MODELOWANIE DYSKRETNE W ZARZĄDZANIU

Anna Mospan, Michał Marczak

Streszczenie

W artykule zostało opisane modelowanie dyskretne, a w szczególności rekurencyjne, w zarządzaniu. Na podstawie poruszonych modeli zostalo pokazane, że proces podejmowania decyzji może być opisany z wykorzystaniem funkcji użyteczności, oraz nie zawsze decyzje są podejmowane w warunkach pewności. W związku z powyższym w modelach uwzględniono czynniki ryzyka oraz błąd losowy. Na podstawie dyskretnych modeli odnawialnego ryzyka oraz wykorzystując funkcje karne można określić proces powstawania nadwyżek ubezpieczyciela, sformułować proces zaistniena ruiny oraz wyznaczyć jego prawdopodobieństwo.

1. Wprowadzenie

We współczesnym, dynamicznie rozwijającym się świecie ciężko jest wyróżnić samodzielną dyscyplinę naukową. Coraz więcej dziedzin staje się interdyscyplinarnymi. Badanie procesów czy zjawisk w ekonomii i zarządzaniu nie może być realizowane bez użycia aparatu matematycznego, który z upływem czasu staje się coraz bardziej złożony (nieliniowa postać, rekurencyjne formułowanie równań).

W procesie poszukiwania artykułów dotyczących zastosowania rekurencyjnych modeli starano się odnaleźć takie, które mogły potencjalnie służyć wspieraniu procesu zarządzania. Ponadto uwzględniono czynnik ryzyka albo warunki niepewności. Po analizie dość niemałej ilości materiałów zauważono, że wyróżniają się dwie grupy zagadnień, przyciągające najwięcej naukowej uwagi w kontekście zarządzania. Najczęściej rekurencyjnemu sformułowaniu podlegają:

- sformalizowane opisanie procesu podejmowania decyzji (decyzje marketingowe, inwestycyjne itp.);
- w teorii ruiny – klasyczny model ryzyka[1] i jego dalsze modyfikacje[2].

Dla określenia pierwszej grupy generalnie służą rekurencyjne funkcje użyteczności[3]. Niektórzy autorzy wprowadzają pojęcie „decyzji rekurencyjnych"[4]. Wyróżniają podejmowanie decyzji w warunkach pewności, ryzyka albo

---

[1] Asmussen S., Albrecher H.: *Ruin Probabilities (2nd Edition)*, World Scientific, New Jersey, 2010.

[2] Cossette H., Landriault D., Marceau E.: *Ruin probabilities in the discrete time renewal risk model*, "Insurance: Mathematics and Economics", 2006, nr 38.

[3] Strzalecki T.: *Temporal Resolution of Uncertainty and Recursive Models of Ambiguity Aversion*, Department of Economics, Harvard University, 2009.

[4] Ross W. T., Chapman Moore M., Staelin R.: *Recurrent Marketing Decisions: Decision Complexity, Decision Focus, and Firm Performance*, "Marketing Letters", 2000, nr 11.

niepewności. W zależności od tych warunków istnieją różne modele i funkcje użyteczności.

Druga grupa zajmuje się obliczeniem prawdopodobieństwa zaistnienia ruiny i bazuje na klasycznym modelu ryzyka[5,6]. Określenie procesu zaistnienia (lub nie) ruiny implikuje modelowanie nadwyżek ubezpieczyciela. W wyżej wspomnianych modelach może być uwzględniany proces odnawialnego ryzyka (zwykły, opóźniony lub stacjonarny). Dla dyskretnych modeli z ograniczeniami wykorzystano funkcje karne[7].

2. Podejmowanie decyzji: ryzyko i niepewność oraz złożoność i punkt skupienia

Podejmowanie decyzji leży u podstaw dowolnego zarządzania. Celem teorii podejmowania decyzji jest pomoc osobom decydującym (OD), którzy natrafiają na bardzo złożone problemy wyboru między różnymi możliwymi alternatywami, biorąc pod uwagę konsekwencje każdej decyzji i preferencje decydenta.

W praktyce trudność podejmowania decyzji najczęściej powstaje z powodu dwóch problemów. Pierwszy wynika z procesu podejmowania decyzji, kiedy niektóre dane są wciąż niepewne. Drugi problem polega na ilości i złożoności parametrów (kryteria), które OD bierze pod uwagę. Przeważnie decyzje są podejmowane w warunkach niepewności i ryzyka.

