

## MODELOWANIE DYNAMIKI KOSTEK DOMINA

*Streszczenie: W artykule przedstawiono badania dynamiki łańcucha kostek domina i komputerowe symulacje ich ruchu w układzie 2D. W procesie analizy ruchu kostek badano efekt ich rotacji, zderzenia się i tarcia. Przedstawiono wyniki symulacji wirtualnych z wykorzystaniem programu Working Model<sup>®</sup>. Rezultaty badań numerycznych pokazano w postaci faz ruchu kostek.*

## MODELING OF THE DYNAMICS OF DOMINOES

*Abstract: In this paper a chain of toppling dominoes is subject of the research of dynamics and computer-aided simulations. This dynamic process is investigated as in 2D. Toppling dominoes shows interesting effects such as rotations, collisions, and friction. In this paper the virtual simulations for analysis of dynamics of dominoes using Working Model<sup>®</sup> software are presented. The results from numerical simulations are shown as phases of movements of dominoes.*

### 1. WPROWADZENIE

Wieloelementowe układy dynamiczne stanowią poważne wyzwanie z punktu widzenia analizy ich dynamiki, czego przykładem jest np. analiza ruchu samochodów na dużym, rozbudowanym skrzyżowaniu. Przy największej staranności w opisie problemu nie da się, ze względu na wieloparametryczność zdarzenia, wszystkiego przewidzieć i założyć. Takim właśnie układem dynamicznym jest szereg zbudowany z pionowo ustawionych, przewracających się kostek domina. Nie wszystkie warunki początkowe są tu znane i nie można wykluczyć elementu przypadkowości. Badano łańcuchy kostek domina, składające się z milionów elementów (*najdłuższy zbudowany łańcuch liczył 4 800 000 kostek*). O złożoności problemu może świadczyć fakt, iż nigdy dla tak dużych układów nie uzyskano 100% przewróconych kostek. Ciąg przewracających się kostek domina może zachowywać się jak wielowymiarowy system stochastyczny, a nawet chaotyczny. „Efekt domina”, podobnie jak lorenzowski „efekt motyla” jest ważnym zjawiskiem w „wielkich” układach dynamicznych nie tylko inżynierskich, ale także przyrodniczych lub socjologiczno-społecznych.

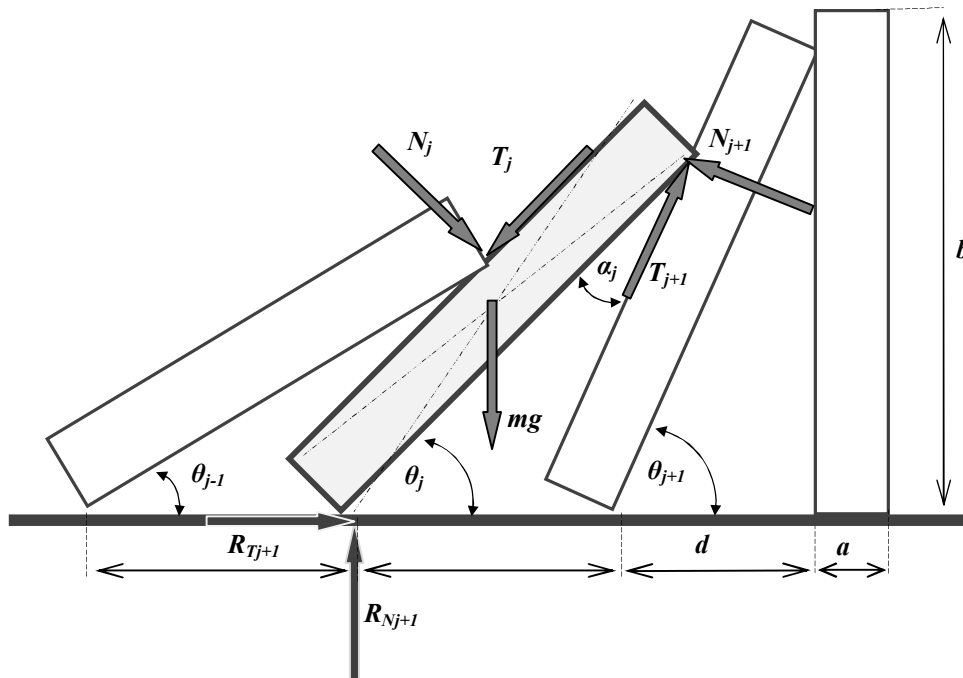
Pierwsze naukowe opracowanie dynamiki kostek domina [1] zostało opublikowane w 1978 r. przez Shawa. Kolejne wyniki badań ukazały się dopiero po ponad 10 latach [2-4], przy czym oparte są one na pracy Shawa. Najbardziej znane to prace W.J. Stronge'a i Banksa [3, 5]. Na początku XXI wieku, wraz z rozwojem komputerowych metod rozwiązywania złożonych zagadnień matematycznych, nastąpił powrót do tematyki związanej z dynamiką domina [6-8, 10]. Liczbę opublikowanych opracowań tego tematu można oszacować na niewiele ponad 30 pozycji, przy czym większość z nich zajmuje się głównie teorią propagacji fali przewracających się kostek. Z polskich prac należy wspomnieć jedynie o referacie [9] prezentowanym na sympozjum IYPT przez zespół młodych fizyków. Wiele z tych prac ma charakter głównie eksperymentalny [6, 9]. Do analizy eksperymentalnej wykorzystywano bardzo szybkie kamery filmowe, mogące wykonywać więcej niż 2000 klatek na sekundę, np.: Photron FASTCAM 512 PCI lub VCam Kodak HS4540.

