

MOMENTY BEZWŁADNOŚCI, RÓWNANIE KRĘTU I ENERGIA KINETYCZNA CIAŁA SZTYWNEGO W UKŁADZIE PARASOLA

*Praca wprowadza momenty bezwładności ciała sztywnego dla układu parasola związanego z dowolną osią oraz z osią chwilowego obrotu ciała w ruchu kulistym. Dla układu parasola związanego z chwilową osią obrotu wyznaczono równanie krętu oraz wartość energii kinetycznej ciała. Wykorzystano zapis w postaci multiiloczynów wektorów oraz macierzowy, z użyciem diad iloczynów skalarnych i wektorowych.
Słowa kluczowe: ruch kulisty, moment bezwładności, równanie krętu, diada*

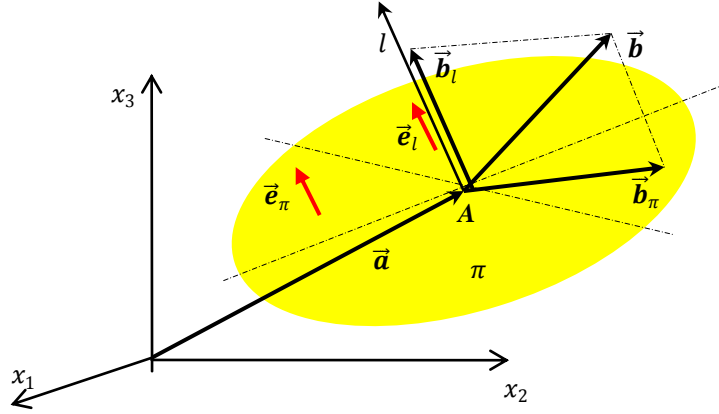
MASS MOMENTS OF INERTIA, EQUATION OF ANGULAR MOMENTUM AND KINETIC ENERGY OF A RIGID BODY IN AN UMBRELLA SYSTEM

*This paper introduces mass moments of inertia of a rigid body for an umbrella system bound to any axis and subsequently for an umbrella system bound to the axis of momentary rotation of a body in spherical motion. For an umbrella system bound to the axis of momentary rotation an equation of angular momentum and a formula for the kinetic energy of the body are derived. Two notations are used: multiproducts of vectors and matrices (using dyads of scalar and vector products).
Keywords: spherical motion, mass moment of inertia, equation of angular momentum, dyad*

1. UKŁAD PARASOLA

Przyjęto w pracy istnienie trójwymiarowej przestrzeni kartezjańskiej \mathbf{R}^3 , która opisana jest bazą ortonormalną \vec{e}_i ($i = 1,2,3$).

Układ trzech elementów: dowolny punkt A w przestrzeni \mathbf{R}^3 , dowolna prosta l przechodząca przez ten punkt oraz płaszczyzna π , prostopadła do prostej l w tym punkcie, nazwano w pracy „parasolem”. Nazwę tę tłumaczy kształt układu w przestrzeni trójwymiarowej (rys. 1). Położenia parasola w przestrzeni określają współrzędne punktu A (współrzędne wektora \vec{a} ; $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$) oraz współrzędne wersora prostej l parasola i zarazem wersora płaszczyzny parasola π , ($\vec{e}_l = \vec{e}_\pi$; $\mathbf{e}_l = [c_{11} \ c_{12} \ c_{13}]^T$).



Rys. 1 Układ parasola

Parasol tworzy w przestrzeni \mathbf{R}^3 swoisty układ odniesienia, w którym można - w stosunkowo prosty sposób - opisać dowolny wektor \vec{b} oraz iloczyn wektorowy dwóch wektorów $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$. Rzuty wektora \vec{b} na elementy parasola w pokazano na rysunku 1. Jeżeli wektor \vec{b} jest opisany macierzą współrzędnych $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3]^T$, to jego rzuty \vec{b}_l i \vec{b}_π , w zapisie wektorowym i macierzowym mają postać

$$\vec{b}_l = (\vec{b}\vec{e}_l)\vec{e}_l \quad ; \quad \mathbf{b}_l = \mathbf{P}_{e_l e_l} \mathbf{b}, \quad (1)$$

$$\vec{b}_\pi = \vec{b} - \vec{b}_l \quad ; \quad \mathbf{b}_\pi = \mathbf{b} - \mathbf{b}_l = (\mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_{e_l e_l}) \mathbf{b}, \quad (2)$$

gdzie \mathbf{I}_3 jest macierzą jednostkową trzeciego stopnia, natomiast macierz $\mathbf{P}_{e_l e_l}$ jest diadą, macierzą iloczynu zewnętrznego dwóch wektorów, której postać, własności i funkcje spełniane w zapisie multiiloczynów opisano w pracach [3,4].

