postać równowagi dla tarczy jednorodnej przedstawia rysunek 5 natomiast dla tarczy usztywnionej ($h_1=1,7 h$) rysunek 6. Lokalnie, symetrycznie położone usztywnienie prowadzi do zaburzenia asymetrycznej formy wyboczenia.

Dla tarczy obciążonej siłami P_x i P_y obserwuje się dominujący wpływ sił P_y wymuszających powstanie jednej półfali w górnej (ściskanej) części tarczy. W przypadku tarczy jednorodnej (bez usztywnienia) forma wyboczenia pokazana na rys. 7. jest symetryczna - różnica ugięć w granicach błędu dopuszczalnego w obliczeniach technicznych. Formy wyboczenia dla różnej sztywności pasa

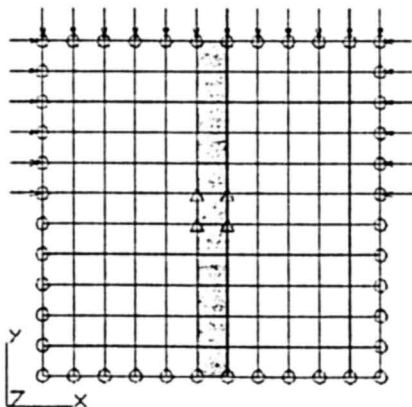
środkowego przedstawiają rysunki 8, 9, 10, 11. rys.8 dla $h_1 = 1,15 h$, rys.9 dla $h_1 = 1,7 h$, rys. 10 dla $h_1 = 3 h$ oraz rys. 11 dla $h_1 = 4 h$.

We wszystkich przypadkach $h_1 > h$ obserwuje się niesymetryczne postacie wyboczenia przy czym stopień asymetrii (stosunek ugięć ekstremalnych po obu stronach osi z) początkowo rośnie osiągając maksimum (3 : 1) dla $h_1 \cong 3 h$ a następnie maleje dla wartości (3 : 2) dla $h_1 \cong 4 h$ i dalszy wzrost sztywności pasa środkowego nie powoduje zmiany stopnia asymetrii formy wyboczenia.

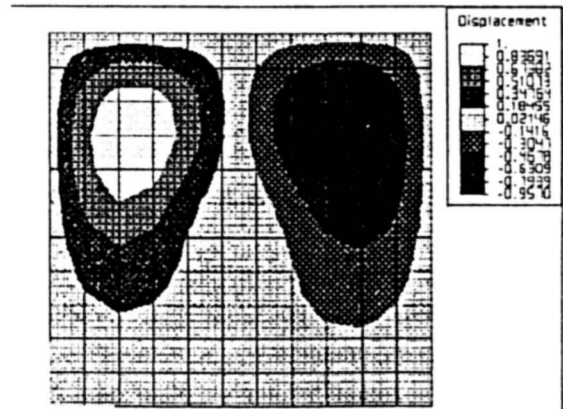
4. Podsumowanie wyników.

Przyjęty w p.3 prosty model obliczeniowy potwierdził występowanie niesymetrycznych form wyboczenia dla konstrukcji symetrycznych z lokalnymi usztywnieniami w osi symetrii. Potwierdza to formułowane wcześniej poglądy (1) oparte na przybliżonych rozwiązaniach analitycznych.

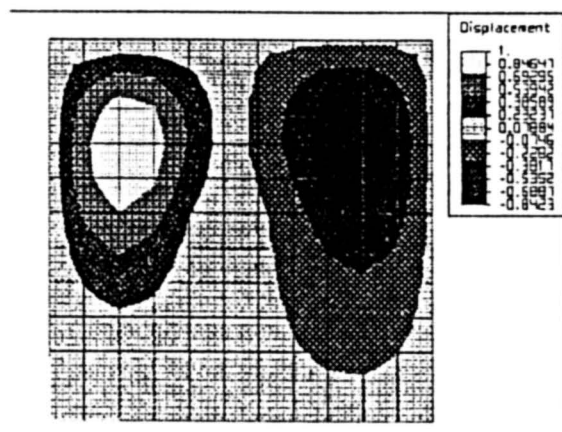
Przeprowadzone obliczenia wykazały również, że sztywność lokalnego wzmocnienia istotnie wpływa na stopień asymetrii sąsiedniej postaci równowagi.



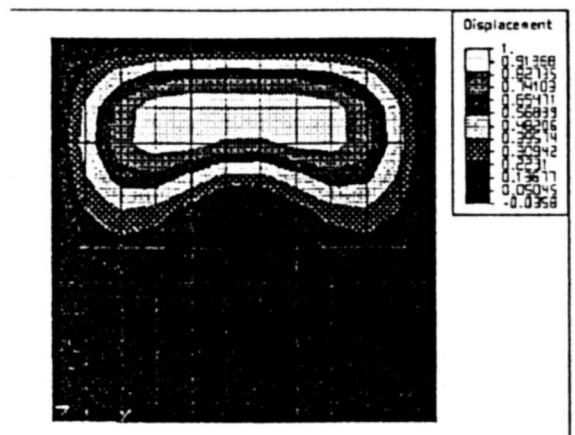
Rys.4 Uproszczony model obliczeniowy
Fig.4 Simplified FEM model



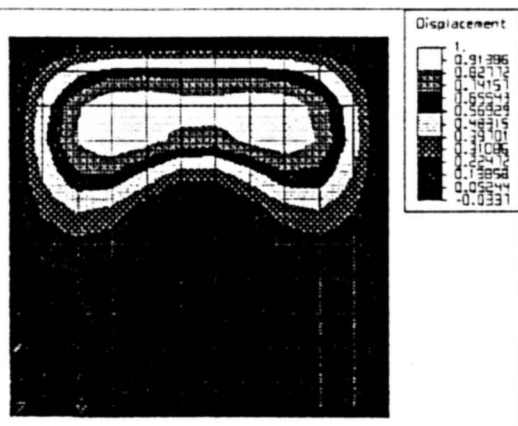
Rys.5 Wyboczenie dla tarczy jednorodnej ($h_1=h$), $P_y=0$
Fig.5 Buckling mode for unilateral plate ($h_1=h$), $P_y=0$.



Rys.6 Wyboczenie tarczy z wzmocnieniem $h_1=1.7 h$, $P_y=0$
Fig.6 Buckling of the plate with the stiffening $h_1=1.7h$, $P_y=0$.

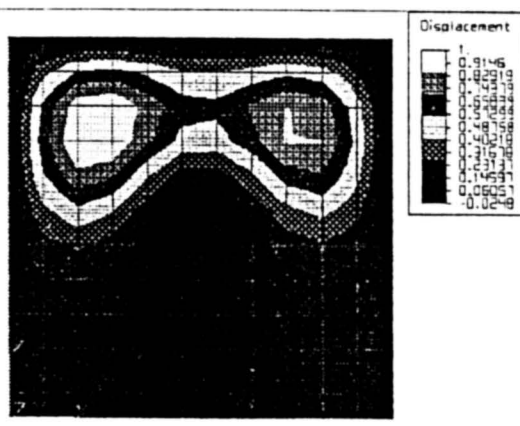


Rys.7 Wyboczenie tarczy jednorodnej, $P_x \neq 0$, $P_y \neq 0$
Fig.7 Buckling mode for unilateral plate, $P_x \neq 0$, $P_y \neq 0$.



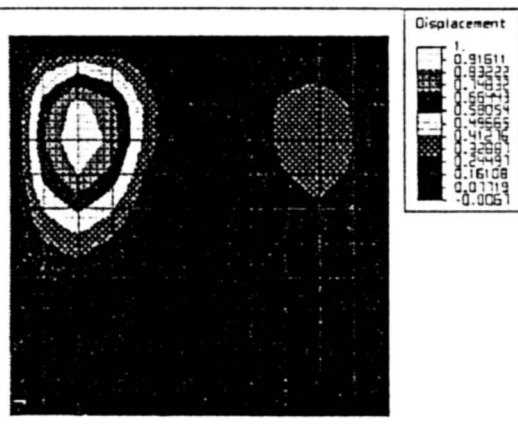
Rys. 8 Wyboczenie tarczy ze wzmocnieniem $h_1=1.15 h$.

Fig. 8 Buckling of the plate with the stiffening $h_1=1.15h$



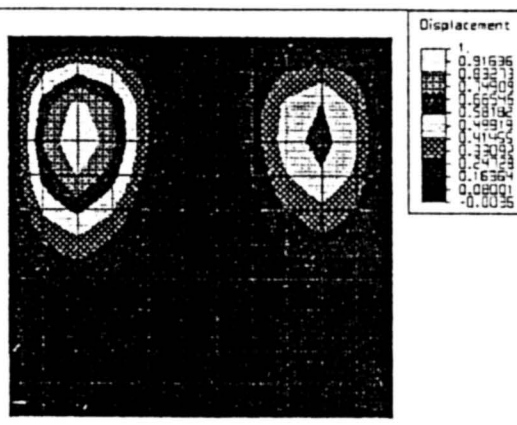
Rys. 9 Wyboczenie tarczy ze wzmocnieniem $h_1=1.7 h$

Fig.9 Buckling of the plate with the stiffening $h_1=1.7h$



Rys. 10 Wyboczenie tarczy ze wzmocnieniem $h_1=3 h$.

Fig. 8 Buckling of the plate with the stiffening $h_1=3 h$



Rys. 9 Wyboczenie tarczy ze wzmocnieniem $h_1 = 4 h$

Fig.9 Buckling of the plate with the stiffening $h_1= 4 h$

Literatura

1. A. С. Вольмир, *Устойчивость деформируемых систем*, Wyd. „Наука”, Moskwa, 1967.
2. Bućko S., *Analiza wytrzymałościowo-konstrukcyjna wielolinowego bębna pędnego oraz propozycje modyfikacji konstrukcji*; Zesz. Nauk. Politechniki Śląskiej 1992, S. Górnictwo, z.209.

Summary

Local stability of the side disk of a four-rope drum drive was considered (using FEM-ALGOR system) in the presented paper. The numerical analysis refers also to the possibility of the existence of the asymmetrical buckling forms in the symmetrical structures. In some solutions of drum drive constructions the bearing ropes are situated in the planes of the side disks. In this case the structure is loaded on the upper half of the edge with the radial pressure. The wheel rotates during the real work of the structure and the radial pressure acts at the actual upper half of the edge. Due to inspection holes and local reinforcements the stability analysis of the plate should be considered in several different positions. In one of them, for all boundary conditions (geometry, boundary conditions, loading) being symmetrical, the asymmetrical buckling form has occurred. The possibility of the existence of the asymmetrical buckling forms was analyzed in the second part of this paper. In these cases the structures, their loading and boundary conditions were symmetrical towards to the at least one axis. The numerical model for this analysis was simplified and the local reinforcement was situated in the symmetry axis. The relation between the buckling asymmetry and the stiffness of the local reinforcement was estimated. The asymmetrical buckling form of a side disk was depicted in the fig. A Fig. B presents the analogical buckling form of a square plate.

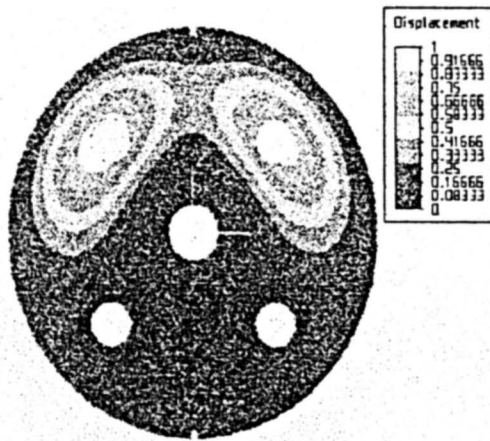


Fig.A Asymetrical shape of the side disk buckling.

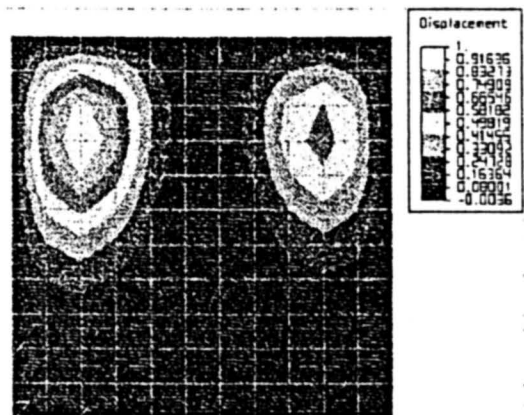


Fig.B Buckling of the plate with the stiffening $h_1 = 4h$

STUDY OF DYNAMIC STABILITY OF A BEAM UNDER AERODYNAMIC LOAD

M.T. BOURDEIX, P. HÉMON, F. SANTI

Institut AéroTechnique / CNAM

15, rue Marat F-78210 Saint-Cyr-L'École - FRANCE

D. GIRAUD, O. MANHÈS

ESSTIN - Université Nancy I - France

The dynamics of an elongated beam under cross-wind loading excitation is investigated by numerical and experimental techniques. The problem deals with flow induced non linear vibrations in relation with aerodynamic properties of the section. Analysis of the dynamical system clearly shows the energy exchange between fluid and structure where stationnary vibration is mainly due to damping equilibrium. Final objective is the control of such vibrations by means of piezo-electric sensors and actuators.

1. Introduction

Flow induced vibrations still remain an important problem in mechanical engineering and contain a large number of different kind of instabilities. We are dealing in the present work with an elongated beam subjected to aerodynamic steady flow. This flexible beam could be seen as an idealized bridge deck or a long span wing where across-wind oscillations occur.

Such vibration, known as galloping oscillation, is triggered by aerodynamic damping which may become negative and could dominate structural damping. Additionally, oscillations occur frequently at first bending mode frequency so that large amplitude can be reached. However, non linear effects of aeroelastic forces have sometimes properties that bring stabilization contributions which consequently results in limit cycles of the Van Der Pol type.

The beam section chosen is a rectangular one, with a dimensionnal ratio $L/D=2$ where L is the along-wind size and D the cross-wind thickness. This shape is known to be sensitive to stall flutter instability with respect to its single degree of freedom of bending. The global design of the beam was done in order to perform experiments in wind tunnel as well as numerical simulations. The final objective is the control of vibrations by means of piezo-electric film used as sensor and actuator.

2. Numerical simulation

2.1 Structural dynamics and computational method

We start with the classical movement equation in discrete form

$$M\ddot{X} + C\dot{X} + KX = Fa(\dot{X}) \quad (1)$$

where X is the displacement vector and M , C and K the mass, damping and stiffness matrices. The aerodynamic force vector Fa is coupled with structure velocity, and will be detailed in the next section. Finite element of Timoshenko beam is used to find the two first bending eigenvectors W_i ($i=1,2$) in the along and cross wind directions. The displacement is then classically written as

$$X = \sum_{i=1,2} \alpha_i(t) W_i \quad (2)$$

so that one obtain two scalar differential equations coupled by external force

$$\ddot{\alpha}_i + 2\eta\omega_i \dot{\alpha}_i + \omega_i^2 \alpha_i = (Fa(\dot{X}), W_i) \quad (3)$$

The reduced structural damping is η (referred to critical damping) and ω_i is the angular eigenfrequency of the mode i . This system is solved by direct numerical integration using a 4th order scheme (a modified De Vogelaere-Fu method) which has shown no numerical damping that could interfere with physical damping.

2.2 Aeroelastic force model

We assume a velocity V of the wind with an angle of attack β with the beam section axis, as shown figure 2.1. Because the oscillating structure has a velocity, it sees a relative velocity V_r with a relative angle of attack β_r . Then one can write for one section of the beam

$$V_r^2 = V^2 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 - 2V \cos \beta \dot{x} + 2V \sin \beta \dot{y} \quad (4)$$

$$\beta_r = \arctg\left(\frac{V \sin \beta + \dot{y}}{V \cos \beta - \dot{x}}\right) \quad (5)$$

where $\dot{x}$ and $\dot{y}$ are both components of beam section velocity. Then, the aeroelastic force of one section is given by

$$Fa = \frac{1}{2} \rho \ell D V_r^2 \begin{pmatrix} C_{xv}(\beta_r) \cos \beta_r + C_{yv}(\beta_r) \sin \beta_r \\ -C_{xv}(\beta_r) \sin \beta_r + C_{yv}(\beta_r) \cos \beta_r \end{pmatrix} \quad (6)$$

The air density is ρ and ℓ is the length of beam finite element. Aerodynamic coefficients C_{xv} (drag) and C_{yv} (lift) are given by polynomial approximation of experimental results, as shown figure 2.2.

Linear analysis would show that cross-wind oscillations (along y axis) create a negative aerodynamic damping when lift derivative with respect to β is positive. In our case, this unstable property occurs around zero angle of attack and disappears for values upper 6 degrees.

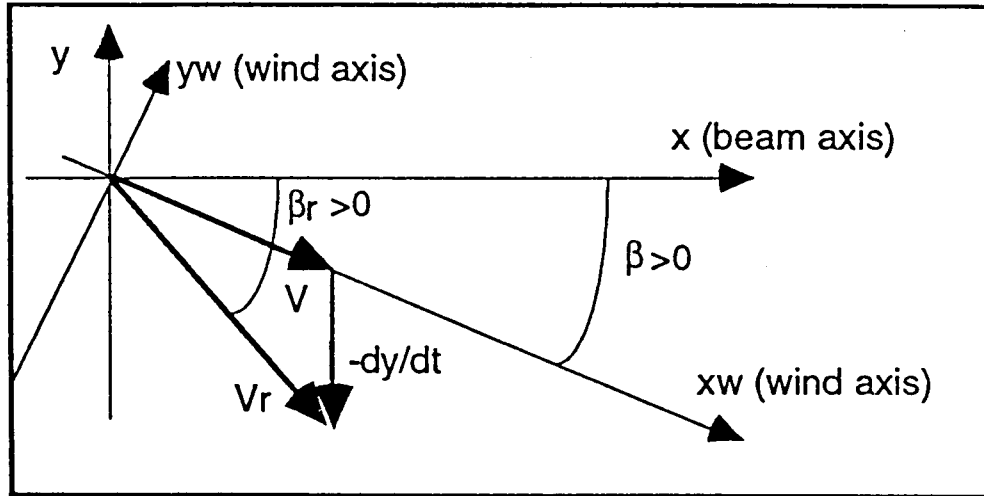


Figure 2.1 : Relative wind and angle of attack presentation

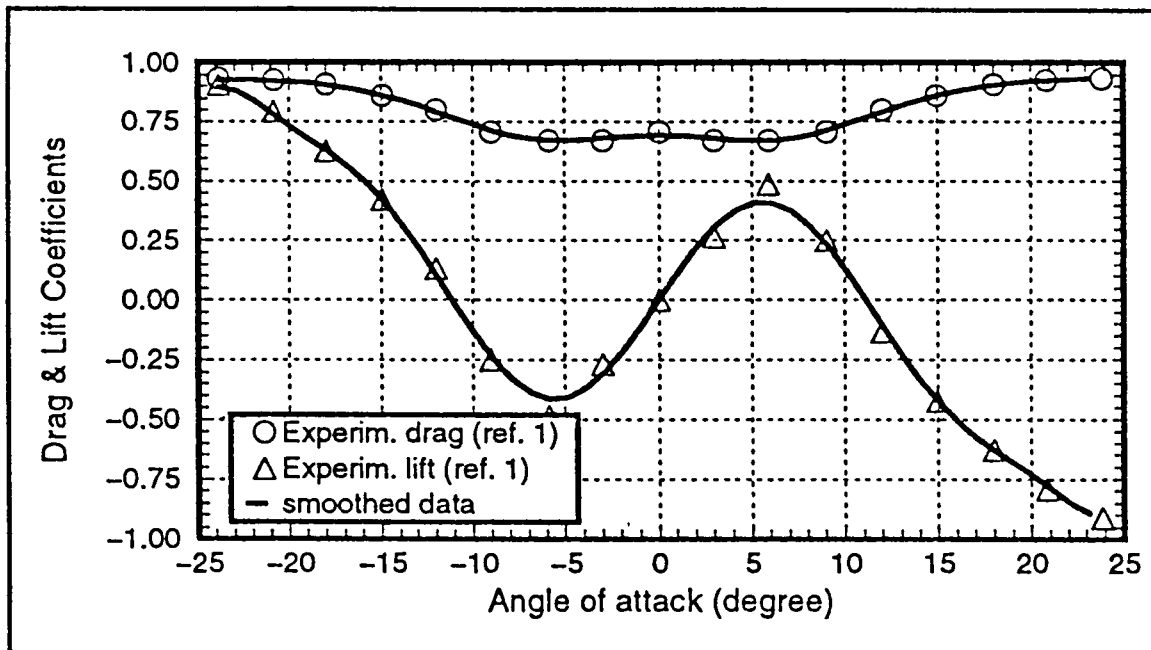


Figure 2.2 : Aerodynamic force coefficients of the rectangular profile

We are also performing numerical simulations of the flow using a Navier-Stokes solver by finite element method, in order to better understand the flow nature which creates such instability.

3. Experimental apparatus

To date, this part of the project is in progress so that no reliable results can be presented in this abstract. The purpose of experiments is to validate the numerical simulations mentioned previously, but more important is the control of vibrations.

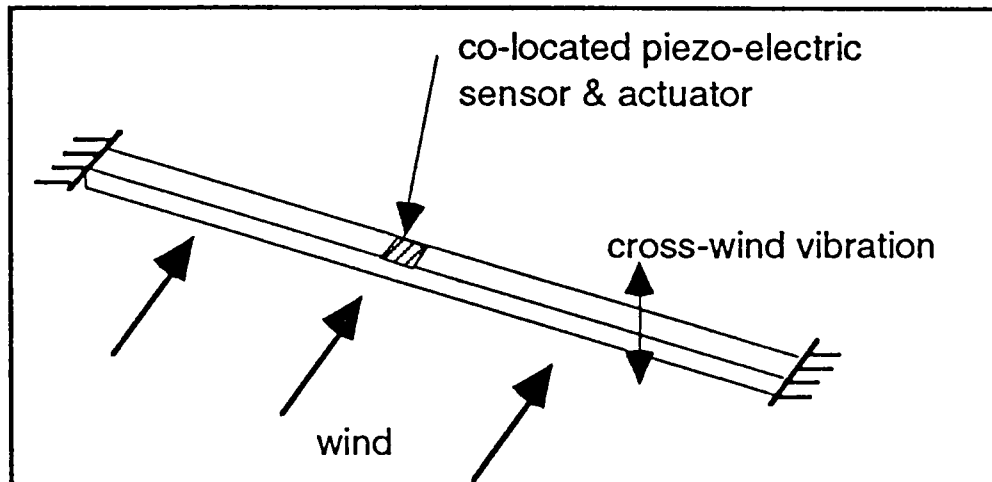


Figure 3.1 : Principle of experimental testing

Principle of tests is described figure 3.1. The beam is made of aluminium and have 950 mm of length with a section of 5x10 mm. Special care was taken in designing the lateral fixations system in order to realize very accurate clamped boundary conditions. Comparison with Timoshenko finite element computation has shown offset less than 1% with the measured bending eigenfrequency.

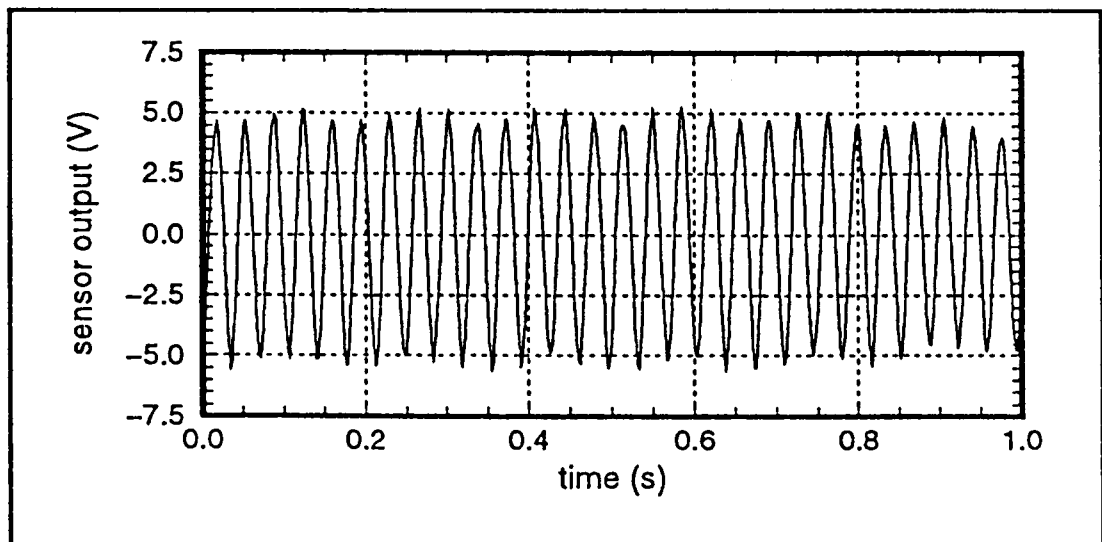


Figure 3.2 : Example of sensor output signal during oscillations tests in wind tunnel

Sensor and actuator are PVDF piezo-electric films of $40\text{ }\mu\text{m}$ of thickness, glued with a very stiff cement. They are connected to adequate electronics (charge amplifier, high level voltage amplifier) in order to measure/apply bending moment on the middle of the beam. Only the first across-wind bending mode can be controlled by this technique and therefore control signal is low-pass filtered to avoid too much spill-over problems. An example of signal given by the sensor, during oscillations under flow excitation in wind tunnel, is plotted figure 3.2.

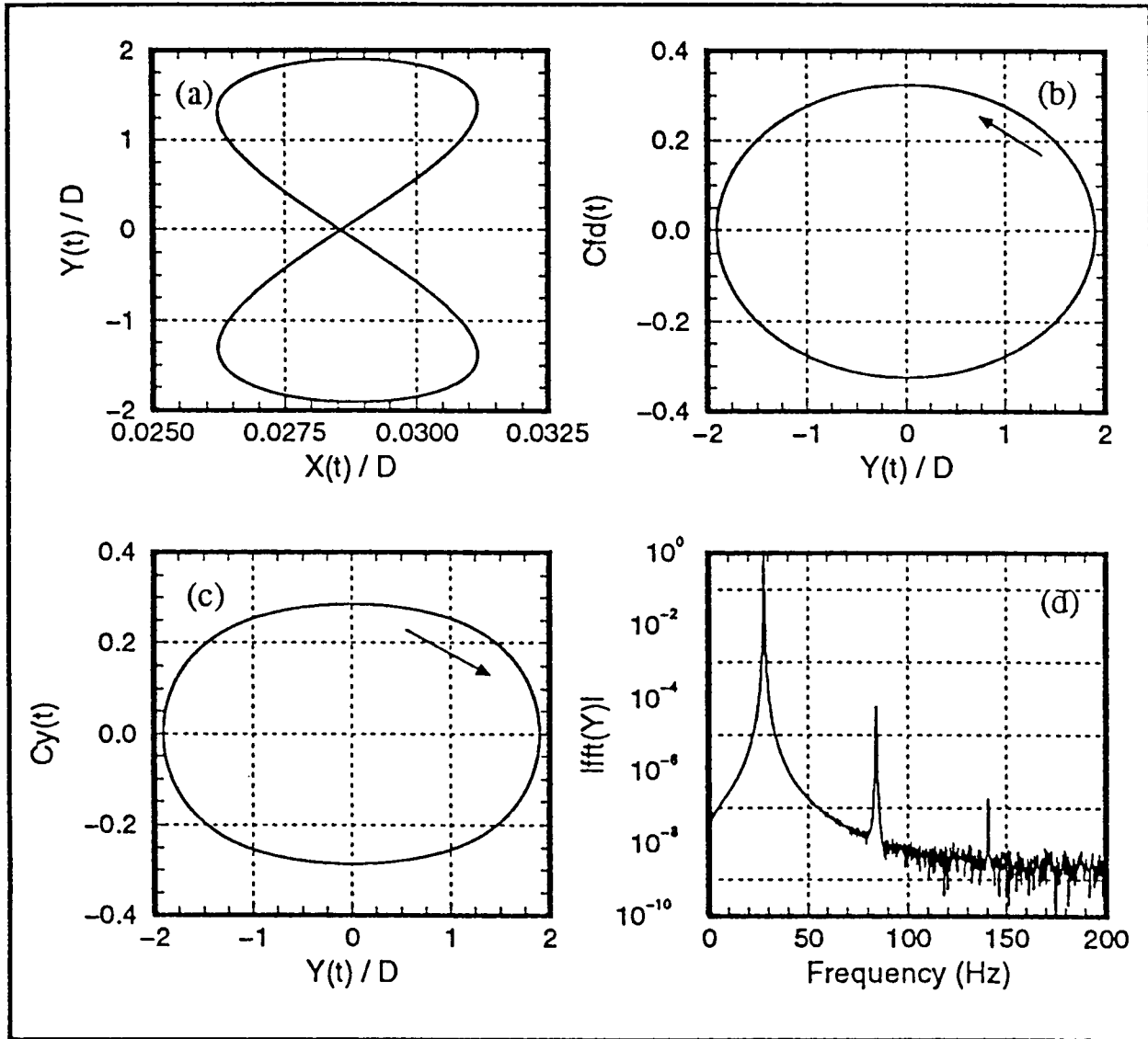


Figure 4.1 : Analysis of stationary solution for $V=30\text{ m/s}$ at $\beta=0$

(a) : Trajectory of the middle of the beam. (b) : Hysteresis loop of the structural viscous damping force. (c) : Hysteresis loop of the cross-wind aerodynamic force. (d) : Power spectrum of the transverse displacement

4. Results analysis

The results of numerical simulation of aeroelastic vibration is given figure 4.1. The structural damping used is about 1%, corresponding the one measured. All data presented are taken at the middle of the beam, where movement amplitude is maximum. The along-wind oscillations are very small, that is a well known result. However, across-wind vibrations reach amplitude of almost ± 2 times the thickness D , representing ± 10 mm.

Power spectrum of this displacement shows that energy is located mainly on fundamental frequency, but third and fifth harmonic peaks appear. The system corresponds then to an order 2 Van Der Pol nonlinear oscillator. Limit cycle is reached due to an equilibrium between energy transferred to the structure by the flow, and the dissipation by structural damping.

5. Futur work

Obviously, comparisons of numerical simulations with experimental results will certainly imply an improvement of the aeroelastic force model. This is the first goal. The final objective remains however the active control of such vibrations, by using adaptative or optimal strategy. In the last, an accurate understanding and modelling of flow-induced vibrations is required, showing then usefulness of preliminary work.

6. References

1. DENIZ S. & STAUBLI Th. : *Oscillating rectangular and octogonal profiles : interaction of leading and trailing edge vortex formation*. J. of Fluids and Structures, **11** (1997), 3-31.
2. NAKAMURA Y. & NAKASHIMA M. : *Vortex excitation of prisms with elongated rectangular H & T cross-sections*. J. of Fluid Mech., **163** (1986), 149-169.
3. OZONO & al. : *Stepwise increase in the Strouhal number for flow around flat plates*. Intern. J. for Num. Methods in Fluids, **15** (1992), 1025-1036.
4. VERHULST F. : *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1990.

Acknowledgments : This work is part of a joint research project for french-polish scientific cooperation between IAT/CNAM (prof. Destuynder) in France and IFTR (prof. Mroz) associated with WUT in Poland.

AN INEXPENSIVE FEM MODEL OF KINKBANDS

C.D. CHRISTENSEN, E. BYSKOV

*Department of Structural Engineering and Materials
Technical University of Denmark
DK-2800 Lyngby, Denmark*

J. CHRISTOFFERSEN

*Department of Solid Mechanics
Technical University of Denmark
DK-2800 Lyngby, Denmark*

An inexpensive finite element model of kinkbands based purely on specialized beam elements is developed. The fibers are modeled as kinematically nonlinear elastic-plastic Bernoulli-Euler beams, while the matrix material, i.e. the material between the fibers, is assumed to behave as a number of elastic-plastic kinematically nonlinear shear flexible beams perpendicular to the fibers. One of the novel features of our study is the application of the latter beam elements, which are special in that they accommodate constant axial, shear and curvature strains, only. The justification of these elements is given in the main body. Although, or maybe rather because, the method is very simple it appears to provide a basic understanding of the kinkband process in that the model is able to predict kinkband angles different from zero and kinkband broadening.

1 Introduction

In some studies kinkbands have been examined by means of the finite element method where both the fibers and the matrix material are modeled by in-plane plate elements. This makes it possible to take into account almost any effect. The main disadvantage of this angle of attack is that the computational effort tends to be large, both in terms of computer time and memory.

In our study we focus on the important features of the kinkband process and try to exclude less prominent effects from the finite element model. Thus, the double aim of this work is to develop an inexpensive FEM model of kinkbands in general, and to gain a better understanding of the kinkband process.

2 Development of the model

Materials which may develop kinkbands in compression are characterized by being considerably stiffened by fibers in the load direction, like e.g. fiber composite materials and wood. In the following we refer to the part of the material which is not fibers as the matrix, be it a solid matrix or a cell wall in the case of wood.

Before and during the kinkband process, the fibers and the matrix perform separate and very distinct tasks.

- The main purpose of the fibers is to stiffen the material parallel to the fibers, i.e. axially, and to resist shear in the plane perpendicular to the fiber direction.
- The other basic material, the matrix, keeps the fibers in place by resisting relative perpendicular and parallel displacements between fibers

Since the matrix material is much softer than the fibers it does not add significantly to the axial stiffness and the shear stiffness in the plane perpendicular to the fibers, and may therefore either be neglected or included in the stiffness of the fiber.

Bearing the above in mind we developed our finite element model.

First we adapt a plane strain structural model of the composite shown in Fig. 1.

In the FEM beam model of the structural model, Fig. 1, the long, slender fibers are modeled as Euler-Bernoulli beams providing the axial stiffness and the shear stiffness in the plane perpendicular to the fiber direction for the overall composite.

The strains

In the matrix, the normal strain parallel to the fibers is limited by the normal strain in the fibers, and during the kinkband process it becomes negligible compared to the shear and normal strain perpendicular to the fibers. The matrix is therefore modeled as shear flexible beams perpendicular to the fibers.

The fiber beam element in the model has no width—in reality it has a non-vanishing width t —compared to the distance between two neighboring fibers. Thus, because the fiber is much stiffer than the matrix, the ends of length $t/2$ of the matrix beam elements are assumed to be rigid, see Fig. 2.

As it is well-known a kinkband zone consists of zones above and under the kinkband where the strains are very small, a zone in the kinkband where the strains are more or less constant, and zones along the boundaries of the kinkband

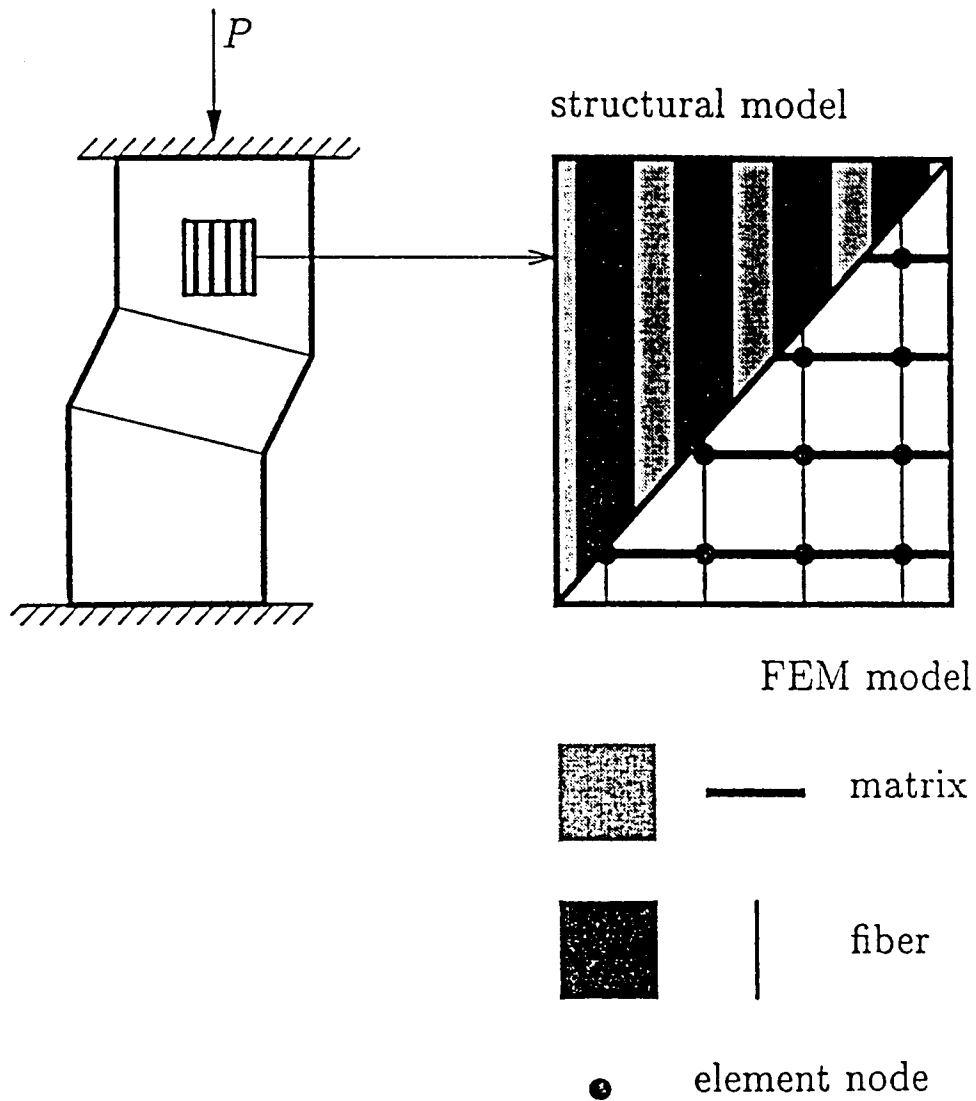


Figure 1: The beam element model

itself with very rapid variations of strain. Therefore, traditional functions of higher order continuous derivatives often do not provide better approximation than a simple trial function. Instead the rapid variations in the fiber direction are dealt with by using very short constant or linearly varying Bernoulli-Euler beam strains, ϵ and κ .

When the distance between element nodes in the fiber direction is reduced to the of order one fiber distance, both the flexible length and height of the matrix beam element is very small compared to the entire composite, and a constant strain beam element proves sufficiently accurate to describe a kinkband process.

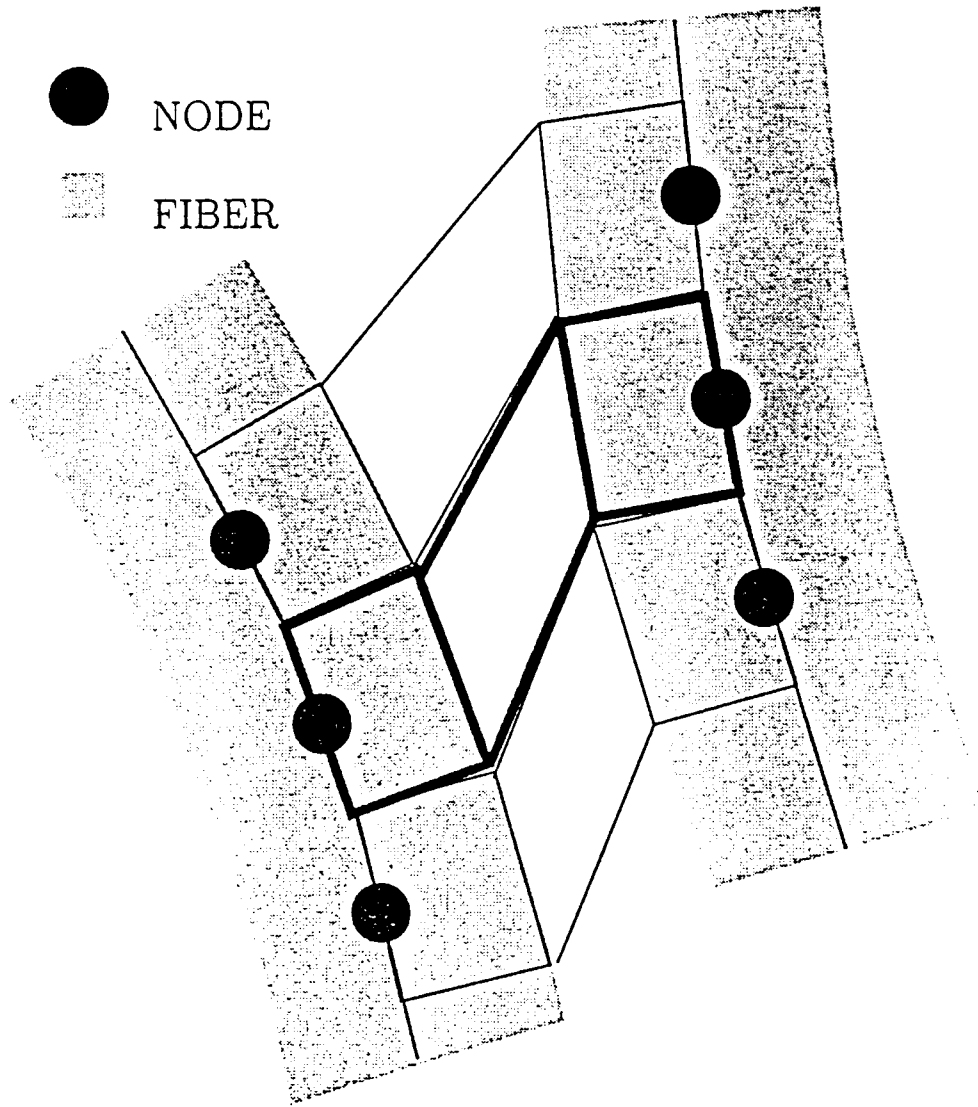


Figure 2: Rigid end-constant strain matrix finite element

3 Kinkband example

The finite element model covers both kinkband broadening, which is an effect of the fibers squashing the matrix until it becomes incompressible, and kinkbands at an angle with the original fiber direction, which seems to be triggered by a more flexible matrix in tension than in compression.

Figs. 3 and 4 provide an example of a kinkband predicted by this finite element model. In Fig. 3 the applied load is plotted against the vertical end displacement. The almost linear initial part of the curve covers ordinary compression of the composite, while from the initial linear curve over the top and

down to the local minimum the kinkband forms. At the following almost flat section the fiber angle in the kinkband grows, while the angle of the kinkband is steady. The final section of rising load-carrying capacity is due to the broadening of the kinkband.

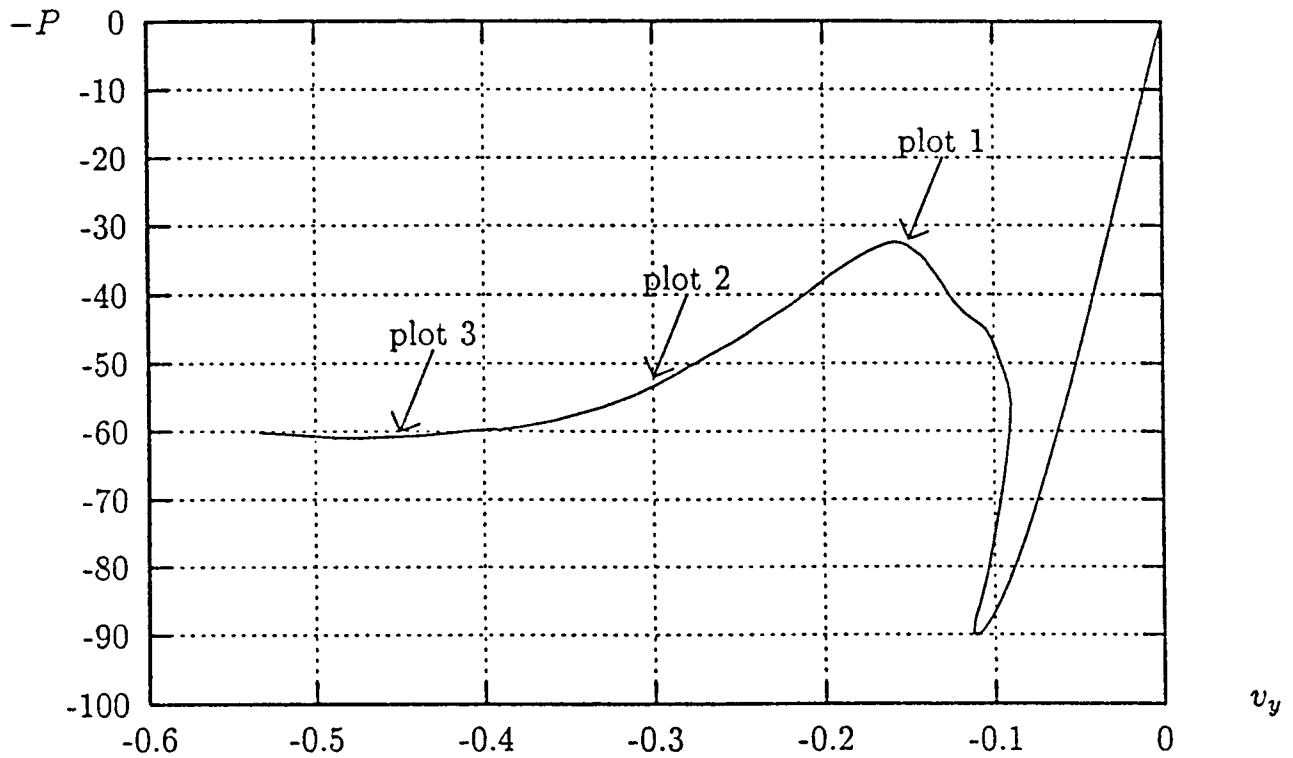


Figure 3: Applied load, P , plotted against vertical end displacement, v_y

Fig. 4 (plot 1, plot 2 and plot 3) shows the kinkband at the points given in Fig. 3.

4 Concluding Remarks

The present study, which to some extent still must be considered preliminary, seems to indicate that many of the most distinct features of kinkband development may be captured by a finite element method that applies fairly simple elements.

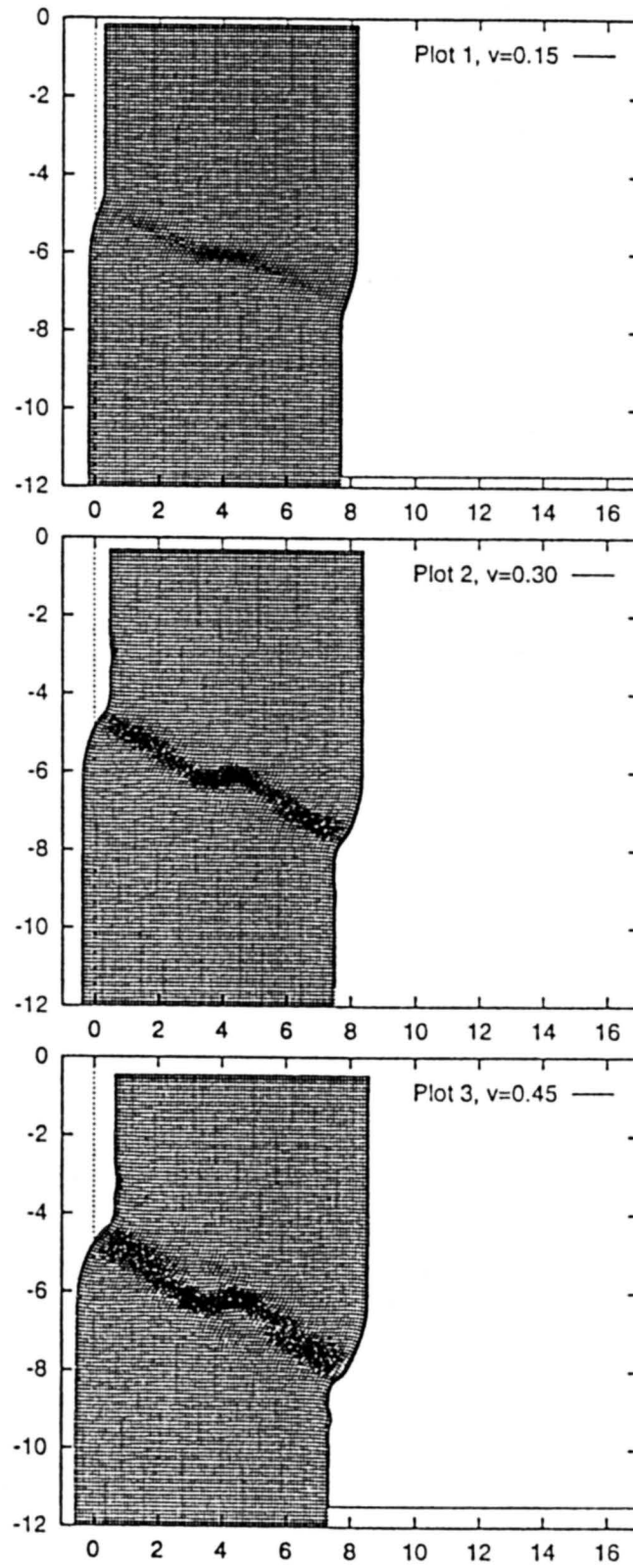


Figure 4: The deformed composite

WYBRANE PROBLEMY ANALIZY STATECZNOŚCI POWŁOK WIELOGAŁĘZIOWYCH

J. CHRÓŚCIELEWSKI

Katedra Mechaniki Budowli Politechniki Gdańskiej

G. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk, Poland

W pracy omawia się pewne zagadnienia związane z analizą powłok wielogałęziowych metodą elementów skończonych (MES), w tym szczególny problem tzw. szóstego stopnia swobody (owinięcia). Jako zagadnienia ogólne wyróżnia się: teorię powłok, dyskretyzację i sposób traktowanie nieregularności. Próbę rozwiązania tych zagadnień podjęto w ramach sześcioparametrowej teorii powłok. Przykład analizy stateczności giętno skrętnej wspornika dwuteowego demonstruje przyjęte sformułowanie. Stosowną literaturę zawierają prace (1) i (2).

1. Wstęp. Formułowanie elementów skończonych w powłokach

Różnorodność konstrukcji powierzchniowych i wiążąca się z tym złożoność ich zachowania czyni z nieliniowej analizy powłok trudną dziedzinę badań, wymagającą dużej ogólności, dobrej teorii oraz elastycznych i skutecznych metod rozwiązania. Aktualnie MES jest najczęściej proponowanym narzędziem rozwiązania problemów powłokowych. Jednak, mimo prawie 30 lat badań, poszukiwanie niezawodnych i efektywnych elementów powłokowych nadających się do ogólnej, nieliniowej analizy konstrukcji powłokowych o dowolnej geometrii, obciążeniu, warunkach brzegowych i prawach materiałowych, jest nadal zagadnieniem otwartym. Wyróżnić można trzy strategie stosowania MES w obliczeniach konstrukcji powłokowych:

1. trójwymiarowe sformułowanie kontynualne (elementy bryłowe),
2. degenerację redukującą ośrodek trójwymiarowy zgodnie z założeniami teorii powłok z jednoczesną dyskretyzacją (elementy zdegenerowane),
3. jedną z teorii powłok (płyt) prowadzącą do:
 - a) elementów płaskich, przeważnie 3- lub 4-węzłowych, jako superpozycji elementów płaskiego stanu naprężenia i elementów płytowych,
 - b) elementów zakrzywionych, bazujących na różnych wariantach teorii powłok, zazwyczaj typu Kirchhoffa-Love'a (K-L) lub Reissnera-Mindlina (R-M).

Każde z tych podejść ma swoje wady i zalety preferujące różne kierunki zastosowań. Dwie ostatnie strategie dotyczą formułowania elementów powłokowych. Użycie tego typu, standardowych elementów powłokowych, bezpośrednio do analizy konstrukcji inżynierskich traktowanych jako całość, uwzględniając pręty, segmenty powłok, skoki grubości itp., napotyka na istotny kłopot powiązany z łączeniem ich w struktury.

2. Analiza nieregularnych powłok wielogąłęziowych

Od strony teoretycznej, poprawny opis powłok wielogąłęziowych musi zawierać kompletny układ równań różniczkowych, w tym warunki skoku wzdłuż nieregularności dla zmiennych kinematycznych i statycznych. Od strony MES, w próbie rozwiązania zagadnienia obliczeń tego typu powłok, wyróżnić należy cztery podejścia.

I) Podejście bezpośrednie stosuje się w elementach o pięciu stopniach swobody w węźle. Polega na: *a)* transformacji obu obrotów z lokalnej bazy węzła elementu do bazy globalnej, gdzie elementy łączą się w strukturę; *b)* definiowaniu, przez nieciągłości połączeń różnych części powłoki, ciągłego pola dyrektorów. W *a)*, transformacja nie prowadzi do spełnienia ani statycznych, ani kinematycznych warunków skoku. Brak sztywności obrotowej wokół normalnej może prowadzić do błędów i fikcyjnych form utraty stateczności. Sposób *b)* stosuje się do modelowania załamań tylko dwóch płatów. Sposoby te zawodzą w ortogonalnym łączeniu prętów z powłoką.

II) Podejście wprowadzające szósty stopień swobody do elementów sformułowanych na gruncie teorii klasycznych (trój- lub pięcioparametrowych). W podejściu tym, na poziomie numerycznym, rozszerza się parametry obrotowe z dwóch do trzech.

IIa) „Inżynierski” sposób wprowadzenia szóstego stopnia, polegający na dodaniu sztywności sprzężonej z szóstym stopniem. Najczęściej fikcyjną sztywność obrotową, dodaje się bezpośrednio do węzła w postaci „sprężynki” lub do elementu w formie „beleczi”. Sposób ten, wprowadzający energetycznie sprzężoną z „owinięciem” sztywność obrotową, posiada znamiona formalnego podejścia do problemu (od strony statycznej i kinematycznej). W zagadnieniach nieliniowych wrażliwych na zaburzenia, dodanie fikcyjnej sztywności prowadzi często do przeszywnienia konstrukcji.

IIb) „Dyskretyzacyjny” sposób wprowadzenia szóstego stopnia. Podniesienie rzędu interpolacji w płaszczyźnie elementów płaskich, prowadzi do węzłowych stopni swobody interpretowanych jako obroty normalne. Analogicznie próbuje się wbudować szósty stopień w elementy powłokowe. W elementach klasy C^1 , stopień ten wyraża się przez pierwsze pochodne przemieszczeń w powierzchni elementu. W stanie tarczowym, zachowując ciągłość klasy C^0 , obrót normalny wprowadza się najczęściej przez tzw. „niekonwencjonalną” interpolację Allmana [1984] lub tzw. „sformułowanie swobodne” na poziomie macierzy sztywności (Bergan i Felippa [1985]). Wadą obu koncepcji jest ograniczenie do określonej geometrii elementu. Wbudowany szósty stopień pozwala łączyć elementy w powłokach nieregularnych. Podejście to jest równoważne spełnieniu kinematycznych warunków skoku, lecz tylko w węzłach. Problem statycznych warunków skoku pozostaje poza analizą.

III) Podejście kontynualne. Zakładając, że w rozwiązaniu nieodzowne są trzy parametry obrotowe, usiłuje się tutaj wprowadzić szósty stopień swobody na poziomie sformułowania kontynualnego (teoretycznego). Wydziela się tu dwa sposoby.

IIIa) „Fizyczne” podejście kontynualne polega na zastąpieniu pięcioparametrowej teorii powłok R-M, modelem wzbogaconym, typu powierzchni Cosseratów. Przyjęcie

modelu wzbogaconego z sześcioma stopniami rozwiązuje problem, ale tylko szóstego stopnia. Elementy skończone formułuje się stosując standardowe postępowanie MES.

IIIb) „Wariacyjne” podejście kontynualne odnosi się do pięcioparametrowego modelu powłoki. Konstruuje się funkcjonal dwupolowy, z trzecim obrotem jako zmienną niezależną, przez dołączenie warunku ubocznego z mnożnikiem Lagrange'a. Funkcjonał jest podstawą formułowania mieszanych elementów skończonych. Jednak, w podejściu tym występują typowe trudności towarzyszące dyskretyzacji zasad wielopolowych. W koncepcji tej nie dyskutuje się statycznych warunków skoku.

IV) Podejście wykorzystujące elementy przejściowe w obszarze połączenia wielogałęziowego. Występują tu dwie możliwości. Pierwsza, to opis obszaru połączenia na poziomie trójwymiarowym z dyskretyzacją, elementami bryłowymi i specjalnymi, przechodzącymi poza obszarem połączenia w elementy powłokowe. Druga, to konstrukcja łącznika płatów powłoki typu pręta przestrzennego, na zasadzie redukcji do jednego wymiaru ośrodka trójwymiarowego geometrycznie pokrywającego się z obszarem połączenia. Podejścia te, wydają się najwłaściwszym sposobem modelowania połączeń wielogałęziowych powłok.

3. Główne zagadnienia w analizie powłok metodą elementów skończonych

Przeprowadzona dyskusja wskazuje, że w analizie MES konstrukcji powłokowych o dowolnej geometrii, obciążeniu, warunkach brzegowych itp., zasadnicze trudności koncentrują się wokół następujących trzech zagadnień ogólnych:

- I. teorii powłok - zastąpienie problemu trójwymiarowego przez dwuwymiarowy o zmiennych zdefiniowanych tylko na pewnej wyróżnionej powierzchni,
- II. dyskretyzacji - skończenie elementowa aproksymacja problemu ciągłego,
- III. nieregularności powłok - traktowanie rozgałęzień i przecięć, skoków grubości, usztywnień, wzmocnień, połączeń z prętami itp.

Ze względu na jakość rozwiązań, w ramach II, wyróżnia się problem szczególny:

- Ila. zjawisko blokady rozwiązań - uboczny efekt numeryczny jednolitej interpolacji niskiego rzędu (przeważnie klasy C^0), nadmierne przeszytnienie konstrukcji.

Pierwsze zagadnienie ma charakter analityczny, drugie naturę czysto numeryczną, zagadnienie trzecie ma charakter zarówno analityczny, jak i numeryczny. Próbę rozwiązania tych zagadnień podjęto w ramach sześcioparametrowej teorii powłok.

4. Sześcioparametrowa teoria powłok sprężystych

Zgodnie z koncepcją Simmondsa [1984] jako podstawę formułowania teorii powłok przyjęto statykę ciała typu powłoka. Idea tego podejścia bazuje na budowie ścisłych powłokowych równań równowagi i naprężeniowych warunków brzegowych z odpowiednich praw trójwymiarowych, bez przyjmowania założeń upraszczających.

Warunki skoku formułuje się dla sił przekrojowych N^α, M^α na krawędzi Γ połączenia wielogąłęziowego. Struktura kinematyczna teorii nie jest postulowana, lecz wypływa z tożsamości całkowej. Modelem kinematycznym jest powierzchnia typu Cosseratów z naturalnymi miarami odkształceń $\varepsilon_\alpha, \kappa_\alpha$. Niezależnymi zmiennymi kinematycznymi są pole translacji $u \in \mathbb{E}^3$ powierzchni odniesienia powłoki M i pole tensorów ortogonalnych $Q \in SO(3)$. Zależności konstytutywne są miejscem, w którym koncentruje się wszelkie założenia upraszczające. Komplet równań teorii zawiera Tab. 1.

Tabela 1. Komplet równań statyki nieliniowej sześcioparametrowa teorii powłok sprężystych

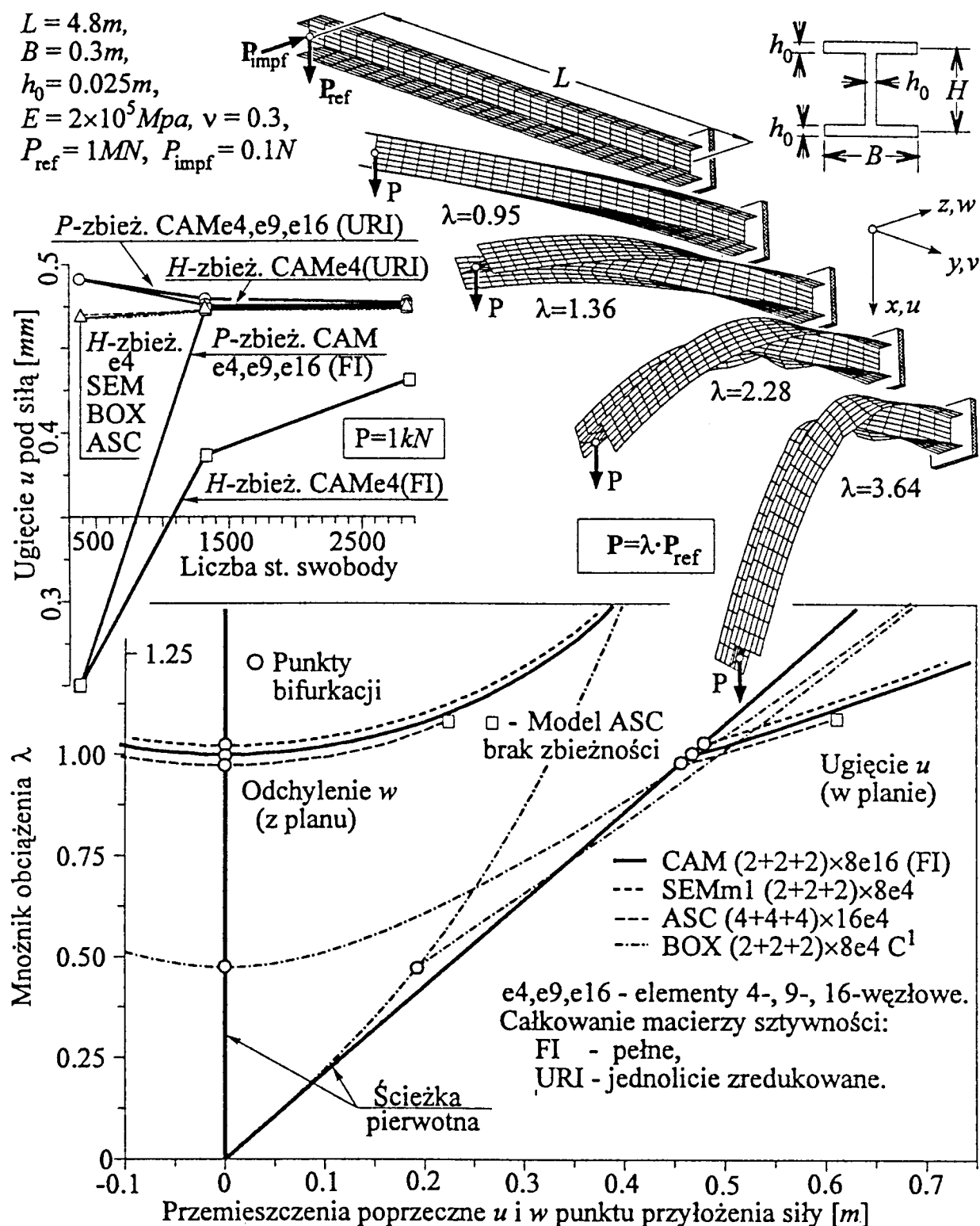
$N_{ \alpha}^\alpha + p = 0,$	$M_{ \alpha}^\alpha + y_{,\alpha} \times N^\alpha + l = 0$	na $M\Gamma$	równania równowagi
$\varepsilon_a = u_{,\alpha} - (1 - Q)a_\alpha,$	$\kappa_\alpha = \text{ad}^{-1}(Q_{,\alpha} Q^T)$	na $M\Gamma$	równania geometryczne
$N^\alpha = \partial\Phi/\partial\varepsilon_\alpha,$	$M^\alpha = \partial\Phi/\partial\kappa_\alpha$	na $M\Gamma$	równania konstytutywne
$\epsilon^{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha \beta} - A_a \times \kappa_\beta) = 0,$	$\epsilon^{\alpha\beta}(\kappa_{\alpha \beta} - \frac{1}{2}(\kappa_\alpha \times \kappa_\beta)) = 0$	na $M\Gamma$	warunki zgodności odkształceń
$N^\alpha \nu_\alpha = N_\nu^*,$	$M^\alpha \nu_\alpha = M_\nu^*$	wzdłuż ∂M_f	statyczne warunki brzegowe
$u = u^*$	$Q = Q^*$	wzdłuż ∂M_d	kinematyczne warunki brzegowe
$p_\Gamma - \llbracket N_\nu \rrbracket = 0,$	$l_\Gamma - \llbracket M_\nu \rrbracket = 0$	wzdłuż Γ	warunki skoku sił przekrojowych
$u_\Gamma = u^{(i)},$	$Q_\Gamma = Q^{(i)}$	wzdłuż Γ	warunki zgodności przemieszczeń

Do równań tych formułuje się różne słabe postaci problemu brzegowego, które są bazą aproksymacji MES. Ponieważ jednak, w sformułowaniu tym przestrzeń konfiguracyjna nie posiada struktury przestrzeni liniowej, wymagane jest niestandardowe podejście do: metodologii interpolacji na $SO(3)$, linearyzacji równań, procedury iteracyjnej, parametryzacji $SO(3)$ i uaktualniania zmiennych. Otrzymane sformułowania wariacyjne umożliwiły opracowanie Lagrange'owskich elementów powłokowych klasy C^0 : 4-, 9- i 16-węzłowych elementów przemieszczeniowych, 4- i 9-węzłowych elementów semimieszanych, 4- i 9-węzłowych elementów o dwustopniowej interpolacji odkształceń membranowych i ścinania. Wszystkie elementy sformułowano w terminach wielkości przekrojowych z szóstym obrotowym stopniem swobody jako bezpośrednią implikacją teorii powłok.

Demonstracją przyjętego sformułowania teorii i MES jest przykład analizy stateczności giętno skrętnej wspornika dwuteowego zamieszczonego na Rys. 4.1.

Podziękowania

Pracę wykonano w ramach proj. bad. nr 7T07A 021 12 finansowanego przez KBN.



Rys. 4.1 Wspornik 2-teowy. Sformułowanie: CAM - przemieszczeniowe, SEM - semimieszané, ASC - dwustopniowa interpolacja odkształceń, teoria 6-parametrowa, BOX - teoria von Karmana.
 Fig. 4.1 I-shaped cantilever beam. CAM - displacement/rotation formulation, SEM - semi-mixed formulation, ASC - assumed strain formulation, 6-parameter shell theory, BOX - von Karman theory.

Literatura

1. Chróścielewski J., *Rodzina elementów skończonych klasy C^0 w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, nr 540, *Budownictwo Lądowe LIII*, (1996), 1-291.
2. Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H., *Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol. 141 (1997), 1-46.

Summary

SOME PROBLEMS OF INSTABILITY ANALYSIS OF MULTI SHELLS

Difficulties in the FE analysis of shell structures with arbitrary geometry, loading, boundary conditions center around the following three main issues: I) shell theory, II) discretization (FEM), III) irregularities (treatment of shell branches and shell intersections, stiffeners, shell-to-rod transitions, etc.).

In this paper an approach to solve these problems in the frame of sixth parameters theory of shells is presented. The approach is based on the static analysis. Exact equilibrium equations of the shell are constructed from three dimensional theory without any simplifying assumptions. The equilibrium conditions along the multi-shell connection Γ are formulated for the internal forces $\mathbf{N}^\alpha, \mathbf{M}^\alpha$. Kinematic structure of the theory is not postulated but comes from the integral identity. The kinematic model coincides with the Cosserat-type surface described by means of the natural strain measure $\varepsilon_\alpha, \kappa_\alpha$. As the independent kinematic variables are assumed the translation

$\mathbf{u} \in \mathbb{E}^3$ of the basic surface of the shell M and the orthogonal tensors $\mathbf{Q} \in SO(3)$. The only approximated character of the theory is manifested in the form of two-dimensional constitutive equations. Table 1 consists of all equations of the theory.

Some different weak formulations of the boundary problem are derived as the basis of the FEM approximation. Since the configuration space described is not a linear space then a nonstandard approach to the methodology of interpolation on the rotation group $SO(3)$, linearization of equations, iteration procedure, parametrization of the group $SO(3)$ and actualization of the variables is necessary. On the basis of variational formulation several types of C^0 shell finite elements are worked out, including the Lagrange family of 4-, 9-, 16-node displacement elements, the 4- and 9-node semi-mixed elements and the 4- and 9-node elements with assumed strain interpolation for membrane and shear strains. All elements are formulated in terms of the cross section resultants and they contain the drilling degree of freedom being the implication of the theory.

Efficacy and accuracy of the approach proposed are presented by the instability analysis of flexural-torsional buckling of the thin-walled I cantilever beam (Fig.4.1).

WPLYW WSTĘPNEGO WYGIĘCIA NA SIŁĘ KRYTYCZNĄ WYBOCZENIA SKRĘTNEGO PRĘTA DWUTEOWEGO

J. CHRÓŚCIELEWSKI, I. LUBOWIECKA, C. SZYMCZAK

Katedra Mechaniki Budowli Politechniki Gdańskiej

G. Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk, Poland

W pracy przedstawiono problem wpływu wstępnego wygięcia na siłę krytyczną wyboczenia skrętnego ściskanego osiowo pręta cienkościennego o przekroju dwuteowym. W ramach teorii prętów cienkościennych o przekroju nieodkształcalnym wyprowadzono równanie różniczkowe problemu, którego rozwiązanie wyznaczono za pomocą metody Galerkina. Wykazano, że w pewnym przedziale szerokości pól pręta wstępne wygięcie powoduje obniżenie siły krytycznej wyboczenia skrętnego. Redukcja ta powiększa się wraz ze wzrostem amplitudy wstępnego wygięcia. Otrzymane wyniki zweryfikowano przy wykorzystaniu metody elementów skończonych opartej na nieliniowej teorii powłok. W pewnym zakresie parametrów pręta uzyskano dobrą zbieżność wyników, natomiast przy dużej szerokości pól pręta lokalna utrata stateczności pól może powodować znaczne obniżenie siły krytycznej w stosunku do rozwiązań prętowych.

1. Wstęp

W pracy (1) wykazano, że punkt bifurkacji wyboczenia skrętnego cienkościennego pręta o przekroju dwuteowym jest symetryczny i stateczny. Oznacza to, że siła krytyczna wyboczenia skrętnego nie zostaje obniżona na skutek wystąpienia wstępnej imperfekcji geometrycznej w postaci kąta skęcenia pręta. Wynik ten jest ważny dla wszystkich przekrojów bisymetrycznych otwartych. Inaczej ten problem wygląda gdy występują początkowe wygięcia pręta (2,3). Przybliżone rozwiązanie problemu wpływu tego wygięcia na wartość siły krytycznej wyboczenia skrętnego przedstawione w tych pracach wskazało, że w pewnych przypadkach może dojść do redukcji tej siły. Efekt ten rośnie w miarę wzrostu amplitudy wygięcia. Wszystkie te wyniki otrzymano w ramach założeń teorii prętów cienkościennych o przekrojach nieodkształcalnych.

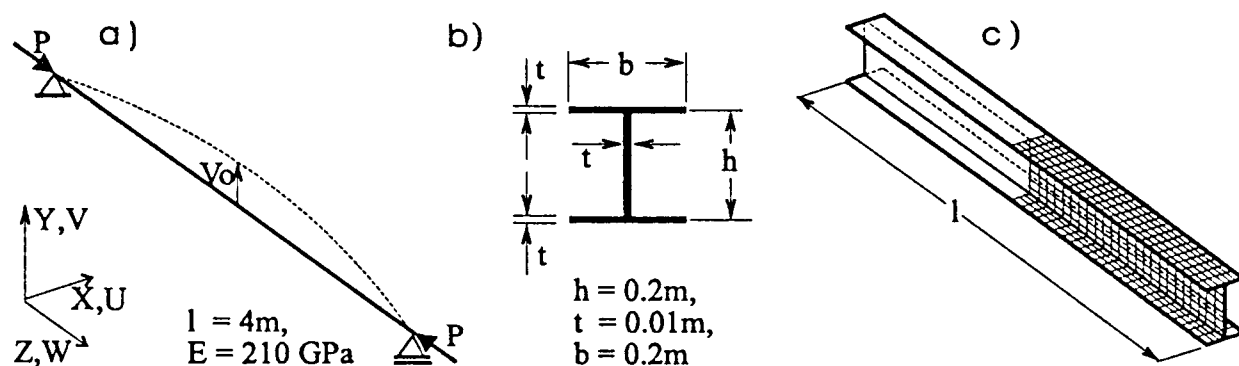
W niniejszej pracy zbadano dokładniej ten efekt nie tylko w zakresie teorii prętów cienkościennych, ale także przeprowadzono weryfikację przy wykorzystaniu metody elementów skończonych opartej na nieliniowej teorii powłok (4,5). Poniższe rozważania są ważne w liniowo-sprężystej fazie pracy materiału pręta oraz w przypadku, kiedy wartość siły krytycznej wyboczenia skrętnego jest mniejsza od wartości siły krytycznej wyboczenia giętnego.

2. Wpływ wstępnego ugięcia na wielkość siły krytycznej wyboczenia skrętnego według teorii prętów cienkościennych i teorii powłok

Rozpatrywany jest pręt swobodnie podparty o przekroju dwuteowym, który został wstępnie wygięty w płaszczyźnie ZY (Rys. 2.1). Energia odkształcenia sprężystego zgromadzona w pręcie, przy założeniu małych odkształceń, ma postać

$$V_w = \frac{1}{2} \int_0^l \int_A E(\varepsilon_z - \varepsilon_z^0)^2 dA dz + \frac{1}{2} \int_0^l G I_d \theta^2 dz \quad (1)$$

gdzie ε_z oznacza wielkość odkształceń podłużnych, ε_z^0 - początkowe odkształcenia podłużne, θ - kąt skręcenia pręta, l - długość pręta, A - pole przekroju poprzecznego, I_d - moment bezwładności Saint Venanta, E - moduł sprężystości a G - moduł odkształcenia postaciowego.



Rys. 2.1. Pręt cienkościenny o przekroju dwuteowym ściskany siłą osiową
Fig.2.1. Thin-walled I-column subject to compressed axial load

Praca wykonywana przez siły osiowe P wyraża się wzorem

$$V_z = P \int_0^l \bar{w}' dz \quad (2)$$

gdzie $\bar{w}$ jest przemieszczeniem osiowym mierzonym od położenia wygiętego. Korzystając z warunku stacjonarności całkowitej energii potencjalnej układ $V = V_w - V_z$ względem $\bar{w}'$, v i θ otrzymano podstawowy układ nieliniowych równań różniczkowych problemu (2), do rozwiązania którego wykorzystano metodę małego parametru. Przybliżenie pierwszego stopnia dla wstępnego wygięcia w postaci

$$v_0(z) = V_0 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (3)$$

prorowadzi do wyznaczenia przemieszczenia poprzecznego

$$v_1(z) = \frac{V_0}{1 - P/P_{kr}^x} \sin \frac{\pi z}{l} \quad (4)$$

gdzie przez P_{kr}^x oznaczono siłę krytyczną wyboczenia giętnego. Natomiast dla kąta skręcenia otrzymano równanie różniczkowe o zmiennych współczynnikach

$$EI_{\omega}\theta_1^{IV} + \left(P \frac{I_0}{A} - GI_d\right)\theta_1'' + \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 EV_0^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \left[(I_y - I_x) \left/ \left(1 - \frac{P}{P_{kr}^x}\right)^2 \right. + I_x \left/ \left(1 - \frac{P}{P_{kr}^x}\right) \right. \right] \theta_1 = 0. \quad (5)$$

Przybliżone rozwiązanie tego równania wyznaczono za pomocą metody Galerkina przyjmując

$$\theta_1(z) = \bar{\theta}_1 \sin \frac{\pi z}{l} \quad (6)$$

Po wstawieniu (6) do równania (5) i wykonaniu całkowania otrzymano równanie

$$EI_{\omega} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - \left(P_{kr} \frac{I_0}{A} - GI_d\right) + \frac{3}{4} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EV_0^2 \left[(I_y - I_x) \left/ \left(1 - \frac{P}{P_{kr}^x}\right)^2 \right. + I_x \left/ \left(1 - \frac{P}{P_{kr}^x}\right) \right. \right] \bar{\theta}_1 = 0 \quad (7)$$

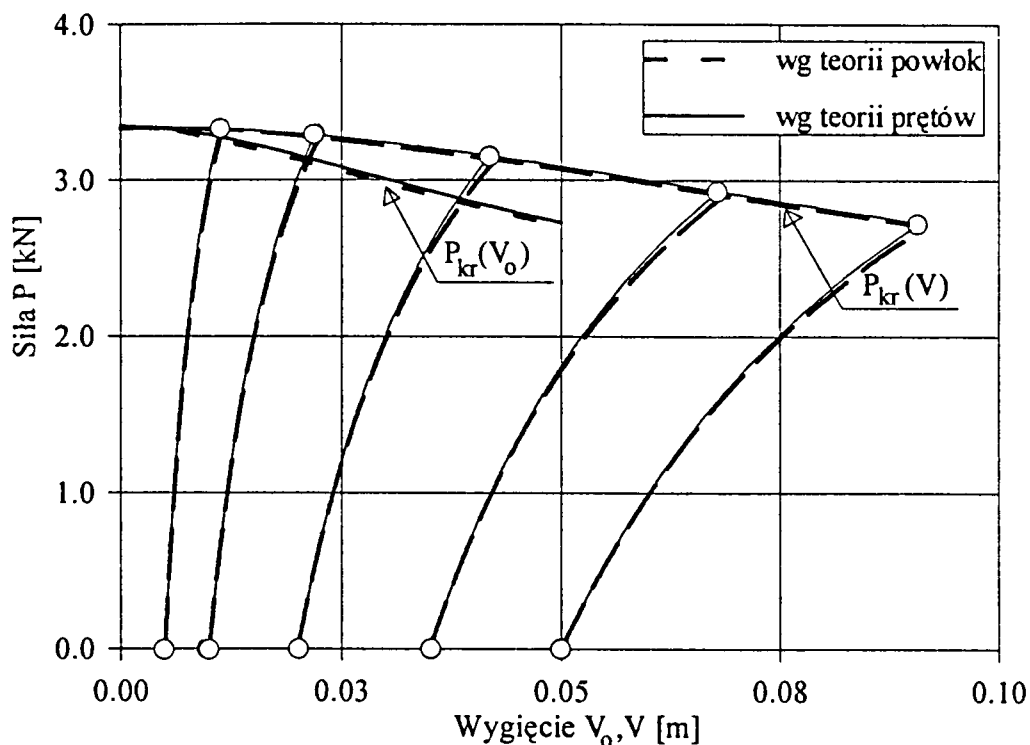
na wyznaczenie siły krytycznej wyboczenia skrętnego P_{kr} .

Ze względu na uproszczony charakter teorii prętów cienkościennych przeprowadzono weryfikację numeryczną obliczeń bazujących na przedstawionych powyżej rozważaniach stosując dokładniejszy powłokowy model pręta. Zastosowano przy tym metodę elementów skończonych opartą na nieliniowej, sześcioparametrowej teorii powłok (4,5). Kinematycznym modelem powłoki jest dwuwymiarowe kontinuum Cosseratów. Ścisłe podstawowe równania teorii wyrażone są przez siły przekrojowe. Pewne uproszczenia wynikają z przyjęcia dwuwymiarowych równań konstytutywnych. Do analizy sił krytycznych pręta zastosowano szesnastowęzłowe czworokątne elementy skończone klasy C^0 całkowane w sposób pełny (FI) z sześcioma stopniami swobody w każdym węźle. Szósty stopień swobody (owinięcie) wynika w sposób naturalny z przyjętej teorii powłok (4,5).

3. Przykłady numeryczne

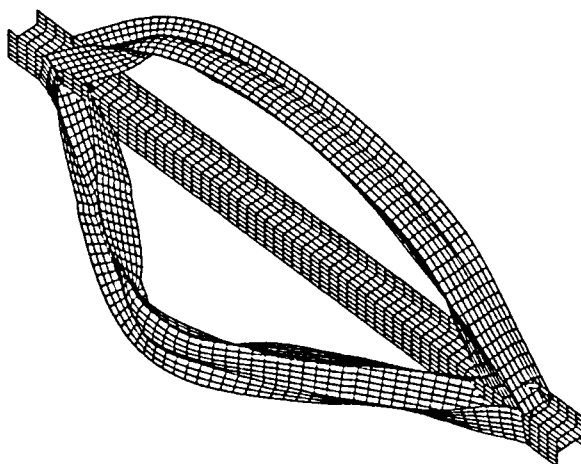
Rozpatrzmy osiowo ściskany swobodnie podparty pręt o przekroju dwuteowym pokazany na Rys. 2.1. Na Rys. 3.1 przedstawiono wyniki analizy wpływu wielkości wstępnego wygięcia V_0 na siłę krytyczną wyboczenia skrętnego przy wykorzystaniu teorii prętów jak też teorii powłok. Wyniki są zbliżone i wskazują na znaczny spadek tej siły rosnący wraz ze wzrostem amplitudy imperfekcji (dotyczy $b = 0.2$ m). Wyznaczono także ścieżki równowagi przed utratą stateczności dla różnych wielkości amplitudy wstępnego wygięcia. Także i w tym przypadku jak widać z Rys. 3.1 otrzymano dobrą zgodność wyników obu teorii. Stan pokrytyczny pręta pokazano na Rys. 3.2.

Aby określić tendencje zachowania się siły krytycznej w zależności od szerokości półek na Rys. 3.3 przedstawiono wyniki analizy modelu prętowego dla amplitudy wstępnego wygięcia rosnącej do $V_0 = 0.05$ m. Na tej podstawie można wyciągnąć wniosek, że dla pręta o szerokości półek mniejszej niż $b = 0.30$ m następuje redukcja siły krytycznej natomiast powyżej tej granicy mamy tendencję przeciwną.



Rys. 3.1. Zależność siły krytycznej od amplitudy wstępnego wygięcia oraz przemieszczenia pręta w środku rozpiętości od siły osiowej

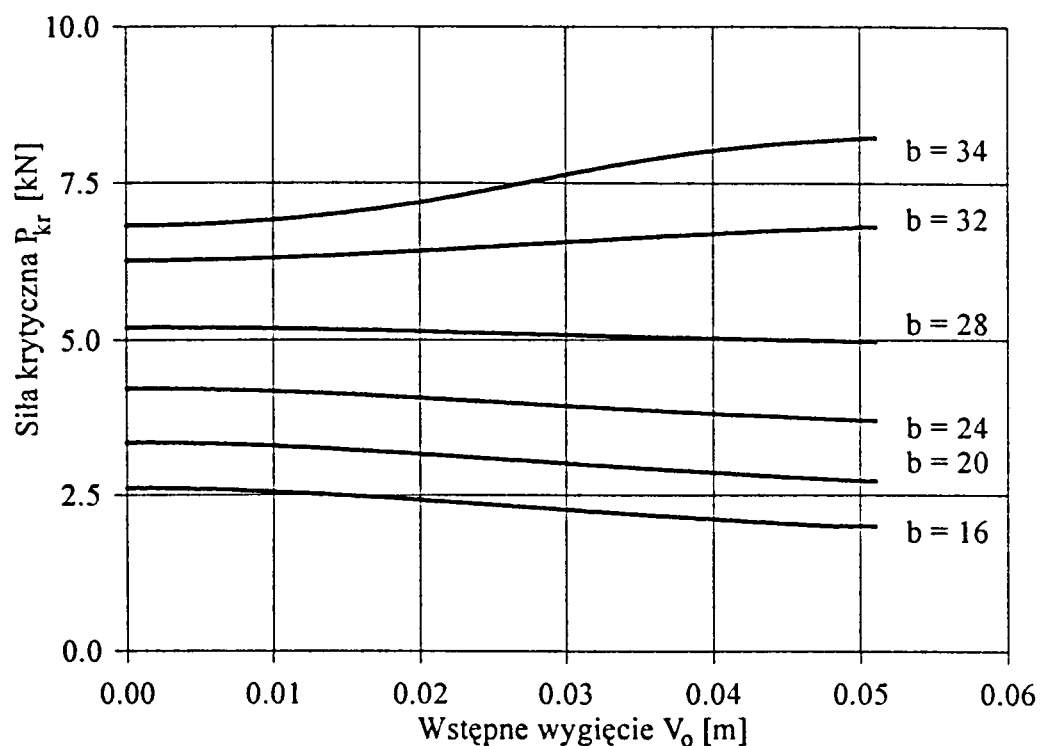
Fig. 3.1. Critical buckling load versus amplitude of initial curvature and mid-span displacement of the column versus axial load



Rys. 3.2. Stan pokrytyczny pręta, rozwiązanie wg teorii powłok
Fig. 3.2. Post-critical deformation of the column (theory of shells)

4. Wnioski końcowe

Wyniki porównania analizy stateczności skrętnej dwuteowego pręta cienkościennego ze wstępnymi wygięciami wskazują na możliwość znacznej redukcji siły krytycznej wzrastającej z amplitudą wygięcia. Porównanie rezultatów analizy opartej na teorii prętów cienkościennych z dokładniejszym powłokowym modelem potwierdza poprawność jej rozwiązań w znacznym zakresie zmian parametrów pręta.



Rys. 3.3. Zależność siły krytycznej od amplitudy wstępnego wygięcia i szerokości pólki pręta
 Fig.3.3. Critical load versus amplitude of initial curvature and width of column flanges

Podziękowania

Pracę wykonano w ramach projektów badawczych nr 7 T07E 035 12 i
 nr 7 T07A 021 12

finansowanych przez KBN.

Literatura

1. Szymczak C., *Buckling and initial post-buckling behavior of thin-walled I columns*, *Int. J. Comp. Struct.* Vol. 11 (1980), 481-487.
2. Szymczak C., *Wyboczenie skrętne wstępnie wygiętych prętów cienkościennych o przekroju dwuteowym*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, nr 408, *Budownictwo Lądowe*, nr 44 (1987), 209-216.
3. Szymczak C., *On the buckling and post-buckling behaviour of thin-walled columns with bisymmetric open cross-section*, *Proc. Int. Colloquium on Stability of Steel Structures*, Tihany, Hungary (1986), 903-909.
4. Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H., *Genuinely resultant shell finite elements accounting for geometric and material non-linearity*, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 35 (1992) 63-94.
5. Chróścielewski J., *Rodzina elementów skończonych klasy C^0 w nieliniowej sześcioparametrowej teorii powłok*, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, nr 540, *Budownictwo Lądowe* nr 53 (1996), 1-291.

Summary

EFFECT OF INITIAL CURVATURE ON TORSIONAL BUCKLING LOAD OF THIN-WALLED I COLUMNS

The effect of initial curvature on the critical load of torsional buckling of thin-walled I columns is studied. The stability problem is formulated according to classical assumptions of the theory of thin-walled beams with non-deformable open cross-section (1,3). The simply supported column of length l subjected to axial end loads P_0 (Fig. 2.1) is considered. The initial curvature of the column axis

$$V = V_0 \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right)$$

is assumed. The governing nonlinear differential equations of torsional buckling of the column are derived with aid of the conditions of stationary total potential energy. The solution of the equations is obtained by means of the perturbation approach. The approximation of first order of the solution leads to the fundamental differential equation

$$EI_{\omega} \theta_1^{IV} + \left(P \frac{I_0}{A} - GI_d\right) \theta_1'' + \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 EV_0^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \left[\left(I_y - I_x\right) / \left(1 - \frac{P}{P_{kr}^x}\right)^2 + I_x / \left(1 - \frac{P}{P_{kr}^x}\right) \right] \theta_1 = 0$$

for the critical torsional buckling load P_{kr} . Utilizing the Galerkin method for a trial solution

$$\theta_1(z) = \bar{\theta}_1 \sin \frac{\pi z}{l}$$

an approximated value of the critical load is obtained.

The solution is verified by means of the finite element method based on fully nonlinear theory of shells (4,5). The quadrilateral 16-nodes elements with six degrees of freedom in each node are applied. Additional so-called drilling degree-of-freedom is taken into account. The results of numerical examples given (Fig. 3.1) allow us to draw a conclusion that agreement between of the results of the bar and shell models is very good. Moreover, a reduction of the critical load due to the initial curvature of the column axis should be noticed. The greater amplitude of the imperfection the more drastic reduction of the load. The effect of change of the flange width upon the critical load is also studied. The prebuckling equilibrium paths for some different amplitude of the initial curvatures are shown in Fig. 3.1, as well. It is worth noticing (Fig. 3.3) that the reduction of the critical load is observed only for the flange width smaller than $b = 0.3$ m. If the width of flange is greater than $b = 0.3$ m then a rise of the critical load is obtained.

EVALUATION OF ULTIMATE CAPACITY OF THIN-WALLED COLD-FORMED STEEL MEMBERS

D. DUBINA

*CMMC Department, "Politehnica" University of Timisoara
Timisoara, RO-1900, Romania*

D. GOINA

*Centre of Advanced Technical Sciences, Romanian Academy
Timisoara, RO-1900, Romania*

Using very accurate tests on compression cold-formed steel lipped channels, a large-deformation elastic-plastic FEM model is calibrated. This model accounts for geometrical imperfections of members and allows for evaluation of the erosion level of critical bifurcation load in the local with overall instability coupling point. Comparisons with tests and EUROCODE 3 Part 1.3 results are presented.

1. Introduction

The interactive buckling phenomenon, which characterise the behaviour of thin-walled members leads to a strong erosion of critical load, due both to the imperfections and coupling effect of instability modes. In a previous study [1] was shown the elastic buckling results obtained with Finite Element, Finite Strip and Generalised Beam methods, compared with experimental ones, are not accurate enough in case of interactive buckling. For such problems, the effect of imperfections together with the plastic behaviour, which are very important especially for short members, must be taken into account. On the other hand, the results obtained by using the design codes approaches, which are semi-empirical and have been calibrated by testing, are obviously in a better agreement with relevant experiments.

Starting from these considerations, the present paper presents the tests based calibration of an elastic-plastic FE model which enables for the refined analysis of interaction phenomena of thin-walled compression members.

2. Calibration of the elastic-plastic FEM model

2.1 Experimental basis

Very accurate tests on compressed cold-formed steel lipped channels were performed at University of Sydney [2]. The L36 test series, on pin-ended members, was chosen

to calibrate the FEM model. The lipped channels were brake-pressed from zinc-coated structural steel sheets Grade G 450 (nominal yield stress of 450 MPa). Table 2.1 shows the measured dimensions of the specimens. Material properties, determined from coupon tests, are: measured static 0.2% ($\sigma_{0.2}$) tensile proof stresses of 500 MPa, tensile strength (σ_u) of 540 MPa and Young's modulus $E=195$ GPA. In Table 2.1, t^* represents the metal thickness and it was used in FEM model, together with measured cross-section dimensions and determined material properties. The dimension of the pin-ended bearing (95 mm at each end) should be added to the pin-ended specimen length for the pin-ended columns. The pinned end bearings allowed rotation about the minor y-axis, only.

Table 2.1. Measured specimen dimensions for series L36

Specimen	Lips B_l (mm)	Flanges B_f (mm)	Web B_w (mm)	Thickness		Radius r_i (mm)	Length L (mm)
				t (mm)	t^* (mm)		
L36P0280-	12.6	37.1	97.2	1.53	1.48	0.85	279.9
L36P0815+	12.7	37.0	97.4	1.51	1.48	0.85	814.6
L36P1315-	12.4	36.9	97.1	1.52	1.47	0.85	1316.4

2.2 Introduction of geometrical imperfections and material non-linearities

From the point of view of non-linear analysis, initial imperfection are used in order to lead the load-displacement response of model to certain shape of stability loss. With compressed members some kind of disturbance is essential because loading itself has no distorting effect on the model [3]. When initial imperfection is used to invoke geometric non-linearity, the shape of imperfection can be determined with buckling analysis. The buckling modes should describe the possible displacement field.

Two kind of geometric imperfections were taken into account in FEM model: overall imperfection (with amplitude f_0 , at the mid-length), and local imperfection (with amplitude w_0). In order to establish the shape of geometric imperfections, an eigenbuckling analysis was firstly carried out. The geometric imperfections in the FEM model, for the three analysed specimen were taken as follows: for L36P280- and L36P815+ specimens, the local imperfection is affine with the first buckling mode (local buckling), and the overall imperfection is taken as a sine shape of f_0 amplitude; for L36P1315- specimen, the overall imperfection is affine with the first buckling mode, (flexural buckling) while the local imperfection is affine with the second buckling mode (local buckling).

The size of imperfections was equal either with the measured or equivalent overall and local initial deflections. In Table 2.2 are presented the amplitudes of imperfections. The measured amplitude of local imperfections is the maximum out-of-plane deflection measured at the middle of the web width, while the overall one is the initial deflection at mid-length of the member. Equivalent overall amplitude was

taken ($l/1000$) of columns length, according to EUROCODE 3-Part 1; the local equivalent imperfection was 0.006 of web width [4]. The measured eccentricity (e_o) of the applied load, given in Table 2.2, was also introduced in FEM model. The membrane and the flexural measured residual stresses are negligible compared with the nominal yield stress and they were not introduced in the FEM model.

Table 2.2. Measured and equivalent imperfections

Specimen	Max. local geometric imperfection w_o (mm)		Overall geometric imperfections at mid-length (mm)		Eccentricity e_o^* (mm)
	Measured	Theoretical	Measured	Theoretical	
L36P0280-	-	0.5832	-	+0.47	-0.13
L36P0815+	0.25	0.5755	-0.46	-1	+0.31
L36P1315-	0.41	0.5286	-0.51	-1.5	-1.17

* Loading eccentricity positive indicate that the applied load produced deflections towards the lips

The material behaviour was introduced using both the ideally elastic-plastic model (Prandtl) and the Ramberg-Osgood law calibrated for the considered material ($\sigma_{0.2}=500$ MPa, $\sigma_u=540$ MPa, $\epsilon_u=12\%$).

2.3 Numerical results

The numerical analysis was carried out with ANSYS 5.1 using SHELL 43 elements.