Koncepcja niepewności (dwuznaczności) sięga do prac ekonomistów Keynes'a (1921) i Knight'a (1921). W przeciwieństwie do ryzyka, gdzie prawdopodobieństwo jest dobrze określone, niepewność charakteryzuje się niezdolnością decydenta do sformułowania konkretnego prawdopodobieństwa lub brakiem zaufania OD do jakiejś jednej wartości prawdopodobieństwa. Ellsberg'em (1961) zostało pokazane, że ludzie często dokonują wyborów, które nie mogą być uzasadnione przez unikalne prawdopodobieństwa, wykazując preferencje do wyborów ryzykownych, które są powiązane z niepewnością.

Obszar nauki o podejmowaniu decyzji w warunkach ryzyka (i niepewności) ma długą historię, zaczynając od wczesnych osiągnięć matematycznych B. Paskal'a. Pierwszym modelem, prawie niekwestionowanym przez około 60 lat, jest model oczekiwanej użyteczności, sformalizowany przez von Neumann'a i Morgenstern'a.

Matematycznie funkcję użyteczności można sformułować w następujący sposób: niech X jest zbiorem obiektów, dla których OD ma preferencję i R jest zbiorem wartości rzeczywistych. Niech $\succsim$ będzie relacją preferencji OD, przy której wyraz $x \succsim y$ znaczy, że decydent preferuje x niż y albo jest obojętnym między

[5] Liu S. X., Guo J. Y.: *Discrete Risk Model Revisited*, "Methodol Comput Appl Probab", 2006, nr 8.

[6] Lundberg F.: *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen, Återförsäkring av Kollektiv Risker*, Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1903.

[7] Gerber, H. U., Shiu, E. S. W.: *From ruin theory to option pricing*, AFIR Colloquium, Cairns, Australia, 1997.

x i y. $u : X \to R$ jest funkcją użyteczności reprezentującą $\succsim$ wtedy i tylko wtedy, jeśli

$$\forall x, y \in X, x \succsim y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

Gdy występuje wiele atrybutów, zbiór X będzie miał postać $X = X_1 \times X_2 \times ... \times X_n$. A funkcja $u : X \to R$ jest funkcją użyteczności reprezentującą $\succsim$ wtedy i tylko wtedy, jeśli
$\forall (x_1,..., x_n), (y_1,..., y_n) \in X, (x_1,..., x_n) \succsim (y_1,..., y_n) \Leftrightarrow u(x_1,..., x_n) \geq u(y_1,..., y_n)$.

2.1. Rekurencyjne funkcje użyteczności

Klasa funkcji użyteczności rekurencyjnych została zaproponowana jako uogólnienie rodziny funkcji użyteczności addytywnych, których ważną cechą jest właściwość do tworzenia odrębnej klasy addytywnej, co umożliwia ogromne oszczędności pamięci. Rekurencyjne funkcje użyteczności mają i inne istotne cechy funkcji addytywnych. W szczególności charakteryzuje ich właściwość zgodności w czasie, co z kolei pozwala na przeprowadzenie analizy dynamicznego programowania modeli optymalnego wzrostu oraz konkurencyjnych modeli równowagi[8].

Rekurencyjne użyteczności preferencji międzyokresowych najłatwiej sformułować za pomocą policzalnej nieskończoności przedziałów czasu $t = 1,2,...T,...$, gdzie istnieje jeden produkt uniwersalny, który może być użyty albo również zakumulowany. Opisanie kolejności preferencji wywołuje odrębność rekurencyjną.

Przyjęto, że c_t oznacza konsumpcję w czasie t. Konsekwencje poziomów konsumpcji $C = \{c_t\}_{t=1}^{\infty}$ są elementami przestrzeni wszystkich ciągów o wartościach rzeczywistych R^{∞}.

Użyteczność rekurencyjna uzależnia stopień niecierpliwości konsumenta od ścieżki jego konsumpcji. Przyjęte założenia, pozwalające na różne preferencje czasowe, identyfikują słabą odrębność między konsumpcją teraźniejszą a przyszłą. To powoduje reprezentację funkcji użyteczności w terminach funkcji agregatora, wyrażając użyteczność aktualnej ścieżki konsumpcji jako funkcję konsumpcji aktualnej, zaś użyteczność przyszłą otrzymano przez pozostałe okresy konsumpcji.

Najbardziej znanym agregatorem jest $W(c, y) = u(c) + \delta y$, który wywołuje addytywnie odrębną funkcję użyteczności $U(C) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1} u(c_t)$. Oczywiste, że $U(C) = u(c_1) + \delta U(SC)$, gdzie S jest operatorem przesunięcia ($SC = (c_2, c_3,...)$ dla $C \in R^{\infty}$). Parametr δ jest nazywany czynnikiem dyskontowania ($\delta \in (0,1)$), a $\delta^{-1} - 1 = \rho$ jest nazywana czystą stopą preferencji czasowej.