Wektor iloczynu wektorowego $\vec{w} = \vec{a} \times \vec{b}$ (gdy \vec{a} ; $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3]^T$) może być w przestrzeni \mathbf{R}^3 zapisany w jednej z dwóch postaci macierzy, macierzy kolumnowej \mathbf{w} lub wierszowej \mathbf{w}^T

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \mathbf{w}^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^*, \quad (3)$$

gdzie wyrazy obu diad iloczynu wektorowego - macierzy \mathbf{P}_{ae}^* oraz \mathbf{P}_{eb}^* - równe są odpowiednio

$$\mathbf{P}_{ae}^* = [p_{ij}] = [\sum_{k=1}^3 \{sgn(i-j)(k-i)(k-j)\} a_k], \quad (i,j=1,2,3), \quad (4)$$

$$\mathbf{P}_{eb}^* = [p_{ij}] = [\sum_{k=1}^3 \{sgn(i-j)(k-i)(k-j)\} b_k], \quad (i,j=1,2,3). \quad (5)$$

Rzut wektora \vec{w} na oś l parasola, $\vec{w}_l = (\vec{w}\vec{e}_l)\vec{e}_l$, ma postać jednej z macierzy

$$\mathbf{w}_l = \mathbf{P}_{e_l e_l} \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} \quad \text{lub} \quad \mathbf{w}_l^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* \mathbf{P}_{e_l e_l}. \quad (6)$$

Rzut wektora \vec{w} na płaszczyznę π parasola, $\vec{w}_\pi = \vec{w} - \vec{w}_l = \vec{w} - (\vec{w}\vec{e}_l)\vec{e}_l$, ma współrzędne w postaci macierzy kolumnowej \mathbf{w}_π lub wierszowej \mathbf{w}_π^T

$$\mathbf{w}_\pi = \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} - \mathbf{P}_{e_l e_l} \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} = \mathbf{P}_{ae}^* \mathbf{b} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_{e_l e_l}), \quad (7)$$

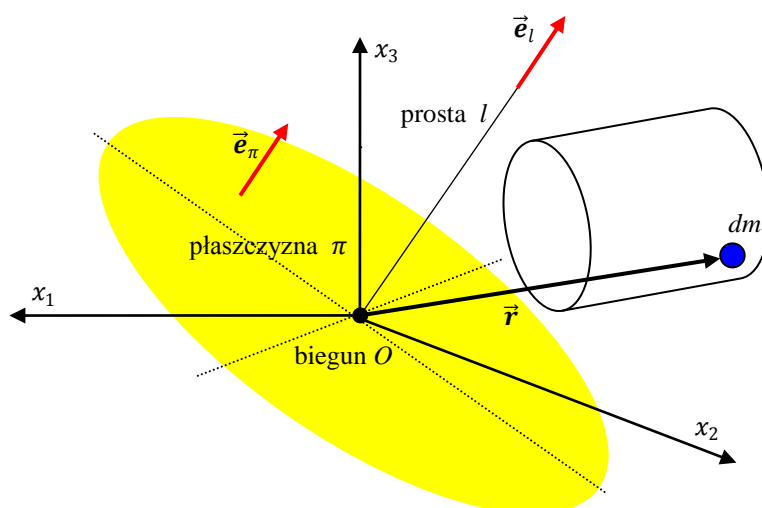
$$\mathbf{w}_\pi^T = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* - \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* \mathbf{P}_{e_l e_l} = \mathbf{a}^T \mathbf{P}_{eb}^* (\mathbf{I}_3 - \mathbf{P}_{e_l e_l}). \quad (8)$$

Pokazany tu układ parasola jest szczególnie przydatny przy opisie ruchu kulistego ciała sztywnego, zarówno dla analizy momentów bezwładności ciała, jak i wyrażenia parametrów kinematycznych lub opisu dynamiki ruchu.