This is a 4 nodes element, allowing for the elastic-plastic large strains and deflection analysis. Boundary conditions and loading are set to match those employed in the physical tests. In order to model the pinned support, a supplementary plate was introduced at the ends of profile. The plate mesh includes the node corresponding to the gravity centre of the profile cross-section. At one end the force is applied, and the rotation over the weak axis and axial displacement are free, while at the opposite one, all degrees of freedom are restrained, except the rotation over the weak axis.

In Figure 2.1 are plotted the load vs. mid-length deflection (bending about minor axis) curves, both experimental and numerical, and are shown the deformed shapes.

The numerical curves plotted in this figure were obtained using measured local and overall imperfections, except L36P280-specimen, for which no measured imperfections existed. The numerical results are presented in Table 2.3.

Table 2.3. Limit loads [kN]

Specimen	Tests	ANSYS with bilinear material model		ANSYS with R-O model
		measured imperfections	equivalent imperfections	measured imperfections
L36P0280-	83.5	-	85.87	81.41
L36P0815+	67.9	70.5	72.08	69.8
L36P1315-	41.1	41.42	38.56	40.75

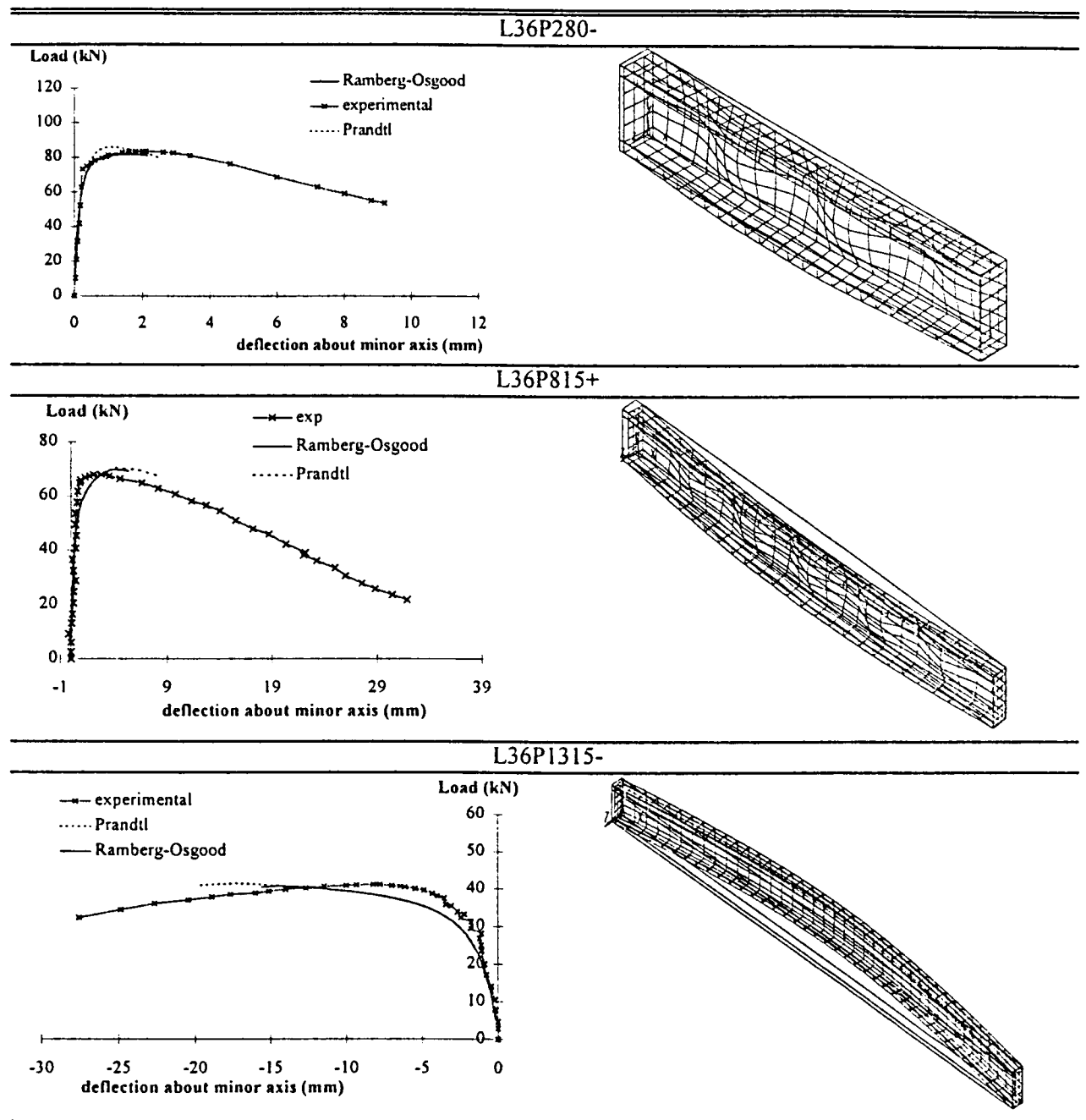


Fig. 2.1. FEM simulation results

3. Calibration of the erosion of critical bifurcation load

3.1 The ECBL Approach

The interactive buckling approach based on Erosion of Critical Bifurcation Load (ECBL) was largely presented in Ref [5]. The main problem of this approach is the evaluation of the erosion factor ψ and, on this base, the calibration of the α imperfection factor to be used in the European buckling curves. The experimental

approach for ψ evaluation is presented in [5]. In the present paper, the numerical procedure based on Finite Element (FEM) analysis will be presented only. This procedure includes the following steps:

1. Evaluation of ultimate load of member in the coupling point which is defined by the interactive slenderness, $\bar{\lambda}_Q = 1/\sqrt{Q}$, and also in the points of $\bar{\lambda}_Q \pm 0.1 \cdot \bar{\lambda}_Q$ (Fig 3.1). Q represents the ratio between the effective and gross area of the cross section, while $\bar{\lambda}$ is the relative slenderness of compression member. $\bar{N} = N/N_{pl}$ where N is the actual compression resistance of the member, and N_{pl} is its full plastic capacity.

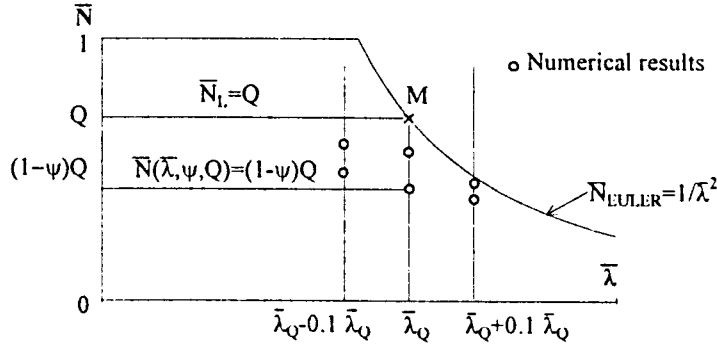


Fig. 3.1. Evaluation of ψ Erosion Factor by means of numerical results

Two different ultimate load corresponding to $\pm f_0$ value of initial geometrical imperfection, will be calculate in each point. The local imperfections, w_0 , is the same in all the cases.

2. Compute the individual value of erosion, $\psi_i = Q_i - N_{i,num}/N_{i,pl}$, for the i number, and the mean value of the erosion factor, ψ_m , for all n members.

3. Compute the *design value* of the erosion factor, $\psi_d = \psi_m + 2s_\psi$, where s is the standard deviation which is introduced in order to take into account the randomness of numerical results.

This approach was used to obtain the erosion value corresponding, to the L36 test series [2]. ANSYS large-deformations elastic-plastic (bilinear material model) analysis was used with $f_0 = \pm 0.46\text{mm}$ and $w_0 = 0.25\text{mm}$. It was obtained $\psi = 0.373$. With this value the α imperfection factor is $\alpha = 0.213$. For short members, $\bar{\lambda}_Q \leq 0.2$, which corresponds to $\bar{N}_i = Q$ e.g. the local buckling ultimate capacity, the ANSYS model was also used. Table 3.1 shows the corresponding results obtained using both the ANSYS simulations and EUROCODE 3 Part 1.3 provisions. Using the α value and the short member resistance and based on the Ayrton -Perry formulation [5], the "numerical" buckling curve can be obtained. Figure 3.2 shows the comparison between L36 and L48 series tests [2] with the EUROCODE 3-Part 1.3 buckling curves and the numerical ones. Both numerical and code curves were divided by $\gamma_{M1} = 1.1$ safety coefficient.

Table 3.1: Short members resistance

Section	EUROCODE 3, Part 1.3		ANSYS with bilinear material model		ANSYS with Ramberg-Osgood material model	
	N_L [kN]	Q	N_L [kN]	Q	N_L [kN]	Q
C36	82.870	0.646	97.499	0.691	93.641	0.663
C48	83.412.5	0.528	112.389	0.646	111.623	0.642

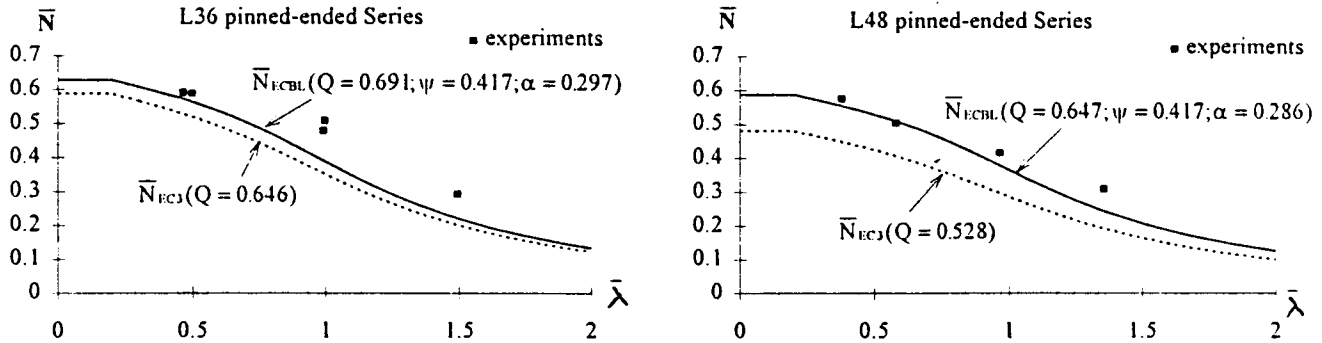


Fig. 3.2. Theoretical/experimental comparative results

4. Concluding remarks

If accurate tests are available, a refined FEM model can be calibrated to simulate the behaviour of thin-walled steel compression members. Based on a such model, the erosion of critical bifurcation load, into the coupling point between overall and local instability modes can be evaluated. Using the erosion value and the Ayrton-Perry equation, the interactive buckling curves may be obtained. The numerical results are in good agreement with the experimental ones. However, the results in Table 3 in connection with Fig. 3.2 show that, for both, short and long member, the introduction of material behaviour into the numerical model by means of R-O model is more suitable.

5. References

1. Dubina, D. *et al*, in *Coupled Instabilities in Metal Structures CIMS'96*, ed. Rondal J., Dubina D. and Gioncu V. (Imperial College Press, London, 1996).
2. Young, B., Rasmunssen, K.J.R., *Compression Tests of fixed -ended and pin-ended cold-formed lipped channels*, Resch. Rep., Univ. of Sydney, NSW 2006, Australia.
3. Salmi, P., Talja, A., *Design of cold-formed HSS channels for bending and eccentric compression*, Research Notes, Technical Research, Centre of Finland.
4. Schafer, B., Pekoz, T., "Geometric Imperfections and Residual Stresses Members", *Thirteenth International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, Missouri USA, October 17-18, 1996, pp 649-664.
5. Dubina, D., *et al*, *Thirteenth International Speciality Conference on Cold-Formed Steel Structures*, St. Louis, Missouri USA, October 17-18, 1996, pp 665-680.

INFLUENCE OF STRUCTURAL AND SEISMIC CHARACTERISTICS ON THE BEHAVIOUR OF STEEL BUILDING FRAMES WITH SEMI-RIGID JOINTS

D. DUBINA, D. GRECEA

Department of Steel Structures and Structural Mechanics, "Politehnica" University of Timisoara, 1900 Timisoara, Romania

F. DINU

Centre of Advanced Technical Sciences, Romanian Academy Timisoara, 1900 Timisoara, Romania

The paper presents a parametric study aiming to evaluate and characterise the seismic response of steel frame structures. The seismic analysis was made by DRAIN-2D computer code, which allows for a dynamic elastoplastic analysis. Three different frames with semi-rigid beam-to-column joints having different beam/column ratios of rigidity were analysed. There were studied the influence of these parameters on the plastic hinge time history, collapse mechanism and values of q-factor, respectively. The Vrancea, March 4, 1977 and El Centro, 1940 earthquake accelerograms were used to introduce the ground motion.

1. Introduction

The cost of a moment resisting building steel frame is considerably influenced by the nature of its beam-to-column connections and particularly by their moment capacity and rotations stiffness. Substantial economies may be easily achieved by using bolted connections without stiffeners, which are easy to fabricate in work-shop and to assembly on site and therefore ensure minimum cost.

Steel structures with semi-rigid joints have a greater possibility of deformations, in comparison with the rigid ones, which means they are more sensitive to the second order effects, including the influence of imperfections.

Also, the semi-rigid joints are influencing the dynamic response of the steel structures, modifying the structural coefficient q and the plastic hinges biography. Promotion of steel structures with semi-rigid joints in Romania has to satisfy the seismic criteria of strength and deformability.

On the basis of an extensive numerical investigation, the present paper summaries the main conclusions in regard with the influence of different structural parameters on the seismic response of steel building frames with semi-rigid connections.

2. Numerical simulation program

A numerical simulation program with DRAIN-2D computer code [6] was designed to find out the influence of the structural and seismic characteristics on the behaviour of steel building frames with semi-rigid joints. The three steel frames presented in Fig.1 were selected for numerical simulations. HEA and HEB section for columns

and IPE section for beams were used. Different ratios between the beam and column rigidity were chosen, i.e. strong column and weak beam (SCWB), weak column and strong beam (WCSB) and column and beam with almost the same rigidity (CBSR). The beam-column joints taken into account were of rigid and semi-rigid type.

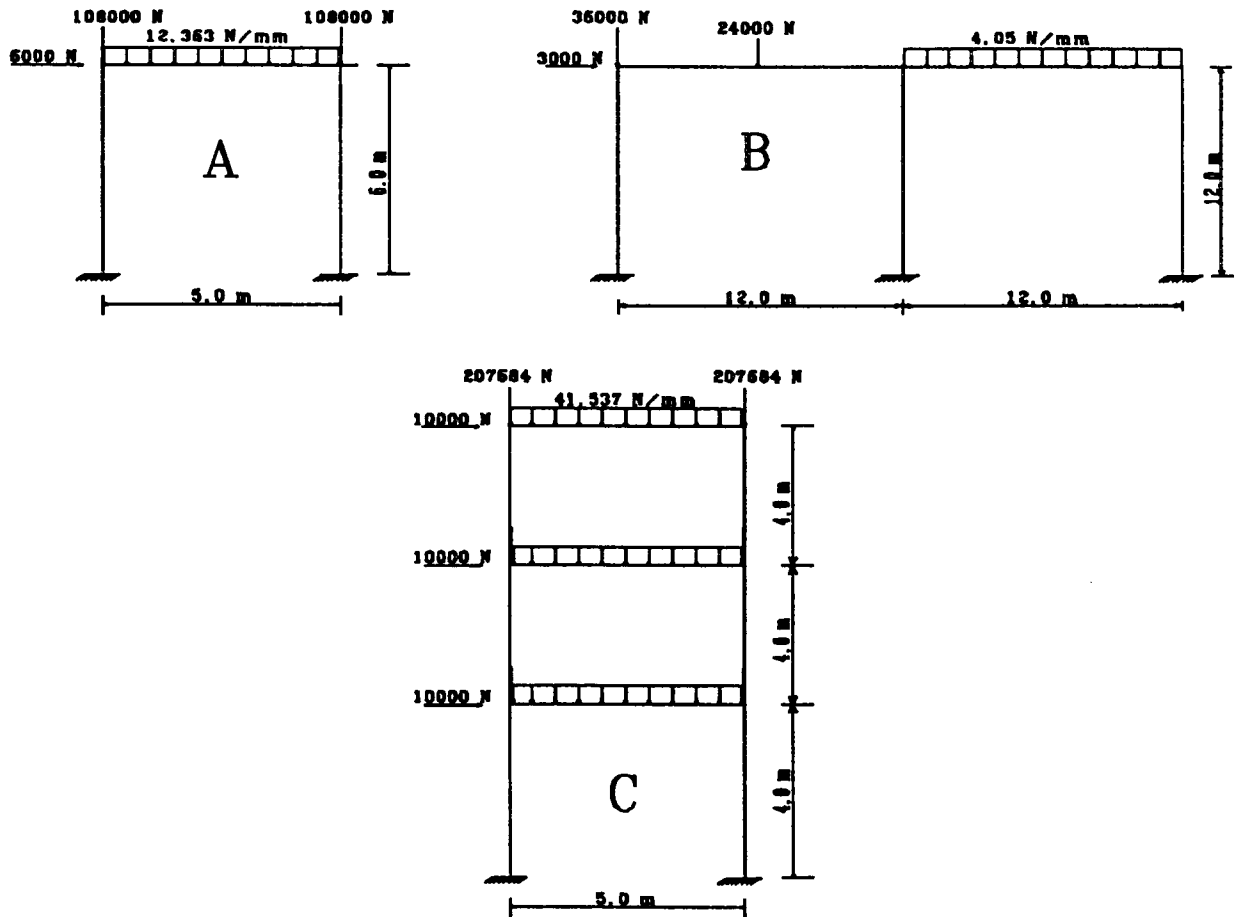


Fig.1 - The studied frames

The Eurocode 3, Revised Annex J rules [1] were used to evaluate the joints characteristics, i.e. the plastic resistant moment M_{Rd} , and the initial stiffness, S_j . The characteristics of joints selected for this parametrical study are:

- $M_{Rd} = 1.2; 1.0; 0.8M_{pl.beam}$
- $S_j = K_{sup}, 0.8K_{sup}, 0.6K_{sup}, 0.4K_{sup}$

The S_j values are limited by K_{sup} and K_{inf} as shown in Fig.2.

The accelerograms of Vrancea (Bucharest 1977) and El Centro (1940) earthquakes were used for dynamic analysis (Fig.3).

The main purposes of this parametric study were to analyse the time history of the plastic hinges appearance up to the collapse mechanism occurrence and the change of q factor. The q factor is obtained according to the Eurocode 8 provisions [2]. In order to model the cumulative damage of frame members, after the attainment

of plastic moment capacity, a 5% degradation was considered in the bilinear $M-\theta$ curve during the dynamic simulation with DRAIN-2D. The second order effect was also introduced.

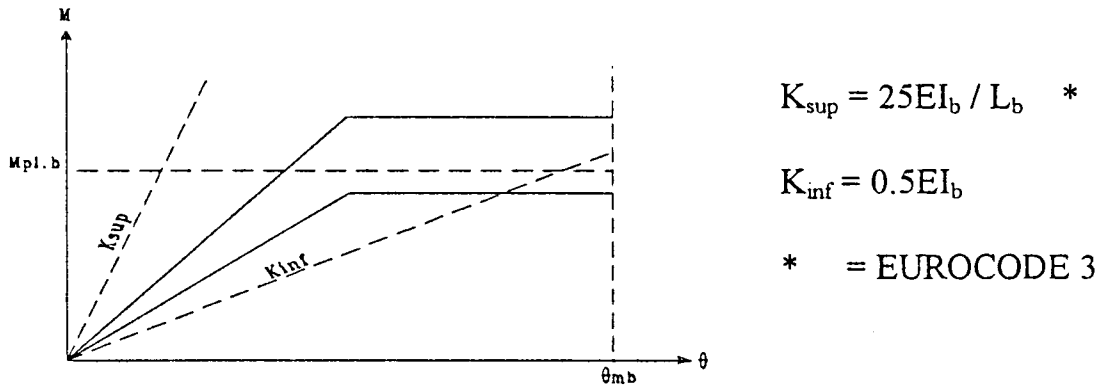


Fig.2 - S_j values

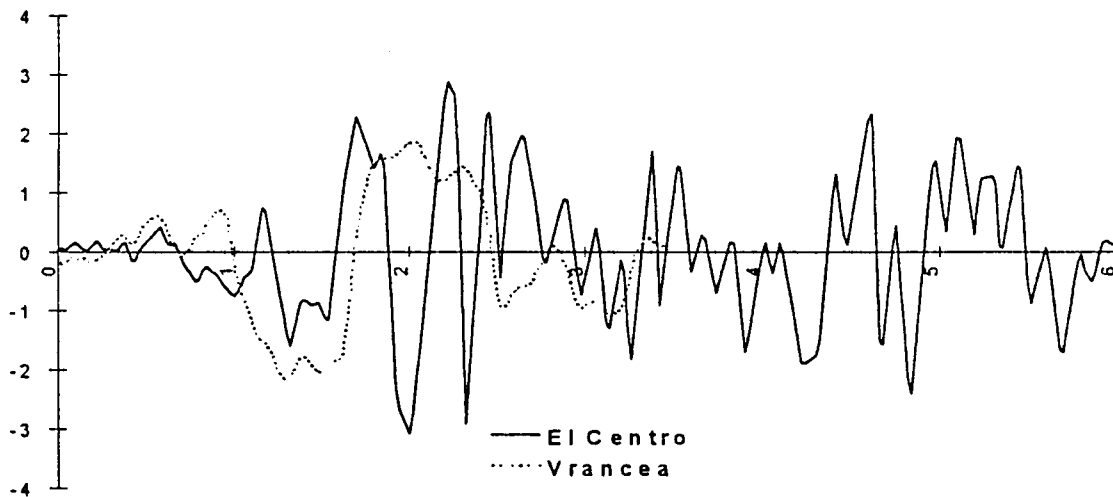


Fig.3 - Accelerograms of El Centro and Vrancea earthquakes

5. Numerical results.

Tables 1 shows the values of q factor obtained for the frames A, B and C, respectively.

The plastic rotations determined in connections were limited to the value of 0.015 rad. The Eurocode 3, Revised Annex J does not give a value for the ultimate rotation of the bolted connections; it is suggested for welded ones, only as 0.015 rad. For the bolted connections, this value is probably too severe and there are actually some opinions that it could be increased up to 0.025 rad or 0.030 rad, but for the time being we still remain at first value, which is a code one.

Table 1 - Values of q-factor

Frame A							
M_{Rd}	Stiffness	SCWB		CBSR		WCSB	
		Centro	Vrancea	Centro	Vrancea	Centro	Vrancea
$1.2M_{pl.b}$	k_{sup}	1.36	2.00	1.26	1.41	1.21	1.33
	$0.8 k_{sup}$	1.36	2.00	1.26	1.41	1.21	1.33
	$0.6 k_{sup}$	1.34	2.00	1.28	1.41	1.21	1.33
	$0.4 k_{sup}$	1.32	2.00	1.30	1.47	1.23	1.33
$1.0M_{pl.b}$	k_{sup}	1.56	3.05	1.26	1.41	1.21	1.33
	$0.8 k_{sup}$	1.59	2.85	1.26	1.41	1.21	1.33
	$0.6 k_{sup}$	1.59	2.69	1.28	1.41	1.21	1.33
	$0.4 k_{sup}$	1.54	2.45	1.30	1.47	1.23	1.33
$0.8M_{pl.b}$	k_{sup}	1.52	4.50	1.24	1.41	1.21	1.33
	$0.8 k_{sup}$	1.52	4.50	1.26	1.41	1.21	1.33
	$0.6 k_{sup}$	1.54	4.50	1.28	1.41	1.21	1.33
	$0.4 k_{sup}$	1.48	4.40	1.30	1.47	1.23	1.33
Rigid		1.40	2.00	1.23	1.35	1.73	1.27
Frame B							
M_{Rd}	Stiffness						
		Centro	Vrancea	Centro	Vrancea	Centro	Vrancea
$1.2M_{pl.b}$	k_{sup}	1.23	1.29	1.20	1.65	1.40	1.90
	$0.8 k_{sup}$	1.25	1.39	1.20	1.65	1.40	1.90
	$0.6 k_{sup}$	1.23	1.37	1.20	1.67	1.41	1.90
	$0.4 k_{sup}$	1.30	1.71	1.23	1.67	1.44	1.85
$1.0M_{pl.b}$	k_{sup}	1.42	1.03	1.18	1.63	1.40	1.90
	$0.8 k_{sup}$	1.40	1.90	1.20	1.63	1.40	1.90
	$0.6 k_{sup}$	1.31	2.27	1.20	1.66	1.41	1.90
	$0.4 k_{sup}$	1.29	1.80	1.25	1.65	1.44	1.85
$0.8M_{pl.b}$	k_{sup}	1.70	2.40	1.81	1.52	1.40	1.90
	$0.8 k_{sup}$	1.67	2.95	1.76	2.90	1.40	1.90
	$0.6 k_{sup}$	1.50	3.15	1.72	2.70	1.41	1.90
	$0.4 k_{sup}$	1.37	2.46	1.60	2.15	1.44	1.85
Rigid		1.31	1.36	1.19	1.42	1.25	1.46

Frame C							
M_{Rd}	Stiffness	SCWB		CBSR		WCSB	
		Centro	Vrancea	Centro	Vrancea	Centro	Vrancea
$1.2M_{pl.b}$	k_{sup}	2.03	4.00	1.64	3.40	1.28	1.47
	$0.8 k_{sup}$	2.02	4.00	1.65	3.35	1.29	1.47
	$0.6 k_{sup}$	1.97	4.18	1.63	3.10	1.32	1.47
	$0.4 k_{sup}$	1.86	4.00	1.56	2.90	1.32	1.47
$1.0M_{pl.b}$	k_{sup}	1.97	6.33	1.71	4.25	1.32	1.41
	$0.8 k_{sup}$	2.10	6.33	1.73	3.90	1.32	1.47
	$0.6 k_{sup}$	2.12	6.33	1.68	3.90	1.32	1.53
	$0.4 k_{sup}$	1.98	4.60	1.66	4.40	1.33	1.58
$0.8M_{pl.b}$	k_{sup}	2.00	10.0	1.77	7.00	1.24	1.81
	$0.8 k_{sup}$	2.27	11.0	1.76	8.00	1.60	3.09
	$0.6 k_{sup}$	2.33	11.0	1.76	11.0	1.58	3.00
	$0.4 k_{sup}$	2.09	7.50	1.74	8.00	1.54	2.80
Rigid		1.81	2.95	1.91	5.50	1.40	1.40

6. Conclusions

On the basis of the results previously presented, we are suggesting some remarks in regard with the following problems, i.e.

6.1 Influence of the beam/column rigidity ratio

In case of WCSB frames, a floor mechanism located within the first storey occurs. The corresponding sway displacements are important.

For the SCWB frames, the yield mechanism is a global one, in which the plastic hinge rotations are dominant. Developing of global mechanism is verifying the conclusions of Lee in a very recent paper [4], in which it is recommended that in a joint, the plastic moments of the beams have to be less than 0.75 of the plastic moments of the columns.

In case of CBSR frames, the yield mechanism is a combined one, in which the plastic hinges may appear both in columns and in beams.

Regarding the q factor, it can be also observed that, in case of SBWC frames, the values of q for the rigid frames are closed to the semi-rigid ones. These values are increasing with the reduction of the joint rotational stiffness and ultimate resisting moment (semi-rigidity effect), excepting frame A, as seen also in Ref.[3].

So, the recently proposed formula by Mazzolani & Piluso [5], to reduce the q factor for semi-rigid frames, via a coefficient $\eta \leq 1$, seems to be not generally valid.

6.2 Change of ultimate resisting moment of the joints

In case of SBWC frames, if the ultimate resisting moment of the joint M_{Rd} is changing, there are no differences in structural response (the yield mechanism is identically).

In case of WBSC frames, the specific $M-\phi$ curves influence both the q values and the collapse mechanism. The mechanism is global.

For CBSR frames, the behaviour of the structures is rather similar if the joints are full resistant (i.e. $= 1.2 M_{pl.b}$, $1.0 M_{pl.b}$), but it changes in case they are partial resistant (i.e. $M_{Rd} = 0.8 M_{pl.b}$).

6.3 Influence of initial rotational stiffness

Behaviour of the structures (i.e. yield mechanism, q factor, displacements, rotations), is not significantly influenced by the change of initial joint rotational stiffness ($S_j = 1.0 K_{sup}$; $0.8 K_{sup}$; $0.6 K_{sup}$; $0.4 K_{sup}$).

Any case, when we are speaking about semi-rigid joints of seismic resistant frames, it seems to be more appropriate to focus our attention on the partial moment capacity of these joints than on their partial stiffness.

6.4 Influence of accelerogram type

There are two cases only in which quite strong differences appear in the collapse mechanism, i.e. Frame B (SCWB) and Frame C (CBSR) respectively, but the differences in q factor values are very important in all the cases. This prove the q factor evaluated according to Eurocode 8 provisions doesn't characterise in an unique way the seismic response of the structure. Consequently, the use of this value in seismic design must remain in qualitative limits, only.

7. References

1. Eurocode 3 Design of Steel Structures, Commission of the European Communities, Annex J, Beam-to-column Connections, February 1992.
2. Eurocode 8 Earthquake Resistant Design of Structures, Commission of the European Communities, October 1993.
3. Sedlacek G., Koo M.-S., Ballio G., The Response of Steel Structures with Semi-Rigid Connections to Seismic Actions, Connections in Steel Structures, May 1987, pp. 362-374.
4. Lee Han-Seon, Revised Rule for Concept of Strong-Column Weak-Girder Design, Journal of Structural Engineering, Vol. 122, No. 4, April 1996, pp. 359-364.
5. Mazzolani F.M., Piluso V., An Attempt of Codification of Semirigidity For Seismic Resistant Steel Structures, Third International Workshop on Connections in Steel Structures, Trento, 1995.
6. Powell G.H., DRAIN-2D User's Guide, University of California, 1973.

Mirosław FERDYNUS

*Katedra Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Lubelskiej
Nadbystrzycka 36, 20-650 Lublin, Poland*

Franciszek ROMANÓW

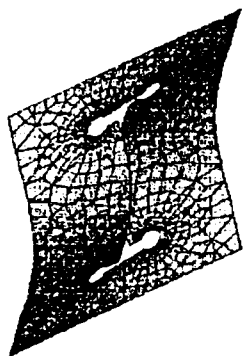
*Katedra Pojazdów Politechniki Zielonogórskiej
Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra, Poland*

OBCIĄŻENIA KRYTYCZNE I UGIĘCIA ŚCISKANYCH PŁYT Z DWUTEOWĄ SZCZELINĄ

Summary. A deflection analysis of plate with an I-section shaped slot has been presented in the paper. The aim of this project is to work out a bar model which can efficiently replace a plate with introductory deflection in the bearing of critical force and deflection calculations. A comparison between the bar model and an FEA one is given. For small loads, both methods yield similar results, but the bar model is significantly simpler. Moreover it allows to construct plates with required features.

1. Wprowadzenie

Jednolite cienkie płyty ściskane mogą przenosić nieduże obciążenia, utrata stateczności następuje przy stosunkowo niewielkiej sile krytycznej. Nośność płyty można zwiększyć między innymi poprzez odpowiednie jej ukształtowanie, które polega na wykonaniu w niej dwuteowego wycięcia i niewielkiego ugięcia wstępnego połówek płyty. Wstępne ugięcie prawej i lewej połowy płyty powinno mieć przeciwny zwrot, tak aby pod obciążeniem ściskającym fragmenty płyty ugięły się w przeciwnych kierunkach (rys.1.1). Szersza analiza obciążeń krytycznych płyty została przedstawiona w publikacji [1] i opiera się o model idealnie płaski. Celem niniejszej pracy jest stworzenie modelu prętowego w aspekcie obliczeń siły krytycznej oraz ugięć, zastępującego w skuteczny sposób płytę z dwuteowym wycięciem oraz wstępnym ugięciem.

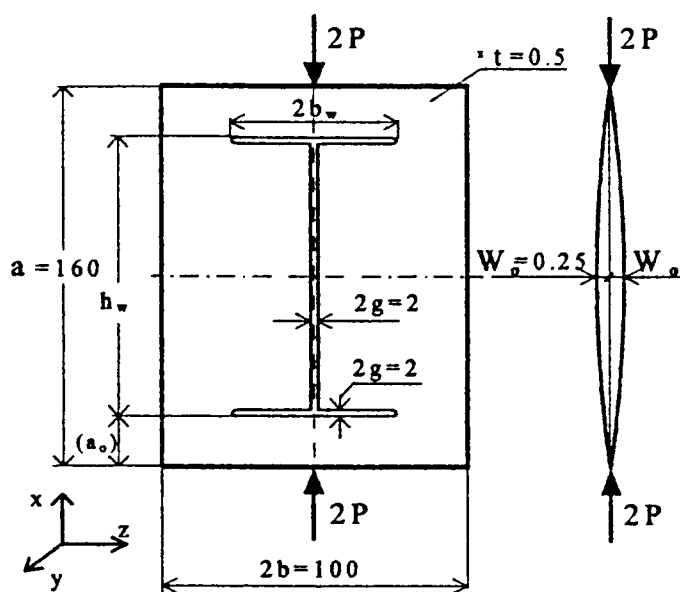


Rys.1.1. Poglądowe przedstawienie sposobu odkształcania się płyty pod obciążeniem ściskającym.
Fig.1.1 The way of deflection of the plate under compressing load.

2. Obciążenia krytyczne i ugięcia płyty.

2.1 Model rzeczywisty płyty.

Zadaniem naszym jest określenie obciążeń krytycznych i ugięć płyty przedstawionej na rys.2.1 z uwzględnieniem wstępnych imperfekcji. Badano grupę płyt wykonanych

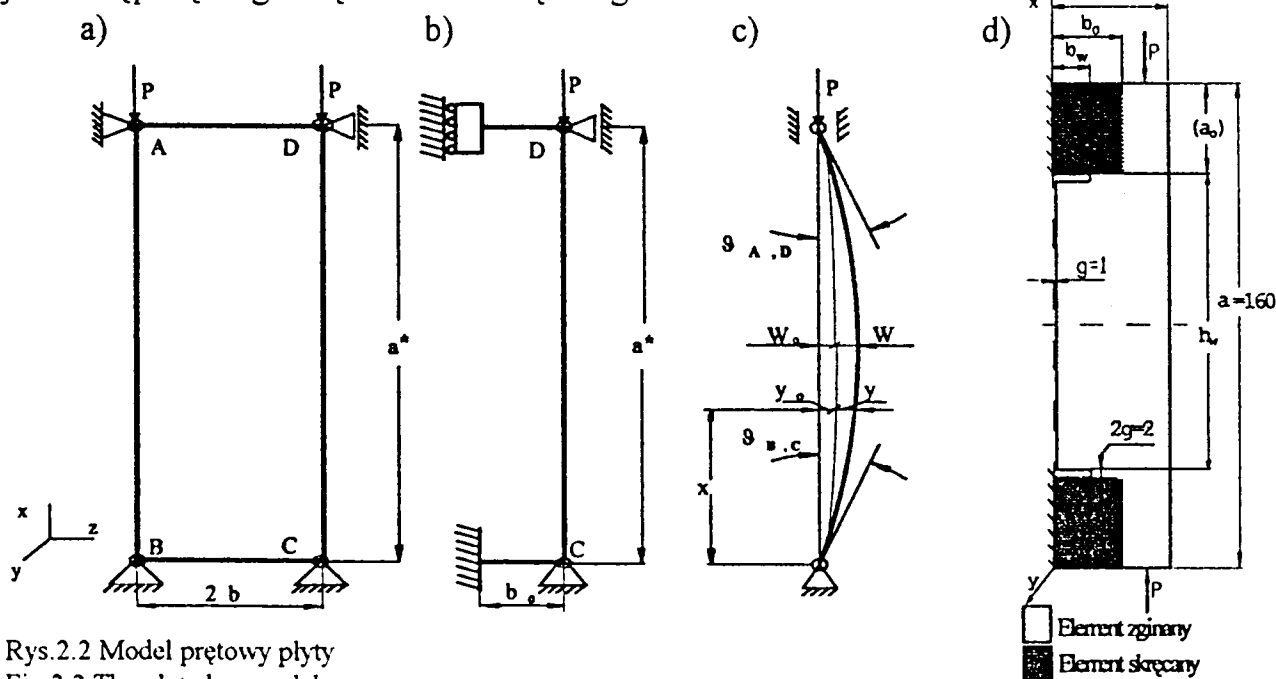


ze stali sprężynowej 70S, różniących się wysokością h_w oraz szerokością $2b_w$ wycięcia. Płyty obciążone są siłą ściskającą $2P$. Poziomy brzeg płyty może przemieszczać się wzdłuż osi x i obracać względem osi z . Korzystając z symetrii, rozważano połowę płyty, utwierdzając ją w przekroju pionowym (możliwe tylko przemieszczenie wzdłuż osi x).

Rys.2.1 Rysunek konstrukcyjny płyty.
Fig.2.1 Dimensioned drawing of plate.

2.2 Model prętowy

W celu obliczenia np. obciążeń krytycznych, badaną płytę można przedstawić jako model prętowy (rys.2.2). Pod obciążeniem siłą $2P$ pręty poziome są skręcane a pionowe ściskane. W punktach A,B,C,D ($x=0$; $x=a$) zachodzi równość kąta skręcenia pręta poziomego i kąta ugięcia pręta pionowego (np. w punkcie A $\varphi_A = \vartheta_A$). Analizę można uprościć rozpatrując tylko jedną połówkę modelu (rys 2.2 b,c,d). Wymiar b_0 jest zastępczą długością elementu skręcanego.



Rys.2.2 Model prętowy płyty
Fig.2.2 The plate bar model.

Równanie różniczkowe osi ugiętej ściskanego pręta przyjmie postać:

$$EJ^* \frac{d^2 y}{dx^2} = P(y_o + y) + M_o \quad (1)$$

gdzie: J^* - zastępczy moment bezwładności pręta pionowego, M_o - moment skręcający poziomy pręt. Dla pręta idealnie prostego: $y_o = 0$ wtedy z rozwiązania równania (1) przy warunkach brzegowych (7), (8) oraz (10) otrzymujemy równanie:

$$\operatorname{tg}\left(k \frac{\lambda}{2}\right) = -\frac{2b_o EJ^*}{GJ_o a^*} \left(k \frac{\lambda}{2}\right) \quad (2)$$

gdzie: $k = \sqrt{\frac{P}{EJ^*}}$; zaś a^* jest długością zastępczą pręta pionowego

oznaczając: $L = -\frac{2b_o EJ^*}{GJ_o a^*}, \quad \lambda = k \frac{a^*}{2}$

otrzyma się:

$$\operatorname{tg} \lambda = -L \lambda \quad (3)$$

Rozwiązując je otrzymujemy wartość λ , a następnie:

$$P_{KR} = \left(\frac{2\lambda}{a^*}\right)^2 EJ^* \quad (4)$$

Analogicznie do funkcji ugięcia pręta y określonej w pracy [1], postać wstępnego ugięcia wyraża się wzorem:

$$y_o = A_o \left\{ \sin(k_{KR} x) + \frac{GJ_o k_{KR}}{b_o P_{KR}} [1 - \cos(k_{KR} x)] \right\} \quad (5)$$

A_o jest nieznanym parametrem który wylicza się z warunku: dla $x = \frac{a^*}{2}$, $y_o = W_o$ (patrz

rys.2.2), J_o - moment bezwładności na skręcanie pręta o przekroju prostokątnym (element skręcany rys.2.2d) Podstawiając równanie (5) do (1) otrzyma się:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -k^2 A_o \sin(k_{KR} x) - k^2 A_o \frac{GJ_o k_{KR}}{b_o P_{KR}} + k^2 A_o \frac{GJ_o k_{KR}}{b_o P_{KR}} \cos(k_{KR} x) + k^2 \frac{M_o}{P} \quad (6)$$

gdzie: $k_{KR} = \sqrt{\frac{P_{KR}}{EJ^*}}$

Korzystając z warunków brzegowych:

$$y_{(x=0)} = 0 \quad (7)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=0)} = \vartheta = \varphi \quad (8)$$

otrzymujemy rozwiązanie równania (6) postaci:

$$y(x) = \frac{A_o \alpha}{1 - \alpha} \left\{ \frac{\beta}{k_{KR}} \left[\frac{1}{\alpha} \cos(kx) - \cos(k_{KR} x) \right] + \sin(k_{KR} x) - k_{KR} \sin(kx) \right\} + \frac{M_o}{P} [1 - \cos(kx) + \beta k^2] \quad (9)$$

$$\text{gdzie: } \beta = \frac{GJ_o}{EJ^* b_o}; \quad \alpha = \frac{k^2}{k_{KR}^2}$$

Wykorzystując warunek:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=\frac{a^*}{2})} = 0 \quad (10)$$

otrzymujemy:

$$M_o = \frac{A_o \beta P}{k_{KR}} \frac{1}{1 - \alpha} \left[1 + \frac{k^2}{\beta \tan(k \frac{a^*}{2})} - \alpha k_{KR} \frac{\sin(k_{KR} \frac{a^*}{2})}{\sin(k \frac{a^*}{2})} - \frac{k \cos(k_{KR} \frac{a^*}{2})}{\beta \cos(k \frac{a^*}{2})} \right] \quad (11)$$

a następnie wartość maksymalnego ugięcia w kierunku osi y:

$$W = \frac{A_o \beta}{(1 - \alpha) k_k} \left\{ \frac{\beta}{k_{KR}} \left[\cos(k \frac{a^*}{2}) - \alpha \cos(k_{KR} \frac{a^*}{2}) - 1 \right] + \frac{M_o}{P} [1 - \cos(k \frac{a^*}{2}) + \beta k^2] + \frac{A_o \alpha}{(1 - \alpha)} [\sin(k_{KR} \frac{a^*}{2}) - \sin(k \frac{a^*}{2})] \right\} \quad (12)$$

Obliczenia modelu prętowego dokonano w sposób numeryczny przy pomocy programu MathCad 5.0 Plus. Parametry zastępcze modelu prętowego (b_o, J^*, a^*) przedstawione w pracy [1] podaje tablica 1 oraz wzory (13) i (14).

Tablica 1

b_w	2	7	12	17	22	27	32	37
b_o/b_w	4.85	1.77	1.28	1.09	0.99	0.94	0.92	0.89

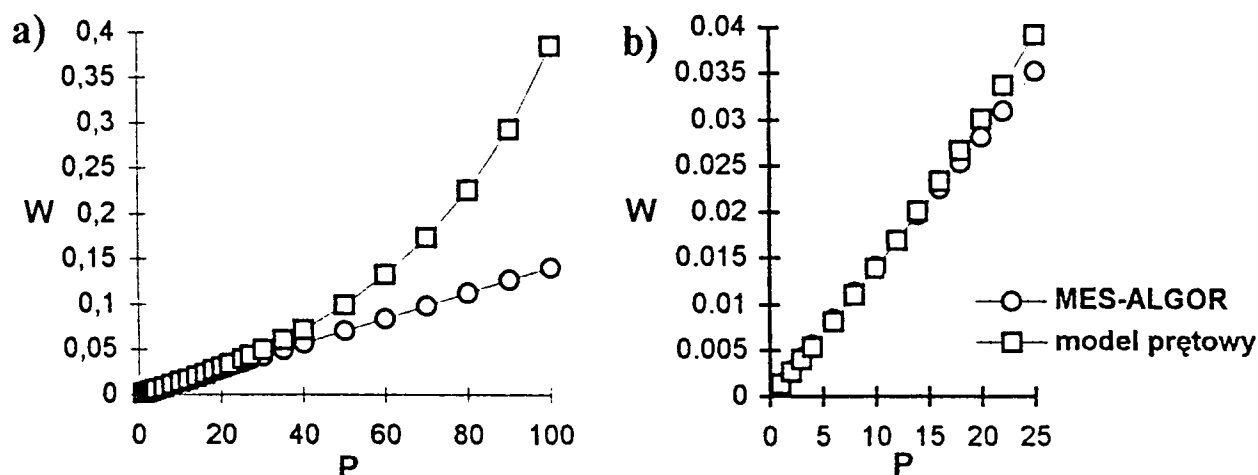
$$J^* = J_A \gamma + J_S (1 - \gamma) \quad (13)$$

$$a^* = a - a_o \quad (14)$$

$$\text{gdzie: } \gamma = \frac{a - 2a_o - 4g}{a}, \quad J_A = \frac{(b - g)t^3}{12}, \quad J_S = \frac{(b - b_o)t^3}{12}$$

3. Wyniki obliczeń ugięć.

Maksymalne ugięcie (W) w kierunku osi y w funkcji obciążenia P wg. (12) zostało przedstawione na rysunku 3.1 na przykładzie płyty w której $h_w=100$ mm; $b_w=7$ mm.

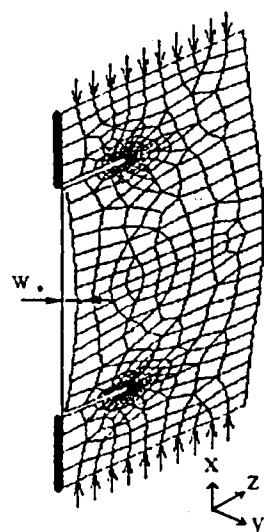


Rys.3.1 Zależność ugięcia maksymalnego w kierunku osi y w funkcji obciążenia.

Fig.3.1 The relationship between the load and the maximal deflection in the y direction.

Dla porównania wyników przedstawiono również obliczenia płyty metodą elementów skończonych (rys.3.2) prowadzone przy pomocy systemu **ALGOR**.

Z porównania wyników widać, że obie metody są dostatecznie zbieżne dla małych obciążeń (patrz rys.3.1b). Ze wzrostem obciążenia (ponad 25N) obserwuje się coraz większe różnice wyników z zastosowania obu metod. Stąd wniosek, że przedstawiona metoda może być stosowane do praktycznych obliczeń gdy $P < P_{KR}$.



Model prętowy ma szereg zalet w porównaniu z MES. Obliczenia modelu prętowego w stosunku do MES są **niesłychanie proste**. Możliwe jest też **rozważanie zagadnienia odwrotnego tzn. konstruowanie płyt o żądanych własnościach**. Prosty model prętowy, przedstawiony w pracy może dobrze zastępować model płytowy (w aspekcie obliczenia siły krytycznej oraz ugięć), co w zdecydowany sposób ułatwia obliczenia takiej płyty.

Rys.3.2. Model połówki płyty (MES)

Fig. 3.2 The FEA model of the considered half of the plate.

6. Literatura

- [1] Ferdynus M. Romanów F., *A stability analysis of plate with a slot, Proceedings of the International Conference on Computer Integrated Manufacturing, Vol.3*, Silesian Technical University Press, Gliwice (1996), 127-134.
- [2] Romanów F., *Stateczność konstrukcji*, (1992),
- [3] Timoshenko S.P., Gere J.M.: *Teoria stateczności sprężystej*, (1963)
- [4] System do obliczeń metodą elementów skończonych "ALGOR".
- [5] Program MathCad 5.0Plus.

Summary

THE BUCKLING LOADS AND DEFLECTIONS OF COMPRESSED PLATES WITH I-SECTION SHAPED SLOT

Thin all of a piece compressed plate can transfer a relatively small load. The loss of stability takes place already under a small load. Load capacity may be increased thanks to suitable forming which consists in making an I-section shaped slot in it and at the same time forming a small deflection of halves of the plate. The deflections of the right and the left half should have contrary senses so that the load would deform the fragments of the plate in the opposite directions (fig 1.1). The aim of this project is to work out a bar model which can efficiently replace a plate with introductory deflection in the bearing of critical force and deflection calculations. The plates loaded with compressing force $2P$ are shown on fig. 2.1 and differ from one another in the height h_w and the width b_w of the slot. The horizontal edge of the plate can shift along the x axis and rotate with respect to the z axis. The considered plate can be represented as a bar model (fig.2.2) Under the load horizontal bars are stranded and vertical ones are compressed. In the supports the equality between the horizontal bar's angle of torsion and the vertical bar's angle of deflection holds.

The differential equation of the deflected axis takes the form (1). For the perfectly straight bars we have $y_0=0$ thus we obtain the value of critical force (4). In the general case the shape of introductory deflection's function describes the formula (5), and the equality (1) takes the form (6). Making use of the conditions (7) and (8) we obtain the shape of deflection (9) and then making use of (10), we obtain the value of maximal deflection (12). The results of maximal deflection's calculations are shown on the fig.3.1. For comparison, the FEA plate models (fig.3.2) were made and computed. Comparing the results we see that these both methods are sufficiently convergent for small loads (see fig.3.1b). As the load increases over 25N, bigger and bigger differences between results given by these methods can be observed. The bar model has a number advantages in comparison with FEA among other things it is significantly simpler. Moreover it allows to construct plates with required features.

INFLUENCE OF INITIAL IMPERFECTIONS ON THE COLLAPSE BEHAVIOUR OF BOX-COLUMNS

R. GRADZKI

*Department of Strength and Structures,
Technical University of Łódź, Poland
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź*

In this work the analysis of the post-buckling state in the elasto-plastic range of a box-column subjected to uniform compression in the elasto-plastic range is presented. The problem is investigated using Rayleigh-Ritz variational method. The stress-strains relations in the plastic range are determined on the basis of the flow theory of plasticity. The proposed method is a combination of analytical and numerical solutions. Different material stress-strain curves and initial imperfections such: out-of-flatness and residual stresses are taken into account. The load-shortening curves for column of different geometrical parameters and material properties are shown in diagrams.

1. Introduction.

Many works have been devoted to the post-buckling analysis of thin-walled box-column subjected to different types of loading in the elastic range (3). It is known that to determine the ultimate strength of such girders the analysis of the post-buckling behaviour must be carried out into the plastic range. In aiming to determine the ultimate strength (maximum load carrying capacity) of a plated structure it is necessary to consider geometrical nonlinearities (large deflections) and physical nonlinearities (plastic strains). Therefore the analysis becomes complicated as far as the mathematical solutions are concerned. It is known that initial imperfections (initial out-of-flatness and residual stresses) appearing in real structures reduce the load carrying capacity and must be taken into account during analysis. First attempts of determination of maximum load carrying capacity for girders and columns started in the sixties. Those works were based on the approximate solutions for elasto-plastic plates, the interaction between girder walls was neglected. Among others, Graves-Smith's work (1), in which the analysis of post-buckling behaviour in the elasto-plastic range of a rectangular column has been presented, is very distinguished. In the previous works the author has demonstrated load-shortening curves in the elasto-plastic range for plates (2) and box-column (5), initially unflat, subjected to uniform compression. The aim of this paper is to analyse the post-buckling state of a rectangular column working in the elasto-plastic range. The present research extends this work to materials having a rounded stress-strain curve which exhibits continuous strain hardening. In the analysis residual stresses and HAZ softening are taken into account.

2. Main assumptions and constitutive relations.

The column section contained between nodal lines is considered. Due to the axial shortening S the column walls buckle elastically and when the deflections are more pronounced, some parts of plates become plastic. The column cross-section has two axes of symmetry. The column dimensions and coordinate systems are shown in Fig. 1.

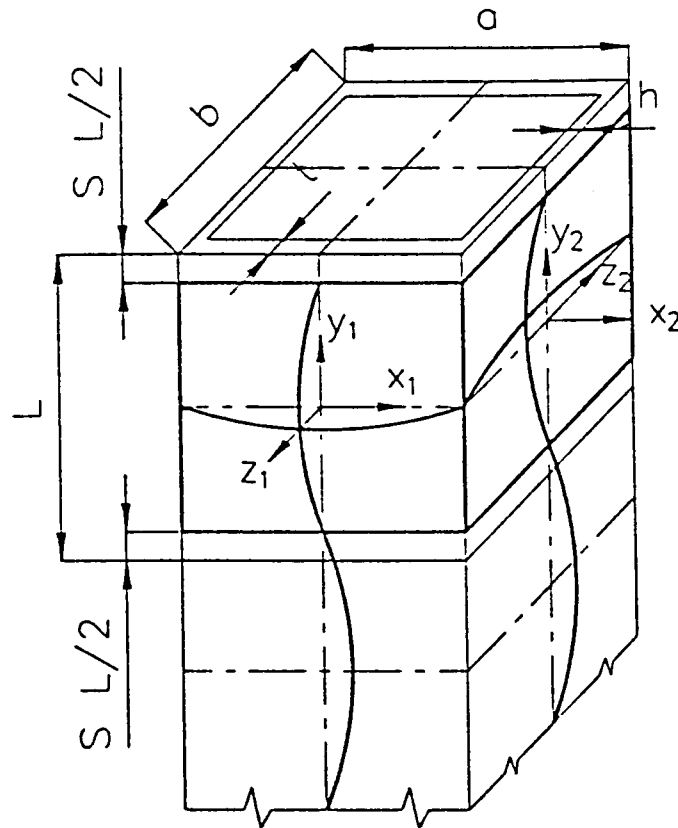


Fig. 1. Box-column dimensions and coordinate systems.

The analysis is based on the large deflection plate theory and it is assumed that the material is isotropic. The usual assumptions of the non-linear plate theory are imposed. Substituting the expressions for deflections into the von Karman-Marguerre equations and taking into account Hooke's law and boundary conditions, the strains at any point of component plates can be found in the elastic range.

In the plastic range following assumptions are made:

- the material is isotropic, with non-linear strain hardening and obeys Huber-Mises Yield Criterion
- all assumptions of large deflection plate theory still hold
- the forms of displacement functions are the same in the elastic and plastic range
- according to the plastic flow theory, the plastic strain increments are described by the Prandtl-Reuss equations.

It was proved by Graves-Smith in his work (4) that it is possible to apply the variational method to the elasto-plastic plates undergoing finite deflections. This method has been used in many works. The value of energy increment is calculated numerically, next, the numerical minimisation of the energy functional is performed versus independent deflection parameters. The average stress corresponding to the load applied to the column is obtained numerically, using the Principle of Virtual Work.

3. Material stress-strain curve, residual stresses.

In the studies concerning the stability of structures in the elasto-plastic range it is essential to describe the shape of the uniaxial stress-strain curve of a material. As is known from the mechanics of materials the experimental uniaxial tension test is the simplest way to obtain the actual relation between stress σ and strain ϵ . Accurate analytical description of a stress - strain seems to be almost impossible or would require very sophisticated mathematical functions which in turn could complicate the solution of a problem. In the theory of plasticity a lot of approximated (σ - ϵ) relations are proposed. In this paper two types of relationships have been considered : Needleman-Tvergaard formula for materials having gradual yield and elastic-perfectly plastic relation for mild steel.

Plates which are parts of thin-walled structures are subjected to many manufacturing processes which are sources of initial geometrical imperfections and residual stresses. These processes are very complicated and difficult to measure or to describe in an analytical way. The influence of residual stresses on the elasto-plastic stability of thin plates have been found to be significant. The analyses have been concerned with a set of residual stresses acting in the direction of the applied load and produced by welds laid simultaneously along the unloaded edges. It follows from the experiments that along welded edges of a box-girder, the stresses are equal to the yield limit and are tensile, while in the middle zones of plates they are compressive. Moreover a uniform distribution of these stresses through the thickness of a plate is observed, which allows one to treat the residual stresses as membrane stresses. In the present work a rectangular block of distribution of residual stresses is taken into account in the analysis (c - with of residual tension block at one edge).

4. Results of numerical calculations.

The results of numerical calculations are presented in figures as non-dimensional relationships between the average stress σ^* and the shortening S^* of column.

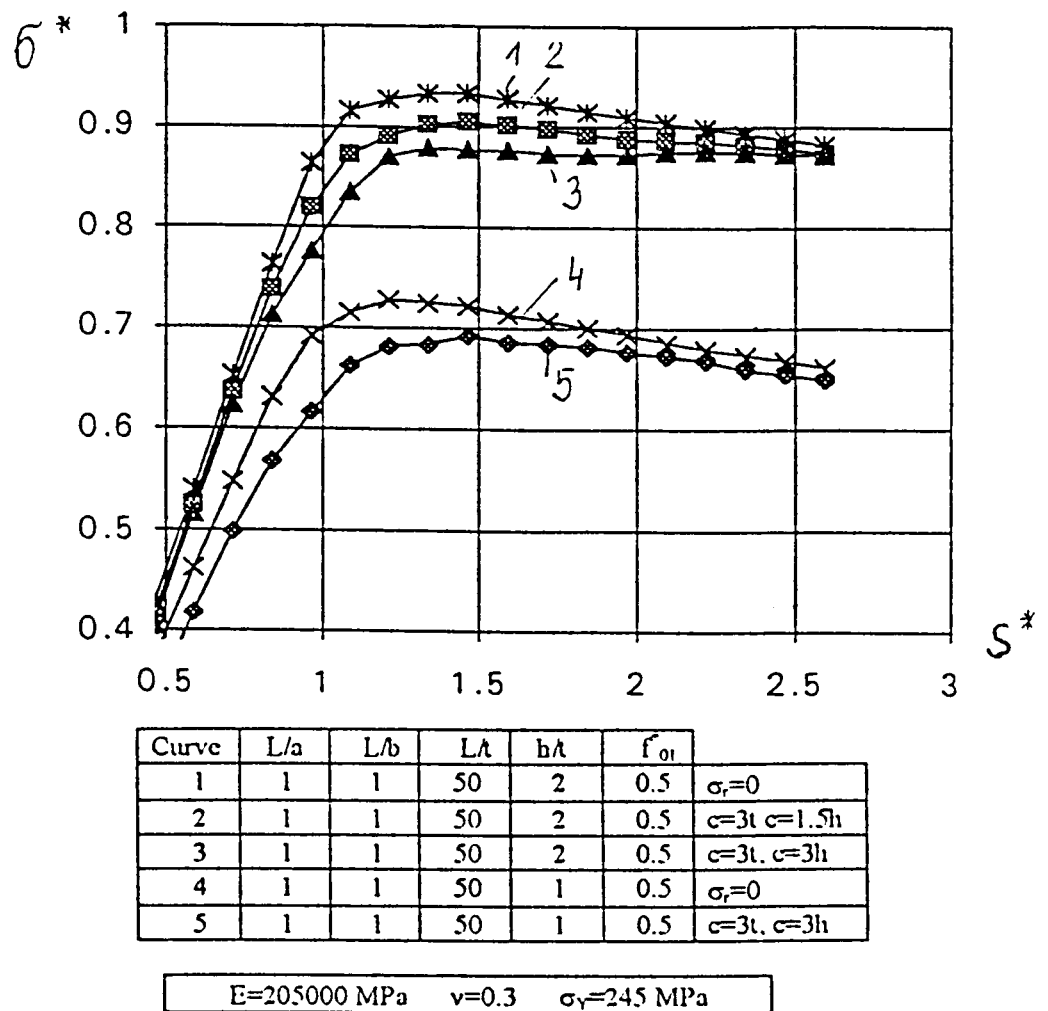


Fig.2. Influence of residual stresses and HAZ softening on L-S curves.

References

1. Graves Smith, T.R., *The ultimate strength of thin-walled columns of arbitrary length*, "Thin-walled Steel Structures", Crosby-Lockwood, London, 1968
2. Grądzki, R., Kowal-Michalska, K., *Collapse behaviour of plates*, "Thin-walled Structures", 6(1988)
3. Królak, M., Kołakowski, Z., *Stateczność i praca w zakresie zakrytycznym cienkościennych dźwigarów skrzynkowych*, "Archiwum budowy maszyn" t.XXVIII, 2, 1981
4. Graves Smith, T.R., *A variational method for large deflection elastoplastic theory in its application to arbitrary flat plates*, "Structure Solid Mechanics and Eng. Design" 1971
5. Grądzki R., Kowal-Michalska K., *Stan zakrytyczny w obszarze sprężystym i sprężysto-plastycznym...*, VII Symposium Stateczności Konstrukcji, Bielsko-Biała, 7-9 grudnia 1994

KORELACJA NOŚNOŚCI SPRĘŻYSTEJ I PLASTYCZNEJ SŁUPÓW METALOWYCH ŚCISKANYCH OSIOWO

MARIAN GWÓZDŹ

*Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland*

Przedstawiono uogólnioną formułę nośności sprężysto-plastycznej prętów metalowych, wykonanych ze stopów o nieliniowej zależności $\sigma - \epsilon$, ściskanych osiowo. Odpowiednie wzory wyprowadzono wykorzystując klasę Morgensterna rozkładów dwuwymiarowych, o brzegowych rozkładach Weibulla. Wykazano redukcję nośności o ok. 10% dla słupów metalowych, dla których korelacja nośności sprężystej i plastycznej jest istotna (słupy ze stali stopowych i stopów Al).

I. Własności mechaniczne stopów konstrukcyjnych

Wyroby przemysłu metalurgicznego wykorzystywane na konstrukcje budowlane można podzielić ze względu na ich właściwości fizyczne na dwie grupy:

- stale niskowęglowe posiadające wyraźną granicę plastyczności f_y ,
- stale niskostopowe i stopy aluminium, a także stale niskowęglowe w temperaturach pożarowych, dla których określa się umowną granicę plastyczności, której miarą jest najczęściej naprężenie próbki rozciąganej $\sigma_{0,2} = f_y$ odpowiadające odkształceniom trwałym $\epsilon_0 = 0,2\%$.

Stopy pierwszej grupy dobrze modeluje bilinearny wykres ciała sprężysto-plastycznego bez wzmocnienia plastycznego, który opisują dwa parametry: moduł sprężystości podłużnej E i granica plastyczności f_y . Reprezentatywne badania statyczne, przeprowadzone w latach 1976-80 w Politechnice Krakowskiej [5], dostarczyły wiarygodną prognozę wytrzymałości polskich stali konstrukcyjnych. Z badań tych wynika stosunek mediany granicy plastyczności do wartości charakterystycznej rozumianej jako minimum hutnicze $f_y/f_{yk} = 1,22$ oraz współczynnik zmienności granicy plastyczności $v_R = 10\%$.

Stopy drugiej grupy można opisać trójparametrową formułą Ramberga-Osgooda

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E_0} + \left(\frac{\sigma}{f_y} \right)^m \quad (1)$$

- gdzie:
- E_0 - moduł "początkowy", który określa kąt nachylenia stycznej do krzywej (1) w punkcie 0,
 - ϵ_0 - umowne odkształcenie trwałe,
 - f_y - umowna granica plastyczności o wartości centralnej f_y lub charakterystycznej f_{yk} , odpowiadająca ϵ_0 .

Tablica 1. Oszacowanie parametrów formuły Ramberga-Osgooda

Znak stopu	Moduł początkowy E_0 [GPa]	Umowne odkształcenie ϵ_0	f_y/f_{yk}	Wykładnik m
1	2	3	4	5
18G2	205	0,002	1,22	15
PA7	70			$10 \div 0,1 f_{yk}$
St3 $T > 300$ K	$205 \eta_E$			$1 + \left(\frac{600}{T}\right)^2$

Do grupy stopów charakteryzujących się nieliniową zależnością $\sigma - \epsilon$ należą także stale niskowęglowe, które w temperaturze podwyższonej $T > 300$ K tracą wyraźną granicę plastyczności [2] i mogą być opisane wzorem (1). Oszacowania parametrów formuły Ramberga-Osgooda dla stali konstrukcyjnych i stopu aluminium PA7 zestawiono w tablicy 1, w której η_E oznacza współczynnik konwersji modułu sprężystości wg PN-90/B-03200.

2. Dwuwymiarowa dystrybuanta nośności słupów

Formuła nośności pręta z imperfekcjami geometrycznymi, przyjęta w eurokodzie EC 3, a także jednolita formuła wyboczenia, przyjęta w normie krajowej PN-90/B-03200, nie uwzględniają teorii wyboczenia Engessera-Kármána szczególnie ważnej dla materiałów bez wyraźnej granicy plastyczności. Nieliniowa zależność $\sigma - \epsilon$ opisująca własności fizyczne stali stopowych i stopów Al powoduje, że losowa nośność plastyczna N_{pl} i nośność sprężysta N_{cr} są wzajemnie zależne nie tylko poprzez wymiary geometryczne prętów, ale także ze względu na zależność funkcyjną (1). Rozwiązanie probabilistyczne polega na określeniu nośności granicznej N_b jako mniejszej z dwóch nośności: plastycznej N_{pl} i krytycznej N_{cr} .

$$N_b = \min(N_{pl}, N_{cr}) \quad (2)$$

Kwestią podstawową dla założeń modelowych jest ocena wzajemnej korelacji zmiennych losowych N_{pl} i N_{cr} . W przypadku ogólnym, warunek (2) opisuje dystrybuanta $F(N_{pl}, N_{cr})$ dwuwymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa, którą można aproksymować za pomocą klasy Morgensterna rozkładów dwuwymiarowych [1] :

$$F(N_{pl}, N_{cr}) = 1 - \left[1 - F(N_{pl}) \right] \left[1 - F(N_{cr}) \right] \left[1 + \alpha \left[1 - F(N_{pl}) \right] \left[1 - F(N_{cr}) \right] \right] \quad (3)$$

gdzie $\alpha \in < -1, +1 >$ oznacza parametr klasy.

Jeśli we wzorze (3) przyjmimy dystrybuanty brzegowe Weibulla o parametrach $\hat{N}_{pl}$, ν_{pl} i $\hat{N}_{cr}$, ν_{cr} :

$$F_i(N_i) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{N_b}{\hat{N}_i} \right)^{1/\nu_i} \right] \quad i = pl, cr \quad (4)$$

to klasa dwuwymiarowych rozkładów o brzegowych rozkładach Weiulla ma dystrybuantę postaci:

$$F(N_{pl}, N_{cr}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{pl}} \right)^{1/\nu_{pl}} - \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{cr}} \right)^{1/\nu_{cr}} \right] \times \left\{ 1 + \alpha \exp \left[- \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{pl}} \right)^{1/\nu_{pl}} - \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{cr}} \right)^{1/\nu_{cr}} \right] \right\} \quad (5)$$

Dla rozkładu prawdopodobieństwa opisanego dystrybuantą (5) można obliczyć współczynnik korelacji ρ , który nie zależy od ekstremalnych wartości charakterystycznych rozkładów brzegowych, a tylko od ich współczynników zmienności ν_{pl} , ν_{cr} wg wzoru:

$$\rho = \alpha \frac{(1 - 2^{-\nu_{pl}})(1 - 2^{-\nu_{cr}})\Gamma(1 + \nu_{pl})\Gamma(1 + \nu_{cr})}{\left[\left[\Gamma(1 + 2\nu_{pl}) - \Gamma^2(1 + \nu_{pl}) \right] \left[\Gamma(1 + 2\nu_{cr}) - \Gamma^2(1 + \nu_{cr}) \right] \right]^{1/2}} \quad (6)$$

gdzie $\Gamma(.)$ - funkcja gamma Eulera

Tablica 2. Współczynniki korelacji zmiennych losowych N_{pl} i N_{cr}

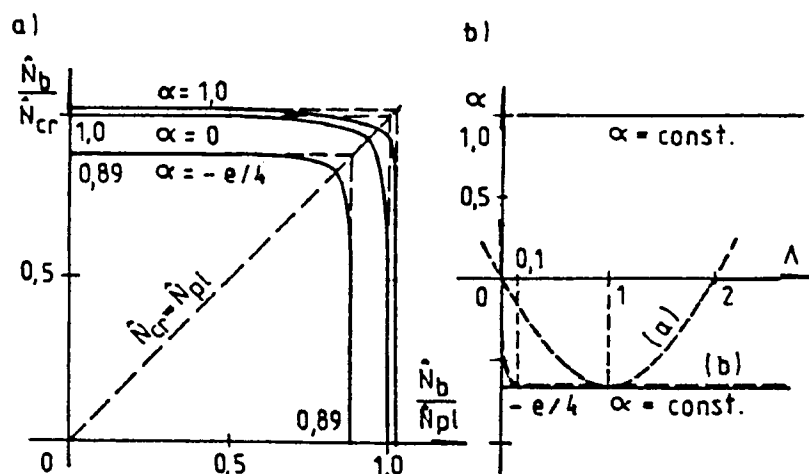
ν_{cr}	0,50	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
$ \rho/\alpha $	0,324	0,328	0,328	0,326	0,325	0,322	0,317

W tablicy 2 zestawiono wartości współczynników korelacji (6) odpowiadające współczynnikom zmienności $\nu_{cr} (\Lambda) \leq 0,5$. Otrzymane wyniki wskazują na słabą korelację zmiennych losowych N_{pl} i N_{cr} , nawet dla górnych wartości parametru klasy $\alpha = 1,0$.

Oszacowanie ilościowe wpływu korelacji na nośność sprężysto-plastyczną pręta o nieliniowej charakterystyce $\sigma - \epsilon$, daje wartość charakterystyczna $\hat{N}_b$ dystrybuanty (5) obliczona jako kwantyl na poziomie prawdopodobieństwa $1 - e^{-1}$:

$$\left(\frac{N_b}{N_{pl}} \right)^{1/\nu_{pl}} + \left(\frac{N_b}{N_{cr}} \right)^{1/\nu_{cr}} = \ln \left(e + \sqrt{e^2 + 4e\alpha} \right) / 2 \quad (7)$$

Zakres ważności wzoru (7) jest ograniczony wartościami parametru klasy rozkładu prawdopodobieństwa $1,0 \leq \alpha \leq -e/4$. Na rys.1/a pokazano wykresy krzywych (7) dla skrajnych oszacowań parametru klasy $\alpha = \text{const.}$ wg rys.1/b oraz przykładowych wartości współczynników zmienności $\nu_{pl} = \nu_{cr} = 0,10$.



Rys. 1. Korelacja nośności sprężystej i plastycznej w funkcji parametru α .
Fig. 1. Correlation of elastic and plastic resistance versus α parameter.

Dolna wartość parametru $\alpha = -e/4$ prowadzi do redukcji skorelowanych nośności o 11% w porównaniu z nośnością losowo niezależnych N_{pl} i N_{cr} , tzn. gdy $\alpha = 0$. Korelacja dodatnia zwiększa nośność o ok. 2 %.

3. Jednolita formuła nośności słupów metalowych

Wyprowadzenie równań krzywych wyboczenia jest szczególnie proste, gdy zakłada się losową niezależność N_{pl} i N_{cr} oraz równe i stałe współczynniki zmienności rozkładów brzegowych (4). Z równania (7) można wtedy obliczyć ekstremalną wartość charakterystyczną $\hat{N}_b$:

$$\hat{N}_b = \left(v \sqrt{\frac{1}{\hat{N}_{pl}}} + \frac{1}{\hat{N}_{cr}} \right)^{-v} = \hat{N}_{pl} / (1 + \Lambda^{2/v})^v = \hat{N}_{pl} \hat{\phi}_0 \quad (8)$$

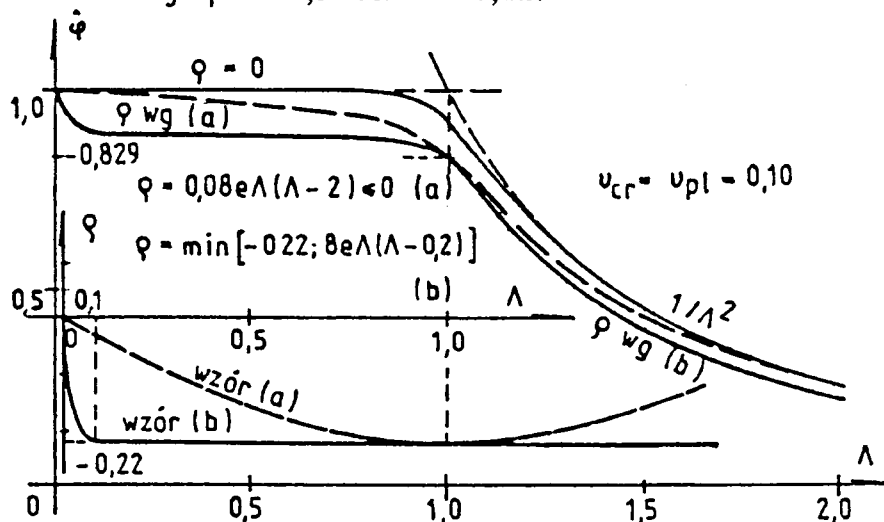
gdzie:

$$\hat{\phi}_0 = 1 / (1 + \Lambda^{2/v})^v, \quad \Lambda = \sqrt{\hat{f}_y / \pi^2 \hat{E}} \lambda \quad (9)$$

Jednolita formuła (8) jest identyczna ze wzorem J. Murzewskiego, który został wyprowadzony m.in. w pracy [3] i wprowadzony do normy PN-90/B-03200. Pokazana na rys. 2 krzywa wyboczenia słupów (9) stanowi oszacowanie górne nośności sprężysto-plastycznej. Oszacowanie dolne można otrzymać ze wzoru (7), przyjmując $v_{pl} = v_{cr} = v$ oraz odpowiednią wartość stosunku ρ/α według tablicy 2:

$$\hat{N}_b = \left(v \sqrt{\frac{1}{\hat{N}_{pl}}} + \frac{1}{\hat{N}_{cr}} \right)^{-v} \ln^v \left(e + \sqrt{e^2 + 4e\alpha} \right) / 2 \quad (10)$$

Największa redukcja nośności zachodzi, gdy parametr klasy $\alpha = -e/4$, co dla przykładowej wartości współczynnika zmienności $v = 0,10$ prowadzi do współczynnika korelacji $\rho = -0,322e/4 = -0,22$.



Rys. 2. Bezwymiarowe krzywe wyboczenia słupów w funkcji współczynnika korelacji ρ .
Fig. 2. Nondimensional buckling curves of columns versus correlation coefficient ρ .

Ze wzoru (10) wynika formuła nośności sprężysto-plastycznej wyrażona we współrzędnych bezwymiarowych w postaci

$$\hat{\phi} = \hat{\phi}_0 \ln^v \left(e + \sqrt{e^2 + 4e\alpha} \right) / 2 = \frac{\ln^v \left(e + \sqrt{e^2 + 4e\alpha} \right) / 2}{\left(1 + \Lambda^{2/v} \right)^v} \quad (11)$$

Wykres krzywej wyboczenia słupów (11) przedstawiony na rys. 2 linią ciągłą, otrzymano dla prawie stałych wartości współczynnika korelacji, obliczonych ze wzoru (b) (krzywa dolna w układzie osi współrzędnych $\rho - \Lambda$). Przeprowadzone obliczenia numeryczne wykazały redukcję nośności względem krzywej górnej o 11%.

Zgodność jakościową teoretycznych i empirycznych krzywych wyboczenia słupów można uzyskać poprzez modyfikację funkcji współczynnika korelacji, jak to uczyniono na rys. 2. Przykładowej funkcji $\rho(\Lambda)$ według wzoru (a) odpowiada funkcja parametru klasy $\alpha(\Lambda)$ pokazana linią przerywaną (a) na rys. 1/b oraz pośrednia krzywa współczynników wyboczeniowych na rys. 2.

Przyjęte powyżej założenie o równych współczynnikach zmienności nośności plastycznej i krytycznej w świetle badań doświadczalnych jest poprawne. Dowodzą tego uśrednione wartości statystyk empirycznych zgromadzonych przez Y. Fukumoto. W obszarze nasilonej erozji nośności słupów, dla smukłości średnich, proste $v = \text{const.}$ dobrze aproksymują wyniki badań doświadczalnych. Dla smukłości małych i dużych erozja zanika, stąd odstępstwa od założeń modelowych w tych przedziałach smukłości tracą na znaczeniu.

4. Uwagi końcowe

Przeprowadzona analiza nośności losowej prętów metalowych ściskanych osiowo wykazała, że korelacja pomiędzy nośnością plastyczną i sprężystą jest istotna nawet jeśli jest słaba. Oszacowanie ilościowe, jakie wynika z wyprowadzonych formuł, wskazuje na redukcję nośności słupów wykonanych ze stopów o nieliniowej charakterystyce $\sigma - \epsilon$ o ok. 1 klasę w skali imperfekcji wg klasyfikacji PN-90/B-03200. Skorelowaną nośność sprężysto-plastyczną należy uwzględnić projektując konstrukcje stalowe w sytuacji projektowej pożaru [4] oraz konstrukcje aluminiowe w każdej sytuacji projektowej.

Literatura

1. Firkowicz S., Metody statystyczne w sterowaniu jakością., Ossolineum, Wrocław 1977.
2. Kosiorek M., Charakterystyki mechaniczne stali budowlanych w podwyższonych temperaturach., Prace ITB, Nr 2 (50), 1984.
3. Murzewski J., Teoria nośności losowej konstrukcji prętowych., PWN, Warszawa 1976.
4. Murzewski J., Gwóźdź M., Nośność słupów stalowych w temperaturach pożarowych., XXXVII Konf Nauk. KILiW PAN, Krynica 1991.
5. Sowa A., Statystyka wytrzymałości stali a bezpieczeństwo konstrukcji., Politechnika Krakowska, Zeszyt Naukowy, Nr 2, 1980.

Summary

CORRELATION OF ELASTIC AND PLASTIC RESISTANCE OF AXIALLY LOADED METAL COLUMNS

The generalized formula has been used for elastic-plastic resistance of axially compressed metal bars made of alloys with nonlinear $\sigma - \epsilon$ relationship. Suitable equation was derived basing on the Morgenstern class of bivariate distributions with Weibull marginal distributions

$$F(N_{pl}, N_{cr}) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{pl}} \right)^{1/\nu_{pl}} - \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{cr}} \right)^{1/\nu_{\sigma}} \right] \times \left\{ 1 + \alpha \exp \left[- \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{pl}} \right)^{1/\nu_{pl}} - \left(\frac{N_b}{\hat{N}_{cr}} \right)^{1/\nu_{\sigma}} \right] \right\}$$

where class parameter $\alpha \in <-1, 1>$, Fig. 1b.

It has been proved that the reduction of resistance for metal columns made of alloy steels or aluminium alloys resistance is essential. Nondimensional buckling curves are given as follows

$$\hat{\varphi} = \ln^{\nu} \frac{1}{2} \left(e + \sqrt{e^2 + 4e\alpha} \right) / \left(1 + \Lambda^{2/\nu} \right)^{\nu}.$$

ON A STABILITY OF THIN MICROPERIODIC PLATES

JAROSŁAW JĘDRYSIAK

*Department of Structural Mechanics, University of Technology, Łódź
al. Politechniki 6, 90-924 Łódź, Poland*

The structural macromechanics is applied to investigate the stability of a composite plate. Thin elastic plates with microperiodic structure in planes parallel to the midplane are examined. A new refined approach is used to the problem of the dynamic stability of periodic plates. Some special results are shown.

1. Introduction

The aim of our considerations is a dynamic stability of thin microperiodic plates. The plates are assumed to have material and/or inertial properties, which are periodic functions in planes parallel into the midplane. In these plates we can distinguish a small (comparing to the minimum characteristic size of the plate in the midplane) repeated element. The example of this plate is presented on Fig. 1.1.

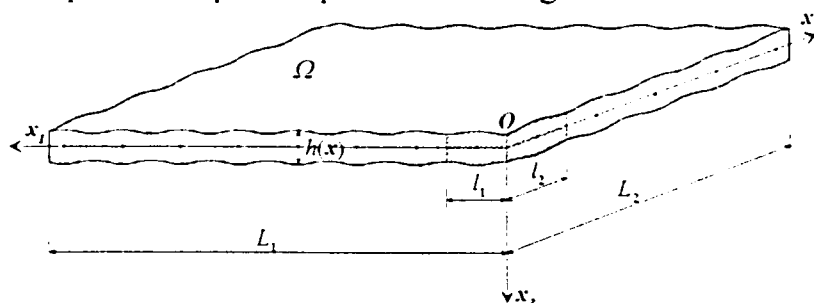


Fig. 1.1. An example of a periodic plate

Rys. 1.1. Przykład płyty periodycznej

The dynamic problems for periodic plates can be described by the equations of three-dimensional micromechanics, which are too complicated to constitute the basis for investigations of most engineering problems. Since they involve highly oscillating coefficients. This is why the simplified models, called homogenized or local models, are used to investigate these problems. Local models describe periodic plates using constant effective stiffnesses and averaged mass densities. However, these models are not able to describe some important features of the dynamic plate behaviour because they neglect the length-scale effect, which plays a crucial role in the description non-stationary processes.

In this paper we will take into account this effect of the microstructure size on the dynamic stability. Our considerations are based on the structural (refined) macrodynamics of periodic materials and structures (2, 3), in particular of microperiodic plates (1). Using assumptions of the refined theory, which were presented in the aforementioned

ned papers, and the assumptions of the Kirchhoff plate theory the governing equations describing the dynamic plate behaviour were derived in (1).

These equations we will adapt here for problems of the dynamic stability, which makes it possible to investigate the length-scale effect on the dynamic macrobehaviour of microperiodic plates loaded in their midplanes.

2. Preliminaries

Let $0x_1x_2x_3$ be the orthogonal cartesian coordinate system in the physical space. Setting $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ and $z \equiv x_3$, we assume that the region of underformed plate is defined by $\Omega = \{(\mathbf{x}, z) : -h(\mathbf{x})/2 < z < h(\mathbf{x})/2, \mathbf{x} \in \Pi\}$, where Π is the region of midplane and $h(\mathbf{x})$ is the plate thickness at a point $\mathbf{x} \in \Pi$. We shall denote by $\Delta := (0, l_1) \times (0, l_2)$ the periodicity unit cell on $0x_1x_2$ plane, where l_1, l_2 are length dimensions sufficiently small compared to L_Π , which is the minimum characteristic length dimension of Π ($L_\Pi = \min(L_1, L_2)$). The size of the cell is described by the *microstructure length parameter* l (defined by $l = \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$, where $l \ll L_\Pi$). Subscripts $\alpha, \beta, \dots (i, j, \dots)$ run over 1, 2 (over 1, 2, 3) and indices $A, B, \dots$ run over $1, \dots, N$. Summation convention holds for all aforementioned indices. We assume that $h(\mathbf{x})$ is a Δ -periodic function of $\mathbf{x}$ and all material and inertial properties of the plate (ρ - a mass density, $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ - terms of an elastic modulae tensor) are also Δ -periodic functions of $\mathbf{x}$ and even functions of z . For an arbitrary integrable Δ -periodic function $f(\cdot)$ we define $\langle f \rangle := (l_1 l_2)^{-1} \int_{\Delta} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, where $\langle f \rangle$ is an averaged (constant) value of f . By p^+, p^- tractions (in the x_3 -axis direction) on upper and lower plate boundaries, respectively, will be denoted and b stands for the constant body force. We also define t as the time coordinate.

2.1. Fundamental relations of the refined plate theory

We assume that every plane $z = \text{const}$ is a material symmetry plane ($a_{3\alpha\beta\gamma} = 0, a_{333\gamma} = 0$) and define $c_{\alpha\beta\gamma\delta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} - a_{\alpha\beta 33} a_{\gamma\delta 33} (a_{3333})^{-1}$.

Under the well known denotations this theory will be described by the following relations.

- *The kinematic constrains:*

$$u_\alpha(\mathbf{x}, z, t) = -z w_{,\alpha}(\mathbf{x}, t), \quad u_3(\mathbf{x}, z, t) = w(\mathbf{x}, t), \quad (1)$$

where $w(\mathbf{x}, t)$ are displacements of points of the midplane assumed in the form

$$w(\mathbf{x}, t) = W(\mathbf{x}, t) + g^i(\mathbf{x}) l^i(\mathbf{x}, t), \quad (2)$$

where functions $W(\mathbf{x}, t)$, $l^i(\mathbf{x}, t)$ are macrodeflections and inhomogeneity correctors,

respectively, which are macrofunctions (cf. (1)). Moreover, $g^A(x)$ are postulated *a priori* microshape functions defining the class of disturbances of the plate deflections.

- *The strain-displacement equations:*

$$e_{\alpha\beta} = u_{(\alpha,\beta)} + \frac{1}{2} W_{,\alpha} W_{,\beta}, \quad (3)$$

where the non-linear term depends only on macrodeflections.

- *The stress-strain relations for the plane stress:*

$$s_{\alpha\beta} = c_{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta}, \quad s_{33} = 0. \quad (4)$$

- *The equation of motion (weak form):*

$$\begin{aligned} \int_{\Pi-h/2}^{h/2} \int \rho \ddot{u}_i \delta u_i dz da + \int_{\Pi-h/2}^{h/2} \int (s_{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + 2s_{\alpha 3} \delta e_{\alpha 3}) dz da = \\ = \int_{\Pi} [p^- \delta u_3(x, \frac{h}{2}) + p^+ \delta u_3(x, -\frac{h}{2})] da + b \int_{\Pi-h/2}^{h/2} \int \rho \delta u_3 dz da, \end{aligned} \quad (5)$$

which has to be satisfied for every admissible virtual fields δu and $\delta e_{\alpha\beta}$ restricted by (1), (2), (3).

For microperiodic plates from Eqs (1)-(5) the governing equations of the refined (structural) theory were derived in (1). At the same time the *macromodelling hypothesis* was applied, which states that for every macrofunction F in calculation of averages over Δ terms $\mathcal{O}(\varepsilon_F)$ can be neglected, where ε_F is a computational accuracy parameter related to an arbitrary macrofunction F .

In the subsequent section the governing equations of the structural theory for microperiodic plates with forces in the midplane will be obtained.

3. The governing equations

Under denotations

$$\mu \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad j \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz, \quad d_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z^2 c_{\alpha\beta\gamma\delta} dz, \quad (6)$$

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, \quad D_{\alpha\beta}^A \equiv \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^A \rangle, \quad D^{AB} \equiv \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta}^A g_{,\gamma\delta}^B \rangle, \quad (7)$$

where $\mu, j, d_{\alpha\beta\gamma\delta}$ are Δ -periodic functions and using the *macromodelling hypothesis* we shall obtain

- *the constitutive equations*

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= D_{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\gamma\delta} + D_{\alpha\beta}^B V^{B^*}, \\ M^A &= D_{\gamma\delta}^A W_{,\gamma\delta} + D^{AB} V^{B^*}, \end{aligned} \quad (8)$$

- *the equations of motion*

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - N_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{W} - \langle j \rangle \ddot{W}_{,\alpha\alpha} + \langle \mu g^B \rangle \ddot{V}^{B^*} - \langle j g_{,\alpha}^B \rangle \ddot{V}_{,\alpha}^{B^*} = p + b \langle \mu \rangle, \\ M^A + \langle \mu g_{,\alpha}^A \rangle \ddot{W} + \langle j g_{,\alpha}^A \rangle \ddot{W}_{,\alpha} + \langle \mu g_{,\alpha}^A g^B \rangle \ddot{V}^{B^*} + \langle j g_{,\alpha}^A g_{,\alpha}^B \rangle \ddot{V}_{,\alpha}^{B^*} = b \langle \mu g_{,\alpha}^A \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

where $N_{\alpha\beta}$ are membrane forces acting in the plate midplane. The underlined terms in (9) describe the length-scale effect on the dynamic stability of periodic plates. The new basis unknowns are macrodeflections W and inhomogeneity correctors V^A , $A=1, \dots, N$.

Let us consider a thin plate made of an isotropic homogeneous material and having the Δ -periodic thickness h . In this case under the denotation

$$B \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

where E , ν are the constant Young modulus and the constant Poisson ratio, respectively, from Eq (6)₃ and Eq (7)₁ we obtain

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} = \langle B[\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}(1-\nu) + \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}\nu] \rangle,$$

and after substituting the right-hand sides of Eqs. (8) to Eqs. (9) the resulting system of governing equations can be written in the form

$$\begin{aligned} & \langle B \rangle W_{,\alpha\alpha\beta\beta} - N_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{W} - \langle j \rangle \ddot{W}_{,\alpha\alpha} + \dots \\ & + D_{\alpha\beta}^B V_{,\alpha\beta}^B + \langle \mu g^B \rangle \ddot{V}^B - \langle j g_{,\alpha}^B \rangle \ddot{V}_{,\alpha}^B = p + b < \mu \rangle, \\ & D_{\gamma\delta}^A W_{,\gamma\delta} + \langle \mu g^A \rangle \ddot{W} + \langle j g_{,\alpha}^A \rangle \ddot{W}_{,\alpha} + \\ & + D^{AB} V^B + \langle \mu g^A g^B \rangle \ddot{V}^B + \langle j g_{,\alpha}^A g_{,\alpha}^B \rangle \ddot{V}^B = b < \mu g^A \rangle. \end{aligned} \quad (10)$$

The above equations constitute the basis for subsequent investigations.

4. Applications

In the order to estimate the length-scale effect on the dynamic stability of a microperiodic plate we will investigate a stability of the rectangular isotropic homogeneous plate, simply supported on the opposite edges, and having the Δ -periodic thickness. We will assume that body force b can be neglected. To simplify the model only one microshape function $g(x_1, x_2) = g^1(x_1, x_2) = l^2[\cos(2\pi x_1/l_1)\cos(2\pi x_2/l_2) + c]$, which satisfies the condition $\langle \mu g \rangle = 0$ will be introduced. It can be shown that $\langle j g_{,1} \rangle = 0$. Hence, setting $V \equiv V^1$, $D_{\alpha\beta} \equiv D_{\alpha\beta}^A$, $D \equiv D^{AB}$ equations (10) take the form

$$\begin{aligned} & \langle B \rangle W_{,\alpha\alpha\beta\beta} - N_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} + \langle \mu \rangle \ddot{W} - \langle j \rangle \ddot{W}_{,\alpha\alpha} + D_{\alpha\beta} V_{,\alpha\beta} = p, \\ & D_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} + D V + \langle \mu (g)^2 \rangle \ddot{V} + \langle j (g_{,\alpha}) \rangle \ddot{V}_{,\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

We can show that $D_{12} = D_{21} = 0$. Solutions to Eqs. (11) can be assumed in the form

$$\begin{aligned} W &= \sum_{m=1, n=1}^{\infty} a_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \cos(\omega t), \\ V &= \sum_{m=1, n=1}^{\infty} b_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (12)$$

provided that external loads are given by

$$p = \sum_{m=1, n=1}^{\infty} p_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \cos(\omega t), \quad (13)$$

where $\alpha_m \equiv m\pi/L_1$, $\beta_n \equiv n\pi/L_2$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$ and ω is a vibration frequency.

Substituting the right-hand sides of formulae for W , V , p into Eqs. (11) and assuming that $N_{12}=0$ we obtain the system of linear algebraic equations for coefficients a_{mn} , b_{mn}

$$\begin{aligned} & \{ < B > [(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2]^2 + N_{11}(\alpha_m)^2 + N_{22}(\beta_n)^2 + \\ & - \{ < \mu > + < j > [(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2] \} \omega^2 a_{mn} - [D_{11}(\alpha_m)^2 + D_{22}(\beta_n)^2] b_{mn} = p_{mn}, \quad (14) \\ & - [D_{11}(\alpha_m)^2 + D_{22}(\beta_n)^2] a_{mn} + \{ D - [< \mu(g)^2 > + < j(g_{,a})^2 >] \omega^2 \} b_{mn} = 0. \end{aligned}$$

Denoting by

$$N_1 \equiv -N_{11}, \quad N_2 \equiv -N_{22}, \quad (15)$$

the critical values of forces in the plate midplane the criterion of the loss of dynamic stability can be written in the form

$$\begin{vmatrix} < B > [(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2]^2 - N_1(\alpha_m)^2 - N_2(\beta_n)^2 + & -[D_{11}(\alpha_m)^2 + D_{22}(\beta_n)^2] \\ -\{ < \mu > + < j > [(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2] \} \omega^2 & \\ -[D_{11}(\alpha_m)^2 + D_{22}(\beta_n)^2] & D - [< \mu(g)^2 > + < j(g_{,a})^2 >] \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

From the above formula, assuming that the critical forces are acting only in the x_1 -axis direction ($N_2=0$) we will obtain the following formula for N_1

$$\begin{aligned} N_1 = < B > \frac{[(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2]^2}{(\alpha_m)^2} - \frac{< \mu > + < j > [(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2]}{(\alpha_m)^2} \omega^2 + \\ - \frac{[D_{11}(\alpha_m)^2 + D_{22}(\beta_n)^2]^2}{(\alpha_m)^2 [D - (< \mu(g)^2 > + < j(g_{,a})^2 >) \omega^2]}, \end{aligned} \quad (17)$$

which takes into account the length-scale effect in the dynamic stability. This effect is described by the underlined terms.

The above analysis was carried out in the framework of the structural theory. In the order to pass to the local theory we will neglect the underlined terms in Eqs. (11).

After some manipulations the formula for the critical force $\tilde{N}_1$ in the x_1 -axis direction takes the form

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 = < B > \frac{[(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2]^2}{(\alpha_m)^2} - \frac{< \mu > + < j > [(\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2]}{(\alpha_m)^2} \omega^2 + \\ - \frac{[D_{11}(\alpha_m)^2 + D_{22}(\beta_n)^2]^2}{(\alpha_m)^2 D}. \end{aligned} \quad (18)$$

We can observe qualitative differences between formulae (17) and (18) for the value of a critical force. More detailed analysis of the obtained results will be investigated in a separate paper.

References

1. Jędrysiak J., Woźniak C., *On the elastodynamics of thin microperiodic plates*, *J. Theor. Appl. Mech.*, **Vol. 33** (1995), 337-349.
2. Woźniak C., *Refined macrodynamics of periodic structures*, *Arch. Mech.*, **Vol. 45** (1993), 295-304.
3. Konieczny S., Woźniak C., Woźniak M., *Dynamics and stability of laminated plates with interlaminar imperfections*, *Eur. J. Mech. A Solids*, Gauthier-Vilars (1995), 277-285.

