

Marek Balcerzak

KILKA WYKŁADÓW O FUNKCJACH RZECZYWISTYCH

$$\begin{aligned} |h_n(x) - f(x)| &\leq \left| \sum_{k=1}^{k_0} g_n^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{k_0} f_k(x) \right| + \sum_{k=k_0+1}^n |g_n^{(k)}(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |g_n^{(k)}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k \\ &< \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{3k_0} + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Politechnika Łódzka
Łódź 2022

Kilka wykładów
o funkcjach rzeczywistych
wydanie drugie poprawione i rozszerzone

Marek Balcerzak

Politechnika Łódzka, 2022

Recenzent:
prof. dr hab. Tomasz Natkaniec, Uniwersytet Gdański

© Copyright by Politechnika Łódzka 2022

ISBN 978-83-66741-45-4

DOI: <https://doi.org/10.34658/9788366741454>

Wydanie 2. poprawione i rozszerzone

Podręczniki i Skrypty Politechniki Łódzkiej, Nr 2400

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223

tel. 42 631-29-52, 42 631-20-87

fax 42 631-25-38

e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl

www.wydawnictwo.p.lodz.pl

Spis treści

Wstęp	4
1 Funkcje monotoniczne	5
1.1 Podstawowe własności	5
1.2 Twierdzenie Helly'ego	9
2 Funkcje o wahanu skończonym	13
2.1 Wahanie funkcji. Podstawowe własności	13
2.2 Rozkład Jordana i jego konsekwencje	18
3 Całka Riemanna-Stieltjesa	20
3.1 Definicja całki. Podstawowe własności	20
3.2 Kiedy RS-całka istnieje?	24
4 Twierdzenie Vitaliego o pokryciu	29
4.1 Twierdzenie Vitaliego	29
4.2 Różniczkowalność funkcji monotonicznych	31
5 Funkcje absolutnie ciągłe	37
5.1 Definicja, podstawowe własności	37
5.2 Twierdzenie Banacha-Zareckiego	41
5.3 Charakteryzacja przez całkę Lebesgue'a	43
6 Funkcje pierwszej klasy Baire'a	48
6.1 Definicja, przykłady, podstawowe własności	48
6.2 Charakteryzacja Lebesgue'a	51
6.3 Charakteryzacja Baire'a	56

7 Zestaw zadań	59
7.1 Funkcje monotoniczne	59
7.2 Wahanie funkcji	60
7.3 Całka Riemanna-Stieltjesa	61
7.4 Pokrycie Vitalego. Różniczkowalność	62
7.5 Funkcje absolutnie ciągłe	63
7.6 Funkcje pierwszej klasy Baire'a	63
7.7 Wybrane rozwiązania	64
Bibliografia	68

Wstęp

Podstawy teorii funkcji rzeczywistych znajdują liczne zastosowania w innych działach matematyki. Na przykład funkcje o wahanu skończonym na przedziale $[a, b]$ stanowią ciekawą i ważną algebrę Banacha. Całka Riemanna-Stieltjesa ma istotne zastosowania w probabilistyce i w równaniach różniczkowych. Funkcjom monotonicznym i funkcjom o wahanu skończonym są poświęcone dwa pierwsze rozdziały skryptu, a kolejny dotyczy najważniejszych własności całki Riemanna-Stieltjesa.

Klasyczne twierdzenie Vitaliego o pokryciu jest ważnym narzędziem w teorii funkcji odwołującym się do miary Lebesgue'a na prostej. Z jego pomocą dowodzi się, że funkcja monotoniczna na przedziale jest różniczkowalna prawie wszędzie. Ten materiał został wyłożony w rozdziale 4.

Absolutnie ciągłość funkcji jest fundamentalnym pojęciem z punktu widzenia całki Lebesgue'a. Tę klasę funkcji omówiono w rozdziale 5, zamieszczając ich elegancką charakteryzację pochodzącą od Banacha i Zareckiego. Geneza funkcji pierwszej klasy Baire'a wywodzi się z początków tzw. deskryptywnej teorii mnogości. Te funkcje rozpatrywane w różnych ujęciach nadal są interesujące z punktu widzenia topologii i analizy funkcjonalnej. Zostały one omówione w rozdziale 6, gdzie przedstawiono m.in. klasyczną charakteryzację Lebesgue'a wyrażoną w języku przeciwobrazów półprostych.

Ostatni rozdział 7 zawiera zestaw zadań ilustrujących rozważania teoretyczne z poprzednich rozdziałów.

W nowym wydaniu skryptu usunięte zostały usterki zauważone w poprzedniej wersji. Rozszerzono materiał dotyczący funkcji absolutnie ciągłych i funkcji pierwszej klasy Baire'a poprzez dołączenie podrozdziałów 5.3 i 6.3. W rozdziale 7 pojawiły się nowe podrozdziały 7.1 i 7.5 oraz podrozdział 7.7 zawierający rozwiązania niektórych zadań. Ponadto dodano dwie pozycje [8] i [9] do bibliografii.

Rozdział 1

Funkcje monotoniczne

1.1 Podstawowe własności

Niech $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $Z \subset \mathbb{R}$. Przypomnijmy, że funkcja f nazywa się *monotoniczna* na Z , gdy jest niemalejąca lub nierosnąca.

Granice lewostronną (prawostronną) funkcji f w lewostronnym (prawostronnym) punkcie skupienia x_0 zbioru Z oznaczamy przez $f(x_0-)$ (odpowiednio, $f(x_0+)$) lub tradycyjnie przez $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ (odpowiednio, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$).

Twierdzenie 1.1. *Niech $Z \subset \mathbb{R}$ oraz $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$.*

(1) *Załóżmy, że funkcja f jest niemalejąca.*

(a) *Jeśli x_0 jest lewostronnym punktem skupienia zbioru Z , to*

$$f(x_0-) = \sup f[Z \cap (-\infty, x_0)].$$

Jeśli ponadto $x_0 \in Z$, to $f(x_0-) \leq f(x_0)$.

(b) *Jeśli x_0 jest prawostronnym punktem skupienia zbioru Z , to*

$$f(x_0+) = \inf f[Z \cap (x_0, \infty)].$$

Jeśli ponadto $x_0 \in Z$, to $f(x_0) \leq f(x_0+)$.

(2) *Załóżmy, że funkcja f jest nierosnąca.*

(a) *Jeśli x_0 jest lewostronnym punktem skupienia zbioru Z , to*

$$f(x_0-) = \inf f[Z \cap (-\infty, x_0)].$$

Jeśli ponadto $x_0 \in Z$, to $f(x_0) \leq f(x_0-)$.

(b) Jeśli x_0 jest prawostronnym punktem skupienia zbioru Z , to

$$f(x_0+) = \sup f[Z \cap (x_0, \infty)].$$

Jeśli ponadto $x_0 \in Z$, to $f(x_0+) \leq f(x_0)$.

Dowód. Wykażemy (1)(a). Dowody pozostałych własności są analogiczne. Niech $S := \sup f[Z \cap (-\infty, x_0)]$.

Założmy, że $S < \infty$. Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji supremum istnieje $x_1 \in Z$ taki, że $x_1 < x_0$ oraz $f(x_1) > S - \varepsilon$. Niech $\delta := x_0 - x_1$. Wtedy $x_0 - \delta = x_1$ oraz z monotoniczności f mamy

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap Z, \quad f(x) \geq f(x_1) > S - \varepsilon. \quad (1.1)$$

Ponadto oczywiście

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap Z, \quad f(x) \leq S < S + \varepsilon. \quad (1.2)$$

Z (1.1) i (1.2) otrzymujemy

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap Z, \quad |f(x) - S| < \varepsilon,$$

co daje $f(x_0-) = S$.

Niech teraz $S = \infty$. Wtedy dla każdego $M > 0$ dobierzmy $x_M \in Z$ tak, że $x_M < x_0$ oraz $f(x_M) > M$. Niech $\delta := x_0 - x_M$. Wtedy $x_0 - \delta = x_M$ oraz dla każdego $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap Z$ mamy $f(x) \geq f(x_M) > M$, co oznacza, że $f(x_0-) = \infty = S$.

Niech $x_0 \in Z$. Mamy $f(x) \leq f(x_0)$ dla każdego $x \in Z$, $x < x_0$. Stąd

$$\sup f[Z \cap (-\infty, x_0)] \leq f(x_0),$$

a więc z poprzedniej części tezy $f(x_0-) \leq f(x_0)$. □

Wniosek 1.1. Niech $Z \subset \mathbb{R}$ oraz niech funkcja $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ będzie niemalejąca [nierosnąca]. Jeśli $x, y \in Z$, $x < y$ oraz x, y są obustronnymi punktami skupienia zbioru Z , to

$$f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) \leq f(y-) \leq f(y) \leq f(y+)$$

$$[\text{odpow. } f(x-) \geq f(x) \geq f(x+) \geq f(y-) \geq f(y) \geq f(y+)].$$

Dowód. Założmy, że f jest niemalejąca. Wykażemy, że $f(x+) \leq f(y-)$, bo pozostałe nierówności wynikają z Twierdzenia 1.1.

Niech c oznacza środek przedziału (x, y) . Wtedy dla dowolnych $t \in (x, c) \cap Z$ oraz $s \in (c, y) \cap Z$ mamy $f(t) \leq f(s)$. Zatem $\inf_{t \in (x, c) \cap Z} f(t) \leq f(s)$ dla każdego $s \in (c, y) \cap Z$. Stąd $\inf_{t \in (x, c) \cap Z} f(t) \leq \sup_{s \in (c, y) \cap Z} f(s)$. Ale

$$\inf_{t \in (x, c) \cap Z} f(t) \geq \inf_{t \in (x, \infty) \cap Z} f(t) = f(x+) \quad \text{oraz} \quad \sup_{s \in (c, y) \cap Z} f(s) \leq \sup_{s \in (-\infty, y) \cap Z} f(s) = f(y-)$$

na mocy Twierdzenia 1.1. Stąd $f(x+) \leq f(y-)$. \square

Wniosek 1.2. Niech $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$) będzie funkcją monotoniczną i niech (x_n) będzie ciągiem (skończonym lub nieskończonym) różnych liczb z przedziału (a, b) . Wtedy

$$\sum_n |f(x_{n+}) - f(x_{n-})| \leq |f(b-) - f(a+)|.$$

Dowód. Jeśli choć jedna spośród granic $f(b-)$, $f(a+)$ jest nieskończona, to teza jest oczywista. Niech więc obie te granice będą skończone.

Założmy, że f jest niemalejąca. Niech na początek $(x_n)_{n \leq m}$ będzie ciągiem skończonym różnych liczb przedziału (a, b) . Przenumerujmy go tak, by $a < x_1 < x_2 < \dots < x_m < b$. Na mocy Wniosku 1.1 mamy

$$f(a+) \leq f(x_{1-}) \leq f(x_{1+}) \leq \dots \leq f(x_{m-}) \leq f(x_{m+}) \leq f(b-).$$

Stąd

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^m (f(x_{n+}) - f(x_{n-})) &\leq (f(x_{1-}) - f(a+)) + (f(x_{1+}) - f(x_{1-})) + (f(x_{2-}) - f(x_{1+})) + \dots \\ &\quad + (f(x_{m-}) - f(x_{m-1+})) + (f(x_{m+}) - f(x_{m-})) + (f(b-) - f(x_{m+})) \\ &= f(b-) - f(a+). \end{aligned}$$

To daje tezę.

Gdy ciąg (x_n) jest nieskończony, bierzemy ciąg złożony z jego pierwszych m wyrazów i dostajemy powyższe oszacowanie. Z dowolności m oszacowanie to zachowuje się dla ciągu nieskończonego przez przejście do granicy, gdy $m \rightarrow \infty$. \square

Twierdzenie 1.2. Funkcja monotoniczna na przedziale ma przeliczalny zbiór punktów nieciągłości.

Dowód. Możemy założyć, że $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jest np. niemalejąca. Oznaczmy przez D zbiór punktów nieciągłości funkcji f . Korzystając z Twierdzenia 1.1 wnioskujemy, że $x \in D$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x-) < f(x+)$. Dla każdego $x \in D$ wybierzmy $w_x \in \mathbb{Q}$ tak,

by $f(x-) < w_x < f(x+)$. Określmy funkcję $\varphi: D \rightarrow \mathbb{Q}$ wzorem $\varphi(x) := w_x$. Wówczas φ jest iniekcją. Istotnie, niech $x, y \in D$, $x \neq y$ i niech np. $x < y$. Z Wniosku 1.1 mamy

$$f(x-) < w_x < f(x+) \leq f(y-) < w_y < f(y+).$$

Stąd $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. Z różnowartościowości φ wynika, że D jest równoliczny z podzbiorem zbioru \mathbb{Q} . Zatem D jest przeliczalny. \square

Twierdzenie 1.3. *Każdą funkcję niemalejącą [nierosnącą] $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci sumy $f = g + s$, gdzie $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją niemalejącą [nierosnącą] ciągłą oraz $s: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest tzw. funkcją skoków, tzn. $s = \sum_n u_n$, gdzie funkcje $u_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dane są wzorami*

$$u_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x < x_n \\ f(x_n) - f(x_n-) & \text{dla } x = x_n \\ f(x_n+) - f(x_n-) & \text{dla } x > x_n. \end{cases}$$

oraz (x_n) jest ciągiem różnowartościowym wszystkich punktów nieciągłości funkcji f (jeśli $x_n = a$ lub $x_n = b$, to przyjmujemy $f(a-) := f(a)$ lub $f(b+) := f(b)$).

Dowód. Załóżmy, że f jest niemalejąca. (Gdy f jest nierosnąca, dowód jest podobny.) Zauważmy, że (w przypadku nieskończenie wielu składników) szereg $\sum u_n$ jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$. Istotnie, mamy

$$\forall x \in [a, b] \quad |u_n(x)| \leq f(x_n+) - f(x_n-),$$

więc wystarczy zastosować kryterium Weierstrassa, gdyż z Wniosku 1.2 wynika, że szereg liczbowy $\sum (f(x_n+) - f(x_n-))$ jest zbieżny. Tym samym funkcja $s := \sum_n u_n$ jest poprawnie określona. (Zauważmy, że funkcja s jest niemalejąca jako suma szeregu funkcji niemalejących. Gdy ciąg $(x_n) = (x_n)_{n \leq m}$ jest skończony, możemy przyjąć $u_n := 0$ dla $n > m$.)

Położmy $g(x) := f(x) - s(x)$ dla $x \in [a, b]$. Zatem równość $f = g + s$ zachodzi.

Pokażemy, że funkcja g jest ciągła w dowolnym punkcie $\bar{x} \in [a, b]$. Rozważmy dwa przypadki.

1^o \bar{x} jest punktem ciągłości funkcji f . Wtedy wszystkie funkcje u_n są ciągłe w \bar{x} , więc funkcja s też jest ciągła w \bar{x} wobec jednostajnej zbieżności szeregu. Zatem funkcja g jest ciągła w \bar{x} jako różnica dwóch funkcji ciągłych w tym punkcie.

2^o $\bar{x} = x_{n_0}$ dla pewnego $n_0 \in \mathbb{N}$. Mamy

$$g = f - s = f - u_{n_0} - \sum_{n \neq n_0} u_n. \quad (1.3)$$

Funkcja $\sum_{n \neq n_0} u_n$ jest ciągła w \bar{x} , bo wszystkie funkcje tego szeregu są ciągłe w \bar{x} , a szereg jest jednostajnie zbieżny. Na mocy (1.3) wystarczy pokazać, że funkcja $h := f - u_{n_0}$ jest ciągła w \bar{x} . To zaś wynika z poniższych równości:

$$\begin{aligned} h(\bar{x}+) &= f(\bar{x}+) - u_{n_0}(\bar{x}+) = f(\bar{x}+) - f(\bar{x}+) + f(\bar{x}-) = f(\bar{x}-) \\ h(\bar{x}) &= f(\bar{x}) - u_{n_0}(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{x}) + f(\bar{x}-) = f(\bar{x}-) \\ h(\bar{x}-) &= f(\bar{x}-) - u_{n_0}(\bar{x}-) = f(\bar{x}-). \end{aligned}$$

Pozostaje do sprawdzenia, że g jest niemalejąca. Niech więc $a \leq x < y \leq b$. Dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$u_n(y) - u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } x_n < x \text{ lub } x_n > y \\ f(x_n+) - f(x_n) & \text{gdy } x_n = x \\ f(x_n+) - f(x_n-) & \text{gdy } x < x_n < y \\ f(x_n) - f(x_n-) & \text{gdy } x_n = y. \end{cases}$$

Co najwyżej jeden składnik sumy $\sum_i (u_i(y) - u_i(x))$ jest taki, że $y = x_n$ (wtedy ten składnik jest równy $f(y) - f(y-)$). Podobnie co najwyżej jeden składnik sumy $\sum_i (u_i(y) - u_i(x))$ jest taki, że $x = x_n$ (wtedy ten składnik jest równy $f(x+) - f(x)$). Pozostałe niezerowe wyrazy tej sumy są postaci $f(x_i+) - f(x_i-)$.

Stąd, korzystając z powyższego przedstawienia $u_n(y) - u_n(x)$ oraz Wniosku 1.2, otrzymujemy

$$\begin{aligned} s(y) - s(x) &= \sum_n (u_n(y) - u_n(x)) \\ &\leq f(x+) - f(x) + \sum_{x < x_n < y} (u_n(y) - u_n(x)) + f(y) - f(y-) \\ &= f(x+) - f(x) + \sum_{x < x_n < y} (f(x_n+) - f(x_n-)) + f(y) - f(y-) \\ &\leq f(x+) - f(x) + f(y-) - f(x+) + f(y) - f(y-) = f(y) - f(x). \end{aligned}$$

Zatem $g(y) - g(x) = f(y) - f(x) - (s(y) - s(x)) \geq 0$. □

1.2 Twierdzenie Helly'ego

Wykażmy następujący prosty lemat o przedłużaniu funkcji monotonicznej.

Lemat 1.1 (o przedłużaniu). *Niech $Z \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym. Jeśli funkcja $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejąca (nierosnąca) oraz $a := \inf Z$, $b := \sup Z$, przy czym a jest punktem skupienia zbioru Z , to istnieje funkcja niemalejąca (nierosnąca) $\bar{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\bar{f}(x) = f(x)$ dla $x \in Z \cap (a, b)$.*

Dowód. Niech f będzie niemalejąca. Połóżmy $\bar{f}(x) := \sup_{t \in (a,x] \cap Z} f(t)$ dla $x \in (a, b)$. Jeśli $x \in Z \cap (a, b)$, to $\sup_{t \in (a,x] \cap Z} f(t) = f(x)$, więc $\bar{f}(x) = f(x)$.

Niech $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$. Wtedy $(a, x_1] \cap Z \subset (a, x_2] \cap Z$, zatem z własności supremum mamy

$$\bar{f}(x_1) = \sup_{t \in (a,x_1] \cap Z} f(t) \leq \sup_{t \in (a,x_2] \cap Z} f(t) = \bar{f}(x_2).$$

Wobec tego funkcja \bar{f} jest niemalejąca na (a, b) .

Jeśli f jest nierosnąca, to przyjmujemy $\bar{f}(x) := \inf_{t \in (a,x] \cap Z} f(t)$ dla $x \in (a, b)$ i dowód jest podobny. \square

Omówimy teraz metodę przekątniową wyboru podciągu.

Lemat 1.2 (lemat przekątniowy). *Niech dany będzie ciąg ciągów liczbowych ograniczonych*

$$(y_n^{(1)}), (y_n^{(2)}), \dots$$

Wtedy istnieje rosnący ciąg (k_n) indeksów naturalnych taki, że podciągi $(y_{k_n}^{(1)}), (y_{k_n}^{(2)}), \dots$ są zbieżne.

Dowód. Najpierw korzystając z twierdzenia Bolzano-Weierstrassa, wybieramy z ciągu $(y_n^{(1)})$ podciąg zbieżny $(y_{j_n^{(1)}}^{(1)})$. Następnie z ciągu $(y_{j_n^{(1)}}^{(2)})$ wybieramy podciąg zbieżny $(y_{j_n^{(2)}}^{(2)})$. Postępując indukcyjnie, wybieramy z ciągu $(y_{j_n^{(m)}}^{(m+1)})$ podciąg zbieżny $(y_{j_n^{(m+1)}}^{(m+1)})$ dla każdego $m \in \mathbb{N}$.

Niech $k_n := j_n^{(n)}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$k_n = j_n^{(n)} < j_{n+1}^{(n)} \leq j_{n+1}^{(n+1)} = k_{n+1}.$$

Zatem (k_n) jest rosnącym ciągiem wskaźników naturalnych.