Dla takiego opisu przyjęto układ parasola zawieszony w nieruchomym początku układu współrzędnych, który jest zarazem środkiem ruchu kulistego.

2. MOMENTY BEZWŁADNOŚCI CIAŁA SZTYWNEGO

Dowolny punktu ciała sztywnego jest punktem, którego położenie w układzie parasola określone jest wychodzącym z bieguna O promieniem-wektorem \vec{r} . Momenty bezwładności dowolnego, jednorodnego ciała sztywnego, obliczone względem elementów parasola, są sumami (całkami) iloczynów stopnia drugiego promienia-wektora \vec{r} , określającego położenie masy elementarnej dm oraz wersorów $\vec{e}_l = \vec{e}_\pi$, określających położenie parasola w przestrzeni \mathbf{R}^3 , jak to pokazano na rys. 2.



Rys. 2 Ciało sztywne w układzie parasola

Momenty bezwładności ciała sztywnego względem elementów parasola: względem bieguna O - J_0 ; prostej l - J_l oraz płaszczyzny π - J_π , wprowadzono w postaci całek z następujących kwadratów iloczynów skalarnych i iloczynów wektorowych [2,5]

$$J_0 = \iiint_m \vec{r}^2 dm ; J_l = \iiint_m (\vec{e}_l \times \vec{r})^2 dm ; J_\pi = \iiint_m (\vec{e}_\pi \vec{r})^2 dm \quad (9)$$

Wyrażenia podcałkowe równań (9) spełniają tożsamość Lagrange'a

$$(\vec{e}_l \times \vec{r})^2 = \vec{r}^2 - (\vec{e}_\pi \vec{r})^2,$$

z czego wynika, że

$$J_0 = J_l + J_\pi . \quad (10)$$

Dla dowolnego bieguna moment bezwładności ciała sztywnego względem tego bieguna jest sumą momentów bezwładności tego ciała względem każdej prostej poprowadzonej przez biegun i płaszczyzny prostopadłej do tej prostej również przechodzącej przez ten biegun.

Dla wektora \vec{r} , którego współrzędne tworzą macierz $\mathbf{r} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ zdefiniowano diadę \mathbf{P}_{rr} [3,4], czyli macierz postaci (11) oraz jej sumę (całkę) po całej masie m ciała,

stanowiącą *macierz płaszczyznowych momentów bezwładności ciała sztywnego* \mathbf{I}_{rr} (12), zawierającą na głównej przekątnej momenty bezwładności względem ortogonalnych płaszczyzn układu współrzędnych ($J_{ii} = \iiint_m x_i^2 dm$; $i = 1,2,3$), natomiast poza główną przekątą - odśrodkowe momenty bezwładności względem płaszczyzn układu współrzędnych ($J_{ij} = \iiint_m x_i x_j dm$). Macierz (12) jest całką z macierzy (11) w tym znaczeniu, że kolejne wyrazy macierzy (12) są całkami z odpowiednich wyrazów macierzy (11), co można zapisać w formie $\mathbf{I}_{rr} = \iiint_m \mathbf{P}_{rr} dm$. Wówczas

$$\mathbf{P}_{rr} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_3 \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_3 \\ x_3 x_1 & x_3 x_2 & x_3^2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{I}_{rr} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix}. \quad (11)(12)$$

Macierz płaszczyznowych momentów bezwładności ciała sztywnego \mathbf{I}_{rr} jest dopełnieniem macierzy (tensora) momentów bezwładności ciała sztywnego \mathbf{I} do macierzy diagonalnej \mathbf{I}_0 momentu bezwładności względem bieguna, której wyrazami jest stała wartość J_0 (9) momentu bezwładności ciała względem bieguna O . Jeśli bowiem

$$\mathbf{I}_0 = J_0 \mathbf{I}_3 \quad (13)$$

gdzie \mathbf{I}_3 jest macierzą jednostkową trzeciego rzędu, a kolejne momenty bezwładności J_i ciała względem osi układu współrzędnych oraz tensor momentów bezwładności ciała sztywnego \mathbf{I} mają odpowiednio postacie

$$J_i = \iiint_m (r^2 - x_i^2) dm, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} J_1 & -J_{12} & -J_{13} \\ -J_{21} & J_2 & -J_{23} \\ -J_{31} & -J_{32} & J_3 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

to oczywista jest tożsamość

$$\mathbf{I}_0 = \mathbf{I} + \mathbf{I}_{rr}. \quad (15)$$

Suma dwóch macierzy momentów bezwładności ciała sztywnego: tensora momentów bezwładności \mathbf{I} oraz macierzy płaszczyznowych momentów bezwładności \mathbf{I}_{rr} równa jest diagonalnej macierzy $\mathbf{I}_0 = J_0 \mathbf{I}_3$ biegunowego momentu bezwładności względem bieguna O , środka układu współrzędnych.