WPLYW POSTACI FUNKCJI NAPRĘŻEŃ NA WYNIKI ROZWIĄZANIA ZAGADNIENIA DYNAMICZNEJ UTRATY STATECZNOŚCI PŁYTY PIERŚCIENIOWEJ

STEFAN JONIAK

*Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Poznańskiej
Piotrowo 3, 60-965 Poznań, Poland*

W pracy przedstawiono rozwiązanie nieliniowego zagadnienia dynamicznej utraty stateczności płyty pierścieniowej obciążonej momentem obrotowym na brzegu wewnętrznym. Stosowano równania typu Karmana przystosowane do problemu dynamicznego. Problem rozwiązywano w sposób przybliżony, metodą ortogonalizacyjną. Przyjmowano wypróbowaną w poprzednich pracach funkcję ugięcia oraz stosowano różne postacie funkcji naprężeń; niektóre spośród przyjętych funkcji naprężeń spełniały, inne nie spełniały warunków brzegowych. W wyniku przybliżonego rozwiązania równania równowagi dynamicznej płyty otrzymano równanie ruchu płyty, które rozwiązywano metodą Runge-Kutta. Efektem końcowym rozwiązań były czasowe przebiegi amplitudy funkcji ugięcia. Na ich podstawie wyznaczano obciążenia krytyczne i krytyczne liczby fal wyboczenia. Praca kończy się wnioskami na temat przydatności zaproponowanych postaci funkcji naprężeń.

1. Wstęp

Płyta pierścieniowa ma oba brzegi utwierdzone, jednak brzeg wewnętrzny ma możliwość obrotu względem środka płyty. Jest ona obciążona na brzegu wewnętrznym momentem obrotowym M_0 . Moment ten rośnie liniowo w czasie obciążenia. Oba brzegi płyty są wolne od innych obciążeń. Płyta wykazuje wstępne imperfekcje.

Celem pracy było określenie możliwości zastosowania różnych postaci funkcji naprężeń do przybliżonego rozwiązania dynamicznego zagadnienia stateczności płyty. W rozwiązaniu stosowano wybraną na podstawie rozwiązania liniowego zagadnienia stateczności i eksperymentów postać funkcji ugięcia. Przebadano cztery różne funkcje naprężeń. Dwie spośród nich spełniały tylko częściowo warunki brzegowe zagadnienia, dwie inne spełniały ściśle te warunki. Nieznane współczynniki funkcji naprężeń wyznaczano albo bezpośrednio z warunków brzegowych, albo na drodze rozwiązania metodą ortogonalizacyjną równania nierozdzielności. Weryfikacja przyjętej postaci funkcji naprężeń następowała na drodze przybliżonego rozwiązania równania równowagi dynamicznej a potem równania ruchu oraz częściowego porównania tych wyników z wynikami eksperymentów przy obciążeniach statycznych.

2. Równania problemu

Układ dwu równań zagadnienia stateczności dynamicznej ma postać (1):

$$\frac{D}{h} \Delta \Delta (w - w_0) = L(w, \Phi) - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \Delta \Delta \Phi = -\frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)], \quad (2)$$

gdzie: w - ugięcie całkowite, w_0 - ugięcie wstępne,
 Φ - funkcja naprężeń, t - czas,
 γ - ciężar właściwy materiału płyty, g - przyspieszenie ziemskie.

Problem rozwiązywano we współrzędnych biegunowych, dlatego do równań (1) i (2) wprowadzono współrzędne r i φ a dalej bezwymiarowy promień $\rho = r_1/r_0$, przy czym $1 \leq \rho \leq k = r_1/r_0$, gdzie: r_1 - promień zewnętrzny, r_0 - promień wewnętrzny.

Funkcje ugięcia i naprężeń winny spełniać następujące warunki brzegowe:

$$\rho = 1, \rho = k, w = w_0 = 0; \frac{1}{r_0} \frac{\partial w}{\partial \rho} = \frac{1}{r_0} \frac{\partial w_0}{\partial \rho} = 0, \quad (3)$$

$$\rho = 1, \rho = k, \sigma_r = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \right) = 0, \quad (4)$$

gdzie: σ_r - naprężenie promieniowe.

Obwodowe naprężenie styczne wyraża się następująco:

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{1}{r_0^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho \partial \varphi} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{M_0}{2\pi r_0^2 h \rho^2}, \quad (5)$$

gdzie: M_0 - moment obrotowy, h - grubość płyty.

Przyjęto następujące funkcje ugięcia i ugięcia początkowego spełniające warunki (3):

$$w = A(t) [\rho^2 - \rho(k+1) + k^2]^2 \sin \left(\frac{\pi \rho}{k} + m \varphi \right), \quad (6)$$

$$w_0 = A_0 [\rho^2 - \rho(k+1) + k^2]^2 \sin \left(\frac{\pi \rho}{k} + m \varphi \right), \quad (7)$$

gdzie: $A(t)$ - nieznana, zależna od czasu amplituda funkcji ugięcia, A_0 - stała,
 m - liczba fal wyboczenia po obwodzie płyty.

3. Rozwiązanie równania nierozdzielności

Równanie nierozdzielności (2) rozwiązywano w sposób przybliżony. W związku z tym przyjmowano postać funkcji ugięcia z nieznanymi współczynnikami a następnie na drodze ortogonalizacji wyznaczano niektóre z tych współczynników.

W pracy wykorzystano funkcję naprężeń o postaciach:

$$\Phi = (a\varphi + b)(\rho - 1) \sin \frac{\pi\rho}{k}, \quad (8)$$

$$\Phi = a\varphi + b\rho^3 + c\rho^4, \quad (9)$$

$$\Phi = a\varphi + b(\rho - 1)(\rho - k) + c(\rho - 1)^2(\rho - k)^2, \quad (10)$$

$$\Phi = a\varphi + b(\rho - 1)(\rho - k) + c(\rho - 1)^2(\rho - k)^2 + d(\rho - 1)^3(\rho - k)^3. \quad (11)$$

Należy w tym miejscu zaznaczyć, że postać równania (5) powoduje, że funkcja Φ może mieć w sobie tylko człon liniowy ze względu na kąt φ .

Zastosowanie funkcji naprężeń o postaci (8) do równania (5), przy $\rho = 1$, daje dla współczynnika a wyrażenie: $a = \frac{M_o}{2\pi h \sin \frac{\pi}{k}}$.

Funkcja o postaci (8) nie spełnia warunków brzegowych (4).

Wprowadzenie funkcji naprężeń o postaciach (9), (10) i (11) do równania (5) daje $a = \frac{M_o}{2\pi h}$. W przypadku funkcji o postaci (9) spełniano warunek (4) tylko na brzegu wewnętrznym. Spełnienie warunków (4) przez funkcje o postaciach (10) i (11) powoduje, że $b=0$.

Nieznane współczynniki funkcji naprężeń wyznaczano dokonując rozwiązania równania nierozdzielności metodą ortogonalizacyjną, przy czym do ortogonalizacji służyły człony stojące przy odpowiednich współczynnikach. Współczynniki funkcji naprężeń zależą od wymiarów płyty, reprezentowanych przez liczbę k , oraz liczby fal wyboczenia m . Zawierają one również parametry funkcji ugięć i obciążenia. Ich postać jest bardzo skomplikowana i są bardzo rozbudowane; współczynnik b w równaniu (8) nie ma postaci ogólnej - może być wyznaczony tylko liczbowo. Współczynników tych nie przytacza się w pracy.

4. Rozwiązanie równania równowagi dynamicznej

Otrzymaną z rozwiązania równania nierozdzielności postać funkcji naprężeń wprowadzano do równania równowagi dynamicznej (2), a następnie ortogonalizowano to równanie członem stojącym przy amplitudzie w funkcji ugięcia (6). W wyniku powstawało równanie ruchu płyty o postaci:

$$K_1 \frac{D}{h} (A - A_o) + \left[K_2 \frac{M_o}{h} + K_3 E (A^2 - A_o^2) \right] A + K_4 \frac{r_o^4 \gamma}{g} \frac{d^2 A}{dt^2} = 0, \quad (12)$$

gdzie: K_1, K_2, K_3, K_4 - stałe zawierające liczby k i m .

W równaniu (12) wprowadzono wielkości bezwymiarowe, dzięki czemu przyjęło ono następującą formę:

$$\frac{d^2 y}{dt_o^2} + H_1(y - y_o) + y[H_2 \bar{M} + H_3(y^2 - y_o^2)] = 0, \quad (13)$$

gdzie: $y = \frac{A}{h}$, $y_o = \frac{A_o}{h}$ - bezwymiarowe amplitudy ugięcia i ugięcia początkowego.

$\bar{M} = \frac{M_o}{Eh^3}$ - bezwymiarowy moment obrotowy.

$t_o^2 = t^2 \frac{Eh^2 g}{r_o^4 \gamma}$ - bezwymiarowy czas.

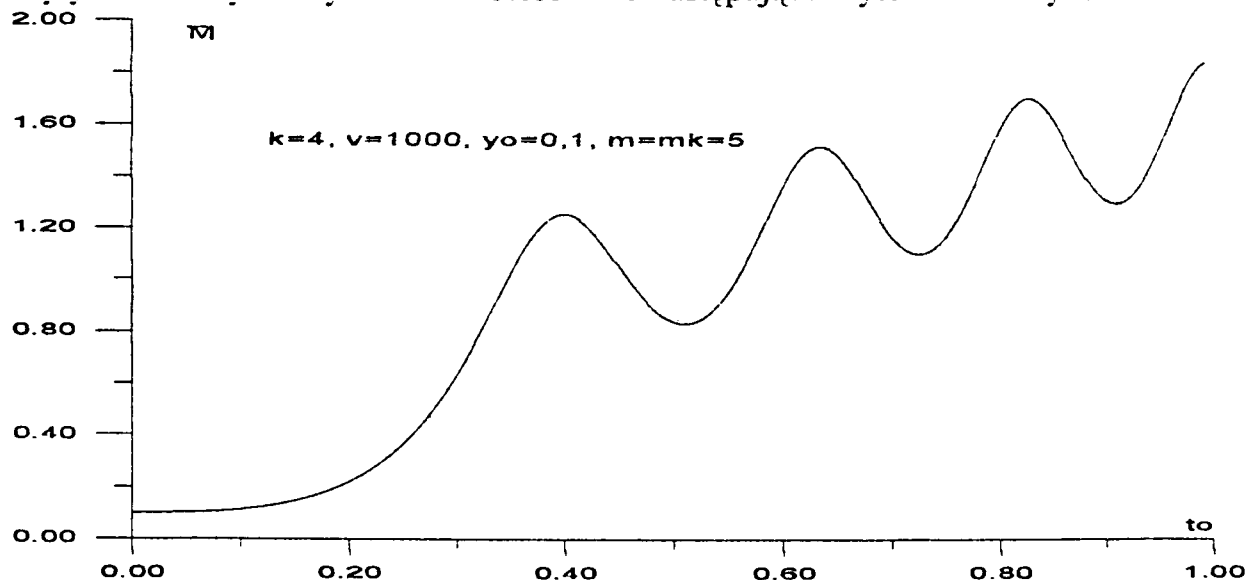
Przyjęto, że obciążenie płyty rośnie liniowo w czasie, a więc $\bar{M} = vt_o$ (v - bezwymiarowa prędkość wzrostu momentu obrotowego).

Równanie (13) rozwiązywano metodą Runge-Kutta przy warunkach początkowych $t_o = 0, y = y_o; \frac{dy}{dt_o}$.

5. Przykład liczbowy i wnioski

Rozwiązania równania (13) mają postać wykresów we współrzędnych $y - t_o$. Są to rozwiązania odnoszące się do płyt o wymiarach reprezentowanych przez liczbę k , przy zadanej wartości: amplitudy ugięcia początkowego y_o , prędkości wzrostu obciążenia v , liczby fal wyboczenia m i liczby Poissona ν (przyjęto ogólnie $\nu = 0,3$).

Wykresy przebiegu w czasie amplitudy wyboczenia pozwalają wyznaczyć, w oparciu o przyjęte kryterium utraty stateczności, wartości obciążeń krytycznych i krytyczne liczby fal wyboczenia. Stosowano następujące kryterium utraty stateczności



Rys. 5.1.

Tablica 5.1. Wartości momentów krytycznych przy $y_0=0.1$

	k = 2				k = 4			
v	(8)	(9)	(10)	(11)	(8)	(9)	(10)	(11)
1000	312 (5)	195 (6)	196 (6)	196 (6)	408 (4)	366 (4)	341 (5)	346 (5)
100	240 (5)	129 (5)	129 (5)	129 (5)	105 (1)	118 (2)	94 (3)	95 (3)
10	236 (5)	123 (5)	123 (5)	123 (5)	40 (1)	160 (2)	55 (2)	57 (2)
1	236 (5)	123 (5)	123 (5)	123 (5)	34 (1)	161 (2)	53 (2)	57 (2)

Tablica 5.2. Wartości momentów krytycznych przy $y_0=0,000001$

	k = 2				k = 4			
v	(8)	(9)	(10)	(11)	(8)	(9)	(10)	(11)
1000	719 (5)	486 (7)	486 (7)	486 (7)	1032(4)	839 (7)	821 (8)	828 (7)
100	351 (5)	211 (5)	211 (5)	211 (5)	283 (1)	229 (4)	220 (5)	224 (4)
10	279 (5)	151 (5)	151 (5)	151 (5)	85 (1)	123 (2)	75 (3)	75 (3)
1	265 (5)	139 (5)	139 (5)	139 (5)	46 (1)	154 (2)	50 (2)	52 (2)

plyta traci stateczność podczas ruchu wywołanego momentem obrotowym wtedy, gdy maksymalne ugięcie osiąga wartość równą grubości płyty.

Krytyczna wartość obciążenia jest wyznaczana z tego przebiegu $y - t_0$, w czasie którego amplituda ugięcia najwcześniej osiąga wartość równą 1 i jest ona iloczynem prędkości wzrostu obciążenia i czasu t_k , wyznaczanego przez amplitudę o wartości 1, czyli $\overline{M}_k = vt_k$. Odpowiadająca temu przebiegowi liczba fal wyboczenia oznacza krytyczną liczbę fal m_k . Przykładowy przebieg $y - t_0$ przedstawiono na rysunku 5.1. Wyniki rozwiązań, w postaci momentów krytycznych, uzyskane przy użyciu czterech typów funkcji naprężeń, dla płyt o dwu wymiarach, przy czterech prędkościach wzrostu obciążenia i dwu wartościach amplitudy ugięcia początkowego, zebrano w tablicach 5.1. i 5.2. Liczby umieszczone w nawiasach w drugim wierszu każdej tablicy to numery funkcji naprężeń, zaś cyfry w nawiasach obok wartości momentów krytycznych oznaczają krytyczne liczby fal.

Na podstawie wyników zawartych w tablicach można sformułować następujące wnioski o przydatności przebadanych postaci funkcji naprężeń:

- trzeba wykluczyć użycie funkcji o postaci (9), gdyż przy $k=4$ następuje wzrost obciążenia krytycznego przy malejącej prędkości wzrostu obciążenia, co kłóci się z wynikami eksperymentów (przy innych rodzajach obciążeń);
- mimo, że funkcja (8) daje jakościowo poprawne wyniki, to w porównaniu z wynikami pozostałymi (przy $k=2$) daje wysokie wartości obciążenia krytycznego i dlatego należy ją wyeliminować;
- spośród dwu pozostałych postaci funkcji naprężeń wygodniejsza jest postać (10), bo daje wyniki podobne do funkcji (11), a jest krótsza i przez to wygodniejsza w użyciu.

Literatura

1. Wolmir A.S., *Nieliniowa dynamika plastinok i oboloczek*. Izd. Nauka Moskwa 1972.
2. Joniak S., *Nieliniowe zagadnienie dynamiczne sprężystej utraty stateczności płyty pierścieniowej obciążonej momentem obrotowym*. ZN Katedry Mechaniki Technicznej Politechniki Śląskiej z. 3, s. 197-202 (1997).

Summary

THE INFLUENCE OF THE FORM OF STRESS FUNCTION ON THE SOLUTION OF THE NONLINEAR DYNAMIC ELASTIC STABILITY OF A RING-SHAPED PLATE LOADED BY A TORQUE

The paper deals with the problem of stability loss of a plate loaded by a torque M_0 at the inner edge. The problem equations are those type of Karman with inertial part. We use the following notation in equations (1) and (2) : w is deflection, w_0 is initial imperfection, Φ is stress function, t is time.

The equations of the problem are described in polar coordinates r and φ . Both the compability equation (2) and equation of dynamical equilibrium (1) are solved by approximative method. i. e. - Galerkin method.

We assume that the deflection function w and initial imperfection w_0 have a form of (6) and (7). where: $\rho = r/r_0$ is dimensionless radius (r_0 is inner radius). $k = r_1/r_0$ (r_1 is external radius). m is integer number, A_0 is constant, $A(t)$ is amplitude of deflection. The functions (6) and (7) satisfy the boundary conditions (3).

We assume also that the stress function have the forms of (8), (9), (10) and (11). where a , b , c and d are the constants to calculate. The functions (8) and (9) do not satisfy the boundary conditions (4). We obtain the constants a in functions (8) and (9) from equation (5). After substitution the stress functions into equation (5) and boundary conditions (4), we obtain constants a and b in equations (10) and (11). The constants b , c in functions (8), (9) and c , d in functions (10), (11) are obtained after performing the orthogonalization of equation (2).

The orthogonalization of equation (1) gives the motion equation of the plate. This equation has the form of (13), where: y is dimensionless amplitude of deflection, y_0 is dimensionless initial imperfection, t_0 is dimensionless time, $\bar{M} = \nu t_0$ is dimensionless torque (ν is dimensionless velocity). The motion equation (13) is solved by Runge-Kutta method. The analysis of solution results of equation (13) and the comparison with experimental results is the basis of the evaluation of applicability of the stress function.

Pracę zrealizowano w ramach DS 21-812/97

STATECZNOŚĆ ORTOTROPOWYCH PŁYT Z WZDŁUŻNYMI ROZWARSTWIENIAMI

SŁAWOMIR KĘDZIORA

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź*

W pracy przeanalizowano stateczność prostokątnych ortotropowych płyt z rozwarstwieniami biegnącymi wzdłuż całej długości płyty. Przyjęto, że płyty są swobodnie podparte na obciążonych końcach. Zagadnienie rozwiązano w ramach pierwszego rzędu przybliżenia teorii Koitera (1) przy wykorzystaniu macierzy przejścia.

Przeanalizowano wpływ wymiarów geometrycznych rozwarstwienia na stateczność płyt.

1. Wprowadzenie

Materiały kompozytowe dzięki swojej lekkości, łatwości formowania i uzyskania pożądanych własności są coraz szerzej wykorzystywane w konstrukcjach cienkościennych np. przemysł samochodowy, zbrojeniowy, maszynowy, lotniczy. Stosowanie materiałów kompozytowych wymaga jednak bardziej złożonej i wszechstronnej analizy pracy konstrukcji.

Wykorzystanie kompozytów w praktyce inżynierskiej wymusza opracowanie metod analizy uwzględniających szczególne cechy tych materiałów.

Celem prezentowanej pracy jest opracowanie metody analizy stateczności płyt kompozytowych przy uwzględnieniu zjawiska delaminacji w kierunku wzdłużnym przy uwzględnieniu różnych warunków brzegowych na wzdłużnych brzegach.

2. Definicje, założenia

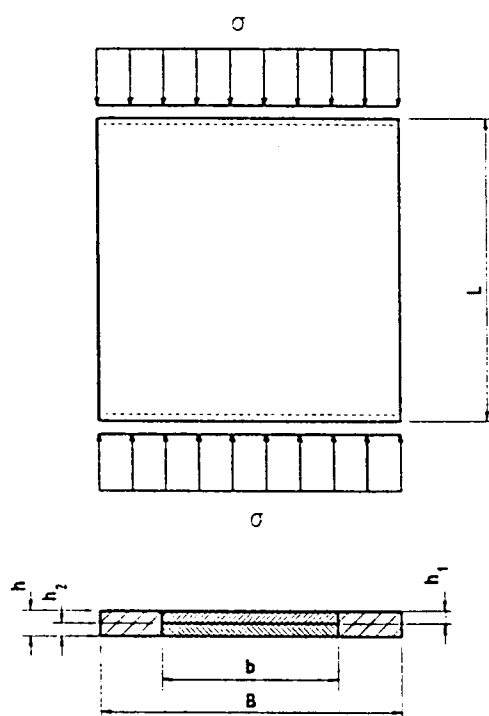
Rozpatrzono ściskaną płytę ortotropową z dwoma symetrycznymi rozwarstwieniami biegnącymi wzdłuż długości płyty (Rys 2.1)

Założono przegubowe podparcie poprzecznych obciążonych brzegów oraz swobodnie podparcie na wzdłużnych brzegach.

Przyjęto, że suma grubości rozwarstwień jest równa grubości płyty nierozwarstwionej oraz że przed obciążeniem warstwy środkowe wszystkich rozwarstwień i części płyty nierozwarstwionej leżą w jednej płaszczyźnie.

W przyjętym modelu obliczeniowym nie uwzględniono zjawiska kontaktu między rozwarstwieniami. Taki założenie jest możliwe dla płyt krótkich $B/L \approx 1$. Podobne uproszczenia poczynił Protte (6).

Zagadnienie rozwiązano w ramach pierwszego rzędu przybliżenia asymptotycznej teorii Koitera(1) przyjmując bardziej dokładne zależności na odkształcenia względne i wykorzystując metodę macierzy przejścia [3÷5].



Rys 2.1. Analizowana płyta
Fig. 2.1. Analysed plate

Blonowe odkształcenia dla poszczególnych płyt składowych przyjęto w postaci:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u_{,x} + \frac{1}{2} v_{,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^2 ; \\ \varepsilon_y &= v_{,y} + \frac{1}{2} u_{,y}^2 + \frac{1}{2} w_{,y}^2 ; \\ \gamma_{xy} &= 2\varepsilon_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} ;\end{aligned}\quad (1)$$

Z zasady prac przygotowanych wynikają następujące różniczkowe równania równowagi dla pierwszego rzędu przybliżenia (2÷5).

$$\begin{aligned}u_{,xx} + \eta v v_{,xy} + \frac{G(1-\eta v^2)}{E} (u_{,yy} + v_{,xy}) &= 0 ; \\ v_{,yy} + \eta u u_{,xy} + \frac{G(1-\eta v^2)}{\eta E} (u_{,xy} + v_{,xx}) - \frac{1-\eta v^2}{\eta} \lambda \Delta v_{,xx} &= 0 ; \\ D_x (w_{,xxxx} + \eta v w_{,xxy}) + D_y (w_{,yyyy} + \eta w_{,xyy}) + 4D_{xy} w_{,xxyy} + Eh\lambda \Delta w_{,xx} &= 0 ;\end{aligned}\quad (2)$$

gdzie dokrytyczne pole przemieszczeń, przy założeniu bezzgięciowego stanu dokrytycznego, założono w postaci:

$$u^o = -\kappa \Delta \lambda ; \quad v^o = v_y \Delta \lambda ; \quad w^o = 0 ; \quad (3)$$

Zastosowane we wzorach (2) i (3) oznaczenia są identyczne jak w pracy (3).

Istotna różnica polega na konieczności spełnienia warunków współpracy (4), co zdecydowanie odróżnia ją od metody zastosowanej w pracy (3÷5).

Warunki ciągłości i współpracy w miejscu rozwarstwienia poszczególnych płyt składowych przyjęto w następującej postaci:

$$\begin{aligned} u_i^- &= u_i^+ ; & v_i^- &= v_i^+ ; & w_i^- &= w_i^+ ; \\ w_{,y}^- &= w_{,y_1}^- ; & N_y^- &= \sum_{i=1}^n N_{y_i}^+ ; & M_y^- &= \sum_{i=1}^n M_{y_i}^+ ; \\ N_{xy}^- &= \sum_{i=1}^n N_{xy_i}^+ ; & Q_y^- &= \sum_{i=1}^n Q_{y_i}^+ ; & & \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie: indeks i oznacza i -te rozwarstwienie, a n liczbę rozwarstwień.

Zastosowana metoda rozwiązania zagadnienia stateczności dla pojedynczej płyty jest analogiczna jak w pracach (3÷5).

3. Wyniki obliczeń numerycznych

W analizie numerycznej badano wpływ szerokości symetrycznego rozwarstwienia na wartości naprężeń krytycznych płyty swobodnie podpartej na wzdłużnych brzegach (Rys. 2.1).

W pracy przedstawiono jedynie wyniki dla płyty o stosunku szerokości do długości $B/L=1$. Szerokość rozwarstwienia zmieniano w zakresie $0 \div 0.8 \ b/B$ (Rys. 2.1) .

Obliczenia przeprowadzono dla pierwszych trzech postaci wyboczenia

Do obliczeń przyjęto płytę o następujących wymiarach:

- $B/L=1.0$;
- $B/h=100$;
- $b/B=0 \div 0.8$.

W niniejszej pracy przedstawiono jedynie wyniki dla płyty izotropowej tzn. $\eta=1$, $\nu=0.3$, $E=E_x=E_y$.

Dla rozpatrywanej płyty przeprowadzono obliczenia dla dwóch stosunków grubości rozwarstwień $h_1/h_2=0.25$, $h_1/h_2=1$, gdzie $h_1+h_2=h$.

Wyniki obliczeń przedstawiono na rysunku (Rys. 3.1) i w tabeli (Tab. 3.1).

W celu zweryfikowania opracowanej metody otrzymane wyniki porównano z metodą elementów skończonych (ANSYS-em). Program ten umożliwił znalezienie naprężeń krytycznych dla badanej swobodnie podpartej płyty; $b/B=1$, $h_1/h_2=0.25$, $h_1/h_2=1$. Wyniki zamieszczono w tabeli (Tab. 3.1).

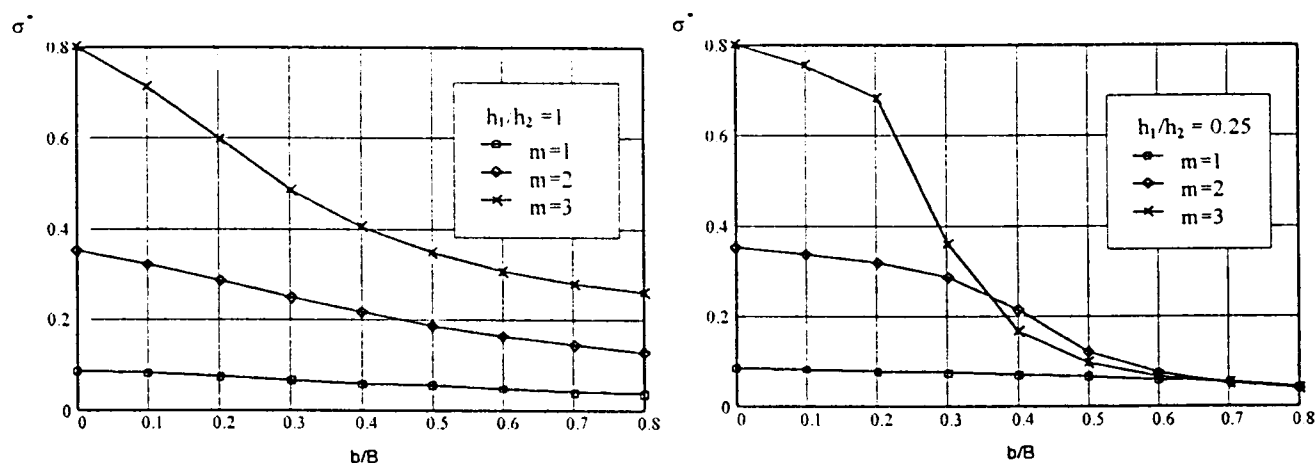
Uzyskano dobrą zgodność otrzymanych rezultatów, a zatem należy sądzić, że opracowana metoda jest poprawna.

Tabela 3.1. Porównanie wyników otrzymanych MES (ANSYS) i z omawianej metody dla płyty swobodnie podpartej

Table 3.1. Comparison of the obtained result for simply supported -FEM (ANSYS) and the described method

m	MES program ANSYS		Prezentowana metoda	
	k		k	
	$h_1/h_2 = 0.25$	$h_1/h_2 = 1$	$h_1/h_2 = 0.25$	$h_1/h_2 = 1$
1	0.719	0.581	0.718	0.580
2	1.253	2.062	1.299	2.053
3	1.274	3.832	1.070	3.815

Należy zwrócić uwagę, że w prezentowanych rozważaniach przyjęto analizę modalną. W metodzie elementów skończonych nie ma takich ograniczeń i tym faktem należy wytłumaczyć różnice w otrzymanych wynikach.



Rys. 3.1. Wykres naprężenia krytycznego σ^* dla płyty swobodnie podpartej w funkcji względnej szerokości b/B rozwarstwienia dla różnej liczby półfal m (1÷3)

Fig. 3.1. Curves presenting critical stress σ^* for plate with free longitudinal edge versus nondimensional width of the delamination b/B for a few number of half-waves m (1÷3)

Z przeprowadzonych obliczeń dla płyty swobodnie podpartej przy stosunku rozwarstwień $h_1/h_2=0.25$ i w przedziale zmienności b/B powyżej 0.6 występuje spadek naprężeń krytycznych dla $m>1$; ustalają się one na pewnym niewiele różniąc się od siebie poziomie (Rys. 3.1).

Analiza MES-em dla tej płyty pokazuje także tę tendencję ale mniej wyraźnie.

Zatem im większa różnica grubości rozwarstwień, tym mniejsza różnica naprężeń krytycznych dla $m>1$ przy szerokich rozwarstwieniach.

Zjawisko to tłumaczyć można tym, że dla stosunkowo wąskich rozwarstwień cała płyta (rozwarstwienia i część płyty nierozwarstwiona) traci stateczność poprzez wyboczenie w taką samą liczbę półfal. Wraz ze wzrostem b/B następuje zmiana charakteru wyboczenia: utratę stateczności inicjuje najcieńsze rozwarstwienie.

To szczególnie zachowanie zaobserwowano dzięki możliwością jakie niesie MES i wizualizacja postaci wyboczenia jaką posiada program ANSYS.

Jednak zjawisko to nie musi wypełni odpowiadać rzeczywistemu modelowi, gdyż nie uwzględniono w modelu numerycznym kontaktu między rozwarstwieniami.

6. Wnioski Końcowe

Z przedstawionej pracy wynika, że opracowana metoda może być użyteczna przy rozpatrywaniu wyboczenia lokalnego ortotropowych słupów z wzdłużnymi rozwarstwieniami ścian.

Zaprezentowane podejście umożliwia także modelowanie dźwigarów o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego.

Obliczenia przeprowadzone metodą elementów skończonych i programem zbudowanym w oparciu o prezentowaną metodę potwierdziły dużą ich zgodność.

Opracowana metoda po niezbędnych modyfikacjach umożliwi analizę stateczności ortotropowych belek-słupów o dowolnym przekroju poprzecznym przy uwzględnieniu delaminacji przekroju oraz wpływ delaminacji na sprzężone wyboczenie.

Wyniki obliczeń dla innych warunków podparcia płyt na wzdłużnych brzegach zostaną przedstawione na sympozjum.

Literatura

1. Koiter W.T., *Elastic stability and post-buckling behaviour*, *Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems*, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin (1963), 257-275.
2. Królak M. (red.), *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN Warszawa-Łódź (1990)
3. Królak M. (red.), *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Politechnika Łódzka, Monografie Łódź (1995).
4. Kolakowski Z Królak M., *Interactive elastic buckling of thin-walled closed orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction Vol.4* (1995), 571-590.
5. Królak M. Kolakowski Z., *Interactive elastic buckling of thin-walled open orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction Vol.4* (1995), 591-602.
6. Protte W. *Zur kombinierten Beulung zweier sich auf Kontakt berührender elastischer, längsgedrückter Rechteckplatten mit unterschiedlichen Dicken*. *Bauingenieur* 68(1993) 137-143. Springer-Verlag 1993.

Summary

STABILITY OF ORTHOTROPIC PLATES WITH LONGITUDINAL DELAMINATION

This investigation is concerned with buckling of thin-walled plate with longitudinal delamination under axial compression. The plate is assumed to be simply supported at the ends.

The asymptotic expansion established by Byskov and Hutchinson is employed in the numerical calculation in the form of the transition matrix method.

The calculations are carried out for a few plates with different width of delamination. The results showing the relationship between nondimensional width of the delamination and the critical stress are presented in diagrams for a few number of half-waves.

STATECZNOŚĆ STATYCZNA I DYNAMICZNA KONSTRUKCJI BELKOWYCH OBCIĄŻONYCH SIŁAMI ŚLEDZĄCYMI

L. KIELSKI, S. STACHURA
Zakład Mechaniki - Politechnika Radomska

J. MISIAK,
Wojskowa Akademia Techniczna - Warszawa

Przedmiotem pracy jest zagadnienie stateczności statycznej i dynamicznej układów belkowych obciążonych siłami śledzącymi. Wykorzystując równania ruchu zaburzonego układu, przy zastosowaniu metody wariacyjnej Galerkin, uzyskano równania ruchu w postaci równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. Zastosowana metoda pozwala na wyznaczenie macierzy sztywności geometrycznej obciążenia śledzącego. Jako przykład rozwiązano ramę portalową.

1. Różniczkowe równania ruchu z uwzględnieniem zaburzeń.

Rozważmy równowagę ciała sprężystego, wraz z warunkami brzegowymi. Na ciało działają siły objętościowe X_i , siły powierzchniowe p_i , wywołując pole przemieszczeń u_i , pole odkształceń ε_{jk} i pole naprężeń σ_{jk} . Przy założeniu skończonych przemieszczeń i nieskończenie małych odkształceń równania równowagi w opisie Lagrange'a przedstawiono w pracy (2)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sigma_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] + X_i &= 0 \\ \sigma_{jk} \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) n_j &= p_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Analogicznym równaniem opisany jest ruch zaburzony. Przyjmując składniki ruchu zaburzonego (oznaczamy je przez $\sim$, a zaburzenia przez $\bar{}$) w postaci

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i + \bar{u}_i \\ \tilde{\sigma}_{jk} &= \sigma_{jk} + \bar{\sigma}_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{X}_i &= X_i + \bar{X}_i - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{a}^2} \\ \tilde{p}_i &= p_i + \bar{p}_i \end{aligned} \right\} \quad (2b)$$

gdzie $\bar{X}_i$ i $\bar{p}_i$ - są zaburzeniami objętościowych i powierzchniowych sił, które w ogólnym przypadku zależą od czasu t . Siły bezwładności traktujemy również jako zaburzenia.

Przyjmując ogólne założenia stateczności początkowej, ostatecznie równania ruchu zaburzonego, będą miały postać

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sigma_{jk} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right) + \bar{X}_i - \rho \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial \bar{a}^2} = 0 \quad (3)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} n_j + \sigma_{jk} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) n_j = \bar{p}_i \quad (4)$$

łącznie z warunkiem

$$\bar{\sigma}_{ij} = \lambda_{ij\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta} \quad (5)$$

1.1. Obciążenie niekonserwatywne.

Rozpatrzmy przypadek obciążenia śledzącego. W przypadku obciążenia śledzącego wartość zaburzenia wynosi

$$\bar{X}_i = X_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad \bar{p}_i = p_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (6)$$

2. Sformułowanie równań ruchu w metodzie elementów skończonych.

Równania ruchu wyprowadzimy stosując funkcje, takie jak w analizie statycznej metodą elementów skończonych (1)

$$\bar{u}(x, y, z, t) = N(x, y, z) q(t) \quad (7)$$

gdzie: $N(x, y, z)$ - jest macierzą funkcji kształtu dla przemieszczeń,

$q(t)$ - wektor uogólnionych przemieszczeń, zależny od czasu.

Wykorzystując do rozwiązania równań (3) - (5), wariacyjną metodę Galerkiną, uwzględniając (7), otrzymujemy klasyczne obiekty macierzowe MES-u, z wyjątkiem macierzy sztywności geometrycznej obciążenia śledzącego

$$K_s' = - \int_V \sigma N^T N'' dV \quad (8)$$

Ostatecznie równania ruchu przyjmują postać

$$M\ddot{q} + (K + K_s')q = 0 \quad (9)$$

Do analizy stateczności statycznej stosujemy kryterium kinetyczne, rozwiązując wyznacznik

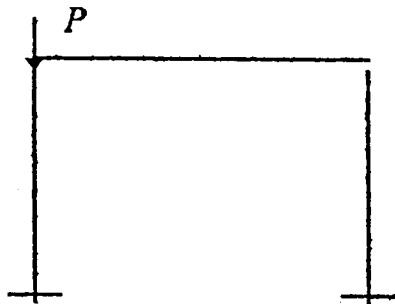
$$\left| \left(K - K_s'(\chi^P, \eta) \right) - \omega^2 M \right| = 0 \quad (10)$$

Natomiast do analizy stateczności dynamicznej wykorzystujemy metodę bilansu harmonicznego (3), dla wyznaczenia głównego obszaru niestatecznego rozwiązujemy wyznacznik

$$\begin{vmatrix} \left(K - \alpha K_s' + \frac{1}{2} \beta K_s' - \frac{1}{4} \theta^2 M \right) & 0 \\ 0 & \left(K - \alpha K_s' - \frac{1}{2} \beta K_s' - \frac{1}{4} \theta^2 M \right) \end{vmatrix} \quad (11)$$

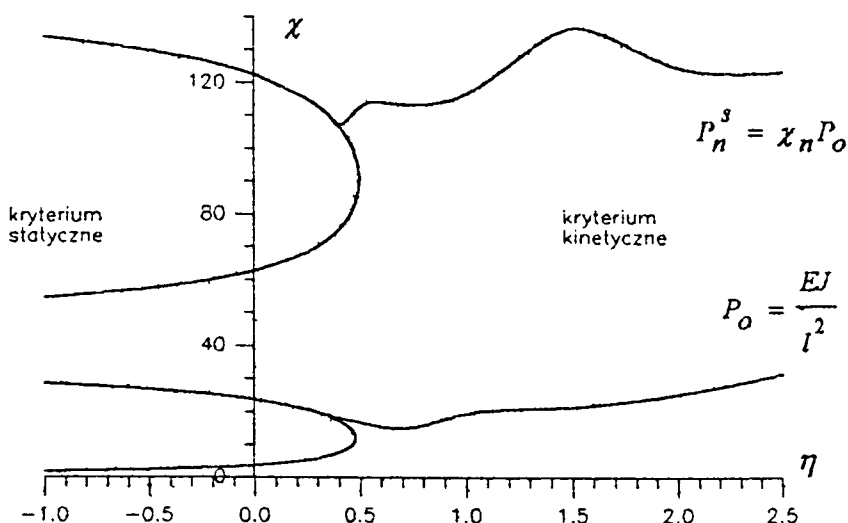
3. Przykład.

Rozpatrzmy ramę portalową, przedstawioną na Rys.1, obciążoną siłą śledzącą P . Dane materiałowe i geometryczne są: $E = 2.1 \cdot 10^4$ [MPa], $G = 0.85 \cdot 10^4$ [MPa], $L = 2$ [m], $d = 0.1$ [m]. Zakładamy utratę stateczności w postaci zwichrzenia ramy.



Rys.1. Rama portalowa.
Fig.1. Portal frame.

Analizując stateczność statyczną ramy, wyznaczono funkcje $\chi = f(\eta)$ zmian krytycznej siły śledzącej w zależności od współczynnika śledzenia η , którą przedstawiono na Rys.2. W zakresie kryterium kinetycznego przebiegi śledzących sił krytycznych posiadają lokalne ekstrema.



Rys.2. Stateczność statyczna ramy portalowej.
Fig.2. Static stability of the portal frame.

Następnie zakładając, że obciążenie śledzące jest postaci $R(t) = \alpha R^s + \beta R^s \cos \theta t$, wykonano analizę stateczności dynamicznej, wyznaczając główne obszary rezonansowe trzech pierwszych częstości, jak na Rys.3.

Widocznym jest, że obszary rezonansowe drugiej i trzeciej częstości rezonansowej łączą się, po osiągnięciu przez układ parametrów drgań samowzbudnych:

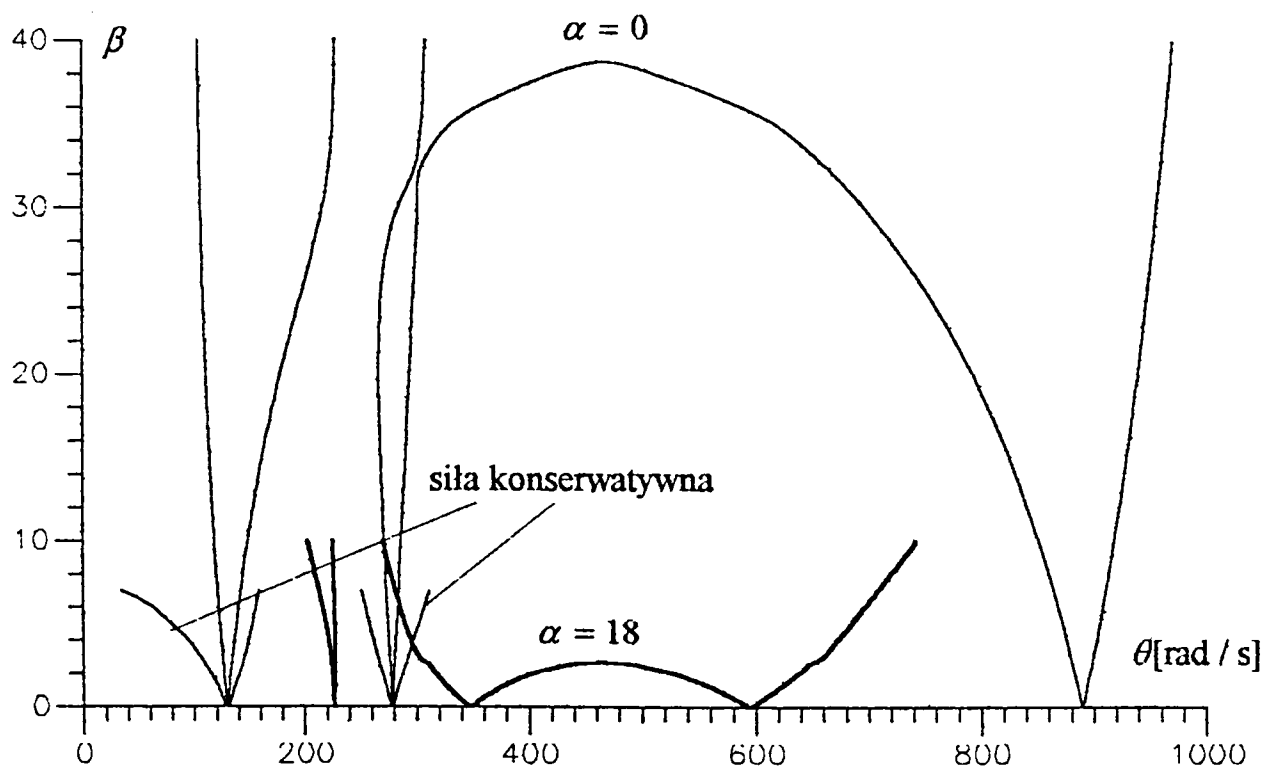
$$\frac{1}{2} \beta P_0 = P^s = 19,3557 P_0, \quad \frac{1}{2} \theta = \omega_2 = \omega_3 = 231.75 [\text{rad/s}].$$

Zwiększając wartość obciążenia wstępnego np. $\alpha = 18$, układ osiąga wyżej wymienione parametry drgań samowzbudnych przy mniejszych głębokościach modulacji β .

Obszar pierwszej częstości rezonansowej, wraz ze wzrostem α zawęża się i przy $\alpha \approx P^s$ przechodzi praktycznie w pojedynczą linię.

Dla ustalonej wartości głębokości modulacji β , obszary rezonansowe w przypadku, gdy siła krytyczna jest konserwatywna są znacznie większe, niż obszary przy działaniu siły śledzącej.

Uwzględnienie tłumienia, powoduje odsunięcie się obszarów niestatecznych od osi częstości.



Rys.3. Granice obszarów dla $p=1$.
Fig.3. Limits of field for $p=1$.

Literatura

1. Bathe K.J., *Finite element procedures in engineering analysis*. New Jersey, Prentice-Hall, 1982.
2. Bołotin W.W., *Dinamiczeskaja ustoicziwost uprugich sistem*. Moskwa, Gos.Izd.Tech.Teor.Lit., 1953.
3. Gutowski R., Świetlicki W.A., *Dynamika i drgania układów mechanicznych*. Warszawa, PWN, 1986.

Summary

STATIC AND DYNAMIC STABILITY BEAM CONSTRUCTIONS LOADED BY THE FOLLOWING FORCES.

The subject of this paper is a problem of the static and dynamic stability of beam constructions loaded by the following forces.

The principle variational of Galerkin was applied and the equation of motion of the free vibration has been obtained of the form.

$$M\ddot{q} + (K + K_g(\chi P_o, \eta))q = 0$$

The equation describe the problem of starting static stability including following parameter η of the following force. To defined metrix the Finite Elements Method was applied and the kinematic criterion has been used to study of static stability. The determinant (10) to calculated frequency function $\omega_n = f(\chi_n P_o, \eta)$ has been obtained.

Portal - frame loaded following force $\eta = 1$ was analysed. Critical following force for the loss of stability by flutter was calculated $P'_c = 19.3557 \frac{EJ}{l^2}$. For the following

force variable in time $P(t) = \alpha R^s + \beta R^z \cos \theta t$ the determinant (11) (for main resonance) was calculated using the method of harmonic balance.

The determinant was solved and as a final the frequency of the periodic vibration of system was obtained. The frequency was divided the area on the stable and unstable areas (resonat areas). The example of Portal - frame loaded the following force was solved and the areas of resonance was determined.

DYNAMIC STABILITY OF ELEMENTS OF STRUCTURE AT ACTION OF MOVING CONCENTRATED LOAD

I.F. KOGEMYAKINA

*Department of Strength of Materials, State Academy of Civil Engineering
and Architecture, 320600, Dnepropetrovsk, Ukraine*

The dynamic stability of elements of structures at action of moving concentrated loads is considered. The Timoshenko's model is used. Critical velocities of movement of a load and area of dynamic instability of a system are analyzed. The weights of load and element of a structure are taken into account.

In the theory of moving loads large and independent path is investigation of dynamic stability of a system: a bearing structure - a moving load. The problem is reduced to determination of critical velocities of motion of a load. Two kinds of critical velocities may be distinguish: those , at which resonance of a system occurs, and velocities , above which vibrations become unstable. Resonant critical velocities are those, at which frequencies of vibrations of a load coincide with frequencies of free vibration of an element of a structure. Such velocities take place at movement of a load on a structure, deformations of which are unimportant. It is possible to jump over this isolated velocities, increasing them, and to receive a steady mode of vibrations of a system. Additional forces of inertia have large significance at movement of a load on a structure at essential deformations. These forces are stipulated by portable and coriolis acceleration and can call loss of stability of vibrations of a system. Zones of dynamic instability, one of which, the main, limited from below, are formed.

Dynamic stability of beams was considered by V.V.Bolotin [1,2] and A.B.Morgayevsky [3] in classical statement. The research of dynamic stability of beams, plates and shells on the basis of Timoshenko's model at movement of concentrated load [4,5,6] shows, that the account of deformation of shear reduce to reduction of critical velocities. The account of inertia of rotation does not influence the main region of instability, limited underneath. The subsequent regions disintegrate each on two , possessing finite width, and at neglecting by inertia of rotation fasten in lines.

The equations, describing vibrations of system, and appropriate boundary conditions are received with the help of variation principle Gamilton -

Ostrogradsky. The decomposition method of unknown function on two, one of which describes regional effect, is applied. Initial system of equations simplifies essentially. For the elements of structure, supported by hinges this function is equal zero. Bubnov - Galerkin procedure gives possibility to pass from differential equations in private derivatives to the system of ordinary differential equations with periodical coefficients is received. The solution of these equations is represented by Furie numbers with indeterminate coefficients. The solution of system, excellent from a zero, will be only in the event, if the determinant of a system, made from it's coefficients, is equal a zero. Investigation of stability is reduced to the analysis of roots of a characteristic equation. The condition, at fulfillment of which characteristic equation has not roots with a positive material part, gives critical velocities. In the first approximation critical velocity v_{kpl} , determining bound of main aria of instability, is received. At velocity of movement of a concentrated load above than v_{kpl} , stable vibrations of a system are impossible. The subsequent approximations give a number of velocities, lying below to main critical velocity v_{kpl} . As researches have shown these velocities lie on bounds of the lowest areas of instability, which, in difference from the classical theory, have finite width.

References

1. Болотин В.В., *Тр.МИИТ*. Вып.74 (1950), 269-296.
2. Болотин В.В., *Динамическая устойчивость упругих систем* (Гостехтеориздат, Москва, 1956), 359.
3. Моргаевский А.Б., *Научные тр. Днепропетровского металлург. института*. Вып.42 (1962), 47-56.
4. Кожемякина И.Ф., Деп. в ВИНИТТИ 18.10.77. N4026-77.
5. Кожемякина И.Ф., Сметанина Л.Г., *Строит. механика и расчет сооружений*. Вып.3 (1989), 31-33.
6. Кожемякина И.Ф., В кн.: *Theoretical Foundations in Civil Engineering* (Ukrainian- Polish seminar. Dniepropetrovsk, June 1993), Warsaw. 1993, 43-46.

GLOBAL AND LOCAL INSTABILITY OF THIN-WALLED COLUMNS BEYOND THE PROPORTIONAL LIMIT

Z. KOŁAKOWSKI, K. KOWAL-MICHALSKA

*Department of Strength of Materials, Technical University of Łódź,
90-924 Łódź, Poland*

The problem of global and local stability in the inelastic range for thin-walled columns is examined on the basis of the deformation theory and the incremental theory of plasticity. Columns of closed and open cross-sections built from rectangular isotropic plates are subjected to the loading changing from uniform compression to pure bending. A solution of elastic buckling for a thin-walled orthotropic columns based on Koiter's asymptotic method is employed to investigate the elasto-plastic buckling mode of the column and to determine the critical load. The study is based on the numerical method of the transition matrix. The results of numerical calculations are presented in diagrams.

1. Introduction

Thin-walled structures consisting of plate elements have a number of buckling modes differing from one to another both in quantitative (by number of half waves) and in qualitative respects (by global and local buckling)

Isotropic materials (used in structural members) such as mild steel and aluminium alloys are characterised by typically linear elastic behaviour up to the proportional limit, and in the elasto-plastic range by rounded stress - strain curve.

The inelastic buckling of plates and columns can be investigated on the basis of the constitutive relations of the deformation theory and the incremental theory of plasticity. It has been well known that calculations based on the deformation theory which in fact does not represent physically admissible theory of plasticity gave reasonably good agreement with test results.

In recent years the inelastic buckling of plates and columns has been a point of interest in many works e.g. (3), (6).

In the present paper the problem of stability in the elasto-plastic range of thin-walled columns is examined using the method elaborated for the analysis of stability of thin-walled orthotropic beam-columns (5). The relationships between the stress and strain for a component elasto-plastic plate are derived on the basis of the deformation theory and the incremental theory of plasticity. On the other side the same relationships are written for an orthotropic elastic plate. Comparing the appropriate coefficients in both relations the instantaneous „conventional” parameters of orthotropy can be found out. So the problem of inelastic stability of

isotropic columns can be investigated in the same way as the problem of stability of the elastic orthotropic columns. The elastic problem is solved using Koiter's asymptotic theory of stability (4). In the solution and in the prepared computer programme Byskov-Hutchinson asymptotic expansion (1) and the numerical transition matrices are employed. This approach enables to find all global and local buckling modes of the structures analysed (5). In the solution obtained the shear lag phenomenon and the effect of cross-sectional distortions are included.

The results of numerical calculations are plotted in diagrams showing the critical stress values calculated for a given column under assumed loading.

2. Constitutive relations in the inelastic range

In the studies concerning the stability of structures beyond the proportional limit it is essential to describe in the analytical way the uniaxial stress-strain curve of a material. In this work the Needleman-Tvergaard relation is used in modelling the behaviour of nonlinear characteristic of a material.

- Elastic behaviour:

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (1)$$

- Inelastic behaviour (for $\sigma \geq \sigma_0$, where σ_0 is the proportional limit):

$$\sigma = \sigma_0 \left[n \left(\frac{\varepsilon * E}{\sigma_0} - 1 \right) + 1 \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

According to the deformation theory the relations between the stresses and strains are:

$$\begin{aligned} N_x &= h * (A_{11} * \varepsilon_x + A_{12} * \varepsilon_y), & N_y &= h * (A_{12} * \varepsilon_x + A_{22} * \varepsilon_y), \\ N_{xy} &= h * A_{33} * \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (3)$$

where the coefficients:

$$\begin{aligned} A_{11} &= E * \frac{3 * \varphi_s + \varphi_t}{A_0}; & A_{12} &= E * \frac{2 * \varphi_t - 2 * (1 - 2 * \nu)}{A_0}; & A_{22} &= E * \frac{4 * \varphi_t}{A_0}; \\ A_{33} &= E * \frac{1}{3 * \varphi_s - (1 - 2 * \nu)}; & A_0 &= 3 * \varphi_s * \varphi_t + 2 * (1 - 2 * \nu) * \varphi_t - (1 - 2 * \nu)^2 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{and} \quad \varphi_t = E / E_t; \quad \varphi_s = E / E_s.$$

are obtained from the uniaxial stress-strain curve of the material of the column described by equation (2), where E_s -secant modulus and E_t -tangent modulus. The relations above correspond to the deformation theory. The relationships for the incremental theory are obtained simply by putting $E_s=E$.

3. Basic equations for orthotropic elastic columns

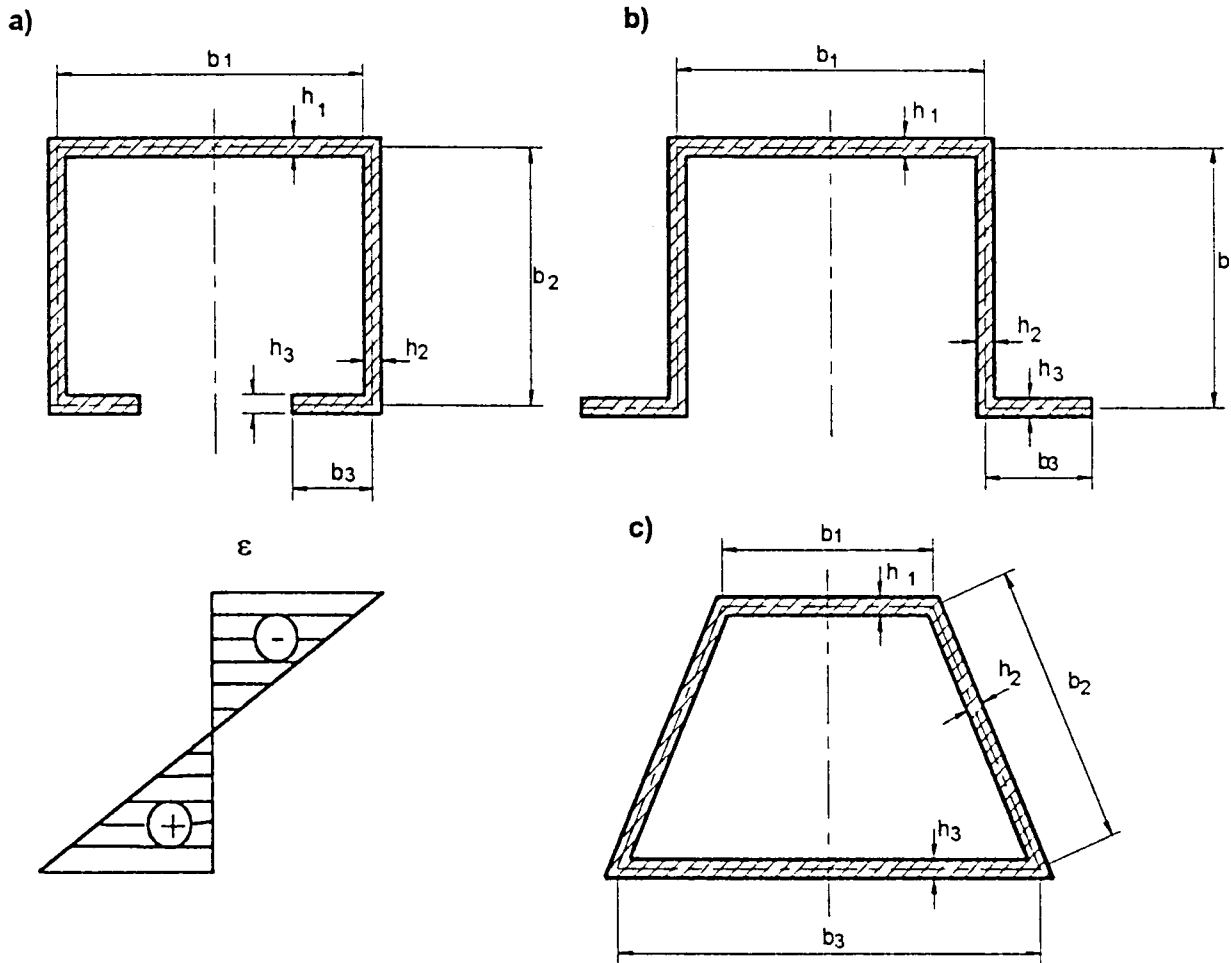


Fig 1. The considered cross-sections

The long thin-walled prismatic columns of length l and composed of plane, rectangular plate segments interconnected along longitudinal edges are considered. The columns of closed and open cross-sections, simply supported at the ends, are subjected to the axial strain ϵ varying linearly along the column height (Fig.1).

A plate model is adopted for the columns. For a component plate exact geometrical relationships are taken into account in aim to consider both out-of-plane and in-plane bending of a plate (5):

$$\epsilon_x = u_{,x} + 0.5(u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2); \quad \epsilon_y = v_{,y} + 0.5(u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2); \quad (5)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y};$$

while the bending strains are given by

$$\kappa_x = -w_{,xx}; \quad \kappa_y = -w_{,yy}; \quad \kappa_{xy} = -w_{,xy}. \quad (6)$$

Physical relationships for a component plate treated as an orthotropic with principal axes of orthotropy parallel to its edges are formulated in the following way:

$$\begin{aligned} N_x &= h*(K_{11}*\varepsilon_x + K_{12}*\varepsilon_y); & N_y &= h*(K_{12}*\varepsilon_x + K_{22}*\varepsilon_y); \\ N_{xy} &= h*K_{33}*\gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (7)$$

where:

$$\begin{aligned} K_{11} &= E_x / (1 - \nu_{xy} * \nu_{yx}); & K_{22} &= E_y / (1 - \nu_{xy} * \nu_{yx}) \\ K_{12} &= \nu_{yx} K_{11} = \nu_{xy} K_{22}; & K_{33} &= G_{xy} \gamma_{xy}. \end{aligned} \quad (8)$$

The dependence in Young's moduli and Poisson's ratios in (7) and (8) is as follows: $E_x * \nu_{yx} = E_y * \nu_{xy}$. (9)

The elastic problem is solved by the asymptotic Koiter method (4). Displacement field $\bar{U}$, and sectional force $\bar{N}$, are expanded in power series in the buckling mode amplitude ζ , (ζ is the amplitude of buckling mode divided by the thickness of the first component plate):

$$\bar{U} = \lambda * \bar{U}^{(0)} + \zeta * \bar{U}^{(1)} + \dots \quad \bar{N} = \lambda * \bar{N}^{(0)} + \zeta * \bar{N}^{(1)} + \dots \quad (10)$$

where the prebuckling fields are $\bar{U}^{(0)}$, $\bar{N}^{(0)}$ and the buckling modes fields are $\bar{U}^{(1)}$, $\bar{N}^{(1)}$.

By substituting the expansion (10) into equations of equilibrium, junction conditions and boundary conditions, the boundary value problems of zero and first order can be obtained. The zero approximation describes the prebuckling state while the first order approximation enables to determine the critical loads of global and local value and the buckling modes (5).

The described above method is applied to calculate the critical load values for isotropic columns in the inelastic range. The procedure is based on the fact that the relationships (3) and (7) have the identical form. So, the coefficients K_{11} - K_{33} can be replaced by coefficients A_{11} - A_{33} . In other words equating $K_{11} = A_{11}$, etc. the „false” parameters of orthotropy E_x , E_y , G_{xy} , ν_{yx} can be found out as functions of E_s , E_t , E , ν calculated for each value of the axial strain ε from the relation (2) describing the inelastic behaviour of a material. It should be noted that when the loading of a column is described by strains varying linearly along the column height the coefficients A_{11} - A_{33} are constant for the upper and lower flange and they are variable for a web. Therefore the component plates such as flanges can be treated as plates of constant orthotropy parameters and the web has to be analysed as a plate of a variable orthotropy, modelled by strips of different orthotropy parameters.

The problem is solved in a numerical way.

4. Results of numerical calculations

Some exemplary results are presented for columns of a cross-section shown in Fig.2b, subject to pure compression, of geometrical parameters as follows:

$b_1=40\text{ mm}$, $b_2=20\text{ mm}$, $b_3=4\text{ mm}$, $h_1=h_2=h_3=1\text{ mm}$, $l=140\text{ mm}$;

The material properties correspond to the aluminium alloy: $E=0.7 \times 10^5\text{ MPa}$, $\nu=0,32$; $\sigma_o=200\text{ MPa}$, $n=5$.

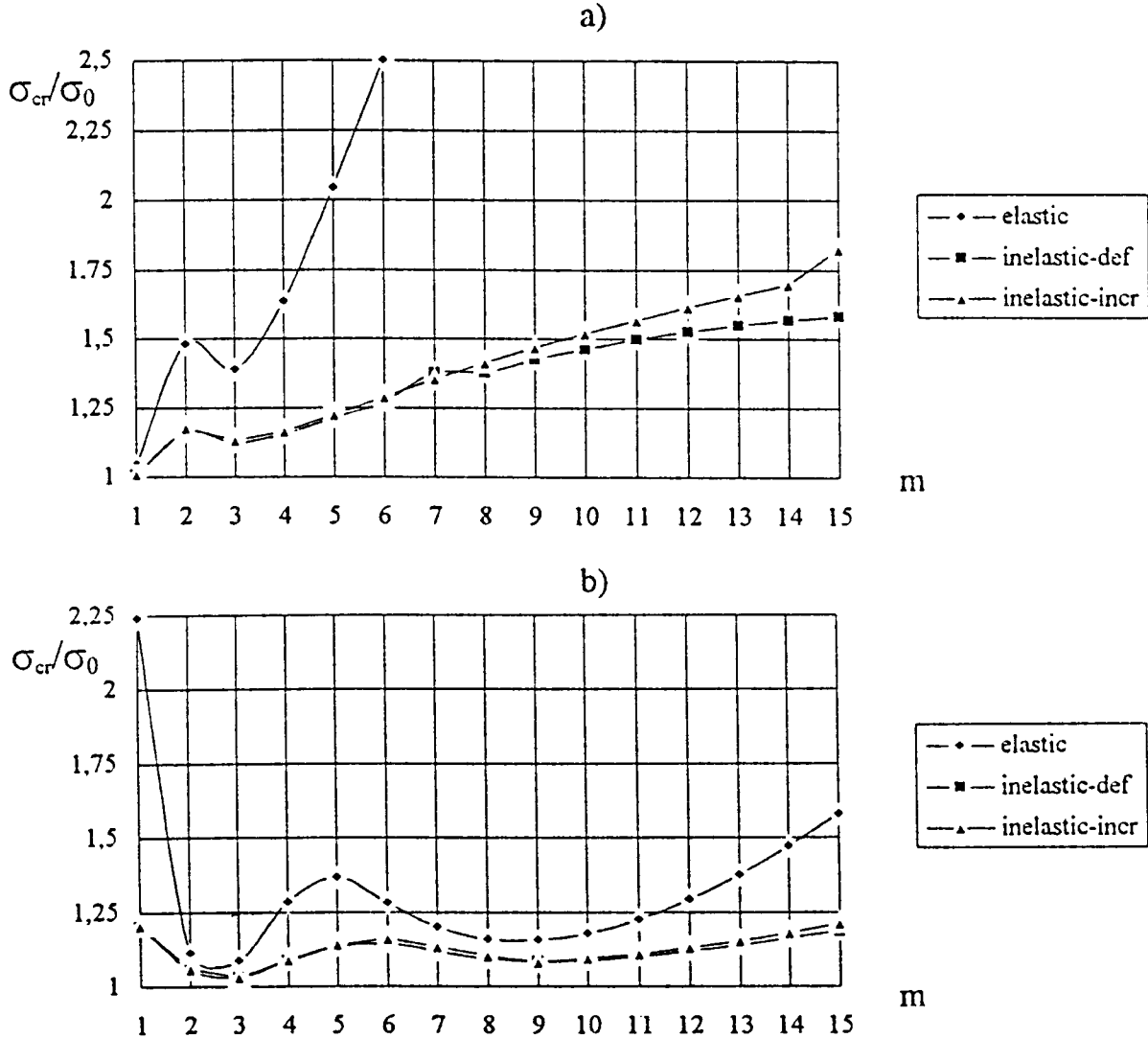


Fig. 2. Dimensionless critical stress σ_{cr}/σ_0 versus a number of axial half waves m

In Figs. 2a, 2b the dimensionless critical stress σ_{cr}/σ_0 as a function of axial half waves m is presented, assuming purely elastic and elastic-elasto-plastic behaviour of a material. In the inelastic range the equations of the deformation theory (*def*) and the incremental theory (*incr*) of plasticity have been applied. From Figs.2 follows that the value of global critical stress is lower when the

antisymmetrical mode of buckling is assumed (Fig.2a) - it corresponds to the flexural-torsional mode both in the elastic and elasto-plastic range (Fig.3b). In the case of symmetrical buckling (Figs.2b and 3a) the change of buckling modes occurs - from a flexural-distortional mode when the elastic behaviour of a material is assumed to the flexural buckling (dash-dotted line) in the inelastic range .

It should be underlined that the adaptation of a plate model in the buckling analysis with the strain tensor expressed by eqs. (6) allows to find out other than classical modes - so called „mixed modes” (2) - and gives lower values of the critical stress than the values obtained when a beam model is assumed.

If local buckling is considered $m > 1$ for symmetry conditions the curves presenting the critical stress have two minima (Fig.2b), assuming antisymmetrical mode only one minimum can be found out (Fig.2a). For each minimum the local buckling modes are of different shape.

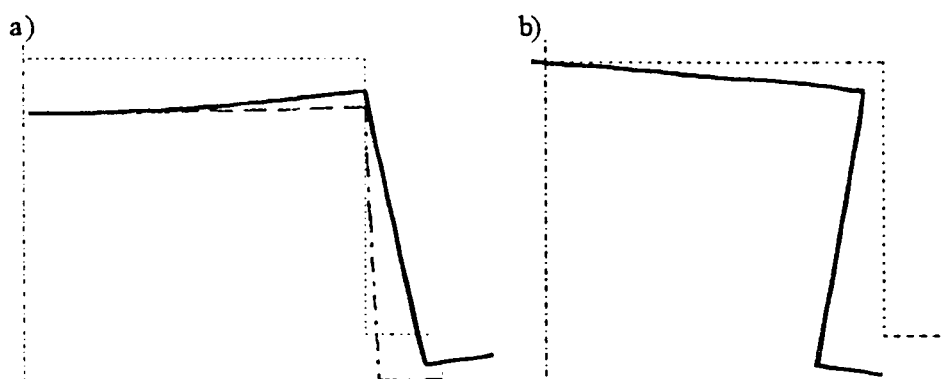


Fig. 3. Global buckling modes for columns with outside edge stiffeners

5. Final remarks

The presented method allows to find out all possible buckling modes (global and local, symmetrical and antisymmetrical) and also to investigate „mixed modes” occurring in columns of open cross-sections. The adaptation of a plate model in the buckling analysis with the strain tensor expressed by eqs. (6) gives lower values of the critical stress than the values obtained on the basis of the conventional theory of plates. The method elaborated for elastic orthotropic columns can be applied in the analysis of inelastic buckling of isotropic columns.

6. References

7. E. Byskov and J.W. Hutchinson, *ALAA J.*, 1977, pp. 941-948
8. D. Dubina, *Proc. of Sec. Int. Conf. on Coupled Instability in Metal Str.*, Imperial Press, 1996, pp. 119-132
9. R. Grądzki and K. Kowal-Michalska, *Thin Walled Structures*, 3, 1985, pp. 93-108
10. W.T. Koiter, , *Proc. of the Symp. on Nonlinear Problems*, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin, 1963
11. Z. Kołakowski and M. Królak, , *Engineering Transactions*, 43, 4, 1995, pp. 571-590, pp. 591-602
12. A. Needleman and V. Tvergaard, *Int. J. Mech. Sci.*, 17, 1975 pp. 419-424

NOŚNOŚĆ GRANICZNA CIENKOŚCIENNYCH SŁUPÓW Z CENTRALNYMI ŻEBRAMI POŚREDNIMI W RAMACH DRUGIEGO RZĘDU NIELINIOWEGO PRZYBLIŻENIA

Z. KOŁAKOWSKI

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, Poland*

A. TETER

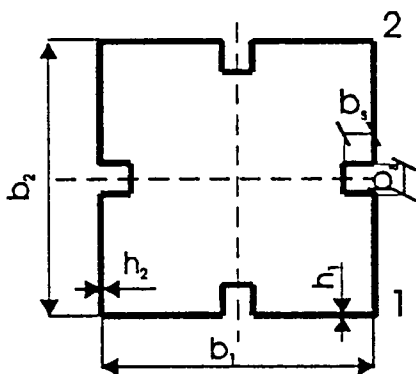
*Katedra Mechaniki Stosowanej Politechniki Lubelskiej
Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin, Poland*

W pracy przeanalizowano interakcyjne wyboczenie cienkościennych słupów wzmocnionych żebrawami pośrednimi. Żebra modelowano płytami. Przyjęto, że słupy są swobodnie podparte na obu końcach. Zastosowano drugi rząd nieliniowego przybliżenia asymptotycznej metody Byskowa i Hutchinsona [1] wykorzystując w obliczeniach numerycznych metodę macierzy przejścia. Analizę przeprowadzono dla różnych parametrów geometrycznych.

1. Wstęp

Wzrost zdolności do przenoszenia obciążenia i sztywności konstrukcji cienkościennej uzyskuje się najczęściej poprzez odpowiednie ukształtowanie przekrojów poprzecznych użytych elementów cienkościennych (np. poprzez wprowadzenie żebrowo-ści pośrednich). Żebra pośrednie są szeroko stosowane w wielu rodzajach konstrukcji metalowych. Omawiane usztywnienia przenoszą część obciążenia i dzielą element płytowy na mniejsze części powiększając w ten sposób znacznie ich nośność. Wielkość, kształt, położenie żebrowo-ści pośrednich wywierają istotny wpływ na krytyczne i zakrytyczne zachowanie się konstrukcji cienkościennych. Łatwość formowania konstrukcji cienkościennych umożliwia coraz szersze ich wykorzystywanie. Stosowanie żebrowo-ści wymaga jednak bardziej złożonej i wszechstronnej analizy pod działaniem narastających obciążeń (aż do obciążeń niszczących włącznie). Uwzględnienie płytowego modelu żebrowo-ści stwarza takie możliwości.

Konstrukcje cienkościenne mogą pracować po lokalnej utracie stateczności. Na skutek lokalnego wyboczenia następuje zmniejszenie wzdłużnej sztywności konstrukcji. Wzajemne oddziaływanie różnych postaci utraty stateczności, dla konstrukcji rzeczywistych obciążonych niedokładnościami wstępnymi, jest decydującym czynnikiem określającym nośność graniczną konstrukcji.



Rys. 2.1. Przekrój poprzeczny analizowanego słupa o przekroju zamkniętym.

Fig. 2.1. Type of closed cross-section considered.

Zastosowana metoda rozwiązania zagadnienia umożliwia uwzględnienie wszystkich typów postaci utraty stateczności, zjawiska shear-lag, efektu deplanacji przekrojów poprzecznych oraz uwzględnienie transformacji postaci wyboczenia wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego.

2. Postawienie zagadnienia

W pracy analizowano wpływ współdziałania różnych postaci wyboczenia cienkościennych słupów. Rozpatrzono pryzmatyczne, cienkościenne słupy o przekrojach zamkniętych (rys. 2.1) i otwartych wzmocnione centralnymi, wzdłużnymi żebrami pośrednimi zbudowanymi z płyt o boku: b_s . Omawiane słupy są zbudowane z płyt prostokątnych połączonych na wzdłużnych brzegach i podpartych swobodnie na obu końcach. Materiał wszystkich płyt podlega prawu Hooke'a.

Błonowe odkształcenie względne dla i -tej ścianki przyjęto w postaci:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ix} &= u_{i,x} + 0.5(w_{i,x}^2 + v_{i,x}^2); & \epsilon_{iy} &= u_{i,y} + 0.5(w_{i,y}^2 + v_{i,y}^2); \\ 2\epsilon_{ixy} &= \gamma_{ixy} = u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y} \end{aligned} \quad (1)$$

zaś zmiany krzywizn:

$$\kappa_{ix} = -w_{i,xx}; \quad \kappa_{iy} = -w_{i,yy}; \quad \kappa_{ixy} = -w_{i,xy}; \quad (2)$$

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczej ścianki wynikają następujące różniczkowe równania równowagi:

$$\begin{aligned} N_{ix,x} + N_{ixy,y} + (N_{iy}u_{i,y})_{,y} &= 0; & N_{iy,y} + N_{ixy,x} + (N_{ix}v_{i,x})_{,x} &= 0 \\ D_i \nabla \nabla w_i - (N_{ix}w_{i,x})_{,x} - (N_{iy}w_{i,y})_{,y} - (N_{ixy}w_{i,x})_{,y} - (N_{ixy}w_{i,y})_{,x} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

W miejscu połączenia ścianek spełniono odpowiednie geometryczne i statyczne warunki współpracy [3].

Nieliniowe zagadnienie stateczności rozwiązano asymptotyczną metodą E. Byskova i J. W. Hutchinsona [1]. Pola przemieszczeń $\bar{U}$ i sił $\bar{N}$ rozwinięto w szereg potęgowy względem amplitud postaci wyboczenia ξ_n (amplituda n -tej postaci wyboczenia odniesiona do grubości pierwszej płyty):

$$\bar{U} = \lambda \bar{U}_i^{(0)} + \xi_n \bar{U}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{U}_i^{(nn)} + \dots, \quad \bar{N} = \lambda \bar{N}_i^{(0)} + \xi_n \bar{N}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{N}_i^{(nn)} + \dots, \quad (4)$$

Pokrytyczne ścieżki równowagi dla konstrukcji cienkościennych z amplitudami imperfekcji $\bar{\xi}_n$ odpowiadającymi ξ_n są określone przez następujący układ N równań nieliniowych [1-3]:

$$a_J \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_J}\right) \xi_J + a_{ijJ} \xi_i \xi_j + b_{ijkJ} \xi_i^3 + \dots = a_J \bar{\xi}_J \frac{\lambda}{\lambda_J}, \quad J=1, \dots, N; \quad (5)$$

gdzie: λ - parametr obciążenia; λ_J - krytyczna wartość λ .

Wyrażenia na a_o , a_J , a_{ijJ} , b_{ijkJ} podano w pracach [1-2]. Pokrytyczne współczynniki a_{ijJ} zależą tylko od wartości krytycznych podczas gdy współczynniki b_{ijkJ} zależą ponadto od pól drugiego rzędu.

Wyznaczenie nieliniowych współczynników pokrytycznych oraz współczynników redukcji sztywności wzdłużnej w ramach nieliniowego drugiego rzędu przybliżenia pozwala opisać pełne zachowanie się konstrukcji cienkościennej w zakresie sprężystym.

W poniższych rozważaniach przyjęto następujące warunki brzegowe na obu poprzecznych końcach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = 0, y_i) dy_i &= \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = \ell, y_i) dy_i = N_{ix}^o; \\ v_i(x_i = 0, y_i) &= v_i(x_i = \ell, y_i) = 0, \quad w_i(x_i = 0, y_i) = w_i(x_i = \ell, y_i) = 0, \\ w_{i,xx}(x_i = 0, y_i) &= w_{i,xx}(x_i = \ell, y_i) = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

Analiza ograniczona tylko do pierwszego nieliniowego przybliżenia rozwiązania zagadnienia stateczności cienkościennych konstrukcji wskazuje wrażliwość konstrukcji rzeczywistych na niedokładności. Dobrze wiadomo, że konstrukcje, dla których lokalne wyboczenie poprzedza globalne $\lambda_1 \gg \lambda_2$, mogą przenieść obciążenie przewyższające obciążenie odpowiadające krytycznej wartości wyboczenia lokalnego. Analiza ich zachowania się nie zawsze może być otrzymana w ramach asymptotycznej teorii pierwszego nieliniowego przybliżenia, w której graniczne obciążenie jest zawsze mniejsze od minimalnej wartości obciążenia krytycznego zagadnienia liniowego. Konieczne jest zatem uwzględnienie drugiego rzędu przybliżenia, tzn. członów czwartego stopnia w energii potencjalnej, co pozwala wyznaczyć pokrytyczne ścieżki równowagi. W ogólnym przypadku w analizie stateczności należy rozwiązać zagadnienie brzegowe: dla lokalnych, globalnej i mieszanej postaci drugiego rzędu, jednakże w przypadku $\lambda_1 \gg \lambda_2$ główną rolę odgrywają lokalne postacie drugiego rzędu. Dla globalnej postaci drugiego rzędu dla eulerowskiego modelu słupa powyboczeniowy współczynnik dla niesprężonego wyboczenia jest równy zeru, a w przypadku dokładnego rozwiązania jest często mało istotny.

Pominięcie mieszanej postaci drugiego rzędu, z którą związane są człony typów $a_{1lii}\xi_1^2\xi_i^2$ ($i > 1$) i $a_{ijij}\xi_i^2\xi_j^2$ ($i, j > 1$; $i \neq j$) w energii potencjalnej, jest możliwe dzięki uwzględnieniu już członów typu $a_{lii}\xi_1\xi_i^2$ oraz $a_{lij}\xi_1\xi_i\xi_j$. Możliwość takiego pominięcia wykazał W. T. Koiter, S. Sridharan i M. H. Peng. Przyjęcie do analizy w ramach pierwszego nieliniowego przybliżenia członu typu $a_{lij}\xi_1\xi_i\xi_j$ ($i \neq j$), uwzględnia interakcję między globalną postacią i dwiema najbardziej niebezpiecznymi lokalnymi postaciami wyboczenia mającymi taką samą liczbę półfal. Ta drugorzędna lokalna postać wyboczenia jest analogiczna do mieszanej postaci drugiego rzędu, a zatem uwzględnienie jej w ramach pierwszego rzędu przybliżenia pozwala pominąć mieszane postaci drugiego rzędu.

W pracy [6] zajęto się analizą rozwiązania drugiego nieliniowego przybliżenia, uwzględniającego tylko lokalne postaci drugiego rzędu (tzn. podstawową i drugorzędną postać). Z warunku ortogonalności pól pierwszego i drugiego rzędu wynika, że należy zmienić ewentualnie amplitudy tylko rozpatrywanych harmonik dla każdej z lokalnej postaci drugiego rzędu. Prostota spełnienia warunku ortogonalności jest jedną z głównych przyczyn wybranego tutaj sposobu rozwiązania drugiego rzędu przybliżenia w postaci szeregów, w porównaniu z innymi sposobami.

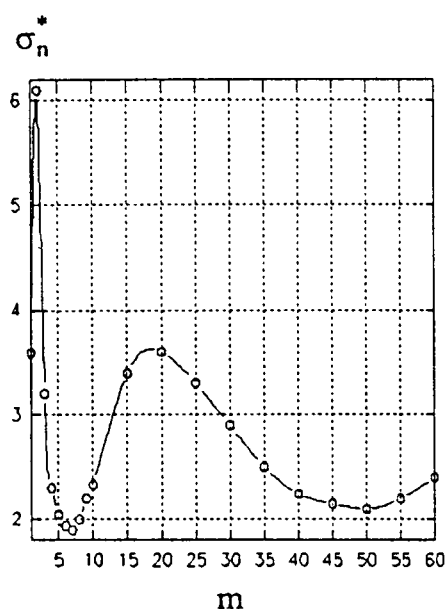
Równania dla lokalnych postaci drugiego przybliżenia zależą nie tylko od odpowiedniej lokalnej postaci pierwszego rzędu, ale ze względu na warunki ortogonalności, końcowe rozwiązanie zależy także od rozpatrywanych postaci pierwszego rzędu. Dlatego też każda z lokalnych postaci drugiego rzędu otrzymana przy uwzględnieniu interakcyjnego wyboczenia nie jest identyczna z postacią otrzymaną w ramach teorii jednomodalnego wyboczenia.

W analizie numerycznej badano pola drugiego rzędu, pokrytyczne ścieżki równowagi w funkcji parametrów konstrukcji oraz ich wpływ na obciążenie graniczne.

Obliczenia potwierdziły, że w przypadku, gdy wartość obciążenia globalnego przewyższa obciążenie lokalne, jest możliwe osiągnięcie nośności granicznej większej od minimalnej wartości obciążenia lokalnego dla umiarkowanie małych wartości imperfekcji. Uwzględnienie w analizie sprzężonego wyboczenia drugiego rzędu przybliżenia istotnie ogranicza teoretyczny obszar czułości na niedokładności.

3. Analiza wyników obliczeń

Szczegółowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla ściskanych słupów o przekrojach zamkniętych wzmocnionych centralnymi C-żebami pośrednimi pokazanych na rys. 2.1, o następujących wymiarach: $b_1 / b_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 1$, $l / b_2 = 20$, $b_1 / h_1 = 100$. Żebra pośrednie modelowano płytami.



Rys. 3.1. Wykres bezwymiarowych naprężeń krytycznych w funkcji liczby półfal m dla ściskanego słupa zamkniętego wzmocnionego centralnym C-żebrem pośrednim (rys. 2.1);

Fig. 3.1. Dimensionless stress carried by the number of half-waves m for uniform compression column with cross-section presented in Fig. 2.1.

Na rys. 3.1 przedstawiono zależność bezwymiarowych naprężeń krytycznych $\sigma_n^* = (\sigma_n / E) \cdot 10^3$ w funkcji: liczby półfal m dla założonego stosunku wymiaru wzmocnienia do grubości pierwszej płyty ($b_s / h_1 = 4$). Wprowadzenie żeber wzdłużnych powoduje wzrost obciążeń krytycznych odpowiadających wyboczeniu lokalnemu. Żebra pośrednie powiększają sztywność giętną elementów płytowych. Dla słupów wzmocnionych żebrami pośrednimi mogą wystąpić dwa minima lokalne dla lokalnych postaci wyboczenia. Pierwsze odpowiada mniejszej liczbie półfal m w porównaniu ze słupem bez wzmocnień, zaś drugie minimum odpowiada większej liczbie półfal. W szczególnych przypadkach wartości tych minimów dla lokalnych postaci wyboczenia mogą być sobie prawie równe. Obu tym minimom odpowiadają jednak różne postaci wyboczenia lokalnego [3, 5].

TABELKA 3.1. Wyniki obliczeń nośności granicznej dla słupa przedstawionego na rys.2.1.

Table 3.1. Load-carrying capacity for column with cross-section presented in Fig. 2.1.

Lp.	σ_1^*	σ_2^*	σ_3^*	σ_4^*	σ_5^*	σ_s^* / σ_m^*
1.	3,58694(1)	1,93448(7)	2,72152(7)	-	-	0,9200
1.a.	3,58694(1)	2,72152(7)	1,93448(7)	-	-	0,9726
2.	3,58694(1)	2,11045(51)	2,11458(51)	-	-	0,7232
2.a.	3,58694(1)	2,11458(51)	2,11045(51)	-	-	0,7244
3.	3,58694(1)	1,93448(7)	2,72152(7)	2,04475(5)	2,14602(9)	0,9202
4.	3,58694(1)	2,11045(51)	2,11458(51)	2,11461(49)	2,11321(53)	0,7182
5.	3,58694(1)	1,93448(7)	2,72152(7)	2,11045(51)	2,11458(51)	0,9200
6.	3,58694(1)	2,11045(51)	2,11458(51)	1,93448(7)	2,72152(7)	0,7890

Dla określenia maksymalnej wartości obciążenia (tzw. nośności granicznej) konstrukcji rzeczywistej z kilkoma postaciami własnymi jest konieczne uwzględnienie wzajemnego oddziaływania różnych postaci wyboczenia. W analizie interakcji należy jedynie uwzględnić globalną postać wyboczenia i dwie najbardziej niebezpieczne lokalne postaci mające takie same liczby półfal [4]. Szczegółowe obliczenia

numeryczne przeprowadzono dla słupów o ugięciach wstępnych: $\bar{\xi}_1 = |1,0|$, $\bar{\xi}_2 = |0,25|$, $\bar{\xi}_k = 0$ gdzie $k=3,\dots,N$.

W tabeli 3.1 przedstawiono wartości bezwymiarowych naprężeń krytycznych wraz z podaną w nawiasach liczbą półfal oraz wartości bezwymiarowej nośności granicznej σ_s^* odniesionej do minimalnej wartości naprężeń krytycznych $\sigma_m^* = \min.\{\sigma_1^*; \sigma_2^*; \sigma_k^*\}$ dla analizowanego słupa zamkniętego z C-żebrymi pośrednimi (rys. 2.1).

4. Literatura

1. Byskov E., Hutchinson J. W.: Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. AIAA J., 15, 7, 1977, pp. 941-948.
2. Kołakowski Z.: Influence of modification of boundary conditions on load carrying capacity in thin-walled columns in the second order approximation. Int. J. Solids Structures, Vol. 30, No. 19, 1993, pp. 2597-2609.
3. Kołakowski Z., Teter A.: Interactive buckling of thin-walled closed beam-columns with intermediate stiffeners. Int. J. Solids Structures, Vol. 32, No. 11, 1995, pp. 1501-16.
4. Królak M.: Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ściankach płaskich (praca zbiorowa) PWN Warszawa-Łódź 1990.
5. Teter A., Kołakowski Z.: Interactive buckling of thin-walled open beam-columns with intermediate stiffeners. Int. J. Solids Structures, Vol. 33, No. 3, 1996, pp. 315-330.
6. Koiter W. T., Kuiken G. D. C.: The interaction between local and overall buckling on the behaviour of built-up columns. WTHD Report 23, Delft, 1971.

LOAD-CARRYING CAPACITY FOR THIN-WALLED ELASTIC BEAMS WITH CENTRAL INTERMEDIATE STIFFENERS - SECOND NONLINEAR APPROXIMATION

The present paper deals with a nonlinear analysis of stability of the elastic thin-walled elastic beams with the thin-walled stiffeners. The beams are assumed to be simply supported at the ends. The investigation is concerned with a method for the approximate evaluation of the load carrying capacity of thin-walled structures based on the second order nonlinear approximation of the asymptotic theory of stability. The asymptotic expansion established by Byskov and Hutchinson [1] is carried out in the numerical calculations using the transition matrix method.

INTERNAL BUCKLING IN THE PRESTRAINED LAMINATED MEDIA

S. KONIECZNY

*Katedra Mechaniki Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź, Poland*

M. WOŹNIAK (Ms)

*Katedra Geotechniki i Budowli Inżynierskich Politechniki Łódzkiej
Al. Politechniki 6, 90-924 Łódź, Poland*

Cz. WOŹNIAK

*Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Częstochowskiej
Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa, Poland*

A new mathematical model for the internal stability analysis of multilayered periodic media is proposed. The approach includes the effect of lamina thickness on the global body behaviour. Some special results are discussed.

1. Introduction

The theory of internal stability in homogeneous anisotropic elastic media under initial stress was developed by M. A. Biot, (1, 2). The term *internal* means that we deal with a medium of infinite extent or confined by rigid boundaries. It was shown in (1) that this kind of stability is not possible in isotropic materials. Since the anisotropy can be created artificially by a micro-periodic distribution of material inhomogeneities therefore the results of Biot were also applied to investigate the internal buckling in laminated media composed by stacking alternative soft and hard layers of materials, (1). To do this we have to replace the periodic isotropic inhomogeneous solid by an equivalent homogeneous anisotropic medium. This procedure from the mathematical point of view is well known being referred to as *homogenization*, (3). However, the governing equations of an equivalent homogeneous anisotropic medium (obtained *via* the homogenization procedure) are independent of the lamina thickness. Roughly speaking, using the method proposed by Biot, which is also applied in many recent contributions, the effect of lamina thickness on the global solid behaviour is neglected. The aim of our contribution is to include this effect into the mathematical description of the internal buckling phenomena. The approach is based on that proposed in (4).

2. Analysis

2.1 Prerequisites

Let $Ox_1x_2x_3$ be Cartesian coordinate system in the reference space. The subject of analysis is a periodic laminated medium made by stacking alternatively soft and hard perfectly bounded layers of two linear elastic materials with interfaces normal to x_3 - coordinate, cf. Fig. 2.1. Moreover, the coordinate planes $x_3 = \text{const.}$ are assumed to be elastic symmetry planes. It is assumed that the medium is under constant initial strain with components e_{ij} (Latin and Greek indices take the values 1, 2, 3 and 1, 2, respectively) where $e_{\alpha 3} = e_{33} = 0$. Let l stand for the thickness of two adjacent laminae and hence is the period of inhomogeneity in the x_3 - axis direction. We are to show the existence of internal buckling under constant initial strain $e_{\alpha\beta}$ in the framework of a model which takes into account the effect of microstructure size l on a solid behaviour. The analysis will be restricted to the stationary problems.

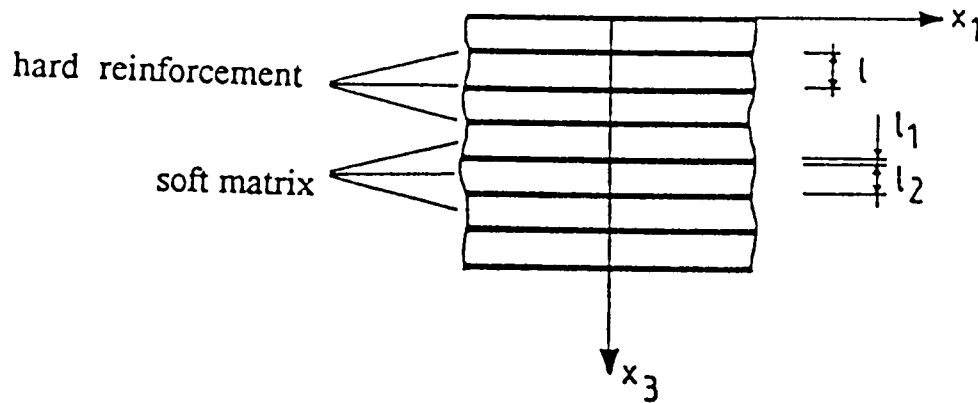


Fig.2.1. The scheme of a laminate

2.2 Assumptions

The strains and displacements superimposed on the initial strain $e_{\alpha\beta}$ are ϵ_{ij} and u_i , respectively. Due to the existence of an initial strain in the coordinate planes $x_3 = \text{const.}$ the possibility of buckling in the x_3 - axis direction will be taken into account. To this end the weak form of the equilibrium equations will be considered under assumption

$$\epsilon_{ij} = u_{(i,j)} + \frac{1}{2} u^3_{,i} u_{3,j} \quad (1)$$

Following the approach proposed in (4) we also assume

$$u_i = U_i + h V_i \quad (2)$$

where $h = h(x_3)$ is the l -periodic saw-like function which is continuous, linear across every lamina and takes the values $\sqrt{3} l$ and $-\sqrt{3} l$ alternatively on the interfaces. Functions U_i , V_i are the new basic unknowns and together with their derivatives, from the computational viewpoint, in every interval $(x_3, x_3 + l)$ and any (x_1, x_2) can be treated as constant modulo a certain tolerance parameter ε , cf. (4). Functions of this kind are called ε - *macrofunctions* (related to the microstructure length parameter l). Bearing in mind formulae (1) and (2) we shall postulate that the principle of virtual work is assumed to hold for every test function of the form $\bar{u}_i = \bar{U}_i + h \bar{V}_i$, where $\bar{U}_i$, $\bar{V}_i$ are arbitrary sufficiently regular ε - macrofunctions. Taking into account the stress-strain relations of the linear elasticity and using the averaging procedure explained in (4) we arrive finally at the system of equations for unknowns functions U_i and V_i . These functions will be called *macrodisplacements* and *quasi-internal variables*, respectively.

2.3 Results

In order to simplify the analytical description of the problem under consideration in the aforementioned equations all non-linear terms involving U_i and V_i will be neglected. At the same time we neglect the effect of body forces. Let $A^{ijkl} = A^{ijkl}(x_3)$ stand for components of the elastic modulae tensor which are l -periodic piecewise constant functions i.e. constant in every lamina. Define by

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{l} \int_0^l f(x_3) dx_3$$

the averaged value of an arbitrary integrable l -periodic function $f(\cdot)$. Introducing the following system of internal averaged forces

$$\begin{aligned} S^{ij} &= \langle A^{ijkl} \rangle U_{k,l} + \langle A^{ijk3} h_{,3} \rangle V_k ; \\ H^i &= \langle A^{i3kl} h_{,3} \rangle U_{k,l} + \langle A^{i3k3} (h_{,3})^2 \rangle V_k ; \\ R^{i\alpha} &= l^2 \langle A^{\alpha i \beta k} \rangle V_{k,\beta} \end{aligned} \quad (3)$$

we obtain the governing equations for the investigation of *internal buckling in the prestrained laminated medium* :

$$\begin{aligned}
S^{\alpha j}_{,j} &= 0 ; \\
S^{3j}_{,j} + e_{\alpha\beta} < A^{\alpha\beta\gamma\delta} > U^3_{,\gamma\delta} &= 0 ; \\
R^{\alpha\beta}_{,\beta} - H^\alpha &= 0 ; \\
R^{3\beta}_{,\beta} - H^3 + l^2 e_{\alpha\beta} < A^{\alpha\beta\gamma\delta} > V^3_{,\gamma\delta} &= 0 ; \quad (4)
\end{aligned}$$

The above equations have to be considered together with homogeneous boundary conditions, cf (4). Substituting the right-hand sides of Eqs (3) into Eqs (4) we arrive at the system of three equations for macrodisplacements U_i coupled with three equations for unknowns V_i . It can be seen that the equations for V_i do not involve derivatives of V_i with respect to x_3 ; that is why V_i were called quasi-internal variables, (4). It has to be emphasized that every solution to equations (3), (4) has a physical meaning only if $U(x_1, x_2, \cdot)$, $V(x_1, x_2, \cdot)$ are ε -macro functions for every (x_1, x_2) . The model obtained depends on l and hence it is able to describe the effect of lamina thickness on the internal buckling of the laminated solid under consideration.