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ ciąg $(y_{k_n}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}} = (y_{j_n^{(m)}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$ począwszy od indeksów $n \geq m$, jest podciągiem ciągu zbieżnego $(y_{j_n^{(m)}}^{(m)})_{n \in \mathbb{N}}$, zatem jest zbieżny. \square

Następujący wniosek jest przeformulowaniem powyższego lematu.

Wniosek 1.3. *Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji $f_n: Z \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gdzie $Z = \{z_1, z_2, \dots\}$ jest nieskończonym zbiorem przeliczalnym. Jeśli dla każdego $j \in \mathbb{N}$ ciąg $(f_n(z_j))_{n \in \mathbb{N}}$ jest ograniczony, to można wybrać podciąg (f_{k_n}) ciągu (f_n) zbieżny w każdym punkcie zbioru Z .*

Dowód. Należy zastosować lemat przekątniowy dla $(y_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}} := (f_n(z_j))_{n \in \mathbb{N}}$, $j \in \mathbb{N}$. \square

Twierdzenie 1.4 (Helly’ego). *Niech będzie dany ciąg (f_n) funkcji $f_n: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ niemających (nierosnących) taki, że dla każdego $x \in (a, b)$ ciąg $(f_n(x))$ jest ograniczony. Wtedy z ciągu (f_n) można wybrać podciąg zbieżny punktowo na (a, b) .*

Dowód. Załóżmy np., że funkcje f_n rozważanego ciągu są niemające. Niech $Z \subset (a, b)$ będzie zbiorem przeliczalnym gęstym w (a, b) , np. weźmy $Z := \mathbb{Q} \cap (a, b)$. Na mocy założenia o ograniczoności ciągu $(f_n(x))$ w każdym punkcie $x \in Z$ możemy zastosować Wniosek 1.3 i wybrać podciąg (f_{k_n}) zbieżny w każdym punkcie $x \in Z$. Niech $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x)$ dla $x \in Z$. Wtedy funkcja $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemająca. Na mocy Lematu 1.1 istnieje funkcja niemająca $\bar{f}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $\bar{f}|_Z = f$.

Niech $x \in (a, b)$. Z gęstości zbioru Z wynika, że istnieją ciągi $(u_m), (v_m)$ punktów zbioru Z takie, że

$$u_m < x < v_m \text{ dla wszystkich } m \in \mathbb{N}, \quad u_m \rightarrow x, \quad v_m \rightarrow x.$$

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Ponieważ każda funkcja f_{k_n} jest niemająca, więc

$$f_{k_n}(u_m) \leq f_{k_n}(x) \leq f_{k_n}(v_m) \text{ dla wszystkich } n \in \mathbb{N}.$$

Stąd dla $n \rightarrow \infty$ mamy

$$\bar{f}(u_m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \bar{f}(v_m).$$

Korzystając z dowolności $m \in \mathbb{N}$, przejdźmy do granicy gdy $m \rightarrow \infty$ i wtedy otrzymamy

$$\bar{f}(x-) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x) \leq \bar{f}(x+) \quad (1.4)$$

(stosujemy tu Twierdzenie 1.1 o istnieniu granic jednostronnych funkcji monotonicznej).

Niech D oznacza zbiór punktów nieciągłości funkcji \bar{f} . Jeśli $x \in (a, b) \setminus D$, to $\bar{f}(x-) = \bar{f}(x+)$, więc z (1.4) wynika, że granica $\lim_{n \rightarrow \infty} f_{k_n}(x)$ istnieje.

Wiemy z Twierdzenia 1.2, że zbiór D jest przeliczalny. Stosując Wniosek 1.3 do ciągu (f_{k_n}) i zbioru D , otrzymujemy kolejny podciąg $(f_{j_{k_n}})$ zbieżny w każdym punkcie zbioru D . Oczywiście ciąg ten pozostaje zbieżny w każdym punkcie zbioru $(a, b) \setminus D$. Zatem teza została wykazana. \square

Z twierdzenia Helly’ego wynika, że zachodzi także jego wersja dla ciągu funkcji monotonicznych określonych na przedziale domkniętym $[a, b]$ lub jednostronnie domkniętym. Istotnie, należy zastosować powyższe twierdzenie dla funkcji rozważanych na (a, b) i wybrać dodatkowo podciąg zbieżny w obu lub jednym z punktów a, b .

Twierdzenie 1.5. Niech dany będzie ciąg (f_n) funkcji rzeczywistych niemalejących (nierosnących) na $[a, b]$ oraz niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła. Załóżmy, że zbiór Z jest gęsty w $[a, b]$ i taki, że $a, b \in Z$. Jeśli $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dla każdego $x \in Z$, to ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na $[a, b]$ do funkcji f .

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Funkcja ciągła f na przedziale $[a, b]$ jest tam jednostajnie ciągła, więc istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\forall s, t \in [a, b] (|s - t| < \delta \Rightarrow |f(s) - f(t)| < \varepsilon/2).$$

Korzystając z gęstości zbioru Z , można dobrać podział $a = x_0 < x_1 < \dots < x_p = b$ taki, żeby $x_i \in Z$ oraz $x_i - x_{i-1} < \delta$ dla $i = 1, \dots, p$. Wtedy

$$|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon/2 \quad \text{dla } i = 1, \dots, p. \quad (1.5)$$

Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_i) = f(x_i)$ dla $i = 1, \dots, p$, więc dobierzmy liczbę $k \in \mathbb{N}$ tak, żeby

$$\forall n \geq k \quad \forall i \in \{0, \dots, p\} \quad |f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/4. \quad (1.6)$$

Założmy, że funkcje f_n są niemalejące i ustalmy $x \in [a, b]$. Istnieje indeks $i \in \{1, \dots, p\}$ taki, że $x_{i-1} \leq x \leq x_i$. Wtedy na mocy (1.6) mamy

$$\forall n \geq k \quad f(x_{i-1}) - \varepsilon/4 < f_n(x_{i-1}) \leq f_n(x) \leq f_n(x_i) < f(x_i) + \varepsilon/4. \quad (1.7)$$

Zauważmy, że funkcja f jest niemalejąca na Z . Co więcej, jest ona niemalejąca na $[a, b]$. Istotnie, niech $s, t \in [a, b]$, $s < t$. Wybierzmy ciągi (s_n) , (t_n) zbieżne odpowiednio do s , t i takie, że $s < s_n < t_n < t$ oraz $s_n, t_n \in Z$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $f(s_n) \leq f(t_n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Przechodząc do granicy gdy $n \rightarrow \infty$ i korzystając z ciągłości f , otrzymujemy $f(s) \leq f(t)$.

Wiedząc, że funkcja f jest niemalejąca, dostajemy $f(x_{i-1}) \leq f(x) \leq f(x_i)$. Stąd i z (1.7) mamy

$$f_n(x), f(x) \in (f(x_{i-1}) - \varepsilon/4, f(x_i) + \varepsilon/4)$$

dla każdego $n \geq k$. Dalej na mocy (1.5) otrzymujemy

$$|f_n(x) - f(x)| < (f(x_i) - f(x_{i-1})) + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 < \varepsilon.$$

Zatem $f_n \Rightarrow f$ na $[a, b]$, bo wskaźnik k nie zależy od x . □

Rozdział 2

Funkcje o wahanii skończonym

2.1 Wahanie funkcji. Podstawowe własności

Podziałem przedziału $[a, b]$ nazywamy skończony zbiór $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zbiór wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$ oznaczamy przez $\mathcal{P}[a, b]$.

Definicja 2.1. Wahaniem funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy element zbioru $[0, \infty]$ dany wzorem

$$\bigvee_a^b f := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| : P = \{x_0, \dots, x_n\}, P \in \mathcal{P}[a, b] \right\}.$$

Jeśli $\bigvee_a^b f < \infty$, to mówimy, że f jest funkcją o wahanii skończonym (na $[a, b]$).

Przykłady

1. Każda funkcja monotoniczna $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma wahanie skończone. Dokładniej $\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)|$.
2. Załóżmy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza na $[a, b]$, tj.

$$(\exists L > 0) (\forall x, y \in [a, b]) |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Wtedy f ma wahanie skończone. Istotnie, niech $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Mamy

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq L \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = L(b - a).$$

Stąd $\bigvee_a^b f \leq L(b - a)$.

3. Funkcja Dirichleta na $[0, 1]$ ma wahanie nieskończone (ćwiczenie).
4. Z Przykładu 1 wynika, że istnieją funkcje nieciągłe o wahanu skończonym. Istnieją też funkcje ciągłe (a nawet różniczkowalne) o wahanu nieskończonym. Taką własność ma funkcja ciągła $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x \sin(1/x) & \text{dla } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Wykazać to (ćwiczenie).

Własność 2.1. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $[c, d] \subset [a, b]$. Wtedy $\bigvee_c^d f \leq \bigvee_a^b f$.

Dowód. Niech $P \in \mathcal{P}[c, d]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Wtedy $Q = P \cup \{a, b\}$ jest podziałem przedziału $[a, b]$. Zatem

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq |f(x_0) - f(a)| + \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(b) - f(x_n)| \leq \bigvee_a^b f.$$

Stąd i z dowolności P wynika teza. \square

Twierdzenie 2.1. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $a < c < b$. Wtedy $\bigvee_a^b f = \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$.

Dowód. Jeśli $\bigvee_a^c f = \infty$ lub $\bigvee_c^b f = \infty$, to z Własności 2.1 wynika, że $\bigvee_a^b f = \infty$. Zatem teza zachodzi.

Założmy więc, że $\bigvee_a^c f < \infty$ i $\bigvee_c^b f < \infty$.

Niech $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$. Jeśli $c \in P$, to $c = x_k$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Wtedy $\{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, c]$ oraz $\{x_k, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[c, b]$. Zatem

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=k+1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f.$$

Jeśli $c \notin P$, to $x_k < c < x_{k+1}$ dla pewnego $k \in \{0, \dots, n-1\}$. Wtedy $\{x_0, \dots, x_k, c\} \in \mathcal{P}[a, c]$ oraz $\{c, x_{k+1}, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[c, b]$. Zatem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| &\leq \sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| + |f(c) - f(x_k)| \\ &+ |f(x_{k+1}) - f(c)| + \sum_{i=k+2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f. \end{aligned}$$

Stąd i z dowolności P wynika $\bigvee_a^b f \leq \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f$.

Należy jeszcze pokazać nierówność przeciwną. Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji $\bigvee_a^c f$ oraz $\bigvee_c^b f$ wynika, że istnieją $P \in \mathcal{P}[a, c]$, $P = \{s_0, \dots, s_n\}$ oraz $Q \in \mathcal{P}[c, b]$, $Q = \{t_0, \dots, t_m\}$ takie, że

$$\sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(s_{i-1})| > \bigvee_a^c f - \frac{\varepsilon}{2}; \quad \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| > \bigvee_c^b f - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Wtedy $\{s_0, \dots, s_n = t_0, \dots, t_m\} \in \mathcal{P}[a, b]$, a więc na mocy (2.1)

$$\bigvee_a^b f \geq \sum_{i=1}^n |f(s_i) - f(s_{i-1})| + \sum_{i=1}^m |f(t_i) - f(t_{i-1})| > \bigvee_a^c f + \bigvee_c^b f - \varepsilon.$$

To z dowolności ε daje żadaną nierówność. \square

Wniosek 2.1. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $a < c < b$. Jeśli $\bigvee_a^c f < \infty$ oraz $\bigvee_c^b f < \infty$, to $\bigvee_a^b f < \infty$.

Uwaga 2.1. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Mamy następujące oszacowanie

$$|f(b) - f(a)| \leq \text{osc}(f, [a, b]) \leq \bigvee_a^b f, \quad (2.2)$$

gdzie $\text{osc}(f, [a, b]) := \sup\{|f(y) - f(x)| : x, y \in [a, b]\}$ nazywamy oscylacją funkcji f na przedziale $[a, b]$.

Twierdzenie 2.2. Każda funkcja f o wahanii ograniczonym na $[a, b]$ jest ograniczona.

Dowód. Niech $x \in [a, b]$. Na mocy (2.2) i Własności 2.1 mamy

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq \bigvee_a^x f + |f(a)| \leq \bigvee_a^b f + |f(a)|.$$

\square

Twierdzenie 2.3. Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Jeśli $c \in \mathbb{R}$, to $\bigvee_a^b(cf) = |c| \bigvee_a^b f$ (dla $c = 0$, $\bigvee_a^b f = \infty$ przyjmujemy $0 \cdot \infty := 0$).

(b) $\bigvee_a^b(f + g) \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g$.

(c) Jeśli $\bigvee_a^b f < \infty$ oraz $\bigvee_a^b g < \infty$, to $\bigvee_a^b fg < \infty$.

(d) Jeśli istnieje $\alpha > 0$ taka, że $|f(x)| \geq \alpha$ dla każdego $x \in [a, b]$ oraz $\bigvee_a^b f < \infty$, to $\bigvee_a^b(1/f) < \infty$.

Dowód. (a) Dla dowolnego $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, mamy

$$\sum_{i=1}^n |cf(x_i) - cf(x_{i-1})| = |c| \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

skąd łatwo wynika teza.

(b) Dla dowolnego $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$, mamy

$$\sum_{i=1}^n |(f+g)(x_i) - (f+g)(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^n |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b f + \bigvee_a^b g.$$

Stąd wynika żądana nierówność.

Dowody (c) i (d) są podobne (ćwiczenie). \square

Z powyższego twierdzenia wynika, że zbiór funkcji o wahanu skończonym na $[a, b]$ stanowi przestrzeń liniową zamkniętą względem operacji mnożenia. Przestrzeń ta jest unormowana przez normę $\|f\| := |f(a)| + \bigvee_a^b f$ (ćwiczenie).

Twierdzenie 2.4. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o wahanu skończonym jest ciągła prawostronnie w punkcie $x_0 \in [a, b)$ (lewostronnie w punkcie $x_0 \in (a, b]$), to funkcja*

$$[a, b] \ni x \mapsto \bigvee_a^x f \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

jest ciągła prawostronnie (lewostronnie) w punkcie x_0 .

Dowód. Załóżmy, że funkcja f o wahanu skończonym jest ciągła prawostronnie w punkcie $x_0 \in [a, b)$. Należy pokazać, że $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \bigvee_a^x f = \bigvee_a^{x_0} f$. Dla $x > x_0$ z Twierdzenia 2.1 mamy $\bigvee_a^x f = \bigvee_a^{x_0} f + \bigvee_{x_0}^x f$, więc wystarczy wykazać warunek $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \bigvee_{x_0}^x f = 0$.

Niech $\varepsilon > 0$. Z prawostronnej ciągłości f w x_0 wynika, że istnieje liczba $z > x_0$ taka, że $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ dla wszystkich $x \in (x_0, z)$. Dobierzmy podział $P \in \mathcal{P}[x_0, b]$, $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ taki, że

$$\bigvee_{x_0}^b f \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Stąd dla każdego $x \in (x_0, \min\{z, x_1\})$ mamy

$$\begin{aligned} \bigvee_{x_0}^b f &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \leq |f(x_1) - f(x)| + |f(x) - f(x_0)| + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + |f(x_1) - f(x)| + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \varepsilon + \bigvee_x^b f. \end{aligned}$$

Stąd

$$\forall x \in (x_0, \min\{z, x_1\}) \quad \bigvee_{x_0}^x f = \bigvee_{x_0}^b f - \bigvee_x^b f < \varepsilon,$$

co daje zapowiedziany warunek. Dowód dla lewostronnej ciągłości jest podobny. \square

Uwaga 2.2. Zachodzi implikacja odwrotna do tej podanej w powyższym twierdzeniu. Na przykład, z prawostronnej ciągłości funkcji (2.3) górnej granicy wahania, w punkcie $x_0 \in [a, b)$, wynika prawostronna ciągłość funkcji f w x_0 , bo dla $x > x_0$ mamy (por. Uwagę 2.1)

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \bigvee_{x_0}^x f = \bigvee_a^x f - \bigvee_a^{x_0} f.$$

Twierdzenie 2.5 (Półciągłość z dołu wahania). *Jeśli $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, oraz istnieje $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [a, b]$, to*

$$\bigvee_a^b f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n.$$

Dowód. Jeśli $\liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n = \infty$, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że $L := \liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n < \infty$.

Niech $\varepsilon > 0$. Pokażemy, że $\bigvee_a^b f \leq L + \varepsilon$, co z dowolności ε daje tezę. Z definicji L istnieje podciąg (f_{k_n}) taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_{k_n} = L$. Zatem

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \bigvee_a^b f_{k_n} < L + \varepsilon.$$

Niech $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $P = \{x_0, \dots, x_m\}$. Wtedy

$$\forall n \geq n_0 \quad \sum_{i=1}^m |f_{k_n}(x_i) - f_{k_n}(x_{i-1})| \leq \bigvee_a^b f_{k_n} < L + \varepsilon.$$

W konsekwencji dla $n \rightarrow \infty$ mamy

$$\sum_{i=1}^m |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m |f_{k_n}(x_i) - f_{k_n}(x_{i-1})| \leq L + \varepsilon.$$

Z dowolności podziału P dostajemy żądany warunek. \square

Wniosek 2.2. *Jeśli $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ dla $x \in [a, b]$ oraz ciąg wahań $(\bigvee_a^b f_n)$ jest ograniczony z góry przez $M \geq 0$, to $\bigvee_a^b f \leq M$.*

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia mamy $\bigvee_a^b f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \bigvee_a^b f_n \leq M$. \square

2.2 Rozkład Jordana i jego konsekwencje

Twierdzenie 2.6 (Jordana o rozkładzie). *Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma wahanie skończone wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnicą $f = g - h$ dwóch funkcji niemalejących $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dodatkowo, dla funkcji f o waniu skończonym, funkcje niemalejące g, h takie, że $f = g - h$ można dobrać tak, że dla każdego $x_0 \in [a, b]$, jeśli f jest ciągła (lewostronnie, prawostronnie) w punkcie x_0 , to g, h są ciągłe (lewostronnie, prawostronnie) w x_0 .*

Dowód. Jeśli $f = g - h$, gdzie funkcje g, h są niemalejące, to f, g mają wahanie skończone i ich różnica też ma wahanie skończone na mocy Twierdzenia 2.3.

Niech teraz $\bigvee_a^b f < \infty$. Połóżmy $g(x) := \bigvee_a^x f$ dla $x \in (a, b]$ oraz $g(a) := 0$. Funkcja g jest niemalejąca, bo jeśli $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, to $g(x_2) - g(x_1) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f \geq 0$. Połóżmy $h := g - f$. Jeśli $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, to z Twierdzenia 2.1 dostajemy

$$h(x_2) - h(x_1) = \left(\bigvee_a^{x_2} f - \bigvee_a^{x_1} f \right) - (f(x_2) - f(x_1)) = \bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \geq 0.$$

Druga część tezy wynika z Twierdzenia 2.4. □

Uwaga 2.3. Jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma wahanie skończone, to rozkład $f = g - h$ opisany w powyższym dowodzie nie jest jedyny. Na przykład, mając dany rozkład $f = g - h$, można dodać do każdej z funkcji g, h ustaloną funkcję niemalejącą $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ i otrzymujemy rozkład $f = (g + \varphi) - (h + \varphi)$. Specjalny rozkład, zwany *kanonicznym rozkładem Jordana*, wyznaczony jest przez funkcje

$$g(x) := \frac{1}{2} \left(\bigvee_a^x f + f(x) \right) \quad h(x) := \frac{1}{2} \left(\bigvee_a^x f - f(x) \right). \quad (2.4)$$

Wtedy oczywiście $g - h = f$ oraz dla $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, mamy

$$g(x_2) - g(x_1) = \frac{1}{2} \left(\bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_1) - f(x_2)) \right) \geq 0,$$

$$h(x_2) - h(x_1) = \frac{1}{2} \left(\bigvee_{x_1}^{x_2} f - (f(x_2) - f(x_1)) \right) \geq 0.$$

Rozkład $f = g - h$ za pomocą funkcji danych wzorem (2.4) jest optymalny w tym sensie, że dla dowolnych funkcji niemalejących $\bar{g}, \bar{h}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, jeśli $f = \bar{g} - \bar{h}$, to dla wszelkich $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, mamy

$$g(x_2) - g(x_1) \leq \bar{g}(x_2) - \bar{g}(x_1), \quad h(x_2) - h(x_1) \leq \bar{h}(x_2) - \bar{h}(x_1),$$

tn. funkcje g, h zdefiniowane w (2.4) rosną najwolniej spośród funkcji wszystkich możliwych rozkładów. (Pokazać to – ćwiczenie.)