## 2. OPIS MODELU KOSTEK DOMINA

Na rysunku 1 przedstawiono podstawowy model dynamiczny fragmentu łańcucha kostek domina, który jest utworzony przez ciąg prostopadłościennych, nieodkształcalnych ciał o wymiarach  $(a \times b \times c)$  i masie  $m$  każde. Kostki rozstawione są w równych odstępach  $d$  na poziomej płaszczyźnie, wzdłuż linii prostej.

W omawianych wcześniej pracach przyjmowano do obliczeń teoretycznych następujące założenia, słuszne dla układu wyidealizowanego [1, 5]:

- wszystkie kostki łańcucha domino są identyczne pod względem mechanicznym;
- kostki obracają się dookoła krawędzi prostopadłej do płaszczyzny rysunku i nie tracą kontaktu z podłożem, każda kostka uderza o następną tylko raz – brak efektu odbicia;
- w układzie jest spełnione prawo zachowania energii i krętu – nie ma straty energii podczas uderzenia kostki o kostkę;
- inicjacja przewracania się łańcucha domino odbywa się bez dodatkowej energii zewnętrznej, wynika jedynie z utraty równowagi pierwszej kostki.



Rys. 1. Model dynamiczny układu kostek domina  
siły działające na  $j$ -tą kostkę

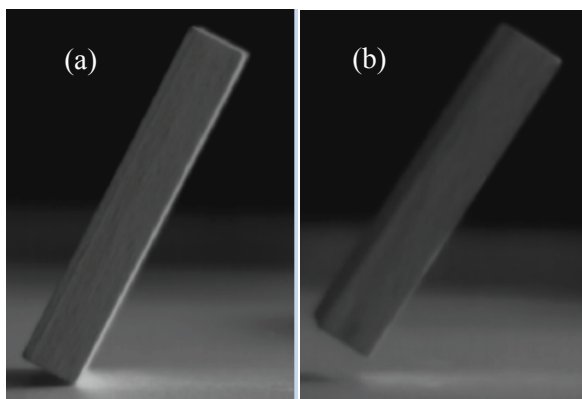
Przy powyższych założeniach energia mechaniczna przewracającej się kostki (wg Shawa [1]) ma postać (1) i jest dla niego podstawą dalszych obliczeń (ulożenia równań Lagrange'a):

$$E = \frac{1}{2} mg \left( b \sum_1^n \cos \theta_j + a \sum_1^n \sin \theta_j \right) + \frac{1}{2} I_o \sum_1^n \dot{\theta}_j^2, \quad (1)$$

gdzie  $I_o = \frac{1}{3} m(a^2 + b^2)$

$I_o$  – moment bezwładności kostki względem osi jej obrotu;  $g$  – przyspieszenie ziemskie.