Neglecting terms depending on l we can eliminate V_i from the above equations. To this end we have to observe that $< A^{i3k3} (h,3)^2 >$ is a non-singular 3×3 matrix; denoting by C_{mn} the components of the inverse matrix, after some simple manipulations, instead of Eqs.(3) we obtain

$$S^{ij} = A_0^{ijkl} U_{k,l}$$

where

$$A_0^{ijkl} \equiv < A^{ijkl} > - < A^{ijm3} > C_{mn} < A^{kln3} > .$$

It can be proved that $A_0^{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$ is a positive definite form for every elastic modulae tensor A^{ijkl} . The above equation has to be considered together with the first and second from equations (4). In this case we deal with a certain equivalent homogeneous anisotropic continuum constituting the homogenized model of a laminated solid.

3. Applications

In order to evaluate the effect of lamina thickness on the internal stability we restrict considerations to the initial strain given by one non-zero component $e \equiv e_{11}$, and to the one-dimensional problem by assuming $U_i = U_i(x_1)$, $V_i = V_i(x_1)$. In this case from the general equations (3) and (4) two independent systems of equations for U_3 , V_1 and U_1 , V_3 , respectively, can be derived. In the analysis of internal buckling outlined below only sinusoidal deformations are considered. Substituting

$$U_3 = A_3 \sin \frac{\pi x_1}{L} ; \quad V_1 = A_1 \cos \frac{\pi x_1}{L}$$

into differential equations for U_3 , V_1 we obtain nontrivial solutions A_1 , A_3 to the resulting linear algebraic equations only for some critical values of $e \equiv e_{11}$ for which the internal instability takes place. For the laminate made of two isotropic materials with Lamé modulae given by the l -periodic piecewise constant functions $\lambda = \lambda(x_3)$, $\mu = \mu(x_3)$, the critical value of initial strain is equal to

$$e = -\frac{2 \langle \mu \rangle}{\langle \lambda + 2\mu \rangle} \left[1 - \frac{\langle \mu h_{,j} \rangle^2}{(1 + \eta) \langle \mu \rangle \langle \mu(h_{,j})^2 \rangle} \right] \quad (5)$$

where we have denoted

$$\eta \equiv \frac{\langle (\lambda + 2\mu) h^2 \rangle}{2 \langle \mu(h_{,j})^2 \rangle} \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \quad (6)$$

It can be shown that in any case condition $e < 0$ holds. The effect of lamina thickness on the critical value of initial strain is described by the nondimensional constant η and has to be taken into account only if the wavelength L of a deformation pattern is not small compared to the thickness l of two adjacent laminae. This situation takes place e.g. for a layer bounded by planes $x_l = 0$, $x_l = L$, where L is of an order of the lamina thickness l . Since in the framework of the linearized theory the absolute value of e is restricted by $|e| \ll 1$, therefore formula (5) has the physical meaning only if the term in the square brackets (which is always positive) is sufficiently small compared to 1. Such situation takes place if $l_1 \ll l_2$, $\mu_1 \gg \mu_2$, $\lambda_1 \gg \lambda_2$ where l_1 , μ_1 , λ_1 and l_2 , μ_2 , λ_2 stand for the thickness and Lamé modulae of the adjacent laminae. Roughly speaking, the internal instability under initial strain is possible only if we deal with a hard reinforcement embedded in a soft matrix material. Some numerical

results are shown in Fig.3.1 under assumption that $\mu_2/\mu_1 = \lambda_2/\lambda_1$, where the ratio $\xi \equiv \mu_2/\mu_1$ is used as a parameter and $\delta \equiv l_1/l_2$ is a structural constant. The diagrams in Fig 3.1 are restricted to the cases in which $1+\eta \approx 1$ i.e, the effect of lamina thickness on the internal buckling can be neglected. More general discussion of the problem under consideration will be investigated in the lecture.

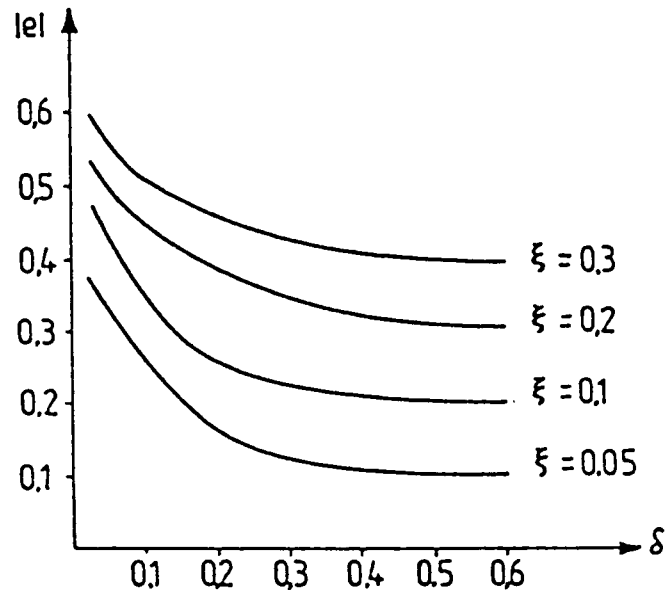


Fig.3.1. Critical values of the initial strain versus structural constant δ

References

1. Biot M.A., *Internal buckling under initial stress in finite elasticity*, Royal Soc. London Proc., ser. A., Vol. 273 (1963), 306-328
2. Biot M.A., *Theory of stability of multilayered continua in finite anisotropic elasticity*, Journ. Franklin Inst., Vol. 276 (1963), 128-153
3. Jikov V.V, Kozlov S.M., Oleinik O.A, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin 1994
4. Woźniak Cz., *Internal variables in dynamics of composite solids with periodic microstructure*, Arch. Mech., Vol. 49 (1997)

DYNAMICS AND STABILITY OF NONPERIODIC MULTILAYERED PLATES

S. KONIECZNY, B. TOMCZYK

*Department of Structural Mechanics, Technical University of Łódź
Al. Politechniki 6, 93-590 Łódź*

The method of macro-modelling of nonperiodic multilayered elastic plates has been proposed in [1]. The proposed method is based on certain concepts of the nonstandard analysis [2,3] combined with some a priori postulated physical assumptions. In this paper, using this method the homogenized model of nonperiodic plate will be derived and applied to the evaluation of inhomogeneity effects on a critical force and a free vibration frequency for a simply supported laminated plate.

1. Introduction

An underformed plate which occupies a region Ω in physical space (parametrized by cartesian orthogonal coordinates x_1, x_2, x_3) bounded by the coordinate planes $x_3=h^+$, $x_3=h^-$ where $h^+>0$, $h^-<0$ and by cylindrical surface $\Gamma \equiv \partial\Pi \times (h^-, h^+)$, where Π is a regular region on $0x_1x_2$ plane is considered in the analysis. We define $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $\mathbf{x}_\alpha \equiv (x_1, x_2) \in \Pi$, $\mathbf{x}^3 \in [h^-, h^+]$, $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$ stands for a time coordinate.

The plate is made of N basic layers bounded by the coordinate planes $x_3=h^-+\zeta_K$, $K=0, 1, 2, \dots, N$, with $\zeta_0=0$, $\zeta_N=h$, where $h=h^+-h^-$ denotes the thickness of the plate; ζ_{K-1} describes the distance of K -th basic lamina from the boundary plane $x_3=h^-$. The thickness $\epsilon_K \equiv \zeta_K - \zeta_{K-1}$, $K=1, 2, \dots, N$, ($\zeta_K > \zeta_{K-1}$), of every basic layer is assumed to be sufficiently small when compared to the thickness h of the plate; this means that we shall deal with the nonperiodic plates made of a large number of laminae. Moreover, let every basic layer (ζ_{K-1}, ζ_K) consists of three sublayers, made of three different homogeneous anisotropic linear-elastic materials; by δ_K , $\tilde{\delta}_K$ we denote the thicknesses of upper and middle sublayer of K -th basic unit, respectively.

Throughout the paper subscripts i, j run over 1, 2, 3, subscripts $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ and indices a, d run over the sequence 1, 2. The summation convention holds with respect to all aforementioned indices.

The composite is loaded on the boundary planes $x_3=h^+$, $x_3=h^-$ by the known normal surface tractions $p_+^3(\mathbf{x}_\alpha, \tau)$, $p_-^3(\mathbf{x}_\alpha, \tau)$, respectively, and on the part Γ of the boundary the displacements $u_\Gamma(\mathbf{x}, \tau)$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, are known. By $u_i(\mathbf{x}, \tau)$, $e_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$, $t_{ij}(\mathbf{x}, \tau)$, $b^3(\mathbf{x}, \tau)$ we denote displacements, strains, stresses and body forces, respectively, as functions defined (almost everywhere) on Ω .

We shall define the subsets of $[h^-, h^+]$ by means of:

$$\begin{aligned}
L &\equiv \bigcup_{K=1}^N \left(h^- + \zeta_{K-1}, h^- + \zeta_{K-1} + \eta_K \varepsilon_K \right); & \eta_K &= \delta_K / \varepsilon_K; & \tilde{\eta}_K &= \tilde{\delta}_K / \varepsilon_K; \\
S &\equiv \bigcup_{K=1}^N \left(h^- + \zeta_{K-1} + \eta_K \varepsilon_K, h^- + \zeta_{K-1} + (\eta_K + \tilde{\eta}_K) \varepsilon_K \right); \\
U &\equiv \bigcup_{K=1}^N \left(h^- + \zeta_{K-1} + (\eta_K + \tilde{\eta}_K) \varepsilon_K, h^- + \zeta_K \right); & K &= 1, 2, \dots, N; & & (1.1)
\end{aligned}$$

Hence the mass density $\rho(x_3)$ and the tensor of elastic constants $c^{ijkl}(x_3)$ of the nonperiodic plate under consideration will be given by:

$$\left(\rho(x_3), c^{ijkl}(x_3) \right) = \begin{cases} \left({}^L\rho, {}^L c^{ijkl} \right) & \text{gdy } x_3 \in L; \\ \left({}^S\rho, {}^S c^{ijkl} \right) & \text{gdy } x_3 \in S; \\ \left({}^U\rho, {}^U c^{ijkl} \right) & \text{gdy } x_3 \in U; \end{cases} \quad (1.2)$$

where ${}^L\rho, {}^L c^{ijkl}, {}^S\rho, {}^S c^{ijkl}, {}^U\rho, {}^U c^{ijkl}$ are material constants related to the parts $\Pi \times L, \Pi \times S, \Pi \times U$ of the region Ω , respectively.

We define the discrete functions [1], $(K=1, 2, \dots, N)$, such that:

$$\bar{\zeta}\left(h^- + \frac{Kh}{N}\right) \equiv \zeta_K; \quad \bar{\eta}\left(h^- + \frac{Kh}{N}\right) \equiv \eta_K; \quad \bar{\bar{\eta}}\left(h^- + \frac{Kh}{N}\right) \equiv \tilde{\eta}_K; \quad (1.3)$$

Next, we "approximate" functions $\bar{\zeta}(\cdot), \bar{\eta}(\cdot), \bar{\bar{\eta}}(\cdot)$ by certain smooth functions $\zeta(x_3), \eta_1(x_3), \eta_2(x_3)$, respectively, defined on the interval $[h^-, h^+]$:

$$\zeta: [h^-, h^+] \rightarrow [0, h]; \quad \eta_1: [h^-, h^+] \rightarrow (0, 1); \quad \eta_2: [h^-, h^+] \rightarrow (0, 1); \quad (1.4)$$

where $\zeta(x_3)$ is a strongly monotone function, such that $\zeta(x_3=h^-)=0, \zeta(x_3=h^+)=h$ and $\eta_1(x_3), \eta_2(x_3)$ must satisfy a condition: $\eta_1(x_3) + \eta_2(x_3) < 1$.

2. The primary problem

The governing equations of the plate under consideration will be represented by:

(i) The strain-displacement relations

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \tau) &= u_{(\alpha, \beta)}(\mathbf{x}, \tau) + u_{3, \alpha}(\mathbf{x}, \tau) u_{3, \beta}(\mathbf{x}, \tau) / 2; \\
\varepsilon_{\alpha 3}(\mathbf{x}, \tau) &= u_{(\alpha, 3)}(\mathbf{x}, \tau); \quad \varepsilon_{33}(\mathbf{x}, \tau) = u_{3, 3}(\mathbf{x}, \tau); \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \tau \in [\tau_0, \tau_f]; \quad (2.1)
\end{aligned}$$

(ii) The stress-strain relations

$$t^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \tau) = \bar{c}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_3) e_{\gamma\delta}(\mathbf{u})(\mathbf{x}, \tau); \quad t^{\alpha 3}(\mathbf{x}, \tau) = 2c^{\alpha 33\delta}(x_3) e_{3\delta}(\mathbf{x}, \tau); \quad (2.2)$$

where: $\bar{c}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_3) = c^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_3) - c^{\alpha\beta 33}(x_3) c^{\gamma\delta 33}(x_3) / c^{3333}(x_3)$;

(iii) The principle of virtual work

$$\begin{aligned}
& \int_{h^-}^{h^+} \int_{\Pi} [t^{\alpha\beta} \delta e_{\alpha\beta} + 2t^{\alpha 3} \delta e_{\alpha 3} + t^{33} \delta e_{33}] d\Pi dx_3 = \int_{\Pi} \left[p_+^3 \delta u_3 \Big|_{x_3=h^+} + p_-^3 \delta u_3 \Big|_{x_3=h^-} \right] d\Pi + \\
& + \int_{h^-}^{h^+} \int_{\Pi} \rho b^3 \delta u_3 d\Pi dx_3 - \int_{h^-}^{h^+} \int_{\Pi} \rho \ddot{u}_i \delta u_i d\Pi dx_3; \quad d\Pi \equiv dx_1 dx_2; \quad \delta u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma; \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Now we formulate the following:

Problem P: for known Ω , p_+^3 , p_-^3 , b^3 , initial and boundary conditions and ${}^L\rho$, ${}^Lc^{ijkl}$, ${}^S\rho$, ${}^Sc^{ijkl}$, ${}^U\rho$, ${}^Uc^{ijkl}$ as well as for known L, S, U , find the displacements $u(x, \tau)$ and stresses $t(x, \tau)$, $x \in \Omega$, $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$, such that Eqs.(2.1)-(2.3) under conditions (1.2) hold.

3. Passage to the nonstandard problem

Applying the approximation hypothesis [1] and the homogenization hypothesis [3] we will pass from P to the nonstandard problem $P^{(\tilde{\omega})}$.

The micro-macro localization hypothesis: the approximate solution to the nonstandard problem $P^{(\tilde{\omega})}$ can be expected in the class of functions given by:

$$\begin{aligned}
u_{\alpha}^{(\tilde{\omega})}(x, \tau) &= {}^*W_{\alpha}(x_{\alpha}, \tau) + x_3 {}^*D_{\alpha}(x_{\alpha}, \tau) + h_a(x_3) {}^*Q_{\alpha}^a(x_{\alpha}, \tau); \\
u_3^{(\tilde{\omega})}(x, \tau) &= {}^*W_3(x_{\alpha}, \tau); \quad x \in {}^*\Omega; \quad \tau \in {}^*[\tau_0, \tau_f]; \quad \alpha=1, 2, \quad a=1, 2; \quad (3.2)
\end{aligned}$$

where

- (i) *W_i , ${}^*D_{\alpha}$, ${}^*Q_{\alpha}^a$ are (sufficiently regular) unknown standard functions [2], fields W_i , D_{α} are called macrodisplacements [3], vector Q_{α}^a is called microlocal (or correction) parameters [3],
- (ii) $h_a(x_3)$ are postulated a priori, linear independent, nonstandard micro-shape functions [3]; they attain only infinitesimal values and hence the terms involving $h_a(x_3)$ can be neglected, but their derivatives attain values that are not infinitely small, so they play an essential role if we calculate the strains and stresses.

Taking into account the known theorems of the nonstandard integral calculus [2] and after neglecting the terms involving micro-shape functions (but not their derivatives!) we can pass from the nonstandard structure to the primary structure.

The approximate solution to the nonstandard problem $P^{(\tilde{\omega})}$ can be found as the solution to a certain problem $\tilde{P}$ for the macrodisplacements W_i , D_{α} and the correction parameters Q_{α}^a ; $x_{\alpha} \in \Pi$, $\tau \in [\tau_0, \tau_f]$, the problem will be called the effective (microlocal or standard) problem and it does not involve any nonstandard entity.

4. The effective problem

Since the functions W_i , D_α , Q_α^a are arbitrary and independent, then after denotations:

$$N^{\alpha\beta}(x_\alpha, \tau) = \int_{h^-}^{h^+} T^{\alpha\beta} dx_3; \quad M^{\alpha\beta}(x_\alpha, \tau) = \int_{h^-}^{h^+} x_3 T^{\alpha\beta} dx_3; \quad \hat{Q}^\alpha(x_\alpha, \tau) = \int_{h^-}^{h^+} T^{\alpha 3} dx_3;$$

$$p^3(x_\alpha, \tau) \equiv p_+^3 + p_-^3 + \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\rho}(x_3) b^3 dx_3; \quad \tilde{f} \equiv \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\rho}(x_3) dx_3; \quad \hat{f} \equiv \int_{h^-}^{h^+} \tilde{\rho}(x_3) x_3^2 dx_3; \quad (4.1)$$

where the mean stress tensor $T^{ij}(x, \tau)$ and the mean mass density $\tilde{\rho}(x_3)$ have a form:

$$T^{\alpha j}(x, \tau) \equiv {}^L t^{\alpha j}(x, \tau) \eta_1(x_3) + {}^S t^{\alpha j}(x, \tau) \eta_2(x_3) + {}^U t^{\alpha j}(x, \tau) (1 - \eta_1(x_3) - \eta_2(x_3)); \quad (4.2)$$

$$\tilde{\rho}(x_3) \equiv {}^L \rho \eta_1(x_3) + {}^S \rho \eta_2(x_3) + {}^U \rho (1 - \eta_1(x_3) - \eta_2(x_3)); \quad (4.3)$$

and using the divergence theorem as well as du Bois lemma, we obtain from the principle of virtual work the following equations of homogenized model:

(i) the plate equations of motion

$$N^{\alpha\beta}_{,\beta}(x_\alpha, \tau) = \tilde{f} \ddot{W}^\alpha(x_\alpha, \tau); \quad M^{\alpha\beta}_{,\beta}(x_\alpha, \tau) - \hat{Q}^\alpha(x_\alpha, \tau) = \hat{f} \ddot{D}^\alpha(x_\alpha, \tau);$$

$$\hat{Q}^\alpha_{,\alpha}(x_\alpha, \tau) + (N^{\alpha\beta}(x_\alpha, \tau) W_{3,\alpha}(x_\alpha, \tau))_{,\beta} + p^3(x_\alpha, \tau) = \tilde{f} \ddot{W}^3(x_\alpha, \tau); \quad (4.4)$$

(ii) the following system of linear algebraic equations for correctors:

$$P_{ab}^{\alpha 33\delta} Q_\delta^b(x_\alpha, \tau) = -h \llbracket c_a^{\alpha 33\delta} \rrbracket (W_{3,\delta}(x_\alpha, \tau) + D_\delta(x_\alpha, \tau)); \quad (4.5)$$

where:

$$P_{ab}^{\alpha 33\delta} \equiv \begin{cases} \int_{h^-}^{h^+} \left(\frac{{}^L c^{\alpha 33\delta}}{\eta_1(x_3)} + \frac{{}^S c^{\alpha 33\delta}}{\eta_2(x_3)} \right) dx_3 & \text{gdy } a = b = 1; \\ \int_{h^-}^{h^+} \left(\frac{{}^S c^{\alpha 33\delta}}{\eta_2(x_3)} + \frac{{}^U c^{\alpha 33\delta}}{1 - \eta_1(x_3) - \eta_2(x_3)} \right) dx_3 & \text{gdy } a = b = 2; \\ - \int_{h^-}^{h^+} \frac{{}^S c^{\alpha 33\delta}}{\eta_2(x_3)} dx_3 & \text{gdy } \begin{cases} a = 1 \text{ i } b = 2 \\ a = 2 \text{ i } b = 1 \end{cases} \text{ lub } \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\llbracket c_1^{\alpha 33\delta} \rrbracket \equiv {}^L c^{\alpha 33\delta} - {}^S c^{\alpha 33\delta}; \quad \llbracket c_2^{\alpha 33\delta} \rrbracket \equiv {}^S c^{\alpha 33\delta} - {}^U c^{\alpha 33\delta}; \quad (4.7)$$

A solution to the equations (4.5) can be written in the form

$$Q_\delta^b(x_\alpha, \tau) = -h K_{\delta 33\gamma}^{bd} \llbracket c_d^{\gamma 33\beta} \rrbracket (W_{3,\beta}(x_\alpha, \tau) + D_\beta(x_\alpha, \tau)); \quad (4.8)$$

$$\text{where } K_{\delta 33\gamma}^{bd} \text{ are defined by: } P_{ab}^{\alpha 33\gamma} K_{\delta 33\gamma}^{bd} = \delta_a^d \delta_\delta^\alpha; \quad (4.9)$$

(iii) the following plate constitutive equations

$$\begin{aligned}
N^{\alpha\beta}(x_\alpha, \tau) &= \bar{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[W_{(\gamma,\delta)}(x_\alpha, \tau) + W_{3,\gamma}(x_\alpha, \tau) W_{3,\delta}(x_\alpha, \tau) / 2 \right] + \bar{F}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{(\gamma,\delta)}(x_\alpha, \tau); \\
M^{\alpha\beta}(x_\alpha, \tau) &= \bar{F}^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[W_{(\gamma,\delta)}(x_\alpha, \tau) + W_{3,\gamma}(x_\alpha, \tau) W_{3,\delta}(x_\alpha, \tau) / 2 \right] + \bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{(\gamma,\delta)}(x_\alpha, \tau); \\
\hat{Q}^\alpha(x_\alpha, \tau) &= \left(B^{\alpha 33\beta} - H^{\alpha 33\beta} \right) \left[W_{3,\beta}(x_\alpha, \tau) + D_\beta(x_\alpha, \tau) \right]; \quad (4.10)
\end{aligned}$$

where:

$$\begin{aligned}
H^{\alpha 33\beta} &\equiv h^2 \llbracket c_a^{\alpha 33\delta} \rrbracket K_{\delta 33\gamma}^{ad} \llbracket c_d^{\gamma 33\beta} \rrbracket; \quad \bar{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_{h^-}^{h^+} \bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_3) dx_3; \\
B^{\alpha 33\beta} &\equiv \int_{h^-}^{h^+} C^{\alpha 33\delta}(x_3) dx_3; \quad \bar{F}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_{h^-}^{h^+} \bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_3) x_3 dx_3; \quad \bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_{h^-}^{h^+} \bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x_3) x_3^2 dx_3; \\
\bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv {}^L\bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_1(x_3) + {}^S\bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} \eta_2(x_3) + {}^U\bar{C}^{\alpha\beta\gamma\delta} (1 - \eta_1(x_3) - \eta_2(x_3)); \quad (4.11)
\end{aligned}$$

It can be proven that tensors $\bar{B}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\bar{F}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $\bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta}$, $(B^{\alpha 33\beta} - H^{\alpha 33\beta})$ are positive definite.

Combining (4.10) and (4.4) we arrive at the system of five nonlinear differential equations for five basic unknowns: W_i , D_α . However, in stability and vibration problems the governing system of equations will be written in the form:

$$\begin{aligned}
&\left\{ \left(B^{\alpha 33\beta} - H^{\alpha 33\beta} \right) \left[W_{3,\alpha\beta} + D_{(\alpha,\beta)} \right] + N^{\alpha\beta} W_{3,\alpha\beta} + p^3 - \tilde{f} \ddot{W}_3 = 0; \quad (4.12) \right. \\
&\left. \left[\bar{F}^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[W_{\gamma,\delta\beta} + W_{3,\gamma} W_{3,\delta\beta} \right] + \bar{G}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma,\delta\beta} - \left(B^{\alpha 33\beta} - H^{\alpha 33\beta} \right) \left[W_{3,\beta} + D_\beta \right] - \hat{f} \ddot{D}^\alpha = 0; \right. \right. \\
&\left. \left\{ N_{\beta}^{\alpha\beta} - \tilde{f} \ddot{W}^\alpha = 0; \quad N^{\alpha\beta} = \bar{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \left[W_{\gamma,\delta} + \frac{1}{2} W_{3,\gamma} W_{3,\delta} \right] + \bar{F}^{\alpha\beta\gamma\delta} D_{(\gamma,\delta)} \right\} \quad (4.13) \right.
\end{aligned}$$

The underlined terms in (4.12), (4.13) depend on $\bar{F}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ and represent the coupling between $N_{\alpha\beta}$ and $M_{\alpha\beta}$ in the plate constitutive equations (4.10).

5. Applications

In order to illustrate the general results obtained in the paper we shall apply equations (4.12), (4.13) to the analysis of the stability and free vibrations of a rectangular plate which is simply supported on edges $x_1=0$, $x_1=a_1$. We shall treat this problem as onedimensional, setting $x_\alpha \equiv x_1$. For simplicity we shall neglect the inertia terms $\tilde{f} \ddot{W}^\alpha$ and the body forces. We also assume that $p^3=0$ and $N_{11}=N_{11}(\tau)$. Let:

$$W_3(x_1, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi}{a_1} x_1 e^{-i\omega m \tau}; \quad D_1(x_1, \tau) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \cos \frac{m\pi}{a_1} x_1 e^{-i\omega m \tau}; \quad (5.1)$$

Using the aforementioned assumptions and substituting (5.1) into (4.12) we obtain for $A_m \neq 0, B_m \neq 0$:

$$\begin{vmatrix} \tilde{f}\omega_m^2 - (B^{1331} - H^{1331})\lambda_m^2 + \bar{N}^{11}\lambda_m^2 & -(B^{1331} - H^{1331})\lambda_m \\ -(B^{1331} - H^{1331})\lambda_m & \hat{f}\omega_m^2 - \hat{G}^{1111}\lambda_m^2 - (B^{1331} - H^{1331}) \end{vmatrix} = 0; \quad (5.2)$$

where: $\bar{N}^{11}(\tau) = -N^{11}(\tau)$; $\hat{G}^{1111} \equiv \bar{G}^{1111} - (\bar{F}^{1111})^2 / \bar{B}^{1111}$; $\lambda_m = m\pi/a_1$.

Let us introduce parameters: $\xi \equiv H^{1331}(B^{1331})^{-1}$; $s^2 = B^{1331}(a_1)^2(\hat{G}^{1111}\pi^2)^{-1}$;

where ξ characterizes the relative heterogeneity of laminated plate structure (for $\xi=0$ we are dealing with a homogeneous plate) and s is the plate slenderness parameter.

a) if $\omega_m^2 = 0$, then for a critical force we obtain the condition:

$$\bar{N}_{kr}^{11} = B^{1331}(1-\xi)[1 + (1-\xi)s^2]^{-1}; \quad (5.3)$$

which describes the effect of the heterogeneity of a laminated plate structure on the plate stability.

(ii) if $\bar{N}^{11} = 0$ then, after neglecting terms $\hat{f}\omega_m^2$ we obtain the formula:

$$\omega_1^2 = \pi^2(\tilde{f}a_1)^{-1} B^{1331}(1-\xi)[1 + (1-\xi)s^2]^{-1}; \quad (5.4)$$

which has a form similar to (5.3) and characterizes the effect of a laminated plate structure on the plate free vibration frequency.

6. Conclusions

From numerical example, it follows that the effects of heterogeneity of the plate under consideration on a critical force and a free vibration frequency are negligibly small. However, if ξ is close to 1 then the heterogeneity of laminated plate structure leads to the sudden decrease of the critical force and the free vibration frequency.

References

1. Konieczny S., Tomczyk B., *Modelowanie płyt o nieperiodycznie warstwowej strukturze*, XXXVI Sympozjon Modelowanie w Mechanice, t.3 Gliwice (1997).
2. Robinson A., *Non-standard Analysis*, North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, (1996).
3. Woźniak C., *Nonstandard Analysis and Micromorphic Effects in Multilayered Elastic Composites*, Arch. Mech. Vol. 43 (1991), 385-392.

SOME CONTRIBUTIONS INTO A SOLUTION FOR PLASTIC MECHANISMS IN THIN-WALLED BEAMS

M. KOTELKO

*Department of Strength of Materials and Structures,
Technical University of Łódź, Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, Poland*

Two contributions into the problem of plastic mechanisms in thin-walled box-section beams are presented in the paper. The first solution concerns a beam built of strain-hardening isotropic material and incorporates membrane strain energy in the total energy of plastic deformation. The second solution takes into account orthotropic properties of a beam material while a rigid-perfectly plastic behaviour of the material is considered. Numerical results are presented in diagrams showing an energy of plastic deformation and bending moment at the global plastic hinge in terms of rotation angle at that hinge.

1. Introduction

A problem of the load-carrying capacity at collapse of a thin-walled structure which is of significant importance according to some aspects (1), can be solved on the basis of the rigid-plastic theory and accomplished using the energy method.

The method was applied by several authors who investigated plastic mechanisms in thin-walled beams (2) and columns (4). Solutions comprised in those papers are based upon some simplifications which allow to formulate a relatively simple theoretical model of the problem. These assumptions are :– a rigid-perfectly plastic behaviour of the structure material, – neglecting of membrane strains in mechanism walls (*true mechanism*), – limitation of plastic zones to concentrated yield lines of infinitesimal width.

Some authors (3),(4) have recently taken up research into an incorporation of the strain-hardening characteristic of a structure material in the plastic mechanism analysis. A different problem which has not been investigated so far is an influence of orthotropic properties of the material upon a collapse of the structure. One can face this problem not only in the case of steel structures but also of structures built of composites and stiffened structures which are of structural orthotropy. Considering the last case a paper (5) should be mentioned.

A present paper is an contribution into of the solution of the plastic mechanism problem and also is a continuation of the work (3). A new factor incorporated is a preliminary study of the plastic mechanism in orthotropic structure and of an influence of orthotropic properties on an energy absorbed and load-carrying capacity at collapse.

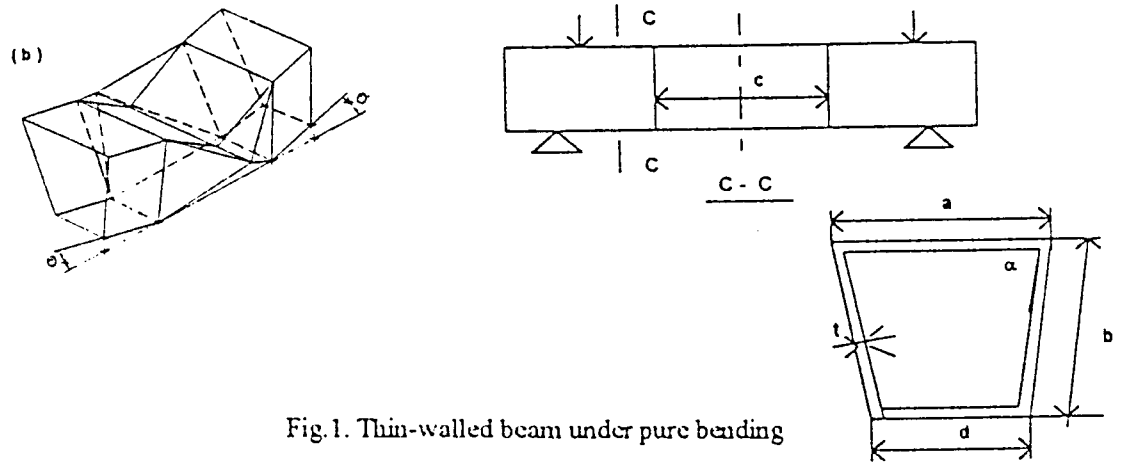


Fig.1. Thin-walled beam under pure bending

2. Subject of the analysis

A subject of the analysis was a thin-walled beam of trapezoidal cross-section (Fig.1). The beam was stiffened by diaphragms at a distance c from each other. It was assumed to be subject to a bending moment constant between two adjacent diaphragms. A plastic mechanism of failure taken into consideration is shown in Fig.1b. This mode of failure was confirmed in several experimental tests (1) and also by means of FEM analysis. It can be observed in both trapezoidal and rectangular cross-section beams of an outline close to the square.

3. Energy of plastic deformation for a beam built from strain-hardening material

An energy of plastic deformation absorbed during collapse of a thin-walled beam is evaluated below under assumptions given in (2), (3). While taking into account a strain hardening behaviour of the beam material, the following stress-strain relation is assumed

$$\sigma = \sigma_y + E_t \cdot \varepsilon \quad (3.1)$$

where E_t - tangent modulus, σ_y - yield stress, ε - linear strain at a yield line cross-section. The strain is regarded to be a sum of two components $\varepsilon = \varepsilon_b + \varepsilon_m$ which are

a bending strain resulting from the Bernoulli hypothesis and a membrane strain in a yield strip, coming from compression or tension at a limited yield area - respectively. It should be emphasized here that a considered mechanism is a *true mechanism* i.e. it can be developed without inducing any membrane strain in its walls. However, due to the stress and strain distribution assumed (Fig.2.) a membrane strain appears at a yield strip.

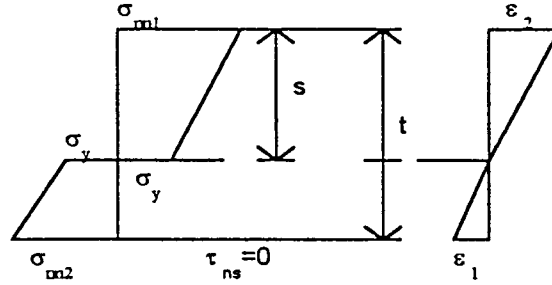


Fig.2. Stress and strain distribution at a yield line

Two following postulates (..), (..) are taken into the analysis

$$\rho = nt / \beta \quad \text{and} \quad \epsilon_b = \beta / 2n$$

where β is an angle of relative rotation between two adjacent walls of the mechanism along a yield line, ρ is an approximated *rolling radius* while n is a multiple of the beam wall thickness, determined either experimentally or in minimalization procedure. Thus, the principle of virtual velocities takes form

$$M \cdot \theta = \sum_i t_1 l_i \int_0^{\beta_i} (\sigma_{nn} \epsilon_m \rho) d\beta + \sum_i l_i \int_0^{\beta_i} (m_{i\beta} \dot{\beta}_i) d\beta + \sum_j \dot{\Gamma}_j (m_{j\beta}, \rho_j, \beta_j) d\beta \quad (3.2)$$

where

- M - bending moment at the global plastic hinge,
- θ - angle of relative rotation of two beam parts in the global plastic hinge,
- l_i - length of a stationary yield line,
- $m_{i\beta}$ - plastic moment at a yield line,
- t_1 - thickness of the compressed core of the wall cross-section,
- $\dot{\Gamma}$ - energy absorbed at a local plastic hinge (1), (2).

The total energy of plastic deformation is expressed as a sum of two components $\Pi = W + E_m$, where W is a plastic energy of bending deformation and E_m is a membrane strain energy. The second component E_m was neglected in hitherto

existing solutions (3) without any quantitative estimation of its contribution into the total energy of plastic deformation. Under assumptions taken above an energy E_{mi} absorbed during relative rotation of two walls of the plastic mechanism along i^{th} stationary yield line takes form

$$E_{mi} = \iint_A N_i \varepsilon_m dA$$

where N_i is an axial load per unit width in a plate member of the beam. Taking the assumptions given in (2), (3), the energy E_{mi} can be evaluated as follows

$$E_{mi} = \frac{\sigma_{cr}^2 t^2}{E_t} \cos^4 \gamma \cdot \alpha_n \phi_{n\beta} \cdot \Psi_e \cdot l_i \quad (3.3)$$

where $\phi_{n\beta} = \ln(2n\sigma_y + E_t\beta) - \ln(2n\sigma_y)$, Ψ_e and α_n are coefficients depending upon a situation of a yield line (flange/web) and a geometry of the beam cross-section, γ is an angle of inclination of a yield line with respect to the normal load direction (2) while σ_{cr} and σ_y are buckling stress in the compressed flange and a yield stress of the beam material respectively.

An energy of membrane deformation absorbed at j^{th} traveling yield line or local plastic hinge (3) is evaluated as

$$\Xi_{mj} = \int_0^{\beta_j} F(\rho_j, \phi_{n\beta}^j, l_j) d\beta \quad (3.4)$$

The plastic energy W of bending deformation has been formulated in (3) as

$$W = \sum_i l_i \int_0^{\beta_i} m_{i\beta} d\beta + \sum_j \int_0^{\beta_j} \Gamma_j(m_{j\beta}, \rho_j, \beta_j) d\beta \quad (3.5)$$

Thus, the total energy of plastic deformation is as follows

$$\Pi = W + \sum_i E_{mi} + \sum_j \Xi_{mj} \quad (3.6)$$

4. Energy of plastic deformation for orthotropic beam material

In this paragraph an orthotropic plasticity theory is introduced in the plastic mechanism analysis. For simplicity a rigid - perfectly plastic behaviour of a beam material is taken into consideration. A system of coordinates is chosen so that x is parallel to the beam longitudinal axis and y is perpendicular to this direction.

Furthermore these two directions are principal direction of orthotropy. When the mechanism shown in Fig. 1 is reanalyzed one can notice that plastic deformations take place in direction which may be specified by an angle γ measured from x treated as a reference coordinate (2).

When applying a Hill's yield criterion for an orthotropic material, a yield stress corresponding to any direction γ is evaluated as

$$\sigma_{\gamma,y}^2 = \frac{\sigma_{1y}^2}{a_{10} \cos^4 \gamma + a_{20} \sin^4 \gamma - a_{120} \sin^2 \gamma \cos^2 \gamma + 0.75 a_{30} \sin^2 2\gamma} \quad (4.1)$$

where $a_{10}=1$, $a_{20} = \sigma_{2y}^2 / \sigma_{1y}^2$, $a_{330} = \sigma_{1y}^2 / \sigma_{\theta y}^2$, $a_{30} = (1/3) \cdot \sigma_{10}^2 / \tau_{12y}^2 \cdot \sigma_{1y}, \sigma_{2y}, \tau_{12y}$ are yield stresses in two orthogonal directions (one of them is x) and shear yield stress respectively, $\sigma_{\theta y}$ is a yield stress in direction inclined at θ with respect to the reference coordinate x .

For $\theta=45^\circ$ a coefficient a_{120} takes form $a_{120}=1+ a_{20} + 3a_{30} -4a_{330}$. The criterion (4.1) is then introduced into a fully plastic moment at a yield line (2)

$$m_{py} = \sigma_y t^2 / 4 \quad (4.2)$$

and subsequently to the energy of plastic deformation limited to an energy of bending deformation only

$$W(\theta) = \sum_{j=1}^m m_{pj} l_j \beta_j + \sum_{i=1}^k \Gamma_i(m_{pi}, \rho_i, \beta_i) \quad (4.3)$$

Thus the energy of plastic deformation for an orthotropic rigid-perfectly plastic material is approximated as $\Pi = W$.

5. Numerical results and comments

A contribution of an investigated membrane strain deformation into the total energy absorbed at collapse of the beam built of isotropic strain hardening material is shown in Fig. 3. It has been noticed that the lower b/t ratio the greater is the influence of this part of energy on the total energy of plastic deformation. The influence of this factor on the bending moment capacity at the global plastic hinge is significant for very low b/t ratio only.

An influence of orthotropic properties on both energy of plastic deformation and bending moment capacity for a beam built of rigid - perfectly plastic material is shown in Fig.4. The results are of preliminary character and the problem should be analyzed and discussed separately.

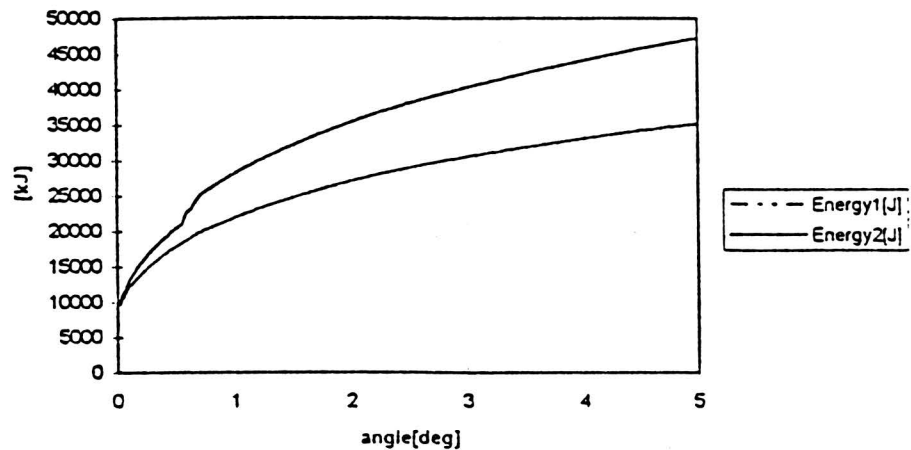
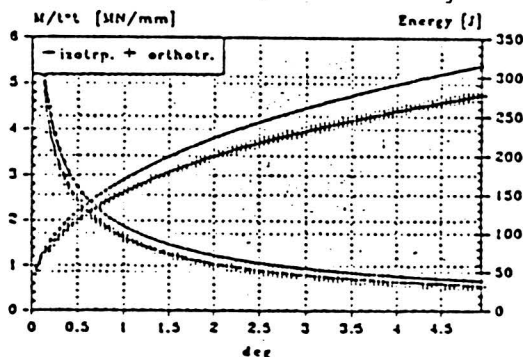


Fig.3. Energy of plastic deformation; 1 - bending strain energy, 2 - total.
 $a=d=60$ mm, $t=0.75$ mm, $E=2e5$, $E_t=2915$ [MPa], $\sigma_y=168$, $\sigma_{ult}=327$ [MPa]



$a=d=110$, $b=140$, $t=1$
 average yield stress = 225 MPa

Fig.4. Comparison of isotropic (σ_y average) and orthotropic material:

$$\sigma_{10}=250, \sigma_{20}=200, \sigma_{45}=175, \tau_y=150 \text{ [MPa]}$$

Bibliography

1. "Stateczność, Stany Zakrytyczne i Nośność Konstrukcji Cienkościennych i Ortotropowych Ścianach Płaskich", edited by Marian Królak, Politechnika Łódzka seria: Monografie, Łódź 1995
2. Kotelko M., *Ultimate load and postfailure behaviour of box-section beams under pure bending*, Engineering Transactions. v.44, Nr 2, 229-251, Warszawa 1996
3. Kotelko M., *Selected problems of collapse behaviour analysis of structural members built from strain-hardening material*, Proc. of Bicentenary Conf. of Thin-walled Structures, University of Strathclyde, Glasgow, Dec. 1996, to be published in Thin-Walled Struct, Elsevier Appl.Sci.
4. Wierzbicki T., Recke W., *Stress profiles in thin-walled prismatic columns subjected to crush loading - I,II*. Computers & Struct., v.51, No6, 1994
5. Kierkegaard H., *Ship collisions with icebergs*, PhD Thesis, Dept. of Ocean Engineering, DTU, Denmark 1993

ON BUCKLING MECHANISM OF REAL THIN-WALLED CYLINDERS AT AXIAL COMPRESSION

V.L.KRASOVSKY

*Department of Strength of Materials, Pridneprovsk State Academy of Civil
Engineering and Architecture, 320600, Dniepropetrovsk, Ukraine*

Results of experiments, conducted with the purpose of expansion and refinement of representations about loss of stability of real thin cylinders are summarized and discussed. Main attention is paid to features of buckling connected with localization of buckling patterns. Opportunity of the use of the existing approaches and methods for design of real shells is discussed.

1. Introduction

Experimental observations show that the picture of waveforming at loss of stability of isotropic circular cylinders compressed by longitudinal forces (N) is rather diverse and essentially depends on character and intensity of various perturbing factors, more often initial imperfections. General important peculiarity of possible buckling mechanism is local character of initiation of waveforming, connected with nonregularity of initial disturbances fields [1]. Up-to-date understanding of influence of a this feature on process of overall loss of stability is insufficient, that, basically, is one of reasons complicating calculation of carrying capacity of real shells.

To investigate the influence locality of waveformation initiation on the buckling mechanism, the behaviour of compressed shells was studied at all stages of deformation when initial local imperfections (dimples) were artificially amplified. Other perturbation factors (initial stresses, non-uniformity of loading, shell thickness variation, external influences) were reduced to a minimum (whenever possible), that permitted, alongside with qualitative results, to obtain reasonably reliable quantitative estimations of effects investigated.

2. Specimens and test procedure

Specimens were produced from the steel tape X18H9H (modulus of elasticity $E=191$ GPa, conditional yielding stress $\sigma_{0.2}=800$ MPa) by winding on a special drum with the subsequent dot welding. All shells had the same diameter $2R=143$ mm, relative working length $L/R=2$ and three typedimensions on the thickness $R/t=150; 260$ and 360 .

A load from a test machine UMM-50 press was applied to the shell through a test device, ensuring boundary conditions close to simple support and centering balls. Before the tests on the shells by pressing into the surface of spherical

segments were formed one or a few local dimples, differing in form and sizes (as the role of outside dimples in the mechanism of buckling is appeared to be insignificant, the main attention was given to the role of internal dimples). During the tests careful measurement of the shell shape of the shell in the imperfection zone was carried out.

3. Results and discussion

There was found that even a single initial dimple, depending on its characteristic dimensions, exerts an essential influence on the critical load (N_{cr}). The most important parameters of the dimple are its amplitude depth – f_0 , extent along perimeter, as well as extent of a generating line portion with large curvature. Variations of extent of dimples in the longitudinal direction and of dimple curvature – in the circular direction, as well as position of the dimple on the shell (on distance $2\sqrt{Rh}$ from the edges) don't influence essentially on the magnitude N_{cr} .

For shells with various geometry and identical in shape local dimples there were obtained dependencies of critical loads ($N^*=N_{cr}/N_{cl}$, where N_{cl} is the classical critical load value) from dimple depth (parameter $f^*=f_0/h$). In Fig.1 for shells with small shallow dimples (sizes of these dimples in circular direction did not exceed sizes of the critical dimples, and the curvature of a shell in the dimple zone changed slightly, see Fig.4,a,b, curves 1) there are presented dependencies $N^* - f^*$, illustrating features of behaviour and buckling of shells with local imperfections. The dark symbols on the figures correspond to overall buckling, light ones – to local buckling.

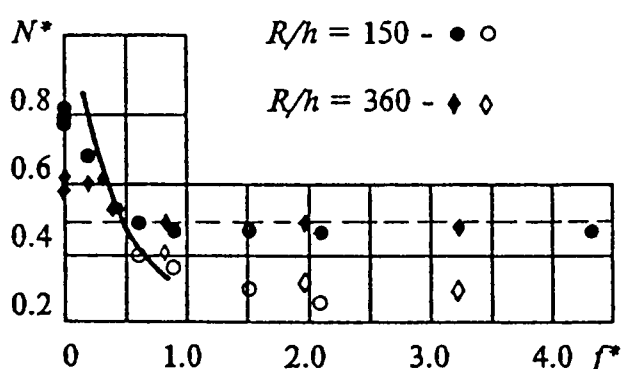


Fig.1 Critical loads versus f^* for shells with small shallow dimples

Features of prebuckling behaviour of shells are displayed by typical dependencies of amplitude of deflection in the initial dimple centre w_0 (parameter $w^*=w_0/h$) from magnitude of the load (parameter $\bar{N}=N/N_{cl}$), represented in Fig.2. Note, that the character of change of initial dimple parameters in prebuckling

state depends on its initial dimensions: for small dimples – is close to the linear (curves 2,3 in Fig.2), for large ones is essentially nonlinear (curves 4,5).

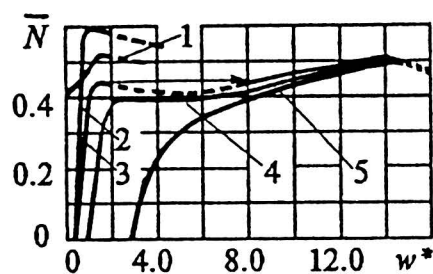
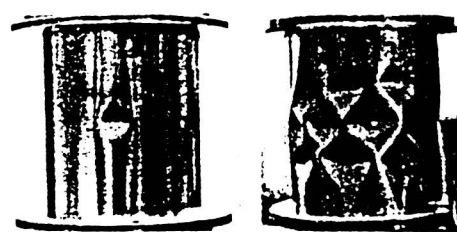


Fig.2. Dependencies of amplitude of the deflection from the load



a) b)
Fig.3. Postbuckling configuration:
local (a), overall (b)

Three ranges of f^* values can be distinguished within which effect of perturbations on behaviour and carrying capacity of shells differs: 1) the range where an artificial dimple doesn't influence on N_{cr} as buckling is initiated by imperfection dimples (low values of f^*); 2) the range in which an artificial dimple initiates a continuous process of overall buckling (moderate f^* ; at increasing f^* in this range a sharp decrease of N^* is marked); 3) the range in which a stable local postbuckling configuration precedes the overall buckling (Fig.3,a) (large values of f^* ; their magnitude doesn't influence on carrying capacity of shells). In the first and second zones initial dimples at transition to postbuckling state initiate continuous process of overall buckling, which occurs as an instant (by snap-through) change of the initial equilibrium state by a postbuckling configuration with two-three booms of characteristic diamond (Fig.3,b; see Fig.4,a,b, curve 4, also). In the third range the transition of initial dimple to postbuckling one doesn't lead to loss of bearing ability of the shell. Note that steady postbuckling configuration with one dimple was detected at local transverse external action on axially compressed thin-walled cylinder in experiments [2]. Minimal and maximal loads of existence of this mode were named as lower (N_l) and upper (N^l) local critical loads. At exceeding N^l the shell by a snap passes to the overall postbuckling mode, described earlier. Note that the values N_l and N^l are rather steady characteristics and in a wide range of change of geometrical parameters ($150 \leq R/h \leq 700$; $2.0 \leq L/R \leq 8$), do not practically depend on these parameters and equal to $(0.35-0.40)N_{cl}$ and $(0.48-0.52)N_{cl}$, respectively. Transition to the local postbuckling configuration happened by snap (curve 3,4 in Fig.2), or softly, in process of increase of a prebuckling dimple (curve 5).

In the present work behaviour of shells with one postbuckling dimple in all range of its existence from N_l up to N^l is investigated in details. The main results

are as follows. At N , close to N_l , a postbuckling dimple covers in the circular direction a corner of the order 23° – 30° (dimensions of the dimple slightly exceed the values, obtained by the classical formula for square dimples, see Fig.3,a). In a vicinity of this dimple a zone of "induced imperfection" is formed – consistently located in circular direction dimples, amplitudes of which depend on the sizes of the postbuckling dimple and, at removal from it sharply decrease (see Fig.4,b, curve 2). In this zone an increase of stresses occurs, in comparison with average, which stipulated with redistribution of internal forces because of decrease of rigidity of a shell portion, embraced with the postbuckling dimple. At increase of load from N_l up to N^l the postbuckling dimple sizes in circular direction grow on the average in 1,5 times, and depth – in 4–6 times (see Fig.4,a,b, curve 3). Amplitude of the induced dimples increases more intensively, that is stipulated both by an increase of the postbuckling dimple and by growth of stresses in the induced dimples zone (Fig.2, the curve 1 illustrates growth of induced dimple amplitude maximum).

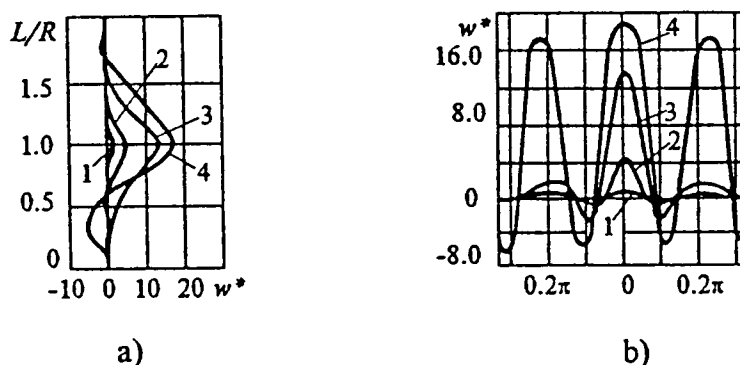


Fig.4. Surface shapes in the dimple zones: longitudinal direction (a), circular direction (b)

On the basis of these results the overall buckling loss mechanism in the case of a shell with single postbuckling dimple can be presented as follows. Obviously that maximal dimples of induced imperfection play role of the initiator of the overall wave-forming at $N=N^l$. In case, when the postbuckling dimple envelopes at low loads, state of these dimples-initiators is steady (at loads, close to N_l , their amplitude is insignificant, see Fig.2, curve 1), that stipulates a steady state of the local postbuckling configuration considered. When N reaches N_l one of induced dimples, being transformed to postbuckling one results in continuous chain process of overall waveforming, stipulated by effects of stresses redistribution and effects, connected with formation of secondary induced dimples.

The intensive growth induced dimples, as well as membrane stresses in this zone, (which occurs at increasing N from N_l up to N^l), enables us to explain

rather small values $N^l \approx 0.5 N_{cl}$ (at N close to N^l , postbuckling dimples cover only about $(1/10-1/8)$ of the shell perimeter). Note, that these low values N^l are stipulated, in fact, only by character of the stress-strain state of the shell in a vicinity of the dimple. So influence of initial imperfections has practically no an effect on value N^l , whence there follows, that for perfect shells with single postbuckling dimple the values of N^l would weakly differ from those in the experiment.

The described mechanism of the overall buckling of a shell with single postbuckling dimple may be extrapolated on the case of continuous waveforming (at $N_{cr} \geq N^l$), which is typical for high quality shells. Obviously, that at increase of the general level of stresses the development of postbuckling of the dimple-initiator is not finished, and the process of overall waveforming begins at the stage of unstable postbuckling state of the shell with a single dimple (redistribution of stresses and formation of induced dimples leads to earlier transition of the last to postbuckling ones and further propagation of waverformation). The mechanism described is agreed with observations of waveformation in high-quality shells, which were conducted with the use of high-velocity filming. The evaluation of a role in the buckling mechanism of the factors, connected with redistribution of stresses and formation of induced dimple zone shows, that at values N_{cr} , close to N^l , the role of induced dimple is more essential, and at N_{cr} , close to N_{cl} , – factor of redistribution of stresses dominates.

There were investigated behaviour and stability of shells with various number initial dimples, located on the surface in a certain maner. For some laws of distribution of initial dimples, in the case of great f^* ($f^*=1.5-2.0$), there are obtained dependencies of buckling loads from the number of dimples (n^0).

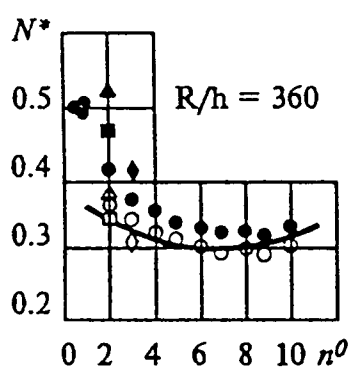


Fig.5. Critical loads versus n^0

In Fig.5 results of the tests of shells with artificial shallow dimples are presented (the last were put with the same step in the average cross section of the shell). The angle between centres of dimples equals to 0.2π , that corresponds to the angle between centres of postbuckling dimples, formed at buckling of the shell without disturbances. The test data are shown by circles. Here also results of the test of specimens with initial dimples, located in various booms are presented: 1) a shell with two dimples, located on one generating line (denoted by triangles); 2) a shell with two dimples, located in

adjacent booms; 3) shells with three dimples, two of which being located in one boom, and third – in the adjacent, between the two first (rhombus). Light marks respect to local buckling, dark marks – to the overall mode. The results received were generalized at consideration of buckling mechanism of real shells with arbitrary imperfections, as well as at estimation of applicability of existing methods of determination of bearing ability of such shells.

4. Conclusion

1. Two mechanism of overall loss of stability of real shells are possible depending on intensity of initial imperfections. The first mechanism is characteristic for qualitative shells. The process of overall buckling according to the first mechanism proceeds continuously in thousand fraction of second and accompanies by sharp fall of bearing ability. This process, as a rule, is initiated by transition of one or two initial dimples unstable in the postbuckling state. The second mechanism is characteristic in low-quality shells and is connected with consecutive transition of a shell through a number of steady local configurations. Accumulation, development and rearrangement of dimples result to overall buckling.

2. Critical state of qualitative shells is governed by a local geometry in a dimple zone (initiator of buckling). The value N_{cr} , despite distinction of a real mechanism (local character) and theoretical model, can be calculated by existing methods for shells with regular imperfections, parameters of which are determined by parameters of dimple-initiator of buckling (in Fig.1 for shells with $R/h=360$ appropriate theoretical curve [3] is presented). The bearing ability of low quality shells depends on overall distribution of imperfections. Determination N_{cr} for a given shell thus meets difficulties. In such cases it is possible to be guided by minimum value of the lower local critical load, presented in Fig.5 by the curve, which was received on the basis of the geometrical theory [4].

5. Acknowledgments

This work was supported, in part, by International Soros Science Education Program of the International Renaissance Foundation through grant № APU 062059.

6. References

1. Красовский В.Л. *Тр. ХУ Всес. конф. по теории оболочек и пластин*. 1. (Казань, 1990), 303–308.
2. Владимиров С.А. и др. *Изв. АН СССР. Мех. тв. тел.* № 4 (1969), 158–161.
3. Гейзенблазен Р.Е. и др. *Изв. АН СССР. Мех. тв. тел.* № 6 (1969), 119–122.
4. Моссаковский В.И. и др. *Прикладная механ.* 11, № 11 (1975), 24–36.

SPRĘŻONE WYBOCZENIE CIENKOŚCIENNYCH ORTOTROPOWYCH BELEK - SŁUPÓW O PRZEKROJACH OTWARTYCH

M. KRÓLAK
Z. KOŁAKOWSKI

*Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź*

W pracy przeanalizowano interakcyjne wyboczenie cienkościennych ortotropowych belek-słupów. Przyjęto, że słupy są swobodnie podparte na obu końcach. Zastosowano drugi rząd nieliniowego przybliżenia asymptotycznej teorii Koitera (3) wykorzystując w obliczeniach numerycznych metodę macierzy przejścia. Przeprowadzono analizę wpływu współczynnika ortotropii ścian o głównych kierunkach ortotropii równoległych do ich krawędzi na zachowanie się belek słupów o przekrojach otwartych.

1. Wstęp

Szybki postęp naukowo-technologiczny pozwala coraz szerzej stosować cienkościenne elementy nośne wykonane z materiałów kompozytowych (np. kompozyty włókniste). Materiały kompozytowe modeluje się najczęściej jako materiały ortotropowe. W związku z tym zagadnienie wpływu ortotropii materiału na zachowanie się konstrukcji i jej nośność staje się zagadnieniem aktualnym ze względów poznawczych i praktycznych.

Niektóre konstrukcje cienkościenne zbudowane z elementów płytowych mogą pracować po lokalnej utracie stateczności. Na skutek lokalnego wyboczenia następuje zmniejszenie wzdłużnej sztywności konstrukcji. Wzajemne oddziaływanie różnych postaci utraty stateczności, dla konstrukcji rzeczywistych obarczonych niedokładnościami wstępnymi, jest często decydującym czynnikiem określającym ich nośność graniczną. W bogatej literaturze dotyczącej zagadnień ortotropowych konstrukcji cienkościennych odczuwa się brak szczegółowej analizy sprzężonego wyboczenia uwzględniającego różnorodne postaci odpowiadające wyboczeniu giętnemu, giętno-skrętnemu, zwichrzeniu, lokalnemu, dystorsyjnemu oraz mieszanemu. Szersze omówienie literatury podano np. w (2,6,8,9).

W niniejszej pracy przeanalizowano zagadnienie interakcyjnego wyboczenia cienkościennych belek-słupów wykonanych z homogenicznych płyt ortotropowych o głównych kierunkach ortotropii równoległych do ich krawędzi. Zastosowana metoda rozwiązania zagadnienia umożliwia uwzględnienie wszystkich typów postaci utraty stateczności, zjawiska shear-lag, efektu deplanacji przekrojów poprzecznych oraz uwzględnienie transformacji postaci wyboczenia wraz ze wzrostem obciążenia zewnętrznego.

2. Postawienie zagadnienia

W pracy rozpatrzono pryzmatyczne, cienkościenne słupy o przekrojach otwartych zbudowane z homogenicznych ortotropowych płyt prostokątnych połączonych na wzdłużnych brzegach. Założono, że główne osie ortotropii płyt są równoległe do ich brzegów oraz że końce konstrukcji podparte są swobodnie. Materiał wszystkich płyt podlega prawu Hooke'a.

Dla i-tego pasma ortotropowego założono dokładniejsze zależności na odkształcenia względne dla cienkich płyt

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ix} &= u_{i,x} + \frac{1}{2}(w_{i,x}^2 + v_{i,x}^2), & \varepsilon_{iy} &= v_{i,y} + \frac{1}{2}(w_{i,y}^2 + u_{i,y}^2) \\ 2\varepsilon_{ixy} &= u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y}\end{aligned}\quad (1)$$

$$K_{ix} = -w_{i,xx} \quad K_{iy} = -w_{i,yy} \quad K_{ixy} = -w_{i,xy}$$

Dla rozpatrywanego przypadku ortotropii równania fizyczne mają następującą postać:

$$\varepsilon_{xi} = \frac{N_{xi} - \nu_{xyi}N_{yi}}{E_{xi}h_i}; \quad \varepsilon_{yi} = \frac{N_{yi} - \nu_{yxi}N_{xi}}{E_{yi}h_i}; \quad \varepsilon_{xyi} = \frac{N_{xyi}}{2G_ih_i} \quad (2)$$

Występujące w równaniach (2) moduły Younga i współczynniki Poissona zgodnie z twierdzeniem Betty'ego-Maxwella muszą spełniać związek:

$$E_{xi}\nu_{yxi} = E_{yi}\nu_{xyi} \quad (3)$$

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczej ścianki wynikają następujące różniczkowe równania równowagi:

$$N_{ix,x} + N_{ixy,y} + (N_{iy}u_{i,y})_{,y} = 0; \quad N_{iy,y} + N_{ixy,x} + (N_{ix}v_{i,x})_{,x} = 0; \quad (4)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + (N_{ix}w_{i,x})_{,x} + (N_{iy}w_{i,y})_{,y} + (N_{ixy}w_{i,x})_{,y} + (N_{ixy}w_{i,y})_{,x} = 0$$

W miejscu połączenia stykających się ścianek spełniono odpowiednie kinematyczne i

statyczne warunki współpracy oraz warunki brzegowe na obciążonych końcach ($x=0$, $x=1$) (4-9).

Nieliniowe zagadnienie stateczności rozwiązano asymptotyczną metodą Byskova i Hutchinsona (1). Pola przemieszczeń $\bar{U}$ i sił $\bar{N}$ rozwinięto w szereg potęgowy względem amplitud postaci wyboczenia ξ_n (amplituda n -tej postaci wyboczenia odniesiona do grubości pierwszej płyty):

$$\bar{U} = \lambda \bar{U}_i^{(o)} + \xi_n \bar{U}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{U}_i^{(nn)} + \dots, \quad \bar{N} = \lambda \bar{N}_i^{(o)} + \xi_n \bar{N}_i^{(n)} + \xi_n^2 \bar{N}_i^{(nn)} + \dots, \quad (5)$$

Po podstawieniu rozwinięć (5) do równań równowagi (4), warunków ciągłości i warunków brzegowych otrzymano zagadnienie brzegowe zerowego, pierwszego i drugiego rzędu (1,4,5,7). Aproksymacja zerowa opisuje stan przedwyboczeniowy, podczas gdy pierwszy rząd przybliżenia pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne i odpowiadające jemu postacie wyboczenia. Analiza ograniczona tylko do pierwszego nieliniowego przybliżenia rozwiązania zagadnienia stateczności cienkościennych konstrukcji wskazuje wrażliwość konstrukcji rzeczywistych na niedokładności. Dobrze wiadomo, że konstrukcje, dla których lokalne wyboczenie poprzedza globalne, mogą przenieść obciążenie przewyższające obciążenie odpowiadające krytycznej wartości wyboczenia lokalnego. Analiza ich zachowania się nie zawsze może być otrzymana w ramach asymptotycznej teorii pierwszego nieliniowego przybliżenia, w której graniczne obciążenie jest zawsze mniejsze od minimalnej wartości obciążenia krytycznego zagadnienia liniowego. Konieczne jest zatem uwzględnienie drugiego rzędu przybliżenia, tzn. członów czwartego stopnia w energii potencjalnej, co pozwala wyznaczyć pokrytyczne ścieżki równowagi.

Drugi rząd przybliżenia redukuje się do liniowego układu równań różniczkowych niejednorodnych, którego prawe strony zależą jedynie od pola sił i przemieszczeń pierwszego rzędu. Rozwiązanie tego układu równań przewidziano w postaci szeregów trygonometrycznych w kierunku wzdłużnym zaś w kierunku poprzecznym funkcje drugiego rzędu wyznaczono metodą macierzy przeniesienia, identycznie jak dla pierwszego rzędu (4-6,8,9). Prostota spełnienia warunku ortogonalności jest jedną z głównych przyczyn wybranego tutaj sposobu rozwiązania drugiego rzędu przybliżenia w postaci szeregów, w porównaniu z innymi sposobami. Równania dla lokalnych postaci drugiego przybliżenia zależą nie tylko od odpowiedniej lokalnej postaci pierwszego rzędu, ale ze względu na warunki ortogonalności, końcowe rozwiązanie zależy także od rozpatrywanych postaci pierwszego rzędu. Dlatego też każda z lokalnych postaci drugiego rzędu otrzymana przy uwzględnieniu interakcyjnego wyboczenia nie jest identyczna z postacią otrzymaną w ramach teorii jednomodalnego wyboczenia.

Pokrytyczne ścieżki równowagi dla konstrukcji cienkościennych z amplitudami imperfekcji $\bar{\xi}_n$ odpowiadającymi ξ_n są określone przez następujący układ N równań nieliniowych (1,3,7):

$$a_J \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_J} \right) \xi_J + a_{ijJ} \xi_i \xi_j + b_{ijkJ} \xi_J^3 + \dots = a_J \bar{\xi}_J \frac{\lambda}{\lambda_J}, \quad J=1, \dots, N; \quad (6)$$

gdzie: λ - parametr obciążenia; λ_J - krytyczna wartość λ .

Wyrażenia na a_o , a_J , a_{ijJ} , b_{ijkJ} podano w pracach (1,7). Pokrytyczne współczynniki a_{ijJ} zależą tylko od wartości krytycznych, podczas gdy współczynniki b_{ijkJ} zależą ponadto od pól drugiego rzędu. Wyznaczenie nieliniowych współczynników pokrytycznych oraz współczynników redukcji sztywności wzdłużnej w ramach nieliniowego drugiego rzędu przybliżenia pozwala opisać pełne zachowanie się konstrukcji cienkościennej w zakresie sprężystym.

W rozważaniach przyjęto następujące warunki brzegowe na obu poprzecznych końcach:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = 0, y_i) dy_i &= \frac{1}{b_i} \int N_{ix}(x_i = l, y_i) dy_i = N_{ix}^o; \\ v_i(x_i = 0, y_i) &= v_i(x_i = l, y_i) = 0, \quad w_i(x_i = 0, y_i) = w_i(x_i = l, y_i) = 0, \\ w_{i,xx}(x_i = 0, y_i) &= w_{i,xx}(x_i = l, y_i) = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

Dla scharakteryzowania sposobu obciążenia wprowadzono współczynnik zbliżenia brzegów $\kappa = u_1^{(0)} / u_2^{(0)}$, gdzie $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$ są wartościami przemieszczeń na końcach płyty.

3. Analiza wyników obliczeń

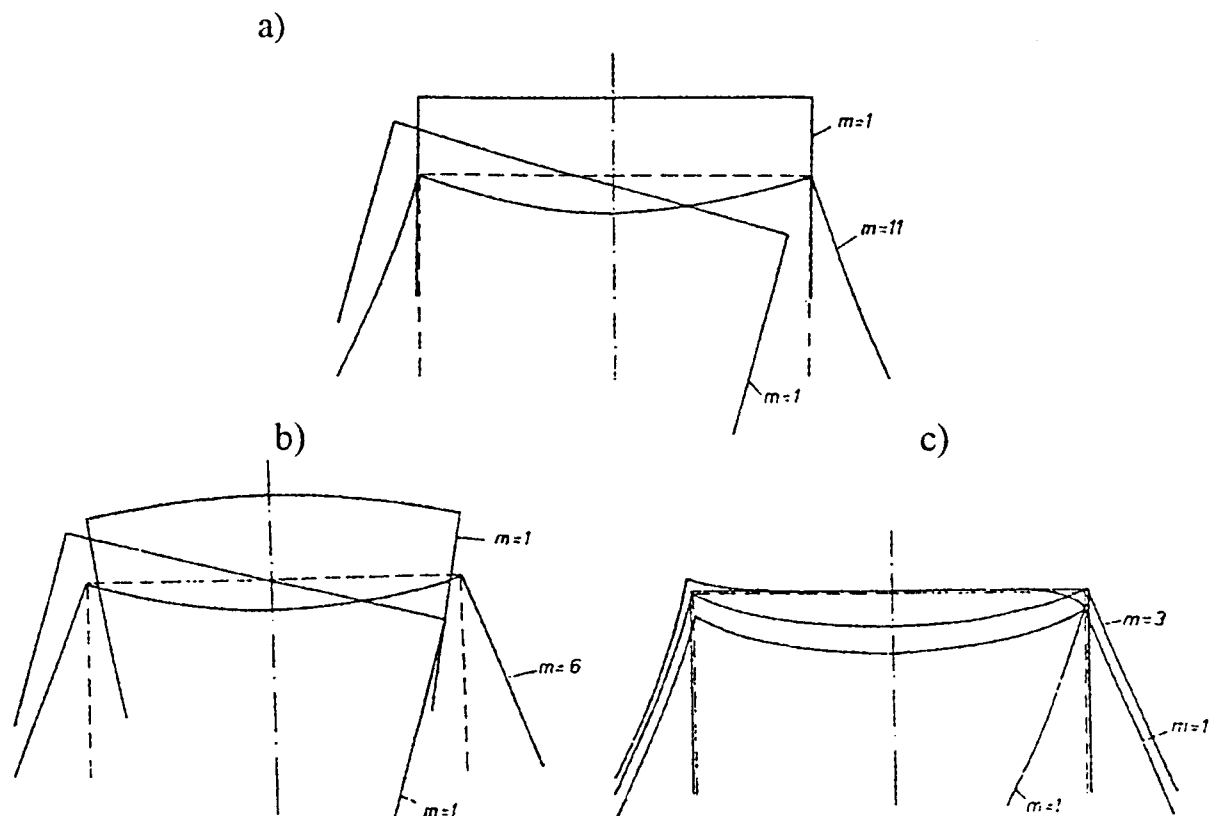
Szczegółowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla ściskanych ortotropowych słupów o przekrojach otwartych.

W analizie numerycznej badano pola drugiego rzędu, pokrytyczne ścieżki równowagi w funkcji współczynnika ortotropii $\beta = E_x/E_y$, parametrów konstrukcji, postaci wyboczenia oraz ich wpływ na obciążenie graniczne.

Dla określenia maksymalnej wartości obciążenia (tzw. nośności granicznej) konstrukcji rzeczywistej z kilkoma postaciami własnymi jest konieczne uwzględnienie wzajemnego oddziaływania różnych postaci wyboczenia. W analizie sprzężonego wyboczenia ograniczono się jedynie do uwzględnienia globalnej postaci

wyboczenia i dwóch najbardziej niebezpiecznych lokalnych postaci mających takie same liczby półfal (4,5).

Przykładowe postaci wyboczenia ściskanego słupa o przekroju ceowym dla różnych współczynników ortotropii β (2) przedstawiono na rys. 1.



Rys. 1. Globalne i lokalne postacie wyboczenia dla:

a - $\beta=0.0728$; b - $\beta=1.0$; c - $\beta=13.7362$

Fig. 1. Two global and local buckling modes for compressed column corresponding to: a - $\beta=0.0728$; b - $\beta=1.0$; c - $\beta=13.7362$

Obliczenia potwierdziły, że w przypadku, gdy wartość obciążenia globalnego przewyższa obciążenie lokalne, jest możliwe osiągnięcie nośności granicznej większej od minimalnej wartości obciążenia lokalnego dla umiarkowanych imperfekcji. Uwzględnienie w analizie sprzężonego wyboczenia drugiego rzędu przybliżenia istotnie ogranicza teoretyczny obszar czułości na niedokładności.

Wyniki obliczeń dla drugiego rzędu przybliżenia zostaną przedstawione podczas referowania pracy.

Praca wykonana w ramach grantu KBN nr PB-251/T07/97/12

Literatura

1. Byskov E., Hutchinson J. W.: *Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells*. AIAA J., 15, 7, 1977, pp. 941-948.
2. Chandra R. Raju B., *Postbuckling analysis for rectangular orthotropic plates*. Int. J. Mech. Sci. Vol. 16, 1973, pp. 81-97.
3. Koiter W.T., *Elastic stability and post-buckling behaviour*, *Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems*, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin, 1963, pp. 257-275.
4. Kolakowski Z., *Interactive buckling of thin-walled beam-columns with open and close cross sections*. Thin-Walled Structures, Vol. 15, 1993, pp. 159-183.
5. Kolakowski Z.: *Influence of modification of boundary conditions on load carrying capacity in thin-walled columns in the second order approximation*. Int. J. Solids Structures, Vol. 30, No. 19, 1993, pp. 2597-2609.
6. Kolakowski Z. Królak M., *Interactive elastic buckling of thin-walled closed orthotropic beam-columns*. Engineering Transaction, Vol. 4, 1995, pp. 571-590.
7. Królak M. (red.), *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN Warszawa-Łódź, 1990.
8. Królak M. (red.), *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Politechnika Łódzka Monografie Łódź, 1995.
9. Królak M. Kolakowski Z., *Interactive elastic buckling of thin-walled open orthotropic beam-columns*. Engineering Transaction, Vol. 4, 1995, pp. 591-602.

Summary

INTERACTIVE ELASTIC BUCKLING OF THIN-WALLED OPEN ORTHOTROPIC BEAM-COLUMNS

The present papers deals with a nonlinear analysis of stability of the elastic thin-walled orthotropic beam-columns. The columns are assumed to be simply supported at the ends. The investigation is concerned with a method for the approximate evaluation of the load carrying capacity of thin-walled structures based on the second order nonlinear approximation of the asymptotic theory of stability (3). The asymptotic expansion established by Byskov and Hutchinson (1) is carried out in the numerical calculations using the transition matrix method. The principal goal of numerical analysis is to study the influence of the wall orthotropy factor of open cross-section beam-columns subject to axial and bending.

NOŚNOŚĆ CIENKOŚCIENNYCH PŁYT O ZMIENNEJ ORTOTROPII

T. KUBIAK, Z. KOŁAKOWSKI

*Katedra Wytrzymałości Materiałów Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, Poland*

W pracy analizowano zachowanie się sprężystych cienkościennych płyt ortotropowych po utracie stateczności w ramach drugiego rzędu asymptotycznej teorii stateczności układów zachowawczych Koitera [1]. Badano płyty ortotropowe o głównych kierunkach ortotropii równoległych do krawędzi ścian charakteryzujące się zmiennym wzdłuż szerokości współczynnikiem ortotropii $\beta_i = E_{xi}/E_{yi}$. Analizowano płyty przegubowo podparte na obciążonych brzegach, a na nie obciążonych wzdłużnych brzegach uwzględniono różne rodzaje podparcia (utwierdzenie, podparcie przegubowe, swobodny brzeg). Płyty poddano obciążeniom powodującym równomierne i liniowo zmienne zbliżenie brzegów.

1. Wprowadzenie

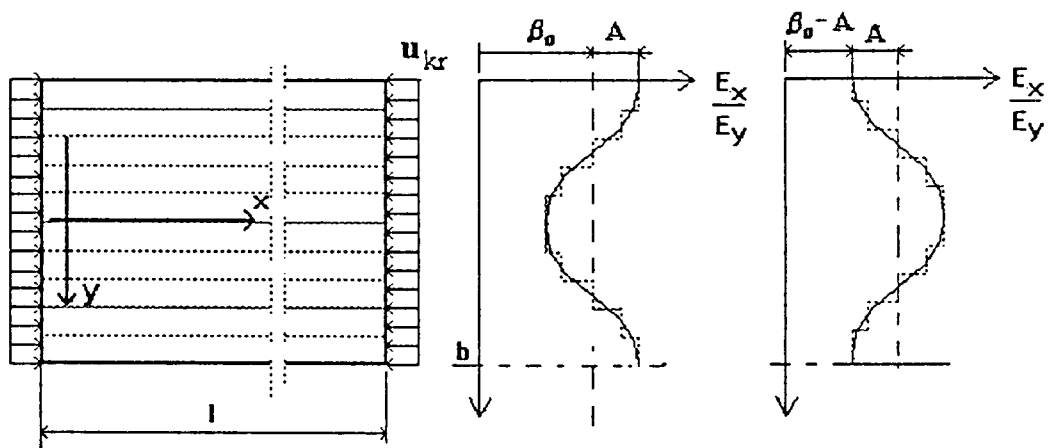
Sprężyste wyboczenie izotropowych i ortotropowych płyt oraz dźwigarów było przedmiotem wielu prac (np. [2÷6]). Wyniki tych badań pokazują możliwość tworzenia konstrukcji lekkich, bezpiecznych i niezawodnych.

W materiałach kompozytowych istnieje duża swoboda kształtowania ich własności materiałowych w wybranych kierunkach lub obszarach, tak więc możliwe jest wykonanie płyt o zmiennym własnościach wytrzymałościowych. Przykładem materiałów o takich własnościach mogą być kompozyty włókniste z odpowiednio rozmieszczonymi (zagęszczonymi lub rozrzedzonymi) włóknami. Materiały kompozytowe modeluje się najczęściej jako materiały ortotropowe. W bogatej literaturze dotyczącej zagadnień stateczności brak jest analizy wpływu zmiennej w kierunku szerokości płyty ortotropii na wartości obciążeń krytycznych, na ich postacię wyboczenia oraz nośność płyt w zakresie zakrytycznym.

W niniejszej pracy przedstawiono problem utraty stateczności w zakresie sprężystym i zachowania się konstrukcji w zakresie zakrytycznym homogenicznych płyt ortotropowych o zmieniającej się wzdłuż szerokości ortotropii.

2. Postawienie zagadnienia

Do rozważań przyjęto płytę o zmiennej ortotropii wzdłuż szerokości płyty (rys.2.1). Przyjęto model zbudowany z wąskich podłużnych płyt ortotropowych, przy czym każda z nich może mieć inny współczynnik ortotropii. Przyjęty model obliczeniowy precyzyjnie opisuje rzeczywiste materiały konstrukcyjne.



Rys.2.1. Model pasmowy płyty o zmiennej ortotropii

Fig.2.1. Band model of variable orthotropy plates

Założono, że główne osie ortotropii płyt są równoległe do ich brzegów. Dla i-tego pasma ortotropowego założono dokładne zależności na odkształcenia względne dla cienkich płyt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ix} &= u_{i,x} + \frac{1}{2}(w_{i,x}^2 + u_{i,x}^2 + v_{i,x}^2), & \varepsilon_{iy} &= v_{i,y} + \frac{1}{2}(w_{i,y}^2 + u_{i,y}^2 + v_{i,y}^2) \\ 2\varepsilon_{ixy} &= u_{i,y} + v_{i,x} + w_{i,x}w_{i,y} + u_{i,x}u_{i,y} + v_{i,x}v_{i,y} \\ \kappa_{ix} &= -w_{i,xx} & \kappa_{iy} &= -w_{i,yy} & \kappa_{ixy} &= -w_{i,xy} \end{aligned} \quad (1)$$

Dla rozpatrywanego przypadku ortotropii równania fizyczne mają następującą postać:

$$\varepsilon_{xi} = \frac{N_{xi} - \nu_{xyi} N_{yi}}{E_{xi} h_i}; \quad \varepsilon_{yi} = \frac{N_{yi} - \nu_{yxi} N_{xi}}{E_{yi} h_i}; \quad \varepsilon_{xyi} = \frac{N_{xyi}}{2G_i h_i} \quad (2)$$

Występujące w równaniach (2) moduły Younga i współczynniki Poissona zgodnie z twierdzeniem Betty'ego-Maxwella muszą spełniać związek:

$$E_{xi} \nu_{yxi} = E_{yi} \nu_{xyi} \quad (3)$$

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczego pasma płytowego wynikają różniczkowe równania równowagi, kinematyczne i statyczne warunki ciągłości na połączeniach stykających się pasm oraz warunki brzegowe na obciążonych końcach ($x=0$, $x=l$) [6].

Nieliniowe zagadnienie stateczności rozwiązano asymptotyczną metodą Koitera [1]. Pola przemieszczeń $\bar{U}_i$ i sił przekrojowych $\bar{N}_i$ rozwinięto w szeregi potęgowe względem parametru ξ - amplitudy liniowej postaci własnej wyboczenia (normalizowanej warunkiem równości maksymalnego ugięcia równego grubości pierwszej płyty h_1)

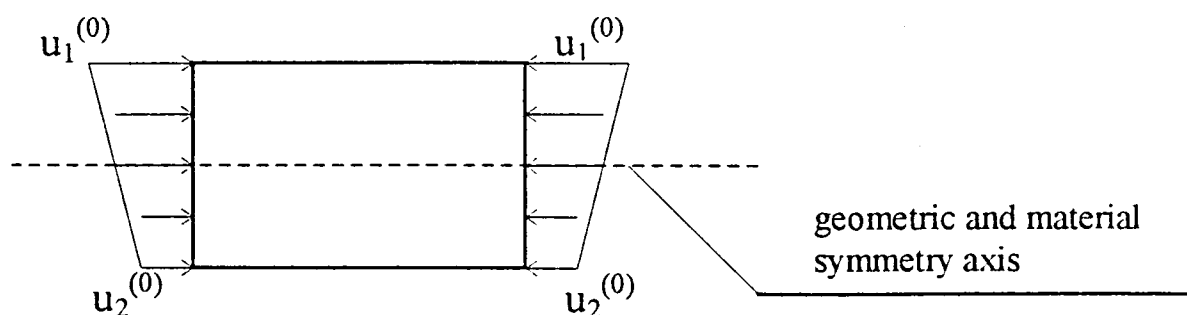
$$\begin{aligned} \bar{U}_i &= \lambda \bar{U}_i^{(0)} + \xi \bar{U}_i^{(1)} + \xi^2 \bar{U}_i^{(2)} + \dots \\ \bar{N}_i &= \lambda \bar{N}_i^{(0)} + \xi \bar{N}_i^{(1)} + \xi^2 \bar{N}_i^{(2)} + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Po podstawieniu rozwinięć (4) do równań równowagi, warunków ciągłości i warunków brzegowych otrzymano zagadnienie brzegowe zerowego, pierwszego i drugiego rzędu [3,4]. Aproksymacja zerowa opisuje stan przedwyboczeniowy, podczas gdy pierwszy rząd przybliżenia pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne i odpowiadające jemu postacie wyboczenia, przy uwzględnieniu minimalizacji względem liczby półfal m w kierunku wzdłużnym. Drugi rząd przybliżenia redukuje się do liniowego układu równań różniczkowych niejednorodnych, którego prawe strony zależą jedynie od pola sił i przemieszczeń pierwszego rzędu. Rozwiązanie tego układu równań przewidziano w postaci szeregów trygonometrycznych w kierunku wzdłużnym oraz wyznaczając funkcje drugiego rzędu w kierunku poprzecznym metodą macierzy przeniesienia identycznie jak dla pierwszego rzędu [3,6]. Po wyznaczeniu rozwiązania pierwszego i drugiego rzędu zagadnienia brzegowego wyznaczono współczynniki a_0 , a_1 , a_{111} , a_{1111} oraz współczynnik redukcji sztywności wzdłużnej według znanych wzorów (np. [4]).

Szczegółowa analiza obciążeń krytycznych rozpatrywanych płyt przy uwzględnieniu pełnego tensora odkształcenia (1) dla pierwszego rzędu przybliżenia oraz przy pominięciu dwóch ostatnich członów w każdym z równań (1) pozwoliła pominąć w analizie drugiego rzędu te składniki, co znacznie uprościło analizę i jest powszechnie stosowanym przybliżeniem [6].

Płyty, których końce były podparte przegubowo, a wzdłużne brzegi podparte przegubowo, utwierdzone bądź swobodne, obciążano w sposób powodujący równomierne bądź liniowo zmienne zbliżenie brzegów (rys.2.2).

Dla scharakteryzowania sposobu obciążenia wprowadzono współczynnik zbliżenia brzegów $\kappa = u_1^{(0)} / u_2^{(0)}$, gdzie $u_1^{(0)}$, $u_2^{(0)}$ (rys.2.2) są wartościami przemieszczeń na końcach płyty. Wszystkie badane płyty miały geometryczną i materiałową oś symetrii, ale nie obciążeń i warunków brzegowych na nieobciążonych brzegach.



Rys. 2.2. Sposoby obciążenia płyty

Fig.2.2. Loading modes of plates

W związku z powyższym wielkością krytyczną dla równomiernego zbliżenia brzegów jest siła krytyczna $F_{kr}[N]$, zaś dla liniowego zmiennego zbliżenia odpowiadającego $\kappa = -1$ jest moment krytyczny $M_{kr}[Nm]$, a dla pozostałych przypadków siła krytyczna $F_{kr}[N]$ i moment krytyczny $M_{kr}[Nm]$. Należy zauważyć, że w przypadku gdyby nie założono materiałowej osi symetrii dla równomiernemu zbliżeniu brzegów wielkościami krytycznymi byłyby siła i moment.

3. Wyniki obliczeń

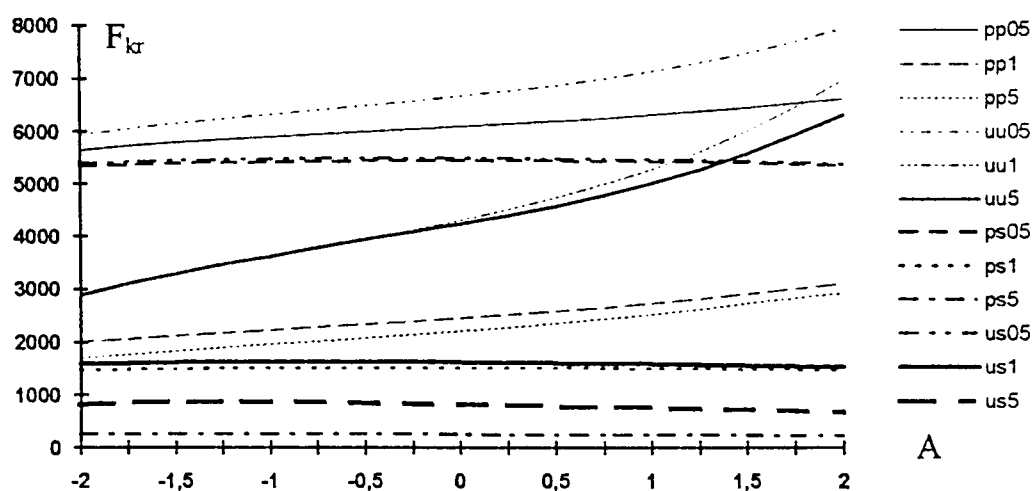
Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiono w postaci wykresów opisujących zależność wielkości krytycznych (siły F_{kr} , momentu M_{kr} lub siły i momentu jednocześnie) w funkcji parametru opisującego zmienność ortotropii (parametrem tym jest wielkość amplitudy A sinusoidy opisującej zmianę ortotropii rys.2.1).

Niezbędne zależności pomiędzy współczynnikiem ortotropii a wielkościami E_x , E_y , G , ν_{xy} dla sinusoidalnie zmiennego współczynnika ortotropii β otrzymano na drodze aproksymacji danych materiałowych [2] i mają one następującą postać:

$$E_{xi} = \beta_i E_{yi}, \quad E_{yi} = 34807 - \frac{11629}{\beta_i} - \frac{16821}{\beta_i^2}, \quad G_i = 14605 - \frac{7812}{\beta_i} - \frac{3464}{\beta_i^2},$$

$$v_{xyi} = 0.3 \quad \text{dla } i=1, \dots, n,$$

Współczynniki ortotropii dla poszczególnych pasm modelu przyjmowane były wg. wzoru: $\beta_i = \beta_0 + A \cdot \cos \frac{2\pi y}{b}$, gdzie $\beta_0 = 3.2292$, $A \in \langle -2, 2 \rangle$ - amplituda sinusoidy, y - współrzędna określająca położenie pasma od jednej ze wzdłużnych krawędzi, b - szerokość płyty.



Rys. 3.1. Wykres prezentujący zależność siły krytycznej od parametru A opisującego zmienność ortotropii dla płyt o stosunku $b/h = 60$

Fig.3.1. Critical force as a function of A parameter defining the orthotropy variation for plates whose $b/h=60$

Na rys. 3.1 przedstawiono wyniki dla płaskich prostokątnych płyt o zmiennym sinusoidalnie współczynniku ortotropii. Na prezentowanym wykresie legenda opisana jest skrótami, które mają następujące oznaczenie: litery - warunki na wzdłużnych brzegach (p-podparcie przegubowe, u - utwierdzenie, s - swobodny brzeg), cyfry - wielkości geometryczne (wartość stosunku l/b , gdzie 05=0.5)

Dla badanych konstrukcji wyższy współczynnik ortotropii na brzegach płyt powoduje wzrost naprężeń krytycznych w płytach obciążonych w sposób powodujący równomierne ($\kappa=1$) lub liniowo zmienne ($\kappa=0$) zbliżenie brzegów. W przypadku gdy płyta poddana jest obciążeniu powodującemu liniowo zmienne zbliżenie brzegów obciążonych ($\kappa=-1$) to ortotropowe wzmocnienie środka płyty praktycznie nie powoduje wzrostu naprężeń krytycznych.

Pełna analiza stanu sprężystego musi uwzględnić drugi rząd przybliżenia, który pozwala wyznaczyć pokrytyczne ścieżki równowagi.

Wyniki obliczeń dla drugiego rzędu przybliżenia zostaną przedstawione na sympozjum.

Literatura

1. Koiter W.T., *Elastic stability and post-buckling behaviour*, *Proceedings of the Symposium on Nonlinear Problems*, Univ. of Wisconsin Press, Wisconsin (1963), 257-275.
2. Chandra R. Raju B., *Postbuckling analysis for rectangular orthotropic plates*. *Int. J. Mech. Sci.* **Vol.16** (1973), 81-97.
3. Kołakowski Z., *Interactive buckling of thin-walled beam-columns with open and close cross sections*. *Thin-Walled Structures* **Vol.15** (1993), 159-183.
4. Królak M. (red.), *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN Warszawa-Łódź (1990)
5. Królak M. (red.), *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Politechnika Łódzka Monografie Łódź (1995).
6. Królak M. Kołakowski Z., *Interactiv elastic buckling of thin-walled closed orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction* **Vol.4** (1995), 571-590.
7. Królak M. Kołakowski Z., *Interactiv elastic buckling of thin-walled open orthotropic beam-columns*. *Engineering Transaction* **Vol.4** (1995), 591-602.

Summary

CARRYING CAPACITY OF THIN-WALLED PLATES WITH ORTHOTROPY VARYING WIDTHWISE

The present papers deals with an analysis of the elastic thin-walled orthotropic plates after stability loss. The problem was solved using Koiter's second-order asymptotic theory of stability of conservative system. Numerical test were made on plates with orthotropy ratio, $\beta = E_x/E_y$, varying widthwise, which principal directions of orthotropy being parallel to wall edges. The analysis carried out on thin plates with loaded edges simply supported; unloaded edges were tested with different kinds of support (clamped, simply supported, free-edge). Plates were subject to loads causing uniform and linearly variable displacement of edges to each other.

Praca wykonana w ramach grantu KBN nr PB-138/T07/97/12

ANALIZA TEORETYCZNA WYBOCZENIA POWŁOKI WALCOWEJ WYPELNIONEJ CIECZĄ

K. Magnucki

Instytut Techniki, WSP im. T. Kotarbińskiego
Al. Wojska Polskiego 69, 65-625 Zielona Góra

P. Stasiewicz

Instytut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Poznańska
ul. Piotrowo 3, 60-965 Poznań

Poziome zbiorniki walcowe mają szerokie stosowanie w gospodarce magazynowej lub transporcie różnych materiałów. Konstrukcje te są cienkościennymi powłokami walcowymi, które narażone są na zniszczenie przez wyboczenie. W pracy wyznaczono siły stanu dokrytycznego w poziomej powłoce walcowej obciążonej ciśnieniem hydrostatycznym. Liniowe równania stateczności rozwiązano metodą Galerkina. Numerycznie analizowano wpływ podstawowych wymiarów powłoki na jej wyboczenie. Wyniki opracowano w postaci wykresów. Wyznaczono niebezpieczne proporcje wymiarów powłoki.