Ponadto z (2.4) wynika oczywiście, że $g(x) + h(x) = \bigvee_a^x f$ dla $x \in [a, b]$. Stąd dla $x, y \in [a, b]$, $x < y$, dostajemy $\bigvee_x^y f = \bigvee_x^y g + \bigvee_x^y h$ (ćwiczenie).

Z Twierdzeń 2.3 i 2.6 wynika, że przestrzeń liniowa generowana przez rodzinę wszystkich funkcji monotonicznych na $[a, b]$ jest równa przestrzeni liniowej wszystkich funkcji o wahaniu skończonym na $[a, b]$.

Następujący wniosek wynika z Twierdzenia 2.6 i odpowiednich własności funkcji monotonicznych.

Wniosek 2.3. *Każda funkcja f o wahaniu skończonym na $[a, b]$ ma w każdym punkcie wewnętrznym tego przedziału obie granice jednostronne oraz istnieją granice $f(a+)$, $f(b-)$. Ponadto funkcja f ma przeliczalny zbiór punktów nieciągłości.*

Wnioskiem z Twierdzenia 2.6 i twierdzenia Helly’ego dla funkcji monotonicznych jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.7 (Helly’ego). *Zalóżmy, że ciąg funkcji $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, jest ograniczony w ustalonym punkcie $x_0 \in [a, b]$ oraz ciąg wahań $(\bigvee_a^b f_n)$ jest ograniczony. Wtedy z ciągu (f_n) można wybrać podciąg (f_{l_n}) zbieżny punktowo do funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o wahaniu skończonym na $[a, b]$.*

Dowód. Wybierzmy liczbę $M \geq 0$ tak, żeby $|f_n(x_0)| \leq M$ oraz $\bigvee_a^b f_n \leq M$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $|f_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0)| \leq \bigvee_a^b f_n + M \leq 2M$ dla wszystkich $x \in [a, b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Dla każdej funkcji f_n rozważmy kanoniczny rozkład Jordana $f_n = g_n - h_n$; por. (2.4). Dla wszystkich $x \in [a, b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$|g_n(x)| = \frac{1}{2} \left| \bigvee_a^x f_n + f_n(x) \right| \leq \frac{3}{2}M, \quad |h_n(x)| = \frac{1}{2} \left| \bigvee_a^x f_n - f_n(x) \right| \leq \frac{3}{2}M.$$

Możemy więc zastosować twierdzenie Helly’ego do ciągów (g_n) , (h_n) funkcji monotonicznych na $[a, b]$. Najpierw wybierzmy podciąg (g_{k_n}) ciągu (g_n) punktowo zbieżny do funkcji g na $[a, b]$. Następnie z ciągu (h_{k_n}) wybierzmy podciąg (h_{l_n}) punktowo zbieżny do funkcji h na $[a, b]$. Wtedy $f_{l_n} = g_{l_n} - h_{l_n} \rightarrow g - h$ na $[a, b]$. Funkcja $f := g - h$ ma wahanie skończone na $[a, b]$ jako różnica dwóch funkcji niemalejących. \square

Rozdział 3

Całka Riemanna-Stieltjesa

3.1 Definicja całki. Podstawowe własności

Całka Riemanna-Stieltjesa jest naturalnym rozszerzeniem pojęcia całki Riemanna znanego z kursu analizy.

Definicja 3.1. Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozważmy podział $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$ oraz układ $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ punktów pośrednich $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (dla $i = 1, \dots, k$) odpowiadających podziałowi P . Utwórzmy sumę całkową

$$S(f, g, P, \bar{t}) := \sum_{i=1}^k f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Mówimy, że liczba $A \in \mathbb{R}$ jest całką Riemanna-Stieltjesa (RS-całką) funkcji f względem funkcji g na $[a, b]$, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall P \in \mathcal{P}[a, b] \forall \bar{t} \quad (\mu(P) < \delta \Rightarrow |S(f, g, P, \bar{t}) - A| < \varepsilon), \quad (3.1)$$

gdzie $\mu(P) := \max_{1 \leq i \leq k} (x_i - x_{i-1})$ jest średnicą podziału P . Oznaczamy $A = \int_a^b f dg$, zaś warunek (3.1) zapisujemy jako zbieżność sum całkowych

$$\lim_{\mu(P) \rightarrow 0} S(f, g, P, \bar{t}) = \int_a^b f dg.$$

Z powyższej definicji wynika, że jeśli istnieje RS-całka $\int_a^b f dg$, to jest tylko jedna (ćwiczenie, dowód nie wprost).

Przykłady

1. Jeśli $g(x) = x$ dla $x \in [a, b]$, to RS-całka staje się całką Riemanna $\int_a^b f(x) dx$.

2. Niech $f(x) := 1$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy $S(f, g, P, \bar{t}) = \sum_{i=1}^k (g(x_i) - g(x_{i-1})) = g(b) - g(a)$. Zatem $\int_a^b f dg = g(b) - g(a)$.

3. Niech $g := \chi_{(c,b]}$, gdzie $c \in [a, b)$ jest ustalonym punktem oraz niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła w punkcie c . Pokażemy, że $\int_a^b f dg = f(c)$. Niech $\varepsilon > 0$. Skoro f jest ciągła w punkcie c , to dobierzmy liczbę $\delta > 0$ taką, że

$$\forall t \in [a, b] \quad (|t - c| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(c)| < \varepsilon).$$

Niech $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$ będzie taki, że $\mu(P) < \delta$ i niech $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$, gdzie $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, \dots, k$. Istnieje dokładnie jeden indeks $j \in \{1, \dots, k\}$ taki, że $c \in [x_{j-1}, x_j]$. Wtedy

$$S(f, g, P, \bar{t}) = f(t_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = f(t_j).$$

Stąd i z doboru liczby δ mamy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - f(c)| = |f(t_j) - f(c)| < \varepsilon.$$

Następujące twierdzenie pokazuje, że przy stosownych założeniach o funkcji g możemy RS-całkę sprowadzić do odpowiedniej całki Riemanna.

Twierdzenie 3.1 (Zamiana zmiennych). *Załóżmy, że $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, zaś funkcja $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ściśle rosnąca i ciągła. Wówczas RS-całka $\int_a^b f dg$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje całka Riemanna $\int_{g(a)}^{g(b)} f \circ g^{-1}$ oraz*

$$\int_a^b f dg = \int_{g(a)}^{g(b)} f \circ g^{-1}.$$

Dowód. Rozważmy podział $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$ oraz układ $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ punktów pośrednich $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, \dots, k$. Stosując funkcję g , otrzymamy punkty $y_i := g(x_i)$, które stanowią podział $Q = \{y_0, \dots, y_k\} \in \mathcal{P}[g(a), g(b)]$. Ponadto dostajemy układ $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$ punktów pośrednich $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$, gdzie $s_i := g(t_i)$ dla $i = 1, \dots, k$. Zauważmy, że

$$S(f, g, P, \bar{t}) := \sum_{i=1}^k f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^k (f \circ g^{-1})(s_i)(y_i - y_{i-1}) = S(f \circ g^{-1}, \text{id}, Q, \bar{s}). \quad (3.2)$$

Odwrotnie, mając podział $Q = \{y_0, \dots, y_k\} \in \mathcal{P}[g(a), g(b)]$ i układ $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$ punktów pośrednich $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$, otrzymujemy podział $P = \{x_0, \dots, x_k\} \in \mathcal{P}[a, b]$ oraz układ $\bar{t} = (t_1, \dots, t_k)$ punktów pośrednich, gdzie $x_i := g^{-1}(y_i)$, $t_i := g^{-1}(s_i)$ dla $i = 1, \dots, k$ oraz (3.2) zachodzi.

Założmy, że RS-całka $\int_a^b f dg$ istnieje. Wtedy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ znajdziemy liczbę $\delta > 0$ taką, że

$$\forall P \in \mathcal{P}[a, b] \quad \forall \bar{t} \quad \left(\mu(P) < \delta \Rightarrow \left| S(f, g, P, \bar{t}) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon \right). \quad (3.3)$$

Skoro funkcja g jest ciągłą iniekcją na zbiorze zwartym $[a, b]$, to jest ona homeomorfizmem przekształcającym $[a, b]$ na $[g(a), g(b)]$. Zatem funkcja g^{-1} jest jednostajnie ciągła na $[g(a), g(b)]$. Dobierzmy więc liczbę $\eta > 0$ taką, że $|g^{-1}(u) - g^{-1}(v)| < \delta$ dla dowolnych $u, v \in [g(a), g(b)]$ takich, że $|u - v| < \eta$. Niech podział $Q = \{y_0, \dots, y_k\} \in \mathcal{P}[g(a), g(b)]$ będzie taki, że $\mu(Q) < \eta$ i rozważmy układ $\bar{s} = (s_1, \dots, s_k)$ punktów pośrednich $s_i \in [y_{i-1}, y_i]$. Stosując jak powyżej funkcję g^{-1} , otrzymamy odpowiedni podział $P \in \mathcal{P}[a, b]$ oraz układ \bar{t} , przy czym z doboru liczby η mamy $\mu(P) < \delta$. Do P oraz \bar{t} możemy zastosować (3.3), przy czym na mocy (3.2) możemy zastąpić sumę $S(f, g, P, \bar{t})$ przez sumę $S(f \circ g^{-1}, \text{id}, Q, \bar{s})$. Dobraliśmy więc liczbę $\eta > 0$ taką, że

$$\forall Q \in \mathcal{P}[g(a), g(b)] \quad \forall \bar{s} \quad \left(\mu(Q) < \eta \Rightarrow \left| S(f \circ g^{-1}, \text{id}, Q, \bar{s}) - \int_a^b f dg \right| < \varepsilon \right). \quad (3.4)$$

To pokazuje, że całka Riemanna $\int_{g(a)}^{g(b)} f \circ g^{-1}$ istnieje i jest równa $\int_a^b f dg$.

Dowód implikacji w drugą stronę jest analogiczny. \square

Twierdzenie 3.2. Niech $f, g, f_i, g_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $c_i \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, 2$.

(i) Jeśli całki $\int_a^b f_i dg$ istnieją dla $i = 1, 2$, to istnieje całka $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg$ oraz

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg.$$

(ii) Jeśli całki $\int_a^b f dg_i$ istnieją dla $i = 1, 2$, to istnieje całka $\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2)$ oraz

$$\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

Dowód. Należy skorzystać z definicji RS-całki – jest to nietrudne ćwiczenie. \square

Następujące twierdzenie jest warunkiem typu Cauchy'ego równoważnym istnieniu RS-całki.

Twierdzenie 3.3. Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Na to, by istniała całka $\int_a^b f dg$ potrzeba i wystarcza, by zachodził warunek

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall P, \bar{t} \quad \forall P', \bar{t}' \quad (\max\{\mu(P), \mu(P')\} < \delta \Rightarrow |S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, P', \bar{t}')| < \varepsilon), \quad (3.5)$$

gdzie P, P' są podziałami przedziału $[a, b]$, zaś \bar{t}, \bar{t}' są odpowiednimi układami punktów pośrednich.

Dowód. Konieczność. Niech $\varepsilon > 0$. Z założenia istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że

$$\forall P \in \mathcal{P}[a, b] \quad \forall \bar{t} \quad \left(\mu(P) < \delta \Rightarrow \left| S(f, g, P, \bar{t}) - \int_a^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Rozważmy dowolne podziały P, P' przedziału $[a, b]$ takie, że $\max\{\mu(P), \mu(P')\} < \delta$ oraz odpowiednie układy \bar{t}, \bar{t}' punktów pośrednich. Wtedy

$$\begin{aligned} |S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, P', \bar{t}')| &\leq \left| S(f, g, P, \bar{t}) - \int_a^b f dg \right| + \left| \int_a^b f dg - S(f, g, P', \bar{t}') \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Dostateczność. Dla $n \in \mathbb{N}$ weźmy kolejno $\varepsilon_n := 1/n$ i według założenia (3.5) dobierzmy odpowiednie liczby $\delta_n > 0$, przy czym można przyjąć, że $\delta_{n+1} < \delta_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Dla $n \in \mathbb{N}$ wybierzmy podział $P_n \in \mathcal{P}[a, b]$ taki, że $\mu(P_n) < \delta_n$ i odpowiedni układ \bar{t}_n punktów pośrednich. Oznaczmy $S_n := S(f, g, P_n, \bar{t}_n)$.

Niech $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $k \in \mathbb{N}$ tak, by $1/k < \varepsilon$. Dla dowolnych $m, n \geq k$ mamy $\mu(P_m) < \delta_m \leq \delta_k$, $\mu(P_n) < \delta_n \leq \delta_k$, a więc $|S_m - S_n| < \frac{1}{k} < \varepsilon$. Zatem ciąg liczbowy (S_n) spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżny do pewnej liczby $A \in \mathbb{R}$.

Pokażemy, że $\int_a^b f dg = A$. Niech $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $N \in \mathbb{N}$ tak, by $1/N < \varepsilon/2$ oraz $|S_N - A| < \varepsilon/2$. Niech $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $\mu(P) < \delta_N$ i niech \bar{t} będzie odpowiednim układem punktów pośrednich. Wtedy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - A| \leq |S(f, g, P, \bar{t}) - S_N| + |S_N - A| < \frac{1}{N} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Zatem $\int_a^b f dg = A$. □

Korzystając z poprzedniego twierdzenia, udowodnimy następującą własność addytywności całki względem przedziału.

Twierdzenie 3.4. Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $a < c < b$. Jeśli całka $\int_a^b f dg$ istnieje, to istnieją całki $\int_a^c f dg$ oraz $\int_c^b f dg$, przy czym $\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$.

Dowód. Załóżmy, że całka $\int_a^b f dg$ istnieje. Udowodnimy, że całka $\int_a^c f dg$ istnieje. Niech $\varepsilon > 0$. Z istnienia całki $\int_a^b f dg$ na mocy (3.5) dobierzmy odpowiednią liczbę $\delta > 0$. Niech $Q, Q' \in \mathcal{P}[a, c]$, $\max\{\mu(Q), \mu(Q')\} < \delta$ oraz niech \bar{t}, \bar{s} będzie odpowiednimi układami punktów pośrednich. Ustalmy podział $T \in \mathcal{P}[c, b]$ taki, że $\mu(T) < \delta$ wraz z odpowiednim układem \bar{u} punktów pośrednich. Wówczas $P := Q \cup T$ oraz $P' := Q' \cup T$ są podziałami przedziału $[a, b]$ oraz $\max\{\mu(P), \mu(P')\} < \delta$. Przyjmijmy $\bar{v} := \bar{t} \cup \bar{u}$ oraz

$\bar{w} := \bar{s} \smile \bar{u}$ jako odpowiednie układy punktów pośrednich, np. jeśli $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$, to $\bar{t} \smile \bar{u} := (t_1, \dots, t_n, u_1, \dots, u_m)$. Mamy teraz

$$|S(f, g, Q, \bar{t}) - S(f, g, Q', \bar{s})| = |S(f, g, P, \bar{v}) - S(f, g, P', \bar{w})| < \varepsilon,$$

co oznacza, że spełniona jest wersja warunku (3.5) zapewniającego istnienie całki $\int_a^c f dg$.

Istnienie całki $\int_c^b f dg$ wykazujemy analogicznie.

Dla dowodu równości w tezie weźmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy liczbę $\delta > 0$ tak, by

$$\left| S(f, g, P, \bar{v}) - \int_a^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| S(f, g, Q, \bar{t}) - \int_a^c f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| S(f, g, T, \bar{u}) - \int_c^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

dla dowolnych podziałów $P \in \mathcal{P}[a, b]$, $Q \in \mathcal{P}[a, c]$, $T \in \mathcal{P}[c, b]$ takich, że

$$\max\{\mu(P), \mu(Q), \mu(T)\} < \delta$$

oraz odpowiednich układów \bar{v} , \bar{t} , \bar{u} punktów pośrednich. Ustalmy $Q \in \mathcal{P}[a, c]$, $T \in \mathcal{P}[c, b]$ takie, że $\max\{\mu(Q), \mu(T)\} < \delta$ oraz odpowiednie układy \bar{t} , \bar{u} punktów pośrednich. Wtedy $P := Q \cup T \in \mathcal{P}[a, b]$, $\mu(P) < \delta$ oraz $\bar{v} := \bar{t} \smile \bar{u}$ jest odpowiednim układem punktów pośrednich. Ponadto $S(f, g, P, \bar{v}) = S(f, g, Q, \bar{t}) + S(f, g, T, \bar{u})$. Zatem

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f dg - \int_a^c f dg - \int_c^b f dg \right| \leq \left| \int_a^b f dg - S(f, g, P, \bar{v}) \right| \\ & + \left| S(f, g, Q, \bar{t}) - \int_a^c f dg \right| + \left| S(f, g, T, \bar{u}) - \int_c^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy żądaną równość. \square

Uwaga 3.1. Niech $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą dane wzorami $f := \chi_{(0,1]}$, $g := \chi_{[0,1]}$. Wtedy $\int_{-1}^0 f dg = 0 = \int_0^1 f dg$ (por. Przykłady 2 i 3). Jednakże całka $\int_{-1}^1 f dg$ nie istnieje (ćwiczenie).

3.2 Kiedy RS-całka istnieje?

Twierdzenie 3.5 (Całkowanie przez części). *Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Rozważmy całki $\int_a^b f dg$ i $\int_a^b g df$. Istnienie jednej z tych całek jest równoważne istnieniu drugiej oraz zachodzi wzór*

$$\int_a^b f dg + \int_a^b g df = [f(x)g(x)]_a^b,$$

gdzie $[f(x)g(x)]_a^b := f(b)g(b) - f(a)g(a)$.

Dowód. Załóżmy np. istnienie całki $\int_a^b gdf$ oraz dla liczby $\varepsilon > 0$ dobierzmy liczbę $\delta > 0$ według definicji

$$\lim_{\mu(P) \rightarrow 0} S(g, f, P, \bar{t}) = \int_a^b gdf.$$

Ustalmy dowolny podział $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ o średnicy $< \delta/2$ i dowolny układ $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ punktów pośrednich. Utwórzmy sumę

$$S := S(f, g, P, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Wtedy stosując przekształcenie Abela, mamy

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n f(t_i)g(x_i) - \sum_{i=1}^n f(t_i)g(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)g(x_i) - \sum_{i=0}^{n-1} f(t_{i+1})g(x_i) \\ &= - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i)) + f(t_n)g(b) - f(t_1)g(a). \end{aligned}$$

Stąd dodając i odejmując $[f(x)g(x)]_a^b$ zauważamy, że S jest równe

$$[f(x)g(x)]_a^b - \left(g(a)(f(t_1) - f(a)) + \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i)) + g(b)(f(b) - f(t_n)) \right). \quad (3.6)$$

Niech $P' := \{a, t_1, t_2, \dots, t_n, b\}$. Wtedy $a \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq b$, więc P' potraktujemy jako podział przedziału $[a, b]$, w którym sąsiednie punkty mogą być równe. Równość (3.6) można więc zapisać w postaci

$$S(f, g, P, \bar{t}) = [f(x)g(x)]_a^b - S(g, f, P', \bar{x}), \quad (3.7)$$

gdzie $\bar{x} := (x_0, x_1, \dots, x_n)$ jest układem punktów pośrednich dla podziału P' . Zauważmy, że $\mu(P') < \delta$. Zatem z doboru liczby δ mamy $|S(g, f, P', \bar{x}) - \int_a^b gdf| < \varepsilon$. Teraz na mocy (3.7) otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\left| S(f, g, P, \bar{t}) - \left([f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b gdf \right) \right| \\ &= \left| S(f, g, P, \bar{t}) - [f(x)g(x)]_a^b + S(g, f, P', \bar{x}) - S(g, f, P', \bar{x}) + \int_a^b gdf \right| \\ &= \left| S(g, f, P', \bar{x}) - \int_a^b gdf \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

To oznacza, że

$$\lim_{\mu(P) \rightarrow 0} S(f, g, P, \bar{t}) = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b gdf.$$

Zatem $\int_a^b f dg$ istnieje i zachodzi wzór podany w tezie. \square

Twierdzenie 3.6. Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Jeśli jedna z funkcji f, g jest ciągła, a druga ma wahanie skończone, to całki $\int_a^b f dg, \int_a^b g df$ istnieją.

Dowód. Na mocy Twierdzenia 3.5 wystarczy wykazać, że istnieje jedna z całek. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła na $[a, b]$, zaś g ma wahanie skończone. Pokażemy istnienie całki $\int_a^b f dg$. Ze względu na rozkład Jordana i Twierdzenie 3.2 (ii) wystarczy rozważyć przypadek, gdy funkcja g jest niemalejąca. Niech więc g będzie niemalejąca oraz niestała. Oznaczmy $c := g(b) - g(a)$. Wtedy $c > 0$.