---

[8] Robert A., Becker, Boyd J. H. III.: *Recursive Utility: Discrete Time Theory*, Department of Economics, Florida International University, Miami, FL 33199, 2002.

Inny agregator $W(c,y)=(-1+y)\exp[u(c)]$, wykorzystany Epstein'em i Hynes'em (1983), wywołuje inną postać funkcji użyteczności:

$$U(C)=-\sum_{t=1}^{\infty}\exp[-\sum_{T=1}^{t}u(c_T)].$$

Klasa funkcji użyteczności rekurencyjnej ma na celu wprowadzenie pewnego stopnia ogólności, uzgodnionego z preferencjami w czasie, zabezpieczenie planowania optymalnego według czasu oraz zachowanie większości dogodności analitycznych odrębnej klasy addytywnej.

2.2. Użyteczność rekurencyjna i awersja do niepewności

Dalsze badania w tym kierunku doprowadziły do powstania nowej klasy modeli, mianowicie modeli awersji do niepewności (niejednoznaczności). Awersja do niepewności (AN) była centralnym tematem w teorii podejmowania decyzji w ostatnich latach, co spowodowało pojawienie wielu eleganckich formalnych modeli. Używanie tych modeli obejmuje rekurencyjną postać, gdzie niepewność jest rozwiązywana z upływem czasu[9]. Modele opisują proces podejmowania decyzji w warunkach niepewności w czasie, wykorzystując rekurencyjną funkcję użyteczności (oraz agregator W). Większość modeli awersji OD do niepewności wykazują nieobojętność wobec czasu (np., decydent będzie wolał zapłacić wyższą cenę za wcześniejsze „rozwiązanie" niepewności).

Modele wyboru, w których ważne było uzgodnienie z czasem, zostały po raz pierwszy formalnie opisane w kontekście ryzyka Kreps'em i Porteus'em (1978), a później rozszerzone i z sukcesem zastosowane dla wyceny aktywów[10]. W tych modelach nieobojętność wobec czasu została uzyskana przy założeniu nieliniowego agregatora użyteczności konsumpcji aktualnej i wartości konsumpcji poprzedniej.

Dla opisania tych modeli zrobiono kilka założeń. Przypuśćmy, że S jest zbiorem stanów, Σ jest algebrą zdarzeń i X jest zbiorem konsekwencji (założono, że jest wypukłym podzbiorem przestrzeni liczb rzeczywistych). Realizacją jest Σ-mierzalna funkcja prosta $f:S\to X$. Niech $B_0(\Sigma)$ oznacza zbiór wszystkich wartości rzeczywistych Σ-mierzalnych funkcji prostych, a $B_0(\Sigma,K)$ będzie zbiorem wszystkich funkcji takich, dla których $K\subseteq R$. $\Delta(\Sigma)$ jest zbiorem wszystkich skończonych miar addytywnych prawdopodobieństwa (S,Σ). Czas jest dyskretnym i zmienia się w $T=\{0,1,...,T\}$. Zbiorem stanów w czasie będzie $\Omega=ST$.

Tak więc, w czasie t decydent zna realizacje niepewności do czasu t, ale jest nieświadomy przyszłości. Niech $\omega^t=(s_1,...,s_T)$ będzie historią spostrzeżeń po

[9] Pierwszy teoretyczny wkład Schmeidler'em (1989), później rozwinięty Gilboa i Schmeidler'em (1989), Epstein'em (1999), Epstein'em i Zhang'em (2001), Ghirardato i Marinacci (2002), Klibanov'ym, Marinacci, i Mukerji (2005), Maccheroni, Marinacci, i Rustichini (2006), Cerreia-Vioglio, Maccheroni, Marinacci, i Montrucchio (2008), oraz inni.

[10] Na przykład, Epstein and Zin (1989, 1991), Weil (1989, 1990), and Tallarini (2000).

czasie t. Plany konsumpcyjne będą $h = (h_0, h_1, ..., h_T)$, gdzie $h_t : \Omega \to X$. I H będzie zbiorem wszystkich planów konsumpcyjnych. Rodzina relacji $\{ \succsim_{t,\omega} \}_{(t,\omega) \in T \times \Omega}$ do H opisuje preferencje warunkowe decydenta.

Teraz można opisać dyskontowaną awersję OD do niepewności, przy $V_t : \Omega \times H \to R$ w postaci rekurencyjnej dla $t < T$:

$$V_t(\omega, h) = u(h_t(\omega)) + \beta I(V_{t+1}(\cdot, h)),$$

gdzie $u : X \to R$ jest afiniczną funkcją użyteczności, $\beta \in (0,1)$ jest czynnikiem dyskontującym, $I : B_0(\Sigma, u(X)) \to R$ – funkcjonał kosztów znormalizowany, monotoniczny, ciągły i kwaziwklęsły.