1. Siły stanu dokrytycznego poziomej powłoki walcowej wypełnionej cieczą

Pozioma powłoka walcowa o promieniu a i długości L wypełniona jest cieczą o gęstości ρ_m . Na obu końcach jest podparta i zamknięta dnami. Na ścianki powłoki działa jedynie wewnętrzne ciśnienie normalne

$$p(\varphi) = \gamma_m a (1 - \cos \varphi) \quad (1)$$

gdzie $\gamma_m = g \rho_m$ jest ciężarem właściwym cieczy.

Przyjmujemy uproszczenie, że wpływ siły ścinającej $N_s^0 = N_s(z, \varphi) = z \gamma_m a \sin \varphi$ jest pomijalnie mały na utratę stateczności rozważanej powłoki walcowej. Strefa największego ściskania występuje w jej górnej części, a tam siła ścinająca jest zerowa. Niewątpliwie utrata stateczności przy obciążeniu jedynie wewnętrznym ciśnieniem hydrostatycznym może występować w powłokach odpowiednio długich. Wzdłużną siłę ściskającą wyrazimy w sposób przybliżony lecz wygodny w dalszych obliczeniach, zatem siły stanu dokrytycznego zapiszemy

$$N_{11}^0 \cong \frac{1}{8} \gamma_m L^2 \cos \frac{\pi z}{L} \cos \varphi, \quad N_{22}^0 = -\gamma_m a^2 (1 - \cos \varphi). \quad (2)$$

2. Stan krytyczny poziomej powłoki walcowej wypełnionej cieczą

Równanie stateczności dla powłoki walcowej jest znane z literatury i szczegółowo omówione przez Konjuchova, Mulara i Privarnikova [7], które w rozważanym przypadku ma postać

$$D\nabla^8 w + \frac{Eh}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \nabla^4 \left[N_{11}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + \nabla^4 \left[N_{22}^0 \frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \varphi^2} \right] - \nabla^4 p = 0. \quad (3)$$

Warunki brzegowe na obu końcach powłoki są takie same i dotyczą przemieszczeń (warunki kinematyczne) oraz momentów (warunki statyczne). Przyjmujemy założenie, że dna podpierają brzegi powłoki przegubowo, zatem ugięcia i momenty zginające są zerowe. W rzeczywistości w miejscu połączenia powłoki walcowej z dnami występują lokalne zaburzenia efektu brzegowego, jednak ich wpływ na rozwiązanie stateczności rozważanego zbiornika walcowego jest pomijalnie mały.

Rozwiązanie równania stateczności (3) w tym przypadku nie jest tak łatwe jak dla prostych obciążeń typu ściskanie wzdłuż tworzących lub równomiernie rozłożone ciśnienie. Zastosowanie metody elementów skończonych również napotyka tutaj na trudności, gdyż brak jest parametru sterującego obciążeniem hydrostatycznym. Równanie (3) rozwiążemy w sposób przybliżony za pomocą metody Bubnowa-Galerkina. Funkcję ugięcia przyjmujemy w postaci iloczynu dwóch funkcji

$$w(z, \varphi) = \bar{w} \cdot w(z) \cdot w(\varphi), \quad (4)$$

gdzie: $w(z) = \cos \frac{\pi z}{L} + a_3 \cos \frac{3\pi z}{L} + a_5 \cos \frac{5\pi z}{L},$

$$w(\varphi) = \left[\cos \frac{1}{2} \varphi + b_3 \cos \frac{3}{2} \varphi + b_5 \cos \frac{5}{2} \varphi \right] \cos n \varphi,$$

$$n = 2, 3, 4, 5, \quad a_3, a_5, b_3, b_5 - \text{parametry swobodne.}$$

Po podstawieniu do warunku ortogonalności Bubnowa-Galerkina i wykonaniu prostych lecz żmudnych przekształceń oraz całkowania otrzymuje się równanie algebraiczne trzeciego stopnia

$$\chi^3 + B\chi - C = 0. \quad (5)$$

Stąd wyznacza się względną grubość ścianki $\chi = h/a$, która wyraża stosunek grubości ścianki powłoki do promienia walca. Równanie to ma tylko jeden pierwiastek rzeczywisty, a występujące w nim bezwymiarowe współczynniki B i C mają złożoną budowę i dlatego nie podaje się ich tutaj. Zawierają stałe materiałowe, gęstość cieczy, stosunek promienia do długości oraz parametry swobodne funkcji ugięcia.

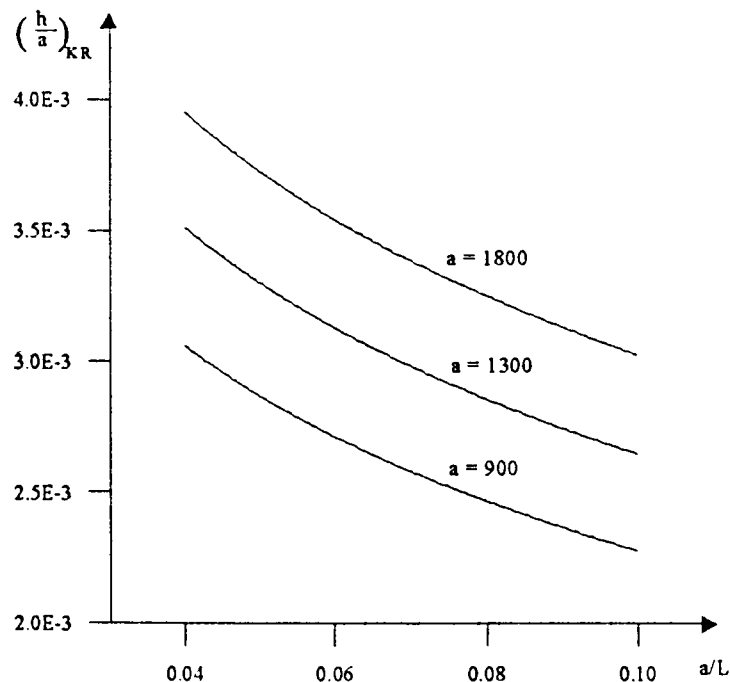
Problem stateczności zbiornika o promieniu a i długości L sprowadza się do wyznaczenia maksymalnej wartości parametru geometrycznego χ ze względu na liczbę fal n i parametry swobodne

$$\chi_{KR} = \max_{n,a,b}(\chi). \quad (6)$$

Poziomy zbiornik walcowy podparty na obu końcach i wypełniony cieczą utraci stateczność wtedy, gdy stosunek grubości płaszcza do promienia jest równy lub mniejszy od wartości krytycznej (6) - niebezpiecznej.

3. Analiza numeryczna stateczności powłoki walcowej

Analizę stateczności przeprowadzimy dla rodziny stalowych powłok walcowych. Przyjmujemy następujące dane liczbowe: $E = 2,05 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$; $\gamma_m = 9,81 \cdot 10^{-6}$ Nmm⁻³, $a = 900, 1300, 1800$ mm, $a/L = 0,04; 0,06; 0,08; 0,10$. Wyznaczone kolejno z równania (6) wartości krytyczne parametru χ_{KR} dla poszczególnych wymiarów zbiorników pozwoliły na opracowanie wykresu, który pokazano na rysunku 3.10. W analizowanych przypadkach otrzymano zerowe wartości parametrów swobodnych $a_3 = a_5 = 0$, pozostałe parametry przyjmowały wartości w przedziałach $(0,32 \leq b_3 \leq 0,46)$, $(0,07 \leq b_5 \leq 0,14)$, oraz $n=2,3$ lub 4.

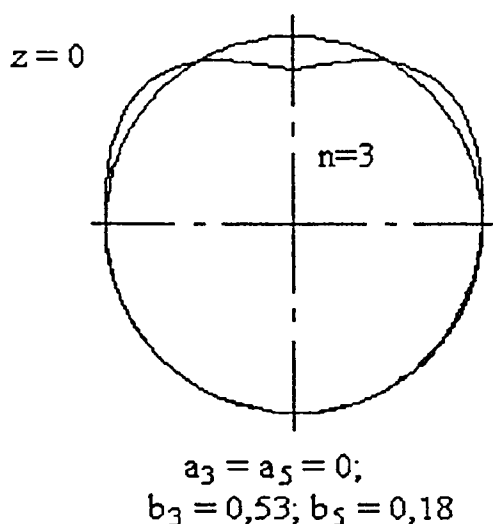


Rys.3.1. Względna grubość krytyczna χ_{KR} jako funkcja promienia i długości powłoki

Fig.3.1. Relative wall thickness χ_{KR} as function of shell radius and shell length

Saal [9] badał teoretycznie i doświadczalnie stateczność powłok walcowych wypełnionych cieczą, wprowadził różne stopnie wypełnienia. Badania przeprowadził na powłokach modelowych. W opisie teoretycznym przyjął uproszczenie, że odkształcenia obwodowe i postaciowe na powierzchni środkowej powłoki są zerowe. Kacperski [6] przeprowadził doświadczenie na dużym poziomym zbiorniku walcowym o promieniu $a = 1300\text{mm}$ i grubości ścianki $h = 3\text{mm}$ wypełnionym wodą. Zwiększając stopniowo długość zbiornika doprowadził do jego utraty stateczności. Zbiornik w stanie krytycznym osiągnął długość $L = 12500\text{mm}$. Analizę teoretyczną ograniczył do lokalnych naprężeń krytycznych wyznaczonych przez Donnella, które dotyczy ściskania powłoki walcowej.

Weryfikację przedstawionego w punkcie 2 rozwiązania teoretycznego przeprowadzimy przyjmując do obliczeń dane z doświadczenia Kacperskiego [6] przeprowadzonego na rzeczywistym zbiorniku. Z równania (6) otrzymano $\chi_{KR} = 0,002568$, czyli $h_{gr} = 3,34\text{mm}$ przy $a_3 = a_5 = 0$, $b_3 = 0,53$; $b_5 = 0,18$ oraz $n=3$. Wyznaczona grubość jest większa o 11,3% od grubości zbiornika doświadczalnego, otrzymany wynik należy uznać za poprawny. Postać teoretyczną środkowego przekroju poprzecznego powłoki przy utracie stateczności pokazano na rysunku 3.2. Występuje tu pofałdowanie płaszcza zbiornika jedynie w jego górnej części, tam też występuje największe ściskanie wzdłużne i najmniejsze rozciąganie obwodowe. Otrzymaną teoretycznie postać wyboczenia potwierdzają eksperymenty przeprowadzone przez Saala [9] i Kacperskiego [6].



Rys.3.2. Postać wyboczenia powłoki walcowej w środkowym przekroju poprzecznym
Fig.3.3. Buckling shape of the cylindrical shell in central cross-section

Axelrad [1] analizował lokalne wyboczenie występujące w cienkościennej rurze zginanej momentem zewnętrznym. Cheney [2] przedstawił rozwiązanie w ujęciu energetycznym lokalnej utraty stateczności w powłoce walcowej. Obszerny wykład o

metodach energetycznych stosowanych w teorii powłok zaprezentowali Muštari i Galimov [5]. Dyau i Kyriakides [3] opisali lokalne wyboczenie powłoki walcowej obciążonej zewnętrznym ciśnieniem. Huang, Redekop i Xu rozwiązali analitycznie i numerycznie metodą elementów skończonych stateczność powłoki walcowej obciążonej lokalnie w trzech obszarach. Sposób przyłożonego obciążenia powoduje zginanie powłoki walcowej analogiczne do zginania jakie występuje w poziomej powłoce walcowej wypełnionej cieczą. Magnucki [8] analizował metodą energetyczną stateczność powłoki walcowej obciążonej wewnętrznym ciśnieniem hydrostatycznym. Tang, Llgamov i Dowell [10] omówili stateczność zgianej rury o przekroju kołowym obciążonej ciśnieniem zewnętrznym. Wohlever i Healey [11] przedstawili numeryczną nieliniową analizę stateczności powłoki walcowej.

Literatura

1. Axelrad E.L., *On local buckling of thin shells. Int. J. Non-Linear Mechanics.* Vol. 20, No.4, (1985) 249-259.
2. Cheney J.A., *Local buckling of tubes in elastic continuum. J. Engineering Mechanics.* Vol. 117, No1, (1991) 205-215.
3. Dyau J.Y., Kyriakides S., *On the localization of collapse in cylindrical shells under external pressure. Int. J. Solids Structures.* Vol. 30, No. 4, (1993) 463- 482.
4. Huang D., Redekop D., Xu B., *Instability of a cylindrical shell under three-point bending. Thin-Walled Structures.* Vol. 26, No2, (1996) 105-122.
5. Muštari H.M., Galimov K.Z.: *Nielinieijnaja teoria uprugich oboloček.* Kazan, Tatknigoizdat 1957.
6. Kacperski T., *Experimental study of the phenomenon of stability loss of a horizontal thin-walled cylindrical shell loaded by a liquid. Engineering Transactions.* 42, 4, (1994) 331-337.
7. Konjuchov S.N., Mular J.M., Privarnikov J.K., *Ustojčivost cylindričeskoj oboločki w uslovijach stiesnienych progibov pri odnostonnyh sviazach. Prikladanaja mechanika.* 31, No.9 (1995) 46-50.
8. Magnucki K., *Stateczność sprężysta konstrukcji prętowych i powłokowych w ujęciu energetycznym.* Wyd. Polit. Poznańskiej, Rozprawy nr 246, 1991.
9. Saal H., *Buckling of long Liquid-Filled Cylindrical Shells.* Ramm E. (edit) *Buckling of Shells.* Springer-Verlag. Berlin 1982.
10. Tang D.M., Llgamov M.A., Dowell E.H., *Buckling and Post-buckling Behavior of a Pipe Subjected to Internal Pressure. J. Applied Mechanics.* Vol.62, (1995) 595-600.
11. Wohlever J.C., Healey T.J., *A group theoretic approach to the global bifurcation analysis of an axially compressed cylindrical shell. Computer Meth. in Applied Mechanics and Engineering.* 122, (1995) 315-349.

Summary

THEORETICAL ANALYSIS OF BUCKLING OF LIQUID-FILLED CYLINDRICAL SHELL

Horizontal cylindrical vessels are widespread in storage and transport of technical fluids. These structures are thin-walled cylindrical shells which are subject to destruction by buckling. In the paper the forces of prebuckling state are determined for the case of the shell loaded by hydrostatic pressure (filled by liquid). The stability equation (3) for the horizontal cylindrical shell is taken from [7]. Solution of this equation is not so easy and it requires to use a special deflection function (4) with greater number of unconstrained parameters. Here the Bubnov - Galerkin orthogonalization method is convenient. As the results of the solution process the algebraic equation (5) is obtained. From this equation one may determine the relative wall thickness according to the geometrical and physical parameters. This is a minimal thickness which secures stability of the shell.

The numerical analysis is provided for the family of steel cylindrical shells filled by water. The results are compared with experimental events [6] and the good compatibility is ascertained. The buckling shape is symptomatic, waving of shell surface occurs mainly at centred upper part of the cylinder. In this region the zone of greatest axial compression exists.

The stability problem considered in this paper is important from technical point of view and many researchers are engaged in theoretical and experimental studies on this question.

STATECZNOŚĆ POWŁOKI WALCOWEJ ZAMKNIĘTEJ DNAMI ELIPSOIDALNYMI OBCIĄŻONEJ CIŚNIENIEM ZEWNĘTRZNYM

K. Magnucki

Instytut Techniki, WSP im. T. Kotarbińskiego
Al. Wojska Polskiego 69, 65-625 Zielona Góra

W. Szyc

Instytut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Poznańska
ul. Piotrowo 3, 60-965 Poznań

Zbiorniki walcowe stosowane w technice są na ogół z dnami wypukłymi. Szerokie zastosowanie znalazły dna elipsoidalne. Konstrukcje zbiorników obciążone są najczęściej ciśnieniem wewnętrznym. Występują jednak w praktyce przypadki obciążenia ciśnieniem zewnętrznym, w których konstrukcje mogą ulec zniszczeniu na skutek utraty stateczności. W pracy wyznaczono analitycznie i numerycznie metodą elementów skończonych zewnętrzne ciśnienia krytyczne dla zbiornika jako powłoki walcowej połączonej na obu końcach z powłokami elipsoidalnymi.

1. Analityczny opis stateczności powłoki walcowej

Powłoka walcowa o promieniu a , grubości h_1 i długości L zamknięta jest na obu końcach dnami. Każde z tych den jest cienką powłoką elipsoidalną o grubości h_2 i wyniosłości b . Obciążeniem jest wszechstronne ciśnienie zewnętrzne p_0 .

Równanie stateczności dla powłoki walcowej przyjęto z monografii Volmira [8], które w przypadku obciążenia wszechstronnym ciśnieniem zewnętrznym zapiszemy

$$D \left[\nabla^8 w + \frac{1}{a^2} \nabla^4 \left(2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{w}{a^2} \right) \right] + \frac{E h_1}{a^2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{1}{2} p_0 a \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + p_0 a \nabla^4 \left(\frac{\partial^2 w}{a^2 \partial \varphi^2} + \frac{w}{a^2} \right) = 0 \quad (1)$$

Przyjmujemy założenie, że dna podpierają przegubowo brzegi powłoki, czyli ugięcia i momenty zginające na brzegach są zerowe. Funkcję ugięcia przyjmujemy w postaci

$$w = w_0 \sin \frac{m\pi z}{L} \cos n\varphi, \quad (2)$$

gdzie: w_0 - strzałka ugięcia, m - liczba półfal wzdłużnych, n - liczba fal obwodowych.

Po wstawieniu funkcji ugięcia (2) do równania (1) otrzymamy

(3)

$$p_0^{(1)} = \frac{\frac{1}{12(1-\nu^2)} \left[(\alpha^2 + n^2)^4 - (2n^2 - 1 + 2\nu\alpha^2)(\alpha^2 + n^2)^2 \right] + \alpha^4 \left(\frac{a}{h_1} \right)^2}{\left(\frac{1}{2} \alpha^2 + n^2 - 1 \right) (\alpha^2 + n^2)^2} E \left(\frac{h_1}{a} \right)^3,$$

gdzie: $\alpha = m\pi \frac{a}{L}$.

Ciśnieniem krytycznym jest najmniejsza wartość tego wyrażenia ze względu na liczbę m półfal wzdłużnych i liczbę n fal obwodowych, przy zadanych proporcjach wymiarów konstrukcyjnych a/L i a/h_1 , zapiszemy

$$p_{kr}^{(1)} = \min_{m,n} \{ p_0^{(1)} \}. \quad (4)$$

Przyjmując określone parametry konstrukcyjne możemy wyznaczyć wartość ciśnienia krytycznego dla powłoki walcowej.

2. Ciśnienie krytyczne powłoki elipsoidalnej

Stateczność powłoki elipsoidalnej dla różnych przypadków obciążeń w opisie liniowym rozwiązała Muštari i Galimov [4] oraz Tovstik [6]. Stwierdzili, że przy działaniu ciśnienia zewnętrznego, gdy $a/b \geq 1$, wystąpi lokalne osiowosymetryczne ugięcie powłoki w jej wierzchołku. Elipsoida w tym miejscu jest powierzchnią kulistą, gdyż oba promienie krzywizn są takie same: $R_1 = R_2 = R = a^2/b$. Ciśnienie krytyczne przy obciążeniu zewnętrznym ma więc postać

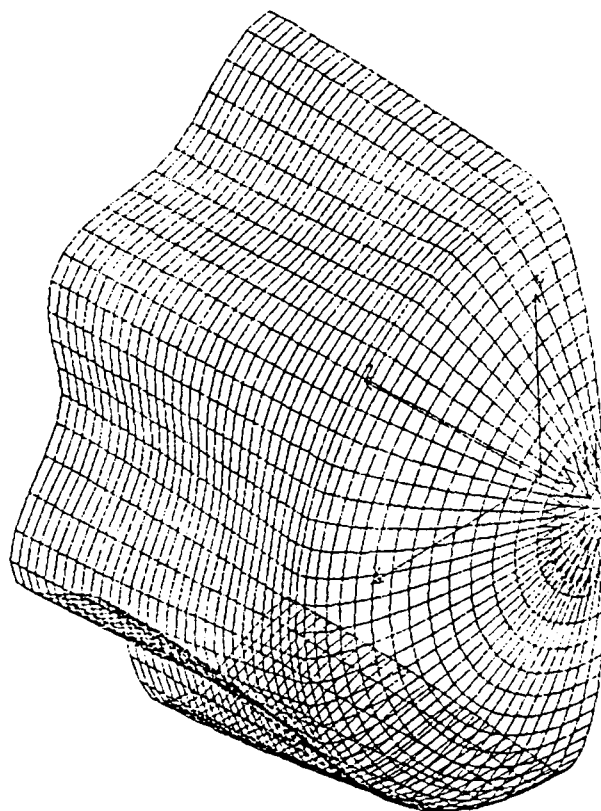
$$p_{kr}^{(2)} = \frac{2E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \left(\frac{h_2}{R} \right)^2, \quad \text{gdzie} \quad R = \frac{a^2}{b}. \quad (5)$$

Powyższe rozważania dotyczą powłoki elipsoidalnej jako konstrukcji jednorodnej. Szerszą dyskusję o stateczności powłoki kulistej przedstawili np. Troger i Steindl [7].

3. Numeryczna analiza stateczności powłoki metodą elementów skończonych

Przedmiotem analizy jest cienkościenna konstrukcja (zbiornik) utworzona przez połączenie powłok walcowej i dwóch elipsoidalnych. Związki (4) i (5) opisują w prosty lecz jedynie przybliżony sposób wyznaczanie ciśnienia krytycznego dla powłoki walcowej zamkniętej dnami elipsoidalnymi. W celu udokładnienia opisu

należy w rozwiązaniu uwzględnić wzajemne oddziaływanie powłok. Wygodnie jest tutaj posłużyć się metodą elementów skończonych (MES) - systemem komputerowym COSMOS/M. Pelen opis metody w zastosowaniu do analizy stateczności konstrukcji przedstawili Waszczyszyn, Cichoń i Radwańska [9]. Przyjmijmy przykładowo następujące dane liczbowe: $a = 2 \text{ m}$, $b = 0,5 \text{ m}$; $L = 4 \text{ m}$, $h_1 = h_2 = 10 \text{ mm}$, stałe materiałowe $E = 2,05 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$. W wyniku obliczeń otrzymano wartości ciśnień krytycznych oraz odpowiadające im postacie wyboczenia, które pokazano na rysunku 3.1 i 3.2.



Rys.3.1. Postać wyboczenia powłoki walcowej
Fig.3.1. Buckling shapes of cylindrical shell

Walcowa część konstrukcji traci stateczność przy ciśnieniu $p_{KR,MES}^{(1)} = 0,174 \text{ MPa}$, a jej powierzchnia fałduje się w ten sposób, że powstają jedna fala wzdłużna ($m = 1$) i siedem fal obwodowych ($n = 7$), co wynika z rysunku 3.1 sporządzonym komputerowo w systemie COSMOS/M.

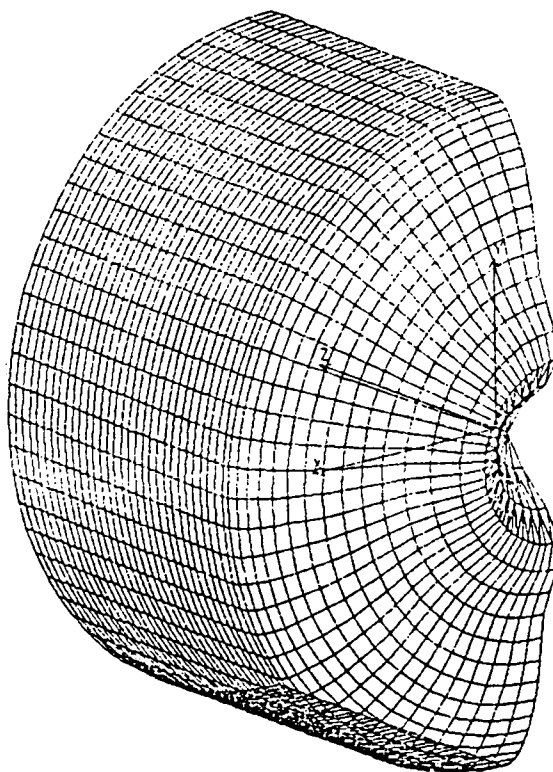
Przeprowadźmy teraz krótką analizę stateczności powłoki walcowej na podstawie rozwiązania analitycznego (pkt1). Wyrażenie (3) dla przyjętych danych liczbowych osiąga najmniejszą wartość gdy $m = 1$, natomiast ze względu na liczbę fal

obwodowych jest bardzo wrażliwe, dlatego podamy przykładowo kilka kolejnych wartości dla $n = 5, 6, 7, 8$, co zapiszemy

$$p_0^{(1)} = \begin{bmatrix} (n=5) & (n=6) & (7) & (8) \\ 0,3932; & 0,2075; & 0,1694; & 0,1787 \end{bmatrix},$$

stąd ciśnienie krytyczne zgodnie z (4) wynosi $p_{KR}^{(1)} = 0,169 \text{ MPa}$ dla $n=7$. Różnica między wartościami ciśnień krytycznych otrzymanymi z dwóch różnych rozwiązań jest w tym przypadku niewielka i wynosi niecałe 3%.

Dno elipsoidalne o wyniosłości nie większej od promienia przy obciążeniu ciśnieniem zewnętrznym traci stateczność w ten sposób, że jego powierzchnia ugina się osiowosymetrycznie, co potwierdzają zrealizowane obliczenia metodą elementów skończonych (rys.3.2).



Rys.3.2. Postać wyboczenia powłoki elipsoidalnej
Fig.3.2. Buckling shapes of ellipsoidal shell

Z obliczeń MES otrzymano, że dno elipsoidalne traci stateczność przy ciśnieniu $p_{KR,MES}^{(2)} = 0,465 \text{ MPa}$. Wyznamy z kolei wartość ciśnienia krytycznego na podstawie rozwiązania analitycznego ze wzoru (5). Przyjmując te same dane liczbowe co w MES, otrzymamy dla powłoki elipsoidalnej $p_{KR}^{(2)} = 0,388 \text{ MPa}$. Różnica w ciśnieniach krytycznych otrzymanych z dwóch różnych rozwiązań wynosi 16,6%.

Należy zauważyć, że z rozwiązania analitycznego w obu przypadkach powłok

uzyskuje się mniejsze wartości obciążeń krytycznych niż MES, czyli rozwiązanie to daje szacowanie oddolne co jest korzystne ze względu na bezpieczeństwo projektowanych zbiorników cienkościennych. Ponadto rozwiązanie analityczne w postaci wzorów (4) i (5) jest wygodne w praktyce projektowej, gdyż nie wymaga stosowania zaawansowanych technik komputerowych. Należy zwrócić uwagę na konieczność wprowadzenia do wzorów (4) i (5) współczynników bezpieczeństwa, jeśli miałyby one służyć w projektowaniu rzeczywistych urządzeń ciśnieniowych.

Niewątpliwie, z uwagi na złożoność urządzeń ciśnieniowych, nie zawsze jest możliwe w praktycznych analizach stateczności posługiwanie się prostymi wzorami. Rozwój współczesnych technik komputerowych sprawił, że możliwe jest dość dokładne i stosunkowo łatwe analizowanie każdej konstrukcji o dowolnym stopniu złożoności. Bushnell [1] zaprezentował szerokie wykorzystanie metod komputerowych w analizie stateczności różnych konstrukcji pretowych i powłokowych. Galletly [2] omówił stateczność den toroidalno-kulistych. Ross [5] przebadał numerycznie i doświadczalnie stateczność rodziny kopuł o różnych wyniosłościach. Dla kopuł o małej wyniosłości otrzymał również postacie osiowosymetrycznego wyboczenia. Magnucki i Szyc [3] przeprowadzili analizę nieliniową stateczności den elipsoidalnych zbiorników walcowych obciążonych ciśnieniem wewnętrznym.

Literatura

1. Bushnell D., *Computerized buckling analysis of shells*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht 1985.
2. Galletly G.D., *Torispherical shells*. Narayanan R. (edit) Shell Structures. Elsevier Appl. Science Publ., London 1985.
3. Magnucki K., Szyc W., *Elastic stability of ellipsoidal head of the cylindrical pressure vessel*. 3rd Int. Symposium of Ukrainian Mech. Eng. Lviv, maj 1997.
4. Muštari H.M., Galimov K.Z., *Nieliniejnaja teoria uprugich oboloček*, Tatknigoizdat, Kazan 1957.
5. Ross C.T.F., *Vibration and Elastic Instability of Thin-Walled Domes under Uniform External Pressure*. Thin-Walled Structures, Vol.26, No3, (1996) 159-177.
6. Tovstik P.E., *Ustojčivost oboloček vraščenia v lineijnom približeni*. Sbornik statiej: *Rasčet prostranstviennykh konstrukcji*. Vol. XIII, Moskwa 1970, 119-138.
7. Troger H., Steindl A., *Nonlinear Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, Wien, New York 1991.
8. Volmir A.S., *Ustojčivost deformirujemych sistem*. Nauka, Moskwa 1967.
9. Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M.: *Stability of Structures by Finite Element Methods*. Elsevier Science, Amsterdam-Tokyo 1994.

Summary

STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL CLOSED BY ELLIPSOIDAL HEADS UNDER EXTERNAL PRESSURE

Cylindrical vessels with convex heads are often used as different technical equipment. The vessels are mostly loaded by internal pressure but in several practical cases external pressure may occur. In such cases shell structure of the vessel may lose its stability.

In the paper external critical pressure values were determined in analytical way and numerically using the finite element method (FEM), for the vessels as combination of cylindrical and ellipsoidal shells.

The stability equation of a cylindrical shell (1) by Volmir [8] was solved using deflection function (2). The analytical Galimov's solution [4] for ellipsoidal shell (5) was adapted. Numerical analysis was provided on the base of the COSMOS/M computer FEM system for the combination of shells (vessel computational model).

Buckling shapes obtained using both the methods are identical. Critical values for the vessel computational model are greater than the values obtained analytically for the cylindrical shell and for the ellipsoidal shell separately.

For the cylindrical shell the difference is smaller and it is equal 3%. For the ellipsoidal shell the difference achieves 16.6%. Real vessel structure loses its stability first by the cylindrical shell buckling. Critical value for the ellipsoidal head is two times greater, and it is identical as value obtained for the spherical shell.

DOBÓR OPTYMALNYCH PARAMETRÓW GEOMETRYCZNYCH TRÓJWARSTWOWEJ RURY PROSTOKĄTNEJ PRZY UWZGLĘDNIENIU STATECZNOŚCI LOKALNEJ

K. MAGNUCKI

*Instytut Techniki, WSP im. T. Kotarbińskiego,
Al. Wojska Polskiego 69 65-625 Zielona Góra*

E. TERTEL

*Instytut Inżynierii Produkcji i Materiałoznawstwa Politechniki Zielonogórskiej
ul.Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra*

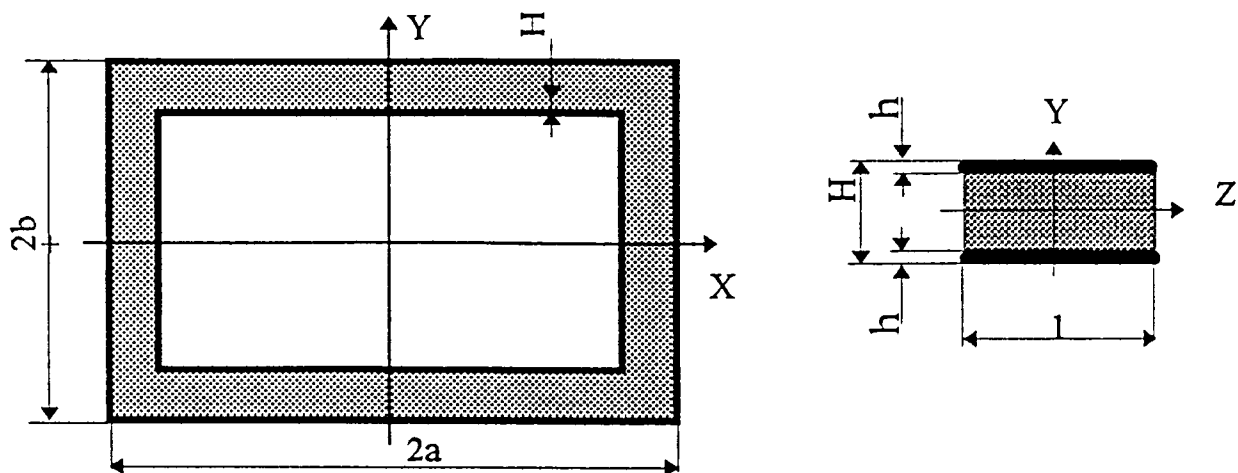
Streszczenie. W pracy przedstawiono optymalizację parametryczną trójwarstwowej rury o przekroju prostokątnym obciążonej stałym ciśnieniem wewnętrznym. Ograniczeniem rozwiązania są warunki geometryczne, wytrzymałości oraz stateczności lokalnej. Funkcją celu jest stosunek masy konstrukcji do masy medium. Wyznaczono optymalne parametry rury trójwarstwowej przyjmując jej szerokość, oraz właściwości materiałów, z których jest wykonana.

1. Wstęp

Konstrukcje trójwarstwowe wyróżnia racjonalne wykorzystanie właściwości materiałów, a więc są ekonomiczne i dzięki temu znajdują coraz szersze zastosowanie. Podstawy teoretyczne, metody oraz kryteria optymalizacji zostały omówione w (1), (2) i (3). Przykłady rozwiązywania problemów optymalizacji znajdujemy w pracach (4), (7), (8) i (10). Obszerne opracowania dotyczące stateczności dźwigarów cienkościennych o profilach prostokątnych zrealizowano w (5) i (6). W (11) przedstawiono podstawy teoretyczne wytrzymałości i stateczności konstrukcji warstwowych. Praktyczne zastosowanie konstrukcji trójwarstwowych w budowie zbiorników autocystern wymaga opracowania odpowiedniego modelu obliczeniowego oraz wyznaczenia optymalnych proporcji między podstawowymi wymiarami przekroju poprzecznego zbiornika. W pracy analizuje się rurę trójwarstwową obciążoną równomiernie rozłożonym ciśnieniem wewnętrznym.

2. Sformułowanie problemu optymalizacji.

Profil przekroju poprzecznego zbiornika autocysterny jest linią zamkniętą wpisaną w skrajnie o kształcie prostokąta. Całkowite wykorzystanie tej przestrzeni jest wtedy, gdy przekrój zbiornika jest prostokątem. celowe jest wówczas zastosowanie konstrukcji trójwarstwowej. Rozpatrzmy prostokątny przekrój poprzeczny rury o szerokości $2a = \text{const.}$ i wysokości $2b$ (rys.2.1).



Rys.2.1. Przekrój poprzeczny powłoki
Fig.2.1. Cross - section of shell.

Dobór grubości poszczególnych warstw ścianki oraz wysokości przekroju ma decydujący wpływ na masę konstrukcji m_p i masę zawartej cieczy m_m . Ponadto wysokość $2b$ ma istotny wpływ na położenie środka ciężkości pojazdu i jego stabilność ruchu. Z ekonomicznego punktu widzenia, należy dążyć do tego, aby udział masy medium w całkowitej masie powłoki był jak największy.

Ekonomicznym miernikiem jakości konstrukcji niech będzie „dobroć masowa” (6) zdefiniowana następująco:

$$\eta = \frac{m_m}{m_m + m_p} = \frac{1}{1 + \mu} \quad , \quad (1)$$

gdzie: $\mu = \frac{m_p}{m_m}$ -bezwymiarowy współczynnik mas,

$m_p = m_s + m_r = 4[2h(a+b-H)\rho_s + (H-2h)(a+b-H)\rho_r]$ - masa jednostkowa powłoki, $m_m = 4(a-H)(b-H)\rho_m$ - masa jednostkowa medium, $H=2h + h_s$ - grubość całkowita trójwarstwowej ścianki, ρ_s - gęstość materiału warstw zewnętrznych (okładzin), ρ_r - gęstość materiału warstwy środkowej (rdzenia).

Dobroć masowa konstrukcji η zwiększa się, gdy wartość bezwymiarowego współczynnika mas η zmniejsza się, zatem problem optymalizacji konstrukcji został postawiony w następujący sposób. Dla ustalonej wartości wymiaru $2a = \text{constans}$, należy tak dobrać wymiary $2b$, H oraz h (rys.2.1.), aby bezwymiarowy współczynnik mas μ osiągnął wartość najmniejszą.

Ograniczeniami rozwiązania są warunki:

1. wytrzymałości $\sigma < \sigma_{dop}$;
2. stateczności $p < p_{kryt}$.
3. geometryczny dla wysokości przekroju $b \leq 0.72 a$;
4. geometryczny dla grubości okładziny $1 \text{ mm} \leq h \leq 2 \text{ mm}$.

Funkcja celu ma więc postać:

$$F_c = \min\{\mu\} = \frac{\rho_s}{\rho_m} \min \left\{ \frac{h}{a} \frac{\left(1 + \frac{b}{a} - \frac{H}{a}\right) \left[2 \left(1 - \frac{\rho_r}{\rho_s}\right) + \frac{H}{h} \frac{\rho_r}{\rho_s} \right]}{\left(1 - \frac{H}{a}\right) \left(\frac{b}{a} - \frac{H}{a}\right)} \right\}. \quad (2)$$

3. Optymalizacja z analizą wytrzymałości i stateczności lokalnej.

3.1. Wytrzymałość.

Powłoka (rura trójwarstwowa) o przekroju prostokątnym obciążona jest wewnętrznym ciśnieniem $p = 4bg\rho_m$ równomiernie rozłożonym na ściankach. Maksymalny moment zginający wystąpi w narożu i wynosi:

$$M_o = \frac{1}{6} a^2 bg\rho_m \frac{\left(2 - \frac{H}{a}\right)^3 + \left(2\frac{b}{a} - \frac{H}{a}\right)^3}{1 + \frac{b}{a} - \frac{H}{a}}. \quad (3)$$

Zakładając, że naprężenia wynikające z działania momentu zginającego są w całości przenoszone przez warstwy zewnętrzne, zatem minimalna grubość warstw zewnętrznych (okładzin) z warunku wytrzymałościowego wynosi:

$$h = B \frac{\left[\left(2 - \frac{H}{a}\right)^3 + \left(2\frac{b}{a} - \frac{H}{a}\right)^3\right] \frac{b}{a}}{\left(1 + \frac{b}{a} - \frac{H}{a}\right) \left(1 - 2\frac{h}{H} + \frac{4}{3}\left(\frac{h}{H}\right)^2\right) \frac{H}{a}}, \quad \text{gdzie: } B = \frac{a^2 g\rho_m}{6\sigma_{dop}} = const. \quad (4)$$

Podstawiając otrzymaną grubość (4) do funkcji celu (2) otrzymano:

$$F_c = \min\{\mu\} = B_1 \min \left\{ \frac{x_1 \left[(2 - x_2)^3 + (2x_1 - x_2)^3 \right] \left[1 - \frac{\rho_r}{\rho_s} \left(1 - \frac{1}{2x_3}\right) \right]}{x_2 \left(1 - 2x_3 + \frac{4}{3}x_3^2\right) (1 - x_2)(x_1 - x_2)} \right\}, \quad (5)$$

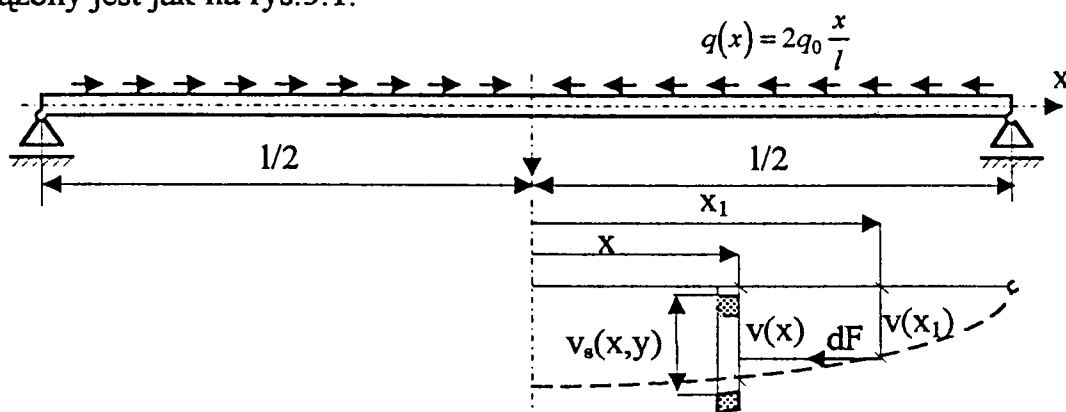
gdzie: $B_1 = 2 \frac{B}{a} \frac{\rho_s}{\rho_m} = const.$, $x_1 = \frac{b}{a}$, $x_2 = \frac{H}{a}$, $x_3 = \frac{h}{H}$, -zmienne decyzyjne.

Celem jest takie dobranie wartości zmiennych x_1 , x_2 , x_3 , aby funkcja (5) osiągała jak najmniejsze wartości. Przyjęto następujące przedziały zmienności:

$$0.2 \leq x_1 \leq 0.8 ; \quad 0.018 \leq x_2 \leq 0.030 ; \quad 0.03 \leq x_3 \leq 0.10.$$

3.2. Stateczność lokalna.

Przyjmijmy, że moment zginający ściankę trójwarstwową rozkłada się na parę sił, zatem jednostkowy pasek okładziny ścianki trójwarstwowej rury prostokątnej obciążony jest jak na rys.3.1.



Rys.3.1. Schemat obciążenia warstwy zewnętrznej.

Fig.3.1. Load scheme of external layer.

Moment zginający okładzinę:

$$Mg(x) = \frac{1}{4} q_0 l \left\{ \left[1 - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] v(x) - \frac{8}{l^2} \int_0^{l/2} x_1 \cdot v(x_1) dx_1 \right\} \quad (6)$$

Do analizy przyjęto funkcje opisujące przemieszczenia okładziny oraz pianki wypełniającej odpowiednio w postaci:

$$v(x) = v_1 \cos \frac{m \pi x}{l}, \quad v_s(x, y) = v(x) \cdot f(y), \quad m=1,3,5,\dots \quad (7)$$

Wartość obciążenia krytycznego fałdującego okładzinę możemy wyznaczyć z równania zachowania energii:

$$-W + E_{\varepsilon(1)} + E_{\varepsilon(2)} = 0 \quad (8)$$

gdzie: $W = \frac{1}{EJ} \int_0^{l/2} Mg^2(x) dx$ - praca obciążenia zewnętrznego,

$$E_{\varepsilon(1)} = \frac{EJ}{2} \int_0^{l/2} \left[\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right]^2 dx - \text{energia sprężystego zginania paska okładziny,}$$

$$E_{\varepsilon(2)} = \frac{E_s}{2} \int_0^{l/2} \int_0^{h_s} \left[\frac{G_s}{E_s} \left(\frac{\partial v_s}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_s}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \text{energia odkształcenia pianki.}$$

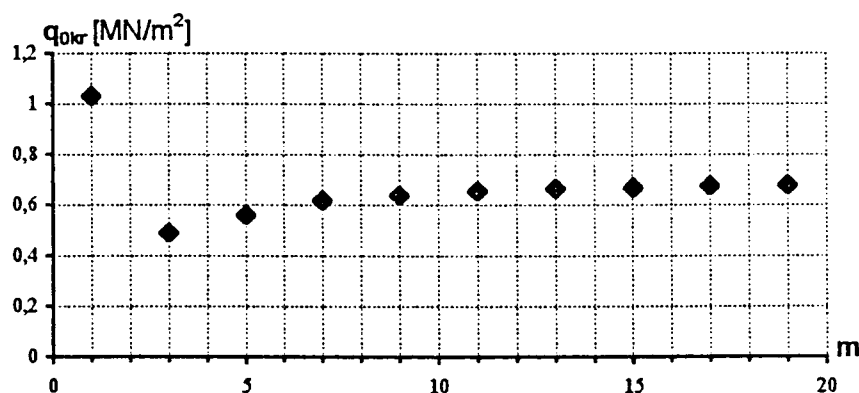
E_s - moduł Younga pianki wypełniającej, G_s - moduł Kirchhoffa pianki rdzenia.

Obciążenie krytyczne powodujące fałdowanie okładziny wynosi:

$$q_{0kr} = \frac{2EJ(m\pi)^2}{\sqrt{c} \cdot l^3} \sqrt{1 + \frac{E_s \cdot kl^4}{EJ(m\pi)^4 \operatorname{tgh}(kh_s)}} \quad (9)$$

gdzie: $k = \frac{m\pi}{l} \sqrt{\frac{G_s}{E_s}}$, $c = \frac{2}{15} + \frac{12}{(m\pi)^2} - \frac{126}{(m\pi)^4}$.

Jak wynika z zależności (9) wartość obciążenia krytycznego jest funkcją parametru m . Należy więc określić dla jakiej wartości tego parametru obciążenie krytyczne jest najmniejsze. Przykładowy przebieg funkcji $q_{0kr}(m)$ (z uwzgl.(7)) pokazano na rys.3.2.



Rys.3.2. Przebieg zmian obciążenia krytycznego jako funkcja parametru (m).

Fig.3.2. Critical load as function of parametric m .

4. Analiza numeryczna

Do obliczeń przyjęto konstrukcję, której warstwy zewnętrzne (okładziny) są stalowe ($\rho_s = 7.85 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$), a warstwa środkowa (rdzeń) jest wykonana z poliuretanu ($\rho_r = 120 \text{ kgm}^{-3}$). W wyniku przeprowadzonej analizy wytrzymałościowej wyznaczono numerycznie optymalne wartości parametrów x_1, x_2, x_3 , które wynoszą: $x_{1opt} = 0.36$, $x_{2opt} = 0.0184$, $x_{3opt} = 0.057$. Dla konstrukcji o tak dobranych parametrach przeprowadzono analizę stateczności lokalnej wg. schematu podanego w pkt. 3.2, której efektem jest rys.3.2. Jak widać minimalna wartość obciążenia krytycznego występuje dla parametru $m=3$ i wynosi 0.4893 MN/m^2 . Stąd wartość krytyczna ciśnienia wewnętrznego w rozpatrywanej rurze jest równa $p_{kr} = 391.44 \text{ kPa}$. Ciśnienie rzeczywiste w rozpatrywanej rurze nie przekracza wartości $p = 17.7 \text{ kPa}$. Zatem

warunek stateczności $p < p_{kr}$ jest spełniony. Dla danych $a=1250\text{mm}$, $\rho_m=1000\text{ kgm}^{-3}$, bezwymiarowy współczynnik mas $\mu_{min}=0.057$, zatem dobroć masowa $\eta = 0.946$.

Literatura

1. Adeli H.(red).: *Advances in Design Optimization*. Chapman & Hall, London, 1994.
2. Gajewski A., Życzkowski M.: *Optimal structural design under stability constraints*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
3. Gutkowski W., Bauer J.: *Structural optimization with sensitivity constraints: Statics*. Comp. & Struc. 52. 1994, s.121-125.
4. Kirch U.: *Structural optimization*. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, 1993.
5. Królak M. i in.: *Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich*. PWN Warszawa - Łódź 1990.
6. Królak M.: *Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich*. Politechnika Łódzka, Łódź 1995.
7. Magnucki K., Sekulski Z.: *Optymalne grubości warstw sandwiczowej powłoki walcowej z uwzględnieniem stateczności*. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, XXXIV Sympozjon „Modelowanie w Mechanice”, Gliwice 1995, s.207-212.
8. Magnucki K., Szyc W.: *Optimal design of a cylindrical shell loaded by internal pressure*. Struct. Optim. 11. Springer-Verlag, 1996, s.263-266.
9. Magnucki K., Tertel E.: *Optymalizacja parametryczna trójwarstwowej rury o przekroju prostokątnym*. Vol.4. Zeszyty Naukowe Pol. Śląskiej, XXXVI Sympozjon „Modelowanie w Mechanice”, Gliwice 1997, s.217-222.
10. Ostwald M.: *Optimum weight design of sandwich cylindrical shells under combined loads*. Computers & Structures, vol.37, 3, 1990, s.247-257.
11. Romanów Fr.: *Wytrzymałość konstrukcji warstwowych*. WSI Zielona Góra. 1995.

Summary

DETERMINATION OF THE OPTIMAL GEOMETRICAL PARAMETERS OF SANDWICH PIPES OF RECTANGULAR CROSS SECTION UNDER STABILITY CONSTRAINTS CONSIDERATION

The problem of the parametric optimization of a sandwich rectangular pipe loaded with uniform internal pressure is presented. Solution constraints are geometrical, strength and stability conditions. The objective function is the minimal ratio of structure mass to medium mass. Optimal parameters of sandwich pipes are determined.

MULTIPLE INTERACTION OF BUCKLING MODES IN THIN-WALLED MEMBERS AND IMPERFECTION SENSITIVITY

A.I. MANEVICH

Department of Theoretical Mechanics and Strength of Materials, Ukrainian University of Chemical Technology, Dniepropetrovsk, Ukraine

Z. KOLAKOWSKI

Department of Strength of Materials, Technical University of Lodz, 90-924 Lodz, Poland

An interactive buckling problem for thin-walled compressed members with taking into account the presence of many local modes with nearly the same critical stresses is studied. In distinction from some previous works, the analysis is based on exact calculation of the local modes allowing for local deformation of thin stiffeners. The Koiter's asymptotic method in the first asymptotic approximation is used. As an example, compressed stiffened panels are considered and it is shown that this improved analysis draws to conclusions concerning imperfection sensitivity which are opposite to those obtained in the solutions using simplified approximations of displacements fields.

1. Introduction

The interactive buckling theory of thin-walled structures which was intensively elaborated at last decades has become one of more advanced branches of the stability theory bringing to light reasons of discrepancies between theoretical and experimental results, especially for optimal designs (see, e.g., review in [1]). But a number of important questions until now remain unsufficiently investigated. One of them is the multiple interaction problem. Thin-walled bars, stiffened plates and shells usually have a lot of shortwave local modes with nearly the same critical stresses. The traditional approach considering the interaction of only two modes – one global and one local – may be too rough.

Multiple interaction of buckling modes in thin-walled members was studied in [2-4]. In [2] a theorem was proved and illustrated which gives a certain correlation between limit loads in the multiple- and two-modal solutions. In [3] a simple model of a thin-walled member (the Neut's model) was considered and for this model was established that it is sufficient to take account of a few local modes (2-3 modes adjacent to the mode with minimal critical stresses). In [4] a simplified approach to the multiple interactive buckling was proposed which reduces the analysis to an eigenvalue problem (not for the critical stresses but for incline of the postcritical path), and it is shown that account of many local modes enables one to explain "localization of the buckling patterns".

This work was stimulated by some results obtained in [4], in particular, by the conclusion about lower imperfection sensitivity of panels with thin stiffeners in comparison with stocky ones that contradicts to the experimental results [5,6]. It is known that coefficients governing the post-buckling behaviour and limit stresses may be very sensitive to shape of buckling modes. In [4] simplified approximations of local buckling modes were used ("plates buckle according to a sinusoidal law in the transverse direction, while stiffeners rotate rigidly around the junction lines"). Such a simplification may be too rough for plates with thin ribs.

In this paper the multiple interaction of buckling modes in stiffened thin-walled members is analyzed by the Koiter's asymptotic method in the first asymptotic approximation with exact determination of local buckling modes. This improved solution leads to conclusions concerning imperfection sensitivity of stiffened panels with thin and stocky stiffeners which are opposite to those obtained in [4].

2. Governing equations and solution

At solving a stability problem by the Koiter's asymptotic method the linear problems for the overall and local buckling have to be firstly considered. We employed an analytical solution for a compressed stiffened plate, which uses a plate model for ribs and hence applicable not only for stocky ribs but also in the case of thin ribs when local modes of "stiffener buckling" may be important ([1, 2]). Let the eigenvalues λ_i and corresponding modes U_i are determined ($i=1, \dots, n$, index "1" refers to an overall mode, the rest of indices – to local modes, all modes are normalized in some way, for example, by equalizing the maximal deflection to thickness of some plate).

In the nonlinear problem the displacement field is put in the form

$$U \equiv (u, v, w) = \lambda U_0 + \zeta_i U_i + \dots \quad (1)$$

where U_0 is the prebuckling displacements field, λ is the load parameter, ζ_i is the amplitude of i^{th} mode. The summation convention with respect to repeated indices is adopted.

The total potential energy in view of Eq. (1) contains quadratic and cubic terms (quartic terms are neglected) and may be written as follows

$$\Phi = -a_0 \frac{\lambda^2}{2} + \frac{1}{2} a_i \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) \zeta_i^2 + \frac{1}{3} a_{ijk} \zeta_i \zeta_j \zeta_k - \frac{\lambda}{\lambda_i} a_i \zeta_i \zeta_i^* \quad (2)$$

where ζ_i^* is the amplitude of initial imperfection in i^{th} mode. Having found the eigenmodes, coefficients a_0 , a_i , a_{ijk} are calculated by the known formulas (see,

e.g., [1]). All coefficients with $i, j, k > 1$ equal to zero (as membrane stresses in local modes vanish), and nonzero coefficients are only those that have one index "1" and even sum $i + j$. Hence local modes with even and odd numbers of halfwaves interact with the overall mode independently, and they may be considered separately.

Expression (2) leads to following set of algebraic equations of equilibrium ($s = 2, \dots, n$, summation in "s" isn't carried out):

$$\begin{aligned} a_1 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \zeta_1 + a_{1ij} \zeta_i \zeta_j &= \frac{\lambda}{\lambda_1} a_1 \zeta_1^* \\ a_s \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right) \zeta_s + 2a_{1si} \zeta_1 \zeta_i &= \frac{\lambda}{\lambda_s} a_s \zeta_s^* \end{aligned} \quad (3)$$

Following [4], consider also a simplified approach utilizing proximity of critical stresses for local modes and smallness of local initial imperfections. Let's assume that i) all local buckling modes are simultaneous: $\lambda_s = \lambda_{\min}$, ii) local imperfections are absent: $\zeta_s^* = 0$ ($s = 2, \dots, n$). Then Eqs (3₂) with account of $\zeta_1 \neq 0$ take the form:

$$a_s \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\min}}\right) \frac{\zeta_s}{\zeta_1} + 2a_{1si} \zeta_i = 0 \quad (s = 2, \dots, n) \quad (4)$$

Let's denote $\eta = \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\min}} - 1\right) \frac{1}{\zeta_1}$. Quantity η determines an incline of the post-buckling path in the plane (λ, ζ_1) :

$$\frac{\lambda}{\lambda_{\min}} = 1 + \eta \zeta_1 \quad (5)$$

Then Eqs (4) take the form of an eigenvalue problem:

$$\left(\frac{2a_{1si}}{a_s} - \delta_{si} \eta\right) \zeta_s = 0 \quad (s = 2, \dots, n) \quad (6)$$

where δ_{si} is the Kroneker symbol. At the prebifurcation range the single solution of Eqs (6) is a trivial solution $\zeta_s = 0$ ($s = 2, \dots, n$), and only the overall deflection develops according to Eq. (3₁):

$$\zeta_1 = \zeta_1^* \frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda} \quad (7)$$

Coupled (interactive) buckling with simultaneous overall and local deflections becomes possible when there appear nonzero solutions $\zeta_s \neq 0$ of the set of Eqs (6).

Let the eigenvalues are found, and let η_k has maximal absolute value : $|\eta_k| = \max |\eta_s|$. Note that the sign of η_k determines direction of the overall deflection in accordance with condition $\eta_k \varsigma_1 < 0$. For this value η from Eqs (6) an eigenvector $(\varsigma_2^0, \varsigma_3^0, \dots, \varsigma_n^0)$ is calculated which is normalized by the condition $\sqrt{\sum (\varsigma_s^0)^2} = 1$, $(s = 2, \dots, n)$. Since $\varsigma_s = c \varsigma_s^0$ ($s = 2, \dots, n$), where c is a constant.

Then from Eq. (31) with account of Eq. (5) value c is determined in dependence on λ :

$$c^2 = \frac{a_1}{B} \left[\varsigma_1^* \frac{\lambda}{\lambda_1} + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_{\min}} \right) \frac{1}{\eta_k} \right] \quad (8)$$

where $B = \sum a_{1ij} \varsigma_i^0 \varsigma_j^0$ (sign of ς_1^* has be choose in the same manner as sign ς_1).

As the postbuckling path is always falling (in cubic systems), maximal value $\lambda = \lambda_*$ corresponds to value $c = 0$ (the point of intersection of prebuckling path (7) and postbuckling path (5). Since λ_* is determined by a quadratic equation following from Eq. 8.

The summary local mode $U_l = \sum \varsigma_s U_s = c \sum \varsigma_s^0 U_s$, doesn't change its shape when ς_1 increases (the amplitudes raise only) in this simplified approach, in distinction from the exact solution of equations (3).

3. Numerical analysis

In the numerical analysis compressed panels stiffened with ribs of rectangular cross-section (an infinitely wide column, Fig 1) were considered. Below there are presented some results of the analysis for the panel with parameters: $b/L = 0.2$, $h/b = 0.025$, $t_1/b_1 = 0.05$, $t_1 b_1 / h b = 0.2$. As the parameter λ there was taken the dimensionless stress (average along the cross section): $\sigma^0 = \frac{\sigma}{E} 10^3$.

Spectrum of critical values of $\lambda_s = \sigma_s^0$ for local modes in the linear approach is presented in Fig. 2 by the points, connected with curve 1. Minimum critical stress $\sigma_{\lambda^*}^0 = 2.081$, corresponding to the mode with halfwaves number $m = m^* = 5$, is close to that of the overall (Euler) mode, which is equal to $\sigma_E^0 = 2.158$. Note that in all local modes displacements of stiffeners dominates and these modes can

be named as "stiffener buckling". When the number of halfwaves m is increased this feature of buckling becomes more pronounced.

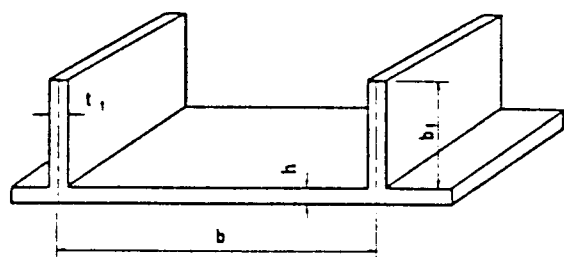


Fig. 1 Part of wide plate with longitudinal stiffeners

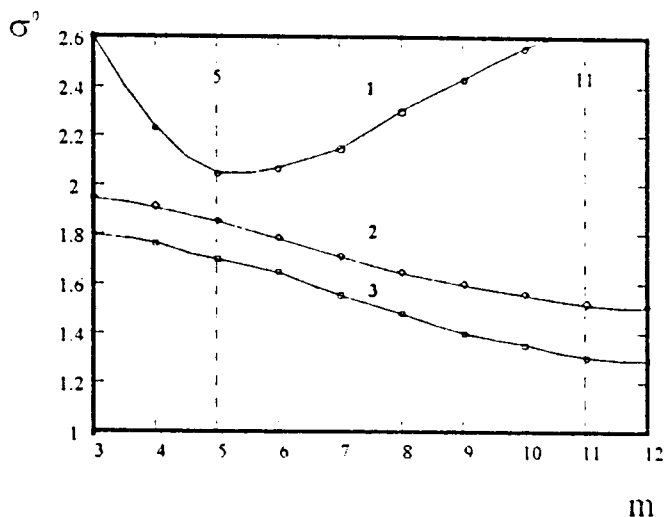


Fig. 2. Relationship between σ^0 and number of half-waves m

In the nonlinear solution firstly two-modal interaction was considered – interaction of the overall mode with each of the local mode separately. Imperfections were assumed as follows: amplitude of the overall imperfection (divided on h) $\zeta_1^* = 0.25$, amplitudes of imperfections in the local modes $\zeta_j^* = 0.1$. Limit stresses in the two-modal solution are presented in Fig. 2 by points connected with curves 2 and 3, for the simplified solution (described above) and the "exact" solution, respectively.

Two conclusions can be drawn from comparison of curves 1-3:

- the most dangerous local mode in the nonlinear solution may not coincide with that of in the linear approach (minimums on the curves 1 and 2 or 3 are quite different);
- the simplified solution, neglecting local imperfections, leads to certain overestimation of load carrying capacity.

Removal of the minimum to larger values of m in the nonlinear solution is typical for plates with thin stiffeners since the postbuckling coefficients a_{1u} have maximum (on absolute value) at $m = m^- > m^*$, and namely maximum $|a_{1u}|$ determines the dangerous mode. Note that if to calculate $|a_{1u}|$, using simplified approximations of the displacements field similarly [4], we obtain values of a_{1u} with large error, increasing with increase of m , and then $m^- = m^*$ or $m^- = m^* + 1$. Since an error in values of the limit stresses turns out to be considerable yet in the case of two interactive modes.

On the second stage of the nonlinear solution there was considered multiple interaction of buckling modes. Three and five local modes (in various combinations) were taken into account. The overall imperfection was assumed the

same (0.25), the amplitudes of imperfections in local modes were assumed to be proportional to the components of the eigenvector ζ_s^0 , and $\sqrt{\sum (\zeta_s^0)^2} = 0.1$. Results are presented in Table 1 for the two approaches - simplified and "exact" (both based on exactly calculated local buckling modes).

Table 1. Limit stresses $\lambda_{*} = \sigma_{*}^0$ in multiple interactive buckling

	One local mode		Three local modes		Five local modes		
halfwaves numbers	m=5	m=11	m= 3,5,7	m=9, 11,13	m=3,5, 7, 9, 11	m=5,7,9, 11,13	m=4,6,8 10,12
simplified approach	1.85	1.53	1.70	1.43	1.44	1.41	1.43
exact solution	1.70	1.34	1.47	1.18	1.20	1.18	1.17

Account of three or five local modes leads to nearly the same limit stresses, if these modes include mode m^* and adjacent modes. When we assumed approximate shapes of local modes similarly [4], the calculated limit stresses turned out to be much higher and close to that of for the two-modal interaction with the mode $m = 5$.

Data of Table 1 testify very high imperfection sensitivity of panels with thin ribs ($\lambda_{*} / \lambda_1 = 0.5 - 0.6$ at rather small imperfections). Computations, carried out for panels with stocky ribs, show much lower imperfection sensitivity ($\lambda_{*} / \lambda_1 = 0.75 - 0.8$). These theoretical results are in good agreement with the experimental data, presented in [5, 6].

Thus local buckling modes with prevailing displacements of stiffeners pertinent to plates with thin ribs ("local buckling of ribs") can lead to high imperfection sensitivity which may be revealed only when exact profiles of these modes are used at calculation of the postcritical coefficients (with using a plate model for thin ribs).

4. References

1. *Stany zakrytychne i nosnosc graniczna cienko-sciennych dzwigarow o scianach plaskich*. Praca zbiorowa pod red. M. Krolaka. PWN, Warszawa - Lodz, 1990.
2. А. И. Маневич, *Прикл. матем. и механика*. Т. 46, вып. 2 (1982), 337-345.
3. E. Byskov, *DCA/MM, Report No. 327*. (Techn. Univ. of Denmark, Lyngby, Denmark, 1986).
4. A. Luongo, M. Pignataro, *AIAA J.*, V. 26, No. 11 (1988), 1395-1402.
5. В.Л. Красовский, А.И. Маневич, *Труды X Всес. конфер. по теории оболочек и пластин*. Т. 1 (Тбилиси, Мецниереба, 1975), 655-663.
6. J.M.T. Thompson, J.D. Tulk, A.C. Walker, in *Buckling of Structures* (Berlin, Springer-Verlag, 1974), 149-159.

EFEKT SKALI W ZAGADNIENIACH ZGINANIA I STATECZNOŚCI BELKI SPOCZYWAJĄCEJ NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM O OKRESOWO ZMIENNEJ SZTYWNOŚCI

K. MAZUR - ŚNIADY

*Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50 - 370 Wrocław, Poland*

W niniejszej pracy rozpatruje się zagadnienia dynamiki i stateczności belki, spoczywającej na podłożu sprężystym o okresowo zmiennej sztywności. Znane z literatury równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych, które stanowi opis tego problemu zawiera człon o okresowo zmiennym współczynniku. Dla małej długości okresu w porównaniu z długością belki pojawiają się trudności z uzyskaniem rozwiązania. Homogenizacja problemu pozwala na uśrednienie wartości tego współczynnika, ale otrzymane w ten sposób rozwiązanie nie zależy od długości okresu. Zastosowana w niniejszej pracy metoda makromodelowania Woźniaka (5, 6) łączy dwie zalety – pozwala na sformułowanie problemu w postaci układu równań różniczkowych o stałych współczynnikach, a jednocześnie uzyskane rozwiązanie uwzględnia efekt skali (4), który ginie w metodach asymptotycznych (1 i szereg innych prac). Dodatkową zaletą metody jest jej dobra interpretacja fizyczna, co ma szczególne znaczenie w rozwiązywaniu zagadnień inżynierskich (np. przy modelowaniu nawierzchni kolejowej).

1. Modelowanie z uwzględnieniem efektu skali

Rozpatruje się belkę o masie jednostkowej $m(x)$ i długości L , spoczywającą na podłożu sprężystym o okresowo zmieniającym się współczynniku sztywności podłoża $k(x)=k(x+l)$, gdzie $0 \leq x \leq L-l$, $l < L$. Na belkę działa obciążenie prostopadle do osi o intensywności $f(x,t)$ oraz siły osiowe $N(x,t)$.

Stosując metodę wzbożonej makrodynamiki Woźniaka (5) zakłada się, że ugięcie belki $w(x,t)$ można przedstawić w postaci następującej sumy:

$$w(x,t) = W(x,t) + h_a(x)Q^a(x,t), \quad a = 1, 2, \dots, n, \quad (1)$$

gdzie $W(x,t)$ i $Q^a(x,t)$ są nieznanymi makrofunkcjami, natomiast $h_a(x)$ są znanymi funkcjami kształtu.

W niniejszej pracy przyjmuje się

$$h_a(x) = l^2 \sin \frac{2a\pi x}{l}, \quad (2)$$

zatem $h_a(x) \in O(l^2)$, $h'_a(x) \in O(l)$, $h''_a(x) \in O(1)$.

Definiując uśrednioną wartość dla dowolnej całkownej funkcji $f(x,t)$

$$\langle f \rangle(x, t) \equiv \frac{1}{l} \int_0^l f(x+y, t) dy, \quad (3)$$

otrzymuje się dla funkcji kształtu (2) oraz jej pochodnych następujące wartości uśrednione

$$\langle h_a \rangle = \langle h'_a \rangle = \langle h''_a \rangle = 0. \quad (4)$$

Zasada prac przygotowanych dla obciążonej dynamicznie belki spoczywającej na podłożu sprężystym ma postać (przy założeniach jak dla belki Bernoulliego – Eulera według teorii II rzędu z uwzględnieniem wpływu sił osiowych na momenty zginające) (3):

$$\begin{aligned} & - \int_0^L M(x, t) \delta w''(x) dx + \int_0^L N(x, t) w'(x) \delta w'(x) dx = \\ & = \int_0^L [f(x, t) - m(x) \ddot{w}(x, t) - k(x) w(x, t)] \delta w(x) dx + M_0(t) \delta w'(0) - \\ & - M_L(t) \delta w(L) - T_0(t) \delta w(0) + T_L(t) \delta w(L), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie $M(x, t)$ oznacza moment zginający,
 $M_0(t)$, $M_L(t)$ – wartość momentów na końcach belki,
 $T_0(t)$, $T_L(t)$ – wartość sił tnących na końcach belki,
 $N(x, t)$ jest siłą osiową.

Zasada prac przygotowanych zachodzi dla każdego

$$\begin{aligned} \delta w(x) &= \delta W(x) + h_a(x) \delta Q^a(x), \\ \delta w'(x) &= \delta W'(x) + h'_a(x) \delta Q^a(x) + h_a(x) \delta Q^{a'}(x), \\ \delta w''(x) &= \delta W''(x) + 2h'_a(x) \delta Q^{a'}(x) + h''_a(x) \delta Q^a(x) + h_a(x) \delta Q^{a''}(x), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $\delta W^{(x)}$, $\delta Q^a(x)$ dla $0 \leq x \leq L$ są dowolnymi niezależnymi makrofunkcjami.

Po uwzględnieniu (1) i (6) zasada prac przygotowanych (5) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} & - \int_0^L M(x, t) \left[\delta W''(x) + 2h'_a(x) \delta Q^{a'}(x) + h''_a(x) \delta Q^a(x) + h_a(x) \delta Q^{a''}(x) \right] dx + \\ & + \int_0^L N(x, t) \left[W'(x, t) + h'_b(x) Q^b(x, t) + h_b(x) Q^{b'}(x) \right] dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\delta W'(x) + h'_a(x) \delta Q^a(x) + \underline{h_a(x) \delta Q^{a'}(x)} \right] dx = \\
& = \int_0^L \left\{ f(x, t) - m(x) \left[\ddot{W}(x, t) + h_b(x) \ddot{Q}^b(x, t) \right] - k(x) \left[W(x, t) + h_b(x) Q^b(x, t) \right] \right\} \cdot \\
& \cdot \left[\delta W(x) + h_a(x) \delta Q^a(x) \right] dx + M_0(t) \left[\delta W'(0) + h'_a(0) \delta Q^a(0) + \underline{h_a(0) \delta Q^{a'}(0)} \right] - \\
& - M_L(t) \left[\delta W'(L) + h'_a(L) \delta Q^a(L) + \underline{h_a(L) \delta Q^{a'}(L)} \right] - \\
& - T_0(t) \left[\delta W(0) + h_a(0) \delta Q^a(0) \right] + T_L(t) \left[\delta W(L) + h_a(L) \delta Q^a(L) \right]. \quad (7)
\end{aligned}$$

Wykorzystując mikrooscylacyjny charakter funkcji kształtu i własności makrofunkcji można pominąć podkreślone człony we wzorze (7) i zgodnie z procedurą makromodelowania Woźniaka (6) przekształcić zasadę prac przygotowanych, podobnie jak w pracy (2), do następującej postaci:

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \left[\langle M \rangle(x, t) \delta W''(x) + \langle M h_a'' \rangle(x, t) \delta Q^a(x) \right] dx + \\
& + \int_0^L \left\{ \left[\langle N \rangle(x, t) W'(x, t) + \langle N h_b \rangle(x, t) Q^b(x, t) \right] \delta W' + \right. \\
& + \left. \left[\langle N h_a' \rangle W'(x, t) + \langle N h_b' h_a' \rangle Q^b(x, t) \right] \delta Q^a(x) \right\} dx = \\
& = \int_0^L \left\{ \left[\langle f \rangle(x, t) - \langle m \rangle(x) \ddot{W}(x, t) - \langle m h_b \rangle(x) \ddot{Q}^b(x, t) - \right. \right. \\
& - \langle k \rangle(x) W(x, t) - \langle k h_b \rangle(x) Q^b(x, t) \left. \right] \delta W + \\
& + \left[\langle f h_a \rangle(x, t) - \langle m h_a \rangle(x) \ddot{W}(x, t) - \langle m h_b h_a \rangle(x) \ddot{Q}^b(x, t) - \right. \\
& - \langle k h_a \rangle(x) W(x, t) - \langle k h_b h_a \rangle(x) Q^b(x, t) \left. \right] \delta Q^a \left. \right\} dx + \\
& + M_0(t) \delta W'(0) + M_0(t) h'_a(0) \delta Q^a(0) - M_L(t) \delta W'(L) - M_L(t) h'_a(L) \delta Q^a(L) - \\
& + T_0(t) \delta W(0) - T_0(t) h_a(0) \delta Q^a(0) + T_L(t) \delta W(L) + T_L(t) h_a(L) \delta Q^a(L). \quad (8)
\end{aligned}$$

Ponieważ zasada prac przygotowanych musi zachodzić dla każdej wariacji δW i δQ zgodnej z warunkami podparcia belki, otrzymuje się następujący układ $n+1$ równań ruchu

$$- \langle M \rangle''(x, t) - \left[\langle N \rangle(x, t) W'(x, t) + \langle N h_b' \rangle(x, t) Q^b(x, t) \right]' +$$

$$\begin{aligned}
& + \langle m \rangle(x) \ddot{W}(x, t) + \langle k \rangle(x) W(x, t) + \langle kh_b \rangle(x) Q^b(x, t) = \langle f \rangle(x, t), \\
& - \langle Mh_a'' \rangle(x, t) + \langle Nh_a' \rangle(x, t) W'(x, t) + \langle Nh_b' h_a' \rangle Q^b(x, t) + \langle mh_b \rangle(x) \ddot{Q}^b(x, t) + \\
& + \langle mh_a \rangle(x) \ddot{W}(x, t) + \langle mh_b h_a \rangle(x) \ddot{Q}^b(x, t) + \\
& + \langle kh_a \rangle(x) W(x, t) + \langle kh_b h_a \rangle(x) Q^b(x, t) = \langle fh_a \rangle(x, t).
\end{aligned} \tag{9}$$

W dalszym ciągu pracy ogranicza się rozważania do belki o stałej masie jednostkowej $m=\text{const}$, stałej sztywności ze względu na zginanie $EJ=\text{const}$.

Przyjmuje się także, że na belkę działa siła osiowa $N=\text{const}$.

Korzystając ze znanej zależności

$$M(x, t) = -EJ w''(x, t) \tag{10}$$

oraz z założenia (1) i zależności (4) otrzymuje się równania konstytutywne w następującej postaci:

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle(x, t) &= -EJ W''(x, t), \\
\langle Mh_a'' \rangle(x, t) &= -EJ \langle h_b'' h_a'' \rangle Q^b(x, t).
\end{aligned} \tag{11}$$

Równania ruchu (9) po podstawieniu (11) i uwzględnieniu podanych wyżej uproszczeń przyjmują postać następującego układu $n+1$ równań różniczkowych o stałych współczynnikach

$$\begin{aligned}
& EJ W^{IV}(x, t) - NW^{II}(x, t) + \langle k \rangle W(x, t) + \langle kh_b \rangle Q^b(x, t) + m \ddot{W}(x, t) + \langle f \rangle(x, t), \\
& (EJ \langle h_b'' h_a'' \rangle + N \langle h_b' h_a' \rangle + \langle kh_b h_a \rangle) Q^b(x, t) + \\
& + \langle kh_a \rangle W(x, t) + m \langle h_a h_b \rangle \ddot{Q}^b(x, t) = \langle fh_a \rangle(x, t).
\end{aligned} \tag{12}$$

Układ równań (12) wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi i początkowymi może opisywać cały szereg zagadnień inżynierskich, a nawet zawiera w sobie model asymptotyczny (dla $l \rightarrow 0$) i model homogenizacyjny.

2. Przykład

Zakłada się, że długość belki jest nieskończona $L = \infty$, masa jednostkowa stała $m=\text{const}$ i stała jest także sztywność ze względu na zginanie $EJ=\text{const}$.

Belka spoczywa na sprężystym podłożu o okresowo zmiennym współczynniku sztywności

$$k = k_0 \left(1 - \varepsilon \sin \frac{2\pi x}{l} \right), \text{ gdzie } 0 \leq \varepsilon \leq 1. \tag{13}$$

Przyjmuje się tylko jedną funkcję kształtu

$$h = l^2 \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (14)$$

Wartość siły krytycznej można wyznaczyć z układu równań (12)

$$EJ W^{IV}(x) + PW^{II}(x) + \left[k_0 - \frac{k_0^2 \varepsilon^2 l^4}{32 \cdot EJ \cdot \pi^4 - P \cdot 8\pi^2 l^2 + 2 \cdot k_0 l^4} \right] W(x) = 0. \quad (15)$$

Występujące w mianowniku wyrażenia $P8\pi^2 l^2$ i $2k_0 l^4$ są odpowiednio rzędu l^2 i l^4 , zatem można je pominąć w dalszych rozważaniach.

W tym wypadku

$$P_{kr} = \sqrt{4EJ k_0 \left(1 - \frac{k_0 \varepsilon^2 l^4}{32\pi^4 EJ} \right)}. \quad (16)$$

Sila krytyczna zależy od parametru l – długości okresu zmienności współczynnika sztywności sprężystego podłoża. Oznacza to, że otrzymany model uwzględnia efekt skali. Otrzymana wartość siły krytycznej jest mniejsza od wartości siły krytycznej obliczonej dla modelu uwzględniającego homogenizację współczynnika sztywności podłoża (odpowiada ona sile krytycznej dla belki na sprężystym podłożu o stałym współczynniku sztywności (7)).

Literatura

1. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P., *Osrednienie processov v perëdicheskikh sredakh*. Nauka, Moskva. (1984).
2. Mazur - Śniady K., *Macro - dynamic of micro - periodic elastic beams*, Mech. Teoret. i Stos., Vol. 31, 4, (1993).
3. Washizu K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Paris, Frankfurt (1982).
4. Wierzbicki E., *Efekt skali w zagadnieniach dynamiki i stateczności mikroperiodycznych kompozytów poddanych skończonym odkształceniom sprężystym*, Rozprawa habilitacyjna, Inst. of Applied Math. and Mechanics, Warsaw University, RW 97-1 (25).
5. Woźniak C., *Refined macrodynamics of periodic structures*, Arch. Mech., Vol. 45 (1993).
6. Woźniak C., *Microdynamics: continuum modelling the simple composite materials.*, Mech. Teoret. i Stos., Vol. 33, 2, (1995).
7. Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of elastic stability*, Mc GRAW - HILL BOOK COMPANY, INC. New York, Toronto, London (1961).

Summary

A LENGTH - SCALE EFFECT IN BENDING AND STABILITY OF A BEAM INTERACTING WITH A MICRO - PERIODIC ELASTIC SUBSOIL

Problem of dynamics and stability of a beam bending in interacting with a micro - periodic elastic subsoil is analyzed in the paper. Assumptions of Bernoulli - Euler theory are adopted and influence of axial forces on bending moments is taken into account.

The partial differential equation which describes this problem contains the periodically variable coefficient $k(x)=k(x+l)$, and l is the length of the period. For small l/L ratio, where L is length of the beam, solution of the problem is difficult to obtain even by numerical methods. Using the homogenization method we receive the average value of this coefficient, but in this way the length of the period is lost in the solution.

The analytical approach adopted in the paper is based on the refined micro-dynamics of periodic structure proposed by Woźniak (5, 6). It leads to length - scale model, in form of the system of differential equations with constant coefficients. The obtained length - scale model can describe many particular cases.

As an example the buckling problem of the infinite beam interacting with subsoil with periodic stiffness coefficient is considered. The presented solution - critical force, contains the length of this period. Contrary in the classical homogenization solutions this periodical parameter is omitted.

As a result we can see that presented solution contains the length - scale effect.

The critical force obtained in this paper is less than critical force presented in other papers.

STABILITY OF PLATES WITH INITIAL GEOMETRICAL PERIODICAL IMPERFECTIONS

B. MICHALAK

*Katedra Mechaniki Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Al. Politechniki 6, 93-950 Łódź, Poland*

Abstract. The aim of the contribution is to formulate and investigate an engineering theory describing stability of thin periodic shallow shell-like structures called slightly wrinkled plates. The obtained equations are applied to the evaluation of initial geometrical periodical imperfection on a value of a critical force. The obtained general results are illustrated by an example

1. Introduction

The subject of the paper is a stability of thin periodic shallow shell-like structure made of a linear-elastic homogeneous material shown on Fig.1 and referred to as a slightly wrinkled plate. The structure under consideration can be treated as a model of a plate with initial periodical geometrical imperfection, where l_1 , l_2 wave length of imperfection. It is assumed that l_1 , l_2 are small enough compared to the minimum characteristic length dimension L of the projection of the structure on the plane $0x_1x_2$. It follows that on a micro-scale (taking into account terms of an order l) the wrinkled plate behaves as a thin shell, while on a macro-scale (neglecting terms of an order l), we deal with certain special plate behaviour.

The paper is a continuation of investigations given in (2) and (4).

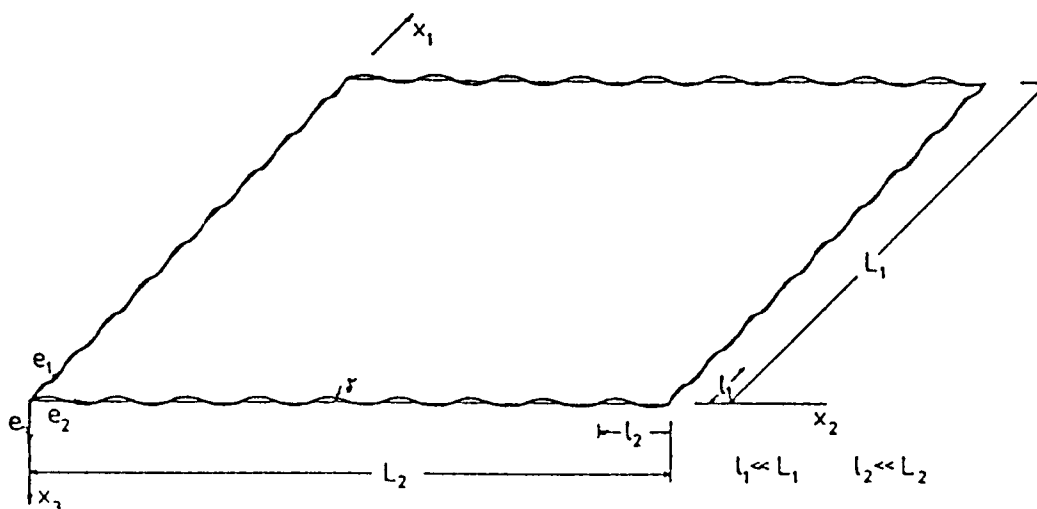


Fig.1.1. A scheme of the slightly wrinkled plate

2. Direct description of slightly-wrinkled plates

Let the midsurface of the undeformed wrinkled-plate be given by $x^3 = z(\theta^1, \theta^2)$, $(\theta^1, \theta^2) \in \Pi$, where Π is regular region on the plane Ox_1x_2 and $x^1 = \theta^1$, $x^2 = \theta^2$, $x^3 = z(\theta^1, \theta^2) = z(\theta^1 + l_1, \theta^2) = z(\theta^1, \theta^2 + l_2)$. Under denotation $\Delta = (0, l_1) \times (0, l_2)$, function $z(\cdot)$ is referred to as the Δ -periodic function, Δ being called the representative plane element of a wrinkled-plate. Setting $l = \sqrt{(l_1)^2 + (l_2)^2}$, it is assumed that $l/L \ll 1$, L being the smallest characteristic length dimension of Π . Hence l will be called the microstructure length parameter. Using the known denotations: $G^i{}_\alpha \equiv R^i{}_{,\alpha}$, $\mathbf{g}_\alpha \equiv G^i{}_\alpha \mathbf{e}_i$, $\mathbf{n} = \mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2 / |\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2|$ we obtain the metric tensor of the undeformed midsurface $a_{\alpha\beta} = G^i{}_\alpha G^i{}_\beta$, $b_{\alpha\beta} = n_i G^i{}_\alpha \beta$ and a Ricci tensor $\epsilon_{\alpha\beta}$ as the Δ -periodic functions.

For shallow shells we then find the following approximations, (3): $a_{\alpha\beta} \cong \delta_{\alpha\beta}$, $a \cong e = \det(e_{ab}) = 1$, $b_{\alpha\beta} \cong z_{,\alpha\beta}$ and the Christoffel symbols $\left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \cong 0$. The displacement field of the wrinkled-plate midsurface will be denoted by $\mathbf{u} = u^i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$, the external forces by $\mathbf{p} = p^i(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_i$ and by ρ the plate mass density related to this midsurface.

In the framework of the technical non-linear theory for thin elastic shallow-shells (3), (5), we obtain:

(i) strain-displacement relations in which non-linear terms involving gradients of u_α are neglected:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = G^i{}_\alpha u_{i,\beta} + \frac{1}{2} u^3_{,\alpha} u_{3,\beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = n^i u_{i,\alpha\beta} \quad (1)$$

(ii) constitutive equations:

$$n^{\alpha\beta} = DH^{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\gamma\delta}, \quad m^{\alpha\beta} = BH^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}, \quad (2)$$

where

$$H^{\alpha\beta\gamma\mu} = \frac{1}{2} \{ \delta^{\alpha\mu} \delta^{\beta\gamma} + \delta^{\alpha\gamma} \delta^{\beta\mu} - \nu (\epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\mu} + \epsilon^{\alpha\mu} \epsilon^{\beta\gamma}) \},$$

$D \equiv E\delta / (1 - \nu^2)$, $B \equiv E\delta^3 / 12(1 - \nu^2)$, E, ν , being the Young modulus and Poissons ratio, respectively.

(iii) equations of motion (in the weak form):

$$\int_{\Pi} (n^{\alpha\beta} \delta \epsilon_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \kappa_{\alpha\beta}) dx^1 dx^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Pi} \rho u^i \delta u_i dx^1 dx^2 = \int_{\Pi} p^i \delta u_i dx^1 dx^2, \quad (3)$$

which are assumed to hold for any virtual displacement field δu_i , such that $\delta u_i(\mathbf{x}) = 0$ for every $\mathbf{x} = (x^1, x^2) \in \partial\Pi$.

3. Macro-modelling

Following (1) we introduce two auxiliary concepts. Let ε_F be a certain small parameter characterizing computational accuracy related to a certain real-value function F in the framework of the proposed macro-description of the slightly wrinkled plates under consideration. If for every $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Pi$, such that $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < l$, condition $|F(\mathbf{x}, t) - F(\mathbf{y}, t)| < \varepsilon_F$ holds then a function $F(\mathbf{x}, t)$ will be called Δ -macro function. If F is continuous in Π together with all derivatives and if similar conditions with pertinent computational accuracies $\varepsilon_{\nabla F}$, $\varepsilon_{\ddot{F}}$, hold also for all derivatives of F then F will be called the regular Δ -macro function.

Let $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ be an integrable function, such that $f(\cdot, \mathbf{y})$ is a regular Δ -macro function defined on Π and $f(\mathbf{x}, \cdot)$ is a Δ -periodic function. In the sequel we shall use the denotation

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{l_1 l_2} \int_{\Delta} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}_1 d\mathbf{y}_2. \quad (4)$$

If f is independent of $\mathbf{x}$ then $\langle f \rangle$ is constant.

Let $h^a(\cdot)$, $a = 1, \dots, n$, be a system of n linear-independent continuous Δ -periodic functions defined on R^2 , having continuous first and second derivatives and such that $\langle h^a \rangle = 0$. Moreover, let values $h^a(\mathbf{x})$ satisfy conditions $h^a(\mathbf{x}) \in O(l^2)$, $h^a_{,\alpha}(\mathbf{x}) \in O(l)$, $h^a_{,\alpha\beta}(\mathbf{x}) \in O(1)$. Under the aforementioned conditions, functions h^a will be referred to as *the micro - shape functions*. Following (2) two basic micromodelling hypotheses leading to averaged theory of wrinkled plates will be formulated.

Macro - Kinematic Hypothesis. It is assumed that the displacement field $u_i(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Pi$ of the wrinkled-plate can be approximated by

$$u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{x}, t) + h^a(\mathbf{x}) V_i^a(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x^1, x^2) \in \Pi, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

where $U_i(\cdot, t)$, $V_i^a(\cdot, t)$ are arbitrary regular Δ -macro functions and $h^a(\cdot)$ are the known micro-shape functions postulated in every problem under consideration.

Macro - Modelling Hypothesis (MMH). In the course of an averaging procedure terms $O(\varepsilon_F)$ can be neglected as compared to those of F , where F runs over all macro-functions U_i , V^a , δU_i , δV^a , and their derivatives.

In order to explain the meaning of MMH let us observe that for any integrable Δ -periodic function f and a continuous l -macro function F defined on Π , the following formula holds

$$\int_{\Pi} f(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 = \langle f \rangle \int_{\Pi} F(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + O(\varepsilon_F). \quad (6)$$

The aforementioned micromodelling hypotheses lead from Eqs.(1)-(6) to a certain averaged model of a slightly wrinkled plate.

Substituting the right-hand sides of Eqs.(5) into Eqs.(3), and applying MMH to the aforementioned approximation formulae, we obtain the condition

$$\int_{\Pi} \left[\mathbf{M}^{\alpha\beta} \cdot \delta \mathbf{U}_{,\alpha\beta} + \mathbf{N}^{\alpha} \cdot \delta \mathbf{U}_{,\alpha} - (\mathbf{N}^{\alpha} \cdot \mathbf{g}^{\beta} U_{3,\alpha\beta})_{,\beta} \delta U_3 + (\mathbf{N}^a + \mathbf{M}^a) \cdot \delta \mathbf{V}^a \right] dx^1 dx^2 + \frac{d}{dt} \int_{\Pi} \left(\langle \rho \rangle \dot{\mathbf{U}} \cdot \delta \mathbf{U} + \langle \rho h^a h^b \rangle \dot{\mathbf{V}}^b \cdot \delta \mathbf{V}^a \right) dx^1 dx^2 = \int_{\Pi} \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{U} dx^1 dx^2, \quad (7)$$

which has to hold for every $\delta \mathbf{U}$, $\delta \mathbf{V}^a$.

4. Averaged equations of slightly-wrinkled plates

After applying the divergence theorem to Eqs.(7) and using (2), we arrive at the system of equations in macrodisplacement U_i and correctors V_i^a constituting the governing equations of the averaged theory of wrinkled-plates. From (7) we obtain the equations of motion

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - \mathbf{N}^{\alpha}_{,\alpha} - \mathbf{N}^{\alpha} \cdot \mathbf{g}^{\beta} U_{3,\alpha\beta} + \langle \tilde{\rho} \rangle \ddot{\mathbf{U}} &= \mathbf{p}, \\ \mathbf{N}^a + \mathbf{M}^a + \langle \tilde{\rho} h^a h^b \rangle \ddot{\mathbf{V}}^b &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

and the constitutive equations

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{\alpha} &= \mathbf{D}^{\alpha\beta} U_{,\beta} + \mathbf{D}^{a\alpha} \mathbf{V}^a, \\ \mathbf{N}^a &= \mathbf{D}^{ab} \mathbf{V}^b + \mathbf{D}^{a\beta} U_{,\beta}, \\ \mathbf{M}^{\alpha\beta} &= \mathbf{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} U_{,\gamma\delta} + \mathbf{B}^{a\alpha\beta} \mathbf{V}^a, \\ \mathbf{M}^a &= \mathbf{B}^{ab} \mathbf{V}^b + \mathbf{B}^{a\alpha\beta} U_{,\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (9)$$

here we have denoted

$$\mathbf{D}^{\alpha\beta} \equiv D \langle H^{\delta\alpha\gamma\beta} \mathbf{g}_{\delta} \otimes \mathbf{g}_{\gamma} \rangle, \quad \mathbf{D}^{a\alpha} \equiv D \langle H^{\beta\alpha\gamma\delta} \mathbf{g}_{\delta} \otimes \mathbf{g}_{\gamma} h^a_{,\delta} \rangle, \dots \quad (10)$$

It can be observed that the correctors V_i^a play the role of internal variables, being independent of the boundary conditions. The boundary conditions we have only for macro-displacements U_i and this conditions are analogous to the well known boundary conditions in of the Kirchhoff theory for homogeneous plates.

In order to calculate *critical values* of forces $N^{\alpha\beta}$ applied to the middle plane of a wrinkled-plate we assume that there is no external loads $\mathbf{p}=0$ and body forces. Then the equilibrium equations written down in the coordinate form take a form

$$\begin{aligned} M^{\gamma\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - N^{\gamma\alpha}_{,\alpha} &= 0, \\ M^{3\alpha\beta}_{,\alpha\beta} - N^{3\alpha}_{,\alpha} - N^{\alpha\beta} U_{3,\alpha\beta} &= 0, \\ N^{a|1} + M^{a|1} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Solving Eqs.(11) for the given boundary conditions for U_i , we will find that the assumed buckling of the wrinkled-plate is possible only for certain definite values of $N^{\alpha\beta}$. The smallest of these values determine the desired critical values.

5.Applications

Using Eqs.(8)-(11) we shall investigate stability of a rectangular slightly-wrinkled plate in which the wave-lengths of a midsurface imperfections are micro-periodic and equal: $l_1 = l_2 = l$. The system of equations for $U_i = U_i(\mathbf{x}, t)$ and $V_i^a = V_i^a(\mathbf{x}, t)$ we obtain by substituting the right-hand sides of Eqs.(9) into Eqs.(11). These equations lead to two independent systems of equations for U_1, U_2, V_3^a and U_3, V_1^a, V_2^a . If only one micro-shape function $h^a(\cdot) = h^1(\cdot) = h(\cdot)$ is introduced then denoting $V_i(\mathbf{x}, t) = V_i^a(\mathbf{x}, t)$ and the system equations describing stability of a wrinkled-plate will take the form

$$\begin{aligned} & -B \langle H^{1111} N^3 N^3 \rangle U_{3,1111} - 4B \langle H^{1212} N^3 N^3 \rangle U_{3,1212} - 2B \langle H^{1122} N^3 N^3 \rangle U_{3,2211} - \\ & B \langle H^{2222} N^3 N^3 \rangle U_{3,2222} + D^{311} U_{3,11} + D^{322} U_{3,22} + D^{311} V_{1,1} + D^{322} V_{2,2} + \\ & N^{11} U_{3,11} + 2N^{12} U_{3,12} + N^{22} U_{3,22} = 0 \end{aligned}$$

$$D^{311} U_{3,11} + D^{11} V_1 = 0,$$

$$D^{322} U_{3,22} + D^{22} V_2 = 0, \quad (12)$$

where we have denoted

$$\begin{aligned} D^{11} & \equiv D \langle H^{1111} (G_1^1 h_{,1})^2 \rangle + D \langle H^{1212} (G_1^1 h_{,2})^2 \rangle + \\ & + B \langle H^{1111} (n^1 h_{,11})^2 \rangle + 2B \langle H^{1122} (n^1)^2 h_{,11} h_{,22} \rangle + 2B \langle H^{1212} (n^1 h_{,12})^2 \rangle + \\ & + 2B \langle H^{1221} (n^1 h_{,21})^2 \rangle + B \langle H^{2222} (n^1 h_{,22})^2 \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

Let us restrict considerations to the analysis of stability for simply supported rectangular wrinkled-plate uniformly compressed in direction of x^1 and x^2 . Assume $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$ in this case we shall look for solutions of Eqs.(12) in the form

$$U_3 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \alpha_m x^1 \sin \beta_n x^2, \quad (14)$$

where $\alpha_m := m\pi / L_1$ and $\beta_n := n\pi / L_2$. Substituting the right-hand sides of Eqs.(14) into (12) we obtain the critical value of a compressive forces.