Rozważmy podział $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ oraz dla $i = 1, \dots, n$ oznaczmy

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

a następnie

$$\underline{S}(f, g, P) := \sum_{i=1}^n m_i(g(x_i) - g(x_{i-1})), \quad \overline{S}(f, g, P) := \sum_{i=1}^n M_i(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Zauważmy, że dla dowolnego układu \bar{t} punktów pośrednich dla P mamy

$$\underline{S}(f, g, P) \leq S(f, g, P, \bar{t}) \leq \overline{S}(f, g, P). \quad (3.8)$$

Nietrudno sprawdzić (ćwiczenie), że zbiór $\{\underline{S}(f, g, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ jest ograniczony z góry przez dowolną sumę postaci $\overline{S}(f, g, P)$. Oznaczmy $I := \sup\{\underline{S}(f, g, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$. Dla dowolnego P mamy

$$\underline{S}(f, g, P) \leq I \leq \overline{S}(f, g, P). \quad (3.9)$$

Pokażemy, że $\int_a^b f dg = I$.

Niech $\varepsilon > 0$. Z jednostajnej ciągłości funkcji f na $[a, b]$ dobierzmy liczbę $\delta > 0$ taką, że $|f(u) - f(v)| < \varepsilon/c$ dla dowolnych $u, v \in [a, b]$ o własności $|u - v| < \delta$. Rozważmy dowolny podział $P \in \mathcal{P}[a, b]$, dla którego $\mu(P) < \delta$. Z twierdzenia Weierstrassa wynika, że dla $i = 1, \dots, n$ istnieją $u_i, v_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takie, że $m_i = f(u_i), M_i = f(v_i)$. Wtedy $|u_i - v_i| \leq x_i - x_{i-1} < \delta$, więc $M_i - m_i < \varepsilon/c$. Stąd

$$\overline{S}(f, g, P) - \underline{S}(f, g, P) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) < \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - g(x_{i-1})) = \varepsilon.$$

Weźmy dowolny układ punktów pośrednich \bar{t} dla podziału P . Korzystając z (3.8) i (3.9), mamy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - I| \leq \overline{S}(f, g, P) - \underline{S}(f, g, P) < \varepsilon,$$

a to oznacza, że $I = \int_a^b f dg$. □

Kolejne twierdzenie pokazuje, że przy pewnych założeniach (innych niż w Twierdzeniu 3.1) RS-całkę można liczyć jako odpowiednią całkę Riemanna.

Twierdzenie 3.7. *Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$, g jest różniczkowalna oraz g' jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$. Wtedy istnieje całka $\int_a^b f dg$ oraz*

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g'.$$

Dowód. Z założeń wynika, że całka $I := \int_a^b f g'$ istnieje. Pokażemy, że $\int_a^b f dg = I$. Niech $\varepsilon > 0$. Z teorii całki Riemanna i całkowalności f na $[a, b]$ wiemy, że istnieje liczba $\delta_1 > 0$ taka, że dla każdego podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ o średnicy $< \delta_1$ mamy

$$\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon, \quad (3.10)$$

gdzie $m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, $M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ dla $i = 1, \dots, n$. Skoro całka $I = \int_a^b f g'$ istnieje, to znajdziemy liczbę $\delta_2 > 0$ taką, że dla każdego podziału $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ o średnicy $< \delta_2$ i dowolnego układu $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ punktów pośrednich mamy

$$\left| I - \sum_{i=1}^n f(t_i)g'(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon. \quad (3.11)$$

Niech $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Rozważmy dowolny podział $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ o średnicy $< \delta$ i dowolny układ $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$ punktów pośrednich. Na mocy twierdzenia Lagrange'a dobierzmy punkty $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takie, że $g(x_i) - g(x_{i-1}) = g'(s_i)(x_i - x_{i-1})$ dla $i = 1, \dots, n$. Funkcja g' jako całkowalna w sensie Riemanna na $[a, b]$ jest ograniczona. Niech liczba K będzie taka, że $|g'(x)| \leq K$ dla każdego $x \in [a, b]$. Korzystając z (3.10) i (3.11), dostajemy

$$\begin{aligned} & \left| I - \sum_{i=1}^n f(t_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \right| = \left| I - \sum_{i=1}^n f(t_i)g'(s_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ & \leq \left| I - \sum_{i=1}^n f(s_i)g'(s_i)(x_i - x_{i-1}) \right| + \left| \sum_{i=1}^n (f(s_i) - f(t_i))g'(s_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ & < \varepsilon + K \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \varepsilon + K\varepsilon = (1 + K)\varepsilon. \end{aligned}$$

Z dowolności ε otrzymujemy $\int_a^b f dg = I$. □

Twierdzenie 3.8. *Jeśli funkcje $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mają wspólny punkt nieciągłości $c \in [a, b]$, to nie istnieje RS-całka $\int_a^b f dg$.*

Dowód. Załóżmy, że $c < b$ oraz f nie jest prawostronnie ciągła w punkcie c . (Dowód, gdy $a < c$ oraz f nie jest lewostronnie ciągła w c , przebiega podobnie.) Zatem dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$ mamy

$$\forall \sigma > 0 \exists x \in (c, c + \sigma) |f(x) - f(c)| > \varepsilon. \quad (3.12)$$

Rozważmy dwa przypadki:

1⁰ Funkcja g nie jest prawostronnie ciągła w punkcie c . Dla pewnej liczby $\varepsilon_0 > 0$ mamy więc

$$\forall \delta > 0 \exists y \in (c, c + \delta) |g(y) - g(c)| > \varepsilon_0. \quad (3.13)$$

Pokażemy, że całka $\int_a^b f dg$ nie istnieje, gdyż nie zachodzi warunek typu Cauchy'ego z Twierdzenia 3.3. Niech liczba $\delta > 0$ będzie dowolna. Ustalmy podział $P = \{x_0, \dots, x_n\}$ przedziału $[a, b]$ taki, że $\mu(P) < \delta$ oraz $c = x_{k-1}$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, n\}$, przy czym punkt x_k jest dobrany tak, by $|g(x_k) - g(c)| > \varepsilon_0$ na podstawie (3.13). Dalej z warunku (3.12) dobierzmy punkt $x \in (c, x_k)$ taki, że $|f(x) - f(c)| > \varepsilon$. Niech $Q := P$ oraz niech $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{s} = (s_1, \dots, s_n)$ będą takie, że $t_k := x$, $s_k := c$ oraz $t_i = s_i$ dla $i \neq k$. Wtedy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, Q, \bar{s})| = |f(x) - f(c)| |g(x_k) - g(c)| > \varepsilon \cdot \varepsilon_0,$$

co pokazuje, że warunek typu Cauchy'ego nie zachodzi.

2⁰ Funkcja g jest prawostronnie ciągła w punkcie c i nie jest w nim lewostronnie ciągła. Teraz dla pewnego $\varepsilon_0 > 0$ mamy

$$\forall \delta > 0 \exists y \in (c - \delta, c) |g(y) - g(c)| > \varepsilon_0. \quad (3.14)$$

Niech liczba $\delta > 0$ będzie dowolna. Wybierzmy podział $P = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}[a, b]$ taki, że $\mu(P) < \delta$ oraz $x_{k-1} < c < x_k$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, n\}$. Punkt $x_{k-1} \in (c - \delta, c)$ dobieramy na podstawie (3.14) tak, by $|g(x_{k-1}) - g(c)| > \varepsilon_0$. Wtedy też $|g(x_{k-1}) - g(z)| > \varepsilon_0$ dla wszystkich $z \in (c, c + \eta)$, gdzie istnienie liczby $\eta > 0$ wynika z prawostronnej ciągłości g w punkcie c . Dalej dla $\sigma := \min\{\eta, \delta - (c - x_{k-1})\}$ na podstawie (3.12) dobieramy $x_k \in (c, c + \sigma)$ tak, by $|f(x_k) - f(c)| > \varepsilon$. (Warunek $\sigma \leq \delta - (c - x_{k-1})$ narzucamy po to, by mieć $x_k - x_{k-1} < \delta$.) Pozostałe punkty x_i wybieramy dowolnie tak, by $\mu(P) < \delta$.

Niech $Q := P$ oraz niech $\bar{t} = (t_1, \dots, t_n)$, $\bar{s} = (s_1, \dots, s_n)$ będą takie, że $t_k := x_k$, $s_k := c$ oraz $t_i = s_i$ dla $i \neq k$. Podobnie jak poprzednio dostajemy

$$|S(f, g, P, \bar{t}) - S(f, g, Q, \bar{s})| = |f(x_k) - f(c)| |g(x_k) - g(x_{k-1})| > \varepsilon \cdot \varepsilon_0.$$

□

Rozdział 4

Twierdzenie Vitaliego o pokryciu

4.1 Twierdzenie Vitaliego

Przez λ oznaczamy miarę Lebesgue'a na prostej rzeczywistej. Przypomnijmy, że λ jest miarą zewnętrzną Lebesgue'a λ^* obciętą do σ -ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a na \mathbb{R} . Dla przedziału $I \subset \mathbb{R}$ będziemy czasem pisać krótko $|I| := \lambda(I)$ (wiedząc, że miara Lebesgue'a przedziału jest równa jego długości).

Definicja 4.1. Niech $E \subset \mathbb{R}$. Mówimy, że rodzina \mathcal{F} niezdegenerowanych przedziałów zwartych pokrywa zbiór E w sensie Vitaliego, gdy

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \in \mathcal{F} \quad (x \in I, \quad |I| < \varepsilon). \quad (4.1)$$

Twierdzenie 4.1 (Vitaliego o pokryciu). *Jeśli rodzina \mathcal{F} niezdegenerowanych przedziałów zwartych pokrywa zbiór $E \subset \mathbb{R}$ w sensie Vitaliego, to istnieje przeliczalna podrodzina $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$ złożona z przedziałów parami rozłącznych taka, że $\lambda(E \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_*} I) = 0$.*

Dowód. Możemy założyć, że zbiór E jest ograniczony. Przypuśćmy bowiem, że E jest nieograniczony i rozważamy zbiory $E_n := E \cap (n, n+1)$ dla $n \in \mathbb{Z}$, które są ograniczone oraz $(E \cap \mathbb{Z}) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n = E$. Rodzina \mathcal{F} pokrywa każdy ze zbiorów E_n , $n \in \mathbb{N}$, w sensie Vitaliego. Ponadto dla każdego ustalonego n możemy zastąpić \mathcal{F} przez jej podrodzinę pokrywającą E_n w sensie Vitaliego, której przedziały są zawarte w $(n, n+1)$. Załóżmy, że znaleźliśmy przeliczalne rodziny $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$, $n \in \mathbb{N}$, złożone z przedziałów parami rozłącznych takie, że $\lambda(E_n \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I) = 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{F}_* = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}_n$. Wtedy $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$ oraz \mathcal{F}_* składa się z przedziałów parami rozłącznych. Ponadto

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_*} I \right) \leq \lambda^*(E \cap \mathbb{Z}) + \lambda^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} E_n \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I \right)$$

$$\leq \lambda^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left(E_n \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I \right) \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda^* \left(E_n \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}_n} I \right) = 0.$$

Zatem rodzina \mathcal{F}_* spełnia tezę dla zbioru E .

Założmy zatem, że $E \subset J$, gdzie J jest ograniczonym przedziałem otwartym, przy czym wszystkie przedziały rodziny \mathcal{F} są zawarte w J . Przedziały podrodziny \mathcal{F}_* będziemy wybierać indukcyjnie, ustawiając je w ciąg (I_k) . Założmy, że wybraliśmy już parami rozłączne przedziały $I_1, \dots, I_n \in \mathcal{F}$. Jeśli $E \subset \bigcup_{k=1}^n I_k$, to przyjmując $\mathcal{F}_* := \{I_1, \dots, I_n\}$, mamy tezę. Jeśli zaś $E \setminus \bigcup_{k=1}^n I_k \neq \emptyset$, to położmy $F_n := \bigcup_{k=1}^n I_k$. Wtedy $G_n := J \setminus F_n$ jest niepustym zbiorem otwartym. Niech

$$M_n := \sup\{|I| : I \in \mathcal{F}, I \subset G_n\}.$$

Zbiór, którego kres górny tu rozważamy, jest niepusty, bo $E \setminus F_n \neq \emptyset$ oraz \mathcal{F} jest pokryciem w sensie Vitaliego. Oczywiście $M_n > 0$ i z definicji kresu górnego wybierzmy przedział $I_{n+1} \in \mathcal{F}$ taki, że $I_{n+1} \subset G_n$ oraz

$$|I_{n+1}| > M_n - \frac{1}{2}M_n = \frac{1}{2}M_n. \quad (4.2)$$

Ponieważ $I_{n+1} \subset G_n$, więc $I_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^n I_k = \emptyset$. Gdy $E \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} I_k$, to położmy $\mathcal{F}_* := \{I_1, \dots, I_{n+1}\}$. W przeciwnym razie powtarzamy rozumowanie. Jeśli konstrukcja przebiega w skończonej liczbie kroków, to teza zachodzi. Założmy więc, że konstrukcja prowadzi do nieskończonego ciągu $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Z konstrukcji wynika, że przedziały tego ciągu są parami rozłączne. Położmy $\mathcal{F}_* := \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$. Do zakończenia dowodu wystarczy wykazać, że $\lambda^*(E \setminus F) = 0$, gdzie $F := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$.

Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ niech J_k będzie przedziałem współśrodkowym z I_k i takim, że $|J_k| = 5|I_k|$. Mamy

$$\sum_{k=1}^{\infty} |J_k| = 5 \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = 5\lambda \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \right) \leq 5|J| < \infty. \quad (4.3)$$

Wykażemy, że

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad E \setminus F \subset \bigcup_{k \geq j} J_k, \quad (4.4)$$

gdyż to daje tezę. Istotnie, dla $\varepsilon > 0$ dobierzmy $j \in \mathbb{N}$ tak, by $\sum_{k=j}^{\infty} |J_k| < \varepsilon$ (reszta szeregu zbieżnego, por. wzór (4.3)). Na mocy (4.4) mamy $E \setminus F \subset \bigcup_{k \geq j} J_k$, a to z dowolności $\varepsilon > 0$ oznacza, że $\lambda^*(E \setminus F) = 0$.

Dla dowodu (4.4) ustalmy $j \in \mathbb{N}$ oraz $x \in E \setminus F$. Ponieważ $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k$, więc $x \in E \setminus F_j \subset J \setminus F_j = G_j$. Skoro rodzina \mathcal{F} pokrywa zbiór E w sensie Vitaliego, to

istnieje przedział $I \in \mathcal{F}$ taki, że $x \in I \subset G_j$. Pokażemy, że $I \subset \bigcup_{k \geq j} J_k$, co zakończy dowód (4.4). Możemy znaleźć wskaźnik $n > j$, dla którego $I \cap F_n \neq \emptyset$. Istotnie, gdyby $I \cap F_n = \emptyset$ dla każdego $n > j$, to $I \subset G_n$ oraz z warunku (4.2) mielibyśmy

$$\forall n > j \quad |I| \leq M_n < 2|I_{n+1}|,$$

co jest niemożliwe, bo $|I_n| \rightarrow 0$ na mocy zbieżności szeregu $\sum |I_n|$. Rozważmy więc niepusty zbiór

$$A := \{n > j : I \cap F_n \neq \emptyset\}$$

i niech $m := \min A$. Wtedy $I \cap F_m \neq \emptyset$ oraz $I \cap F_{m-1} = \emptyset$. Stąd $I \subset G_{m-1}$, a więc z definicji M_{m-1} i wzoru (4.2) mamy

$$|I| \leq M_{m-1} < 2|I_m|. \quad (4.5)$$

Skoro $I \cap F_m \neq \emptyset$ oraz $I \cap F_{m-1} = \emptyset$, $F_m = F_{m-1} \cup I_m$, to $I \cap I_m \neq \emptyset$. Stąd, z (4.5) i wyboru przedziału J_m mamy $I \subset J_m$. Zatem

$$x \in I \subset J_m \subset \bigcup_{k \geq j} J_k,$$

co kończy dowód (4.4). □

Twierdzenie Vitaliego o pokryciu ma ważne zastosowania w teorii funkcji rzeczywistych. Jedno z nich pokażemy w następnym podrozdziale.

4.2 Różniczkowalność funkcji monotonicznych

Definicja 4.2. Mówimy, że $\alpha \in [-\infty, \infty]$ jest liczbą pochodną funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ w punkcie $x_0 \in [a, b]$, gdy istnieje ciąg (h_n) liczb różnych od 0 zbieżny do 0 taki, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = \alpha.$$

Uwaga: Funkcja f ma w każdym punkcie przynajmniej jedną liczbę pochodną. Wynika to stąd, że każdy ciąg liczb rzeczywistych ma podciąg zbieżny lub rozbieżny do $\pm\infty$.

Przykłady

- (a) Funkcja f różniczkowalna w x_0 ma w tym punkcie jedyną liczbę pochodną $f'(x_0)$.
- (b) Funkcja $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := |x|$, ma w punkcie 0 dwie liczby pochodne: -1 oraz 1 .

(c) Dla funkcji $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sqrt{x} \sin(1/x) & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}$$

każdy element $\alpha \in [-\infty, \infty]$ jest liczbą pochodną w punkcie 0. Wykazać to (ćwiczenie).

Założmy, że funkcja rzeczywista f na przedziale $I := [a, b]$ jest ściśle rosnąca i różniczkowalna. Wtedy $f' \geq 0$ na I . Jeśli ponadto liczba $p > 0$ jest taka, że $f' < p$ na I , to z twierdzenia Lagrange'a łatwo otrzymujemy $f(b) - f(a) \leq p(b - a)$. Inaczej mówiąc, $\lambda(f[I]) \leq p\lambda(I)$. Poniższy lemat przenosi tę obserwację do ogólniejszej sytuacji, gdy rozważamy liczby pochodne.