Moment bezwładności J_l ciała względem prostej l (9) parasola jest iloczynem tensora momentów bezwładności ciała stałego \mathbf{I} oraz macierzy współrzędnych wersora prostej $\mathbf{e}_l = [c_{l1} \ c_{l2} \ c_{l3}]^T$, liczbą zapisaną w postaci

$$J_l = \iiint_m (\vec{\mathbf{e}}_l \times \vec{\mathbf{r}})^2 dm = \mathbf{e}_l^T \mathbf{I} \mathbf{e}_l. \quad (16)$$

Moment bezwładności ciała J_π względem płaszczyzny π (9) parasola można, po tożsamościowym przekształceniu i skorzystaniu z własności (11) i (12), wyrazić jako iloczyn macierzy płaszczyznowych momentów bezwładności ciała \mathbf{I}_{rr} i macierzy współrzędnych wersora prostej $\mathbf{e}_l = [c_{l1} \ c_{l2} \ c_{l3}]^T$

$$J_\pi = \iiint_m (\vec{\mathbf{e}}_\pi \vec{\mathbf{r}})^2 dm = \iiint_m (\vec{\mathbf{e}}_\pi \vec{\mathbf{r}}) (\vec{\mathbf{r}} \vec{\mathbf{e}}_\pi) dm = \mathbf{e}_l^T (\iiint_m \mathbf{P}_{rr} dm) \mathbf{e}_l, \\ J_\pi = \mathbf{e}_l^T \mathbf{I}_{rr} \mathbf{e}_l. \quad (17)$$

Z własności (15) wynikają następujące wnioski:

- ponieważ moment bezwładności J_O ciała względem bieguna O ma dla ciała sztywnego wartość stałą, jego pochodna względem dowolnej zmiennej równa jest zero. Wynika z tego, że suma pochodnych odpowiednich wyrazów macierzy momentów bezwładności i macierzy płaszczyznowych momentów bezwładności względem dowolnej zmiennej τ jest „grą o sumie zero”,

$$\frac{dI}{d\tau} + \frac{dI_{rr}}{d\tau} = 0 . \quad (18)$$

- macierzową tożsamość (15) można pomnożyć lewo- i prawostronnie razy macierz e_l współrzędnych wersora dowolnej prostej l

$$e_l^T J_O I_3 e_l = e_l^T I e_l + e_l^T I_{rr} e_l$$

i, po wykorzystaniu (16) oraz (17), otrzymuje się tożsamość

$$J_O = J_l + J_\pi . \quad (19)$$

Moment bezwładności ciała sztywnego względem bieguna O , środka ortogonalnego układu współrzędnych, jest sumą momentów bezwładności tego ciała względem dwóch wzajemnie prostopadłych elementów, prostej l i płaszczyzny π , poprowadzonych przez ten biegun i tworzących układ parasola.

- macierzową tożsamość (15) można pomnożyć stronami prawostronnie razy macierz współrzędnych ω wektora prędkości kątowej ruchu kulistego $\vec{\omega}$, ($\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$) wybierając tym samym jako oś parasola kierunek wektora $\vec{\omega}$, a więc oś chwilowego obrotu ciała. Otrzymuje się wówczas - po uwzględnieniu (13) - macierzowe równanie krętu ruchu kulistego postaci

$$I_O \omega = I \omega + I_{rr} \omega . \quad (20)$$

- macierzową tożsamość (15) można pomnożyć stronami prawostronnie razy macierz ϵ współrzędnych wektora przyspieszenia kątowego ruchu kulistego $\vec{\epsilon}$ ($\epsilon = [\epsilon_1 \ \epsilon_2 \ \epsilon_3]^T$) i otrzymuje się wówczas – po uwzględnieniu (13) - macierzowe równanie dynamiczne ruchu kulistego postaci

$$I_O \epsilon = I \epsilon + I_{rr} \epsilon . \quad (21)$$

Równanie to wyprowadzone zostało w oddzielnej pracy, w postaci wektorowej i macierzowej.