For slightly wrinkled-plate $H^{1111}=1$, $H^{1212}=\frac{1-\nu}{2}$, $H^{2222}=1$, $N^3=1$ and the expression for the critical values of N^{11} and N^{22} becomes

$$\begin{aligned} & (N^{11})_{cr} (\alpha_m)^2 + (N^{22})_{cr} (\beta_n)^2 = \\ & = B \left((\alpha_m)^2 + (\beta_n)^2 \right)^2 + \left[D^{311} - \frac{(D^{311})^2}{D^{11}} \right] (\alpha_m)^2 + \left[D^{322} - \frac{(D^{322})^2}{D^{22}} \right] (\beta_n)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

The first term of the above formula has the same form as the critical value of a compressive forces for a plane plate given in (6).

Now consider a plate with initial geometrical imperfections given by $z = \frac{l}{a} \sin(\frac{2\pi}{l}\theta^1) \sin(\frac{2\pi}{l}\theta^2)$ which will be treated as a slightly-wrinkled plate, and

when $N^{11} = N^{22}$. Assume the micro-shape function $h = \frac{l^2}{b} \sin(\frac{2\pi}{l}\theta^1) \sin(\frac{2\pi}{l}\theta^2)$.

The smallest value of $(N^{11})_{cr}$ will be obtained by taking $n=m$ equal to 1. Thus the expression for the critical force, for the square plate ($L_1 = L_2 = L$), becomes

$$(N^{11})_{cr} = B \frac{\pi^2}{L^2} \left[2 + 12 \left(\frac{L}{\delta} \right)^2 \left[\frac{(3-\nu)}{2a^2} - \frac{(3-\nu)/2}{a^2 + \frac{2}{3-\nu} \pi^4 (\delta/L)^2 (L/l)^2} \right] \right] \quad (16)$$

From Eqs.(16) it is obvious that the smallest value of $(N^{11})_{cr}$ being dependent on the imperfection amplitude a and the imperfection wavelength l .

5.Conclusions

From the above example it follows that the proposed averaged theory of wrinkled - plates can be successfully applied to the analysis of stability for plates with initial geometrical imperfections. Moreover, this difficult problem analysed in the framework of the shell theory, was described here by the relatively simple system of differential equations with constant coefficients. The results of the stability analysis leads to the important conclusion that the smallest value of a critical force is dependent on the microstructure length parameter l but is independent of the amplitude of introduced micro-shape function. It has be also concluded that the critical value of a compressive forces is dependent on the imperfection amplitude a .

References

1. Cz.Woźniak, . *Refined macrodynamics of periodic structures*. Arch.Mech.,**Vol.45** ,. 295-304, (1993)
2. B.Michalak, Cz.Woźniak; M.Woźniak, *The dynamic modelling of elastic wavy plates*. Arch. Appl. Mech., **Vol.66**, 177-186, (1996)
3. A.E.Green, W.Zerna, *Theoretical elasticity*,Chapter X,XI, Oxford , At the Clarendon Press (1954)
4. B.Michalak, *On the dynamic behaviour of elastic slightly wrinkled plates*. Jour. Theor. Appl.Mech.[submitted]
5. Cz.Woźniak, *Nonlinear shell theory* (in Polish), Chapter VIII, PWN, Warszawa (1966)
6. S.Timoshenko, *Theory of elastic stability*,Chapter VII,McGraw-Hill, New York,(1936)

BUCKLING ANALYSIS OF COMPOSITE STRUCTURES - APPLICATION OF THE NISA II PROGRAM

A. MUC

*Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Krakowska
Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland*

The aim of the present paper is to discuss various aspects of numerical buckling analysis conducted for thinwalled 2-D laminated plate or shell structures. In our opinion the sense of the numerical analysis is mainly dependent on three components: the theoretical knowledge, numerical description of the analysed problem and the experimental verification. The influence of the above three factors is mainly discussed on the example of the "NISA-II" program, especially in view of the optimization analysis of composites. Both numerical and experimental results dealing with buckling of structures illustrate the above problems

1. Introduction

The correctness of the numerical results can be verified by the comparison and the qualitative estimation of the following three components: (i) the theoretical model, (ii) the numerical model and (iii) the results of experiments. The continuous development and the increasing number of various FEM packages do not simplify the above verification, since the FEM systems are rather treated by the users as so-called "black-boxes" being the sources of reasonably good results. In the view of the above the objectives of the present paper may be summarized in the following way:

- to conduct a review of existing FEM programs especially focusing an attention on the buckling and optimization analysis of composite 2-D thinwalled structures,
- to present some numerical results obtained with the use of the "NISA-II" program (version 6) [1],
- to compare theoretical results with experimental ones.

The numerical analysis and the experimental verification have been carried out for structures made of preimpregnated unidirectional graphite/epoxy com-

posites. The presented examples deals mainly with the consideration of thin-walled laminated structures, such as axially compressed rectangular plates and cylindrical shells.

2. Optimization procedures in the NISA-II program

A broad field of optimization procedures that may be used also for the buckling analysis is the fundamental advantage of the NISA-II [1] optimization package (called NISAOPT). In general, the system NISAOPT is a set of optimization methods applied to the solver being the classical FEM program NISA-II. In our opinion, the NISAOPT package is much more better than other known FEM systems, such as e.g. COSMOS, ABAQUS, ADINA, ANSYS or PANDA II. The multi-objectivity and generality of this system in practice is conducted by the division into three separated moduli:

- **SHAPE** - shape optiization. The optimization algorithm is based on the introduction of the classical Lagrange multipliers. The linear, plane, 3-D or shell problems can be solved, but the analysis is limited to static, geometrically linear one. Referring to the composite materials it is worth to note that this modulus can be applied to the optimal design of 3-D composite structures where the whole area may be divided into empty and filled by the material components.
- **STROPT** - optimization of structures with the prescribed shape with respect to the loss of stability, eigenfrequencies, first-ply-failure etc. It may be utilized in a broad class of both static and dynamic problems. This modulus allows us to select among three different optimization algorithms - gradient method, recursive quadratic method and bounding methods. Using these procedures one can solve a variety of optimization problems for composite materials treating fibre orientations and thicknesses of each individual plies in the laminate as design variables.
- **SECOPT** - optimization of beams cross-sections. Length and thickness of each individual beam cross-section are design variables. The gradient methods are used as optimization algorithms. This modulus enables us to conduct optimization for a variety of practical engineering problems, such as a design of cars, planes etc.

In view of the buckling analysis of thinwalled composite structures the NISA-II program allows us to introduce easily various shell or plate 3-D orthotropic

material properties and solve it with the use of the first order transverse shear or classical theories. In addition, there are options for solving buckling problems and those solutions are in a good agreement with the experimental analysis as it will be demonstrated later.

3. Experimental analysis of axially compressed plates.

Various experiments have been conducted to analyse pre- and post- buckling behaviour of axially compressed rectangular plates. In general, two types of plates have been studied with and with no delaminations. The plates have been made of four individual layers. Each of them has the identical orientations related to the axis of the acting external loads, i.e. 0° , $\pm 45^\circ$ and 90° . The mechanical properties as well as their geometry is summarized below:

$$\begin{aligned} E_1 &= 128GPa, E_2 = 13.4GPa, G_{12} = 6.8GPa, G_{23} = G_{13} = 3.4GPa, \\ \nu_{12} &= 0.28a = 250mm, b = 100mm, t = 0.7mm \end{aligned} \quad (1)$$

The experiments have been carried out with the use of the Instron, numerically controlled machine. Figure 1 is a plot of the external axial load versus the displacements. As it may be noticed a negligibly small load changes the equilibrium state - the prebuckling part of the deformation curve is almost horizontal. Then, the postbuckling deformations occur that achieve even the value of 50mm (about 20% of the initial plate length) with no visible failure. Those deformations have been purely elastic. We suppose that during the loading process the matrix cracking may occur but it can be recognized only under the microscope scanning.

Then the experimental buckling load have been compared with the numerical results obtained with the use of the NISA II program as well as with the analytical results evaluated with the use of geometrically linear Love-Kirchhoff theory. In the analysed numerical case a one-quarter of the plate have been discretized with the use of 40 quadrilateral eight noded elements. The composite elements (NKTP=32) allow us to take into account first order transverse shear deformations. The comparison of one result is given in Table 1.

Experimental results	NISA - II	Love-Kirchhoff
65.2 [N]	31.28 [N]	53.84 [N]

Table 1. Numerical verification of experimental buckling results.

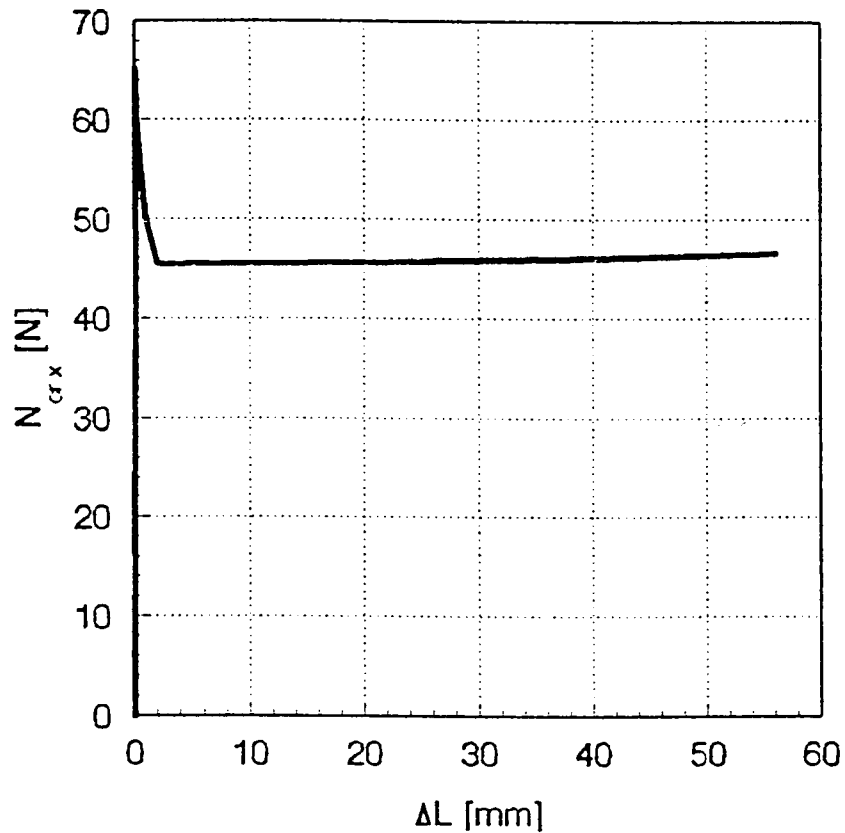


Figure 1: Deformations of axially compressed plate

Buckling load determined experimentally is much higher than those predicted by theoretical considerations probably due to not exact realization of theoretical simply-supported boundary conditions. FEM results are lower than those estimated by linear Love-Kirchhoff plate theory since the Kirchhoff modulus is very low comparing with the value of the Young modulus E_{11} . It should be noted that buckling mode is the same for all cases analysed herein ($m = n = 1$). It seems to be necessary to verify the whole deformation path plotted in Fig.1 with the use of the NISA II static nonlinear option. However, it is complicated since for the considered type of loading the numerical analysis may be conducted with the use of 3-D elements only.

4. FEM optimization of axially compressed cylinders

To verify the possibility of numerical FEM optimization with the NISA II program let us study the optimization problem subjected to the first-ply-failure (FPF) and buckling constraints. The FPF load have been evaluated with the use of the Tsai-Wu criterion. The cylinders wall id made of four layers having an arbitrary orientation varying in the interval $[0,90]$. The initial configuration has been the identical for all cases,i.e. $[0/45/45/90]$ and the first orientation corresponds to the top layer. The pure FEM results have been compared with those obtained with the use of the genetic algorithms [2]. It should be emphasized that in both cases of the numerical experiments the shell theory (FSDT) and geometrical assumptions (linear buckling analysis) have been the same. A one-quarter of the cylinder have been modelled with the use of 1152 triangle elements. The results are presented in Table 2.

	FPF	Buckling	Buckling + FPF
NISA - II FE	[90/0/0/90]	[49.5/60.4/72.1/51.5]	[71.2/54.3/51.1/18.5]
Gen. algorithms	[90/0/0/90]	[45/90/90/45]	[45/90/90/45]

Table 2. Optimal configurations for axially compressed four layered cylinders.

The comparison shows the similar or even identical character of optimal solutions. However, it should be noted that in both optimization problems different types of design variables have been used - continuous in the NISA-II program and discrete in genetic algorithms. On the other-hand it is well-known that for composites the optimal solutions are not unique.

5. References

1. *NISA - II manuals (version 6)*, EMRC, Troy, Michigan, (1996).
2. Muc A., *Transverse shear effects in optimization of axially compressed shells*,

Composite Structures, (1997 - in print).

6. Acknowledgements

The support from the KBN grant PB-232/T07/95/08 is gratefully acknowledged.

OPTIMIZATION OF COMPOSITE STRUCTURES UNDER BUCKLING CONSTRAINTS

A. MUC

*Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Krakowska
Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland*

Finding of an efficient composite structural design that meets the requirements of a certain application can be achieved by global or local tailoring of their properties. However, for composite thinwalled structures, a special attention has to be focused on the formulation of the governing equations describing the analysed problem. In the present paper we formulate and solve the optimization problem of biaxially compressed sandwich plates subjected to buckling constraints having the faces made of FRP. Three various plate theories have been used, i.e. higher order (HSDT), first order (FSDT) transverse shear deformations theories and the classical plate theory (L-K). The locations of individual plies having the orientations 0° , $\pm 45^\circ$ and 90° are the design variables. A lot of results obtained with the use of the genetic algorithms illustrates the influence of theoretical formulations on optimal design of sandwich and composite plates.

1. Governing equations

The study of the influence and significance of anisotropy on the structural response of FRP- faced sandwich plates for bending and vibration was made by many authors as can be seen in the extensive bibliography review presented by Rao [1].

Consider a laminate plate composed of N orthotropic layers, symmetrically located with respect to the midplane of the laminate. In order to reduce the three-dimensional theory (3-D) to a two-dimensional (2-D) one, let us assume that the 3-D displacements $U_\alpha(x, y, z)$ have the following form:

$$U_\alpha^{(k)}(x, y, z^{(k)}) = u_\alpha^{(k)}(x, y) + \delta_{\alpha 3} \sum_{j=1}^P V_{j\alpha}^{(k)}(x, y) \Phi_j(z^{(k)}), \alpha = 1, 2, 3 \quad (1)$$

where $\delta_{\alpha 3}$ denotes the Kronecker symbol. The bracketed subscripts ($k=1,2,3$) are used to denote quantities associated with the core ($k=1$) and the faces ($k=2,3$), respectively. For the faces and the core the separate reference systems of coordinates have been introduced (Fig.1) numbered also by the bracketed subscripts (k). $u_\alpha^{(k)}(x, y)$ are the displacements at the midplanes $z^{(k)} = 0$. The

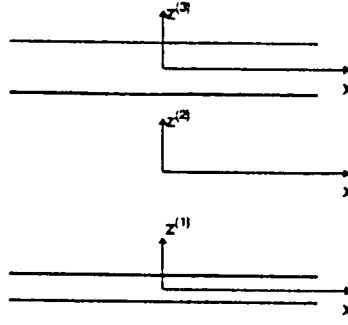


Figure 1: Geometry of a sandwich plate.

formulation (1) represents various sandwich plate theories, generated directly by the different forms of the functions $V_{j\alpha}^{(k)}(x, y)$ and $\Phi_j(z^{(k)})$ and the total number of terms P taken into account in the series. In the present analysis we assume three plate theories, i.e. HSDT suggested by Reddy [1], where:

$$V_{1r}^{(k)}(x, y) = \gamma_r^{(k)}(x, y), V_{2r}^{(k)}(x, y) = 0, V_{3r}^{(k)}(x, y) = \gamma_r^{(k)}(x, y) + \frac{\partial u_3}{\partial x_r}$$

$$\Phi_1(z^{(k)}) = z^{(k)}, \Phi_2(z^{(k)}) = 0, \Phi_3(z^{(k)}) = -z^{(k)} \frac{4}{3} \left(\frac{z^{(k)}}{t^{(k)}} \right)^2, \quad r = 1, 2 \quad (2)$$

$t^{(k)}$ denote the total thickness of the core and of the faces, respectively (Fig.1). Assuming that $P=1$ one can obtain from eqns (2) the displacement field for FSDT, and further simplification, i.e.

$$\gamma_r^{(k)}(x, y) = -\frac{\partial u_3}{\partial x_r} \quad (3)$$

reduces the above relations to the classical Love-Kirchhoff plate theory (L-K). Let us note that the normal deflection $u_3^{(k)}(x, y) = w$ is assumed to be the same for the core and the faces.

Since the core is thick and flexible the core material sustains only transverse shear stresses $\sigma_{i3}^{(1)}$, $i=1, 2$. Defining in the classical way transverse shear strains:

$$\epsilon_{i3}^{(k)} = \frac{\partial U_i^{(k)}(x, y, z^{(k)})}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

using the physical relations and continuity conditions for displacements and transverse shear stress resultants one can reduce the total number of kinematical

unknown variables from 7 to three, i.e. $w, \gamma_i^{(1)}$ ($i=1,2$).

The explicit form of the mentioned above generalized displacements, which characterise completely the sandwich plate response is needed to formulate the buckling problem using the classical Rayleigh-Ritz method. These displacements to satisfy the simply-supported boundary conditions are chosen in the form of the following geometric series:

$$w = A \cos(\psi x) \sin(\phi y), \gamma_1^{(1)} = B \cos(\psi x) \sin(\phi y), \gamma_2^{(1)} = C \sin(\psi x) \cos(\phi y) \quad (5)$$

where $\psi = m\pi/a, \phi = n\pi/b$, and m, n are half-wavelength integers, a, b the length of the plate in the x and y directions, respectively, whereas A, B, C the undetermined coefficients to be evaluated from the condition of minimisation of the total energy of the sandwich plate.

Due to the lack of the space we do not present the explicit form of the final governing relations. It should be mentioned that the derivation of them may be significantly simplified by the use of the symbolic packages, e.g. *Mathematica*, *Maple*.

2. Optimization problem

Each of the top and bottom faces of the sandwich plate is constructed of an arbitrary number N of orthotropic layers of thickness $(t-t_c)/2N$ (t_c - the thickness of the core). The laminate is assumed to be symmetric, balanced and made of $0^\circ, 90^\circ, \pm 45^\circ$ plies, each of thickness $(t-t_c)/N$. As the result only $N/4$ ply orientations are required to describe the laminate configuration. As it is well known the buckling analysis is always associated with searching for a such wavenumber that corresponds to a minimal buckling load. However, in optimization problems of laminates subjected to buckling constraints one can encounter a variety of solutions where optimal angle orientations (or thicknesses of each individual plies) are not connected with one wavenumber m or n . The optimum exists as the buckling parameter λ_b is identical for m and $m+1$, i.e.:

$$\lambda_b(m, n) = \lambda_b(m+1, n) \quad (6)$$

The above condition is called as **bimodal** solution. For continuous ply orientations the relation (5) can be satisfied exactly and one can find even analytical solutions - see Muc [3]. For discrete optimization variables usually eqn (5) is satisfied in an approximate manner only.

Having all basic relations one can formulate now the optimization problem:

Find

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \text{Min} \\ S_i & m, n \end{array} \lambda_b(S_i; m, n) \quad (7)$$

subjected to the inequality constraint:

$$\lambda_b(S_i; m, n) \leq \lambda_s(S_i; m, n) \quad (8)$$

and the equality constraint in the form given by eqn (4). λ_s is the FPF load parameter computed with the use of eqns (3),(4) and an appropriate FPF criterion, whereas S_i constitutes a set of $3^{N/4}$ locations of plies oriented at 0° or 90° or $\pm 45^\circ$ in the laminate.

To simplify the optimization problem formulation the problem (5-7) has been replaced by the equivalent in the following form:

Find

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & \text{Min} \\ S_i & m, n \end{array} \quad \lambda_b^m - r_s(\lambda_b^m - \lambda_s^m)^2 - r_{bim}(\lambda_b^m - \lambda_b^{m+1})^2 \quad (9)$$

The positive variables r_s and r_{bim} control the magnitudes of the penalty terms in the above objective function.

3. Application of genetic algorithms

The existence of multiple relative or local optima is a characteristic feature of composite 2D structures, independently on the type of design variables used in the analysis, i.e. continuous, discrete or integer. Therefore, the problem of the relative optima cannot be unique to linear programming methods. The solution of the problem by the latter methods is usually liable to depend on the initial design from which the design procedures is started. The obvious advantage of genetic techniques over the previously discussed algorithms is based on probabilistic search method linking both multi-start optimization algorithms, the possibility of the effective optimization analysis for disjoint or nonconvex design spaces and the existence of zero-one integer variables simplifying the computer coding. Mathematical programming methods will find the optimum in convex problems where there exists a single global optimum.

There are essentially three basic components necessary for the successful implementation of a genetic algorithm. At the outset, there must be a code or scheme that allows for a bit string representation of possible solutions to the problem. It is assumed that the fibres oriented at 0° are represented as 1, at $\pm 45^\circ$ as - 2, and at 90° as - 3. Next, a suitable objective function must be devised, for instance in the form given by eqn (1). The final component is the development of transformations functions, with the use of random variable generators, that mimic the biological evolution process, i.e. recombination and mutation. The above three factors may be easily adopted to the optimal design strategy for 2D thinwalled

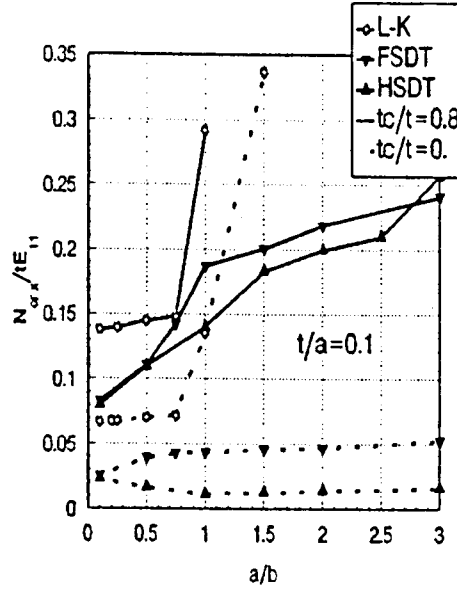


Figure 2: Comparison of optimal buckling loads.

composite structures.

However, it should be emphasized that the correctness of the genetic search as well as the total number of iterations depend on various factors, such as: 1) the number of multiple relative and local optima, 2) the length of the bit string (equal to $N/4$) - for discrete optimization problems the better results can be obtained as N increases, 3) the initial population size, 4) the probability and number of crossover, 5) the probability of mutation, 6) the selection rule in the recombination process. There is not known in advance how for a particular optimization problem the optimal values of the above factors can be selected or prescribed.

4. Numerical implementation

The results presented herein were obtained for a graphite/epoxy plate having the following material properties:

$$E_1 = 127.59 GPa, E_2 = 13.03 GPa, G_{12} = 6.41 GPa, G_{13} = G_{23} = 0.5 G_{12} \quad (10)$$

The results of the numerical analysis are presented in Fig.2. The plots demon-

strate the distributions of optimal buckling loads versus the geometrical ratio a/b for the sandwich ($t_c = 0.8 t$) and the composite ($t_c = 0$) plates. As it may be noticed the composite plate gives always the lower optimal buckling loads than the sandwich one. On the other, Figure 2 shows also the influence of the plate theories on the optimal design. The significant differences in values of critical loads may be observed particularly for L-K and FSDT and HSDT, and much lower between FSDT and HSDT. Of course, the differences in the values of the optimal loads are also associated with the change of the optimal strings (the optimal stacking sequences). It should be emphasized that the used version of genetic algorithms seems to be very effective for solving the discussed class of the optimization problems subjected to buckling constraints.

5. References

1. Rao K.M., *Buckling analysis of sandwich plates faced with fiber-reinforced plastics*, *AIAA J.*, **Vol.23** (1985), 1247-1253.
2. Reddy J.N., *A simple higher-order theory for laminated plates*, *J. Appl. Mech.*, **Vol.51** (1984), 745-752.
3. Muc A., *Optimal fibre orientation for simply-supported, angle-ply under bi-axial compression*, *Composite Structures*, **Vol.9** (1988) 161-172.

6. Acknowledgements

The support from the KBN grant PB-232/T07/95/08 is gratefully acknowledged.

STATECZNOŚĆ SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNA STAŁOWYCH RAM Z NIEDOSKONAŁOŚCIAMI

J. MURZEWSKI

*Katedra Teorii Niezawodności i Podstaw Konstrukcji Metalowych
Politechnika Krakowska, L-13, Warszawska 24, 31-155 Kraków*

Dużą redukcję nośności sprężysto-plastycznych elementów o średniej smukłości zaproponowano uwzględniać przy pomocy probabilistycznie uzasadnionego współczynnika wybożenia $\chi(\lambda)$. Dla oceny nośności całej konstrukcji przeprowadza się osobne obliczenia w stanie sprężystym i plastycznym, metodą współczynników częściowych. Stosuje się podejście statyczne teorii plastyczności i koncepcję momentów rezydualnych zamiast metody przegubów plastycznych. Definiuje się momenty zastępcze $M_s(N_s, V_s)$ dla obliczeń warunkowego współczynnika bezpieczeństwa γ_{pl} ramy w stanie plastycznym z uwzględnieniem przechyłu wstępnego słupów ϕ_0 jako niedoskonałości układu. Określa się układ obciążeń niepowodujących zginania dla obliczeń nośności krytycznej ramy doskonale sprężystej z dopełnioną niedoskonałością ϕ i oblicza się drugi współczynnik warunkowy γ_{el} . W końcu definiuje się uogólnioną smukłość ramy $\tilde{\lambda}$ i oblicza łączny współczynnik nośności γ_R .

1. Wstęp

Przypuszczalnie każdy przypadek sprzężonej niestateczności sprężysto-plastycznej elementów stalowych lub układów da się sprawdzić przy pomocy prostej formuły,

$$\chi = \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \tilde{\lambda}^{2n}}} \quad (1)$$

z odpowiednią definicją względnej smukłości λ i specyficznego parametru niedoskonałości n . Niewielkie niedokładności zachodzą w porównaniu z normami.

Wzór (1) ma podstawy probabilistyczne. Jego wyprowadzenie dla elementów osiowo ściskanych przedstawiono najpierw w roku 1973 na kursie CISM w Udine, a następnie rozwijano we wielu pracach (Murzewski, 1977 itd.). Parametr imperfekcji n równa się odwrotności weibulłowskiego współczynnika zmienności. Z badań statystycznych wynika, że parametr n zależy od smukłości λ , mimo to stałe wartości $n = \text{const}$ wprowadzono do normy polskiej PN-90/B-03200 i wykalibrowano dla wielorakich krzywych wybożenia. Uogólnienie wzoru (1) na ramy przedstawiono m.in. na VI-ym Sympozjum Stateczności Konstrukcji w Spale (Murzewski, 1991). Ostatnio uwzględnione zostały imperfekcje geometryczne konstrukcji ramowej i obliczenia drugiego rzędu (Murzewski, 1996). Sprawy te rozpatruje się w niniejszym przyczynku i wprowadza się kilka dalszych usprawnień obliczeń.

Symbol EC3 stosuje się dla prenormy ENV 1993 czyli Eurokodu 3, a PN - dla normy polskiej PN-90/B-03200. Indeks R - dla nośności, S zaś - dla oddziaływań czyli efektów obciążenia. Indeksy k i d dodaje się dla oznaczenia wartości charakterystycznych i obliczeniowych. Granicę plastyczności oznacza σ_{pl} a nie f_y jak to jest w EC3.

2. Zmodyfikowane obliczenia na wyboczenie i zwichrzenie

Zredukowane wartości wytrzymałości $\sigma_{pl,d}/\gamma_M$ równe są wartościom obliczeniowym f_y/γ_M według EC3, lecz interpretacja współczynnika γ_M jest tu odmienna. W nowym ujęciu uważa się γ_M za współczynnik niepewności modelu, a nie - za współczynnik materiałowy. Medianę wytrzymałości krytycznej - $\tilde{\sigma}_\alpha = \pi^2 \tilde{E} / \tilde{\lambda}^2$ redukuje do wartości obliczeniowej $\sigma_{cr,d}$ w takiej samej proporcji jak granicę plastyczności ,

$$\gamma_R = \tilde{\sigma}_R / \sigma_{Rk} \approx 1,2 . \quad (2)$$

Moduł sprężystości $E=200 \text{ GPa}=29000 \text{ ksi}$ został ustalony w amerykańskiej metodzie LRFD (Galambos i in., 1978) i tę wartość uważa się za medianę $\tilde{E}$. Jest ona bardziej dokładna niż 205 GPa według PN i jeszcze bardziej - niż 210 GPa według EC3/3.2.5.

$$E_d = 200/1,2 = 167 \text{ GPa} . \quad (3)$$

Norma EC3/5.5.1 określa smukłość względną $\bar{\lambda} = \lambda/(93,9\varepsilon)$ ze współczynnikiem $\varepsilon = \sqrt{235/\sigma_{Rd}}$ dla innych gatunków stali niż Fe360. Koryguje się ją wprowadzając E_d

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}_R}{\tilde{E}}} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{Rd}}{E_d}} = \frac{\lambda}{83,7 \varepsilon} \quad (4)$$

Smukłość względną można zdefiniować nie tylko dla wyboczenia słupów lecz także dla zwichrzenia belek. Określa ją bardziej ogólny wzór

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\tilde{M}_{pl} / \tilde{M}_{cr}} \quad (5)$$

gdzie M_{pl} - wytrzymałość plastyczna belki zginanej,

M_{cr} - granica zwichrzenia belki sprężystej (punkt bifurkacji).

Polskie krzywe wyboczeniowe dla słupów i belek określa właśnie równanie (1). Jest ono prostsze niż równanie Ayrton-Perry'ego przyjęte przez EC3 /(5.46)

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} , \text{ lecz } \chi \leq 1 , \quad \text{gdzie } \Phi = 0,5 [1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2] . \quad (6)$$

Jeśli współczynnik wyboczeniowy χ jest określany równaniem (1) i wykładnik n jest odpowiednio wykalibrowany, to różnice pomiędzy wartościami (6) według EC3 i nowymi wartościami χ są niewielkie. Parametry imperfekcji α według EC3 i odpowiednie wartości n są podane w tablicy 1 dla europejskich krzywych wyboczeniowych a, b, c, d; także są tam parametry n dla polskich krzywych wyboczeniowych a, b, c, oraz wartości n - dla krzywych zwichrzeniowych a₀, a.

Tablica 1. Parametry imperfekcji dla stalowych elementów konstrukcyjnych

Krzywa wyboczeniowa	a ₀	a	b	c	d	Norma
α	-	0,21	0,34	0,49	0,76	EC3
n	-	2,2	1,6	1,3	1,0	EC3
n	2,5	2,0	1,6	1,2	-	PN

Wartości n są wykalibrowane przez kolokację dwóch krzywych (1) i (6) w punkcie $\bar{\lambda}=1$, czyli $\tilde{\lambda}=93,9/83,=1,12$. Krzywe wyboczeniowe (1) są gładkie, nie ma sztucznie zdefiniowanej wartości stałej $\chi=1$ dla $\bar{\lambda}<0,2$ jak to ma miejsce w EC3.

3. Niestateczność plastyczna

Analiza plastyczna według EC3 nie daje dokładnych i bezpiecznych rozwiązań, bo

- podejście kinematyczne daje zawsze kres górny nośności granicznej,
- erozja (efekt sprężysto-plastyczny) zmniejsza nośność graniczną,
- nie uwzględnia się konsekwencji zniszczenia przy całkowitym zawaleniu.

Natomiast metoda statyczna teorii plastyczności daje kres dolny nośności granicznej. Koncepcja momentów rezydualnych M_o zastępuje metodę przegubów plastycznych. Obwiednia momentów zastępczych $M_{Se}(M_s, N_s, V_s)$ potrzebna jest do redystrybucji plastycznej. Najbardziej niekorzystny przypadek obciążeń powinien być wybrany do wyznaczenia warunkowego współczynnika bezpieczeństwa z uwzględnieniem współczynników interakcji i współczynników kombinacji. Wynosi on:

$$\gamma_{pl} = \min (M_{Rd}/M_{Se,d}), \quad M_{Rd} = \sigma_{pl,d} \cdot W_{pl}, \quad (7)$$

Minimum bierze się dla przekrojów krytycznych, gdzie występują ekstrema $M_{Se,d}$. Siły wewnętrzne M_{sd} , N_{sd} , V_{sd} i odpowiedni moment zastępczy (Murzewski, 1995) oblicza się dla obciążeń, którym towarzyszą „urojone” siły poziome $H_d = P_d \phi_o$.

4. Niestateczność sprężysta

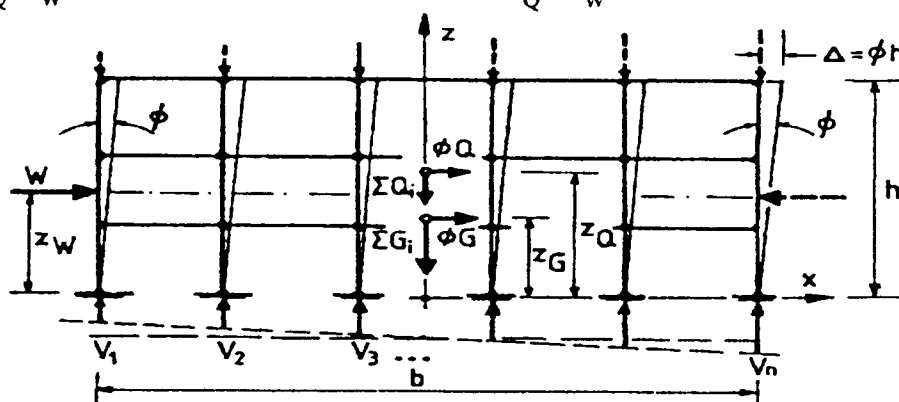
Bifurkację równowagi ramy doskonale sprężystej można wyznaczyć, gdy działają tylko siły podłużne N_{Sd} w elementach ramy, czyli:

$$M_{Sd} = 0, \quad V_{Sd} = 0. \quad (8)$$

Tak więc układ obciążeń trzeba zmodyfikować. Reakcje podporowe N_{Sj} nie mogą być wzięte z obliczeń statycznych dla pełnego obciążenia. Dodatkowe, idealne siły powinny zapewnić równowagę nie tylko obciążeń pionowych P_i , lecz także momentu działania wiatru W i innych sił ze względu na podstawę ramy. Prostym rozwiązaniem dla ram wielonawowych jest liniowy rozkład reakcji pionowych od słupa do słupa (Rys.2). Jeśli jest n słupów w równych odstępach, to reakcje wynoszą

$$N_{Sj} = \frac{1}{n} \sum P_i + \frac{12(x_j - b/2)}{b^2} \frac{n-1}{n(n+1)} (W z_w + \phi \sum P_i z_{pi}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

gdzie $P_i = \gamma_G G_k + \psi_Q \gamma_Q Q_{ki}$ - charakterystyczne obciążenia pionowe stałe i zmienne,
 $\gamma_G, \gamma_Q, \gamma_W$ - współczynniki obciążenia, ψ_Q, ψ_W - współczynniki jednoczesności.



Rys.2. Bezgiętny układ obciążeń dla obliczeń stateczności sprężystej
 Fig.2 Bendingless load arrangement for elastic instability analysis

Metoda współczynników częściowych i niedoskonałości geometryczne sprawiły, że obliczenia stateczności sprężystej są trudniejsze, a w szczególności trzeba:

- ustalić dwie współrzędne każdej siły pionowej x_p, z_p zamiast jednej współrzędnej x_p jak potrzebne było dotychczas,
- sprawdzić więcej kombinacji obciążeń, bo nie wiadomo z góry czy dolne czy górne wartości obciążeń stałych ani to, które obciążenie zmienne jest dominujące,
- dopełnić niedoskonałość geometryczną ϕ dla ram przesuwnych. Dotychczasowe metody iteracyjne są pracochłonne i niedokładne.

Ostatnie zastrzeżenie usuwa metoda nieiteracyjna (Murzewski, 1996). Ostateczny przechyl ustalą się w jednym etapie obliczeń wzorem:

$$\phi = \frac{\phi_0 + \gamma_w \delta_w \psi_w W_k}{1 - \gamma_G \delta_G G_k - \gamma_Q \delta_Q \psi_Q Q_k} \quad (10)$$

gdzie $\delta_G, \delta_Q, \delta_w$ - przechył na skutek jednostkowych sił poziomych $G=1, Q=1, W=1$.

Ostateczną wartość przechyłu ϕ da się ustalić po wyborze γ_G (wg EC3: 1,0 czy 1,35 ?) i dominującego obciążenia zmiennego ($\psi_Q=1$ albo $\psi_w=1$?). Współczynniki γ_G i ψ trzeba tak wybrać, żeby reakcje słupów były największe

$$\max N_{Sd} = a_{GN} \gamma_G G_k + a_{QN} \gamma_Q \psi_Q Q_k + \phi (b_{GN} \gamma_G G_k + b_{QN} \gamma_Q \psi_Q Q_k + b_{wN} \gamma_w \psi_w W_k) \quad (11)$$

gdzie a_{GN}, a_{QN} - reakcje słupów na skutek jednostkowych sił pionowych,
 b_{GN}, b_{QN}, b_{wN} - reakcje słupów na skutek jednostkowych sił poziomych.

Współczynnik bezpieczeństwa ze względu na niestateczność sprężystą wynosi

$$\gamma_{cr} = N_{cr,d} / \max N_{Sd} \quad (12)$$

gdzie N_{cr} - krytyczna siła pionowa ramy doskonale sprężystej w stanie bezgiętnym.

5. Uogólniona smukłość względna

Wzór (1) można zastosować dla ogólnej niestateczności ramy, jeśli wprowadzi się uogólnioną definicję smukłości względnej $\tilde{\lambda}$. Ponieważ układ obciążeń ramy w stanie sprężystym nie jest podobny do układu obciążeń ramy w stanie plastycznym, to wzory (4) i (5) nie mogą być zastosowane. Wprowadza się nową definicję

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\gamma_{pl} / \gamma_{cr}} \quad (13)$$

Warunkowe współczynniki bezpieczeństwa dla niestateczności plastycznej i sprężystej są określone wzorami:

$$\gamma_{pl} = R_{pl,d} / S_{pl,d} \quad \text{oraz} \quad \gamma_{cr} = R_{cr,d} / S_{cr,d} \quad (14)$$

$S_{pl,d}, S_{cr,d}$ - dwa niepodobne układy działań G, Q_i ze zróżnicowanymi współczynnikami obciążeń γ_i i jednoczesności ψ_i ,

$R_{pl,d} = M_{Rd}, R_{cr,d} = N_{cr,d}$ - wartości obliczeniowe granicy stateczności ramy plastycznej i sprężystej, przy założeniu, że składowe obciążenia rosną proporcjonalnie.

Współczynniki wytrzymałości γ_R dla plastycznego i sprężystego sposobu zniszczenia są równe (2), dlatego $R_{pl,k}, R_{cr,k}$ mogą zastąpić $R_{pl,d}, R_{cr,d}$, odpowiednio. Nie ma takiej możliwości w przypadku $S_{pl,d}, S_{cr,d}$, ponieważ poszczególne składowe

układu obciążeń są przemnożone przez zróżnicowane współczynniki częściowe. Nośność sprężysto-plastyczną konstrukcji R_d ocenia się stosując $\chi(\tilde{\lambda})$ według wzoru (1)

$$R_d = \chi R_{pl,d} \quad (15)$$

Jeśli konstrukcja jest bardzo ważna, to stosuje się współczynnik częściowy γ_I przewidywany w metodzie półprobabilistycznej projektowania ENV 1991,

$$R_d/(\gamma_M \gamma_I) \geq M_{Se,d} \quad (16)$$

Literatura

1. Galambos T.V., Ravindra M.K., *Properties of steel for use in LRFD, Journal of the Structural Division, Vol.104* (1978), No.9, 1459-1468.
2. Murzewski J., *Joint probability of elastic and plastic instability modes, Regional Colloquium. on Stability...*, Budapest-Balatonfüred. Final Report (1977), 249-268
3. Murzewski J., *Random instability of elastic-plastic frames, Structural Safety and Reliability*, , ICOSAR'89, Innsbruck, Vol.II, (1989), 1011-1014
4. Murzewski J., *Globalna niestateczność ram sprężysto plastycznych, VI Sympozjum Stateczności Konstrukcji. Spala, Skróty Referatów*, (1991), 64-67.
5. Murzewski J., *Projektowanie przekrojów w ujęciu macierzowym, XLI Konf. Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Kraków-Krynica* (1995), Tom 3, 143-150.
6. Murzewski J., *Coupled elastic-plastic instability of unbraced frames, Coupled Instabilities in Metal Structures- CIMS'96- Liege, Proceedings* (1996), 331-338.

Summary

ELASTIC-PLASTIC INSTABILITY OF STEEL FRAMES WITH IMPERFECTIONS

Excessive reduction of ultimate limit resistance of elasto-plastic members of medium slenderness has been assessed by means of a probability-based buckling factor $\chi(\tilde{\lambda})$. Both plastic and elastic analyses are necessary for evaluation of resistance of the whole structural system in partial factor format. Statical approach of plasticity is applied with residual moment concept instead of plastic hinge notion. Effective moments $M_S(N_S, V_S)$ and initial sway ϕ_0 of the frame are defined for evaluation of a conditional safety factor γ_{pl} related to plastic collapse. Bendingless load arrangement is defined for evaluation of critical load of perfectly elastic frame with amplified imperfection ϕ and another conditional safety factor γ_{el} is derived. Finally, the slenderness ratio $\tilde{\lambda}$ is extended to frames and the joint resistance factor γ_R is evaluated

UNIFORM CRITERION FOR GEOMETRICAL UNCHANGEABILITY AND FOR INSTABILITY OF STRUCTURES

J.B.OBREBSKI

*Institute of Structural Mechanics, Warsaw University of Technology
Armii Ludowej 16, 00-637 Warsaw, Poland*

The paper presents some recent author experiences concerning application of the uniform criterion to evaluate the geometrical unchangeability and instability of structures. It was applied well known condition, that the main determinant of the structure equilibrium equations should be equal zero. Some applications of the above criterion to analytical and to numerical approaches, for different problems are quoted, supported by some examples and comments. It facilitates to consider the evaluation of proper choice of structure scheme by application of computer programs. It is possible to determine a critical loadings analytically but also to estimate critical loading for complicated space bar structures, numerically.

1. Introduction

After long exploitation of the programs made by the author [7-8,15], and on the ground of wide overview of literature, it can be expressed an opinion, that the most general, efficient and effective condition of evaluation of critical loading is comparison to zero of the main determinant of a set of equations describing equilibrium state of a structure.

On the other hand it should be remembered, that in the case of geometrically changeable structure, we always have the main determinant of its stiffness matrix (as whole), $\det(K)=0$.

On these above observations, we can draw the following conclusions.

Conclusion 1. The structure, which in unloaded state, has geometrically unchangeable scheme and $\det(K) \neq 0$, can under loading P with frequencies of free or forced vibrations ω and/or geometrical supports loadings, reach state when $\det[K(P,\omega)]=0$, what means simultaneously its instability, but also possibility to have certain mechanism of motion, similar to geometrically changeable structure behaviour.

From above conclusion follows the next one.

Conclusion 2. In each case the fact, that main determinant of the equilibrium equations of the structure is equal zero, $\det(K)=0$, means that structure has possibility to reach mechanism of motion. If it is unloaded structure, it means that it obtains a geometrical changeability of its scheme, and for loaded one - state of critical loadings.

Described above conclusions are valid for problems of any kind of analyses:

- *statics, dynamics, stability, dynamical stability;*

by any type of loadings:

- *statical, dynamical, by influences of any kind of external media [10,12,13,15];*

by any type of solutions:

- *analytical solution of differential equilibrium equations (EE),*

- *by analytical solutions of finite differences EE,*

- *by numerical displacement methods: FEM [7-9,11,16-18], Difference Matrix Equilibrium Equations (DMEM), [7-9,11,14].*

From mathematical point of view, condition $\det(K)=0$ for EEs of type $Kx=Q$, means that (nodes) displacements can be infinite, [7-9,13,15].

By analytical approaches, calculations of the determinant of the matrix follow well known mathematical way. In numerical applications value of matrix determinant can be obtained in the easiest way during execution of sequential *Gaussian* elimination

procedure, where: $D=\det(K)=\prod_{i=1}^N K^i(i,i)$ and $K^i(i,i)$ are the first elements in the first row of eliminated matrix, before each i elimination step [6,7]. The same can be obtained in similar way by matrix inversion by also *Gaussian* method.

2. Evaluation of geometrical unchangeability of structures

There can be mentioned some other approaches to evaluation of geometrical unchangeability of first of all space bar structures.

□ Evaluation of the order of stiffness matrix K (equal of N - number of unknown displacements), [3,4], applied successfully by J.Karczewski [3].

□ Evaluation of geometrical unchangeability on the ground of geometrical conditions, elaborated by J.B.Obrębski, and published in [7,1]. It was well proved in WDKM program system [8,9,14]. There were formulated 13 geometrical conditions checked in given sequence, which permit to discover place (node, bar), and reason of defect of the assumed structure scheme. It is very useful in practical computations, especially

from users point of view.

□ The most general method for evaluation of existence of motion mechanism is just condition $\det(K)=0$. It can be applied in any case as it was mentioned in chapter 1. But from author's experience follows, that it could happen, that for the structure geometrically changeable, for the reason of numerical errors, we can obtain $\det(K) \neq 0$ (small value of $\det(K)$). Such possibility should be also numerically in program eliminated [7-9]. Moreover, this approach is very easy in application and very efficient. The next weakness of the method is to general information, not explaining the reason of scheme defect.

3. Evaluation of critical loading

The problem has very wide literature. It can be shown in quoted references e.g. positions [2,5-18]. Now we try to clasify some approaches.

3.1. Determination of critical forces by analytical approach

There can be mentioned many analytical methods, but here will be discussed only those, which are based on condition $\det(K)=0$.

□ Main determinant of differential EEs, is applied in classical solutions mainly for single bars. There are assumed functions describing displacements of bar axis, satisfying bar boundary conditions. It can be applied for bars with full and thin-walled, homogenous and composite cross-sections [14,15]. In the case, when we know warping function of cross-section, we can obtain critical forces from: longitudinal tensioning or compressing force; from bending moments and bimoment e.g. [13,15]. The last is possible not only for thin-walled bars.

This method can be applied not only for statics, but also for dynamics [5], and for dynamical stability [10,12,13]. Typical result for the last case is shown in the Fig.3.1.

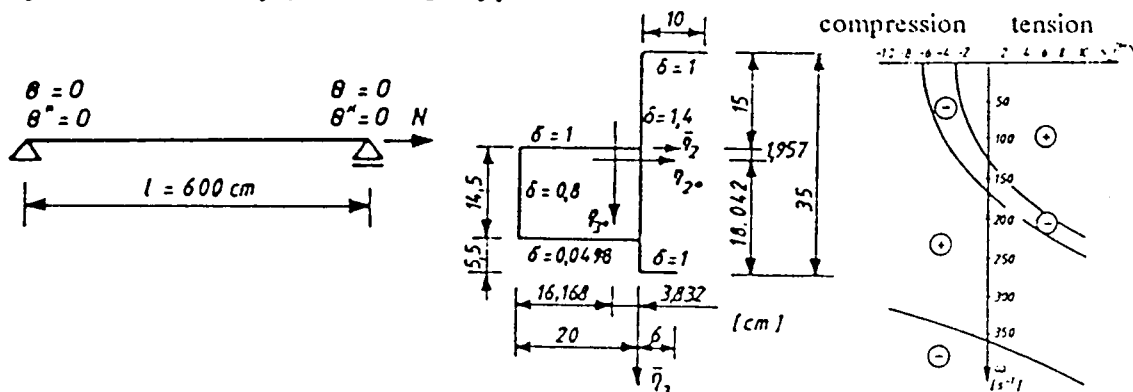


Fig.3.1. Critical forces and eigen values for freely supported bar [10,12,13]

□ Main determinant of finite differences EEs, [2,15], gives set of M algebraic linear equations, where M - is the number of assumed unknown displacements. It can be applied for bar loaded by set of forces and with variable cross-sections. In analytical solution is possible to obtain results by hand-calculations.

3.2. Evaluation of critical loading by numerical approach

The method can be applied by numerical application of any edition of the displacement methods: FEM [14,16-18], DMEM [7-9,14] or by Finite Differences Method (FDM) [15]. In all cases we calculate in iterative way value of the $D=\det K$. For the reason of extremely high value of computed number D , it can be "normalised" on some ways e.g. [7-9,16-18]. The method is oriented on large space bar structures [7-9,14]. But first of all the programs [7-9,14] were strongly tested on the classical compressed bars, where are well known analytical results.

The quoted figures 3.2 and 3.3, present some diagrams with obtained results for testing examples.

● - computed values, N - number of iteration

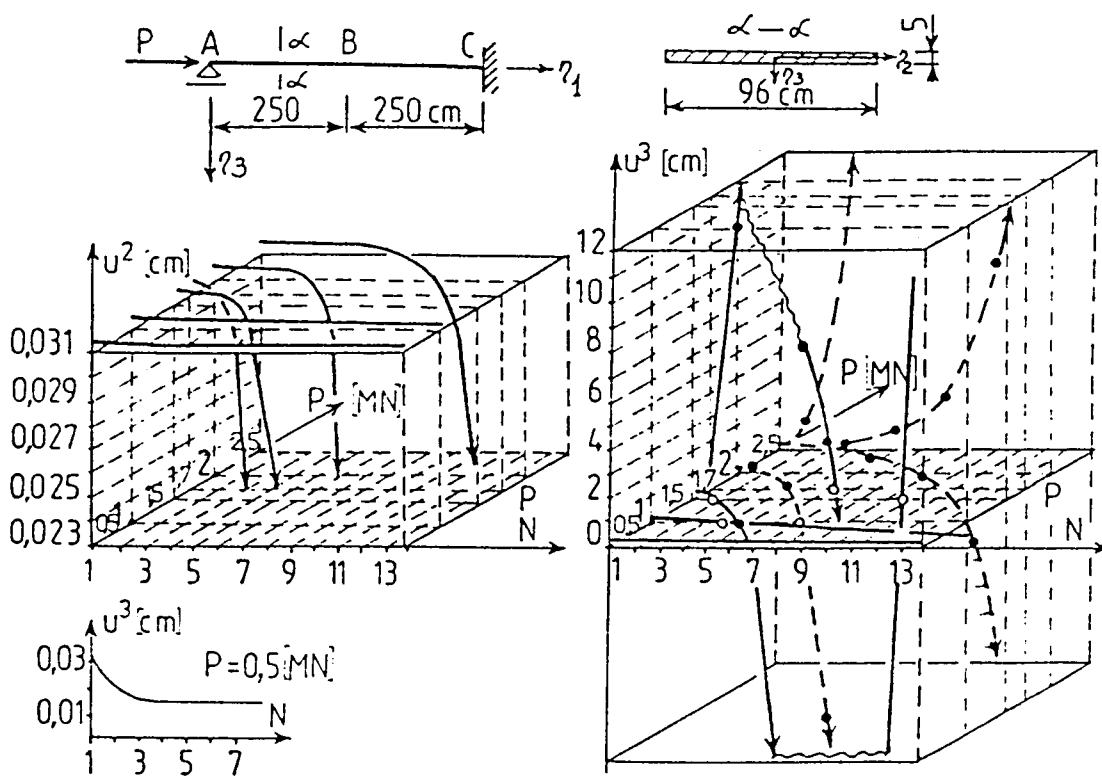


Fig.3.2. Displacements for middle point (B) of compressed bar, by given small imperfection, (displacement of support A) [7], and by particular compressing forces, large displacements of nodes

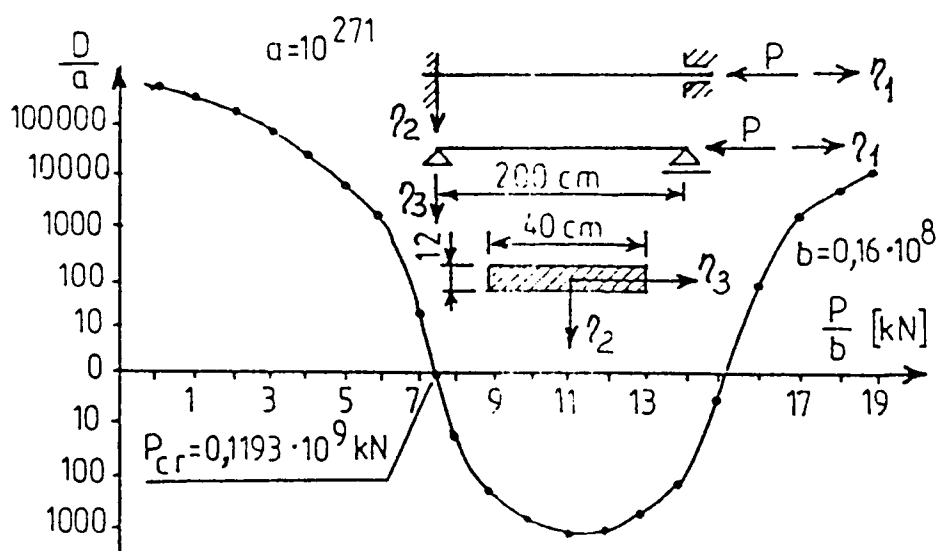


Fig.3.3. Values of $D=\det(K)$, critical loading P for compressed bar, by WDKM. Buckling in plane $O\eta_1\eta_2$, large nodes displacements, exact results.

4. Final remarks

As it follows from very short review above, application of the condition $D=\det K=0$ in any cases means abnormally large structure displacements, in other words its mechanism. For very large structural systems there appears a time barrier, by iterative computation of D value, especially when is applied nonlinear procedure with matrix K composed for actual structure configuration. Numerical version of the method can be applied for any structure analysed by some version of displacement method.

Some of the numerical examples quoted above were done in the years 1978-1985 in the frames of projects supported by central programs coordinated by Polish Academy of Sciences.

References

1. Gutkowski W., Obrębski J.B., Bauer J., Gierlinski J., Rączka J., Żmijewski K: *Statical computations of structural roofs (In Polish)*, ARKADY, Warsaw (1980). (In German) Werner Verlag/ARKADY, Warsaw (1985).
2. Jastrzębski P., Mutermilch J., Orłowski W., *Strength of materials, (In Polish)*, ARKADY, 1985 (Vol.1), 1986 (Vol.2).
3. Karczewski A., *Elasto-plastic analysis of spase bar structures behaviour under*

- variable loadings, (In Polish)*. Publishers of Warsaw University of Technology, Warsaw (1976).
4. Karczewski J., König J., *On geometrical changeability of discrete structures, (In Polish). Proceedings of Sc. Conf. of the Fac. of Civil Engineering*. Warsaw Univ. of Techn. (1977),
 5. Nowacki W., *Dynamics of structures, (In Polish)*, ARKADY, Warsaw (1961).
 6. Nowacki W., *Mechanika budowli (Structural mechanics)*, PWN, Warsaw (1974).
 7. Obrębski J.B., *Numerical analysis and synthesis of large structural systems*. IBTP Reports 24/1979, Warsaw (habilitation thesis).
 8. Obrębski J.B., Application of the WDKM program system to analysis of space structures. *Space Structures, Elsevier Appl. Sc. Publ. UK, Vol.1* (1985), 93-98.
 9. Obrębski J.B., *Computational System WDKM (In Polish)*. *Inżynieria i Budownictwo*, 7, (1986), Warsaw 268-271.
 10. Obrębski J.B., *Second Order and Second Approximation Theory in Statics and Dynamics of Thin-Walled Straight Bars. Proc. 1st Int. Conf. on Lightweight Structures in Architecture*, Sydney (1986), 815-822.
 11. Obrębski J.B., *New approach to geometrically non-linear problems in statical and dynamical analysis of large elastic thin-walled bar structures. Proc. of the Int. Colloquium on Space Structures for Sports Buildings*. Science Press, Beijing (Pekin), China and Elsevier Applied Science, London, (1987), 170-177.
 12. Obrębski J.B., *Second-order and second-approximation theory in the statics and dynamics of thin-walled straight bars. Int.J. Thin-Walled Structures, Appl. Sc. Publ.* 8, (1989), 81-97.
 13. J.B.Obrębski: *Thin-walled elastic straight bars (In Polish)*. Publishers of Warsaw University of Technology, (lecture notes), Warsaw (1991), pp.452.
 14. Obrębski J.B., *NAAS-CLASS - System for Nonlinear Analysis And Syntesis of Complicated Large Advanced Space Structures , Proceedings of the int. NAFEMS Conf.* Univ. of Stuttgart (1997), 438-449.
 15. Obrębski J.B., *Strength of materials, (In Polish)*. Prepared for printing, (lecture notes), AGTAT Warsaw (1997), pp.250.
 16. Radoń U, Witkowski M., *Stability of the steel imperfect space trusses under multiparameter loads, Proceedings of the Int. Conf. on Lightweight Structures in Civil Engineering*, Warsaw Univ. of Technology, Fac. of Civil Eng. MAGAT, Warsaw (1995), 220-227.
 17. Sokół T, Witkowski M., *Critical states of imperfect sensitive structures, Proceedings of the Int. Conf. on Lightweight Structures in Civil Engineering*, Warsaw Univ. of Technology, Fac. of Civil Eng. MAGAT, Warsaw (1995), 228-235.
 18. Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., *Finite element method in stability of structures (In Polish)*, ARKADY, Warsaw (1990).

STATECZNOŚĆ WIELOWARSTWOWEJ PŁYTY KOMPOZYTOWEJ Z WŁÓKNAMI Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU

W. OSTACHOWICZ, M. KRAWCZUK, A. ŻAK
*Polska Akademia Nauk, Instytut Maszyn Przepływowych
ul. Gen. J. Fiszer 14, 80-952 Gdańsk, Poland*

W pracy przedstawiono model wielowarstwowej płyty kompozytowej z włóknami z pamięcią kształtu. Badano wpływ aktywacji sił ww. włóknach SMA (Shape Memory Alloys) na stateczność płyty. Przedstawiono zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami dla pojedynczej cienkiej warstwy kompozytu, a następnie opracowano specjalny element skończony dla wielowarstwowej płyty. Wyniki badań wskazują na znaczny wpływ aktywacji włókien na stateczność płyty.

1. Wprowadzenie

W pracy przedstawiono zależności pomiędzy naprężeniami i odkształceniami w cienkiej warstwie kompozytu z włóknami SMA (Shape Memory Alloys) i wpływ aktywacji tych włókien na stateczność wielowarstwowej płyty. Równania równowagi wyprowadzono na podstawie metody elementów skończonych. Płyta jest modelowana ośmiowęzłowymi elementami skończonymi o pięciu stopniach swobody w każdym z węzłów (trzy przemieszczenia translacyjne i dwa rotacyjne). Do modelowania zarówno przemieszczeń translacyjnych jak też rotacyjnych zastosowano bi-kwadratowe funkcje kształtu.

W literaturze przedmiotu spotyka się niewiele prac poświęconych temu zagadnieniu. Zhong, Chen oraz Mei [5], zastosowali metodę elementów skończonych dla zagadnienia stateczności i pracy po utracie stateczności płyt kompozytowych wzmacnianych włóknami SMA. Ro i Baz [3] wyprowadzili fundamentalne równania opisujące płyty wzmacniane włóknami Nitinolu. Wykorzystując metodę elementów skończonych opisali charakterystyki dynamiczne rozważanego układu.

W niniejszej pracy przedstawiono model bardziej ogólny. Wyniki obliczeń numerycznych porównano z wynikami obliczeń analitycznych.

2. Fizyczne i mechaniczne własności włókien z pamięcią kształtu

Własności fizyczne i mechaniczne stopów z pamięcią kształtu (SMA) w znaczącym stopniu zależą od temperatury i naprężeń początkowych [2]. Zmiany temperatur oraz naprężeń początkowych powodują zmiany udziału frakcji martenzytu w objętości stopu. Podczas przemiany martenzytycznej frakcja martenzytu ξ w stopie SMA może być opisana następującymi formułami [2]:

- dla procesu chłodzenia:

$$T < T_{sa} \quad \xi_g = 1; \quad T > T_{sa} \quad \xi_g = 1 - \exp[b_m(T_{sm} - T) + c_m \sigma_{eff}] \quad (1)$$

- dla procesu grzania:

$$T > T_{sm} \quad \xi_d = 0; \quad T < T_{sm} \quad \xi_d = \exp[b_a(T_{sa} - T) + c_a \sigma_{eff}] \quad (2)$$

gdzie: T oznacza bieżącą temperaturę drutów wykonanych ze stopu z pamięcią kształtu, T_{sa} oznacza temperaturę początkową fazy austenitycznej, T_{sm} jest początkową temperaturą fazy martenzytycznej, b_m , c_m , b_a i c_a są współczynnikami zależnymi od temperatury i własności materiału natomiast σ_{eff} oznacza naprężenia efektywne w stopie SMA. Współczynniki b_m , c_m , b_a i c_a przedstawiamy w postaci:

$$b_m = \frac{\ln(0.01)}{T_{sm} - T_{fm}} \quad c_m = \frac{b_m}{d_m} \quad b_a = \frac{\ln(0.01)}{T_{sa} - T_{fa}} \quad c_a = \frac{b_a}{d_a} \quad (3)$$

gdzie T_{fm} i T_{fa} oznaczają końcowe temperatury przemiany martenzytycznej i austenitycznej, d_m i d_a są stałymi, które określają nachylenie krzywych opisujących odpowiednio przemianę martenzytyczną i przemianę odwrotną.

Zakładając, że obydwie fazy (martenzytyczna i austenityczna) są izotropowe, fizyczne i mechaniczne własności stopów z pamięcią kształtu SMA można opisać w postaci liniowej zależności od frakcji martenzytycznej [1]:

$$M = \xi M_m + (1 - \xi) M_a \quad (4)$$

gdzie indeksy m oraz a określają odpowiednio fazę martenzytyczną i austenityczną.

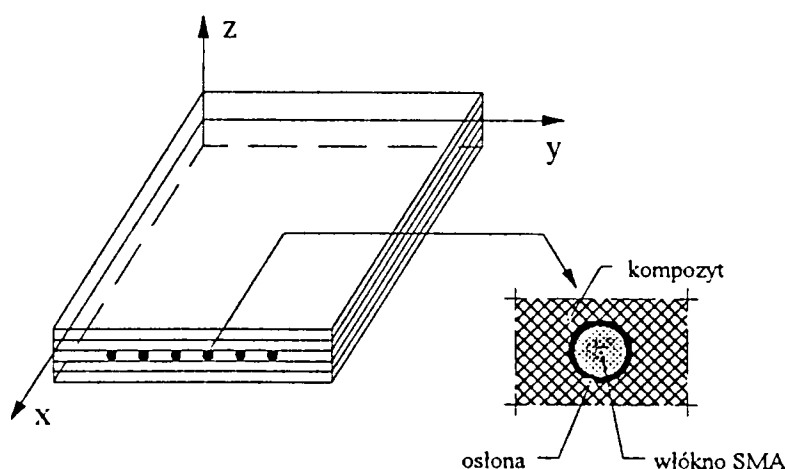
W niniejszej pracy przyjęto następujące dane (dla Nitinolu Ni - 44.8 %)

E_a	30.0 [GPa]	T_{sm}	23.0 [°C]
E_m	13.0 [GPa]	T_{fm}	5.0 [°C]
ν	0.33	T_{sa}	29.0 [°C]
α_a	$12.5 \cdot 10^{-6}$ [1/°C]	T_{fa}	51.0 [°C]
α_m	$18.5 \cdot 10^{-6}$ [1/°C]	d_m	11.3 [MPa/°C]
		d_a	4.5 [MPa/°C]

3. Opis zagadnienia

Model wielowarstwowej płyty kompozytowej z włóknami z pamięcią kształtu przedstawiono na Rys.1. Każda warstwa płyty zawiera włókna grafitowe o założonej orientacji. Włókna z pamięcią kształtu są rozmieszczone w płaszczyźnie środkowej płyty.

Przemieszczenia pojedynczej warstwy płyty są opisane związkami (5).



Rys.1. Model wielowarstwowej płyty kompozytowej z włóknami z pamięcią kształtu.
Fig.1. A model of a multilayer composite plate with SMA fibres.

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \bar{\alpha}(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \bar{\beta}(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (5)$$

W związkach (5) u_0 , v_0 oraz w_0 oznaczają przemieszczenia w płaszczyźnie środkowej, natomiast pozostałe człony w dwóch pierwszych związkach opisują obroty. W rozważanym przypadku zastosowano płytowy prostokątny element skończony o symbolu PBQ8 [6]. Wspomniany element ma osiem węzłów i pięć stopni swobody w każdym węźle.

Zakładając, że rozpatrywana płyta składa się z N warstw, równania konstytutywne dla k -tej warstwy przyjmują postać:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}_k] \begin{Bmatrix} \epsilon_{x_0} + z \kappa_x - \alpha_x \Delta T \\ \epsilon_{y_0} + z \kappa_y - \alpha_y \Delta T \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy_0} + z \kappa_{xy} - \frac{1}{2} \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (6)$$

gdzie α_x , α_y i α_{xy} oznaczają współczynniki rozszerzalności cieplnej, oraz:

$$\begin{cases} \kappa_x = \partial_x \bar{\alpha} & \varepsilon_{x_0} = \partial_x u_0 & \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(\bar{\alpha} + \partial_x w) \\ \kappa_y = \partial_y \bar{\beta} & \varepsilon_{y_0} = \partial_y v_0 & \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}(\bar{\beta} + \partial_y w) \\ \kappa_{xy} = \frac{1}{2}(\partial_y \bar{\alpha} + \partial_x \bar{\beta}) & \varepsilon_{xy_0} = \frac{1}{2}(\partial_y u_0 + \partial_x v_0) \end{cases} \quad (7)$$

Macierz $[\bar{Q}_k]$ przyjmuje znaną postać [4].

Równanie równowagi wyprowadzono na podstawie zasady prac przygotowanych. W przypadku płyty kompozytowej symetrycznej względem płaszczyzny środkowej i nie posiadającej sprzężeń pomiędzy siłami membranowymi oraz w płaszczyźnie zginania, energia sił wewnętrznych dla płytowego elementu skończonego została przedstawiona w [4].

Praca sił w płaszczyźnie środkowej płyty, włączając w nie także siły aktywacji włókien wykonanych ze stopu z pamięcią kształtu, obciążenia cieplne spowodowane nagrzewaniem drutów SMA a także obciążenia od sił zewnętrznych są sformułowane następująco [3]:

$$W'_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N h_k \iint_{(A)} \left[N_x (\partial_x w)^2 + N_y (\partial_y w)^2 + 2 N_{xy} \partial_x w \partial_y w \right] dA \quad (8)$$

gdzie: $N_x = P_{m_x} + P_{t_x} - F_{w_x}$, $N_y = P_{m_y} + P_{t_y}$, $N_{xy} = P_{m_{xy}} + P_{t_{xy}}$, $P_{m_{x,y,xy}}$ oraz $P_{t_{x,y,xy}}$ oznaczają siły ściskające od mechanicznego i cieplnego obciążenia płyty w kierunkach x , y oraz xy . F_{w_x} oznacza całkowite napięcie we włóknach wykonanych z Nitinolu. Obciążenia cieplne są opisane zależnością [4]:

$$\begin{Bmatrix} P_{t_x} \\ P_{t_y} \\ P_{t_{xy}} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [\bar{Q}_k] \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \frac{1}{2} \alpha_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T dz. \quad (9)$$

gdzie: $\alpha_x = \alpha_1 m^2 + \alpha_2 n^2$, $\alpha_y = \alpha_2 m^2 + \alpha_1 n^2$, $\alpha_{xy} = (\alpha_1 - \alpha_2) m n$, $m = \cos(\theta)$, $n = \sin(\theta)$.

Wspomniane obciążenie cieplne jest wywołane zmianami temperatury ΔT , spowodowane aktywacją i dezaktywacją włókien Nitinolu.

Stosując standardowe algorytmy metody elementów skończonych tworzymy macierze sztywności i sztywności geometrycznej elementu a następnie całej płyty.

4. Obliczenia numeryczne

Określono warunki utraty stateczności płyty w funkcji temperatury. Oznaczając temperaturę, przy której nastąpi utrata stateczności przez T_{cr} różnicę temperatur w związku (9) zapisujemy w postaci:

$$\Delta T = T_{cr} - T_0 \quad (10)$$

gdzie: T_0 oznacza temperaturę otoczenia. Stosując zasady formowania równań równowagi w metodzie elementów skończonych na podstawie związków wyżej opisanych związków otrzymujemy:

$$\left([K_s] - [K_{gm}] - [K_{gt}] - [K_{gf}] \right) \{q\} = \{0\} \quad (11)$$

gdzie $[K_s]$ oznacza macierz sztywności rozważanej płyty kompozytowej, $[K_{gm}]$, $[K_{gt}]$ oraz $[K_{gf}]$ macierze sztywności geometrycznej, przy czym indeks m dotyczy sił obciążenia zewnętrznego (działającego w płaszczyźnie środkowej płyty), indeks t obciążenia cieplnego oraz indeks f sił napięcia, które pojawiają się w wyniku aktywacji włókien Nitinolu.

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla płyty wspornikowej oraz dla płyty swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach.

5. Wnioski

Wyniki obliczeń numerycznych ilustrują wpływ temperatury włókien z pamięcią kształtu na stateczność rozważanej płyty.

6. Literatura

1. A. Baz, S. Poh, J. Ro, J. Gilheany: *Control of the natural frequencies of Nitinol - reinforced composite beams*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 185, No. 1, pp. 171-185, 1995.
2. V. Birman, D. A. Saravanos, D. A. Hopkins: *Micromechanics of composites with shape memory alloy fibers in uniform thermal fields*. AIAA Journal, Vol.34, No.9, pp.1905-1912, 1996.
3. J. Ro, A. Baz: *Nitinol-reinforced plates*, Part I-III. Composites Engineering, Vol.5, No.1, pp.61-106, 1995.
4. J. R. Vinson, R. L. Sierakowski: *Behaviour of Structures Composed of Composite Materials*. Martinus Nijhoff, London 1981.
5. Z. W. Zhong, R.R. Chen, C. Mei: *Buckling and postbuckling of shape memory alloy fiber reinforced composite plates*. AD-Vol.41/PVP-Vol.233, Buckling and Postbuckling of Composite Structures, ASME 1994.
6. W. Weaver, P. R. Johnston: *Finite Element for Structural Analysis*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 1984.

BUCKLING OF A MULTI-LAYER COMPOSITE PLATE WITH SMA FIBRES

Summary

The paper illustrates the stress-strain relationships for a thin composite lamina with embedded SMA fibres and their influence upon changes in buckling behaviour of a composite multi-layered plate. Governing equations based on the finite element method are presented in the paper. The plate is modelled by plate finite elements with eight nodes and five degrees of freedom at each node (i.e., three axial displacements and two independent rotations). For both axial displacements and independent rotations biquadratic shape functions are used.

Mechanical and physical properties of SMA (shape memory alloys) fibres strongly depend on temperatures and initial stresses [2]. Changes in temperatures and initial stresses involve the grow or decline of the martensite fraction in the alloy. During the martensite transformation the martensite fraction ξ in the alloy can be described by Eqs.(1) and (2) for cooling and heating processes, respectively.

A multi-layer composite plate containing SMA fibres is considered, as it is shown in Fig.1. Each single composite lamina the plate has an arbitrary orientation of graphite fibres while SMA fibres are embedded only in the neutral plane of the plate. By considering a lamina composed of N laminae, the k^{th} lamina of the laminate has constitutive relations (6), where α_x , α_y , and α_{xy} are the coefficients of thermal expansions, and other parameters are described by (7). The matrix $[\bar{Q}_k]$ has a well known structure [4].

The equation of motion can be derived from the principle of virtual work. For the plate that is mid-plane symmetric, and has no coupling, the strain energy stored in the plate finite element is given in [4].

The in-plane forces which include the recovery forces of the Nitinol fibres, the thermal load induced by heating the Nitinol fibres and the external in-plane loads are formulated in (9), where $P_{m_{x,y,xy}}$ and $P_{t_{x,y,xy}}$ denoting the compressive in-plane mechanical and thermal loads in x , y and xy directions. F_{w_x} denotes the total tension developed in the Nitinol fibres. The thermal load P_t is given by Sierakowski [4].

Applications of SMA Nitinol fibres to control buckling of the composite plate have been successfully demonstrated in this paper.

ZACHOWANIE LINIOWO LEPKOSPĘŻYSTYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH PRZY OBCIĄŻENIACH ZMIENNYCH

D.PAWLUS

*Katedra Podstaw Budowy Maszyn
Politechniki Łódzkiej Filii w Bielsku-Białej
Willowa 2, 43-300 Bielsko-Biała, Poland*

Przedmiotem analizy jest zagadnienie stateczności dynamicznej płyt pierścieniowych wykonanych z materiału liniowo lepkospężystego. Płyta obciążona jest w płaszczyźnie środkowej ciśnieniem o zmiennej wartości w czasie. Zagadnienie ugięć płyty rozwiązano wykorzystując standardową teorię płyt cienkich, przybliżoną metodę Bubnowa-Galerkina i metodę różnic skończonych. Własności fizyczne materiału płyty opisano zależnościami operatorowymi o charakterze czasowym dla dwu modeli reologicznych: Kelvina-Voigta i Maxwella. Przeprowadzono obliczenia numeryczne zwracając szczególną uwagę na wpływ wzajemnego udziału fazy lepkiej i sprężystej materiału płyty na jej "zachowanie".

1. Wstęp

Trwający rozwój inżynierii materiałowej wraz z szerokim zastosowaniem materiałów konstrukcyjnych do pracy w warunkach dużych obciążeń i wysokich temperatur wymaga prowadzenia zarówno badań doświadczalnych, jak i poszukiwania nowych teorii opisujących zachowanie materiałów.

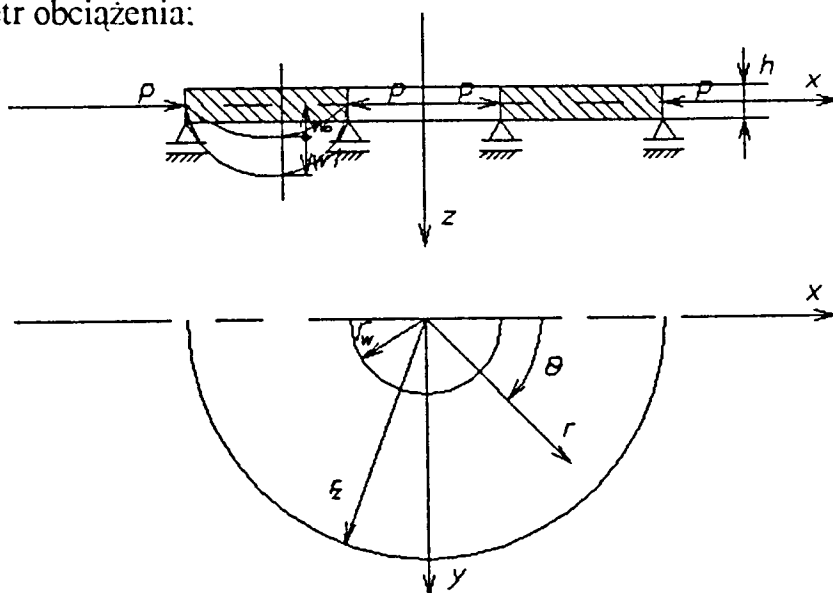
Stosowanie w opisie własności mechanicznych ciał rzeczywistych modeli idealnych ciał prostych, jak np. ciało sprężyste Hooke'a obecnie jest już dalece niewystarczające. Obok sprężystych czy plastycznych cech materiału badanego koniecznym jest uwzględnienie wpływu efektu czasu, wyrażonego dodatkowymi lepkiemi jego własnościami. Budowa nowych modeli w wyniku łączenia modeli idealnych ciał prostych przybliża materiał rzeczywisty i jednocześnie skłania do ponownego zbadania zagadnień rozwiązanych za pomocą powszechnie stosowanej teorii sprężystości.

Przyjętym w pracy problemem wiodącym jest zagadnienie stateczności dynamicznej płyt.

2. Postawienie zagadnienia

Przedmiotem analizy jest pierścieniowa płyta z materiału lepkospężystego, której brzeg lub oba brzegi obciążano w jej płaszczyźnie środkowej równomiernie rozłożonym ciśnieniem o zmiennej wartości w czasie (rys.1). Przypadkiem podstawowym jest obciążenie liniowo rosnące w czasie:

gdzie: s - parametr obciążenia:
 t - czas.



Rys. 1. Schemat płyty pierścieniowej.
 Fig. 1. The schema of ring-shaped plate.

Rozwój stanu giętnego płyty wskutek przyjętej wstępnej imperfekcji jej powierzchni środkowej śledzono od chwili początkowej jej obciążania wyznaczając krytyczne wartości czasu, ciśnienia i maksymalnego ugięcia w momencie utraty stateczności płyty. Jako kryterium dynamicznej utraty stateczności płyty przyjęto [5], iż nastąpi ona w chwili, gdy punkt maksymalnego jej ugięcia osiągnie po raz pierwszy największą prędkość.

Ponieważ możliwe wartości ugięć płyty traktowanej jako element cienki wynoszą do kilku jej grubości narzuca to konieczność przyjęcia w rozwiązaniu nieliniowych związków geometrycznych ograniczonych jednakże do przypadku, tzw. umiarkowanie dużych ugięć.

Fizyczne własności materiału płyty określono bazując na modelowej interpretacji ośrodka liniowo lepkosprężystego, którego charakterystyczne własności sprężyste i lepkie są efektem oddziaływania układu - sprężyny i tłumika o charakterystykach:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) \qquad \sigma(t) = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \qquad (2)$$

E - moduł sprężystości [Pa] η - moduł lepkości [Pa · s]

Obliczeń numerycznych dokonano dla dwu podstawowych modeli reologicznych opisujących materiał płyty: modelu Kelvina-Voigta i modelu Maxwella.

W zapisie matematycznym cechy materiału płyty wyrażono operatorową postacią związków fizycznych [1] liniowego ośrodka lepkosprężystego.

Wyznaczono zastępczy współczynnik E_Z sprężystości podłużnej i zastępczy współczynnik ν_Z Poissona:

$$E_Z \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) = \frac{3Q_1Q_2}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} \quad \nu_Z \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) = \frac{P_1Q_2 - P_2Q_1}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} \quad (3)$$

gdzie: P_1, Q_1 i P_2, Q_2 - operatory dewiatorowe i dylatacyjne określone dla danego modelu reologicznego [1] wykorzystując odpowiednie stałe sprężyste E', E'' oraz stałe lepkości η', η'' materiału.

3. Rozwiązanie zagadnienia ugięć pierścieniowej płyty lepkosprężystej

Ugięcia płyty pierścieniowej opisuje nieliniowy układ równań różniczkowych [3],[4],[2]:

$$D [L_1(w_1) + 2 L_2(w_1) + L_3(w_1)] = h L_4(w, \Phi) - \mu h w_{1,t}$$

$$L_1(\Phi) + 2 L_2(\Phi) + L_3(\Phi) = -0.5 E [L_4(w, w) - L_4(w_0, w_0)] \quad (4)$$

gdzie: L_1, L_2, L_3, L_4 - operatory opisujące zależności ugięć i funkcji naprężeń;

D - sztywność płytowa;

h - grubość płyty;

μ - masa właściwa materiału płyty;

w, w_1, w_0 - ugięcie całkowite, dodatkowe i wstępne płyty;

Φ - funkcja naprężeń;

t - czas;

wyprowadzony - przy spełnionych założeniach Kirchhoffa-Love'a nakładających ograniczenia na deformację i stan naprężeń ustroju powierzchniowego płyty - na podstawie:

- równań równowagi dynamicznej;
- związków geometrycznych nieliniowej teorii płyt Kármána;
- związków fizycznych uogólnionego prawa Hooke'a.

Zastosowanie przybliżonej metody Bubnowa-Galerkina do wyeliminowania zmiennej kątowej θ i metody różnic skończonych do wyeliminowania współrzędnej promieniowej r poprzez dyskretyzację w N punktach wzdłuż jej promienia; sprowadza układ równań różniczkowych (4) po wykorzystaniu operatorowego zapisu wielkości materiałowych E_Z, ν_Z (3) do następującej postaci:

$$12 \frac{\mu r_z^4}{h^2 E''} b^4 O_3 U_{tt} = 12 O_3 Q - O_4 [L_1(u)_i + k_1 L_3(u)_i + k_2 a_i^4 u_i]$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_a \mathbf{O}_1 \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) \mathbf{Y}_a &= \mathbf{O}_2 \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) \mathbf{X}_a \\
\mathbf{B}_b \mathbf{O}_1 \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) \mathbf{Y}_b &= \mathbf{O}_2 \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) \mathbf{X}_b \\
\mathbf{B}_c \mathbf{O}_1 \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) \mathbf{Y}_c &= \mathbf{O}_2 \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) \mathbf{X}_c
\end{aligned} \tag{5}$$

gdzie:

$\mathbf{U}, \mathbf{Y}_a, \mathbf{Y}_b, \mathbf{Y}_c$ - wektory ugięcia dodatkowego u_i i składowych $y_{a_i}, y_{b_i}, y_{c_i}$ przyjętej funkcji naprężeń w punktach dyskretyzacji $i = 1, \dots, N$;

$\mathbf{Q}, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b, \mathbf{X}_c$ - wektory odpowiednich wyrażeń ugięć i składowych stanu naprężenia;

$\mathbf{B}_a, \mathbf{B}_b, \mathbf{B}_c$ - macierze o elementach wyrażonych wielkością $a_i = b/\rho_i$ (b - długość podprzedziału w metodzie dyskretyzacji, ρ - bezwymiarowy promień płyty);

$\mathbf{O}_1, \mathbf{O}_2, \mathbf{O}_3, \mathbf{O}_4$ - operatory określone dla danego modelu reologicznego ośrodka liniowo lepkosprężystego, wyrażone wielkościami stałych sprężystych E', E'' i lepkich materialu η', η'' ;

k_1, k_2 - współczynniki: $k_1 = 2m^2 + 1$ $k_2 = m^2 (m^2 - 4)$

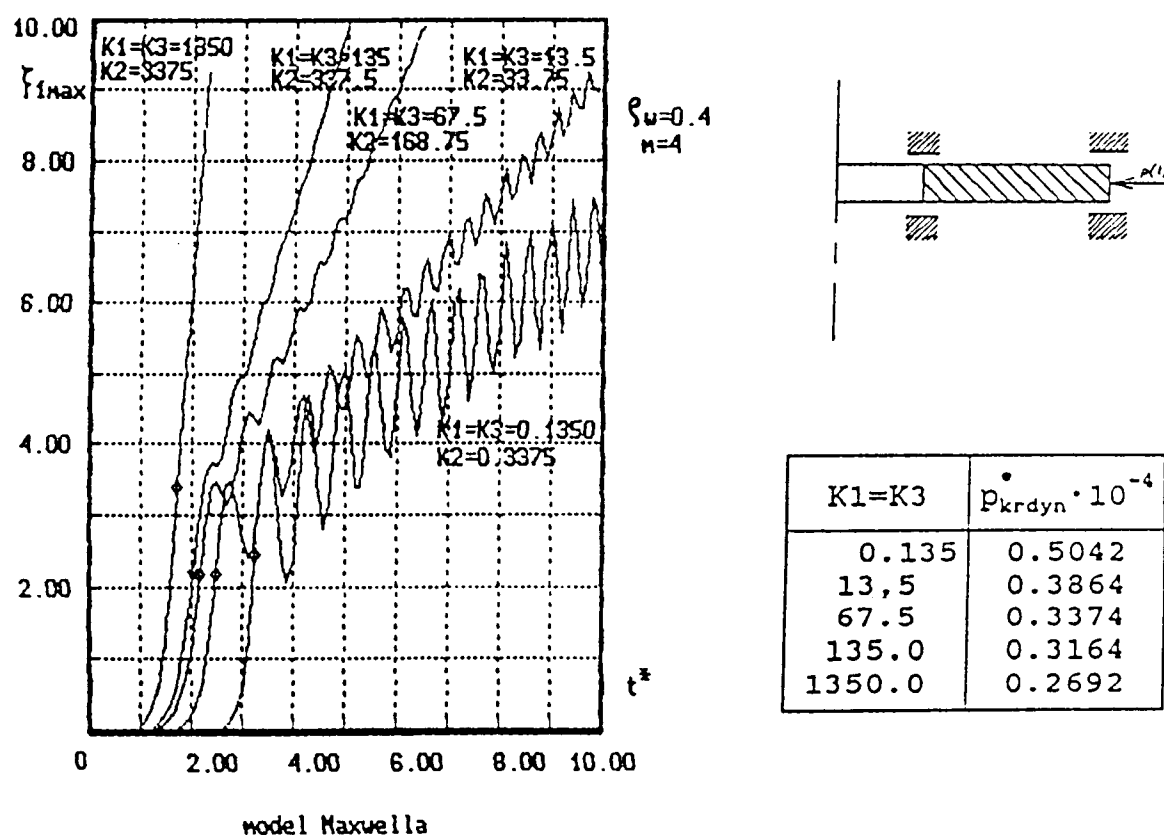
m - liczba sfalowań poprzecznych w kierunku obwodu płyty.

4. Wyniki obliczeń numerycznych

Zachowanie płyty, tzn. sposób jej reagowania na zmienne, zadane warunki jej pracy przeanalizowano biorąc pod uwagę:

- zmienną geometrię płyty;
- różny układ podporowy;
- zmienne wartości i postać funkcji $p=f(t)$ dynamicznego obciążenia zewnętrznego;
- możliwą postać ugięć płyty w chwili utraty jej stateczności dla różnych wartości m fal;
- różny typ modelu reologicznego opisującego materiał płyty: model Kelvina-Voigta i model Maxwella;
- własności materialu płyty ujęte zmieniającym się udziałem faz składowych, tj. fazy lepkiej i fazy sprężystej.

Jednym z ważnych spostrzeżeń (Rys.2) wydaje się zależność, iż wraz ze wzrostem lepkości materialu płyty (spadek wartości parametrów materialowych K_1, K_2, K_3) wydłuża się krytyczny czas utraty jej stateczności t_{kr} (określony dla wyróżnionego punktu wykresu $\zeta_{lmax}=f(t^*)$) i rosną wartości dynamicznych obciążeń krytycznych p^*_{krdyn} określonych w chwili utraty stateczności płyty.



Rys.2. Wpływ udziału fazy lepkiej materiału płyty na przebieg krzywych $\zeta_{1max}=f(t^*)$.

ζ_{1max} - bezwymiarowe, maksymalne ugięcie dodatkowej płyty t^* - bezwymiarowy czas

Fig.2. The influence of value of viscosity constant to run of curve $\zeta_{1max}=f(t^*)$.

ζ_{1max} - nondimensional, maximum deflection t^* - nondimensional time

Literatura

1. W.N. Findley, J.S. Lai, K. Onaran - Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials with an Introduction to Linear Viscoelasticity. New York, North Holland Publishing Company-Amsterdam, 1976.
2. Z. Pawicki - Zagadnienie stateczności płyt pierścieniowych na sprężystym podłożu w ujęciu nieliniowym przy obciążeniach statycznych i dynamicznych. Praca doktorska. Politechnika Łódzka Filia w Bielsku-Białej, 1991.
3. M. Trombski - Zagadnienie płyt pierścieniowych o ortotropii cylindrycznej w ujęciu nieliniowym. ZN Politechniki Łódzkiej, Zeszyt 32, 1972 - praca habilitacyjna.
4. S. Wojciech - Stateczność dynamiczna ortotropowej płyty pierścieniowej obciążonej w swojej płaszczyźnie ciśnieniem zmiennym w czasie. Praca doktorska. Politechnika Łódzka, 1978.
5. A.C. Wolmir - Nieliniowa dynamika plastinok i obłoczek. Nauka, Moskwa, 1972.

Summary

THE BEHAVIOUR OF VISCOELASTIC RING-SHAPED PLATE UNDER VARIABLE LOAD

This paper presents the dynamic stability of viscoelastic ring-shaped plate. The plate is thin and isotropic and is subjected to compressive lateral stress which is evenly distributed on its perimeter (Fig.1). The load rises at a uniform rate in time according to the formula:

$$p=st$$

where: p - compressive stress;
 s - rate of plate loading growth;
 t - time.

The plate has preliminary deflection and the bending state can be observed from the initial moment of load application.

As the criterion for loss of plate stability the Wolmir's criterion [5] was adopted which says that the loss of stability is in the moment of time when the speed of deflection has a maximal value.

The linear viscoelastic Kelvin-Voigt or Maxwell model has been accepted as a material of the plate. Using an analogy between constitutive equation of linear viscoelastic medium and adequate equation of isotropic elastic material [1] the substitute material parameters E_z , ν_z were accepted:

$$E_z \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) = \frac{3Q_1Q_2}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2} \quad \nu_z \left(\frac{\delta}{\delta t} \right) = \frac{P_1Q_2 - P_2Q_1}{P_2Q_1 + 2P_1Q_2}$$

where: P_1 , Q_1 - deviatoric operators;
 P_2 , Q_2 - dilatation operators.

The problem of loss of stability was solved based upon an application of the standard theory of thin plates. The Bubnow-Galerkin method and finite difference method were used.

The nonlinear, differential equations of bending curve of the plate were solved numerically.

The results have been presented graphically. The main observations (Fig.2) are:

- with the increase of the viscosity constants of the material of the plate the critical time to loss of plate stability is longer;
- with the increase of the viscosity constants of the material of the plate the critical dynamical load increases.

DYNAMIC POST-BUCKLING BEHAVIOUR OF THIN-WALLED PANEL

J. RAVINGER

*Department of Structural Mechanics, Civil Engineering Faculty
Slovak Technical University, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, Slovakia*

A linear elastic material is assumed and a geometric non-linear theory, taking into account of the influence of imperfections, is applied. By including inertia forces, the problem of the post-buckling of slender webs with flanges (stiffeners) is extended into dynamics.

Theory

A total description is used. In accordance with the von-Kármán theory (the plate displacements are much larger than in-plane displacements) we take into consideration the inertia forces acting only in the direction of the plate displacements. Using Hamilton's principle we obtain a system of conditional equations

$$\mathbf{K}_M \ddot{\alpha}_D + \mathbf{K}_C \dot{\alpha}_D + (\mathbf{K}_{LD} + \mathbf{K}_{GD} - \mathbf{K}_{GD0}) \alpha_D + \mathbf{K}_{DS} \alpha_S = \mathbf{P}_D + \mathbf{P}_{D0} \quad (1)$$

$$\mathbf{K}_{SD} \alpha_D + \mathbf{K}_{LS} \alpha_S = \mathbf{P}_S + \mathbf{P}_{S0} \quad (2)$$

where

$\mathbf{K}_M$ - the mass matrix,

$\mathbf{K}_C$ - the damping matrix (the damping is considered proportional to the speed of motion),

$\mathbf{K}_{LS}$ - the linear stiffness matrix of the web,

$\mathbf{K}_{SD}$ - the non-linear stiffness matrix, the interaction between the in-plane and the plate displacements parameters,

$\mathbf{P}_{S0}$ - the vector of the transformed in-plane forces due to the initial displacements,

$\mathbf{K}_{DS}$ - the non-linear stiffness matrix, the interaction between the plate and the in-plane displacement parameters,

$\mathbf{K}_{GD}$ - the geometrically non-linear stiffness matrix of the plate,

$\mathbf{K}_{GD0}$ - the matrix of the increase of the bending stiffness of the plate due to the initial displacements, the non-linear part,

$\mathbf{K}_{LD}$ - the linear stiffness matrix of the plate,

$\mathbf{P}_{D0}$ - the vector of the transformed plate internal forces due to the initial displacements,

$$p_x = p_l - p_0 \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T} t \right) \quad (5)$$

where T is the period of applied load; and finally we have a differential equation

$$\frac{d^2 \bar{a}}{dt^2} = \psi \left((s_l + s_o (1 - \cos t) - 1 + k \bar{a}_0^2) \bar{a} - k \bar{a}^3 + \bar{a}_0 \right) \quad (6)$$

where

$$\psi = \frac{\omega^2}{\Omega^2} \text{ - the frequency ratio,}$$

$$\omega, \Omega = \frac{2\pi}{T} \text{ - the circular frequency of free vibration and the applied load,}$$

respectively ,

$$\tau = \Omega \cdot t \text{ - the non-dimensional time,}$$

$$s_l = \frac{P_l}{P_{CR}}, \quad s_o = \frac{P_0}{P_{CR}}, \quad k = \frac{3}{8(1 - \nu^2)} = k_l.$$

Taking out cubic terms ($k=0$) we get a Mathieu-Hill differential equation which is valid for the parametric resonance of a column. For this equation we can arrange the Ince-Strutt diagram for stable and non-stable zones of the parametric resonance. ([1]).