Zdefiniowanie układu nie uwzględnia wielu zjawisk mogących pojawić się podczas ruchu rzeczywistej kaskady kostek domina. Może to prowadzić do pominięcia istotnego wpływu sił tarcia, przedstawionych na rys. 1 lub też może zostać pominięty wpływ uderzeń kostek o siebie i niewielkich odbić (rys. 2), które powodują dyssypację energii, opisaną wzorem (1).



Rys. 2. Zdjęcia z kamery filmowej [9] pojedynczej kostki  
a) idealny obrót, b) podskok kostki po uderzeniu – po upadku możliwy poślizg

Dlatego też do rozważań teoretycznych rzeczywistego łańcucha domina bardziej adekwatne jest macierzowe równanie [10] o postaci (2):

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\Theta} + \mathbf{C} \cdot \dot{\Theta} + \mathbf{E}(\Theta) = \mathbf{Q} \quad (2)$$

gdzie:

$\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\ddot{\Theta}$ ,  $\dot{\Theta}$ ,  $\Theta$  – są odpowiednio macierzami: mas, dyssypacji, przyspieszenia kąowego, prędkości kąowej i przemieszczenia kąowego kostek domina,  
 $\mathbf{E}(\Theta)$  i  $\mathbf{Q}$  – są macierzami opisującymi momenty sił grawitacyjnych i sił tarcia działających na kostki, jak pokazano na rysunku 1.

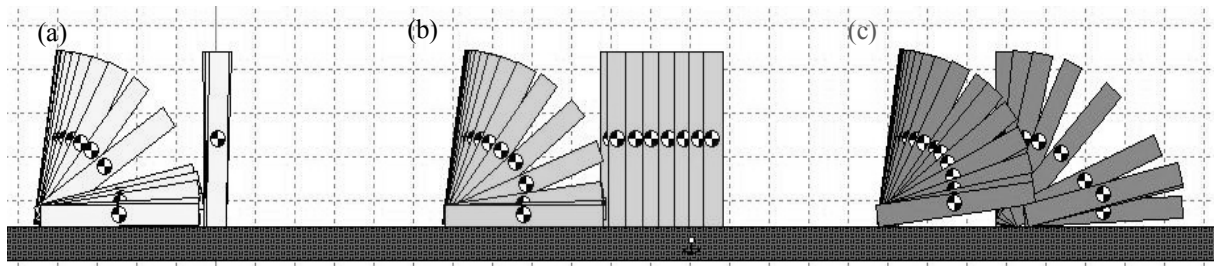
Równania wg Shawa opisują dynamikę ruchu w sposób uproszczony, natomiast różniczkowe równania ruchu otrzymane z ogólnego, macierzowego równania (2) są trudne do rozwiązania, głównie ze względu na nie w pełni definiowalną macierz dyssypacji  $\mathbf{C}$ .

Dalszą analizę dynamiki ruchu łańcucha kostek domina przeprowadzono poprzez symulacje ruchu kostek w wirtualnym środowisku utworzonym za pomocą programu *Working Model*<sup>®</sup> [11].