3. ENERGIA I KRĘT CIAŁA SZTYWNEGO W RUCHU KULISTYM

Wyprowadzone wyżej zależności pozwalają na określenie energii kinetycznej oraz równania krętu ciała sztywnego w ruchu kulistym z wykorzystaniem układu parasola jako układu odniesienia.

Przyjęto, że ciało sztywne, zamocowane obrotowo w biegunie O , porusza się ruchem kulistym wokół chwilowej osi obrotu, której położenie w \mathbf{R}^3 określa wersor tej osi \vec{e}_ω o macierzy współrzędnych $e_\omega = [c_{\omega 1} \ c_{\omega 2} \ c_{\omega 3}]^T$, z prędkością kątową $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\omega$ ($\omega = [\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T$), której wektor leży na osi obrotu. Z środkiem ruchu kulistego O związane parasol o osi \vec{e}_ω i prostopadłej płaszczyźnie π , pokazany na rysunku 3.

Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu kulistym jest sumą energii wszystkich mas elementarnych $E = \frac{1}{2} \iiint_m \vec{v}^2 dm$ gdzie prędkość \vec{v} masy elementarnej dm , masy o położeniu określonym promieniem \vec{r} , jest iloczynem wektorowym $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$. Stąd, po uwzględnieniu (9) otrzymano

$$E = \frac{1}{2} \iiint_m \vec{v}^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \iiint_m (\vec{e}_\omega \times \vec{r})^2 dm = \frac{1}{2} J_\omega \omega^2. \quad (22)$$

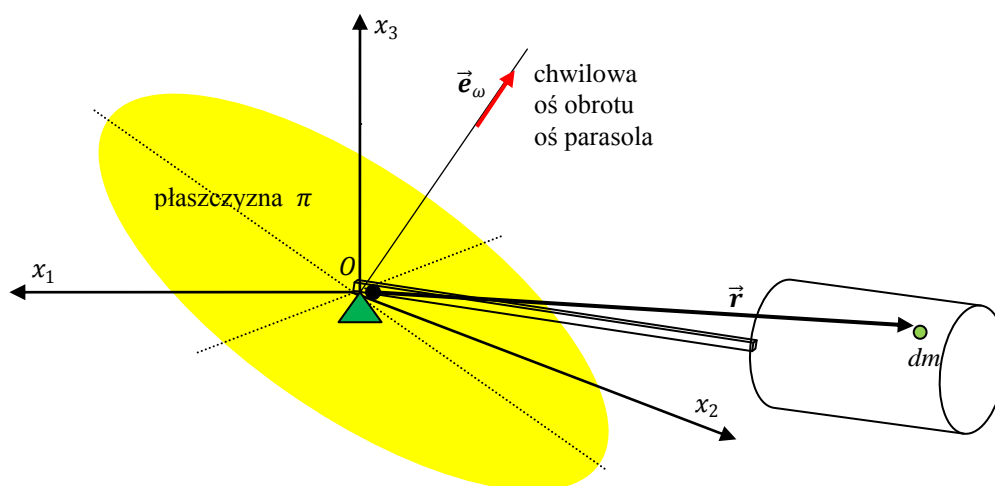
Energia kinetyczna ciała sztywnego w ruchu obrotowym wokół chwilowej osi obrotu zależy od momentu bezwładności ciała względem tej osi i kwadratu wartości chwilowej prędkości kątowej.

Równanie krętu dla ciała sztywnego w ruchu kulistym wynika z definicji krętu \vec{k}_O ciała obliczonego względem nieruchomego bieguna

$$\vec{k}_O = \iiint_m \vec{r} \times \vec{v} dm = \iiint_m \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm. \quad (23)$$

Wyrażenia podcałkowe jest podwójnym iloczynem wektorowym i jest tożsamościowo równe

$$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = r^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r}.$$



Rys. 3 Ruch kulisty ciała sztywnego

Wobec tego kręt \vec{k}_O ciała względem nieruchomego bieguna O ma postać

$$\vec{k}_O = \vec{\omega} \iiint_m r^2 dm - \iiint_m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} dm. \quad (24)$$

Ponieważ $\iiint_m r^2 dm = J_O$, pierwszy z członów prawej strony równania jest wektorem $\vec{k} = J_O \vec{\omega}$ leżącym zawsze na chwilowej osi obrotu, o długości zależnej tylko od wartości prędkości kątowej ω , bowiem moment bezwładności ciała względem bieguna O , J_O , ma wartość stałą.