Lemat 4.1. *Niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ściśle rosnąca i niech $p > 0$ oraz $E \subset [a, b]$. Jeśli w każdym punkcie $x \in E$ istnieje liczba pochodna $Df(x) < p$, to $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji miary zewnętrznej Lebesgue'a znajdziemy ograniczony zbiór otwarty G taki, że $E \subset G$ oraz

$$\lambda(G) < \lambda^*(E) + \varepsilon. \quad (4.6)$$

Korzystając z założenia o zbiorze E , dla każdego $x_0 \in E$ wybierzmy ciąg (h_n) o wyrazach niezerowych taki, że $h_n \rightarrow 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} < p. \quad (4.7)$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy

$$I_n(x_0) := \begin{cases} [x_0, x_0 + h_n], & \text{gdy } h_n > 0 \\ [x_0 + h_n, x_0], & \text{gdy } h_n < 0 \end{cases}$$

$$J_n(x_0) := \begin{cases} [f(x_0), f(x_0 + h_n)], & \text{gdy } h_n > 0 \\ [f(x_0 + h_n), f(x_0)], & \text{gdy } h_n < 0. \end{cases}$$

Możemy dodatkowo założyć, że wszystkie przedziały $I_n(x_0)$ są zawarte w G . Ponieważ funkcja f jest ściśle rosnąca, więc $f[I_n(x_0)] \subset J_n(x_0)$ oraz $J_n(x_0)$ jest przedziałem niezdegenerowanym. Oczywiście $\lambda(I_n(x_0)) = |h_n|$ oraz $\lambda(J_n(x_0)) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|$, więc z (4.7) wynika, że

$$\lambda(J_n(x_0)) < p\lambda(I_n(x_0)). \quad (4.8)$$

Skoro $h_n \rightarrow 0$, to $\lambda(I_n(x_0)) \rightarrow 0$, a zatem z (4.8) mamy $\lambda(J_n(x_0)) \rightarrow 0$. Stąd wnioskujemy, że rodzina przedziałów $\mathcal{F} := \{J_n(x_0) : x_0 \in E, n \in \mathbb{N}\}$ pokrywa zbiór $f[E]$ w sensie Vitalego. Na mocy twierdzenia Vitalego wybierzmy przeliczalną podrodziną $\mathcal{F}' := \{J_{n_i}(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$ rodziny \mathcal{F} złożoną z przedziałów parami rozłącznych i taką, że

$$\lambda \left(f[E] \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) = 0. \quad (4.9)$$

Stosując (4.9), otrzymujemy

$$\lambda^*(f[E]) \leq \lambda^* \left(f[E] \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i) \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_{n_i}(x_i)). \quad (4.10)$$

Zauważmy, że odpowiednie przedziały $I_{n_i}(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$, tworzą rodzinę rozłączną (gdyby dwa różne przedziały tej postaci się przecinały, to odpowiednie przedziały rodziny \mathcal{F}' też by się przecinały). Stąd i ze wzoru (4.6) wnioskujemy, że

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)) = \lambda \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i) \right) \leq \lambda(G) < \lambda^*(E) + \varepsilon. \quad (4.11)$$

Łącząc (4.10), (4.8) i (4.11), mamy $\lambda^*(f[E]) < p(\lambda^*(E) + \varepsilon)$. Stąd i z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$. \square

Lemat 4.2. *Niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ściśle rosnąca i niech $q \geq 0$ oraz $E \subset [a, b]$. Jeśli w każdym punkcie $x \in E$ istnieje liczba pochodna $Df(x) > q$, to $\lambda^*(f[E]) \geq q\lambda^*(E)$.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Wybierzmy ograniczony zbiór otwarty G taki, że $f[E] \subset G$ oraz $\lambda(G) < \lambda^*(f[E]) + \varepsilon$. Niech \tilde{E} oznacza zbiór punktów ciągłości funkcji f w zbiorze E . Wtedy zbiór $E \setminus \tilde{E}$ jest przeliczalny. Na mocy założenia dla każdego $x_0 \in \tilde{E}$ wybierzmy ciąg (h_n) o wyrazach niezerowych taki, że $h_n \rightarrow 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} > q. \quad (4.12)$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczmy przedziały $I_n(x_0)$ oraz $J_n(x_0)$ jak w dowodzie poprzedniego lematu. Ponieważ $x_0 \in \tilde{E}$, więc $h_n \rightarrow 0$ implikuje $\lambda(J_n(x_0)) \rightarrow 0$. Możemy więc założyć, że wszystkie przedziały $J_n(x_0)$ są zawarte w G . Przy tych oznaczeniach z nierówności (4.12) dostajemy

$$\lambda(J_n(x_0)) > q\lambda(I_n(x_0)) \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Zauważmy, że rodzina przedziałów $\mathcal{F} := \{I_n(x_0) : x_0 \in E, n \in \mathbb{N}\}$ pokrywa zbiór \tilde{E} w sensie Vitaliego. Na mocy twierdzenia Vitaliego wybierzmy przeliczalną podrodziną $\mathcal{F}' := \{I_{n_i}(x_i) : i \in \mathbb{N}\}$ rodziny \mathcal{F} złożoną z przedziałów parami rozłącznych i taką, że $\lambda\left(\tilde{E} \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) = 0$. Zatem $\lambda\left(E \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) = 0$. W konsekwencji stosując (4.13), otrzymujemy

$$\begin{aligned} q\lambda^*(E) &\leq q\lambda^*\left(E \cap \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_{n_i}(x_i)\right) \leq q \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_{n_i}(x_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(J_{n_i}(x_i)) = \lambda\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} J_{n_i}(x_i)\right) \leq \lambda(G) < \lambda^*(f[E]) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd i z dowolności $\varepsilon > 0$ wynika, że $q\lambda^*(E) \leq \lambda^*(f[E])$. \square

Twierdzenie 4.2 (o różniczkowalności prawie wszędzie). *Każda funkcja rzeczywista monotoniczna na $[a, b]$ jest różniczkowalna prawie wszędzie.*

Dowód. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest niemalejąca. Zastępując ją przez funkcję $\text{id} + f$, możemy dodatkowo przyjąć, że rozważana funkcja jest rosnąca (obie funkcje f , $\text{id} + f$ mają te same punkty różniczkowalności).

Niech E oznacza zbiór punktów przedziału $[a, b]$, w których funkcja f nie jest różniczkowalna. Oznaczmy przez E_∞ zbiór tych $x \in [a, b]$, że ∞ jest liczbą pochodną funkcji f w punkcie x . Dla $p, q \in \mathbb{Q}$ przez E_{pq} oznaczmy zbiór tych $x \in [a, b]$, że istnieją liczby pochodne $D_1f(x)$, $D_2f(x)$, dla których zachodzi $D_1f(x) < p < q < D_2f(x)$. Oczywiście w każdym punkcie $x \in [a, b]$ iloraz różnicowy funkcji f jest dodatni. Zatem wszystkie liczby pochodne funkcji f w punktach zbioru E są nieujemne. Jeśli $x \in E$, tzn. f nie jest różniczkowalna w x , to ∞ jest liczbą pochodną funkcji f w punkcie x lub istnieją dwie różne (nieujemne) liczby pochodne funkcji f w punkcie x . Zatem $x \in E_\infty \cup \bigcup_{p, q \in \mathbb{Q}_+} E_{pq}$, gdzie $\mathbb{Q}_+ := \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$. Wystarczy więc wykazać, że $\lambda(E_\infty) = 0$ oraz $\lambda(E_{pq}) = 0$ dla $p, q \in \mathbb{Q}_+$, $p < q$.

Rozważmy zbiór E_∞ . Mamy $f[E_\infty] \subset [f(a), f(b)]$, więc stosując Lemat 4.2, gdy $Df(x) = \infty > q \in \mathbb{N}$ dla $x \in E_\infty$, otrzymujemy

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad q\lambda^*(E_\infty) \leq \lambda^*(f[E_\infty]) \leq f(b) - f(a) < \infty.$$

Stąd $\lambda^*(E_\infty) = 0$, bo $0 \leq \lambda^*(E_\infty) \leq (f(b) - f(a))/q \rightarrow 0$, gdy $q \rightarrow \infty$.

Rozważmy zbiór E_{pq} dla $p, q \in \mathbb{Q}_+$. Wtedy $0 < p < q$ oraz na mocy Lematów 4.1 i 4.2 otrzymujemy

$$q\lambda^*(E_{pq}) \leq \lambda^*(f[E_{pq}]) \leq p\lambda^*(E_{pq}).$$

Ponieważ $p < q$, więc powyższe nierówności implikują, że $\lambda^*(E_{pq}) = 0$. □

Z Twierdzenia 4.2 oraz twierdzenia Jordana wynika

Wniosek 4.1. *Każda funkcja o wahanii skończonym na $[a, b]$ jest różniczkowalna prawie wszędzie.*

Tezy Twierdzenia 4.2 nie daje się wzmocnić, zmniejszając rodzinę zbiorów miary zero do mniejszej rodziny zbiorów, na których obserwujemy brak różniczkowalności funkcji monotonicznych. Istotnie, dla każdego zbioru $E \subset [a, b]$ miary zero można skonstruować funkcję ciągłą ściśle rosnącą $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $f'(x) = \infty$ dla każdego $x \in E$. (Por. Twierdzenie 7.9 w monografii [1].)

Twierdzenie 4.3. *Niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie niemalejąca. Wtedy jej pochodna f' , określona prawie wszędzie na $[a, b]$, jest funkcją mierzalną oraz*

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda \leq f(b) - f(a).$$

Dowód. Rozszerzamy funkcję f na przedział $[a, b + 1]$, przyjmując $f(x) := f(b)$ dla $x \in (b, b + 1]$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ niech

$$f_n(x) := \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n}, \quad \text{gdy } x \in [a, b].$$

Funkcje $x \mapsto f(x + 1/n)$ oraz $x \mapsto f(x)$ są niemalejące i wiadomo, że każda funkcja monotoniczna na przedziale jest borelowska. Zatem funkcje f_n , $n \in \mathbb{N}$, są mierzalne. Ponadto $f_n(x) \rightarrow f'(x)$ dla każdego punktu x różniczkowalności funkcji f . Stąd oraz z Twierdzenia 4.2 wnioskujemy, że $f_n \rightarrow f'$ prawie wszędzie na $[a, b]$ oraz funkcja f' jest mierzalna. Na mocy lematu Fatou mamy

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n d\lambda \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[a,b]} f_n d\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(n \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx \right). \quad (4.14)$$

Ostatnia całka po prawej stronie jest całką Riemanna, bo funkcja podcałkowa jest różnicą funkcji monotonicznych. Stosując podstawienie $t = x + 1/n$, otrzymujemy

$$\int_a^b f\left(x + \frac{1}{n}\right) dx = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx,$$

a więc

$$\int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx = \int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}} f(x) dx - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{n}f(b) - \int_a^{a+\frac{1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n}(f(b) - f(a)).$$

Zatem na mocy (4.14) mamy

$$\int_{[a,b]} f' d\lambda \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(n \int_a^b \left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right) dx \right) \leq f(b) - f(a).$$

□

W powyższym twierdzeniu nierówności nie można zastąpić równością, bo funkcja Cantora $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną równą 0 prawie wszędzie, więc $\int_0^1 f' d\lambda = 0 < 1 = f(1) - f(0)$. Odnotujmy, że z Twierdzenia 4.3 i twierdzenia Jordana wynika, że pochodna funkcji o wahaniu skończonym na $[a, b]$ jest całkowalna.

Rozdział 5

Funkcje absolutnie ciągłe

5.1 Definicja, podstawowe własności

Przez $NZS[a, b]$ oznaczamy zbiór wszystkich skończonych rodzin postaci $\{[a_i, b_i] : i \leq n\}$ przedziałów zawartych w $[a, b]$ i nie zachodzących na siebie, tzn. takich, że dowolne dwa przedziały rodziny mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Definicja 5.1. Mówimy, że funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \{[a_i, b_i] : i \leq n\} \in NZS[a, b] \quad \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

W powyższym warunku nierówności $<$ mogą być zastąpione nierównościami \leq .

Uwaga 5.1. Z definicji wynika, że każda funkcja absolutnie ciągła jest jednostajnie ciągła. Odwrotnie być nie musi, co pokazuje funkcja Cantora (to, że nie jest ona absolutnie ciągła, uzasadnimy później). Rodzina funkcji absolutnie ciągłych na $[a, b]$ jest zamknięta względem dodawania i mnożenia, zatem stanowi przestrzeń liniową i algebrę (ćwiczenie).

Twierdzenie 5.1. *Każda funkcja absolutnie ciągła na $[a, b]$ ma wahanie skończone.*

Dowód. Weźmy $\varepsilon := 1$ w definicji absolutnej ciągłości $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dobierzmy odpowiednią liczbę $\delta > 0$ i rozważmy podział przedziału $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$$

o średnicy $< \delta$. Ustalmy dowolny przedział $[x_{i-1}, x_i]$, gdy $1 \leq i \leq n$, i zauważmy, że

$$\bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq 1. \tag{5.1}$$

Istotnie, jeśli $x_{i-1} = t_0 < t_1 < \dots < t_n = x_i$ jest dowolnym podziałem przedziału $[x_{i-1}, x_i]$, to $\sum_{j=1}^n (t_j - t_{j-1}) < \delta$, więc z doboru δ mamy $\sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| < 1$. Stąd i z dowolności powyższego podziału wynika (5.1).

Następnie, korzystając z addytywności wahania względem przedziału, otrzymujemy

$$\bigvee_a^b f = \sum_{i=1}^k \bigvee_{x_{i-1}}^{x_i} f \leq k \cdot 1 = k < \infty.$$

□

Uwaga 5.2. Odnotujmy następujące obserwacje.

1. Istnieją funkcje o wahanu skończonym, które nie są absolutnie ciągłe (np. funkcje nieciągłe o wahanu skończonym).
2. Istnieją funkcje ciągłe, które nie są absolutnie ciągłe (np. funkcje ciągłe o wahanu nieskończonym).
3. Istnieje funkcja ciągła monotoniczna, która nie jest absolutnie ciągła (np. funkcja Cantora).
4. Każda funkcja spełniająca warunek Lipschitza jest absolutnie ciągła. Istotnie, niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L > 0$. Niech $\varepsilon > 0$ i połóżmy $\delta := \varepsilon/L$. Wtedy dla dowolnej rodziny $\{[a_i, b_i]: i \leq n\} \in NZS[a, b]$ takiej, że $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$ mamy $\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq L \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < L \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.
5. Istnieje funkcja absolutnie ciągła, która nie spełnia warunku Lipschitza. Taką funkcją jest $f(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$. Nie spełnia ona warunku Lipschitza, bo biorąc dowolną liczbę $L > 0$, dobierzemy $x_0 := 0$ oraz $x_1 \in (0, 1]$ takie, że $|f(x_1) - f(x_0)| > L|x_1 - x_0|$. Wystarczy dobrać x_1 tak, by $\sqrt{x_1} < 1/L$ (jest to możliwe, bo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$). Wtedy $1/\sqrt{x_1} > 1$, więc

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \sqrt{x_1} > Lx_1 = L|x_1 - x_0|.$$

Dla dowodu absolutnej ciągłości funkcji f niech $\varepsilon \in (0, 1)$ i połóżmy $\delta := \varepsilon^2/2$. Niech $\{[a_i, b_i]: i \leq n\} \in NZS[0, 1]$ będzie taką rodziną, że $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$. Załóżmy dodatkowo, że $a_i < b_i \leq a_{i+1} < b_{i+1}$ dla $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Możemy też założyć, że istnieje $k \in \{1, \dots, n-1\}$, dla którego $b_k \leq \varepsilon^2/4 \leq a_{k+1}$. (Gdyby $\varepsilon^2/4 \in (a_i, b_i)$, to możemy podzielić $[a_i, b_i]$ na dwa przedziały $[a_i, \varepsilon^2/4]$ oraz $[\varepsilon^2/4, b_i]$.) Wtedy

$$\sum_{i=1}^n (\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}) = \sum_{i=1}^k (\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}) + \sum_{i=k+1}^n (\sqrt{b_i} - \sqrt{a_i}) \leq \sqrt{b_k} + \sum_{i=k+1}^n \frac{b_i - a_i}{2\sqrt{t_i}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2/4}} \sum_{i=k+1}^n (b_i - a_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

przy czym $t_i \in (a_i, b_i)$ dla $i \in \{k+1, \dots, n\}$ są punktami otrzymanymi przez zastosowanie twierdzenia Lagrange'a do funkcji f na przedziałach $[a_i, b_i]$ (mamy $t_i \geq a_{k+1} \geq \varepsilon^2/4$, więc $1/\sqrt{t_i} \leq 1/\sqrt{\varepsilon^2/4}$).

Odnajmy jeszcze jedną własność funkcji absolutnie ciągłych.

Twierdzenie 5.2. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła, to f przekształca zbiory miary zero na zbiory miary zero.*

Dowód. Niech E będzie podzbiorem $[a, b]$ miary zero. Bez zmniejszania ogólności rozważań możemy założyć, że $E \subset (a, b)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ i dobierzmy liczbę $\delta > 0$ według definicji absolutnej ciągłości funkcji f . Niech $U \subset (a, b)$ będzie zbiorem otwartym takim, że $E \subset U$ oraz $\lambda(U) < \delta$. Zbiór U ma postać sumy $\bigcup_k (a_k, b_k)$ ciągu skończonego lub nieskończonego przedziałów otwartych parami rozłącznych. Załóżmy bardziej złożony przypadek, gdy jest to ciąg nieskończony. Ponieważ funkcja f na przedziale $[a_k, b_k]$ osiąga swoje kresy i ma własność Darboux, więc istnieje przedział $[c_k, d_k] \subset [a_k, b_k]$ taki, że $\lambda(f[[a_k, b_k]]) = \lambda(f[[c_k, d_k]]) = |f(d_k) - f(c_k)|$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy $\sum_{k=1}^n (d_k - c_k) \leq \lambda(U) < \delta$. Zatem $\sum_{k=1}^n |f(d_k) - f(c_k)| < \varepsilon$. Stąd dla $n \rightarrow \infty$ mamy $\sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| \leq \varepsilon$, a więc

$$\lambda^*(f[E]) \leq \lambda^*(f[U]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f[[a_k, b_k]]) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(f[[c_k, d_k]]) = \sum_{k=1}^{\infty} |f(d_k) - f(c_k)| \leq \varepsilon.$$

Z dowolności $\varepsilon > 0$ dostajemy $\lambda(f[E]) = 0$. □

Definicja 5.2. Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ przekształca zbiory miary zero na zbiory miary zero, to mówimy, że spełnia ona warunek (N) Łuzina.

Funkcja Cantora $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ nie spełnia warunku (N) Łuzina, zatem nie jest absolutnie ciągła. Funkcja ta odwzorowuje zbiór Cantora, który jest miary zero, na cały przedział $[0, 1]$.

Wniosek 5.1. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła, to f przekształca zbiory mierzalne na zbiory mierzalne.*

Dowód. Niech $E \subset [a, b]$ będzie zbiorem mierzalnym. Zatem $E = K \cup A$, gdzie K jest typu F_σ oraz $\lambda(A) = 0$. Niech $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, gdzie zbiory K_n są domknięte i jako ograniczone - zwarte. Ponieważ funkcja f jest ciągła, więc obraz $f[K_n]$ jest zbiorem zwartym dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem $f[K] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f[K_n]$ jest typu F_σ , zaś z Twierdzenia 5.2 wynika, że zbiór $f[A]$ jest miary zero. Stąd $f[E] = f[K] \cup f[A]$ jest zbiorem mierzalnym. □

Uwaga 5.3. Jeśli funkcja f jest ciągła na przedziale, to jej obraz zbioru mierzalnego nie musi być zbiorem mierzalnym. Istotnie, niech $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ będzie funkcją Cantora i niech $V \subset [0, 1]$ będzie niemierzalnym zbiorem Vitalego. Wtedy $A := V \setminus \mathbb{Q}$ jest niemierzalny oraz $B := f^{-1}[A] \subset C$, gdzie C jest zbiorem Cantora. Wówczas zbiór B jest miarą zero, więc mierzalny oraz zbiór $A = f[f^{-1}[A]] = f[B]$ jest niemierzalny.

Następująca własność całki Lebesgue'a jest nazywana absolutną ciągłością całki.

Twierdzenie 5.3. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego mierzalnego zbioru $E \subset [a, b]$ takiego, że $\lambda(E) < \delta$ zachodzi $\int_E |f| d\lambda < \varepsilon$.*

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Z definicji całki $\int_{[a,b]} |f| d\lambda$ wynika, że istnieje funkcja prosta $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $0 \leq u \leq |f|$ na $[a, b]$ oraz $\int_{[a,b]} u d\lambda > \int_{[a,b]} |f| d\lambda - \varepsilon/2$. Funkcja prosta u jest ograniczona – założymy, że $M > 0$ oraz $u(x) \leq M$ dla każdego $x \in [a, b]$. Niech $\delta := \varepsilon/(2M)$. Rozważmy dowolny zbiór mierzalny $E \subset [a, b]$ taki, że $\lambda(E) < \delta$. Wtedy

$$\int_E u d\lambda \leq M\lambda(E) < M\delta < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Zatem

$$\int_E |f| d\lambda = \int_E (|f| - u) d\lambda + \int_E u d\lambda \leq \int_{[a,b]} (|f| - u) d\lambda + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Wniosek 5.2. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$, to funkcja $F(x) := \int_{[a,x]} f d\lambda$, $x \in [a, b]$, jest absolutnie ciągła.*

Dowód. Dobierzmy do $\varepsilon > 0$ liczbę $\delta > 0$ jak w Twierdzeniu 5.3. Rozważmy rodzinę $\{[a_i, b_i]: i \leq n\} \in NZS[a, b]$ taką, że $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$. Przyjmując $E := \bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]$ w Twierdzeniu 5.3, mamy $\int_E |f| d\lambda < \varepsilon$, czyli $\sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} |f| d\lambda < \varepsilon$. Zauważmy, że

$$|F(b_i) - F(a_i)| = \left| \int_{[a, b_i]} f d\lambda - \int_{[a, a_i]} f d\lambda \right| = \left| \int_{[a_i, b_i]} f d\lambda \right|,$$

więc

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| = \sum_{i=1}^n \left| \int_{[a_i, b_i]} f d\lambda \right| \leq \sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} |f| d\lambda < \varepsilon.$$

□

5.2 Twierdzenie Banacha-Zareckiego

Ciągłość, skończone wahanie i warunek (N) Łuzina są konieczne, by funkcja była absolutnie ciągła na $[a, b]$. Okazuje się, że łącznie stanowią one warunek dostateczny absolutnej ciągłości funkcji. Aby to pokazać, potrzebne nam będą pewne fakty pomocnicze.

Uwaga 5.4. (1) Dla każdego zbioru $E \subset \mathbb{R}$ istnieje jego nadzbiór A typu G_δ taki, że $\lambda^*(E) = \lambda(A)$. (Wystarczy skorzystać z definicji miary zewnętrznej λ^* .)

(2) Dla każdego ciągu $E_1 \subset E_2 \subset \dots$ podzbiorów \mathbb{R} oraz $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ zachodzi równość $\lambda^*(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(E_n)$. (Na mocy (1) znajdziemy odpowiednie nadzbiory A_n i A dla E_n i E oraz przyjmując $B_n := A \cap \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$, należy skorzystać z tego, że $\lambda(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(B_n)$.)

Następujący lemat jest nieco inną wersją lematu poprzedzającego twierdzenie o różniczkowalności funkcji monotonicznej.