### 3. WIRTUALNE SYMULACJE DYNAMIKI KOSTEK DOMINA

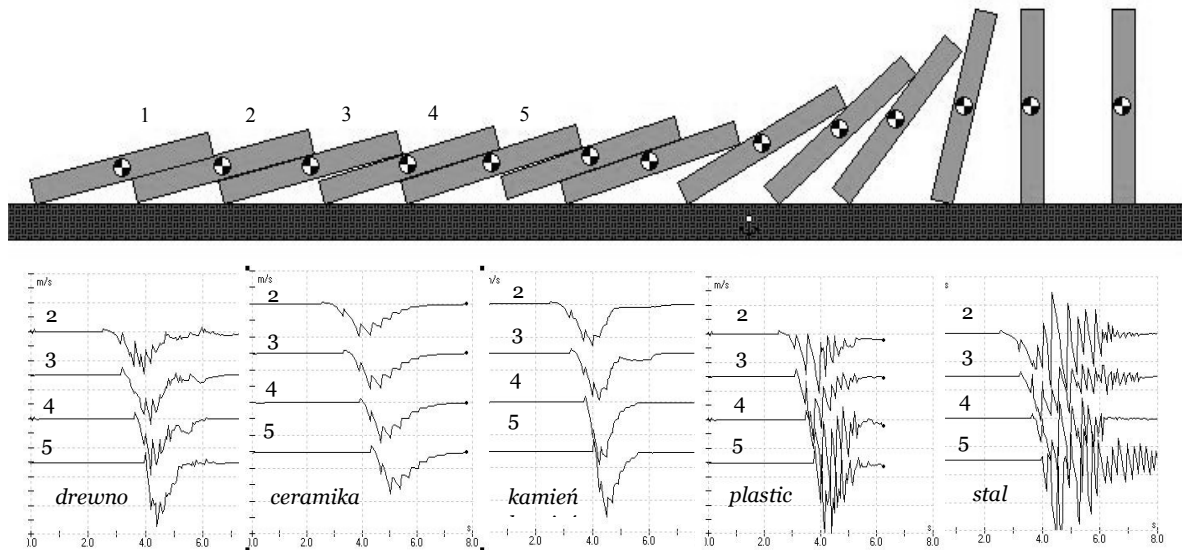
Komputerowe środowisko do tworzenia wirtualnych modeli ruchu układów dynamicznych, jakim jest program *Working Model*<sup>®</sup> udostępnia bogatą paletę zmian i modyfikacji parametrów ciała sztywnego, jakim jest kostka domina [11]. W prosty sposób można zmieniać masę, geometrię, momenty bezwładności oraz parametry tarcia i uderzenia, co umożliwia symulowanie ruchu i badanie wielu modeli o różniących się parametrach.

Na rysunku 3 pokazano symulacje ruchu dla trzech postaci interakcji pomiędzy kostkami. W przypadkach (a) i (b), kostka uderzana nie przewraca się, tylko wykonuje wahania dookoła położenia równowagi lub odsuwa się ruchem postępowym.



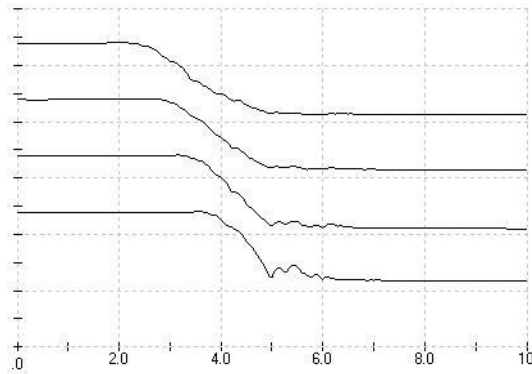
Rys. 3. Trzy postacie interakcji kostki uderzanej i uderzającej zależne od:  
 a) odległość między kostkami porównywalna z wysokością kostek – kostka uderzana drga;  
 b) mały współczynnik tarcia kostki o podłoże – kostka uderzana odsuwa się;  
 c) kostka uderzana odbija się od podłoża – duży współczynnik restytucji

Na rysunku 4 przedstawiono wykresy pionowych składowych prędkości środków mas kostek o numerach 2-5, wykonanych z różnych materiałów (*dla poprawy czytelności wykresów zostały one rozsunięte w pionie*). Na rysunku są widoczne liczne odbicia kostek od siebie, będące wynikiem sprężystości materiału, z którego zostały one wykonane.