Drugi z członów prawej strony równania (24), wyrażenie $\iiint_m (\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{r} dm$ jest wektorem krętu do tej pory niedefiniowanym, wektorem, który nazwano tu *krętem płaszczyznowym* i oznaczono \vec{k}_{rr} .

Wobec tego równanie krętu (24) przybiera postać

$$\vec{k} = \vec{k}_0 + \vec{k}_{rr} \quad (25)$$

Z równania wynika, że kręt

$$\vec{k} = J_0 \vec{\omega}, \quad (26)$$

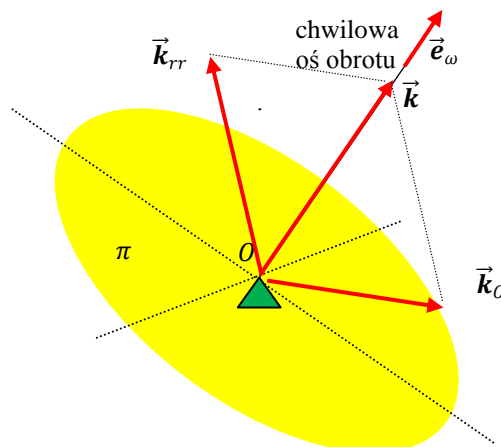
leżący na osi obrotu jest całkowitym (wypadkowym) krętem ciała sztywnego. Rozkład wektorów krętu względem elementów parasola pokazano na rysunku 4. Kolejne wyrażenia równania (25) w postaci macierzowej mają postać.

Kręt całkowity $\vec{k} = J_0 \vec{\omega}$ jest macierzą $\mathbf{k} = J_0 \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega}$.

Kręt względem bieguna O \vec{k}_0 (23) jest macierzą $\mathbf{k}_0 = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega}$ [1,2].

Kręt płaski $\vec{k}_{rr} = \iiint_m (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r} dm$ można – po wykorzystaniu diady \mathbf{P}_{rr} [3,4], czyli macierzy postaci (11) oraz jej całki po całej masie m ciała, stanowiącej macierz płaskich momentów bezwładności ciała sztywnego \mathbf{I}_{rr} (12) - przedstawić jako macierz

$$\mathbf{k}_{rr} = (\iiint_m \mathbf{P}_{rr} dm) \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}_{rr} \boldsymbol{\omega}.$$



Rys. 4 Wektory krętu

Uzyskano równanie krętu ciała sztywnego w zapisie macierzowym,

$$\mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_{rr} \boldsymbol{\omega}. \quad (27)$$

Równanie to ma postać tożsamą z równaniem (20), uzyskanym po pomnożeniu równania (15) stronami razy macierz współrzędnych $\boldsymbol{\omega}$ wektora prędkości kątowej ruchu kulistego $\vec{\omega}$. Równanie (27) jest macierzowym odpowiednikiem wektorowego równania krętu (25) w ruchu kulistym ciała sztywnego.

LITERATURA

- [1] Buczkowski R., Banaszek A.: *Mechanika ogólna w ujęciu wektorowym i tensorowym*.
Warszawa: Wyd. Naukowo- Techniczne 2006
- [2] Leyko J.: *Mechanika ogólna*. Warszawa: PWN 1997
- [3] Polka A.: *Modelowanie przestrzeni za pomocą multiiloczynów wektorów*.
Materiały XV-tej Szkoły Komputerowego Wspomagania Projektowania,
Wytwarzania i Eksploatacji. Jurata V 2011.
Mechanik, nr 7, 2011 str. 619, art. 91 w załączonym CD.
- [4] Polka A.: *Multi-Products of Unit Vectors and Vectors. Basic Notions*.
Mechanics and Mechanical Engineering, 12, No.2, 2008, str. 103-110.
- [5] Polka A.: *Mass Moments of Inertia and Static Moments of a Rigid Body*.
Mechanics and Mechanical Engineering, (2008), 12, No.4, str. 297-308.