Lemat 5.1. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $E \subset [a, b]$. Jeśli istnieje liczba $p > 0$ taka, że w każdym punkcie $x \in E$ dowolna liczba pochodna $Df(x)$ spełnia warunek $|Df(x)| < p$, to $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$E_n := \{x \in E : \forall t \in [a, b] (|t - x| < 1/n \Rightarrow |f(t) - f(x)| < p|t - x|)\}.$$

Zauważmy, że $E_n \subset E_{n+1}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$ (z założenia dotyczącego $Df(x)$). Stąd $f[E_n] \subset f[E_{n+1}]$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f[E_n] = f[E]$. Zatem na mocy Uwagi 5.4 (2) mamy

$$\lambda^*(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(E_n) \quad \text{oraz} \quad \lambda^*(f[E]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(f[E_n]). \quad (5.2)$$

Ustalmy dowolne $n \in \mathbb{N}$. Wybierzmy ciąg przedziałów $(I_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ pokrywających E_n , z których każdy ma długość $< 1/n$ oraz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k^n) \leq \lambda^*(E_n) + \varepsilon. \quad (5.3)$$

Załóżmy, że $x, x' \in E_n \cap I_k^n$. Wtedy $|x - x'| < 1/n$, więc

$$|f(x) - f(x')| < p|x - x'| \leq p\lambda(I_k^n).$$

Zauważmy, że $f[E_n \cap I_k^n] \subset \left[\inf_{x \in E_n \cap I_k^n} f(x), \sup_{x \in E_n \cap I_k^n} f(x) \right]$ oraz

$$\sup_{x \in E_n \cap I_k^n} f(x) - \inf_{x \in E_n \cap I_k^n} f(x) = \sup_{x, x' \in E_n \cap I_k^n} |f(x) - f(x')|.$$

Stąd $\lambda^*(f[E_n \cap I_k^n]) \leq \sup_{x, x' \in E_n \cap I_k^n} |f(x) - f(x')| \leq p\lambda(I_k^n)$. Mamy $E_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E_n \cap I_k^n)$, więc $f[E_n] = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f[E_n \cap I_k^n]$. Zatem na mocy (5.3) dostajemy

$$\lambda^*(f[E_n]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^*(f[E_n \cap I_k^n]) \leq p \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_k^n) \leq p(\lambda^*(E_n) + \varepsilon).$$

Z dowolności $n \in \mathbb{N}$, biorąc $n \rightarrow \infty$ i stosując (5.2), mamy

$$\lambda^*(f[E]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^*(f[E_n]) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} p(\lambda^*(E_n) + \varepsilon) = p(\lambda^*(E) + \varepsilon).$$

Na koniec z dowolności $\varepsilon > 0$ otrzymujemy $\lambda^*(f[E]) \leq p\lambda^*(E)$. \square

Lemat 5.2. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną oraz niech $E \subset [a, b]$ będzie zbiorem mierzalnym. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru E , to $\lambda^*(f[E]) \leq \int_E |f'| d\lambda$.

Dowód. Niech $\varepsilon > 0$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ połóżmy

$$E_n := \{x \in E : (n-1)\varepsilon \leq |f'(x)| < n\varepsilon\}.$$

Pochodna funkcji mierzalnej na zbiorze mierzalnym jest funkcją mierzalną (wynika to z równości $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x+1/n) - f(x))$). Zatem zbiory E_n , $n \in \mathbb{N}$, są mierzalne. Ponadto są one parami rozłączne. Zauważmy, że $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ oraz $f[E] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f[E_n]$. Korzystając z Lematu 5.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \lambda^*(f[E]) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(f[E_n]) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n\varepsilon\lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\varepsilon\lambda(E_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon\lambda(E_n) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |f'| d\lambda + \varepsilon\lambda(E) = \int_E |f'| d\lambda + \varepsilon\lambda(E). \end{aligned}$$

Na koniec z dowolności $\varepsilon > 0$ mamy $\lambda^*(f[E]) \leq \int_E |f'| d\lambda$. \square

Twierdzenie 5.4 (Banacha-Zareckiego). Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona ciągła, ma wahanie skończone i spełnia warunek (N) Łuzina.

Dowód. Konieczność została wykazana wcześniej. Udowodnimy dostateczność. Z założenia funkcja f ma wahanie skończone, więc jej pochodna f' istnieje prawie wszędzie oraz jest całkowna na $[a, b]$. Najpierw wykazemy, że

$$|f(d) - f(c)| \leq \int_{[c, d]} |f'| d\lambda \tag{5.4}$$

dla dowolnego podprzedziału $[c, d]$ przedziału $[a, b]$. Niech E oznacza zbiór punktów różniczkowalności funkcji f w przedziale $[c, d]$ i niech $F := [c, d] \setminus E$. Skoro f ma wahanie skończone, to $\lambda(F) = 0$. Z warunku (N) Łuzina wynika, że $\lambda(f[F]) = 0$. Ponieważ f jest ciągła, więc przedział domknięty o końcach $f(c), f(d)$ zawiera się w $f[[c, d]]$. Zatem z Lematu 5.2 wnioskujemy, że

$$|f(d) - f(c)| \leq \lambda(f[[c, d]]) \leq \lambda(f[E]) + \lambda(f[F]) = \lambda(f[E]) \leq \int_E |f'| d\lambda = \int_{[c, d]} |f'| d\lambda,$$

co kończy dowód (5.4).

Przejdźmy do dowodu absolutnej ciągłości f . Niech $\varepsilon > 0$. Z absolutnej ciągłości całki (Twierdzenie 5.3) dobierzmy liczbę $\delta > 0$ taką, że $\int_A |f'| d\lambda < \varepsilon$ dla każdego zbioru mierzalnego $A \subset [a, b]$ takiego, że $\lambda(A) < \delta$. Niech $\{[a_i, b_i] : i \leq n\} \in NZS[a, b]$ oraz $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$. Zatem korzystając z (5.4), otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n \int_{[a_i, b_i]} |f'| d\lambda = \int_{\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]} |f'| d\lambda < \varepsilon,$$

bo $\lambda(\bigcup_{i=1}^n [a_i, b_i]) < \delta$. □

5.3 Charakteryzacja przez całkę Lebesgue'a

W tym podrozdziale całkę funkcji rzeczywistej f na zbiorze mierzalnym $E \subset \mathbb{R}$ względem miary Lebesgue'a λ oznaczamy krótko $\int_E f$. Funkcje absolutnie ciągłe mają ścisły związek z całkowalnością w sensie Lebesgue'a. Zbadajmy najpierw, jak wyglądają odpowiedniki podstawowych twierdzeń rachunku całkowego dla całki Lebesgue'a. Zaczniemy od twierdzenia pomocniczego.

Twierdzenie 5.5. *Niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie całkowalna w sensie Lebesgue'a. Wówczas $\int_{[a, x]} f = 0$ dla każdego $x \in [a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f = 0$ prawie wszędzie na $[a, b]$.*

Dowód. Dostateczność jest oczywista. Pokażemy konieczność. Załóżmy więc, że $\int_{[a, x]} f = 0$ dla każdego $x \in [a, b]$. Oznaczmy

$$D^+ := \{x \in (a, b) : f(x) > 0\}, \quad D_n^+ := \{x \in (a, b) : f(x) > 1/n\} \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Przypuśćmy, że $\lambda(D_n^+) > 0$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy istnieje zbiór domknięty $K \subset D_n^+$ taki, że $\lambda(K) > 0$. Przedstawmy zbiór otwarty $(a, b) \setminus K$ w postaci sumy $\bigcup_k (a_k, b_k)$ ciągu parami rozłącznych przedziałów otwartych (załóżmy bardziej złożony przypadek, gdy ten ciąg jest nieskończony). Z założenia mamy dla każdego $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{[a_k, b_k]} f = \int_{[a, b_k]} f - \int_{[a, a_k]} f = 0.$$

Zatem na mocy przeliczalnej addytywności całki Lebesgue'a dostajemy

$$\int_{[a,b]} f = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{[a_k, b_k]} f + \int_K f = \int_K f \geq \frac{\lambda(K)}{n} > 0,$$

co daje sprzeczność z założeniem. Zatem $\lambda(D_n^+) = 0$ dla każdego n i w konsekwencji $\lambda(D^+) = 0$, bo $D^+ = \bigcup_n D_n^+$. Stąd wynika, że funkcja $f^+ := \max\{f, 0\}$ jest równa 0 prawie wszędzie na $[a, b]$. W analogiczny sposób dowodzimy, że $f^- := \max\{-f, 0\}$ jest równa 0 prawie wszędzie na $[a, b]$. Tym samym $f = f^+ - f^- = 0$ prawie wszędzie na $[a, b]$. \square

Twierdzenie 5.6. *Załóżmy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowna w sensie Lebesgue'a na $[a, b]$ oraz niech $F(x) := \int_{[a,x]} f$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy $F'(x) = f(x)$ dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$.*

Dowód. Wiemy, że funkcja F jest absolutnie ciągła, więc ma wahanie skończone (por. Wniosek 5.2 i Twierdzenie 5.1). Zatem pochodna $F'(x)$ istnieje dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$.

Rozważmy najpierw przypadek, gdy funkcja f jest ograniczona. Niech liczba $M > 0$ będzie taka, że $|f(x)| \leq M$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [a, b]$ niech

$$f_n(x) := \frac{F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)}{\frac{1}{n}} = n \int_{[x, x+1/n]} f,$$

przy czym (aby wyrażenie $F\left(x + \frac{1}{n}\right)$ miało sens) przyjmujemy $f(x) := f(b)$ dla $x \in [b, b + 1]$. Wtedy $|f_n(x)| \leq n \int_x^{x+1/n} M = M$ dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [a, b]$.

Weźmy dowolne $c \in (a, b]$. Wiedząc, że $f_n \rightarrow F'$ prawie wszędzie na $[a, b]$, na mocy twierdzenia Lebesgue'a o ograniczonym przechodzeniu do granicy dostajemy

$$\begin{aligned} \int_{[a,c]} F' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,c]} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_a^c \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x) \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_{a+\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} F(x) dx - n \int_a^c F(x) dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x) dx - n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x) dx \right). \end{aligned}$$

Granicę $\lim_n \left(n \int_c^{c+\frac{1}{n}} F(x) dx \right)$ postrzegamy jako pochodną funkcji $\varphi(x) := \int_a^x F$ w punkcie c , zaś granicę $\lim_n \left(n \int_a^{a+\frac{1}{n}} F(x) dx \right)$ postrzegamy jako pochodną tejże funkcji w punkcie a . (Są to granice odpowiednich ilorazów różnicowych.) Zatem stosując klasyczne twierdzenie o funkcji górnej granicy całkowania dla całki Riemanna funkcji ciągłej F i kontynuując wcześniejsze przekształcenia, mamy

$$\int_{[a,c]} F' = F(c) - F(a) = \int_{[a,c]} f.$$

Stąd otrzymujemy $\int_{[a,c]}(F' - f) = 0$ dla każdego $c \in [a, b]$, co w myśl Twierdzenia 5.6 implikuje, że $F' = f$ prawie wszędzie na $[a, b]$.

Rozważmy teraz ogólny przypadek funkcji całkwalnej f na $[a, b]$ oraz załóżmy najpierw, że $f \geq 0$. W tym przypadku funkcja F jest niemalejąca, więc $F' \geq 0$ prawie wszędzie. Połóżmy $f_n(x) := \min\{f(x), n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $x \in [a, b]$. Ciąg (f_n) jest niemalejący oraz $f_n \rightarrow f$ na $[a, b]$. Ponieważ $f - f_n \geq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$, więc każda z funkcji $F(x) - \int_{[a,x]} f_n = \int_{[a,x]}(f - f_n)$, $n \in \mathbb{N}$, jest niemalejąca. Ma ona zatem prawie wszędzie nieujemną pochodną, która jest równa $F' - f_n$ na mocy poprzedniego przypadku w dowodzie. Stąd $F' - f_n \geq 0$ prawie wszędzie dla każdego n . W konsekwencji (po przejściu do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$) mamy $F' - f \geq 0$ prawie wszędzie. Zatem korzystając ze znanego oszacowania całki $\int_a^b F' \leq F(b) - F(a)$ (gdzie funkcja F jest niemalejąca), otrzymujemy

$$0 \leq \int_{[a,b]}(F' - f) = \int_{[a,b]} F' - \int_{[a,b]} f \leq F(b) - F(a) - \int_{[a,b]} f = 0.$$

Tym samym mamy $\int_{[a,b]}(F' - f) = 0$, co implikuje $F' = f$ prawie wszędzie, bo funkcja podcałkowa $F' - f$ jest prawie wszędzie nieujemna (znana własność całki Lebesgue'a funkcji mierzalnej nieujemnej).

Przechodząc do przypadku funkcji całkwalnej f dowolnego znaku, mamy $F(x) = \int_{[a,x]} f^+ - \int_{[a,x]} f^-$, więc wykorzystując znany już przypadek funkcji nieujemnych f^+ oraz f^- , otrzymujemy

$$F'(x) = \left(\int_{[a,x]} f^+ \right)' - \left(\int_{[a,x]} f^- \right)' = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$, co daje tezę. \square

Funkcję monotoniczną $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ różną od stałej nazywamy funkcją singularną, gdy $f'(x) = 0$ dla prawie wszystkich $x \in [a, b]$. Przykładem ciągłej funkcji singularnej jest funkcja Cantora na $[0, 1]$.

Wniosek 5.3. *Każdą funkcję niemalejącą $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci sumy $f = g + h$ dwóch funkcji niemalejących g, h , gdzie g jest absolutnie ciągła, zaś h jest singularna.*

Dowód. Wiemy, że f' istnieje prawie wszędzie na $[a, b]$ i jest całkwalna. Niech $g(x) := \int_{[a,x]} f'$ dla $x \in [a, b]$. Z Wniosku 5.2 wynika, że funkcja g jest absolutnie ciągła. Ponadto jest ona niemalejąca, bo $f' \geq 0$ prawie wszędzie. Niech $h(x) := f(x) - g(x)$ dla $x \in [a, b]$. Niech $x, y \in [a, b]$, $x < y$. Wtedy $h(y) - h(x) = f(y) - f(x) - \int_{[x,y]} f' \geq 0$, co wynika z twierdzenia o oszacowaniu całki z pochodnej funkcji niemalejącej. Funkcja h

jest singularna, bo z Twierdzenia 5.6 wnioskujemy, że $h' = f' - f' = 0$ prawie wszędzie. \square

Do charakteryzacji funkcji absolutnie ciągłych przez całkę Lebesgue'a potrzebny nam jeszcze będzie następujący lemat.

Lemat 5.3. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła oraz $f' = 0$ prawie wszędzie na $[a, b]$, to f jest stała.*

Dowód. Pokażemy, że $f(x) = f(a)$ dla każdego $c \in [a, b]$. Niech więc $c \in (a, b)$ oraz $\varepsilon > 0$. Dobierzmy liczbę $\delta > 0$ zgodnie z definicją absolutnej ciągłości funkcji f . Oznaczmy $E := \{x \in (a, c) : f'(x) = 0\}$. Funkcja absolutnie ciągła f ma wahanie skończone, więc jest różniczkowalna prawie wszędzie. Zatem $\lambda(E) = c - a$. Ponadto dla każdego $x \in E$ istnieje dowolnie mała liczba $h > 0$ taka, że $[x, x+h] \subset (a, c)$ oraz $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon h$. Wszystkie takie przedziały $[x, x+h]$ stanowią pokrycie zbioru E w sensie Vitalego. Na mocy twierdzenia Vitalego istnieje skończona rozłączna podrodzina $\{[x_i, y_i] : 1 \leq i \leq k\}$ tej rodziny taka, że $\lambda(E \setminus \bigcup_{i=1}^k [x_i, y_i]) < \delta$. Skoro $\lambda(E) = c - a$, to mamy $\lambda([a, c] \setminus \bigcup_{i=1}^k [x_i, y_i]) < \delta$. Możemy ponumerować przedziały tak, aby $y_i < x_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, k-1$. Niech ponadto $y_0 := a$ oraz $x_{k+1} := c$. Wtedy

$$\begin{aligned} |f(c) - f(a)| &\leq \sum_{i=0}^k |f(x_{i+1}) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^k |f(y_i) - f(x_i)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon \sum_{i=1}^k |y_i - x_i| < \varepsilon + \varepsilon(c - a) = \varepsilon(1 + c - a). \end{aligned}$$

Z dowolności ε wynika, że $f(c) = f(a)$. \square

Twierdzenie 5.7. *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Następujące warunki są równoważne:*

- (a) f jest absolutnie ciągła na $[a, b]$;
- (b) $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} g$ dla pewnej funkcji $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ całkownej na $[a, b]$;
- (c) f jest różniczkowalna prawie wszędzie na $[a, b]$, f' jest całkowna na $[a, b]$ oraz

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'.$$

Dowód. (a) \Rightarrow (c) Załóżmy, że f jest absolutnie ciągła. Wtedy f ma wahanie skończone, a zatem pochodna f' istnieje prawie wszędzie i jest całkowna na $[a, b]$. Niech

$$h(x) := f(x) - \int_{[a,x]} f' \quad \text{dla } x \in [a, b].$$

Wtedy funkcja h jest absolutnie ciągła na $[a, b]$ oraz $h' = f' - f' = 0$ prawie wszędzie na mocy Twierdzenia 5.6. Zatem z Lematu 5.3 wnioskujemy, że h jest stała równa $h(a) = f(a)$. Stąd $f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'$ dla $x \in [a, b]$.

Implikacja (c) \Rightarrow (b) jest oczywista.

(b) \Rightarrow (a) Jest to konsekwencja Wniosku 5.2. □

Wniosek 5.4. *Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Lebesgue'a wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja absolutnie ciągła $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f = g'$ prawie wszędzie na $[a, b]$.*

Dowód. Konieczność. Załóżmy, że funkcja f jest całkowalna na $[a, b]$. Połóżmy $g(x) := \int_{[a,x]} f$ dla $x \in [a, b]$ i skorzystajmy z Twierdzenia 5.6.

Dostateczność. Jeśli istnieje odpowiednia funkcja absolutnie ciągła g , to wiemy, że jej pochodna istnieje prawie wszędzie i jest całkowalna. □

Na koniec pokażemy, że wahanie funkcji absolutnie ciągłej można wyrazić poprzez całkę.

Twierdzenie 5.8. *Niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie absolutnie ciągła i określmy funkcję $V: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wzorami $V(a) := 0$ oraz $V(x) := \bigvee_a^x f$ dla $x \in (a, b]$. Wtedy $V(x) = \int_{[a,x]} |f'|$ dla każdego $x \in [a, b]$. W szczególności V jest funkcją absolutnie ciągłą oraz $V' = |f'|$ prawie wszędzie na $[a, b]$.*

Dowód. Dla dowodu równości $V(x) = \int_{[a,x]} |f'|$ dla $x \in [a, b]$ odnotujmy, że zachodzi ona dla $x = a$. Przeprowadzimy dowód dla $x = b$, gdyż dla $x \in (a, b)$ przebiega on tak samo. Weźmy dowolny podział $\{x_0, \dots, x_k\}$ przedziału $[a, b]$. Wtedy stosując Twierdzenie 5.7, mamy

$$\sum_{i=1}^k |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^k \left| \int_{[x_{i-1}, x_i]} f' \right| \leq \sum_{i=1}^k \int_{[x_{i-1}, x_i]} |f'| = \int_{[a,b]} |f'|.$$

Stąd dostajemy $V(b) \leq \int_{[a,b]} |f'|$. Dla dowodu nierówności odwrotnej zauważmy najpierw, że funkcje V , $V + f$ oraz $V - f$ są niemalejące na $[a, b]$ (z definicji wahania). Zatem ich pochodne istnieją prawie wszędzie i są nieujemne. Stąd $-V' \leq f' \leq V'$, czyli $|f'| \leq V'$ prawie wszędzie na $[a, b]$. W konsekwencji

$$\int_{[a,b]} |f'| \leq \int_{[a,b]} V' \leq V(b) - V(a) = V(b),$$

co daje żadaną nierówność. Druga część tezy wynika z Twierdzenia 5.6. □

Rozdział 6

Funkcje pierwszej klasy Baire'a

6.1 Definicja, przykłady, podstawowe własności

Mówimy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest pierwszej klasy Baire'a (krótko: 1 klasy Baire'a), gdy jest ona granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji ciągłych na $[a, b]$. Podobnie można rozważać funkcje 1 klasy Baire'a na \mathbb{R} lub na dowolnym przedziale.

Analogicznie definiuje się kolejne klasy Baire'a, np. funkcja nazywa się drugiej klasy Baire'a, gdy jest granicą punktowo zbieżnego ciągu funkcji pierwszej klasy Baire'a.