Rys. 4. Rozsunięte w pionie wykresy pionowej składowej prędkości  $v_y$  środka masy kostek 2-5, wykonanych z różnych materiałów

Na rysunku 5 pokazano przemieszczenia pionowe środków masy kostek 2-5 (*dla poprawy czytelności wykresów zostały one rozsunięte w pionie*). Widoczne jest skracanie czasu ruchu kolejnej przewracającej się kostki, będące wynikiem rosnącej masy leżących na sobie kostek.



Rys. 5. Rozsunięte w pionie przemieszczenia pionowe środków masy uderzanych kostek 2-5 – widoczne odbicia

#### 4. PODSUMOWANIE

Modelowanie i symulacja ruchu tak złożonego obiektu dynamicznego, jakim jest łańcuch przewracających się kostek domino, stanowi skomplikowane przedsięwzięcie badawcze.

Po przeprowadzonych przez autorów badaniach symulacyjnych nasuwają się następujące spostrzeżenia:

- symulacja ruchu długich łańcuchów przewracających się kostek ma tendencje do generowania dodatkowych przemieszczeń wirtualnych – mini podskoków, uślizgów, powodujących niestabilność badanego układu;
- podczas symulacji pojawia się silny wpływ własności sprężystych materiału, więc pominięcie efektu rozpraszania energii podczas zderzeń może prowadzić do błędów;
- podczas symulowania ruchu przewracających się kostek obserwowano wzajemny poślizg kostek po sobie, który może powodować inne dodatkowe zjawiska dynamiczne.

#### LITERATURA

- [1] Shaw D.E.: *Mechanics of a chain of dominoes*, American Journal of Physics, vol. 46, Is. 6, 1978, Villanova University, Pennsylvania, pp. 640-642.
- [2] MacLachlan B.G., Beaupre G., Cox A.B. and Gore L.: *Falling Dominoes*, SIAM Review 25, 1983, pp. 403-404.
- [3] Stronge W.J.: *The domino effect: a wave of destabilizing collisions in a periodic array*. Proc. Royal Society, A 409, London 1987, pp. 199-208.
- [4] Stronge W.J., Shu D.: *The domino effect: Successive destabilisation by cooperative neighbours*. Proc. Royal Society, A 418, London 1988, pp. 155-163.
- [5] Banks R.B.: *Towing Icebergs, Falling Dominoes and other adventures in Applied Mechanics*, Princeton University Press, 1998.
- [6] Larham R.: *Measuring the speed of the domino effect using the Windows Sound Recorder*, part 1 (Nov. 2007) & part 2 (Dec. 2007) Citizen Scientist {[www.sas.org/tcs/weeklyIssues\\_2007/2007-11-02/project2](http://www.sas.org/tcs/weeklyIssues_2007/2007-11-02/project2)} {[www.sas.org/tcs/weeklyIssues\\_2007/2007-12-07/project2](http://www.sas.org/tcs/weeklyIssues_2007/2007-12-07/project2)}.
- [7] Efthimiou C.F., Johnson M.D.: *Domino Waves*, SIAM Review, vol. 49, no 1, 2007, pp. 111-120.
- [8] van Leeuwen J.M.J.: *The domino effect*. American Journal of Physics, vol. 78, Is. 7, 2010, 2300 Ra Leiden, Netherlands, pp. 721-727.

- [9] Lipiński S.: *Dominos Amplifier*, Rep. 24<sup>th</sup> Int., Young Physicists Tournament 2011.
- [10] Fujii F., Satoh T., Fukumoto S.: *Dynamic contact mechanics of the domino wave propagation*, 7<sup>th</sup> EUROMECH Solid Mechanics Conference, ed. J. Ambrósio et. al. September 7-11, 2009, Lisbon, Portugal.
- [11] Lubnauer W.A.: *Modelowanie i symulacja ruchu nieliniowych układów mechaniki klasycznej*, *Mechanik*, nr 7, 2010, art. nr 33 w zał. CD.