Rekurencyjną AN sformułujemy za pomocą agregatora W (wg wiadomego wzoru z podrozdziału 2.1), przy $V_t : \Omega \times H \to R$ w postaci rekurencyjnej dla $t < T$:

$$V_t(\omega, h) = W(h_t(\omega), I(V_{t+1}(\cdot, h)))$$

gdzie $u : X \to R$, $W(x, y) = u(x) + \delta y$ i $W : X \times D_0 \to R$ jest ciągłym, rosnącym i nieograniczonym w drugim argumencie, oraz $I : B_0(\Sigma, D_0) \to R$ jest funkcjonałem kosztów znormalizowanym, monotonicznym, ciągłym i kwaziwklęsłym.

2.3. Rekurencyjne decyzje marketingowe

Koncentrując swoją uwagę na ryzyku (i niepewności) w procesie podejmowania decyzji, należy również uwzględniać inne kryteria, wpływające na OD i konsekwentnie na jego wynik. Jednymi z istotnych kryteriów mogą być złożoność i punkt skupienia decyzji. Większość decyzji, które są podejmowane przez, na przykład, menedżerów marketingowych, można określić jako decyzje „rekurencyjne" (nie „jednorazowe"). Formowanie ceny, zarządzanie dostępnością towarów są również decyzjami rekurencyjnymi. Decyzje rekurencyjne są ważne dla firmy w takim stopniu, jak i decyzje strategiczne, jednorazowe.

W tej części artykułu rozpatrzono jeden wielki naukowy eksperyment zrobiony Ross'em, Moore'em and Staelin'em (2000)[4], w jakim został zbadany proces podejmowania przez menedżerów decyzji w takich kierunkach jak: formowanie ceny, reklamowanie oraz jakość produkcji. Autorzy postanowili uwzględnić dwa główne kryteria. Pierwszym jest punkt skupienia decyzji, (czyli skupienia OD). Na przykład, czy menedżerowie zwracają większą uwagę na czynniki zewnętrzne, czynniki wewnętrzne lub na oba w równym stopniu. Drugim kryterium jest złożoność decyzji.

Struktura reguły decyzyjnej została sformułowana w zakresie postrzegania przez menedżerów pewności (albo niepewności) powiązania czynnika i wyników decyzji. Zgodnie z tym autorzy zakładają, że jeżeli menedżerowie nie są w stanie określić związku między zmienną decyzyjną a celem, oni raczej skorzystają z uproszczonej heurystyki (odwrotnie do bardziej złożonych reguł).

Dla oceny wydajności firm został wybrany jednookresowy ROI. To znaczy, że dla analizy działania firmy w czasie t były wykorzystane charakterystyki decyzji w czasie $t-1$ (ponieważ skutki od przyjętych decyzji produkcyjnych są opóźnione na jeden okres). Ostateczne równanie jest sformułowane w postaci:

$$P_{jt} = g_1(X_{ij,t}) + g_2(X_{ij,t-1}) + g_3(X_{ij,t}) + C_{jt} + e_{jt},$$

gdzie P_{jt} jest wynikiem działania na rynku firmy j w czasie t, $g_1(X_{ij,t})$ jest wektorem atrybutów, co zawiera wpływ złożoności i skupienia dla decyzji i (1 – formowanie ceny, 2 – jakość produkcji, 3 - reklamowanie) firmy j w czasie t. C_{jt} charakteryzuje wektor czynników sterujących, e_{jt} – błąd losowy.

Na podstawie otrzymanych wyników można stwierdzić, że złożoność reguły decyzyjnej znacznie się zmienia w zależności od istoty tej reguły. Również udział czynników wewnętrznych został dodatnio proporcjonalny do trudności wyznaczenia powiązań między zmienną decyzyjną a wydajnością firmy. Zgodnie z oczekiwaniami, wydajność firmy się zwiększyła, gdy menedżerowie wykorzystywali nową informację w regułach formowania ceny, ale złożoność decyzji nie wykazała żadnego niezależnego efektu na wydajność firmy[4]. Co ważne, że w zadaniach reguł decyzyjnych firmy mają do czynienia z bardziej prostym, mniej niepewnym oraz rekurencyjnie taktycznym procesem podejmowania decyzji.

3. Teoria ruiny oraz klasyczny model ryzyka

W działaniu firm i praktyce menedżerskiej ważną rolę odgrywa zarządzanie ryzykiem, w tym analiza ryzyka inwestycyjnego. Jednym ze szczegółowo istotnych zagadnień z kategorii zarządzania kryzysowego jest także zarządzanie ryzykiem.