For further evaluation we distinguish the slender web as the non-linear system ($k \neq 0$) and the column as the linear system ($k=0$).

Fig. 2 shows the results when $\psi = 2$ and we are inside the non-stable zones (zones of parametric resonance) and for $\psi = 3$ out of the parametric resonance. Differences between behaviour of the linear and non-linear system are clearly shown. Maximum amplitudes of the buckling surface versus frequency ratio are plotted in Fig.3. The zones of the parametric resonance are plotted for the linear system and it is also shown that the amplitudes of dynamic buckling surfaces for a non-linear system are limited.

To evaluate the problem of the parametric resonance from a point of view of a design of aircraft structures means to investigate the first or the second zone of the parametric resonance (low value of the frequency ratio) The author's idea is to investigate the behaviour of a slender web as a part of steel structure, such a bridge or a crane-way girder. The natural frequency of the steel panel is rather high (e.g. a steel plate 1000x1000x10 mm, $\omega = 309,9 \text{ s}^{-1}$) and so the results with higher frequency ratio are interesting for the author.

Fig. 1 and 4 show that increasing value of the initial displacements decreases the non-linear dynamic effects.

$\mathbf{P}_D$ - the vector of the transformed external load of the plate,
 $\mathbf{P}_S$ - the vector of the transformed external load of the web (the in-plane forces),
 α_D, α_S - the plate, in-plane displacements parameters, respectively.

The linear increase of the load in terms of time

We use an example of a slender web loaded in compression. Assuming the linear increase of the load in terms of time we obtained the differential equation

$$\frac{1}{S} \frac{d^2 \bar{\alpha}}{dt^2} + (\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0) \left(1 - \bar{\alpha}(\bar{\alpha} + \bar{\alpha}_0) \frac{\pi^2}{8 \bar{P}_{CR}} - \bar{\alpha} \bar{t} \right) = 0 \quad (3)$$

where the parameter of the dynamic buckling is defined

$$S = \bar{P}_{CR}^3 \left(\frac{\pi c E h^3}{s a^4} \right)^2 \quad (4)$$

and

$$\alpha(t) = w_C(t) \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}, \quad \alpha_0 = w_{C0} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a}$$

$$c = \frac{\sqrt{E}}{\mu}, \quad \bar{\alpha}(t) = \frac{\alpha(t)}{h}, \quad \bar{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0}{h}, \quad \bar{t} = \frac{s \cdot t}{P_{CR}}$$

$$P_{CD} = 4 \frac{\pi^2 E h^2}{12(1 - \nu^2) a^2}, \quad \bar{P}_{CR} = \frac{P_{CR} a^2}{E h^2} = \frac{\pi^2}{3(1 - \nu^2)}.$$

E, ν, μ - the Young's modulus, the Poisson's ratio, the mass density, respectively,

s - the velocity of the increase of the load.

Fig. 1 shows the influence of the initial displacement for the dynamic post-buckling behaviour of the slender web subjected to the linear increase of the load in terms of time increments.

The harmonic load

Assuming the external load as a harmonic one,

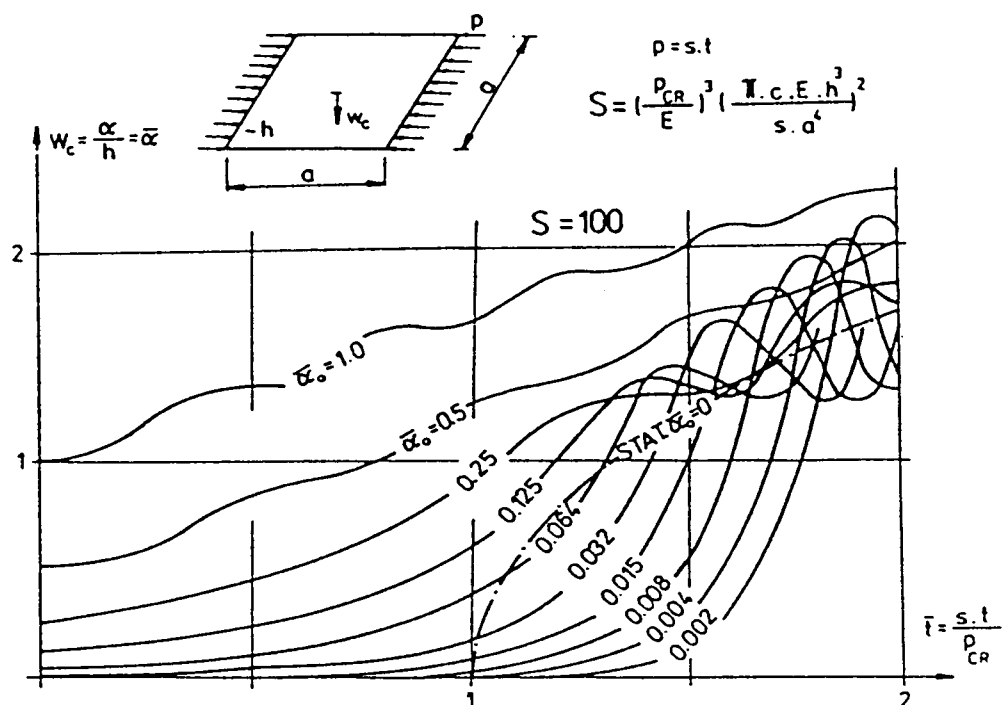


Fig. 1. Dynamic buckling of a slender web for different values of initial displacements - the linear increase of the load in terms of time increments.

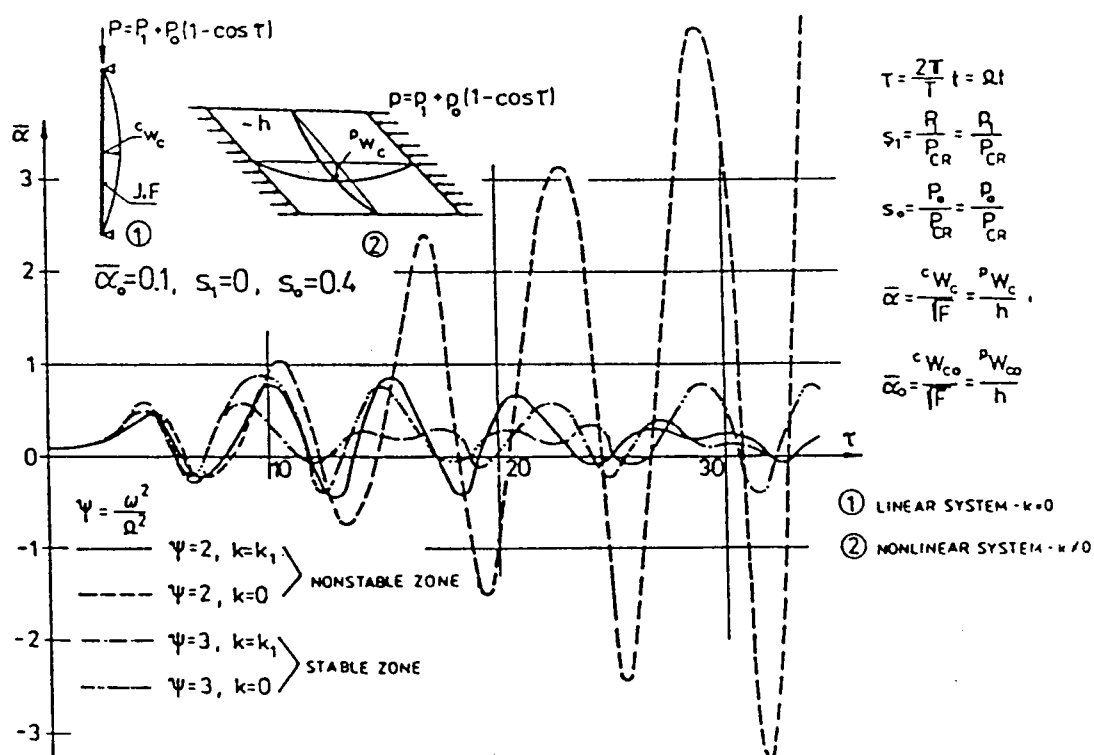


Fig. 2. Dynamic buckling of linear and non-linear system subjected to a harmonic load for the stable zone ($\psi = 3$) and for the non-stable zone ($\psi = 2$).

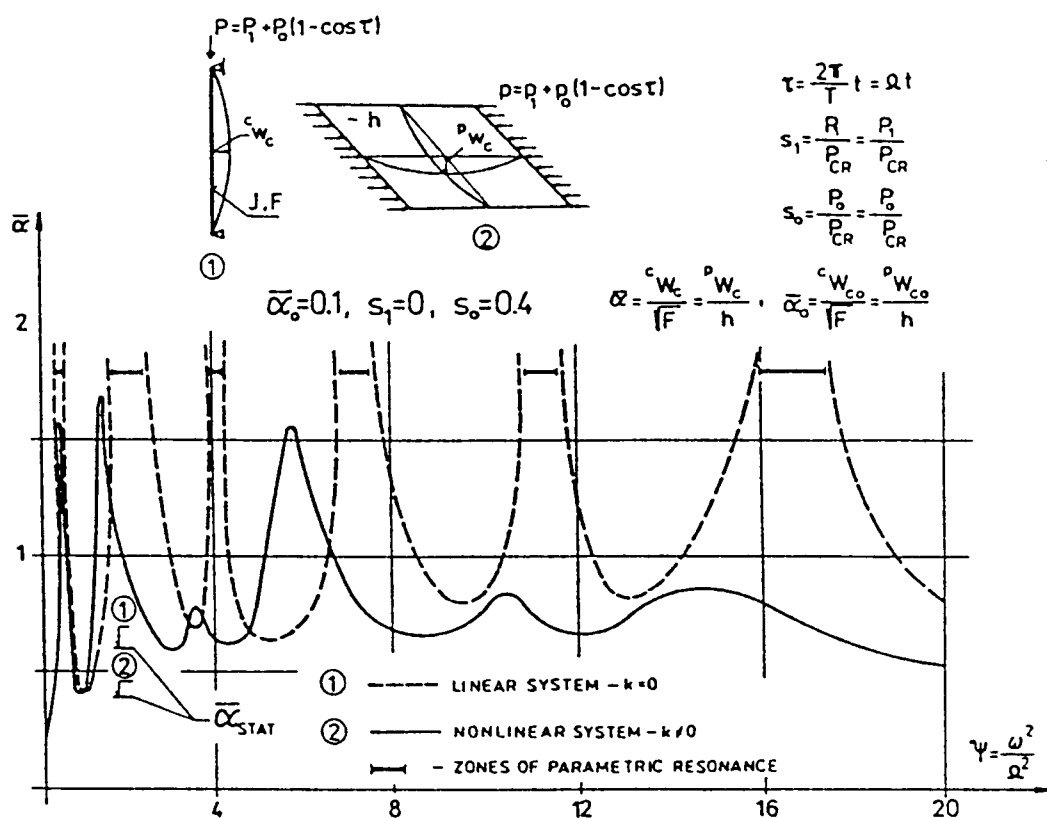


Fig. 3. Maximum amplitudes of buckling surface versus frequency ratio for linear and non-linear system.

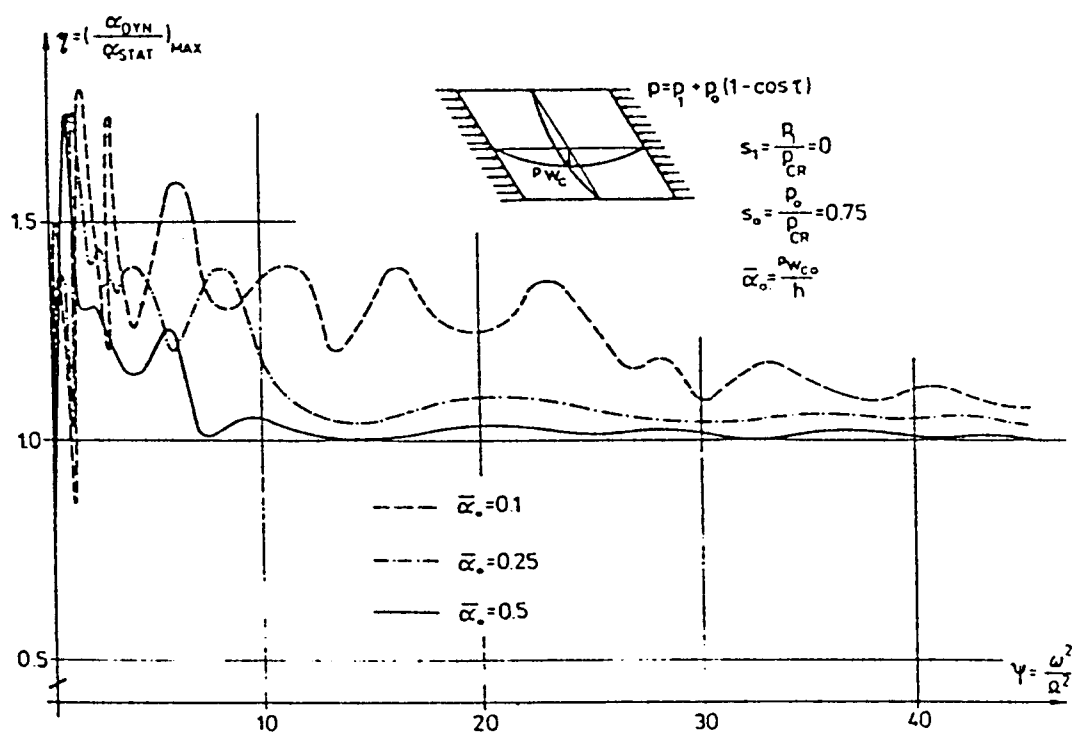


Fig. 4. Influence of dynamic magnification factor to the frequency ration for different values of initial displacements.

Vibration of an imperfect thin-walled panel

Generally for the solution of the influence of residual stresses it is necessary to take into account the material non-linear assumptions. In some special cases we can obtain an approximate solution even with the model of a linear elastic material.

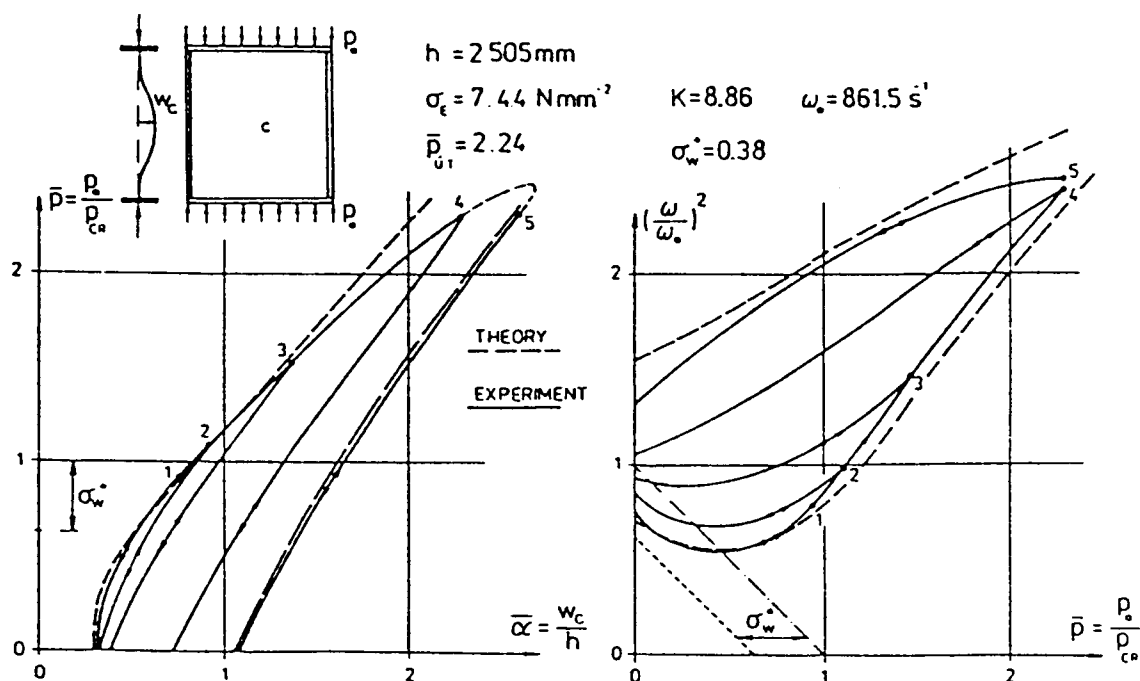


Fig. 5. Comparison of theoretical and experimental results for the steel panel.

Conclusion

The non-linear dynamic of thin-walled structure presents very complex problems. The presented theory and results give some information about the behaviour of the slender web as the thin-walled panel assuming them to be a part of thin-walled steel structure.

Acknowledgements

This research has been supported by a Grant No 14-08-96.

References

1. Bolotin, V. V., *Dynamic Stability of Elastic Systems* (GITL, Moscow, 1956 in Russian, English translation by Holden-Day, New York, 1964).
2. Ravinger, J., *Journal of Constructional Steel Research* **21** (1992), 175-184
3. Ravinger, J., *Thin-Walled Structures* **19** (1994) 1-22, 23-36.

SOME ASPECTS OF WEB CRUSHING BEHAVIOUR IN THIN-WALLED BEAMS

J. RHODES, D. NASH

University of Strathclyde, Glasgow, Scotland

M. MACDONALD

Glasgow Caledonian University, Glasgow, Scotland

An initial investigation of the collapse behaviour of webs of thin-walled beams under concentrated loads applied to both flanges is carried out. The predicted load capacities given by various design specifications are shown in comparison with the results of finite strip analysis and finite element analysis for channel section beams, and it is seen that there is quite a large variation in the predictions.

Introduction

Web crushing at points of concentrated load or reaction in thin-walled beams is a significant problem, particularly in the case of beams with slender webs. At support points, or points of concentrated loading severe lateral load can result in a local buckling of the web as illustrated in Figure 1. This type of buckling generally has the effect of producing failure of the beam, and there are two different types of loading and two different types of load locations which are of prime interest. The different types of loading are (a) Loading through one flange only, as shown in Figure 1, and (b) Loading through two opposite flanges as shown in Figure 2. The two different load locations which are studied separately are loads applied near an end of a beam (sometimes termed exterior loading) and load applied within the span of a beam (termed interior loading). In general loading applied near the end of a beam is more severe than the same load applied in the interior.

The new Eurocode dealing with the design of cold formed steel members and structures, EC3: Part 1.3 (1), has recently been finalised. In this document the design rules dealing with web crushing in thin walled beams have been modified substantially from the previous draft. The modifications have been largely such that the new rules are very similar to those of the corresponding British Standard (2), which is largely based on the AISI Specification (3) with respect to web crushing. On close examination, however, it can be observed that the types of member covered by the modified rules are different from those of (2) or (3) with respect to the same rules, so that the new Eurocode has not come into line with other existing codes, but has in some cases moved farther away from these other codes. It seems possible that insofar as the Eurocode document is concerned the rules have been stated without full consideration of their applicability. So far as the other codes are concerned the

governing design formulae seem to be completely empirically based, having been derived on the basis of many experiments without any reference to basic theoretical analysis.

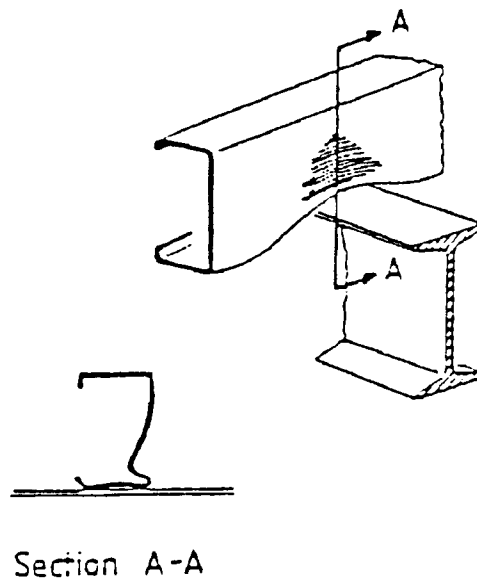


Figure 1.

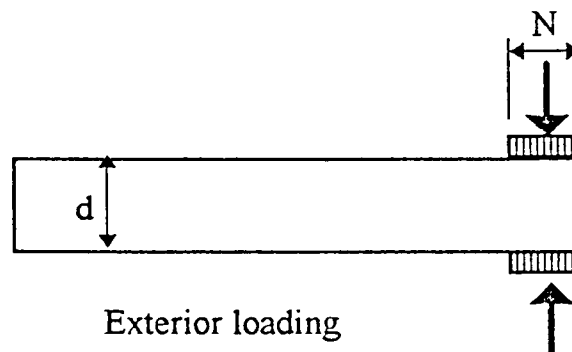
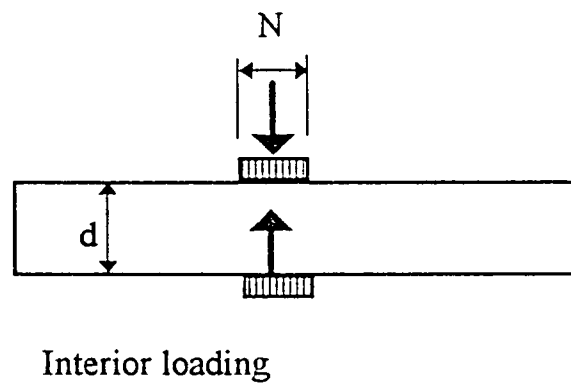


Figure 2.

This does not apply to the parent Eurocode for steel, EC3: Part 1.1 (4), which advocates the use of column curves together with an effective width of web which acts as a column under the concentrated lateral loading. Reference (4), which has been based on the British parent steel code, BS 5950: Part 1 (5), is orientated towards consideration of I section beams, whereas the cold formed steel specifications have rules which govern I type beams as well as rules for other types of beam. In the case of cold formed steel, however, the design codes have been based completely upon empirical rules, although theoretical investigations have been reported, e.g. (6). It was therefore felt worthwhile to examine at least some of the existing design code predictions in comparison with theoretical analysis to gain some feeling for the applicability of theoretically derived design rules to deal with web crushing behaviour.

Theoretical Investigations

To gain some insight into web crushing behaviour in beams under two flange loading two theoretical approaches were initially considered, one which used a finite strip analysis of a beam web, assumed simply supported on the loaded ends, and a finite element analysis of plane channel sections using the finite element package ANSYS. In the finite strip approach a bifurcation buckling analysis was used and the buckling loads obtained were incorporated in a column analysis using column curve "c" of the Eurocode. This curve was used since the Eurocode itself (4) suggests curve "c" together with an effective width of web. Typical results of these analyses are shown in the following figures. In all the figures the material thickness is taken to be 1mm.

Figures 3 and 4 show some results for the exterior loading case. These are in the forms of graphs of the variation of predicted buckling load or failure load with variation in loading length N for a relatively compact web, i.e. $d/t=50$ in Figure 3 and a relatively slender web, $d/t=200$, in Figure 4. The thick curves shown here give the finite strip results for a single web, which is assumed simply supported at the loaded ends and of such a length that the deflections reduce to zero within the span of the beam. Also shown in the figures are the crushing load predictions from BS 5950: Part 5 (and also the AISI specification), those of EC3: Part 1.1 using the same assumptions of simply supported web boundaries as in the finite strip analysis, and alternative predictions postulated by Wing and Schuster (7). In the case of the BS 5950: Part 5 rules, two curves are given, one pertaining to shapes having single thickness webs and the other for I beams and other beams with substantial restraint on web rotation.

It is evident from Figure 3 that for the compact web the theoretical values from the finite strip analysis become substantially greater than the design specification values as the width of the concentrated load increases. For the slender web, however, the design specification predictions are substantially greater than the theoretical

capacities over the full range. It may be noted that $d=200t$ is given as the maximum web slenderness ratio covered by the rules of BS 5950: Part 5 and the AISI Specification. It may be observed that the EC3: Part 1.1 rules, which are based on buckling analysis, are in good agreement with the finite strip and related predictions.

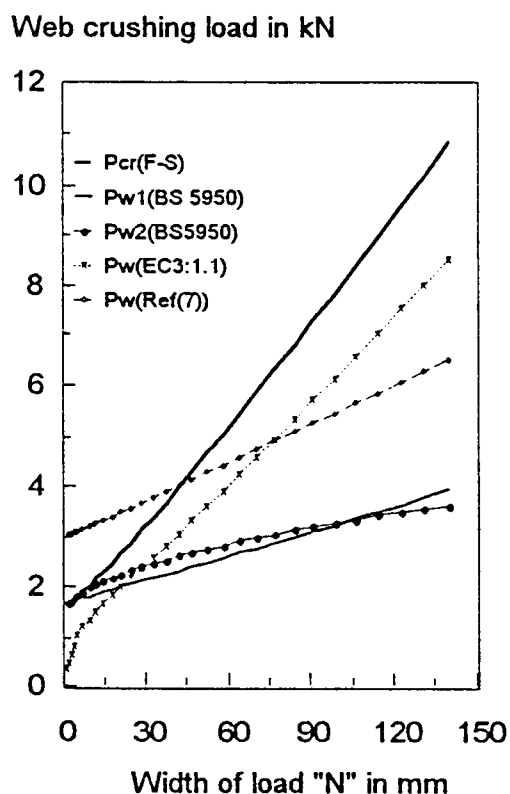


Figure 3. Exterior Loads-50mm deep web

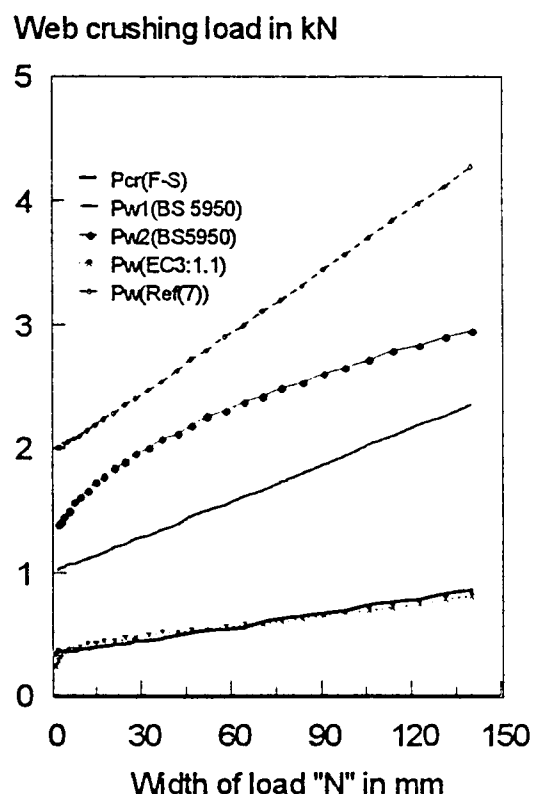


Figure 4. Exterior loads -200mm deep web

In the case of the other design specification rules there are two main possibilities covering the large differences between the empirically based rules and the theoretically derived rules. These are:- 1) There may be substantial post-buckling reserves of strength in slender webs, and 2) the rotational restraint provided by flanges may well be sufficient to improve the buckling resistance substantially. While the nature of the loading is such that postbuckling reserves should be much less than for uniformly compressed plates, it is possible that there is a degree of postbuckling strength. It is very likely, however that the main source of increase in strength comes from the improvement of buckling resistance by the rotational restraint provided by the flanges. To check this out finite element analysis was also used in the examination of the cases of interior loading. In the finite element analysis, carried out using the ANSYS package, the web was considered to be the web of a plain channel section which had flanges of width equal to one half of the

web depth. Figures 5 and 6 show the variations in web crushing loads with variation in loading width for members with web depths of 50t and 200t. Also shown in these figures are the results of relatively simple analysis using energy methods together with approximate deflected forms for the compressed web. Three different conditions were studied, webs simply supported on the loaded ends, webs of plain channel sections as investigated by ANSYS and webs fully fixed on the loaded edges. This last condition specified the upper limit of restraint which could be expected from adjacent elements.

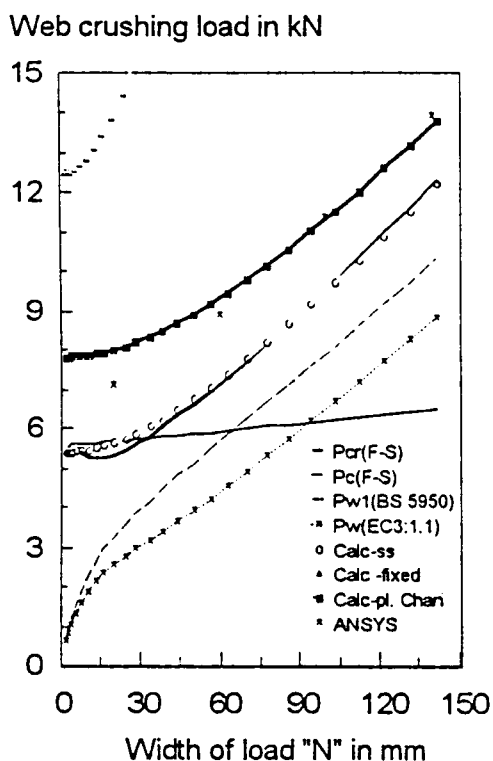


Figure 5. Interior loading-50mm deep web

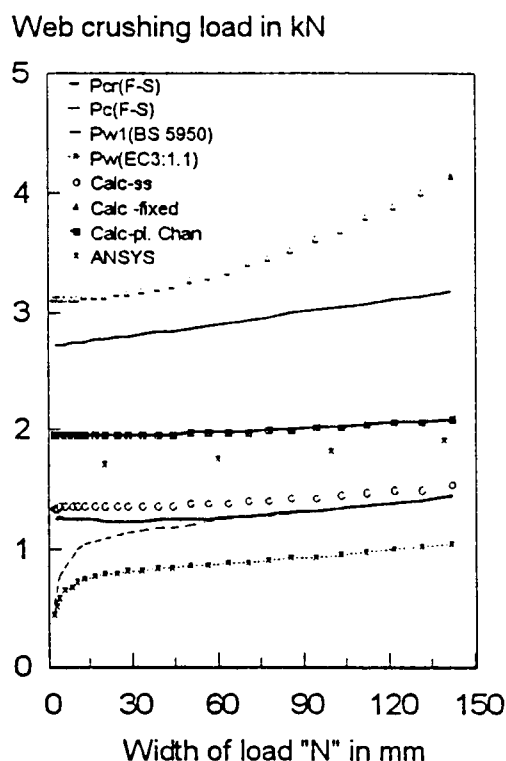


Figure 6. Interior loading-200mm deep web

Figure 5 shows that in the case of compact webs the empirical design formula of BS 5950: Part 5 is less than the analytical values for relatively long load bearing lengths but greater than the analytical values for short bearing lengths, The finite element results show that the restraint on rotation given even by the unstiffened flanges of a plain channel improve the buckling resistance by a fair amount. The finite element results here were reasonably well approximated by a simple energy analysis, which could be modified to give almost identical results to those given by ANSYS. The upper limit given by the fixed edged webs is very high for the 50mm deep web, but does show that for certain types of member the web crushing resistance can be increased substantially beyond that which could be determined on the basis of simple support of the web.

In the case of deeper webs Figure 6 shows the range of variation in buckling resistance which can be expected from different degrees of rotational restraint on the web. Here the empirical rule of BS 5950: Part 5 lies towards the fixed edge web results. The calculated buckling loads for a plain channel web using the energy approach were not in quite such good agreement with ANSYS in this case, although the average disparity between the ANSYS results and the energy approach was only about 10%.

Summary

The theoretical investigations mentioned here form the start of a study aimed at setting out a rational design approach to the web crushing problem. In cold-formed steel design empirical rules have been promoted, modified and relied on to such an extent that it would appear that no thought has been given in the recent past to the application of engineering principles to this problem. It is hoped that with further study the capability to accurately evaluate the web crushing capacity of different types of section by analysis of the relevant properties of each section will be demonstrated and rational design rules produced.

References

1. Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1.3: General Rules. Supplementary rules for cold formed thin gauge members and sheeting. European Prestandard. ENV 1993-1-3. English version February 1996.
2. BS 5950: British Standard for Structural use of steelwork in building: Part 5. Code of practice for design of cold formed sections. British Standards Institution, 1987
3. American Iron and Steel Institute. Specification for the design of cold formed steel structural members. 1986 Edition.
4. Eurocode 3: Design of Steel Structures. Part 1.1 General rules and rules for buildings. DD ENV 1993-1-1:1992
5. BS 5950: British Standard for Structural use of steelwork in building: Part 1. Code of practice for design in simple and continuous construction: hot rolled sections, 1985
6. M Z Khan and A C Walker. "Buckling of plates subject to localised edge loading" The Structural Engineer, Vol. 50, No. 6. June 1972. pp 225-232
7. B A Wing and R M Schuster. "Web crippling of decks subjected to two-flange loading." Proc. Sixth Int. Conf. on Cold-formed Steel Structures, St. Louis, USA, 1986. pp 371-402

DYNAMICZNA STATECZNOŚĆ PŁYTY WARSTWOWEJ

F. ROMANÓW

*Instytut Budowy Maszyn i Pojazdów Politechniki Zielonogórskiej
Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra, Poland*

M. MALINOWSKI

*Instytut Inżynierii Produkcji i Materiałoznawstwa Politechniki Zielonogórskiej
Podgórna 50, 65-246 Zielona Góra, Poland*

W pracy analizuje się stateczność dynamiczną płyty warstwowej mocowanej przegubowo na dwóch przeciwnych krawędziach. Dla rdzenia przyjęto hiperboliczną hipotezę trójosiowego stanu przemieszczeń, natomiast dla okładzin stan przemieszczeń jak dla cienkich jednorodnych płyt. Przyjęto, że obciążenie wzrasta ze stałą prędkością. W oparciu o geometrycznie liniową teorię wyznaczono dynamiczny układ równań równowagi płyty. Przedstawiono na przykładzie zjawiska występujące podczas dynamicznego ściskania płyty warstwowej oraz wpływ wybranych parametrów na przebieg dynamicznego wyboczenia. Wyniki analizy zilustrowano za pomocą wykresów.

Podstawowe oznaczenia:

a - długość płyty,	ν - współ. Poissona okładzin,	V_x - współ. Obciążenia płyty,
b - szerokość płyty,	ρ_r - gęstość materiału rdzenia,	w_0 - wstępne ugięcie okładzin,
h - grubość okładzin,	ρ_0 - gęstość materiału okładzin,	u, v, w - przemieszczenia okładzin,
$2c$ - grubość rdzenia,	E - moduł Younga okładzin,	u_0, v_0, w_0 - przemieszczenia rdzenia.
ν_r - współ. Poissona rdzenia,	G_r - moduł Kirchhoffa rdzenia,	

1. Wstęp

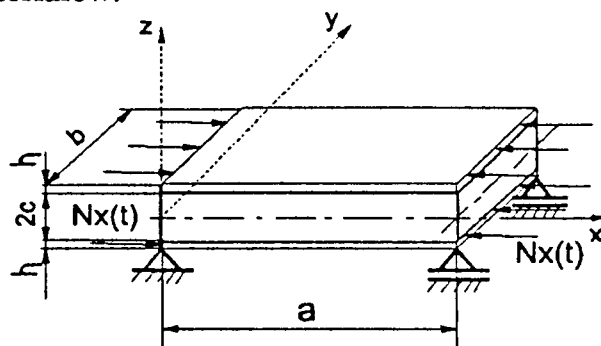
Szybki rozwój nowych technologii w budowie lekkich konstrukcji oraz szerokie ich zastosowanie w budowie maszyn, urządzeń, w środkach transportu oraz budownictwie spowodował duże zainteresowanie nowymi metodami obliczania i projektowania wysokowytrzymałych i efektywnych konstrukcji warstwowych. Takie konstrukcje w postaci płyt, powłok, prętów, itp. w porównaniu z klasycznymi elementami nośnymi posiadają znacznie więcej pozytywnych cech. Przy stosunkowo niskim ciężarze sztywność i wytrzymałość nowoczesnych konstrukcji warstwowych jest znacznie większa od klasycznych, w których głównym materiałem konstrukcyjnym jest stal. Problemy związane z obliczaniem powłok warstwowych przy dynamicznych obciążeniach zostały omówione między innymi w pracach polskich autorów Szycy i Twardosza [1,2]. W pracach tych przyjęto geometrycznie nieliniową teorię, natomiast dla rdzenia przyjęto hipotezę linii łamanej (założenie o nieściśli-

wości rdzenia). Z prac autorów zagranicznych można wymienić m.in. pracę Bołotina [3], Gersztajna [4] dotyczące klasycznej powłoki i płyty jednorodnej. Bardziej ogólne zagadnienie wyboczenia dynamicznego omówiono w pracy Narasimhana [5], Chelu [6] (drżania płyt dynamicznie obciążonych), Vaughana i Lindberga [7] (wyboczenie w zakresie plastycznym powłok warstwowych zamkniętych).

Istotnym aspektem niniejszej pracy jest to, że dla rdzenia zastosowano nieliniową hiperboliczną hipotezę stanu przemieszczeń rdzenia (NHH).

2. Podstawowe założenia i związki

Przedmiotem rozważań jest prostokątna płyta warstwowa ściskana siłą zmienną w czasie i zamocowana przegubowo na obciążonych krawędziach (Rys.1). Obciążenie zewnętrzne jest równomiernie rozłożone na obu okładzinach. Sposób obliczania płyty uwzględnia poprzeczne odkształcenie rdzenia (hipoteza NHH), natomiast dla okładzin obowiązuje stan przemieszczeń jak dla cienkich jednorodnych płyt (hipoteza K-L). Okładziny i rdzeń wykonane są z izotropowych, jednorodnych i liniowo sprężystych materiałów.



Rys.1 Schemat płyty warstwowej
Fig.1 Geometry of sandwich plate

Związki geometryczne między przemieszczeniem i odkształceniem dla okładzin i rdzenia odpowiadają geometrycznie liniowej teorii. Przemieszczenia rdzenia w kierunku osi x , y , z (odpowiednio u_u , v_u , w_u) w przypadku ogólnym opisują nieliniowe funkcje zmiennej z [8,9].

$$\begin{aligned} u_u(x, y, z, t) &= -\frac{z}{c} \left(u - \frac{h}{2} w^* \right) F(z), \\ v_u(x, y, z, t) &= -\frac{z}{c} \left(v - \frac{h}{2} w' \right) S(z), \\ w_u(x, y, z, t) &= wT(z), \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, $w = w(x, y, t)$ - przemieszczenia okładzin,
 h - grubość okładziny, $()^*$, $()'$ - pochodne odpowiednio po x , y .

3. Równania równowagi dynamicznej i równanie ruchu

Rozwiązując zadanie dotyczące dynamicznej stateczności płyty posługiwać się będziemy metodą energetyczną. Energia kinetyczna E_k , składa się z energii rdzenia (indeks u) i energii okładzin (indeks o).

$$E_k = 0.5 \rho_u \int_{V_u} (w_u^{\otimes 2} + u_u^{\otimes 2} + v_u^{\otimes 2}) dV_u + \rho_o \int_{V_o} (w_o^{\otimes 2} + u_o^{\otimes 2} + v_o^{\otimes 2}) dV_o; \quad (2)$$

gdzie V_u - objętość rdzenia, V_o - objętość jednej okładziny,
 $()^{\otimes}$ - pochodna po czasie t.

Po wstawieniu zależności (1) do (2) i pewnych przekształceniach otrzymano

$$E_k = \int_0^a \int_0^b \left[u^{\otimes 2} k_1 + v^{\otimes 2} k_2 + (F_1 w^{\otimes \otimes} + F_3 w'^{\otimes \otimes}) k_3 + (F_1 w^{\otimes \otimes} u^{\otimes} + F_3 w'^{\otimes \otimes} v^{\otimes}) k_4 + w^{\otimes 2} k_5 \right] dx dy, \quad (3)$$

gdzie: F_i - w pracach [8,9],

$$k_1 = \frac{\rho_u F_1}{2c^2} + h\rho_o, \quad k_2 = \frac{\rho_u F_3}{2c^2} + h\rho_o, \quad k_3 = \frac{\rho_u h^2}{8c^2}, \quad k_4 = -\frac{\rho_u h}{2c^2}, \quad k_5 = \frac{\rho_u F_{11}}{2} + h\rho_o.$$

Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano metodę wariacyjną Hamiltona.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - E_k) dt = 0, \quad (4)$$

Potencjał energetyczny płyty warstwowej Π określony jest tak samo jak w pracach [8,9]. W dalszych rozważaniach uwzględniono tylko siły bezwładności w kierunku normalnym do powierzchni płyty (współrzędna z), gdyż w zagadnieniach stateczności będą one wyraźnie przeważały nad pozostałymi składowymi. Uwzględniając zależność (3) i równanie wariacyjne (4) i po odpowiednich przekształceniach (m.in. tw. Greena) otrzymano układ równań równowagi dynamicznej płyty warstwowej (5) (brak przemieszczenia w kierunku osi y, $v=0$). Równania równowagi dynamicznej różnią się od równań równowagi statycznej [8,9] jedynie dodatkowymi członami bezwładnościowymi.

$$\begin{aligned} (A_{21} - A_{13})w^* + \frac{G_u}{c^2} F_{10}u - 2A_2 u^{**} - A_6 w^{***} + F_1 k_4 w^{\otimes \otimes} &= 0, \\ 2(A_{36} + A_8)w + (A_{13} - A_{21})u^* + 2(A_{15} - A_{18})w^{**} + 2A_4 w^{****} + A_6 u^{***} - N_x(t)w^{**} & \\ + 2k_5 w^{\otimes \otimes} + 2F_1 k_3 w^{**\otimes \otimes} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie: A_i - zamieszczono w pracach [8,9].

Na przebieg utraty stateczności mają znaczny wpływ początkowe odchylenia od geometrycznie idealnego kształtu płyty. Przyjęto, że płyta (okładzina) posiada wstępne ugięcie $w_0(x,y)$. Wprowadzono składnik $(w+w_0)$ do równań (5) w miejsce przemieszczenia w . Założono funkcję aproksymującą ugięcie okładzin w postaci:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= A(t) \cos \beta x, \\ w(x,t) &= C(t) \sin \beta x. \end{aligned} \quad (6)$$

Wstępne ugięcie okładzin wzdłuż osi x opisuje poniższa formuła.

$$w_0(x) = C_0 \sin \beta x, \quad (7)$$

gdzie: $\beta = \pi m/a$, $A(t)$, $C(t)$ - funkcje czasu określające reakcję płyty na obciążenie dynamiczne, C_0 - wstępne odchylenie.

Przyjęto, że obciążenie $N_x(t)$ w chwili $t=0$ wynosi zero i wzrasta proporcjonalnie do czasu t :

$$N_x(t) = V_x t. \quad (8)$$

Równania równowagi dynamicznej (5) przy uwzględnieniu (6), (7), (8) dadzą się sprowadzić do równania ruchu postaci:

$$C(t)^{\otimes\otimes} + k(t)C(t) = f(t), \quad (8)$$

gdzie: $k(t) = Q_1 + tQ_3$; $f(t) = Q_2 + tQ_4$,

$$Q_1 = \frac{\left(r_4 - \frac{r_2^2}{r_1}\right)}{\left(r_5 - \frac{r_2 r_3}{r_1}\right)}, \quad Q_2 = \frac{-C_0 \left(r_4 - \frac{r_2^2}{r_1}\right)}{\left(r_5 - \frac{r_2 r_3}{r_1}\right)}, \quad Q_3 = \frac{\beta^2 V_x}{\left(r_5 - \frac{r_2 r_3}{r_1}\right)}, \quad Q_4 = \frac{C_0 \beta^2 V_x}{\left(r_5 - \frac{r_2 r_3}{r_1}\right)},$$

$$r_1 = 2(0.5G_u F_{10} / c^2 + \beta^2 A_2), \quad r_2 = \beta(A_{21} - A_{13} + \beta^2 A_6), \quad r_3 = F_1 \beta k_4,$$

$$r_4 = 2A_8 - 2\beta^2(A_{18} - A_{15}) + 2\beta^4 A_4, \quad r_5 = 2(k_5 + F_1 \beta^2 k_3).$$

Pozostałe współczynniki oznaczono jak w pracach [8,9]. Liniowe równanie różniczkowe (8) rzędu drugiego przedstawia zależność pomiędzy funkcją ugięcia i czasem t , jaka zachodzi podczas utraty stateczności płyty pod wpływem obciążenia dynamicznego $N_x(t)$. Równanie (8) rozwiązano metodą numeryczną w oparciu o metodę stałego przyspieszenia [10] stosowaną w zagadnieniach dyskretnych i zmodyfikowaną dla zagadnień dynamicznej stateczności. W algorytmie tym stosuje się warunek kolokacji w centralnym punkcie kroku całkowania w celu określenia nieznanego przesunięcia w każdym kroku.

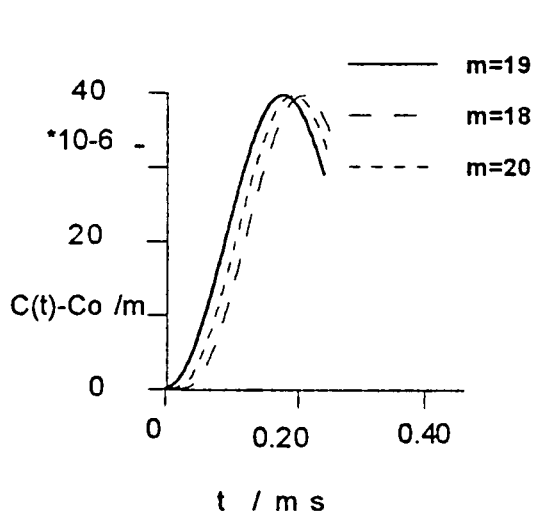
Przyjęto następujące warunki początkowe ($t=0$):

$$C(t)=C_0, \quad C(t)^{\otimes} = 0. \quad (9)$$

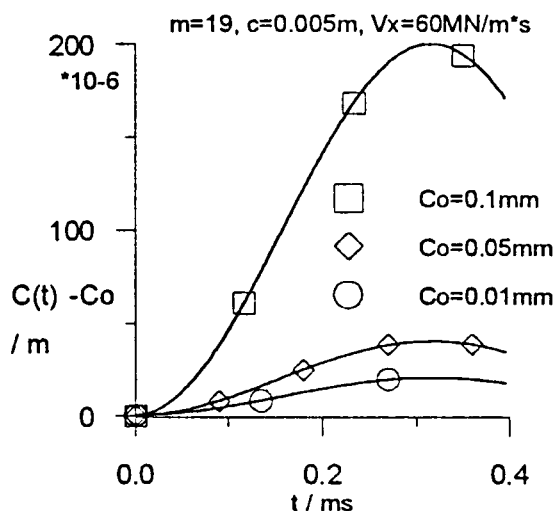
4. Przykład

Do analizy wybrano płytę o następujących wymiarach i parametrach materiałowych: $a=0.285\text{m}$, $b=0.185\text{m}$, $h=0.5\text{mm}$, $c=0.005\text{m}$, $C_0=(0.1-0.01)\text{mm}$, $\nu_u=0.17$, $\nu=0.3$, $\rho_u=168.6\text{ kg/m}^3$, $\rho_o=7280\text{ kg/m}^3$, $E=6.8695\cdot 10^4\text{ MPa}$, $G_u=25\text{ MPa}$, $V_x=(20-80)\text{MN/m}\cdot\text{s}$.

Na rys.2 przedstawiono rodzinę krzywych będących rozwiązaniem równania (8) dla różnych wskaźników m , określających postać wyboczenia (liczba półfal) płyty w kierunku osi x . Zawsze z całej rodziny krzywych jedna postać pojawia się szybciej niż pozostałe. Dla przyjętych parametrów płyty jak wyżej, $m=19$. Ta postać decyduje o przebiegu dynamicznego ugięcia płyty. Na rys.3 przedstawiono rozwiązanie równania (8) dla wybranych wartości wstępnych imperfekcji C_0 . Wzrost wstępnych ugięć C_0 powoduje, że ugięcie płyty rośnie znacznie szybciej niż dla mniejszych wartości parametru C_0 .



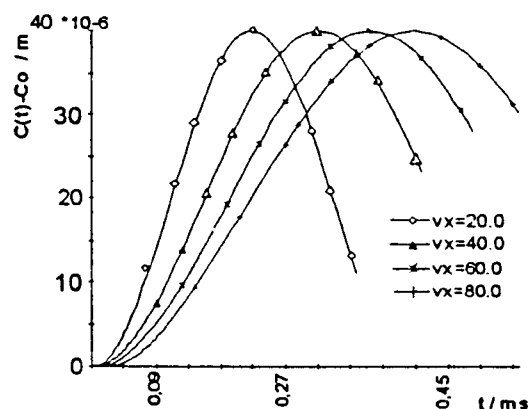
Rys.2 Amplituda ugięcia $C(t)$ w funkcji czasu t
Fig.2 The variation of deflection of the plate as a function of time t (for different values of number of waves m). (We note that the most rapid growth of the deflection in time occurs for $m=19$)



Rys.3 Amplituda ugięcia $C(t)$ w funkcji czasu t , $C_0=(0.1-0.01)\text{mm}$
Fig.3 The results of solutions of eq.(8) obtained for three values of the initial deflection

Na rys.4 zinterpretowano geometrycznie wpływ współczynnika prędkości obciążenia V_x na przebieg dynamicznego ugięcia płyty.

Z wykresów przedstawionych na rys.4 można wyciągnąć ważny wniosek. Współczynnik V_x nie wpływa na wartość maksymalną ugięcia, natomiast ze wzrostem V_x krzywe przesuwają się w prawo.



Rys.4 Amplituda ugięcia $C(t)$ w funkcji czasu dla różnych współczynników V_x
 Fig.4 The variation of deflection with parametr V_x ($h=0.5\text{mm}$; $C_0=0.05\text{mm}$)

5. Literatura

1. Szyc W., *Stateczność otwartej trójwarstwowej powłoki walcowej dynamicznie ściskanej*, *Rozprawy Inżynierskie*, **20**, 4, (1972), 539-553.
2. Szyc W. i in., *Dynamiczna stateczność trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej poddanej ścinaniu*, *Arch. Budowy Maszyn*, **24**, 1, (1977), 57-67.
3. Bołotin B.B. i in., *Isledowanie proszczelkiwania tonkich uprugich obłoczok pod dejstwijem dinami-czeskich nagruzok*, **5**, Maszgiz, (1960), Moskwa.
4. Giersztajn M.C., *Wypucziwanie priamougolnoj płastinki pri dinamiczeskom swigie*, *Trudy 7 Wses. konf. po teorii obłoczok i płasin*, (1970), 177-180.
5. Narasimhan M.C., *Dynamic response of laminated orthotropic spherical shells*, *J. Acoust. Am.*, **91** (5), (1992), 2714-2720.
6. Chelu Pantele, *Vibrations of laminated plate by using the collocation method*, *Semin. Mec.*, **24**, (1989), 1-20.
7. Vaughan H. I in., *Dynamic plastic buckling of sandwich shells*, *J. Of Applied Mechanics*, **35**, 3, (1968), 539-546.
8. Romanów Fr., *Wytrzymałość konstrukcji warstwowych*, *Wyd. WSiInż. w Zielonej Górze*, (1995), s. 312.
9. Romanów Fr., *Kritische Belastungen von Sandwichkonstruktionen bei Anwendung der hyperbolischen Hypothese des dreiaxialen Verschiebungszustandes*, *Bauingenieur*, **59**, (1984), 229-233.
10. Langer Jan, *Dynamika budowli*, *Wyd. Politechniki Wrocławskiej*, Wrocław, (1980), s. 207.

Summary

DYNAMIC STABILITY OF SANDWICH PLATE UNDER COMPRESSION

This paper presents an energetic method of analysis in a linear approach to dynamic stability of sandwich plate subjected to compression. Basing on hyperbolic hypothesis (NHH) of core displacement triaxial state and Hamilton principle, the equations of motion of the plate element are derived. Under the assumption of linear increase of load in time, a differential equation is derived combining initial deflection and time. The results of analysis are represented by diagrams.

ON BIFURCATION OF THE SECOND ORDER DEFORMING PROCESS IN THE THEORY OF STABILITY

V.N. SHVAYKO, V.I. TARNOVSKIY

Department of Strength of Materials, Ukrainian
Technology University
of Chemical, 320005 Dnipropetrovsk, Ukraine

In the theory of stability of elastoplastic bodies the Karman's and Shanley's concepts are sufficiently investigated. In works [1,2] it is shown, that at complex essentially nonmonotonous loading the second order bifurcation of deforming process occurs, that is a break of uniqueness of the boundary problem solution of the plasticity theory in accelerations. In the present work on the basis of one variant of the theory of sliding [3] there are investigated general rules on the example of a compressed-twisted thin-walled tube. It is shown, that the corresponding critical load coincides with the Shanley's critical load.

1. Statement of the problem

Let's consider a thin-walled tube of average radius R , length L , wall thickness h and cross-section area F under compressing force $P(t)$ and twisting moment $M(t)$, arbitrarily varied in the time t beyond elasticity range. At critical values P_k, M_k , dependent upon history of loading, the initial deforming becomes unstable and buckling occurs. Critical values of flexibility parameter $\lambda = L/R$, corresponding to certain values (P_k, M_k) on the trajectory of external loading in the plane (P, M) are determined. Prebuckling stress state of the tube is uniform and in a polar coordinate system is determined by stresses $\sigma_z = P(t)/F, \tau_{\varphi\varphi} = M(t)/RF$.

In the plane (S_2, S_3) ($S_2 = \sqrt{2/3} \sigma_z, S_3 = \sqrt{2} \tau_{\varphi\varphi}$) of Iljushin's five dimensional space to their change there corresponds a trajectory of loading $OA_1A_2A_3$ (Fig.1), which is similar to the trajectory of external forces $P(t), M(t)$.

Let dS^0 is the increment of a loading vector along the trajectory $OA_1A_2A_3$, dS is a variation of additional loading from given point on it, and $A_i B_i C_i$ ($i = 1, 2, 3$) - are angles of complete overloading [4]. Depending on geometry of the trajectory of loading the vector dS^0 can lie inside (point A_1), outside (point A_2) or be tangent (point A_3) to the angle of complete overloading. The first case takes place at monotonous and quasimonotonous loadings; second - at break of a trajectory with violation of the monotony condition; third - on smooth portions of a trajectory at essentially nonmonotonous deformation [2].

According to the theory of sliding [3] connection between components of vector dS and increment of the deformation vector $d\vartheta$ ($\vartheta_2 = \sqrt{2/3} (1+\nu)\epsilon_z, \vartheta_3 = -\sqrt{0.5} \gamma_{\varphi\varphi}$) in the local system of coordinates $S_i S_j$ is possible to present in the form [5]

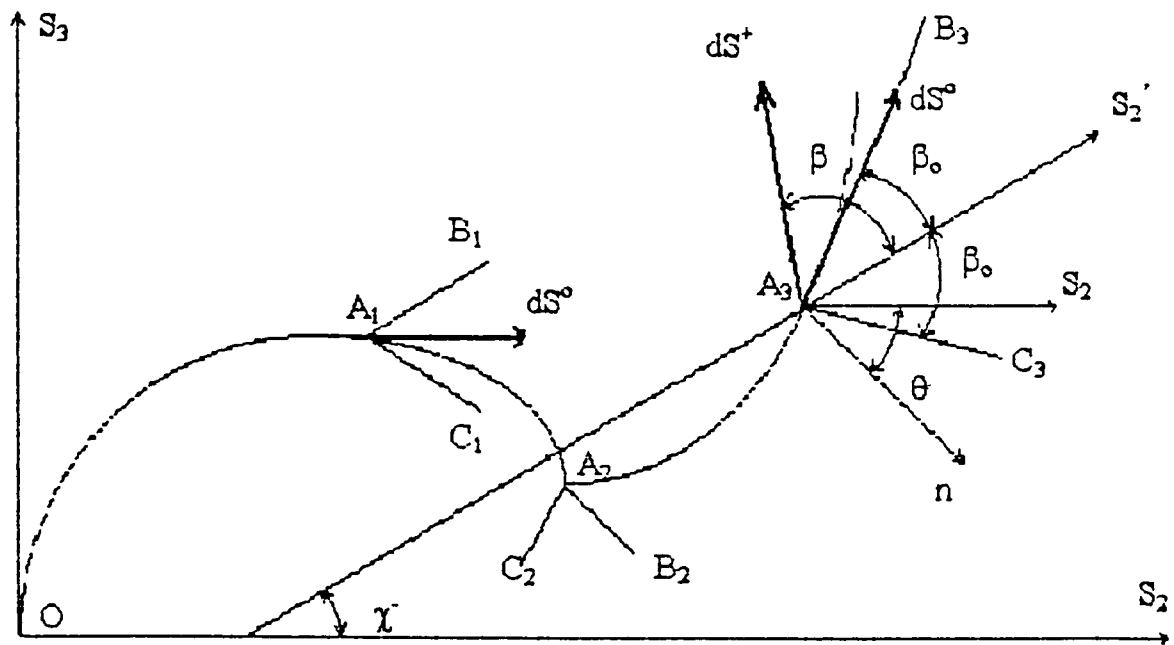


Fig 1

$$\begin{aligned} dS'_2 &= G_p(\alpha) d\vartheta'_2, & dS'_3 &= G_q(\alpha) d\vartheta'_3, \\ 1/G_p &= 1/G_q + L_2/\Pi, & 1/G_q &= 1/2G + L_1/\Pi. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Here S_1 is the bisector of the angle $2\beta_0$ of complete overloading (fig.1), Π is the plasticity function [3]; L_1, L_2 depend on function of stretching $F(\sigma)$, characterizing sensitivity of the material to deformational anisotropy [6,7]. In projections on axes of coordinates S_2, S_3 relations (1.1) take the form:

$$\begin{aligned} dS_2 &= A d\vartheta_2 + B d\vartheta_3, & dS_3 &= B d\vartheta_2 + C d\vartheta_3, \\ A &= G_p \cos^2 \chi + G_q \sin^2 \chi, & B &= 0.5(G_p - G_q) \sin 2\chi, & C &= G_p \cos^2 \chi + G_q \sin^2 \chi, \end{aligned} \quad (1.2)$$

where functionals of loading process α and χ , are determined by boundaries of a set of directions of sliding.

Let u, v are displacements of the tube axis. Let's form equations of equilibrium in an infinitely small vicinity of the bifurcation point [8]

$$\begin{aligned} dN &= \int_F d\sigma_z dF = dP, & dL_z &= \int_F d\tau_{\varphi\varphi} dF = dM, & dL_x &= \int_F d\sigma_z y dF, & dL_y &= - \int_F d\sigma_z x dF, \\ L_x + M \frac{du}{dz} - P v &= 0, & L_y + M \frac{dv}{dz} + P u &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

According to a hypothesis of plane sections, increments of deformations in a infinitely small vicinity of the bifurcation point ($d\epsilon_z^*$, $d\gamma_{z\varphi}^*$ correspond to the vector dS^0 along the trajectory $OA_1A_2A_3$) can be presented as follows:

$$d\epsilon_z = d\epsilon_z^0 + \delta\epsilon_z, \quad d\gamma_{z\varphi} = d\gamma_{z\varphi}^0 + \delta\gamma_{z\varphi}, \quad d\epsilon_z^0 = a \, d\gamma_{z\varphi}^0, \quad (1.4)$$

where $a = 0,5 \sqrt{3} Q/J(1+\nu)$, $\vartheta = \chi - \theta$,

$$Q = G_p \sin\chi \cos\vartheta - G_q \cos\chi \sin\vartheta, \quad J = G_p \cos\chi \cos\vartheta - G_q \sin\chi \sin\vartheta, \quad (1.5)$$

ϑ is the angle between the normal (n) to the trajectory of loading $OA_1A_2A_3$ and axis S_2 .

As at bifurcation of loading process the resultant of overloading increment dS on all cross section of the tube is directed along the given trajectory of external loading, since except equations of equilibrium (1.3), it is necessary that

$$\int_F dS_n dF = \int_F (J d\vartheta_2 + Q d\vartheta_3) dF = 0. \quad (1.6)$$

The system of Eqs (1.2), (1.3), (1.5), (1.6) represented the is complete for the problem of determination of a bifurcation point of deforming process of the first, as the well as second order.

2. Bifurcation the first order deformation process

The first order bifurcation occurs on ways of complete overloading, i.e. increment of loading dS for all points of cross-section lies inside of a cone of complete overloading [1]. Hence it may occur at monotonous and quasimonotonous loadings. Then functionals of the loading process do not depend on direction of load increment dS and accept constant values for a fixed point of the loading trajectory. Passing in (1.2) to components of stresses and deformations one obtain $d\sigma_z^*$, $d\tau_{z\varphi}^*$. (Here and hereinafter symbol "-" denotes quantities corresponding to overload vector $dS = dS^*$, which is directed inside of the cone of complete overloading, and "+" - to vector $dS = dS^+$, which lies outside of this cone.)

Bending moments at bifurcation of the first order with account (1.5) are obtained by integration:

$$L_x = DhR^3 \delta p, \quad L_y = DhR^3 \delta q, \quad D = \pi(1+\nu) A^*, \quad \delta p = d^2 u / dz^2, \quad \delta q = d^2 v / dz^2. \quad (2.1)$$

Thus the system of Eqs (1.3) under known boundary conditions decides a problem of bifurcation of deformation process of the first order. In particular, at simple support of the tube ends ($\mathbf{U}=\mathbf{V}=\mathbf{0}$ at $\mathbf{z}=\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$) we obtain similarly to [8] parameter of critical flexibility λ :

$$\lambda = D/(\tau_{mp}^2 + 2D\sigma_z)^{0.5}. \quad (2.2)$$

The influence of loading history on λ is determined by the factor D , which depends from preceding loading path.

3 . Bifurcation of the second order deformation process

Let's consider now the case, when the overload vector $\mathbf{dS}^0$ externally touches to the cone of complete overload (point $\mathbf{A}_3$ on fig. 1). To satisfy condition (1.6) it is necessary, that the vectors of overload $\mathbf{dS}$ at bifurcation of deformation process on some part $\mathbf{F}^*$ of cross section were outside of the angle of complete overload 2β , or on the whole cross section from outside and from inside aimed to its boundary. Thus inside of angle 2β , connection between increments dS_i^- and $d\Theta_i$ does not depend on the direction $\mathbf{dS}$ and is given by formulas (1.2), and increments $d\sigma_z^-$ and $d\tau_{mp}^-$ are given by (2.1). To find $d\sigma_z^+$ and $d\tau_{mp}^+$ one has replace index "-" by "+" and take into account, that functionals α^+ and χ^+ in this case depend not only from loading history up to bifurcation point, but also from the direction $\mathbf{dS}^+$ (fig.1). For small values $\Delta\beta = \beta - \beta_0$, according to [8] we get

$$d\sigma_z^+ = d\sigma_z^- + K_\sigma \Delta\beta, \quad d\tau_{mp}^+ = d\tau_{mp}^- + K_\tau (e - x^*) \Delta\beta, \quad (3.1)$$

where K_σ и K_τ - known factors.

Increment $\Delta\beta$ along coordinate x^* in connection with its smallness may be approximated by the linear function $\Delta\beta = (e - x^*) \Delta\beta_{max} / (e - R)$. The largest value $\Delta\beta_{max}$ is reached in a extreme fibre of the tube at $x^* = R$. In view of the last relations, after integration, we receive

$$L_x = D_1 h R^3 \delta p, \quad L_y = D_1 h R^3 \delta q, \quad D_1 = D + f^2 \Delta\beta_{max}. \quad (3.2)$$

Relations (3.3) and (2.2) coincide with accuracy to factors D and D_1 . Hence, the critical value of flexibility λ is determined by the formula (2.2), in which the quantity D should be replaced by D_1 . Obviously, that the minimum value $\min D_1 = D$ reaches at $\Delta\beta_{max} \rightarrow 0$. Then the overloading vectors $\mathbf{dS}$ in the whole tube cross section are tangent in a bifurcation point of undisturbed loading trajectory. Such form of branching of elastoplastic deformation is named as the second order bifurcation [2].

Here branching of not first, but second derivatives of internal parameters occurs (displacements and stresses). Specified bifurcation 1 takes place at essentially non-monotonous loading. It is important, that the critical parameters, corresponding to the first and second order bifurcation, are determined by the same formulas. Hence determination of the second order bifurcation point in the formal manner is reduced to a more simple problem of search of the Shanley bifurcation point.

4. Influence of loading history

Dependence λ from $\tau = \tau_{\text{max}}/\tau_s$, constructed for three double-link trajectories of loading OAB of thin-walled tube from steel EI-415 [9] is shown in fig. 2 by solid lines. The length of the first link $OA = 1,05\sigma_s$, the break angle φ_1 equals $5\pi/12$, $\pi/2$ and $7\pi/12$ for curves 1, 2 and 3 respectively. For construction in the point C (its location is simply defined by stress τ_{max}) of second link of trajectory values α' и χ' are determined, and rigidity D and parameter of critical flexibility λ are calculated by formulas (2.1) and (2.2). The result of calculations by the theory of small elastoplastic deformations for proportional ways of loading OC, emerging from the origin of coordinates under various angles, are shown in fig. 2 by dashed lines. For their construction directions φ_2 of ray OC were specified and was determined the critical value λ corresponding to proportional loading.

It follows from fig. 2, that the dependence λ from τ for complex ways of loading considered here has basically two characteristic ranges. The first interval $(a_1 b_1)$ corresponds to such values of flexibility, for which stable deformation on the second link of the trajectory OAB can be achieved at imposing up to additional temporary connections, hindering bifurcations of the process up to a moment of the trajectory

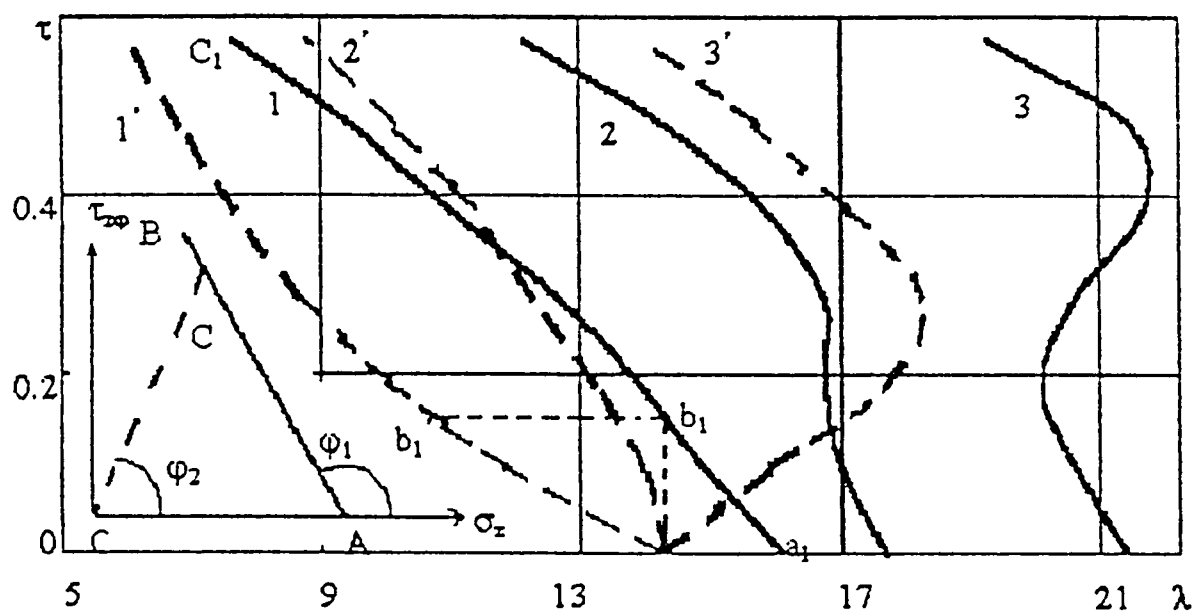


Fig. 2

break (compulsory hardening). On the second interval ($b_1 c_1$) the hardening due to complex overloading is reached without any special measures at movement along the first link of the trajectory (natural hardening).

The divergence on critical flexibility, received at simple and complex loading, in a vicinity of a break point of the trajectory equals from 15 up to 50% in relation to simple loading.

5. Conclusions

On example of compressed-twisted thin-walled tube laws of bifurcation of the second order deformation process are studied and it is shown, that corresponding critical load coincides with the Shanley critical load. It can be shown, that this conclusion remains in force for any bodies at uniform prebuckling stress state. This holds, probably also in general case at non-uniform stress state.

6. References

1. Черняков Ю.А., Швайко М.Ю., *Доповіді Академії Наук Української РСР*, А1 (1981), 53-57.
2. Швайко Н.Ю., *Доклады АН Украинской ССР*, А8 (1979), 651-654.
3. Швайко Н.Ю., *Прикладная механика*, 12, N 11 (1976), 12-24.
4. Швайко Н.Ю., *Прикладная математика и механика*, 41, N 5 (1977), 935-942.
5. Швайко Н.Ю., *Прикладная механика*, 15, N 2 (1979), 26-34.
6. Швайко Н.Ю., в *Сложная деформация твердого тела* (Фрунзе, Илим, 1969), 3-34.
7. Швайко Н.Ю., *Гидроаэромеханика и теория упругости*, 14 (1972), 109-120.
8. Вольмир А.С., *Устойчивость деформируемых систем*, (Наука, Москва, 1967), 984.
9. Жуков А.М., *Известия АН СССР, ОТН*, 8 (1955), 81-92.

WPLYW PRZEPON NA WARIACJĘ SIŁY KRYTYCZNEJ WYBOCZENIA SKRĘTNEGO PRĘTA O PRZĘKROJU BISYMETRYCZNYM

C. SZYMCZAK

Katedra Mechaniki Budowli Politechniki Gdańskiej

G. Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk, Poland

Praca dotyczy wpływu zmiany sztywności bimomentowej i lokalizacji przepon poprzecznych na wariację siły krytycznej wybooczenia skrętnego ściskanego osiowo pręta cienkościennego o przekroju bisymetrycznym. W zakresie klasycznej teorii prętów cienkościennych o przekroju nieodkształcalnym wyznaczono wariację siły krytycznej wybooczenia skrętnego przy zmianach sztywności bimomentowej oraz lokalizacji przepon. Wykorzystano przy tym metody rachunku wariacyjnego. Wyznaczona linia wpływowa zmian siły krytycznej od zmiany lokalizacji przepony o jednostkowej sztywności bimomentowej pozwala na jej racjonalne usytuowanie. W podanych przykładach numerycznych związanych ze swobodnie podpartym prętem pokazano wykorzystanie przedstawionej analizy wrażliwości oraz zbadano dokładność otrzymanej za jej pomocą aproksymacji zmian siły krytycznej.

1. Wstęp

Jak wiadomo z klasycznej teorii prętów cienkościennych (1) wybooczenie skrętno osiowo ściskanego pręta cienkościennego o przekroju bisymetrycznym jest niezależne od innych giętnych postaci wybooczenia. Siła krytyczna wybooczenia skrętnego, w przeciwieństwie od siły związanej z wybooczeniem giętym, jest zależna nie tylko od wymiarów geometrycznych pręta i cech mechanicznych jego materiału ale także od lokalizacji i wymiarów przepon poprzecznych.

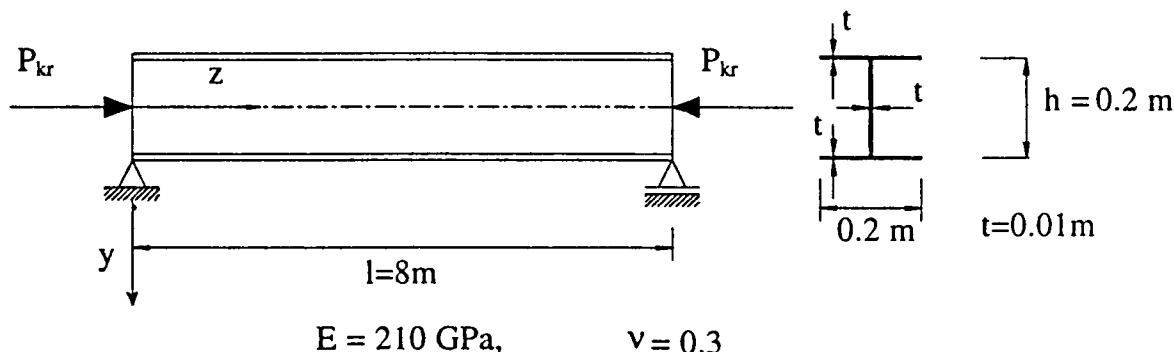
W niniejszej pracy wyznaczono wariację tej siły wskutek zmiany usytuowania przepony o jednostkowej sztywności bimomentowej oraz dla zmian tej sztywności przy znanym położeniu przepony. Wykorzystano do tego celu metody rachunku wariacyjnego (2). Poniższe rozważania są ważne w liniowo-sprężystej fazie pracy materiału pręta.

2. Wariacja siły krytycznej przy zmianie sztywności lub lokalizacji przepony poprzecznej

Rozpatrywany jest pręt osiowo ściskany pręt cienkościenny o przekroju bisymetrycznym o długości l (Rys.2.1), w którym, w ciągły sposób, rozmieszczone są przepony poprzeczne o sztywności bimomentowej k_B . Suma energii potencjalnej odkształcenia sprężystego zgromadzonej w pręcie i energii potencjalnej sił zewnętrznych, przy założeniu małych odkształceń, ma postać

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l (EI_\omega \theta''^2 + GI_d \theta'^2 + k_B \theta'^2) dz - \frac{1}{2} P_{kr} \int_0^l r_0^2 \theta'^2 dz \quad (1)$$

gdzie EI_ω oznacza sztywność skręcania skrępowanego pręta, GI_d - sztywność czystego skręcania, θ - kąt skręcenia pręta, r_0 - biegunowy promień bezwładności przekroju poprzecznego, P_{kr} - siłę krytyczną wyboczenia skrętnego a przez (...) określono pochodną (...) względem współrzędnej z .



Rys. 2.1. Ściskany osiowo pręt cienkościenny o przekroju bisymetrycznym
Fig.2.1. Axially compressed thin-walled column with bisymmetric cross-section

Wariacja energii potencjalnej względem zmian sztywności bimomentowej przepon δk_B , po pewnych przekształceniach, pozwala na wyznaczenie poszukiwanej wariacji siły krytycznej δP_{kr}

$$\delta P_{kr} = \int_0^l F_B(z) \delta k_B dz \quad (2)$$

gdzie funkcja podcałkowa, która ma postać

$$F_B(z) = \theta'^2 / \int_0^l r_0^2 \theta'^2 dz \quad (3)$$

jest linią wpływową zmian siły krytycznej od wstawienia przepony o jednostkowej sztywności bimomentowej w pewnym przekroju $z = z_i$. Można to wykazać przez podstawienie do wzoru (2) w miejsce wariacji

$$\delta k_B = \delta(z_i - z) \quad (4)$$

gdzie $\delta(z_i - z)$ oznacza deltę Dirace'a.

Wykorzystując ten wynik można teraz określić wariację siły krytycznej przy przesunięciu przepony o sztywności K_B , usytuowanej pierwotnie w przekroju $z = z_i$, o δz_i . Ponieważ przepona ta redukuje bimoment w przekrojach przywęzłowych z lewej i prawej strony to przyrost wartości bimomentu ΔB wynosi

$$\Delta B = B_p - B_l = -K_B \theta'(z_i) \quad (5)$$

gdzie B_l i B_p są bimomentami z lewej i prawej strony przekroju $z = z_i$. Jednocześnie przybliżona wartość zmiany pochodnej kąta skręcenia pręta wskutek przemieszczenia przepony o δz_i wynosi

$$\theta' = \theta'' \delta z_i \quad (6)$$

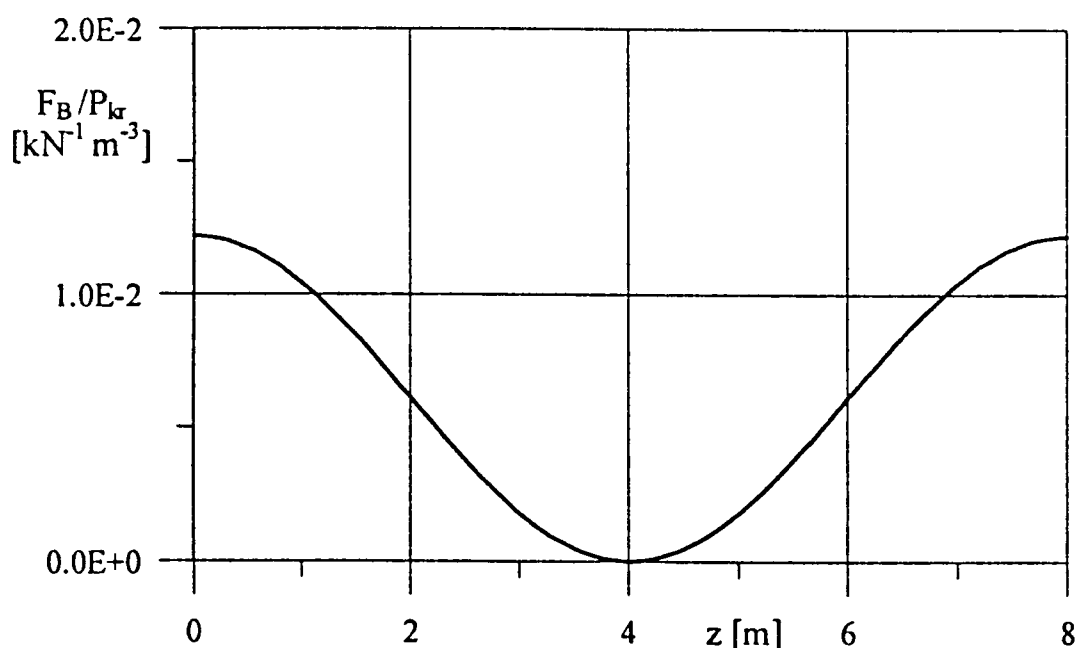
Wykorzystując zależności (5) i (6) we wzorach (2) i (3) otrzymujemy poszukiwaną wariację siły krytycznej

$$\delta P_{kr} = -K_B \theta' \theta'' \delta z_i / \int_0^1 r_0^2 \theta'^2 dz \quad (7)$$

Uzyskany w ten sposób wynik można wyprowadzić także w inny sposób stosując metody rachunku wariacyjnego o końcach ruchomych (2,3).

3. Przykłady numeryczne

Rozpatrzmy osiowo ściskany swobodnie podparty pręt o przekroju dwuteowym pokazany na Rys.2.1. Siła krytyczna wyboczenia giętnego pręta bez przepon wynosi $P_{kr}=2.047$ MN. Na Rys.3.1 przedstawiono linię wpływową względnej wariacji tej siły krytycznej od wzmocnienia pręta przeponą o jednostkowej sztywności bimomentowej (2). Odniesiono je do podanej powyżej siły krytycznej pręta bez przepon. Maksymalne rzędne tej linii występujące na podporach pręta wskazują miejsca największej efektywności przepon.



Rys.3.1. Zależność względnej wariacji siły krytycznej od położenia przepony o jednostkowej sztywności bimomentowej

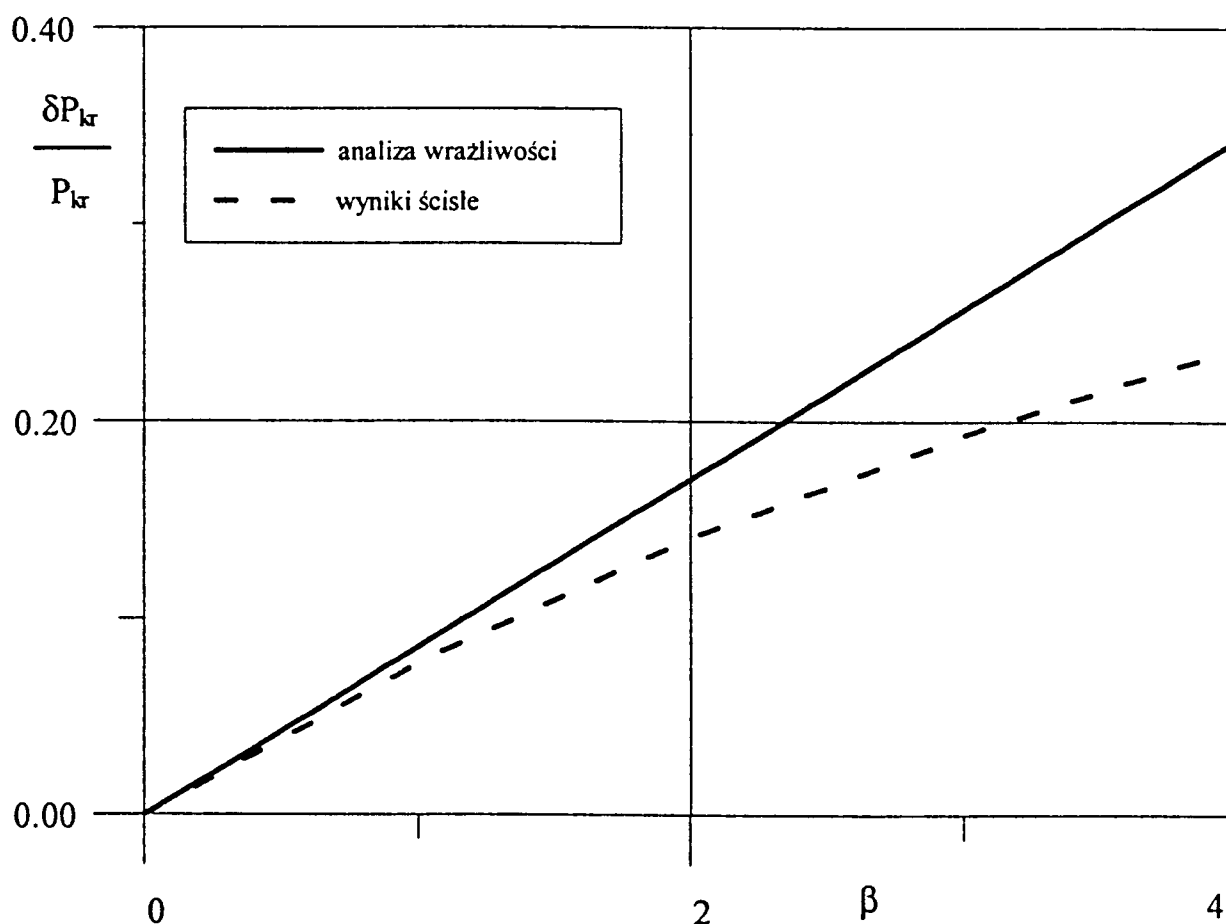
Fig.3.1. Relative critical buckling load versus location of stiffener with unit warping stiffness

Następnie zbadano zmiany siły krytycznej powstałe po wstawieniu dwóch przepon w przekrojach podporowych pręta. Sztywność bimomentową przepony uzależniono od bezwymiarowego współczynnika β

$$\beta = K_B I / EI_\omega \quad (8)$$

Na Rys.3.2 przedstawiono wyniki analizy wrażliwości siły krytycznej względem zmian współczynnika β . Wartości zmian tej siły odniesiono do siły krytycznej pręta

bez przepon. Ponadto w celu określenia dokładności otrzymanej w ten sposób aproksymacji liniowej zmian siły krytycznej obliczono dokładne wartości tych zmian i podano na tym samym rysunku. Rys.3.3 przedstawia względne wariacje siły krytycznej przy przemieszczeniu obu przepon podporowych o δz w kierunku środka przęsła dla różnych wartości współczynnika sztywności bimomentowej β . Odniesiono je do sił krytycznych pręta z przeponami umieszczonymi w przekrojach podporowych.



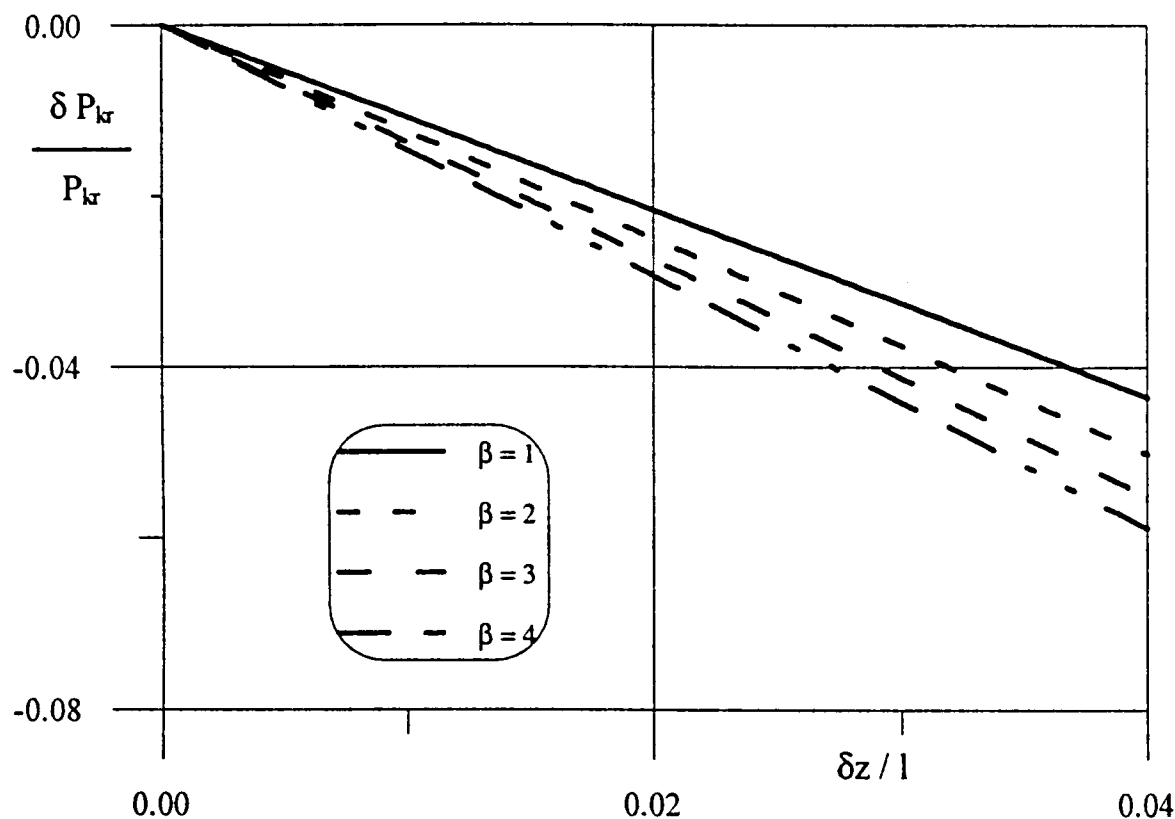
Rys. 3.2. Zależność względnej wariacji siły krytycznej od współczynnika sztywności bimomentowej przepony

Fig. 3.2. Relative first variation of critical load versus coefficient of stiffener warping stiffness

4. Wnioski końcowe

Wyprowadzone w pracy wariacje siły krytycznej wyboczenia skrętnego pręta cienkościennego o przekroju bisymetrycznym względem zmiany sztywności oraz zmiany położenia przepon poprzecznych pozwalają na wyznaczenie zmian siły krytycznej bez konieczności powtarzania całej analizy stateczności dla zmienionych parametrów układu. Podana analiza wrażliwości siły krytycznej oparta jest na teorii prętów cienkościennych o przekrojach nieodkształcalnych. Wyniki przykładów

numerycznych wskazują na dobrą aproksymację tych zmian w znacznym zakresie zmian sztywności bimomentowej i położenia przepon.



Rys.3.3. Zależność względnej wariacji siły krytycznej od przesunięcia przepon do środka pręta
Fig.3.3. Relative variation of critical load versus change of stiffener location towards middle of column

Podziękowanie

Praca powstała dzięki poparciu finansowemu KBN w ramach grantu nr 7 TO7E 03512.

Literatura

1. Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of elastic stability*, Mc Graw-Hill, New York (1961).
2. Gelfand I.M., Fomin S.W., *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa (1970).
3. Szymczak C., *Wpływ przesunięcia podpór na siłę krytyczną wyboczenia skrętnego pręta cienkościennego o przekroju bisymetrycznym*, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, 520, Budownictwo Lądowe, 50 (1995), 261-268.

Summary

EFFECT OF TRANSVERSE STIFFENERS ON TORSIONAL BUCKLING LOAD OF THIN-WALLED COLUMNS WITH BISYMMETRIC CROSS-SECTION

Sensitivity analysis of the critical load of torsional buckling P_{kr} of thin-walled columns with bisymmetric open cross-section is presented. The stability problem is formulated according to the classical assumptions of the theory of thin-walled beams with non-deformable open cross-section (1). The first order variations of the critical load δP_{kr} due to a change of the stiffener warping stiffness K_B and a change of the stiffener location δz_i are derived. The considerations are based upon calculus of variations.

Numerical examples dealing with an axially loaded simply supported thin-walled I-column of length l (Fig.2.1) are given. The influence line of the critical load variation obtained (Fig.3.1) allows us to choose the best location of the transverse stiffener. The higher values of the influence line the great effect of the stiffener. It is obvious that in the case of the column under consideration the best places are the column ends. Moreover, it is possible to calculate an approximated value of change the critical load due to some variations of the stiffener cross-section or its location. Fig.3.2 shows the relative change of the critical load of torsional buckling due to the variation of the warping stiffness of the stiffener located at the end cross-section of the column. The warping stiffness of the stiffener is determined by means of a nondimensional coefficient β . The values of the critical load changes are referred to the critical load of the column without the stiffeners. The results of the sensitivity analysis and exact calculation of the critical load changes are presented. Comparison of these results enables us to draw a conclusion that the approximation of the change obtained with aid of the critical load variation is reasonable good. In Fig.3.3 the variations of the critical load due to change of the stiffener location are shown for some different values coefficient of the warping stiffness β .

The sensitivity analysis of the critical load of torsional buckling elaborated may be useful in optimal design, identification and probabilistic analysis of thin-walled structures.

STABILNOŚĆ UKŁADU NIELINIOWEGO POD STOCHASTYCZNYM OBCIĄŻENIEM NIEKONSERWATYWNYM

P. ŚNIADY, W. GLABISZ

Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

Obciążenia niekonserwatywne są często przyjmowanym modelem oddziaływań w wielu zagadnieniach współczesnej inżynierii. Wpływ tego typu obciążeń jest szczególnie istotny w zagadnieniach stateczności i jest mało zbadany dla obciążeń niekonserwatywnych o parametrach opisywanych procesami stochastycznymi. W pracy podano algorytm badania stabilności momentów probabilistycznych opisujących zachowanie układu o jednym stopniu swobody pod dynamicznym, stochastycznym obciążeniem niekonserwatywnym.

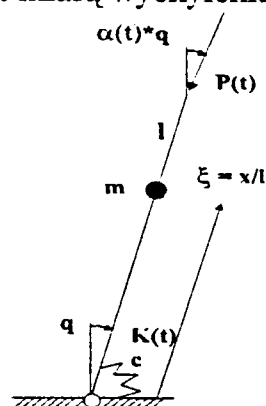
1. Wprowadzenie

Najczęściej spotykanym modelem sił czynnych w analizie konstrukcji są zachowawcze siły niezależne od stanów odpowiedzi konstrukcji. Taki model sił nie jest odpowiedni do opisu na przykład oddziaływania ośrodków, gdzie wielkość tego oddziaływania może zmieniać się wraz ze zmianą konfiguracji układu obciążanego. Tego typu oddziaływania, dalej zwane niekonserwatywnymi, pojawiają się między innymi w wyniku oddziaływania na konstrukcję na przykład wiatru, ośrodków sypkich, bądź akcji opływającego konstrukcję płynu. Siły niekonserwatywne występują także w wielu zagadnieniach robotyki, aerodynamiki, a także w problemach kontroli i sterowania układów. Znaczenie obciążeń niekonserwatywnych, cyrkulacyjnych jest podstawowe w zagadnieniach stateczności i staje się szczególnie istotne wtedy, kiedy w układach poddanych ich działaniu powstają duże przemieszczenia.

Podstawy analizy, głównie liniowych, deterministycznych układów z siłami niekonserwatywnymi podał Zigler (1), Bolotin (2), Leipholz (3, 4), Gajewski i Życzkowski (5) i Życzkowski (6). Obszerny, krytyczny przegląd literatury głównie z zakresu analizy stateczności układów z siłami niekonserwatywnymi znaleźć można w pracy Bogacza i Janiszewskiego (7). Niwielu autorów analizowało zachowanie się układów pod dynamicznie zmiennym obciążeniem niekonserwatywnym. Przykładami prac z tego zakresu są artykuły Dźygałło i Solarza (8), a ostatnio Glabisza (9). Zaledwie kilku autorów - i to w ograniczonym zakresie - analizowało zadania ze statycznymi siłami niekonserwatywnymi działającymi na układy o stochastycznie zmiennych parametrach (np. Ramu, Ganesan i Sankar (10)). Celem pracy jest analiza stabilności probabilistycznych momentów nieliniowego układu o jednym stopniu swobody poddanego działaniu niekonserwatywnego obciążenia dynamicznego o losowo zmiennym parametrze śledzenia.

2. Sformułowanie problemu

Rozpatrzmy układ o jednym stopniu swobody (Rys.2.1.), w którym nieodkształcalny i nieważki pręt o długości l z masą skupioną m na górnym końcu, jest na dolnym końcu sprężystie zamocowany. Sztywność $K(t)$ sprężyny przyjęto w postaci $K(t) = k_0 + k(P)$, gdzie k_0 jest stałą, nie zależną od czasu składową sztywności, a $k(P)$ jest składową sztywności, która może być dowolną, periodyczną funkcją działającego obciążenia P . Pręt obciążony jest skupioną, niekonserwatywną statyczną bądź dynamiczną, periodycznie zmienną siłą $P(t)$, której możliwe odchylenia od kierunku pionowego opisane jest parametrem śledzenia $\alpha(t)$. Zakłada się, że parametr śledzenia jest również funkcją zmieniającą się w czasie. Jako współrzędną uogólnioną q przyjęto kąt, który jest miarą wychylenia pręta z położenia pionowego.