Oczywiście każda funkcja 1 klasy Baire'a jest borelowsko mierzalna. Łatwo wykazać, że suma i iloczyn dwóch funkcji 1 klasy Baire'a jest 1 klasy Baire'a. Ponadto funkcja 1 klasy Baire'a złożona (z zewnątrz lub od wewnątrz) z funkcją ciągłą pozostaje 1 klasy Baire'a (ćwiczenie).

Jest jasne, że każda funkcja ciągła jest 1 klasy Baire'a. Znane przykłady pokazują, że przy punktowym przejściu do granicy ciągu funkcji ciągłych możemy stracić ciągłość funkcji granicznej. Zatem istnieją nieciągłe funkcje 1 klasy Baire'a.

Twierdzenie 6.1. *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma przeliczalny zbiór punktów nieciągłości, to jest ona 1 klasy Baire'a.*

Dowód. Ustawmy zbiór punktów nieciągłości funkcji f w nieskończony ciąg (t_n) . Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ rozważmy podział $P_n := \{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_{k_n}^{(n)}\}$ przedziału $[a, b]$ o średnicy $\leq 1/n$, zawierający punkty t_1, \dots, t_n . Rozważmy funkcję ciągłą $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, której wykresem jest linia łamana o wierzchołkach $(x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)}))$ dla $i = 0, \dots, k_n$. Pokażemy, że $f_n \rightarrow f$ na $[a, b]$, co zakończy dowód. Niech $x \in [a, b]$. Rozważmy dwa przypadki:

¹ $x = t_p$ dla pewnego $p \in \mathbb{N}$. Wtedy $x \in P_n$ dla $n \geq p$, zatem $f_n(x) = f(x)$ dla $n \geq p$. Stąd $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

2^0 x jest punktem ciągłości funkcji f . Dla każdego n znajdziemy $i_n \in \{1, \dots, k_n\}$ takie, że $x \in [x_{i_{n-1}}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$. Wtedy $x_{i_{n-1}}^{(n)} \rightarrow x$ oraz $x_{i_n}^{(n)} \rightarrow x$, bo $\mu(P_n) \rightarrow 0$. Ponieważ na przedziale $[x_{i_{n-1}}^{(n)}, x_{i_n}^{(n)}]$ funkcja f_n jest monotoniczna, więc $f_n(x)$ należy do przedziału o końcach $f_n(x_{i_{n-1}}^{(n)}) = f(x_{i_{n-1}}^{(n)})$, $f_n(x_{i_n}^{(n)}) = f(x_{i_n}^{(n)})$. Z ciągłości f w x mamy $f(x_{i_{n-1}}^{(n)}) \rightarrow f(x)$ oraz $f(x_{i_n}^{(n)}) \rightarrow f(x)$. Stąd i z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że $f_n(x) \rightarrow f(x)$.

□

Wniosek 6.1. *Każda funkcja o wahaniu skończonym na $[a, b]$ jest 1 klasy Baire'a.*

Przykład 6.1. Opiszemy funkcję 1 klasy Baire'a, która ma nieprzeliczalny zbiór punktów nieciągłości. Niech funkcja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zeruje się na klasycznym trójkowym zbiorze Cantora $C \subset [0, 1]$ oraz rozważmy ciąg $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ parami rozłącznych składowych dopełnienia $[0, 1] \setminus C$. Połóżmy $f(x) := 1$ dla punktów będących środkami przedziałów A_i , a następnie rozszerzamy funkcję f tak, aby była ciągła i afiniczna na obu połowach przedziału domkniętego $\text{cl}(A_i)$ (na końcach tych przedziałów funkcja się zeruje). Wówczas funkcja f jest nieciągła w każdym punkcie x zbioru Cantora, bo znajdzie się ciąg $x_n \rightarrow x$ taki, że $f(x_n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem ciąg $(f(x_n))$ nie zbiega do $f(x) = 0$. W pozostałych punktach $x \in [0, 1]$ funkcja f jest ciągła. Zatem jej zbiór punktów nieciągłości jest nieprzeliczalny równy C . Ponadto funkcja f jest 1 klasy Baire'a, bo dla $B_n := \bigcup_{i=1}^n A_i$, funkcje $f_n := \chi_{B_n} f$, $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe oraz $f_n \rightarrow f$ na $[0, 1]$.

Wykażemy teraz, że rodzina funkcji 1 klasy Baire'a na $[a, b]$ jest zamknięta względem jednostajnego przejścia do granicy. Twierdzenie na ten temat poprzedzimy dwoma lematami.

Lemat 6.1. *Niech funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie 1 klasy Baire'a. Jeśli $M > 0$ oraz $|f(x)| \leq M$ dla każdego $x \in [a, b]$, to istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zbieżny punktowo do f na $[a, b]$, przy czym $|f_n(x)| \leq M$ dla każdego $x \in [a, b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Z założenia wynika, że istnieje ciąg funkcji ciągłych $g_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zbieżny punktowo do f na $[a, b]$. Połóżmy $f_n(x) := \max\{-M, \min\{g_n(x), M\}\}$ dla $x \in [a, b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wówczas funkcje f_n , $n \in \mathbb{N}$, są ciągłe na $[a, b]$. Ponadto $f_n \rightarrow f$ na $[a, b]$. Istotnie, niech $x \in [a, b]$. Jeśli $|f(x)| < M$, to dla dostatecznie dużych n mamy $|g_n(x)| < M$, więc $f_n(x) = g_n(x) \rightarrow f(x)$. Jeśli zaś $|f(x)| = M$, to dla $\varepsilon \in (0, M)$ rozważmy $k \in \mathbb{N}$ takie, że $|g_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dla każdego $n \geq k$. Zatem dla $n \geq k$ mamy $f_n(x) \in \{g_n(x), f(x)\}$, a więc $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Stąd $f_n(x) \rightarrow f(x)$. □

Lemat 6.2. Niech (f_k) będzie ciągiem funkcji 1 klasy Baire'a na $[a, b]$ oraz $\sum_{k \geq 1} M_k$ – szeregiem zbieżnym o wyrazach dodatnich takim, że $|f_k(x)| \leq M_k$ dla każdego $x \in [a, b]$ oraz dowolnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy funkcja $f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$, $x \in [a, b]$, jest poprawnie określoną funkcją 1 klasy Baire'a na $[a, b]$.

Dowód. Funkcja f jest poprawnie określona, bo szereg $\sum_{k \geq 1} f_k(x)$ jest zbieżny dla każdego $x \in [a, b]$ na mocy kryterium porównawczego. Skoro funkcja f_k jest 1 klasy Baire'a, to istnieje ciąg $(g_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ funkcji ciągłych zbieżny punktowo do f_k na $[a, b]$. Zgodnie z Lematem 6.1 można założyć, że $|g_n^{(k)}(x)| \leq M_k$ dla wszystkich $x \in [a, b]$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ położmy

$$h_n := g_n^{(1)} + g_n^{(2)} + \dots + g_n^{(n)}.$$

Są to funkcje ciągłe na $[a, b]$. Pokażemy, że $h_n \rightarrow f$ na $[a, b]$. Ustalmy $x \in [a, b]$ oraz $\varepsilon > 0$. Dobierzmy $k_0 \in \mathbb{N}$ tak, by $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k < \varepsilon/3$. Skoro $g_n^{(k)}(x) \rightarrow f_k(x)$ gdy $n \rightarrow \infty$, to można wybrać indeks $N > k_0$ tak, by $|g_n^{(k)}(x) - f_k(x)| < \varepsilon/(3k_0)$ dla $k = 1, 2, \dots, k_0$ oraz wszystkich $n \geq N$. Dla każdego $n \geq N$ mamy więc

$$\begin{aligned} |h_n(x) - f(x)| &\leq \left| \sum_{k=1}^{k_0} g_n^{(k)}(x) - \sum_{k=1}^{k_0} f_k(x) \right| + \sum_{k=k_0+1}^n |g_n^{(k)}(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |f_k(x)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} |g_n^{(k)}(x) - f_k(x)| + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} M_k \\ &< \sum_{k=1}^{k_0} \frac{\varepsilon}{3k_0} + \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

To oznacza, że $h_n(x) \rightarrow f(x)$. □

Twierdzenie 6.2. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji 1 klasy Baire'a na $[a, b]$ zbieżnym jednostajnie do funkcji $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy funkcja f jest 1 klasy Baire'a.

Dowód. Korzystając z jednostajnej zbieżności ciągu (f_n) do funkcji f , dla każdego $k \in \mathbb{N}$ dobierzmy $n_k \in \mathbb{N}$ tak, aby

$$\forall x \in [a, b] \quad |f_{n_k}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k},$$

przy tym $n_1 < n_2 < \dots$. Niech $g_k := f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Są to funkcje 1 klasy Baire'a. Ponadto dla wszystkich $x \in [a, b]$ oraz $k \in \mathbb{N}$ mamy

$$|g_k(x)| \leq |f_{n_{k+1}}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_k}(x)| \leq \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Ponieważ szereg $\sum_{k \geq 1} 1/2^{k-1}$ jest zbieżny, więc na mocy Lematu 6.2 funkcja $g := \sum_{k=1}^{\infty} g_k$ jest 1 klasy Baire'a. Wyliczmy m -tą sumę częściową szeregu:

$$\sum_{k=1}^m g_k = (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \cdots + (f_{n_{m+1}} - f_{n_m}) = f_{n_{m+1}} - f_{n_1}.$$

Stąd $g = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m g_k = f - f_{n_1}$, a więc $f = g + f_{n_1}$ jest 1 klasy Baire'a. \square

6.2 Charakteryzacja Lebesgue'a

Wiadomo, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jej przeciwobrazy zbiorów otwartych są otwarte. Podobną charakteryzację dla funkcji 1 klasy Baire'a podał Lebesgue.

Twierdzenie 6.3. *Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest 1 klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $c \in \mathbb{R}$ zbiory $\{x: f(x) < c\}$ i $\{x: f(x) > c\}$ są typu F_σ .*

Dowód poprzedzimy trzema lematami.

Lemat 6.3. *Rozpatrujemy podzbiory przestrzeni metrycznej (X, ρ) .*

- (a) *Każdy zbiór domknięty jest typu G_δ .*
- (b) *Każdy zbiór otwarty jest typu F_σ .*
- (c) *Różnica dwóch zbiorów domkniętych jest typu F_σ .*

Dowód. Ad (a) Jeśli $F \subset X$ jest zbiorem domkniętym niepustym oraz $\rho(x, F)$ oznacza odległość punktu x od zbioru F , to $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, gdzie $G_n := \{x: \rho(x, F) < 1/n\}$ dla $n \in \mathbb{N}$, przy czym G_n jest zbiorem otwartym jako przeciwobraz zbioru otwartego $(-\infty, 1/n)$ otrzymanego przez funkcję ciągłą $x \mapsto \rho(x, F)$, $x \in X$.

Ad (b) Ta własność wynika z (a) przez przejście do dopełnień.

Ad (c) Niech zbiory $A, B \subset X$ będą domknięte. Wtedy zbiór $X \setminus B$ jest typu F_σ na mocy (b). Zatem zbiór $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$ jest typu F_σ jako przecięcie zbioru domkniętego i zbioru typu F_σ . \square

Lemat 6.4. *Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną. Jeśli $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$, gdzie zbiory $E_i \subset X$ są typu F_σ , to istnieją zbiory parami rozłączne B_1, \dots, B_n typu F_σ takie, że $B_i \subset E_i$ dla $i = 1, \dots, n$ oraz $E = \bigcup_{i=1}^n B_i$.*

Dowód. Skoro $E = \bigcup_{i=1}^n E_i$ oraz zbiory $E_i \subset X$ są typu F_σ , to E jest typu F_σ . Zatem $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$, gdzie każdy zbiór F_k jest domknięty i zawarty w odpowiednim zbiorze E_i . Niech $D_1 := F_1$ oraz $D_{k+1} := F_{k+1} \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_k)$ dla $k \in \mathbb{N}$. Na mocy Lematu 6.3 (c) zbiory D_k , $k \in \mathbb{N}$, są typu F_σ . Ponadto są one parami rozłączne oraz $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} D_k$. Niech $B_1 := \bigcup \{D_k : k \in \mathbb{N}, D_k \subset E_1\}$ oraz

$$B_i := \bigcup \{D_k : k \in \mathbb{N}, D_k \subset E_i \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{i-1})\} \quad \text{dla } i = 2, \dots, n.$$

Wtedy zbiory B_i są typu F_σ , parami rozłączne oraz $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i = E$. \square

Lemat 6.5. *Załóżmy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma skończony zbiór wartości*

$$c_1 < c_2 < \dots < c_n.$$

Jeśli każdy zbiór $\{x: f(x) = c_k\}$ (dla $k = 1, \dots, n$) jest typu F_σ , to funkcja f jest 1 klasy Baire'a.

Dowód. Dla $k = 1, \dots, n$ niech

$$\{x: f(x) = c_k\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i^{(k)}, \quad (6.1)$$

gdzie zbiory $F_i^{(k)}$ są domknięte. Ustalmy dowolną liczbę $m \in \mathbb{N}$. Połóżmy

$$D_m^{(k)} := \bigcup_{i=1}^m F_i^{(k)} \quad \text{dla } k = 1, \dots, n \quad \text{oraz} \quad D_m := \bigcup_{k=1}^n D_m^{(k)}.$$

Następnie określmy funkcję $f_m: D_m \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem

$$f_m(x) := c_k, \quad \text{gdy } x \in D_m^{(k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Zauważmy, że wszystkie zbiory rodziny $\{D_m^{(k)}: k \in \{1, \dots, n\}\}$ są domknięte i parami rozłączne. Zatem funkcja f_m jest poprawnie określona i ciągła na D_m . Funkcję f_m można rozszerzyć do funkcji ciągłej $g_m: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym $\max_{x \in D_m} |f_m(x)| = \max_{x \in [a, b]} |g_m(x)|$. Istotnie, przedstawmy $(a, b) \setminus D_m$ jako sumę przeliczalnej rodziny parami rozłącznych przedziałów (s_j, t_j) . Następnie konstruujemy funkcję g_m jako afiniczną na każdym przedziale $[s_j, t_j]$.

Aby zakończyć dowód pokażemy, że $g_m \rightarrow f$ na $[a, b]$. Niech $x \in [a, b]$. Istnieje dokładnie jedna liczba $k \in \{1, \dots, n\}$, dla której $f(x) = c_k$. Korzystając z (6.1), wybierzmy indeks $i_0 \in \mathbb{N}$ taki, że $x \in F_{i_0}^{(k)}$. Dla $m \geq i_0$ mamy $x \in D_m^{(k)}$. Zatem $f_m(x) = c_k$ dla $m \geq i_0$. Tym samym $g_m(x) = c_k$ dla $m \geq i_0$, bo g_m jest rozszerzeniem funkcji f_m . Skoro $g_m(x) = c_k = f(x)$ dla $m \geq i_0$, to $g_m(x) \rightarrow f(x)$. \square

Możemy teraz przeprowadzić dowód Twierdzenia 6.3.

Dowód. Konieczność. Niech (f_n) będzie ciągiem funkcji ciągłych na $[a, b]$ zbieżnym punktowo do funkcji f . Ustalmy $c \in \mathbb{R}$ i zauważmy, że

$$\{x: f(x) < c\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} \left\{x: f_n(x) \leq c - \frac{1}{k}\right\}. \quad (6.2)$$

Istotnie, jeśli $f(x) < c$, to istnieje liczba $k \in \mathbb{N}$ taka, że $f(x) < c - 1/k$, a także $f_n(x) < c - 1/k$ dla prawie wszystkich n , tzn. dla $n \geq p$, gdzie p jest pewną liczbą naturalną. Odwrotnie, jeśli istnieją liczby $k, p \in \mathbb{N}$ takie, że $f_n(x) \leq c - 1/k$ dla wszystkich $n \geq p$, to po przejściu do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$ mamy $f(x) \leq c - 1/k < c$.

Z ciągłości f_n wynika, że zbiory $\{x: f_n(x) \leq c - 1/k\}$ są domknięte. Stąd i z (6.2) wnioskujemy, że zbiór $\{x: f(x) < c\}$ jest typu F_σ . Analogicznie pokazujemy, że zbiór $\{x: f(x) > c\}$ jest typu F_σ .

Dostateczność. Na początek założmy dodatkowo, że funkcja f jest ograniczona i niech $m < f(x) < M$ dla wszystkich $x \in [a, b]$. Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Podzielmy przedział $[m, M]$ na n równych części punktami

$$m = c_0 < c_1 < \dots < c_n = M, \quad \text{gdzie } c_{k+1} - c_k = \frac{M - m}{n} \quad \text{dla } k = 0, \dots, n - 1.$$

Położmy

$$A_k := \{x: c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}\} \quad \text{dla } k = 1, \dots, n - 1$$

$$\text{oraz } A_0 := \{x: f(x) < c_1\}, \quad A_n := \{x: f(x) > c_{n-1}\}.$$

Z założenia wynika, że wszystkie zbiory A_i są typu F_σ oraz widać, że $[a, b] = \bigcup_{i=0}^n A_i$. Na mocy Lematu 6.4 istnieje rozkład $[a, b] = \bigcup_{i=0}^n B_i$, gdzie zbiory B_i są parami rozłączne typu F_σ oraz $B_i \subset A_i$ dla $i = 0, \dots, n$. Określmy funkcję $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ wzorem $f_n := \sum_{i=0}^n c_i \chi_{B_i}$. Na mocy Lematu 6.5 funkcja f_n jest 1 klasy Baire'a. Pokażemy, że ciąg (f_n) zbiega jednostajnie do f na $[a, b]$, co zakończy dowód w myśl Twierdzenia 6.2.

Niech $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $n_0 \in \mathbb{N}$ tak, by $(M - m)/n_0 < \varepsilon$. Niech $n \geq n_0$ oraz $x \in [a, b]$. Istnieje dokładnie jedna liczba $k \in \{0, \dots, n\}$ taka, że $x \in B_k \subset A_k$. Wtedy $f_n(x) = c_k$. Ponadto $c_{k-1} < f(x) < c_{k+1}$, gdy $k \neq 0, k \neq n$ i odpowiednio $f(x) < c_1$, gdy $k = 0$ oraz $f(x) > c_{n-1}$, gdy $k = n$. Zatem

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{M - m}{n} \leq \frac{M - m}{n_0} < \varepsilon$$

dla wszystkich $x \in [a, b]$ oraz $n \geq n_0$. Wobec tego (f_n) zbiega jednostajnie do f na $[a, b]$.

Rozważmy teraz ogólny przypadek, gdy funkcja f może być nieograniczona. Położmy $g(x) := \arctan f(x)$ dla $x \in [a, b]$. Funkcja g jest ograniczona. Niech $c \in \mathbb{R}$. Wtedy

dla $c \in (-\pi/2, \pi/2)$, mamy $\{x: g(x) > c\} = \{x: f(x) > \tan c\}$. Ponadto jeśli $c \geq \pi/2$, to $\{x: g(x) > c\} = \emptyset$, zaś jeśli $c \leq -\pi/2$, to $\{x: g(x) > c\} = [a, b]$. Zatem we wszystkich przypadkach zbiór $\{x: g(x) > c\}$ jest typu F_σ . Podobnie pokazujemy, że zbiór $\{x: g(x) < c\}$ jest typu F_σ . Teraz z poprzedniej części dowodu wynika, że funkcja g jest 1 klasy Baire'a.

Wywnioskujmy na koniec, że funkcja $f(x) = \tan(g(x))$, $x \in [a, b]$, też jest 1 klasy Baire'a. Istotnie, niech $g_n \rightarrow g$ na $[a, b]$, gdzie funkcje g_n są ciągłe. Zastępując ewentualnie g_n przez

$$\min \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \max \left\{ g_n, -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right\} \right\},$$

można założyć, że $g_n(x) \in (-\pi/2, \pi/2)$ dla $x \in [a, b]$. Wtedy $\tan(g_n) \rightarrow \tan(g) = f$ na $[a, b]$, przy czym funkcje $\tan(g_n)$, $n \in \mathbb{N}$, są oczywiście ciągłe. Zatem f jest 1 klasy Baire'a. \square

Wniosek 6.2. *Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest 1 klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}$ przeciwobraz $f^{-1}[U]$ jest zbiorem typu F_σ .*

Dowód. Ćwiczenie. \square

Przypomnijmy, że podzbiór przestrzeni metrycznej nazywa się nigdzie gęsty, gdy wewnątrz jego domknięcia jest zbiorem pustym. Podzbiór przestrzeni metrycznej nazywa się:

- pierwszej kategorii, gdy jest sumą ciągu zbiorów nigdzie gęstych;
- drugiej kategorii, gdy nie jest zbiorem pierwszej kategorii;
- rezydualny, gdy jego dopełnienie jest pierwszej kategorii.