Teoria ruiny (czasami jest odnoszona do teorii ryzyka kolektywnego) należy do nauki aktuarialnej, i zajmuje się wrażliwością ubezpieczyciela na niewypłacalność za pomocą modelowania matematycznego nadwyżek ubezpieczyciela. W nauce aktuarialnej, szczególnie w teorii ryzyka, prawdopodobieństwo zaistnienia ruiny jest głównym obszarem badań. Matematycznie, teoria ruiny jest ściśle powiązana z teorią kolejek. Obie teorie mają wspólną metodologię. Bardzo często ten sam wynik może być wykorzystany w obu obszarach i mieć różną interpretację.

Teoretyczna podstawa teorii ruiny, znana jako klasyczny model ryzyka rozkładu sprężonego Poissona, w literaturze została wprowadzona w 1903 roku przez szwedzkiego aktuariusza Filip'a Lundberg'a. W większości przypadków głównym celem modelu i jego rozszerzenia było obliczenie prawdopodobieństwa końcowej ruiny. Teoria ruiny uyzskała znaczną popularność wraz z artykułami Powers'a[11] i Gerber, Shiu[12] w 1998 roku, w których została zaprezentowana

---

[11] Powers, M. R.: *A theory of risk, return, and solvency*, "Insurance: Mathematics and Economics", 1995, nr 17 (2).

[12] Gerber H. U., Shiu E. S. W.: *On the time value of ruin*, "North American Actuarial Journal", 1998, nr 2 (1).

oczekiwana dyskontowana funkcja karna jako uogólnienie prawdopodobieństwa końcowej ruiny. Te fundamentalne prace doprowadziły do pojawienia się dużej ilości artykułów i opracowań w literaturze ruiny, wywołując różnorodne modele ryzyka.

3.1. Model klasyczny

Tradycyjnie, nadwyżka ubezpieczyciela jest modelowana jako wynik dwóch przeciwstawnych przepływów pieniężnych (cash flow – CF): nadchodzącego CF składek ubezpieczeniowych, gromadzonego w sposób ciągły z szybkością c, oraz wychodzącego CF zgodnie z kolejnością roszczeń ubezpieczeniowych $Y_1, Y_2, ..., Y_i, ...$, które są wzajemnie niezależne i jednakowo rozprowadzane z wspólną funkcją rozkładu $P(y)$. W modelu zostało założone, że nadchodzące roszczenia opisują proces Poissona ze stopą intensywności λ, która oznacza ilość poniesionych roszczeń $N(t)$ w czasie t, określonych rozkładem Poissona ze średnią λt. Konsekwentnie, proces ryzyka i proces nadwyżek ubezpieczyciela w dowolnym czasie t będą wyznaczane wzorami:

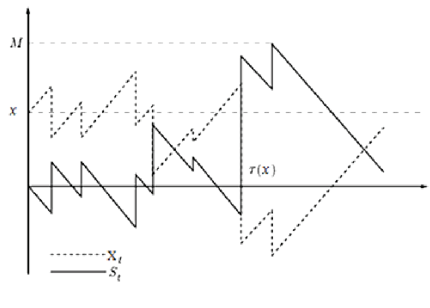
$$X(t) = x + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} Y_i,$$

$$S(t) = \sum_{i=0}^{N(t)} Y_i + ct$$

gdzie interes ubezpieczyciela zaczyna się od pierwotnego poziomu $X(0) = x$ z prawdopodobieństwem P^x.

Celem modelu Lundberg'a było zbadanie prawdopodobieństwa tego, że poziom nadwyżki ubezpieczyciela w końcu spada poniżej zera (doprowadzając firmę do bankructwa). Ta wielkość jest nazywana prawdopodobieństwem końcowej ruiny i jest wyznaczona, jak $\psi(x) = P^x\{\tau < \infty\}$, gdzie $\tau = \inf\{X(t) < 0\}$ jest czasem ruiny, przy warunku $\inf \emptyset = \infty$ [6].

Rysunek 1. Przykład trajektorii procesów ryzyka i nadwyżek i powiązanie między nimi



Źródło: Asmussen S., Albrecher H.: *Ruin Probabilities (2nd Edition)*, World Scientific, New Jersey, 2010, s. 2.

Dokładne rozwiązania oraz asymptotyczne przybliżenia prawdopodobieństwa ruiny w dużym stopniu opierają się na technikach teorii odnowy[1].

3.2. Prawdopodobieństwo zaistnienia ruiny w dyskretnym modelu odnawialnego ryzyka

Zastanówmy się nad dyskretnym modelem odnawialnego ryzyka, który jest rozszerzeniem binominalnego złożonego modelu Gerber'a, który został zbadany w literaturze aktuarialnej, między innymi w artykułach Pavlov'ej, Willmot'a (2004)[13] oraz Li (2005)[14].