Rys.2.1. Schemat analizowanego zadania

Fig.2.1. Diagram of the analyzed model

Rozpatrując warunek równowagi dynamicznej, przy założeniu że wychylenia masy m są małe, otrzymujemy równanie ruchu w postaci przedstawionej przez Hilla

$$\ddot{q}(t) + \omega_0^2 [1 - F(t)] q(t) = 0 \quad (1)$$

gdzie

$$\omega_0^2 = k_0 / (ml^2); \quad F(t) = [1 - \alpha(t)] \frac{P(t)l}{k_0} - \frac{k(P)}{k_0} \quad (2)$$

Jeżeli założymy, że w układzie występuje tłumienie proporcjonalne do prędkości wychylenia i charakteryzowane współczynnikiem tłumienia c , to równanie (1) po dokonaniu zamiany zmiennych typu $q(t) = e^{-ht} \phi(t)$ przyjmie postać

$$\ddot{\phi}(t) + \omega^2 [1 - F_1(t)] \phi(t) = 0 \quad (3)$$

gdzie $\omega^2 = \omega_0^2 - h^2$ a $F_1(t) = (\omega_0 / \omega)^2 F(t)$, a $h = c / (2ml^2)$.

Jeżeli założymy, że funkcja śledzenia $\alpha(t)$ zawiera przypadkowe zakłócenia, a więc jest procesem stochastycznym to przedstawić ją można jako

$$\alpha(t) = \alpha_0 + D\xi(t) \quad (4)$$

gdzie α_0 jest wielkością stałą, $D>0$ określa odchylenie standardowe zakłócenia losowego, a $\xi(t)$ jest gaussowskim procesem stacjonarnym typu „biały szum” o własnościach

$$E[\xi(t)] = 0, E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = \delta(t_1 - t_2) \quad (5)$$

gdzie $E[\dots]$ oznacza wartość oczekiwaną, a $\delta(\dots)$ jest deltą Diraca.

Przy takim modelu funkcji śledzenia powstaje problem stabilności układu na zakłócenia stochastyczne $\xi(t)$. Dalej badana będzie momentowa stabilność układu (np. średnia, średniokwadratowa lub z uwagi na momenty wyższego rzędu).

Uwzględniając relację (4) w równaniu (3) otrzymujemy

$$\ddot{\phi}(t) + \omega^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left[(1 - \alpha_0) \frac{P(t)}{k_0 l} - \frac{k(P)}{k_0} \right] \right\} \phi(t) + \omega_0^2 D \frac{P(t)}{k_0 l} \xi(t) \phi(t) = 0 \quad (6)$$

a wprowadzając nowe zmienne $\phi(t) = z_1(t)$ i $\dot{\phi}(t) = z_2(t)$ otrzymuje się układ równań stochastycznych typu Ito

$$\begin{aligned} dz_1 &= z_2 dt + 0 \\ dz_2 &= -\omega^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left[(1 - \alpha_0) \frac{P(t)}{k_0 l} - \frac{k(P)}{k_0} \right] \right\} z_1 dt + \frac{\omega_0^2 D}{k_0 l} P(t) z_1 dW \end{aligned} \quad (7)$$

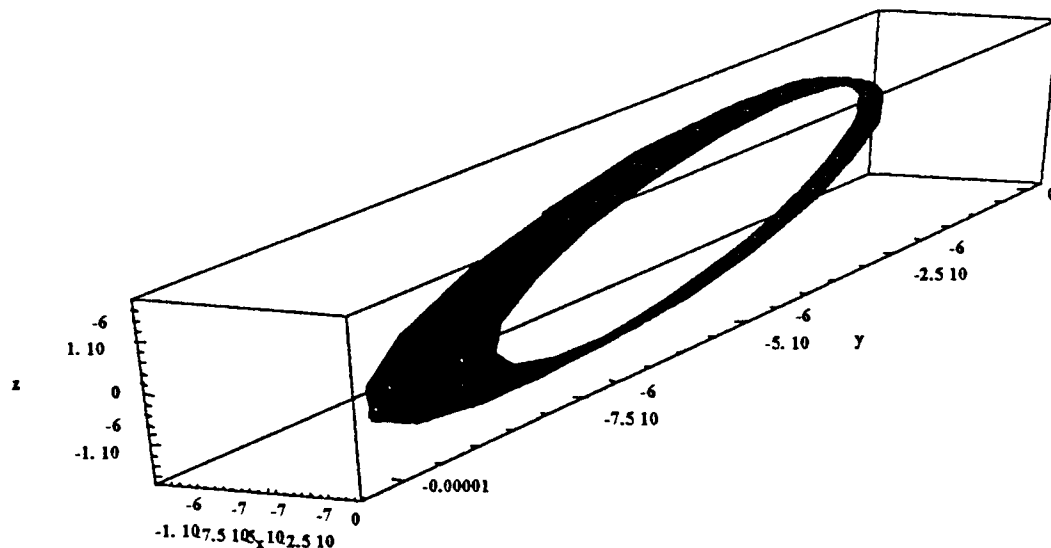
gdzie dW jest procesem Wienera (Sobczyk (11)). Oznaczając momenty $m_{ij}(t) = E[z_1^i(t)z_2^j(t)]$, ($i=0,1,2$) zmiennych $z_1(t) = \phi(t)$ i $z_2 = \dot{\phi}(t)$ i stosując znaną formułę różniczkowania dla wektora Markowa (z_1, z_2) określonego układem równań (7) (Sobczyk (11)) oraz wykonując operację wartości oczekiwanej otrzymuje się deterministyczny układ równań

$$\begin{aligned} \frac{dm_{ij}}{dt} &= im_{i-1,j+1} - \omega^2 j \left\{ 1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left[(1 - \alpha_0) \frac{P(t)}{k_0 l} - \frac{k(P)}{k_0} \right] \right\} m_{i+1,j-1} + \\ &+ \frac{1}{2} j(j-1) \omega_0^4 \frac{D^2}{k_0 l} P^2(t) m_{i+2,j-2} \end{aligned} \quad (8)$$

Z zależności (8) otrzymujemy separowane układy równań dla momentów; na przykład pierwszego rzędu ($i=1, j=0$; $i=0, j=1$), drugiego rzędu ($i=2, j=0$; $i=1, j=1$; $j=0, j=2$), trzeciego rzędu ($i=3, j=0$; $i=2, j=1$; $i=1, j=2$; $i=0, j=3$) czy też rzędu czwartego ($i=4, j=0$; $i=3, j=1$; $i=2, j=2$; $i=1, j=3$; $i=0, j=4$).

3. Przykład numeryczny

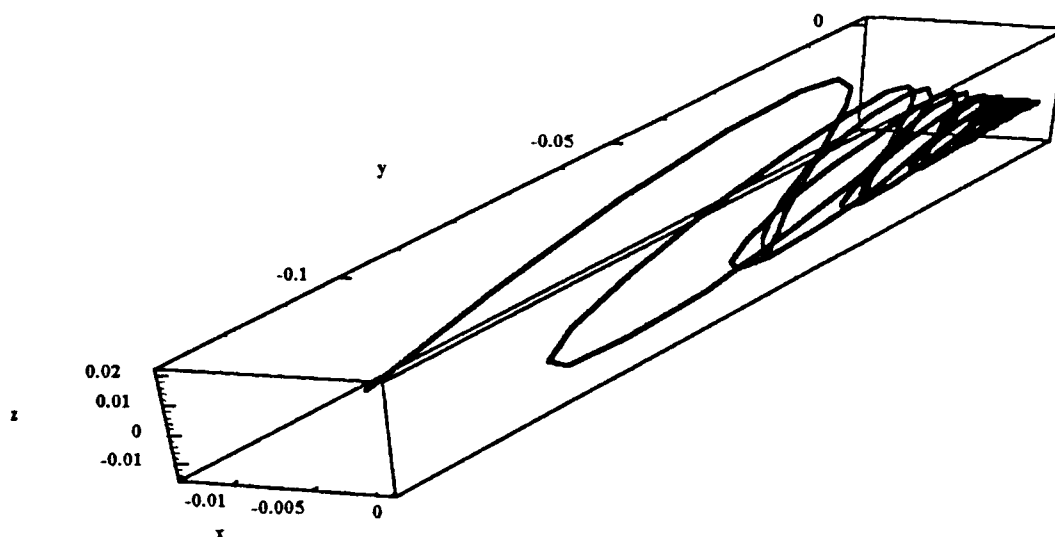
Przedstawione w punkcie poprzednim, w postaci układów równań różniczkowych zwyczajnych o okresowo zmiennych współczynnikach, relacje (8) na momenty badanego układu mogą stanowić podstawę analizy ich stabilności. Analizę tą prowadzić można wykorzystując teorię Floqueta dla prostych funkcji wymuszenia $P(t)$ i funkcji sztywności $k(P)$, bądź - co tutaj wykorzystano - na drodze systematycznego, numerycznego całkowania układów (8) dla interesujących nas zmian parametrów badanego układu. Tego typu analiza nie daje oczywiście odpowiedzi w sensie globalnej stabilności badanych momentów, ale może dać pogląd na ich zachowanie dla wybranych wielkości opisujących niekonserwatywną siłę $P(t)$, funkcję sztywności $k(P)$, wielkość odchylenia standardowego losowego zakłócenia parametru śledzenia, jak również przyjmowane w analizie wartości początkowe momentów.



Rys.3.1. Zmiany wariancji dla $P(t)=5\sin(\omega t)$ i $k(P)=0.49P(t)$

Fig.3.1. Variance variation for $P(t)=5\sin(\omega t)$ i $k(P)=0.49P(t)$

Dalej przedstawiono dla $\omega = \omega_0 = 3, \alpha_0 = 0.5, m_{10}(0) = 0.001, k_0 = 1 = 1, D=2$ oraz $P(t)=5\sin(\omega t)$ i $k(P)=0.49P(t)$ - Rys.3.1. i $P(t)=1.5\sin(\omega t)$ i $k(P)=0.1P(t)$ - Rys.3.2. jedynie wyniki zmian w czasie wariancji $x = \text{Var}(q, q) = m_{20} - m_{10}^2$, $y = \text{Var}(\dot{q}, \dot{q}) = m_{02} - m_{01}^2$ i $z = \text{Var}(q, \dot{q}) = m_{11} - m_{01}m_{10}$.



Rys.3.2. Zmiany wariancji dla $P(t)=1.5\sin(\omega t)$ i $k(P)=0.1P(t)$
 Fig.3.2. Variance variation for $P(t)=1.5\sin(\omega t)$ i $k(P)=0.1P(t)$

4. Podsumowanie

W pracy przedstawiono algorytm analizy stabilności probabilistycznych momentów dowolnego rzędu dla układu o jednym stopniu swobody pod działaniem dynamicznego obciążenia niekonserwatywnego o współczynniku śledzenia opisanym procesem stochastycznym. Wyprowadzone układy równań różniczkowych zwyczajnych o okresowo zmiennych współczynnikach pozwalają - na drodze numerycznego całkowania - badać wpływ parametrów układu na jego stabilność i tym samym umożliwiają określenie jego stanu krytycznego na bazie przyjętego kryterium.

Literatura

1. Ziegler H., *Die stabilitätskriterien der elastomechanik*, Ing. Archiv Vol. 20 (1952), 49-56.
2. Bolotin V. V., *Nonconservative Problems of the Thory of Elastic Stability*, Pergamon Press, Oxford (1963).
3. Leiphoz H. H. E., *Über die konvergenz des Galerkinschen verfahrens auf nichtkonservative stabilitätsprobleme des elastischen stabes*, Z. Angew. Math. Phys., Vol. 13 (1962), 359-372.
4. Leipholz H. H. E., *Stability Theory*, John Wiley and Sons, Stuttgart (1987).
5. Gajewski A., Życzkowski M., *Wpływ jednoczesnego niejednorodnego tarcia wewnętrznego i zewnętrznego na stateczność układów niekonserwatywnych*, Mech. Teor. Stos. Vol 10 (1972), 127-142.

6. Życzkowski M., *Stability of elastic structures. Part III*, ed. Leipholz H. H. E., Springer-Verlag, Wien-New York (1978).
7. Bogacz R., Janiszewski R., *Zagadnienia analizy i syntezy kolumn obciążonych siłami śledzącymi ze względu na stateczność*, Prace IPPT PAN, Warszawa. (1986).
8. Dzygadlo Z., Solarz L., *On nonautonomous vibrations of self-excited system with tangential force*, *Proc. Vibr. Problem* Vol. 11 (1970).
9. Glabisz W., *Stability of simple discrete systems under nonconservative loading with dynamic follower parameter*, *Comp. Struct.* Vol. 60 (1996), 653-663.
10. Ramu S. A., Ganesan R., Sankar T. S., *Stability analysis of stochastically parametered nonconservative columns*, *Int. J. Solid Structures* Vol. 29 (1992), 2973-2988.
11. Sobczyk K., *Stochastyczne równania różniczkowe*, WNT Warszawa (1996).

Summary

Stability of nonlinear system under stochastic nonconservative loading

Nonconservative forces are frequently applied model of interaction in contemporary engineering. The analysis of systems with this type of forces has been the subject of numerous papers. The majority of them deal with the problems of static, dynamics and stability of linear or nonlinear, continuous or discrete systems usually under static nonconservative loads. The influence of nonconservative loading is specially important in stability analysis and wasn't investigated when we describe this forces as a stochastic process.

In this paper an algorithm of stability analysis of stochastic, any rank moments for nonlinear one degree of freedom system was presented. The follower parameter of applied dynamic, nonconservative force is described as „white noise” stochastic process. Obtained differential equations system with periodic coefficients for stochastic moments creates the basis for analysis on the way of numerical integration. Some results for dynamic varying force and stiffness parameter as a simple function of applied loading were presented in the form of curves in three-dimensional second order moments space.

INFLUENCE OF LATERAL LOADING ON THE ULTIMATE CAPACITY OF SHIP HULL

M. TACZAŁA

**Ship and Ocean Technology Institute, Technical University of Szczecin
Al. Piastów 41, 71-065 Szczecin, Poland**

A problem of assessment of the ship longitudinal strength is presented. A method for evaluation of the ultimate bending moment is given. A short description of the algorithm and computer code for evaluation of the ultimate capacity are presented. An effect of the lateral pressure is than investigated using Perry-Robertson formula and results of the finite element computation. The results of calculation of the ultimate capacity of compressed beams are than used for evaluation of the ultimate bending moment of a ship hull.

Introduction

The conventional assessment of the longitudinal strength of ship hull girder subjected to bending moment due to ununiformity in distribution of cargo and complex shape of the hull (still water bending moment) as well as bending moment due to waves is to compare the maximum stress resulting from longitudinal bending to the permissible value. Thus the cross section modulus is regarded as a measure of strength of the ship hull. A new attitude to the estimation the strength has recently appeared based on the calculation of the ultimate bending moment of the ship hull - collapse load. Value of the ultimate (limit) capacity provides with the information on the real safety margin of the ship hull.

Typical ship structure is composed of plates and longitudinal stiffeners which form longitudinally stiffened panels supported by longitudinal girders and transverse frames. A method of determination of the ultimate capacity is generally used based on the ultimate capacity of the individual stiffened panels (1-5) or rather their behaviour under various types of loading with dominant axial compression. A number of factors which influence the load-carrying capacity of stiffened panels can be listed including type of support supplied by transverse frames (boundary conditions), initial deflections, residual stress, material properties. Local bending arising from the lateral pressure should also be considered investigating ultimate capacity of compressed panels.

1. Analysis of ultimate capacity of ship hull

A simple algorithm was employed for investigation of the ultimate capacity of ship hulls (5,6) based on simplifying assumptions

- transverse cross-sections of the ship hull remain plane and perpendicular to the neutral surface,
- collapse occurs for panels situated between transverse primary members,
- interaction between adjacent panels is not taken into account.

A ship hull is divided into separate elements: plates and stiffeners which compose panels. Elastic-plastic behaviour of each panel is found under tension and compression based on the simple well-known formulae for stiffened plating given by Gordo and Soares (7). It is assumed that stiffened panel can buckle in either

- plate induced buckling or
- flexural buckling of stiffeners

failure modes.

1.1 Plate failure mode

Behaviour of panels collapsing in the plate failure mode is given by the following equation

$$\Phi_{ac} = \Phi_e \frac{A_s + \Phi_w(\bar{\epsilon})bt}{A_s + bt} \quad (1)$$

Φ_e in the above equation is an edge function dependant on relative strain and Φ_w is an effective width of attached plating which is also calculated according to approximated formula (8).

1.2 Flexural buckling of stiffeners

Formula for the behaviour of stiffened panel buckling in stiffener failure mode is based on the well-known equation for Euler buckling stress including the Johnson-Ostenfeld correction for plasticity. Finally the equation takes the form

$$\Phi_{ab} = \Phi_{JO} \frac{A_s + \Phi_w(\bar{\epsilon})bt}{A_s + bt} \quad (2)$$

Typical curves for plate and flexural buckling modes obtained using Eqs. (1) and (2) are presented in Fig. 1.

1.3 Evaluation of the ultimate bending moment

Once the stress-strain curves (relationships) for all structural members (panels) of the cross-section of a ship have been established, evaluation of the bending moment for a given curvature can be performed solving non-linear equation

$$F = \sum_j \int_{A_j} \sigma_j(\epsilon_j, z_0) \cdot dA = 0 \quad (3)$$

using Newton-Raphson procedure to find actual position of neutral axis and after convergence has been achieved the bending moment is evaluated

$$M = \sum_j \int_{A_j} \sigma_j(\epsilon_j, z_0) \cdot (z - z_0) \cdot dA \quad (4)$$

A moment-curvature relationship obtained by the method is presented in Fig. 2.

Based on the above-specified relationships a computer code was produced for calculation of the ultimate bending moment of a ship hull. The code - RESULT - is a part of MARS - a French Bureau Veritas computer program for analysis of ships' cross-sections. Verification of the computer code was performed by comparison of results with other computer codes (6). A regular, full-scale experiment is hardly to imagine, however, there was a famous case of Energy Concentration, an oil tanker (VLCC), which broke its back while being discharged in Rotterdam in 1980 (3). Taking into considerations many uncertainties concerning actual state of the ship (corrosion) which had been done in service for ten years, level of residual stress, initial deflection etc. the value of the bending moment obtained using RESULT is satisfactory.

2. Influence of lateral loading on load-carrying capacity of pinned beam

Investigation of influence of lateral loading is a difficult task due to complexity of equations describing the problem. Hughes (9) using the concept of magnification factor defines the bending moment M_{max} acting in the beam as the bending moment due to lateral load, M_0 , plus that due to eccentricity, including initial deflection y_0 and deflection y_q caused by the lateral load. The maximum compressive stress is thus

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W} \quad (5)$$

where $M_{\max}$ is a bending moment due to lateral load and eccentricity of compressive force. Applying simplifying assumption that the beam will collapse when the maximum compressive stress reaches the yield point and introducing non-dimensional parameters

$$R = \frac{\sigma_{\text{ult}}}{\sigma_Y}; \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sigma_Y}{\sigma_E}}; \quad \eta = \frac{(y_0 + y_q)A}{W}; \quad \mu = \frac{M_0/W}{\sigma_Y} \quad (6)$$

we arrive at

$$R = \frac{1}{2} \left(1 - \mu + \frac{1 + \eta}{\lambda^2} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(1 - \mu + \frac{1 + \eta}{\lambda^2} \right)^2 - \frac{1 - \mu}{\lambda^2}} \quad (7)$$

Eq. (7) is valid for the case of the simply-supported beam which is also a model for evaluation of the ultimate capacity for stiffened plates buckled in the flexural failure mode.

While the above described approach provides simple and convenient formula its accuracy can be doubted since it is based on simplifying assumptions and may not reflect complexity of non-linear elastic-plastic behaviour of compressed stiffened panels with lateral pressure. This is why the ultimate capacity of stiffeners with attached plating was also investigated using the finite element method. The computer code for non-linear analysis of plates FENAPP was applied (10). Values of the ultimate capacities of a stiffener being a part of the bottom structure of the analysed ship subject to lateral pressure of 0.15 MPa were collected in Table 1.

Table 1. Values of ultimate capacities

	$\sigma_{\text{ult}}/\sigma_Y$	
	no lateral pressure	lateral pressure included
Perry-Robertson	0.74	0.67
FEM	0.76	0.74

Difference between the obtained values may be due to the assumption that the ultimate capacity is reached when the first yield takes place while there is still a reserve of strength of compressed beam.

3. Investigation of influence of lateral loading on ultimate capacity of ship hull

Calculation of the bending moment was performed for the oil tanker of length 234 m for hogging (bottom compressed and deck in tension) and sagging (reverse) conditions. Calculation was first performed for the case without lateral pressure - Fig. 2. Then the modified value of the ultimate bending capacity according to Hughes' formula - Eq. (7) was taken into account for outer and inner stiffeners. Finally, the value of the FEM computation was applied. The results are presented in Table 2.

Table 2. Values of ultimate bending moments in hogging and sagging conditions

	Values of ultimate bending moments	
	hogging	sagging
no lateral pressure	9034.	9297.
lateral pressure effect according to Hughes	8279.	9228.
lateral pressure effect according to FEM	8810.	9277.

It can be seen that assumption of decrease of the ultimate capacity of compressed beam causes significant reduction of the ultimate bending moment especially for hogging condition - by 8%. This attitude is more conservative than employing the result obtained by FEM. In the latter case reduction is about 2.5% which means that influence of the lateral pressure is not significant for estimation of the bending moment of ship hulls with stiffeners of similar properties as considered one. More systematic investigation, concerning both the ultimate capacity of beams and its influence on the ultimate capacity, should be however performed before producing final conclusion.

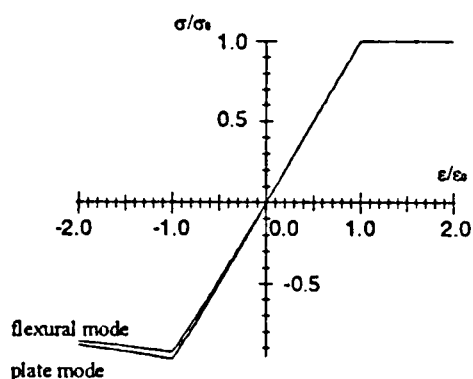


Fig. 1. Typical curves for plate and stiffener failure modes

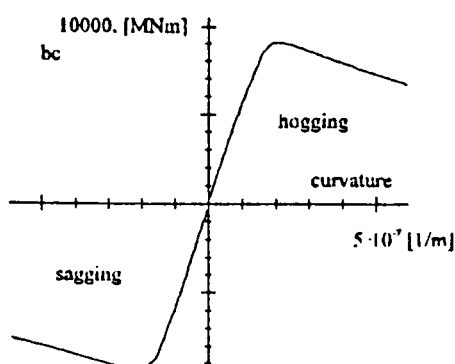


Fig. 2. A moment-curvature relationship

Literature

1. Caldwell J.B., *Ultimate Longitudinal Strength*, Transaction Royal Institution of Naval Architects (RINA) Vol. 107 (1965), 411-430.
2. Nishihara S., *Ultimate Longitudinal Strength of Mid-Ship Cross Section*, Naval Architecture and Ocean Engineering, Vol. 22 (1984), 200-213.
3. Rutherford S.E., Caldwell J.B., *Ultimate Longitudinal Strength of Ships: A Case Study*, Transactions SNAME, Vol. 98 (1990), 441-471.
4. Soares C.G., Gordo J.M., Cruz J.M., *Collapse of ship hulls under combined vertical and horizontal bending moments*, Proceedings of The Sixth International Symposium on Practical Design of Ships and Mobile Units PRADS'95, The Society of Naval Architects of Korea (1995), 2.808-2.819.
5. Béghin D., Baumans P., Jastrzębski T., Taczala M., *RESULT - a computer code for evaluation of the ultimate longitudinal strength of hull girder*, Proceedings of The Sixth International Symposium on Practical Design of Ships and Mobile Units PRADS'95, (1995), 2.854-2.868.
6. Béghin D., Jastrzębski T., Taczala M., *RESULT - Computer Code for Evaluation of Ultimate Strength of Ship Hull*, Report Bureau Veritas-Technical University of Szczecin BM/DB/01/95, (1995).
7. Gordo J.M., Soares C.G., *Approximate Load Shortening Curves for Stiffened Plates under Uniaxial Compression*, Proceedings of the Conference Integrity of Offshore Structures, Glasgow, (1993).
8. Faulkner D., Adamchak J.C., Snyder G.J., Vetter M.F., *Synthesis of Welded Grillages to Withstand Compression and Normal Loads*, Computers and Structures, Vol. 3 (1973).
9. Hughes O.F., *Ship Structural Design*, John Wiley & Sons, New York (1983).
10. Taczala M., *Non-linear analysis of plate and stiffened plate buckling by the finite element method (PhD dissertation)*, Technical University of Gdańsk, 1995 (in Polish).

STABILITY AND VIBRATION OF A CANTILEVER COLUMN LYING ON THE ELASTIC FOUNDATIONS LOADED BY A GENERALISED LOAD

L.TOMSKI, J.PRZYBYLSKI, I.PODGÓRSKA

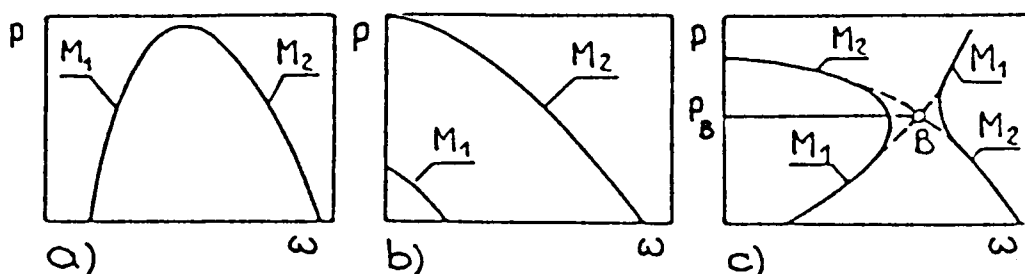
*Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Częstochowskiej
Dąbrowskiego 69, 42-200 Częstochowa*

In this work the stability and vibration of a cantilever column loaded by the transverse force and bending moment which depend on both the displacement and the slope angle at the free end of the column. Performed analysis concerns the influence of the physical and geometrical parameters as well as the foundation stiffness on the critical force for the system. It has been proved also that the system is of the divergence-pseudoflutter type.

1. Introduction

Elastic systems such as columns and frames can be classified into one of two types: the flutter systems (FT) - Fig. 1a, which loses its stability due to flutter [1], or the divergence type systems (DT) - Fig. 1b, of the divergence instability [2].

A different course of eigenvalues against the external load, as shown in Fig. 1c, for cantilever columns loaded by a certain type of the general loading, was obtained theoretically and supported by an experiment [3]. Those systems cannot be treated in the sense described in [2] as the flutter type or divergence type systems. Similar theoretical results with experimental verification concerning a planar frame loaded in this same way as the column are given in [4]. Experimental results of the natural frequency curves accordingly to the function from Fig. 1c were presented in [5,6], however there were not stated the boundary conditions resulting from the way of the applied load.



Rys. 1. Natural frequency curves for different types of column

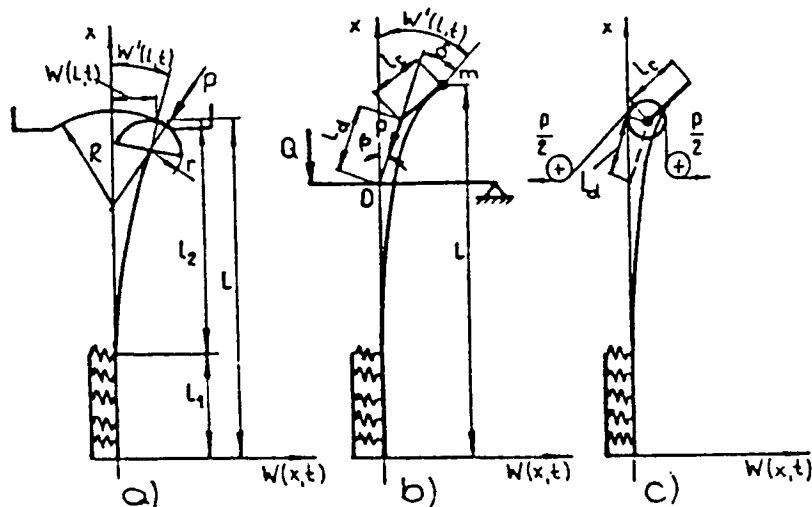
On the basis of results included in [3,4] the following features of the systems of the eigencurves as in Fig. 1c can be indicated

- for the external load $P \rightarrow P_c$, where P_c is the divergence critical load, the eigenvalues curve has the negative slope, whereas for $P \in <0, P_c)$ that slope can be either negative, zero or positive
- along the eigenvalue curve a change in eigenmodes appears, as it is for the system of the eigencurves sketched in Fig. 1c, where M1 and M2 describe the first and second mode, respectively. That change in the eigenmodes appears for flutter type systems also.

Because the columns of the natural frequency curves as in Fig. 1c, lose their stability due to divergence and from the other hand, change their mode shapes along eigencurves, are classified as the divergence-pseudoflutter systems (comp. [7,8]).

2. Statement of the problem

The main purpose of this work is to study the stability and natural vibration of a cantilever column loaded by a longitudinal force in such a way that the bending moment and the transverse force at its free end are dependent on both the transverse displacement and the slope angle at that end. This type of the load is one of the generalised load (comp. [4]). The column along the length l_1 is resting upon the Winkler elastic foundation of the stiffness coefficient K . The bending rigidity of the column is EJ and its mass per unit length is ρA . This case of loading can be realised in three constructional variants (Fig. 2).



Rys. 2. Schematy obciążenia kolumn

The boundary conditions are

$$W(0, t) = W'(0, t) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} W''(l, t) + \lambda [\rho W'(l, t) + \nu W(l, t)] &= 0 \\ W'''(l, t) + \lambda [\mu W'(l, t) + \gamma W(l, t)] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

where $\lambda = P[EJ]^{-1}$

The values of ρ , ν , μ and γ are stated in Table 1.

Table 1.

Column	ρ	ν	μ	γ
Fig. 1a	$\frac{rR}{R-r}$	$-\frac{r}{R-r}$	$\frac{R}{R-r}$	$-\frac{1}{R-r}$
Fig. 1b i c	$\frac{l_c(l_c + l_d)}{l_d}$	$-\frac{l_c}{l_d}$	$\frac{(l_c + l_d)}{l_d}$	$-\frac{1}{l_d}$

The Euler-Bernoulli differential equations are as follows

$$\begin{aligned} E_1 J_1 \frac{\partial^4 W_1(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W_1(x, t)}{\partial x^2} + K W_1(x, t) + \rho_1 A_1 \frac{\partial^2 W_1(x, t)}{\partial t^2} &= 0 \\ E_2 J_2 \frac{\partial^4 W_2(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W_2(x, t)}{\partial x^2} + \rho_2 A_2 \frac{\partial^2 W_2(x, t)}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

The column performs the small vibrations so

$$W(x, t) = y(x)e^{i\omega t} \quad (4)$$

In further considerations $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$.

The condition for the system to be conservative is

$$\nu + \mu - 1 = 0 \quad (5)$$

3. The critical force. Natural frequency curves

The divergence critical load parameter λ_c may be obtained from the condition of setting to zero the total energy of the system (comp. [3])

$$\lambda_c = \frac{\int_0^l [y''(x)]^2 dx + k^* \int_0^l y^2(x) dx}{\int_0^l y'^2(x) dx - [\rho y'(l) + \nu y(l)] y'(l) - [(1 - \mu) y'(l) - \gamma y(l)] y(l)} > 0 \quad (6)$$

The course of the natural frequency curve can be obtained after performing the variational operation of the functional

$$F(y) = \int_0^l \left(EJy^{IV}(x) + Py''(x) - \rho A \omega^2 y(x) \right) y(x) dx + K \int_0^l y^2(x) dx \quad (7)$$

what leads to

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{\int_0^l [y'(x)]^2 dx - \gamma y^2(l) + \rho [y'(l)]^2 + 2vy(l)y'(l)}{\int_0^l y^2(x) dx + \frac{m}{\rho A} y^2(l)} \quad (8)$$

Taking into account equation (6), relation (8) for $\lambda \rightarrow \lambda_c$ takes the form

$$\frac{d\Omega}{d\lambda_c} = - \frac{\int_0^l [y''(x)]^2 dx + k^* \int_0^l y^2(x) dx}{\lambda_c \left[\int_0^l y^2(x) dx + \frac{m}{\rho A} y^2(l) \right]} \quad (9)$$

From (7) after integration by parts, taking into consideration the boundary conditions (1,2) as well as equation (9), one derives

$$\Omega = \lambda \frac{d\Omega}{d\lambda} + \frac{\int_0^l [y''(x)]^2 dx + k^* \int_0^l y^2(x) dx}{\int_0^l y^2(x) dx + \frac{m}{\rho A} y^2(l)} \quad (10)$$

4. The critical force of the divergence instability

The transcendental equation for the critical load when omitting the influence of the elastic foundation is as follows

$$G(\sqrt{\lambda_c} l_c) = \left[\sqrt{\lambda_c} (-l_c - 1 + c) \cos l \sqrt{\lambda_c} + \right. \\ \left. (-\lambda_c l_c l + 1 + \lambda_c l_c c) \sin l \sqrt{\lambda_c} \right] (-l_c + c)^{-1} = 0 \quad (11)$$

where $c = l_c + l_b = \text{const}$ and $c \neq l_c$

The first derivative of the above implicit function is

$$\frac{\partial G}{\partial l_c} = - \frac{\sqrt{\lambda_c} l_c \cos(l\sqrt{\lambda_c}) + (\lambda_c c^2 - \lambda_c l c + 1) \sin(l\sqrt{\lambda_c})}{(c - l_c)^2} \quad (12)$$

There is no extremum for the function of the critical load because the numerator of (12) is independent from l_c .

In Fig. 3 an exemplary change in the critical force is plotted against l_c/c for different values of c .

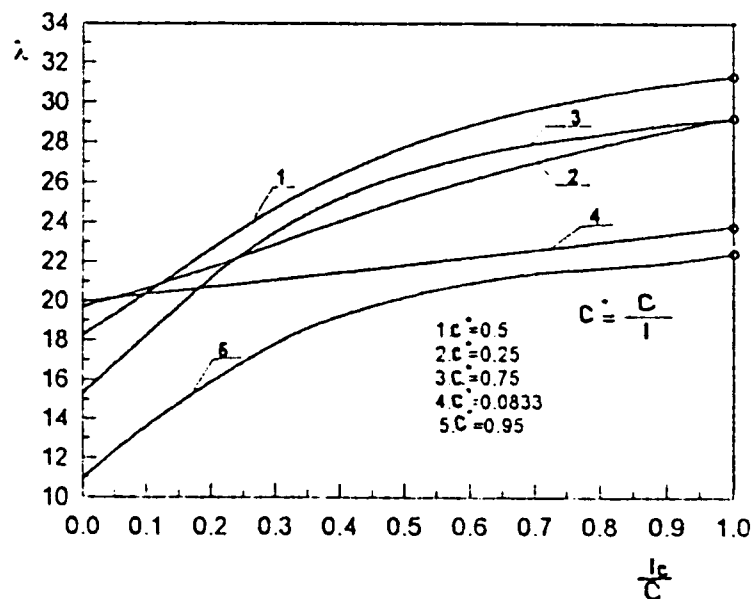


Fig. 3. Critical value parameter versus l_c and $c = l_c + l_d$

5. Conclusions

Three constructional variants of the column having identical boundary conditions has been presented.

The influence of the ratio between the length of the system elements upon the value of the critical load has been shown.

It has been proved that the elastic foundation has no effect on the slope of the natural frequency curves, however it influences the critical force - the increase in the stiffness coefficients results in the increase of the critical load.

Acknowledgements

This research has been supported by The State Committee for Scientific Research, Warszawa, Poland, under the University's grant no. BS-01-302/91.

Literatura

1. Sundararajan C.: Vibration and stability of non-divergent elastic systems. AIAA Journal 11, 1418-1420, 1973
2. Leipholz H.H.E.: On conservative elastic Systems of the first and second Kind. Ingenieur - Archiv. 43, 255-271, 1974
3. Tomski L., Przybylski J., Gołębiowska-Rozanow M., Szmidla J.: Vibration and stability of an elastic column subject to a generalized load. Archive of Applied Mechanics 67, 105-116, 1996
4. Tomski L., Gołębiowska-Rozanow M., Przybylski J., Szmidla J.: Stability and vibration of a two-member frame under generalised load. Proc. Europ. Sess. Int. Coll. „Stability of steel Struc.”, Budapest I/409-I/416, 1995
5. Bogacz R., Mahrenholtz O.: Modal analysis in application to design of inelastic structures subjected to circulatory loading. Euromech. Coll. 174, Inelastic Structures under Variable Loads, Palermo 377-388, 1983
6. Danielski J., Mahrenholtz O.: Vergleich theoretischer und experimenteller ergebnisse gestützter Beck-Ret-Stabes. ZAMM 71, T186-T189, 1991
7. Tomski L., Gołębiowska-Rozanow M.: Experimental investigation of divergence pseudo-flater type column. Vibrations in Physical Systems XVI Sympozjon Poznań-Błażejewko, 248-249, 1996
8. Bogacz R., Imielowski B., Tomski L.: Stability and vibration of column structures subjected to generalized concentrated load. Theoretical and experimental study. Proc. of Int. Symposium on Dynamics of Continua. Bad Honnef 9-13.09.1996 (in print)

L.TOMSKI, J.PRZYBYLSKI, M.GOŁĘBIEWSKA-ROZANOW
Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Częstochowskiej
Dąbrowskiego 69, 42-200 Częstochowa

1. Introduction

- 283 -

The presented stand is equipped with the loading head (1), which can be horizontally shifted in two perpendicular directions along guides 2(1) and 2(2). Load to the column is applied by means of a built-in screw system and measured by an extensometer (3). The column (4) which is compound of two identical rods 6(1) and 6(2), as well as the rod 7(3) of different flexural rigidity, is clamped at one end by the holder (5). All rods have the circular cross section. At the other end the rods are connected by means of a rigid element (8) of mass m , in such a way that the displacements and deflection angles of the rods are to be equal. The rod 7(3) is joined by a needle bearing to the beam (9), which is mounted in the holder (10) pinned to the external support. A force created in the head (1) is transferred to the column (4) by means of the beam (9).

Vibration tests were performed with the use of the two-channel vibration analyser (11) of 2035 type and the accelerometer (12) of 4381 type made by Bruel&Kjaer. The system was activated by the impactor (13).

2. Equation of motion. Boundary conditions

The equation of motion for the column are as follows

$$E_i J_i \frac{\partial^4 w_i}{\partial x^4} + S_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} + \rho_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

where $E_i J_i$ is the flexural rigidity of the i -th rod (rods 6(1) and 6(2) have identical properties and dimensions), $\rho_i A_i$ is the mass per unit length of the i -th rod, S_i is the longitudinal force in the i -th rod, $S_{1,2} = P/2$; $S_3 = -P$; $E_1 J_1 = E_2 J_2 = EJ$; $\rho_1 A_1 = \rho_2 A_2 = \rho A$; $w = w(x, t)$.

The boundary conditions are

$$w_1(0) = w_2(0) = w_1'(0) = w_2'(0) = w_3(0) = w_3''(0)$$

$$E_1 J_1 w_1''(l, t) + E_2 J_2 w_2''(l, t) + E_3 J_3 w_3''(l_3, t) = 0$$

$$E_1 J_1 w_1'''(l, t) + E_2 J_2 w_2'''(l, t) + E_3 J_3 w_3'''(l_3, t) = 0$$

where l is the length of the rods 6(1) and 6(2), l_3 is the length of the rod 7(3).

For the small vibrations

$$w_i(x, t) = y_i(x)e^{i\omega t}.$$

3. Natural vibration frequency curve

The value of the critical load P_c can be obtained from the conditions of nulling of the entire energy of the system. This leads to

$$P_c = \frac{EJ \int_0^l \left[(\dot{y}_1)^2 + (\dot{y}_2)^2 \right] dx + E_3 J_3 \int_0^{l_3} (\dot{y}_3)^2 dx}{\frac{1}{2} \int_0^l (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) dx - \int_0^{l_3} \dot{y}_3^2 dx} > 0 \quad (2)$$

Let take into account the functional (comp. [2])

$$F[y] = F_1[y_1] + F_2[y_2] + F_3[y_3] = 0$$

$$\text{where } F_1[y_1] = \int_0^l \left[E_1 J_1 y_1^{IV} + S_1 y_1'' - \rho_1 A_1 \omega^2 y_1 \right] y_1 dx.$$

The variation of this functional gives

$$\frac{d\omega^2}{dP} = \frac{-\frac{1}{2} \int_0^l (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) dx + \int_0^{l_3} \dot{y}_3' dx}{\rho A \int_0^l (y_1^2 + y_2^2) dx + \rho_3 A_3 \int_0^{l_3} y_3^2 dx + m \omega^2 y(l)}$$

The numerator of this expression can take positive, negative and zero values what depends on the relation between its addends.

Taking into account (1) and (2) the slope of the natural vibration curve for $P \rightarrow P_c$ is as follows

$$\frac{d\omega^2}{dP_c} = \frac{-EJ \int_0^l (\ddot{y}_1^2 + \ddot{y}_2^2) dx + \int_0^{l_3} \ddot{y}_3 dx}{\rho A \int_0^l (y_1^2 + y_2^2) dx + \rho_3 A_3 \int_0^{l_3} y_3^2 dx + m} < 0 \quad (3)$$

This is a prove that the column presented in Fig. 1 fulfils the criterion for the divergence-pseudoflutter system.

4. General remarks

The present investigation has been directed towards the following objectives:

- to compute the divergence critical load for different length of the rod 7(3)
- to find courses of the natural frequency curves as a function of the applied load for different geometrical and physical parameters of the column
- to analyse the changes of the mode shapes along the eigenfrequency curves.

Experimental tests of the natural frequency for different loading have been carried out also. For the boundary values of the bending rigidity E_3J_3 of the rod 7(3) i.e. for $E_3J_3=0$ or for $1/E_3J_3=0$, the column becomes a column loaded by a force passing through a fixed point or a column loaded by the follower force passing through a fixed point [3].

Acknowledgements

This research has been supported by the State Committee for Scientific Research under Grant No 7T07A01211

5. Literature

1. L.Tomski, J.Przybylski, J.Podgórska: *Stability and vibration of a cantilever column lying on the elastic foundations loaded by a generalised load.*
2. Leipholz H.H.E: *On conservative elastic systems of the first and second kind.* Eng. Arch.43 (1974), 255-171
3. L.Tomski, J.Przybylski, M.Gołębiowska-Rozanow, J.Szmidla: *Stability and vibration of a two-member column loaded by the follower force passing through a fixed point.* Research done under Grant No. 7T07A01211, Politechnika Częstochowska, 1996 (in printing).

METODY SZACOWANIA OBCIĄŻEŃ NISZCZĄCYCH UZWOJENIA TRANSFORMATORÓW W SYSTEMIE SPN

M. WIECZOREK, E. SZYMCZYK

*Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej WAT
Kaliskiego 2, 01-496 Warszawa, Polska*

Analiza wytrzymałości mechanicznej uzwojeń transformatorów z uwzględnieniem luzów i zjawiska tarcia jest zagadnieniem nieliniowym. Obciążenie niszczące określa się na podstawie nieliniowej analizy statycznej (przyrostowe równania równowagi) oraz w sposób przybliżony metodą liniowej analizy stateczności i metodą analityczną opartą na rozkładzie rozwiązania w bazie wektorów własnych.

1. Wstęp

System SPN przeznaczony jest do nieliniowej analizy statycznej uzwojeń transformatorów, poddanych obciążeniom promieniowym. Umożliwia analizę numeryczną konstrukcji, których model można zbudować z płaskich elementów prętowych o osi krzywoliniowej oraz z elementów sprężystych. Elementami krzywoliniowymi modeluje się fragmenty uzwojenia. Mogą one pracować zarówno w zakresie sprężystym jak i sprężysto-plastycznym. Elementy sprężyste opisują kliny podpierające oraz podatność izolacji. Pracują one tylko w zakresie sprężystym, ale ich podatność może mieć charakter nieliniowy. System umożliwia modelowanie zjawisk kontaktowych z uwzględnieniem tarcia.

Dokładne określenie obciążeń niszczących (krytycznych) dokonuje się w wyniku pełnej analizy nieliniowej. Ze względu na czasochłonność obliczeń wygodne jest szacowanie obciążeń krytycznych na dowolnym poziomie obciążenia.

2. Nieliniowa analiza statyczna

Z uwagi na nieliniowy charakter zachowania konstrukcji analizę numeryczną opiera się na zlinearyzowanych na kroku przyrostowych równaniach równowagi [2,3] z uwzględnieniem tarcia [8].

$$\left[K_{\sigma-p}(q^{(i)}) + K_{\sigma}(\sigma^{(i)}) \right] \Delta q^{(i+1)} = \Delta p^{(i+1)} - \Delta t^{(i)} \quad (1)$$

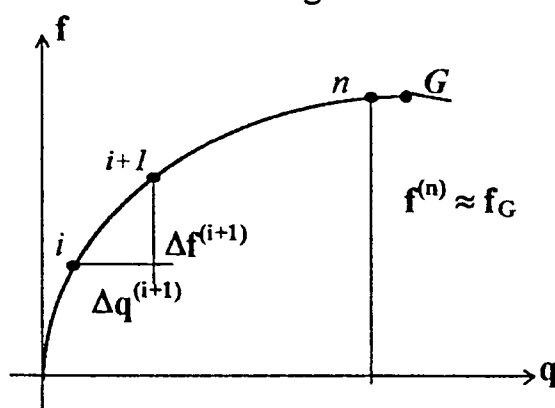
gdzie: $K_{e-p}(q^{(i)})$ - macierz sztywności konstrukcji, $K_{\sigma}(\sigma^{(i)})$ - macierz początkowych naprężeń, $\Delta q^{(i)}$ - przyrost wektora przemieszczeń, $\Delta p^{(i)}$ - przyrost wektora obciążeń, $\Delta t^{(i)}$ - przyrost wektora sił tarcia.

Układ równań (1) rozwiązuje się metodą zmiennej sztywności. Macierze tworzone są na każdym kroku przyrostowym dla aktualnej konfiguracji. W celu dostosowania macierzy sztywności do zmieniających się warunków pracy konstrukcji po wybraniu luzów i włączeniu się sił tarcia, w systemie SPN wprowadza się opcję skracania i powtarzania kroku.

Całkowity wektor przemieszczeń $q^{(i)}$ oraz obciążeń $f^{(i)}$ otrzymuje się sumując odpowiednie przyrosty zgodnie zależnością

$$q^{(i)} = \sum_{j=1}^i \Delta q^{(j)}, \quad f^{(i)} = \sum_{j=1}^i \Delta f^{(j)} \quad (2)$$

Rozwiązanie równań równowagi (1) można przedstawić na wykresie $f(q)$ w postaci ścieżki równowagi.



Rys.1. Ścieżka równowagi
Fig. 1. Equilibrium path

Punkt G na ścieżce równowagi jest punktem granicznym (rys 1). Macierz $[K_e^{(n)} + K_{\sigma}^{(n)}(\sigma)]$ obliczona dla n-tej konfiguracji, odpowiadającej punktowi G jest osobliwa (nie można uzyskać rozwiązania równania (1)).

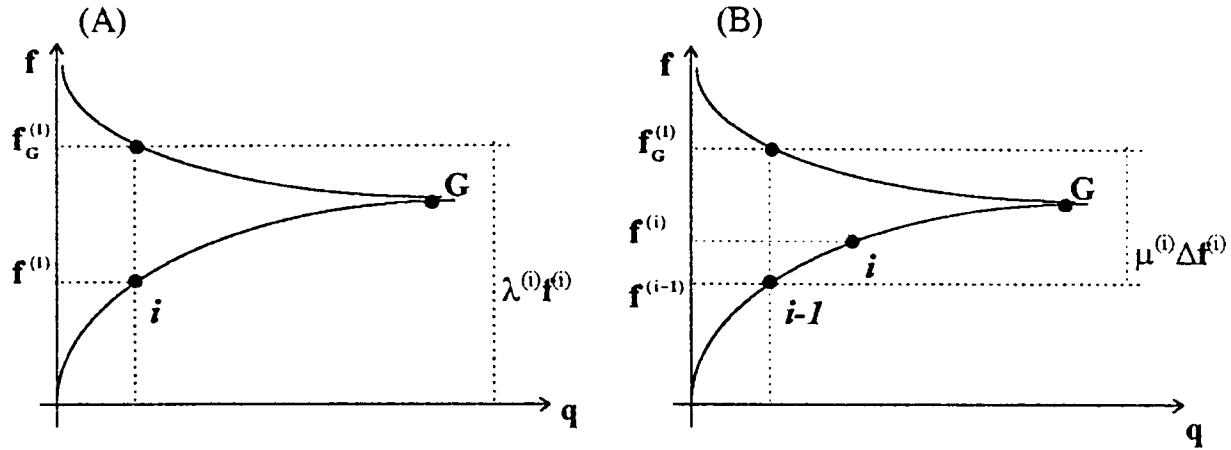
$$\text{Obciążenie } f_G = \sum_{j=1}^n \Delta f^{(j)} \quad (3)$$

odpowiadające punktowi granicznemu jest obciążeniem niszczącym (uzwojenie transformatora obciążone taką siłą ulega mechanicznemu uszkodzeniu).

3. Szacowanie obciążeń granicznych

Położenie punktu granicznego na ścieżce równowagi określa się „dokładnie” na podstawie pełnej analizy nieliniowej. Uzyskanie takiego rozwiązania jest zwykle czasochłonne. Z tego względu stosuje się przybliżone metody szacowania obciążeń krytycznych.

3.1. Liniowa analiza stateczności



Rys.2. Ścieżka równowagi ($f = \lambda f^{(1)} = \lambda \Delta f$)
Fig. 2. Equilibrium path ($f = \lambda f^{(1)} = \lambda \Delta f$)

Klasyczną metodą oceny obciążeń krytycznych jest analiza stateczności początkowej [1,2]. Sprowadza się ona do rozwiązania uogólnionego zagadnienia własnego z macierzami sztywności i początkowych naprężeń odpowiadającymi konfiguracji początkowej. W systemie SPN liniowa analiza stateczności odnosi się do dowolnego poziomu obciążenia. Uwzględniono dwa sformułowania zagadnienia własnego : wersję globalną (A) i lokalną (B). W wersji globalnej (A) obciążenie krytyczne jest wielokrotnością aktualnego poziomu obciążenia. Współczynnik proporcjonalności $\lambda_k^{(i)}$ wyznacza się z równania

$$[K_{s-p}(q^{(i)}) + \lambda_k^{(i)} K_\sigma(\sigma^{(i)})] v_k^{(i)} = 0 \quad (4)$$

gdzie : $K_{s-p}(q^{(i)})$ - macierz sztywności sprężysto-plastycznej, $K_\sigma(\sigma^{(i)})$ - macierz początkowych naprężeń, $v_k^{(i)}$ - wektor reprezentujący postać wyboczenia konstrukcji, $\lambda_k^{(i)}$ - mnożnik definiujący obciążenie krytyczne zgodnie ze wzorem

$$f_k^{(i)} = \lambda_1^{(i)} f^*, \quad f^* = \sum_{j=1}^i \Delta f^{(j)} \quad (5)$$

W wersji lokalnej (B) obciążenie krytyczne jest sumą aktualnego poziomu obciążenia i wielokrotności przyrostu obciążenia.

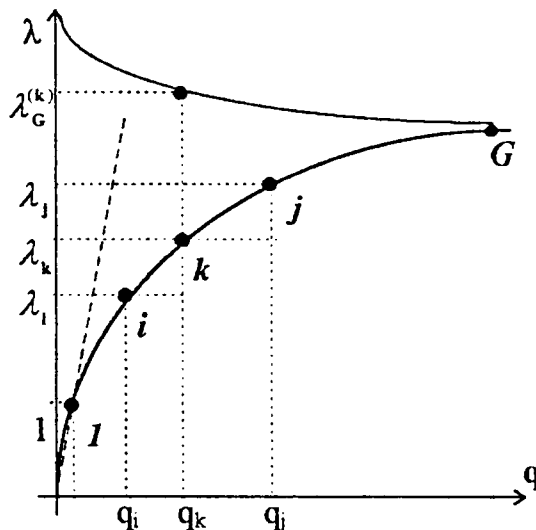
$$[(K_{s-p}(q^{(i)}) + K_\sigma(\sigma^{(i-1)})) + \mu_k^{(i)} K_\sigma(\Delta \sigma^{(i)})] v_k^{(i)} = 0 \quad (6)$$

gdzie $\mu_k^{(i)}$ - mnożnik definiujący obciążenie krytyczne zgodnie ze wzorem

$$f_G^{(i)} = f^{(i-1)} + \mu_1^{(i)} \Delta f^{(i)}, \quad f^{(i-1)} = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta f^{(j)} \quad (7)$$

Do rozwiązywania zagadnienia własnego stosuje się metody bezpośrednie lub iteracyjne [7]. W analizie konstrukcji, ze względu na duży wymiar macierzy oraz potrzebę wyznaczenia tylko jednej lub kilku najniższych wartości własnych, preferowane są metody iteracyjne. W implementacji numerycznej uwzględniono dwie z nich : Lanczosa [6] i Stodoli [5]. Wybór metody zależy od własności macierzy sztywności i początkowych naprężeń. W rozważanym przypadku obie macierze są symetryczne, ale mogą być dowolnie określone (mogą mieć jednocześnie dodatnie i ujemne wartości własne). Macierz sztywności $\mathbf{K}_{\sigma-p}^{(i)}$ może nie spełniać warunku dodatniej określoności w przypadku uwzględnienia obciążeń wstępnych. Znaki wartości własnych macierzy początkowych naprężeń $\mathbf{K}_{\sigma}^{(i)}(\sigma)$ zależą od tego czy elementy konstrukcji są ściskane czy rozciągane.

3.2. Metody oparte na rozwinięciu rozwiązania w bazie wektorów własnych



Rys.3. Ścieżka równowagi
Fig. 3. Equilibrium path

Prezentowana metoda ma charakter analityczny [4,9]. Pozwala ona na podstawie początkowego fragmentu ścieżki równowagi prognozować położenie punktu granicznego. Metoda ta może być stosowana do szacowania obciążeń krytycznych na podstawie danych eksperymentalnych lub numerycznych.

Przybliżona wartość obciążenia granicznego wyraża się wzorem :

$$\mathbf{f}_G = \lambda_G \mathbf{f}^{(1)}, \quad (8)$$

Mnożnik obciążenia krytycznego wyraża się wzorem

$$\lambda_G = \frac{\lambda_j \lambda_k (\alpha (\lambda_k - 1) - (\lambda_j - 1))}{\alpha \lambda_k (\lambda_k - 1) - \lambda_j (\lambda_j - 1)} \quad (9)$$

gdzie

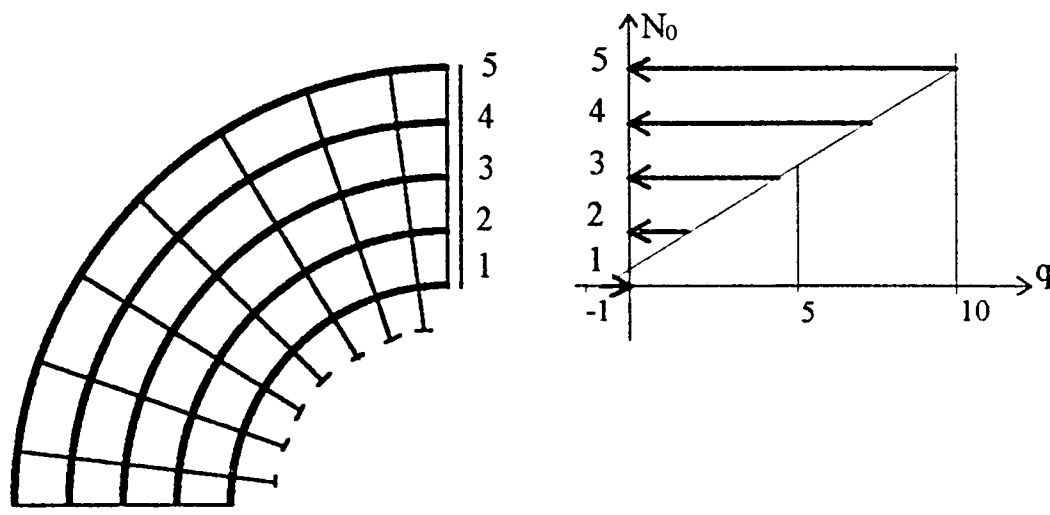
$$\alpha = \frac{q_j - \lambda_j q_i}{q_k - \lambda_k q_i}$$

oznaczenia

- $f^{(1)}$ - obciążenie porównawcze odpowiadające $\lambda = 1$,
- q_1, q_k, q_j - wartości wybranej składowej przemieszczenia odpowiadające punktom równowagi $1, k, j$,
- $\lambda_j, \lambda_k, \lambda_G$ - mnożniki obciążenia krytycznego $f^{(1)}$ odpowiadające punktom równowagi j, k, G (rys 3).

Skuteczność (efektywność) niniejszej metody jest tym większa im bardziej nieliniowa jest ścieżka równowagi dla rozważanej konstrukcji.

4. Analiza numeryczna - uzwojenie cylindryczne



Rys.4. Model uzwojenia cylindrycznego i obciążenie radialne
Fig.4. Model of cylindrical winding under radial forces

Analizę numeryczną przeprowadzono dla uzwojenia cylindrycznego wykonanego z pięciu par miedzianych przewodów, które opisano 210 elementami krzywoliniowymi. Oddziaływanie klinów oraz izolacji reprezentuje 179 elementów sprężystych. Łącznie model dyskretny zawiera 666 stopni swobody.

Obciążenie radialne osiągnięte w próbie zwarciowej podzielono na 150 równych przyrostów Δf . W analizie nieliniowej utratę stabilności stwierdzono dla obciążenia $113 \Delta f$. W wyniku liniowej analiza stateczności uzyskano oszacowanie $118 \Delta f$.

Szczegółowe omówienie wyników przeprowadzonej analizy zostanie przedstawione podczas referowania.

Literatura

1. Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., *Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji*. Arkady, Warszawa 1990.
2. Dacko M., Borkowski W., Dobrociński S., Niezgoda T., Wieczorek M., *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*. Arkady, Warszawa 1994.
3. Kleiber M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*. PWN, Warszawa-Poznań 1985
4. Wieczorek M., *Przybliżona metoda wyznaczania obciążeń krytycznych konstrukcji sprężystych*. Archiwum Inżynierii Lądowej, t. XXXIV 4/1988.
5. Wieczorek M., Szymczyk E., *Rozwiązywanie układu równań jednorodnych $(A - \lambda B)v = 0$ z niedodatnio określonymi macierzami metodą Stodoli*. Biuletyn WAT Nr 3-4, 1995.
6. Nour-Omid B., Regelebrugge M.E., *Lanczos method for dynamic analysis of damped structural systems*. Earthquake Eng. Struc. Dyn., Vol. 18(1989), pp.1091
7. Wilkinson J.H., *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford University Press 1965
8. Torstenfelt B., *Contact problems with friction in general purpose finite element computer programs*. Comp. Struct. Vol.16, No.1-4, pp.487-493, 1983
9. E. Szymczyk, M. Wieczorek „Ocena przybliżonych metod szacowania obciążeń krytycznych” VII Sympozjum Stateczności Konstrukcji - Bielsko-Biała 7-9.12.94

Summary

THE ESTIMATION OF CRITICAL LOADS OF TRANSFORMER WINDINGS IN SPN SYSTEM

The paper presents theoretical base of the computing system SPN. This one affords possibilities for the critical loads calculating and the nonlinear analysis of the transformer windings which are loaded by the radial short-circuit forces.

The SPN system is based on the finite element method. A discrete model consists of the beam curvilinear elements with two nodes and the springy elements. Curvilinear elements are used for a modeling of wires of windings. The vertical spacers and the insulation of conductors are modeled by springy elements.

Critical loads are obtained from nonlinear static analysis (incremental equilibrium equation (1)). They can be estimated in two ways. The former is based on the linear stability analysis and the later is the analytical method. The stability analysis leads to generalised eigenvalue problem (4,6) which is solved by Lanczos or Stodola methods. The results of the analytical method (8) are obtained according to the distribution of the nonlinear problem solution in the base of eigenvectors. This method can be used for numerical and experimental data.

FLEXURAL STRENGTH OF STEEL PANELS USING HIGH-STRENGTH, LOW-DUCTILITY STEEL

SHAOJIE WU

Sargent & Lundy, Chicago, IL 60603, U.S.A.

WEI-WEN YU and ROGER A. LABOUBE

Department of Civil Engineering, University of Missouri-Rolla, Rolla, MO 65401, U.S.A.

Ninety-three cold-formed deck panel specimens were tested using the Structural Grade 80 of ASTM A653 steel (formerly ASTM A446 Grade E steel) to evaluate the flexural strength of the deck panels and their performance as affected by high-strength and low-ductility of the steel. The panels were tested in both two-point and one-point loading conditions. The test results indicated that for the panel specimens with small w/t ratios, the tested yield moments were reached and are compared reasonably well with the calculated effective yield moments. However, for the panel specimens with large w/t ratios, the tested ultimate moments are lower than the calculated effective yield moments, but much larger than the calculated moments using the specified value of 60 ksi (414 MPa). A modified yield strength reduction factor was developed for the design of flexural strength of members with yield strength exceeding 80 ksi (552 MPa).

1. Introduction

Cold-formed steel decks have been widely used in buildings as a load-carrying structural element, such as floor and roof decks (Yu 1991, SDI 1992, USD 1994). One of the main structural functions for the steel decks is to carry live and dead loads and transfer the loads to beams or girders. As a result, the decks work as flexural members. The steel decks usually consist of several hat-shaped ribs formed together in their cross section. When such decks, either in single-span or multi-span, are subject to uniform or concentrated loads, the overall stability of the decks, such as lateral torsional buckling, often does not control the moment capacity of the member.

In the United States, it is a common practice that steel decks are made of the Structural Grade 80 of ASTM A653 steel (formerly ASTM A446 Grade E steel). The unique property of the Structural Grade 80 steel, as compared to the conventional steels used for cold-formed members, is that it has high specified yield strength $F_y=80$ ksi (552 MPa) and a low tensile-to-yield strength ratio ($F_u/F_y=1.03$). The ductility of the steel is unspecified (ASTM A446) and was reported to be smaller than the ductility requirements for the conventional steels (Dhalla and Winter 1971).

Due to the lack of ductility and the low tensile-to-yield strength ratio of the Structural Grade 80 steel and considering the required ductility for adequate structural performance, Section A3.3.2 of the *Specification for the Design of Cold-Formed Steel*

Structural Members (AISI 1996) permits the use of the steel for particular configurations provided that (1) the yield strength, F_y , used for the design of elements, members, and structural assemblies, is taken as 75% of the specified minimum yield point or 60 ksi (414 MPa), whichever is less, and (2) the tensile strength, F_u , used for the design of connections and joints, is taken as 75% of the specified minimum tensile strength or 62 ksi (428 MPa), whichever is less.

In the past, studies on the strength and performance of structural components made of the Structural Grade 80 steel were limited (Wu *et al*, 1995). The reduction of the specified material properties by 25% for design purposes is based on the fact that the structural performance of cold-formed members and connections made of such a steel has not been fully investigated and understood. Therefore, since 1995, a research project on the strength of flexural members using Structural Grade 80 of A653 steel has been carried out at the University of Missouri-Rolla to further study the strength and performance of flexural members and connections made of such a steel.

2. Test program

The deck panel specimens consisted of single and multiple hat-shaped ribs in their cross sections with a thickness varying from 0.015 to 0.029 inches (0.381 to 0.736 mm). All ninety-three panels were simply supported, among which seventy-two panels were tested in two-point loading condition, sixteen panels in one-point loading condition, and five panels with screws penetrating through tension flanges in two-point loading condition. Three yielding conditions were considered in the design of the panels, namely, first yielding in the compression flange only, yielding in both compression and tension flanges simultaneously, and yielding in the tension flange only. The actual w/t ratio ranged from 17.93 to 189.95 and the actual h/t ratio ranged from 17.67 to 104.43. The actual angle between planes of the web and bearing surface varied from 59.06 to 62.21 degrees. The actual yield strength of the sheet steels varied from 103.9 to 112.5 ksi (716 to 776 MPa). Six to eighteen strain gages were used for each panel to measure extreme tensile and compressive fiber strains.

3. Evaluation of test results

For the two-point loading condition, the test results indicated that for the panels with small w/t ratios (17.93 to 61.07), the tested yield moments were reached and compared reasonably well with the calculated effective yield moments using actual dimensions, actual yield strength of the steel, and the 1996 AISI Specification. However, for the panels with large w/t ratios (102.86 to 189.95), the tested ultimate moments were

lower than the calculated effective yield moments using the actual yield strength of the steel, but much larger than the calculated moments using the specified value of 60 ksi (414 MPa).

The panels in the one-point loading condition developed higher ratios of the tested ultimate moment to the calculated effective yield moment using the actual yield strength of the steel, but demonstrated less overall ductility in the load-displacement relationship as compared to the panels in the two-point loading condition.

The tested ultimate moment and displacement for the panels with screws penetrating through tension flanges were nearly equal to those of the panels without screws. Only one 22 gage panel with 27% reduction in the tension flange and designed for first yielding in the tension flange experienced tensile fracture and necking near the screws after the panel entered a plateau in its load-displacement curve. Fracture was not observed in all of the panels with no screws after tests.

A modified yield strength reduction factor, ϕ , was developed to account for the reduced flexural strength for members with large w/t ratios. An earlier study (Pan, 1987) on the effective design width of high strength cold-formed steel members indicated that a correlation exists between a yield strength reduction factor and a factor of $(w/t)(F_y/E)$. This reduction factor was modified to include the test data obtained in this program (Wu *et al*, 1996). The modified yield strength reduction factor is written as follows:

$$\phi = 1 - 0.26 \left(\frac{w}{t} \frac{F_y}{E} - \frac{1}{15} \right)^{0.4} \quad (1)$$

In predicting the flexural strength, the actual yield strength, F_y , is multiplied by the reduction factor, ϕ , to obtain a reduced yield strength, ϕF_y , that replaces F_y in the AISI effective width formula. A comparison between the tested moments and the calculated moments using the modified yield strength reduction factor is shown in Fig. 1. In the figure, the legend "□" is for the ratio of the tested yield moment obtained by Pan (1987) to the calculated moment using the yield strength reduction factor developed by Pan; the legend "*" for the ratio of the tested yield moment obtained in this project to the calculated moment using the actual yield strength of the steel; the legend "▲" for the ratio of the tested yield moment obtained in this project to the calculated moment using the modified yield strength reduction factor; and the legend "■" for the ratio of the tested yield moment obtained by Pan (1987) to the calculated moment using the modified yield strength reduction factor. It is shown in the figure that reasonable agreement is reached between the tested moment and the calculated moment using the modified yield strength reduction factor.

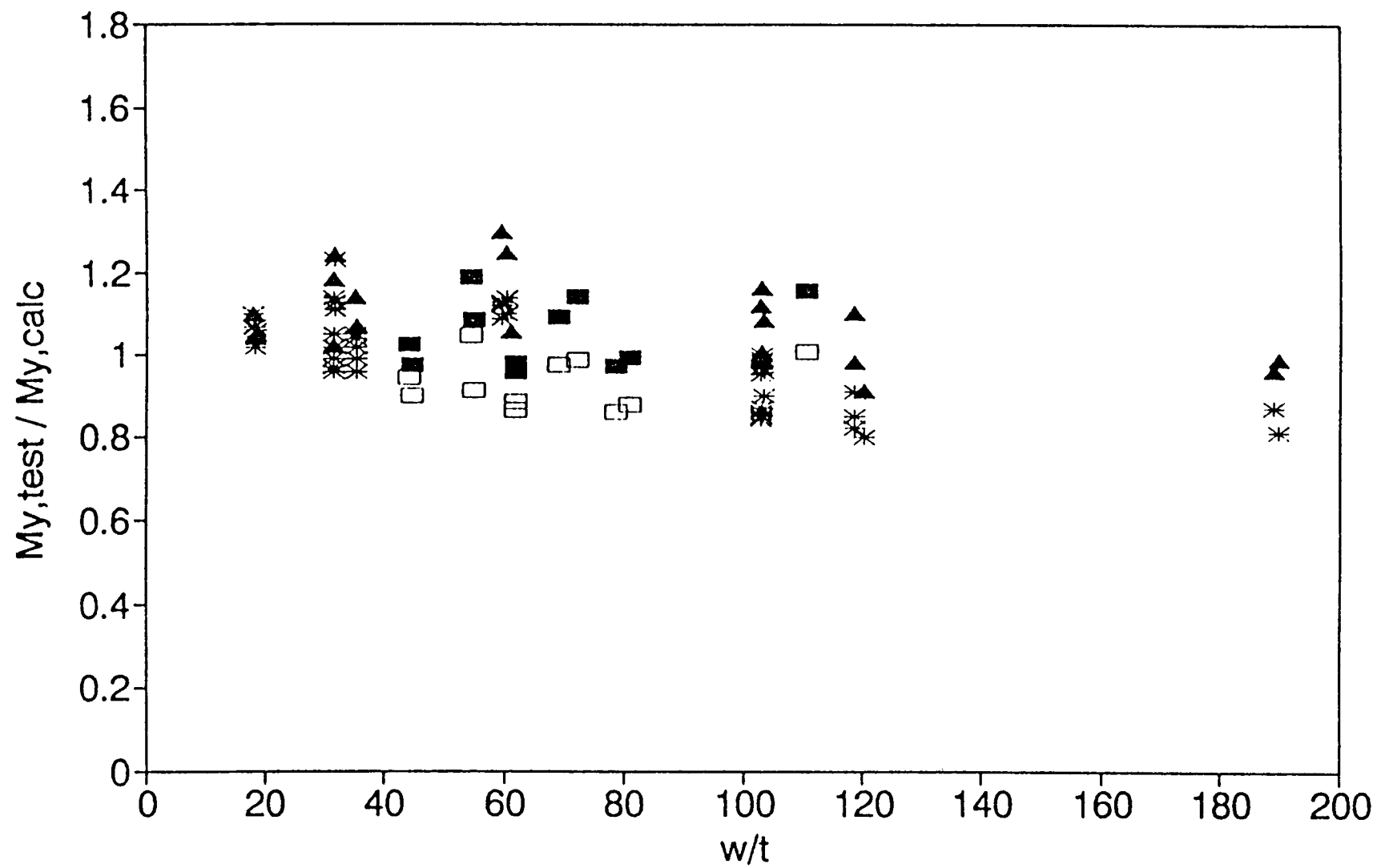


Fig. 1 Comparison of Tested Yield Moment and Calculated Moment

4. Conclusions

It is conservative to design the flexural strength of cold-formed members made of the Structural Grade 80 of ASTM A653 steel by using 75% of the specified minimum yield strength of the steel or 60 ksi (414 MPa) (whichever is less), especially for the members with small w/t ratios. A modified yield strength reduction factor was developed for the design of flexural strength of members with yield strengths exceeding 80 ksi (552 MPa). Reasonable agreement is achieved between the tested moments and predicted moments using the modified yield strength reduction factor.

5. Acknowledgments

The research work reported herein was sponsored by the American Iron and Steel Institute. The last two authors are the directors of the project. The technical guidance provided by members of Subcommittee 24-Flexural Members of the AISI Committee on Specifications and the AISI staff are gratefully acknowledged. All of the steel sheet materials used for the panel tests were kindly donated by Wheeling Corrugating Company, Wheeling, West Virginia.

6. Reference

American Iron and Steel Institute (AISI), *Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members* (1996).

ASTM A446, *Standard Specification for Steel Sheet, Zinc-Coated (Galvanized) by the Hot-Dip Process, Physical (Structural Quality)*, Annual Book of ASTM Standards.

Dhalla, A.K. and Winter, G., *Influence of Ductility on the Structural Behavior of Cold-Formed Steel Members*, Report No. 336 (Cornell University, 1971)

Pan, L.C., *Effective Design Widths of High Strength Cold-Formed Steel Members*, Ph.D. Dissertation (University of Missouri-Rolla, 1987).

Steel Deck Institute (SDI), *Steel Deck Institute Design Manual for Composite Decks, Form Decks, Roof Decks, and Cellular Metal Floor Deck with Electrical Distribution*, Publication No. 28 (1992).

United Steel Deck (USD), *Steel Decks for Floors and Roofs, Design Manual and*

Catalog of Products (Nicholas J. Bouras, Inc., 1994).

Wu, S., Yu, W.W., and LaBoube, R.A., *Strength of Flexural Members Using Structural Grade 80 of A653 and Grade E of A611 of Steels, First Progress Report, Civil Engineering Study 95-5* (University of Missouri-Rolla, 1995).

Wu, S., Yu, W.W., LaBoube, R.A., *Strength of Flexural Members Using Structural Grade 80 of A653 and Grade E of A611 of Steels, Second Progress Report, Civil Engineering Study 96-4* (University of Missouri-Rolla, 1996).

Yu, W.W., *Cold-Formed Steel Design* (John Wiley and Sons, 1991).

STABILITY OF AN ELASTIC-PLASTIC SANDWICH CYLINDRICAL SHELL UNDER COMBINED LOAD

J. ZIELNICA

*Institute of Applied Mechanics, Poznań University of Technology,
Piotrowo 3, 60-965 Poznań, Poland*

The paper deals with elastic-plastic stability analysis of a sandwich cylindrical shell of circular cross section under combined external load. The shell consists of two load-carrying faces made of isotropic, compressible work-hardening material and they are of different thicknesses and made of different material properties. It is assumed that the shell is loaded by three-parametrical external loading and the shell can be deformed into the plastic range before buckling. The physical relations used in the analysis are those of the incremental Prandtl-Reuss plastic flow theory with Huber-Mises yield condition. The virtual work principle is the basis to obtain the governing stability equations and the orthogonalization method is used to solve the differential equations of the considered problem.

1. Introduction

Thin-walled sandwich shells have a high structural efficiency and they are often used in the design of aerospace vehicles. They are characterized by a comparatively high load to weight ratio and they have thermo and vibroisolation properties. From a practical point of view one can find a very interesting case of sandwich cylindrical shell under combined, axisymmetrical, external loadings.

The objective of the paper is the analysis of the stability paths of a sandwich cylindrical shell under combined load basing on the assumptions of moderately large deflections (geometrically nonlinear theory) and elastic-plastic properties of the material of the faces. In Refs (1,2) the linear and nonlinear prebuckling and bifurcation buckling analyses of elastic plastic cylindrical and conical shells are described and discussed. The considered shell consists of two load-carrying faces made of isotropic, compressible, work-hardening material and they are of different thicknesses and made of different material properties (see Fig.1). The Kirchhoff-Love hypotheses hold for the faces, and the active deformation processes are considered. The core is assumed to be elastic, incompressible in the normal z direction and it resists transverse shear only. The physical relations used in the analysis are those of the incremental Prandtl-Reuss plastic flow theory with Huber-Mises yield condition, so, the factors of local stiffness matrix depend on mechanical and geometrical properties of the material and also on the stresses in the prebuckling

stress state. Prebuckling stress state is taken to be membrane one and the virtual work principle is the basis to derive the strain energy expression. The nonlinear stability equations are solved by Galerkin method and the results are presented in a diagram.

2. Assumptions, geometrical and constitutive relations

The subject of the analysis is a sandwich cylindrical shell of circular cross section; the element of the shell is shown in Fig.1.

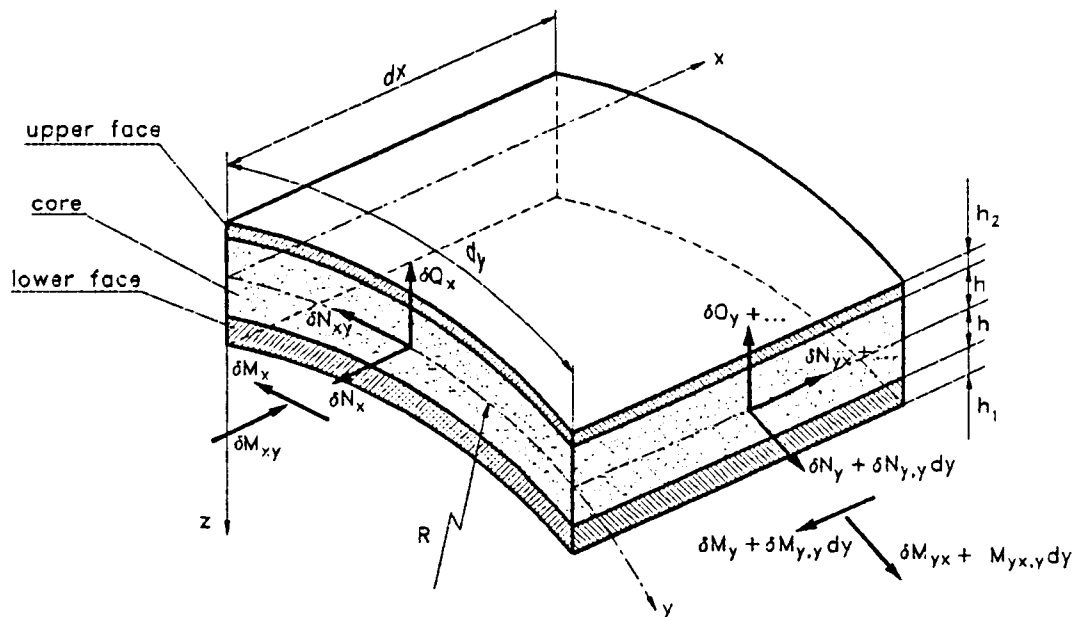


Fig. 2.1 Cylindrical shell element

The following basic assumptions hold for the accepted model:

- the shell is thin-layered, the core is elastic, incompressible in the z direction, the faces are of different thicknesses and they are made of different materials
- the shell is shallow, the radii of curvatures of the layers are assumed to be equal
- strains in the shell are described by nonlinear geometrical relations of the theory of moderately large deflections
- the strains in postbuckling stress state are elastic or elastic-plastic
- the displacements in normal direction does not depend on the z coordinate, and prebuckling stress state is the membrane one
- constitutive relations in the analysis are those of the J_2 Prandtl-Reuss plastic flow theory with the H-M-H yield condition and bilinear stress-strain relation.

The above assumptions allow us to apply the so called broken line hypothesis to describe the geometrical relations between the displacement vector components u , v ,

and w of arbitrary point of the shell and the displacements of the points on the middle surfaces of the specific faces: u_α, u_β, w ($\alpha, \beta=1,2$). Using these assumptions one may describe the displacements of arbitrary points in the specific layers:

- inner face ($h \leq z \leq h+h_1$)

$$w^- = w_1, \quad u^- = u_1 - \left[z - \left(h + \frac{1}{2} h_1 \right) \right] w_{1,x}, \quad v^- = v_1 - \left[z - \left(h + \frac{1}{2} h_1 \right) \right] w_{1,y}, \quad (1)$$

- outer face ($(h+h_2) \leq z \leq -h$)

$$w^+ = w_2, \quad u^+ = u_2 - \left[z + \left(h + \frac{1}{2} h_2 \right) \right] w_{2,x}, \quad v^+ = v_2 - \left[z + \left(h + \frac{1}{2} h_2 \right) \right] w_{2,y}, \quad (2)$$

- core ($-h \leq z \leq +h$), $w_c = w$

$$\begin{aligned} u_c &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) + \frac{1}{4}(h_1 - h_2)w_{c,x} + \frac{z}{h} \left[\frac{1}{2}(u_1 - u_2) + \frac{1}{4}(h_1 + h_2)w_{c,x} \right], \\ v_c &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{4}(h_1 - h_2)w_{c,y} + \frac{z}{h} \left[\frac{1}{2}(v_1 - v_2) + \frac{1}{4}(h_1 + h_2)w_{c,y} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

The analysis in this paper is based on energy minimization, where the total strain ε in the shell can be expressed in terms of middle surface strains and changes in curvature and these reference surface quantities can then be expressed in terms of displacement vector components. By the assumption that the variation of displacements across the thickness of the core is linear, the following expressions are derived for the variations of strains in faces of the shell

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x^\pm &= u_{,x}^\pm + \frac{1}{2} (w_{,x}^\pm)^2, & \delta \gamma_{xy}^\pm &= v_{,x}^\pm + u_{,y}^\pm + w_{,x}^\pm w_{,y}^\pm, \\ \delta \varepsilon_y^\pm &= u_{,y}^\pm - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} (w_{,y}^\pm)^2, & \delta \gamma_{yz}^\pm &= w_{,y}^\pm + v_{,z}^\pm, \\ & & \delta \gamma_{yz}^\pm &= w_{,y}^\pm + v_{,z}^\pm, \end{aligned} \quad (4)$$

where $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y$ are the strains along the x, y coordinates, respectively, $\delta \gamma_{xy}, \delta \gamma_{yz}, \delta \gamma_{xz}$, are the shear strains in the shell. Here the superscripts $+$ and $-$ denote the upper and the lower faces, respectively. As it follows from the assumptions, the effective stress in the shell faces can exceed the yield stress for the shell material. Thus, physical relations of the appropriate plasticity theory must be used. In this work the use is made of the incremental plastic flow theory to derive the stability equations.

In the J_2 incremental plastic flow theory the stresses and stress increments are related with strain increments by constitutive flow rule and yield condition,

generalized on the case of stress hardening. The basic equations of this theory of plasticity are as follows

$$D_{\dot{\varepsilon}} = \lambda D_{\dot{\sigma}} + \frac{1}{2G} D_{\dot{\sigma}}, \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \lambda s_{ij} + \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} \quad (5)$$

Here $D_{\dot{\varepsilon}}$ i $D_{\dot{\sigma}}$ are the deviators of strain and stress rates, λ is a parameter of stress hardening that can be determined from the yield condition. The increments of plastic strains can be represented in the form of

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_m \right) + 3d\lambda (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m),$$

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad d\lambda = \frac{1}{2} \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_i} \quad (6)$$

The resultant middle surface forces and moments in the shell are defined as follows

$$\delta N_{\alpha\beta} = \delta N_{\alpha\beta}^+ + \delta N_{\alpha\beta}^- = \int_{-(h+h_2)}^{-h} \delta \sigma_{\alpha\beta} dz + \int_h^{h+h_1} \delta \sigma_{\alpha\beta} dz,$$

$$\delta M_{\alpha\beta} = \delta M_{\alpha\beta}^+ + \delta M_{\alpha\beta}^- = \int_{-(h+h_2)}^{-h} \delta \sigma_{\alpha\beta} z dz + \int_h^{h+h_1} \delta \sigma_{\alpha\beta} z dz, \quad (7)$$

We mention that these expressions reflect the fact that the shell thickness is small compared to the radius. After integration Eqns (7) reduce to the form of

$$\begin{aligned} \delta N_x &= b_{11} \delta \varepsilon_{11} + b_{12} \delta \varepsilon_{22} - b_{13} \delta \gamma_{12}, & \delta M_x &= -d_{11} \delta \kappa_1 - d_{12} \delta \kappa_2 + d_{13} \delta \kappa_{12}, \\ \delta N_y &= b_{21} \delta \varepsilon_{11} + b_{22} \delta \varepsilon_{22} - b_{23} \delta \gamma_{12}, & \delta M_y &= -d_{21} \delta \kappa_1 - d_{22} \delta \kappa_2 + d_{23} \delta \kappa_{12}, \\ \delta N_{xy} &= -b_{31} \delta \varepsilon_{11} - b_{32} \delta \varepsilon_{22} + b_{33} \delta \gamma_{12}, & \delta M_{xy} &= +d_{31} \delta \kappa_1 + d_{32} \delta \kappa_2 - d_{33} \delta \kappa_{12} \end{aligned} \quad (8)$$

The coefficients of the local stiffness matrices b_{ij} and d_{ij} are as follows

$$b_{11} = \frac{12}{t^2} d_{11} = \psi_o \left\{ 2(1+\nu) + \psi_t \left[\frac{1+\nu}{2} (2\bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_s)^2 + 9\bar{\tau}_{s\varphi}^2 \right] \right\},$$

$$b_{12} = b_{21} = \frac{12}{t^2} d_{12} = \frac{12}{t^2} d_{21} = \psi_o \left\{ 2\nu(1+\nu) - \psi_t \left[\frac{1+\nu}{2} (2\bar{\sigma}_s - \bar{\sigma}_\varphi)(2\bar{\sigma}_\varphi - \bar{\sigma}_s) + 9\bar{\tau}_{s\varphi}^2 \right] \right\}$$

$$b_{13} = b_{31} = \frac{6}{t^2} d_{13} = \frac{12}{t^2} d_{31} = 3\psi_o \psi_t \bar{\tau}_{s\varphi} \left[(2-\nu)\bar{\sigma}_s - (1-2\nu)\bar{\sigma}_\varphi \right], \dots \quad (9)$$

Here ψ_o is a function of stress parameters and $\psi_t = E/E_t - 1$.

Barred symbols in (9) are the relative prebuckling stresses related with the effective stress σ_i . The constitutive relations are the functions of tangent modulus E_t .

3. Equilibrium equations

We use the virtual work principle to derive the equilibrium equations for the shell element (see Fig.2.1).

$$\delta\Pi = \delta(U - A) = 0 \quad (10)$$

From Eqn (10) we conclude that if the shell is given the small virtual displacements, the equilibrium still persists if an increment of the total potential energy of the system $\delta\Pi$ is equal to zero. Relation (10) is the basis to derive the variational equation of equilibrium of a shell. For cylindrical sandwich shell the total potential energy of internal forces is equal to the energy of the specified layers.

$$U = U^+ + U^- + U_c \quad (11)$$

The terms in Eqn (11) and the work of external forces A are as follows

$$\begin{aligned} U^\pm &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi R} \left(\delta N_x^\pm \delta \varepsilon_x^\pm + \delta N_y^\pm \delta \varepsilon_y^\pm + \delta N_{xy}^\pm \delta \gamma_{xy}^\pm \right) dx dy, \\ U_c &= \frac{1}{2} \int_V \left[\frac{E_c}{1 - \nu_c^2} \left(\delta \varepsilon_{xc}^2 + \delta \varepsilon_{yc}^2 + 2 \nu_c \delta \varepsilon_{xc} \delta \varepsilon_{yc} + \frac{1 - \nu_c}{2} \gamma_{xyc}^2 \right) + G_c \left(\delta \gamma_{yzc}^2 + \delta \gamma_{xzc}^2 \right) \right] dV \\ A &= \int_0^l \int_0^{2\pi R} q w dx dy + \left\{ \int_0^{2\pi R} \left[N_x^o \left(u_\alpha + \frac{h_1 - h_2}{H} u_\beta + \frac{h(h_1 - h_2)}{2H} w_{,x} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + N_{xy}^o \left(v_\alpha + \frac{h_1 - h_2}{H} v_\beta + \frac{h(h_1 - h_2)}{2H} w_{,y} \right) \right] dy \right\}_0^l \end{aligned} \quad (12)$$

Using the above relations we can represent Eqn (10) in the form of

$$\delta\Pi = \int_0^l \int_0^{2\pi R} \frac{\partial L}{\partial u_i} \delta u_i dx dy = 0 \quad (14)$$

where L is a function of the displacement vector components u_i . Equation (14) has to be satisfied for arbitrary values of δu_i , thus we get a set of five equilibrium equations for the considered cylindrical shell. Also, using (14), we obtain a set of boundary conditions. We satisfy identically the first two equilibrium equations if we introduce a stress function F . Next, we introduce the displacement functions

$$\psi = u_{\beta,x} + v_{\beta,y}, \quad \varphi = u_{\beta,y} - v_{\beta,x} \quad (15)$$

and the equilibrium equations are transformed into the set of three differential equations with unknown functions: F , ψ , φ , w . However, the use is also made of the deformation compatibility equation. In the general solution we take $\varphi=0$. The following function is accepted to represent the deflection of the shell

$$w + w_o = (f_1 + f_{10}) \sin \alpha x \sin n\theta + \frac{1}{2} f_2 [(\sin i \theta \sin \lambda_1 x - \cos i \theta \cos \lambda_1 x) - (\sin i \theta \sin \lambda_2 x - \cos i \theta \cos \lambda_2 x)] + f_3 \sin^2 \frac{m \pi x}{l} \quad (16)$$

The displacement function and stress function are determined from equilibrium equations by direct integration. The last equation of equilibrium, using Eqn (15), and the determined displacement and stress functions, is integrated by Galerkin method. As a result we get a set of three nonlinear algebraical equations of the general form

$$\begin{aligned} \hat{f}_3 \tilde{G}_1 + m^2 \left(\hat{p} + \frac{RH\alpha^2}{l^2} \hat{q} \right) + \tilde{G}_5 &= \hat{f}_1 (\hat{f}_1 + 2\hat{f}_{10}) \tilde{G}_2 + \hat{f}_2^2 \tilde{G}_3 + \hat{f}_3^2 \tilde{G}_4, \\ \hat{f}_3 \tilde{G}_7 + \tilde{G}_{10} + (\beta^2 k^2 + 1) \hat{p} + \frac{\beta^2}{H} \hat{q} + 2\beta^2 k \hat{s} &= (\hat{f}_1 + \hat{f}_{10}) \tilde{G}_6 + \hat{f}_2^2 \tilde{G}_8 + \hat{f}_3^2 \tilde{G}_9, \\ \hat{f}_{39} \tilde{G}_{16} + \hat{f}_3 j^2 \hat{p} &= (\hat{f}_1 + 2\hat{f}_{10}) \hat{f}_1 \tilde{G}_{11} + (\hat{f}_1 + \hat{f}_{10})^2 \tilde{G}_{12} + (\hat{f}_1 + \hat{f}_{10}) \hat{f}_3 \tilde{G}_{13} + \hat{f}_2^2 \tilde{G}_{14} + \hat{f}_2^2 \hat{f}_3 \tilde{G}_{15} \end{aligned} \quad (17)$$

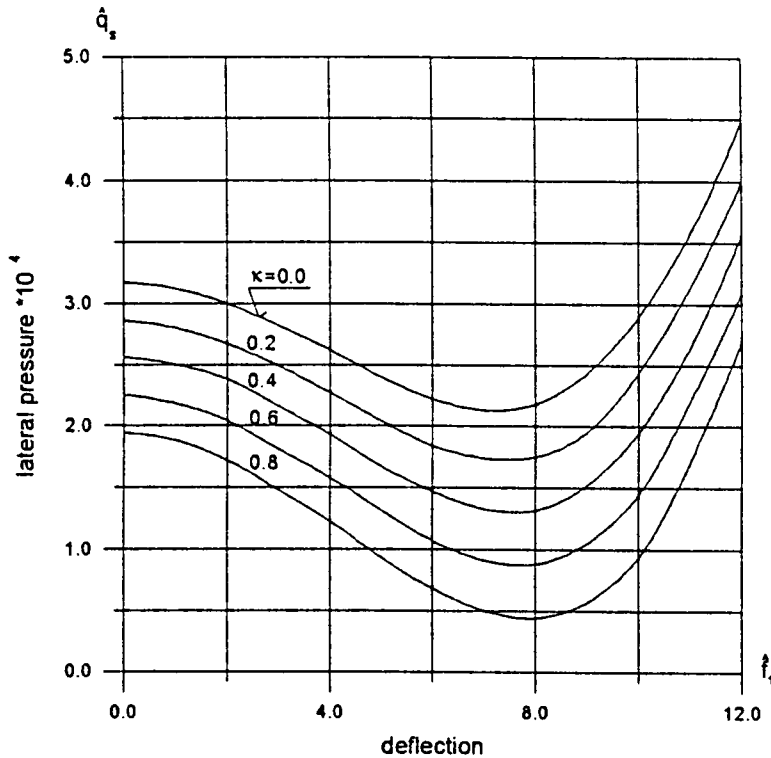


Fig. 3.1 Nonlinear equilibrium paths

Here $\hat{G}_i$ are integral expressions which are determined by numerical integration.

The above set of equations allows us to determine the nonlinear equilibrium paths for the considered shell. Numerical calculations were performed by an algorithm where the branching is introduced for elastic or plastic paths. Fig 3.1 shows an example of the numerical solution for a sandwich cylindrical shell with the faces made of aluminium alloy PA1N, loaded by uniform external pressure and axial force.

4. References

1. Zielnica J., *Elastic Plastic Buckling of Sandwich Conical Shells under Axial Compression ...*, Bull. Acad. Pol. Sci., Vol. XXIX, (1981), 239-251.
2. Ostwald M., *Optimal design of sandwich shell structures* (in Polish), Poznań University of Technology, Diss., Poznań, (1993).

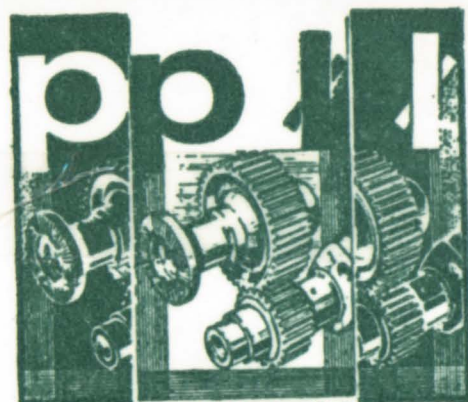


Biblioteka Główna
PŁ



210000035802

90181



EXLIBRIS

politechnika łódzka • łódź • biblioteka