W takim modelu należy zakładać, że kolejne roszczenia są opisane dyskretnym procesem odnawialnym. Proces $\underline{N} = \{N_k, k \in N^+\}$ nazywa się procesem odnowialnym zwykłym, jeśli ciąg niezależnych i ścisłe dodatnich zmiennych całkowitych losowych $\{T_j, j \in N^+\}$ jest identycznie rozłożony z funkcją prawdopodobieństwa f_T oraz funkcja rozkładu kumulatywna $F_T(x) = 1 - \overline{F}_T$. Dopuszczanie, że T_1 ma taki sam rozkład z $T_2, T_3, ...$ jest ekwiwalentne pojawieniu się odnowienia w czasie 0. W przypadku, gdy rozkład T_1 się różni od $T_2, T_3, ...$, proces $\underline{N}$ nazywają odnawialnym opóźnionym. Jeżeli rozkład T_1 jest równomiernym, $\underline{N}$ nazywa się procesem odnawialnym stacjonarnym[2].

Proces nadwyżki będzie $\underline{U} = \{U_k, k \in N\}$ z $U_0 = u$ i $U_k = u + ck - S_k$ dla $k \in N^+$, gdzie u ($u \in N$) jest początkowym poziomem nadwyżki, c ($c \in N^+$) określa poziom składki otrzymanej za przedział czasu. Jak i w poprzednim przypadku (patrz 3.1), zauważono, że czas ruiny $\underline{U}$ jest $\tau = \inf_{k \in N^+} \{k; U_k < 0\}$ (z $\tau = \infty$, $U_k \geq 0$ dla $\forall k \in N$). Niech $\psi(u,n) = E[1_{\{\tau \leq n\}}]$ i $\psi(u) = E[1_{\{\tau < \infty\}}]$ są prawdopodobieństwami ruiny czasu skończonego i nieskończonego odpowiednio, z indykatorem $1_A = 1$, jeśli A – zajście zdarzenia, 0 – brak zajścia. Ich komplementami (prawdopodobieństwami nie zaistnienia ruiny) czasu skończonego i nieskończonego są odpowiednio $\phi(u,n)$ i $\phi(u)$. Dla zapewnienia, że $\psi(u)$ w dyskretnym modelu odnawialnego ryzyka dąży do 0 z $u \to \infty$, przyjęto, że stopa składki $cE[T] > E[X]$.

Gdy $\underline{N}$ jest procesem odnawialnym zwykłym, rozwiązaniem dyskretnego równania odnawialnego będzie (dopuszczając $E[N_0] = 0$):

$$E[N_k] = F_T(k) + \sum_{j=1}^{k} E[N_{k-j}] f_T(j), \; k \in N^+.$$

Dla takiego procesu prawdopodobieństwo nie zaistnienia ruiny w czasie skończonym (przy $u \in N, n \in N^+$ i $\phi(y,0) = 1_{\{y \in N\}}$) wynosi:

[13] Pavlova K. P., Willmot G. E.: *The discrete stationary renewal risk model and the Gerber–Shiu discounted penalty function*, "Insurance: Mathematics and Economics", 2004, nr 35.

[14] Li S.: *On a class of discrete time renewal risk models*, "Scandinavian Actuarial Journal", 2005.

$$\phi(u,n) = \sum_{j=1}^{n} f_T(j) \sum_{i=1}^{u+cj} f_X(i)\phi(u+cj-i, n-j) + \overline{F}_T(n) \cdot$$

3.3. Funkcje karne w dyskretnym stacjonarnym modelu odnawialnego ryzyka

Funkcje karne (ang. Penalty Function) w ciągu dziesięcioleci były częścią literatury ograniczonej optymalizacji. Istnieją trzy stopnie funkcji karnych: metody barierowe, w których są nie rozpatrywane nierealizowalne rozwiązania; cząstkowe funkcje karne, w których kara jest odnoszona do obszaru w pobliżu granicy realizowalności funkcji i globalne funkcje karne, które są stosowane na całym obszarze nierealizowalności[15]. Metody funkcji karnych są pewną klasą algorytmów, służących do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych. Metoda ta zmniejsza problemy znalezienia względnego ekstremum funkcji do zadania znalezienia absolutnego ekstremum[16].

Wróćmy znów do dyskretnego stacjonarnego modelu odnawialnego ryzyka (opisanego w 3.2). Już wiadomo, że nadchodzenie kolejnych roszczeń jest regulowane dyskretnym procesem odnawialnym $\{N_t, t \geq 0\}$ z niezależnymi i identycznie rozłożonymi przedziałami czasu między roszczeniami $\{V_1, V_2, ...\}$, mając funkcję kumulatywną rozkładu $K(x) = 1 - \overline{K}(x)$ i funkcję prawdopodobieństwa $k(x) = \overline{K}(x-1) - \overline{K}(x)$, $x \in N^+$. Poszczególne kwoty roszczeń $\{L_1, L_2, ...\}$ są zmiennymi losowymi z funkcją kumulatywną rozkładu $F(x) = 1 - \overline{F}(x)$ i funkcją prawdopodobieństwa $f(x)$, $x \in N^+$. Dalej założono, że $k(0) = 0$ w celu rozważania nie więcej, niż jednego roszczenia w określonym punkcie czasowym i że $f(0) = 0$ w celu uniknięcia nie powiększających roszczeń.

Nadwyżką ubezpieczyciela w czasie t jest $U_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_t} L_i$, gdzie nadwyżka pierwotna i $(1+\theta)E\{L_1\}/E\{V_2\} = 1$, $\theta \geq 0$. Ruina następuje zatem gdy nadwyżka spada poniżej zera: $T = \inf\{t \in N^+ : U_t < 0\}$. Jeśli w dyskretnym modelu odnawialnym zwykłym $T = \infty$, to przyjęto, że ruina się nie pojawia. Zauważmy, że w przypadku zaistnienia ruiny, $|U_T|$ jest deficytem w czasie ruiny, U_{T-} jest nadwyżką bezpośrednio przed ruiną. Dyskontowana funkcja karna Gerber–Shiu:

$$m(u) = E\{v^T w(U_{T-}, |U_T|) I(T < \infty) \,|\, U_0 = u\}, \qquad (3.2.1)$$

gdzie $v \in (0,1]$ jest czynnikiem dyskontowania, $w(u_1, u_2) : N^+ \times N^+ \to N$, oraz jest $I(E)$ funkcją wydarzenia E, wskazująca 1, jeśli wydarzenie się pojawiło, 0 – inaczej[14].

[15] Schwefel H.P.: *Evolution and Optimum Seeking*, John Wiley & Sons, 1995.

[16] Smith A. E., Coit D. W.: *Handbook of Evolutionary Computation*, Section C 5.2 Penalty Functions, Department of Industrial Engineering, University of Pittsburgh, USA, 1995.

Jeśli T_e i T_* odpowiadają czasowi zaistnienia ruiny dla dyskretnego modelu odnawialnego ryzyka równoważnego i dla złożonego modelu binominalnego odpowiednio, to odpowiednie funkcje karne są opisane wzorami:

$$m_e(u) = E\{v^{T_e} w(U_{T_e-}, |U_{T_e}|) I(T_e < \infty) \,|\, U_0 = u\}, \tag{3.2.2}$$

$$m_*(u) = E\{v^{T_*} w(U_{T_*-}, |U_{T_*}|) I(T_* < \infty) \,|\, U_0 = u\}. \tag{3.2.3}$$

Najważniejszym wynikiem pracy[14] jest dowód twierdzenia o tym, że dyskontowane funkcje karne Gerber–Shiu (3.2.1) i (3.2.2) mogą być przedstawione za pomocą:

$$m_e(u) = \frac{1}{1+\theta} \sum_{i=0}^{u} m(u-i) f_1(i+1) + v_v(u), \quad u \in N \cdot$$

4. Podsumowanie

W naukach o zarządzaniu i w praktyce stosunkowo rzadko wykorzystywane są modele matematyczne. W pracy zwrócono uwagę na aplikacyjność modeli rekurencyjnych, co powinno dać lepsze formalne podstawy do badań i wdrożeń, niż nadużywany niekiedy aparat statystyczny. W artykule pokazano znaczenie zastosowania rekurencyjnych modeli w zarządzaniu oraz przedstawiono istniejące w literaturze przykłady ich wykorzystania. Modele te najczęściej uwzględniają czynnik ryzyka. Analiza artykułów poświęconych rekurencyjnym modelom w kontekście zarządzania oraz pojawieniu się czynników ryzyka wyjawiła, że najwięcej naukowej uwagi skupiono wokół dwóch zagadnień: podejmowania decyzji oraz zaistnienia ruiny. Proces podejmowania decyzji został rozważony w warunkach ryzyka i niepewności, oraz z uwzględnieniem parametrów złożoności i punktu skupienia decyzji. Zagadnienie ruiny zostało określone od początkowego klasycznego modelu ryzyka do modeli odnawialnego ryzyka z wykorzystaniem funkcji karnych.

DISCRETE MODELING IN MANAGEMENT

Abstract

There is a deficient usage of mathematical models in the science and manager's practice. This paper highlights the applicability of recursive models, which should give a more formal basis for the research and implementation, than the overused statistical apparatus. The article shows an importance of using the recursive models in a management and the examples of their application in a present literature. The described models usually take into account a risk factor. Analysis of the articles, that are concerned recursive models in a context of management and with the regard of risk factors revealed, that the most scientific attention is concentrated on two issues: the decision-making and the ruin appearance. The decision making process has been considered in terms of risk and uncertainty, as

well as taking into account the complexity of the parameters and the decision focus. The ruin theory has been determined from the initial classical risk model to renewable risk models using penalty function.

Bibliografia:

Asmussen S., Albrecher H.: *Ruin Probabilities (2nd Edition)*, World Scientific, New Jersey, 2010.

Cerreia-Vioglio S., Maccheroni F., Marinacci M., Montrucchio L.: *Uncertainty Averse Preferences*, Mimeo, 2008 .

Cossette H., Landriault D., Marceau E.: *Ruin probabilities in the discrete time renewal risk model*, Insurance: Mathematics and Economics, 2006, nr 38.

Epstein L. G., Wang T.: *Intertemporal Asset Pricing under Knightian Uncertainty*, "Econometrica", 1994, nr 62.

Epstein L. G., Zhang J.: *Subjective Probabilities on Subjectively Unambiguous Events*, "Econometrica", 2001, nr 69.

Epstein L. G., Zin S.: *Substitution, Risk Aversion, and the Temporal Behavior of Consumption and Asset Returns: An Empirical Analysis*, "Journal of Political Economy", 1991, nr 99.

Epstein L. G.: *A Definition of Uncertainty Aversion*, "Review of Economic Studies", 1999, nr 66.

Gerber H. U., Shiu E. S. W.: *From ruin theory to option pricing*, AFIR Colloquium, Cairns, Australia, 1997.

Gerber H. U., Shiu E. S. W.: *On the time value of ruin*, "North American Actuarial Journal", 1998, nr 2(1).

Ghirardato P., Marinacci M.: *Ambiguity Made Precise: A Comparative Foundation*, "Journal of Economic Theory", 2002, nr 102.

Gilboa I., Schmeidler D.: *Maxmin expected utility with non-unique prior*, "Journal of Mathematical Economics", 1989, nr 18.

Klibanoff P., Marinacci M., Mukerji S.: *A smooth model of decision making under ambiguity*, "Econometrica", 2005, nr 73.

Li S.: *On a class of discrete time renewal risk models*, "Scandinavian Actuarial Journal", 2005.

Liu S. X., Guo J. Y.: *Discrete Risk Model Revisited*, "Methodol Comput Appl Probab", 2006, nr 8.

Lundberg F.: *Approximerad Framställning av Sannolikhetsfunktionen, Återförsäkring av Kollektiv Risker*, Almqvist & Wiksell, Uppsala, 1903.

Maccheroni F., Marinacci M., Rustichini A.: *Ambiguity Aversion, Robustness and the Variational Representation of Preferences*, "Econometrica", 2006, nr 74.

Pavlova K. P., Willmot G. E.: *The discrete stationary renewal risk model and the Gerber–Shiu discounted penalty function*, "Insurance: Mathematics and Economics", 2004, nr 35.

Powers, M. R.: *A theory of risk, return and solvency*, "Insurance: Mathematics and Economics", 1995, nr 17 (2).

Robert A., Becker, Boyd J. H. III.: *Recursive Utility: Discrete Time Theory*, Department of Economics, Florida International University, Miami, FL 33199, 2002.

Ross W. T., Chapman Moore M., Staelin R.: *Recurrent Marketing Decisions: Decision Complexity, Decision Focus and Firm Performance*, "Marketing Letters", 2000, nr 11.

Schmeidler, D.: *Subjective Probability and Expected Utility without Additivity*, "Econometrica", 1989, nr 57.

Schwefel H.P.: *Evolution and Optimum Seeking*, John Wiley & Sons, 1995.

Smith A. E., Coit D. W.: *Handbook of Evolutionary Computation*, Section C 5.2 Penalty Functions, Department of Industrial Engineering, University of Pittsburgh, USA, 1995.

Strzalecki T.: *Temporal Resolution of Uncertainty and Recursive Models of Ambiguity Aversion*, Department of Economics, Harvard University, 2009.

Tallarini T. D.: *Risk-sensitive real business cycles*, "Journal of Monetary Economics", 2000, nr 45.

Weil P.: *Nonexpected Utility in Macroeconomics*, "Quarterly Journal of Economics", 1990, nr 105.

Weil P.: *The equity premium puzzle and the risk-free rate puzzle*, "Journal of Monetary Economics", 1989, nr 24.