Zauważmy, że:

- każdy brzegowy podzbiór typu F_σ przestrzeni metrycznej jest pierwszej kategorii;
- każdy gęsty zbiór typu G_δ przestrzeni metrycznej jest rezydualny.

Znane z topologii twierdzenie Baire'a o kategorii mówi o tym, że w przestrzeni metrycznej zupełnej każdy zbiór pierwszej kategorii jest brzegowy.

Twierdzenie 6.4 (Baire'a). *Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest 1 klasy Baire'a, to jej zbiór punktów nieciągłości jest pierwszej kategorii typu F_σ .*

Dowód. Niech (U_n) będzie różnowartościowym ciągiem, którego wyrazami są wszystkie przedziały otwarte w \mathbb{R} o końcach wymiernych. Rodzina tych przedziałów tworzy bazę topologii w \mathbb{R} . Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją 1 klasy Baire'a. Pokażemy, że zbiór $D(f)$ wszystkich punktów nieciągłości funkcji f ma postać

$$D(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (f^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(f^{-1}[U_n])). \quad (6.3)$$

Jeśli $x \in D(f)$, to istnieje zbiór U_n taki, że $f(x) \in U_n$ oraz nie istnieje otoczenie V punktu x takie, że $f[V] \subset U_n$. Stąd $x \in f^{-1}[U_n]$ oraz $x \notin \text{Int}(f^{-1}[U_n])$. (Gdyby $x \in \text{Int}(f^{-1}[U_n])$, to istniałoby otoczenie V punktu x takie, że $V \subset f^{-1}[U_n]$. Stąd $f[V] \subset f[f^{-1}[U_n]] \subset U_n$, sprzeczność.)

Odwrotnie, jeśli istnieje zbiór U_n taki, że $x \in f^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(f^{-1}[U_n])$, to U_n jest otoczeniem punktu $f(x)$ takim, że żadne otoczenie V punktu x nie spełnia warunku $f[V] \subset U_n$, co oznacza, że $x \in D(f)$. (Gdyby takie otoczenie V istniało, to $V \subset f^{-1}[f[V]] \subset f^{-1}[U_n]$ i mielibyśmy $x \in \text{Int}(f^{-1}[U_n])$, sprzeczność.) Dotychczas nie korzystaliśmy z tego, że f jest 1 klasy Baire'a.

Skoro funkcja f jest 1 klasy Baire'a, to z Wniosku 6.2 wynika, że każdy zbiór $f^{-1}[U_n]$ jest typu F_σ . Zatem każdy zbiór $D_n := f^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(f^{-1}[U_n])$, $n \in \mathbb{N}$, też jest typu F_σ . Ponadto jest on brzegowy, bo gdyby przedział otwarty był zawarty w $f^{-1}[U_n]$, to ten przedział byłby też zawarty w $\text{Int}(f^{-1}[U_n])$. Zatem zbiór D_n jest pierwszej kategorii. Stąd na mocy (6.3) zbiór $D(f)$ jest typu F_σ pierwszej kategorii. \square

Wniosek 6.3. *Zbiór punktów ciągłości dowolnej funkcji 1 klasy Baire'a $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest gęsty.*

Dowód. Z poprzedniego twierdzenia wynika, że zbiór $D(f)$ jest pierwszej kategorii. Zatem na mocy twierdzenia Baire'a o kategorii zbiór $D(f)$ jest brzegowy. Stąd jego dopełnienie jest zbiorem gęstym. \square

Na koniec pokażemy, że funkcja o gęstym zbiorze punktów ciągłości nie musi być 1 klasy Baire'a.

Przykład 6.2. Rozważmy klasyczny zbiór Cantora $C \subset [0, 1]$ oraz przeliczalny zbiór A końców składowych dopełnienia $[0, 1] \setminus C$. Wtedy A jest gęstym podzbiorem C typu F_σ . Niech $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru A . Wtedy funkcja f jest ciągła w każdym punkcie zbioru $[0, 1] \setminus C$, więc ma ona gęsty zbiór punktów ciągłości. Przypuśćmy, że f jest 1 klasy Baire'a. Stosując Wniosek 6.2 (po przejściu do dopełnień), wnioskujemy że zbiór $f^{-1}[\{1\}] = A$ jest typu G_δ w przestrzeni $[0, 1]$, a także typu G_δ jako podzbiór podprzestrzeni C . To jest jednak niemożliwe. Istotnie, skoro zbiór A jest

gęsty typu G_δ w C , to zbiór $C \setminus A$ byłby brzegowy typu F_σ , więc pierwszej kategorii w C . Ale zbiór A jako przeliczalny jest pierwszej kategorii w C . Wtedy przestrzeń zupełna $C = A \cup (C \setminus A)$ byłaby pierwszej kategorii wbrew twierdzeniu Baire'a o kategorii.

6.3 Charakteryzacja Baire'a

Przedstawimy tu jeszcze inną charakteryzację funkcji 1 klasy Baire'a, pochodzącą właśnie od Baire'a:

Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest 1 klasy Baire'a wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego zbioru niepustego domkniętego $F \subset [a, b]$ funkcja $f|_F$ ma przynajmniej jeden punkt ciągłości.

Twierdzenie to rozbijemy na dwie części: warunek konieczny i warunek dostateczny.

Na początek wykażemy warunek konieczny.

Twierdzenie 6.5. *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie 1 klasy Baire'a. Wtedy dla każdego niepustego zbioru domkniętego $F \subset [a, b]$ funkcja $f|_F$ ma przynajmniej jeden punkt ciągłości. Co więcej, zbiór punktów ciągłości funkcji $f|_F$ jest gęsty w F .*

Dowód. Przeprowadzimy niewielką modyfikacją dowodu Twierdzenia 6.4. Rozważmy dowolny niepusty zbiór domknięty $F \subset [a, b]$. Niech $g := f|_F$. Analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 6.4 zauważamy, że zbiór $D(g)$ wszystkich punktów nieciągłości funkcji g jest równy

$$D(g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (g^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(g^{-1}[U_n])), \quad (6.4)$$

gdzie (U_n) jest rodziną wszystkich przedziałów otwartych w \mathbb{R} o końcach wymiernych, zaś wewnątrz Int rozważane jest w podprzestrzeni F .

Pokażemy, że zbiór $D(g)$ jest pierwszej kategorii w F . Skoro funkcja f jest 1 klasy Baire'a, to z Wniosku 6.2 wynika, że każdy zbiór $f^{-1}[U_n]$ jest typu F_σ . Mamy $g^{-1}[U_n] = F \cap f^{-1}[U_n]$, skąd wynika, że zbiór $g^{-1}[U_n]$ jest typu F_σ w podprzestrzeni F . Zatem każdy zbiór $D_n := g^{-1}[U_n] \setminus \text{Int}(g^{-1}[U_n])$, $n \in \mathbb{N}$, też jest typu F_σ w F . Ponadto jest on brzegowy, bo gdyby niepusty zbiór otwarty V w F był zawarty w $g^{-1}[U_n]$, to byłby też zawarty w $\text{Int}(g^{-1}[U_n])$. Zatem zbiór D_n jest pierwszej kategorii w F . Stąd na mocy (6.4) zbiór $D(g)$ jest typu F_σ pierwszej kategorii w przestrzeni F . Zatem na mocy twierdzenia Baire'a dla przestrzeni zupełnej F zbiór $D(g)$ jest brzegowy w F . W konsekwencji zbiór punktów ciągłości funkcji g jest gęsty w F . \square

Przejdźmy do warunku dostatecznego w charakteryzacji Baire'a.

Twierdzenie 6.6. *Załóżmy, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ obcięta do dowolnego niepustego zbioru domkniętego $F \subset [a, b]$ ma przynajmniej jeden punkt ciągłości. Wtedy f jest 1 klasy Baire'a.*

Dowód. W myśl twierdzenia Lebesgue'a wystarczy wykazać, że dla dowolnego $q \in \mathbb{R}$ zbiory $A_q := \{x \in [a, b]: f(x) < q\}$ oraz $B_q := \{x \in [a, b]: f(x) > q\}$ są typu F_σ . Udowodnimy to dla A_q , bo dla B_q dowód jest analogiczny.

Ustalmy więc zbiór A_q . Niech $F_p := \{x \in [a, b]: f(x) \leq p\}$ dla $p \in \mathbb{R}$. Wystarczy, gdy wykazemy, że

$$\text{dla każdego } p \in (-\infty, q) \text{ istnieje zbiór } F_p^* \text{ typu } F_\sigma \text{ taki, że } F_p \subset F_p^* \subset A_q.$$

Istotnie, jeśli powyższy warunek zachodzi, to biorąc w roli p liczby $q - \frac{1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, do zbioru $F_{q-\frac{1}{n}}$ dobieramy zbiór $F_{q-\frac{1}{n}}^*$ typu F_σ taki, że

$$F_{q-\frac{1}{n}} \subset F_{q-\frac{1}{n}}^* \subset A_q.$$

Następnie zauważamy, że $A_q = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_{q-\frac{1}{n}}^*$. Zatem A_q jest typu F_σ .

Ustalmy więc $p < q$ oraz oznaczmy przez \mathcal{U}_p rodzinę zbiorów otwartych U w $[a, b]$ takich, że istnieje zbiór C typu F_σ taki, że $U \cap F_p \subset C \subset A_q$. Rodzina \mathcal{U}_p jest niepusta, bo możemy przyjąć $U = C = \emptyset$. Niech $G := \bigcup \mathcal{U}_p$. Wtedy $G \in \mathcal{U}_p$. Rzeczywiście, G można przedstawić jako sumę przeliczalnej podrodziny rodziny \mathcal{U}_p (z twierdzenia Lindelöfa) i wtedy suma odpowiednich zbiorów C typu F_σ jest zbiorem typu F_σ . Ponadto zauważmy, że $U \cap G \in \mathcal{U}_p$ dla dowolnego zbioru otwartego U .

Do zakończenia dowodu wystarczy pokazać, że $G = [a, b]$. Przypuśćmy, że $G \neq [a, b]$ i niech $F := [a, b] \setminus G$. Wtedy F jest zbiorem domkniętym, więc z założenia możemy wybrać punkt ciągłości $y \in F$ funkcji $f|_F$. Mamy dwa przypadki: 1^0 $f(y) > p$ lub 2^0 $f(y) < q$. Z ciągłości funkcji $f|_F$ w punkcie y wynika, że istnieje zbiór otwarty U zawierający y taki, że $f[U \cap F] \subset (p, \infty)$ w przypadku 1^0 oraz $f[U \cap F] \subset (-\infty, q)$ w przypadku 2^0 .

W przypadku 1^0 mamy $U \cap F \cap F_p = \emptyset$, a zatem $U \cap F_p = U \cap G \cap F_p$. Stąd oraz z własności $U \cap G \in \mathcal{U}_p$ otrzymujemy $U \in \mathcal{U}_p$. Ale to oznacza, że $y \in \bigcup \mathcal{U}_p = G$. Sprzeczność.

W przypadku 2^0 mamy

$$U \cap F_p \subset (U \cap F) \cup (U \cap G \cap F_p).$$

Wiemy, że $U \cap G \in \mathcal{U}_p$, więc istnieje zbiór C typu F_σ taki, że $U \cap G \cap F_p \subset C \subset A_q$. Skoro $f[U \cap F] \subset (-\infty, q)$, to $U \cap F \subset f^{-1}[f[U \cap F]] \subset A_q$. Mamy więc

$$U \cap F_p \subset (U \cap F) \cup (U \cap G \cap F_p) \subset (U \cap F) \cup C \subset A_q$$

oraz $(U \cap F) \cup C$ jest typu F_σ . Stąd $U \in \mathcal{U}_q$, a więc $y \in \bigcup \mathcal{U}_p = G$. Sprzeczność. \square

Twierdzenia 6.5 oraz 6.6 możemy teraz połączyć w jedno twierdzenie.

Twierdzenie 6.7. *Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wtedy następujące warunki są równoważne:*

- (i) *funkcja f jest 1 klasy Baire'a;*
- (ii) *dla każdego niepustego zbioru domkniętego $F \subset [a, b]$ zbiór punktów ciągłości funkcji $f|_F$ jest gęsty w F ;*
- (iii) *dla każdego niepustego zbioru domkniętego $F \subset [a, b]$ funkcja $f|_F$ ma przynajmniej jeden punkt ciągłości.*

Rozdział 7

Zestaw zadań

7.1 Funkcje monotoniczne

Zadanie 7.1. Niech $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ oraz B jest zbiorem ograniczonym. Wykazać, że

$$\sup A \leq \sup B \quad \text{ i } \quad \inf A \geq \inf B.$$

Zadanie 7.2. Wykazać inne warianty Twierdzenia 1.1, które nie zostały wykazane na wykładzie.

Zadanie 7.3. Niech $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $I \subset \mathbb{R}$ jest przedziałem. Wykazać, że jeśli f jest rosnąca (malejąca), to funkcja odwrotna $f^{-1}: f[I] \rightarrow \mathbb{R}$ jest

- (a) ściśle rosnąca (malejąca);
- (b) ciągła w każdym punkcie zbioru $f[I]$.

Zadanie 7.4. Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, będą funkcjami niemalejącymi. Wykazać, że:

- (a) funkcja $-f$ jest nierosnąca;
- (b) funkcja $f + g$ jest niemalejąca;
- (c) jeśli g jest rosnąca, to $f + g$ jest rosnąca;
- (d) jeśli szereg $\sum f_n$ jest punktowo zbieżny na $[a, b]$, to jego suma jest funkcją niemalejącą.

Zadanie 7.5. Zdefiniować funkcję niemalejącą (rosnącą) $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że:

- (a) jej jedynym punktem nieciągłości jest $1/2$;

(b) jej jedynymi punktami nieciągłości są $1/2$ i $1/3$;

(c) jej jedynymi punktami nieciągłości są punkty postaci $1/n$ dla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Zadanie 7.6. Niech $E \subset (0, 1)$ będzie zbiorem nieskończonym przeliczalnym, np. $E = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Zbudować funkcję $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, która jest niemalejąca oraz E jest zbiorem jej punktów nieciągłości.

Zadanie 7.7. Niech funkcja $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 9x^2 & \text{gdy } x \in [0, 1/3); \\ 2 + 6x & \text{gdy } x \in [1/3, 1/2); \\ 4 + \sqrt{8x} & \text{gdy } x \in [1/2, 1]. \end{cases}$$

Przedstawić f jako sumę funkcji niemalejącej ciągłej i funkcji skoków.

Zadanie 7.8 (modyfikacja lematu o rozszerzaniu). Niech $Z \subset \mathbb{R}$ będzie niepustym zbiorem ograniczonym i niech $f: Z \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą ograniczoną. Oznaczmy $a := \inf Z$, $b := \sup Z$. Zdefiniować funkcję niemalejącą $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że $g|_Z = f$.

7.2 Wahanie funkcji

Zadanie 7.9. Wykazać własności (c), (d) podane w Twierdzeniu 2.3.

Zadanie 7.10. Wykazać, że jeśli funkcja f ma wahanie skończone na $[a, b]$, to funkcja f^2 też ma wahanie skończone na $[a, b]$.

Zadanie 7.11. Pokazać, że jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma pochodną ograniczoną na $[a, b]$, to $\bigvee_a^b f < \infty$.

Zadanie 7.12. Niech $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ x^\alpha \sin(1/x) & \text{dla } x \in (0, 1] \end{cases}$$

oraz $\alpha > 0$. Pokazać, że funkcja f jest ciągła. Dla jakich wartości $\alpha > 0$ funkcja f ma wahanie skończone na $[0, 1]$?

Zadanie 7.13. Podać przykład funkcji różniczkowalnej $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (w punktach $0, 1$ rozważamy pochodne jednostronne) o wahanii nieskończonym na $[0, 1]$. Wskazówka: zmodyfikować funkcję z poprzedniego zadania, przyjmując $\alpha = 2$ oraz zastępując $\sin(1/x)$ przez $\sin(1/x^2)$.

Zadanie 7.14. Podać przykłady takich funkcji $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o wahanu skończonym, że funkcja złożona $g \circ f$ ma wahanie nieskończone. Rozważyć $g(x) := \sqrt{x}$ oraz f jak w Zadaniu 7.12 dla $\alpha := 2$, zastępując $\sin(1/x)$ przez $\sin^2(1/x)$.

Zadanie 7.15. Niech $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ oraz $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym $V_a^b f < \infty$ oraz g spełnia warunek Lipschitza. Wykazać, że funkcja $g \circ f$ ma wahanie skończone.

Zadanie 7.16. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $V_a^b f < \infty$. Wykazać, że $V_a^b |f|^p < \infty$ dla $p \geq 1$.

Zadanie 7.17. Udowodnić, że jeśli $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą oraz $V_a^b |f| < \infty$, to $V_a^b f < \infty$. Pokazać, że założenie ciągłości f jest istotne.

7.3 Całka Riemanna-Stieltjesa

Zadanie 7.18. Wyznaczyć funkcję $V_a^x f$, gdy: (a) $f(x) := \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$, (b) $f(x) := x^3 - |x|$, $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 7.19. Załóżmy, że $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $V_a^b f < \infty$. Niech $g(a) := 0$ oraz $g(x) := \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ dla $x \in (a, b]$. Wykazać, że $V_a^b g < \infty$. Wskazówka: skorzystać z twierdzenia Jordana.

Zadanie 7.20. Wykazać, że jeśli istnieje RS-całka $\int_a^b f dg$, to jest tylko jedna.

Zadanie 7.21. Niech $f, g, f_i, g_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dla $i = 1, 2$. Wykazać następujące własności:

(i) Jeśli całki $\int_a^b f_i dg$ istnieją dla $i = 1, 2$, to istnieje całka $\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg$ oraz

$$\int_a^b (c_1 f_1 + c_2 f_2) dg = c_1 \int_a^b f_1 dg + c_2 \int_a^b f_2 dg.$$

(ii) Jeśli całki $\int_a^b f dg_i$ istnieją dla $i = 1, 2$, to istnieje całka $\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2)$ oraz

$$\int_a^b f d(c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 \int_a^b f dg_1 + c_2 \int_a^b f dg_2.$$

Zadanie 7.22. Niech $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą dane wzorami $f := \chi_{(0,1]}$, $g := \chi_{[0,1]}$. Pokazać, że $\int_{-1}^0 f dg = 0 = \int_0^1 f dg$, jednakże całka $\int_{-1}^1 f dg$ nie istnieje.

Zadanie 7.23. [6, str. 415] Niech $\alpha, \beta, \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ będą dane wzorami

$$\alpha := \chi_{\{0\}}, \beta := \chi_{\{1\}}, \gamma := \chi_{\{1/2\}}.$$

Obliczyć całki

$$\int_0^1 \sin x \, d\alpha, \int_0^1 \alpha(x) \, d \sin x, \int_0^1 e^x \, d\beta, \int_0^1 \beta(x) \, de^x$$

oraz

$$\int_0^1 x^2 \, d\gamma, \int_0^1 \gamma(x) \, dx^2, \int_0^2 e^x \, d[x], \int_0^2 [x] \, de^x.$$

Zadanie 7.24. Niech $g, h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gdzie $g := \chi_{(0,1)}$ oraz $h := \chi_{[0,1/2]}$. Obliczyć całki:

$$\int_0^1 \sin(\pi x) \, dg, \int_0^1 \cos(\pi x) \, dh.$$

Zadanie 7.25. Obliczyć całkę $\int_{-1}^3 x \, d\alpha$, gdzie

$$\alpha(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -1 \\ 1 & \text{dla } x \in (-1, 2) \\ -1 & \text{dla } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Zadanie 7.26. Niech $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, przy czym f jest ciągła, zaś g ma wahanie skończone. Wykazać, że

$$\left| \int_a^b f \, dg \right| \leq \int_a^b |f| \, dv_g,$$

gdzie $v_g(x) := \bigvee_a^x g$ dla $x \in [a, b]$.

7.4 Pokrycie Vitalego. Różniczkowalność

Zadanie 7.27. Pokazać, że następujące warunki są równoważne:

- (i) Dla każdego zbioru $E \subset (a, b)$ i dowolnego pokrycia \mathcal{F} w sensie Vitalego zbioru E przedziałami zwartymi zawartymi w (a, b) można wybrać przeliczalną rozłączną podrodzinę $\mathcal{F}_* \subset \mathcal{F}$ taką, że $\lambda(E \setminus \bigcup \mathcal{F}_*) = 0$.
- (ii) Dla każdego zbioru $E \subset (a, b)$ i dowolnego pokrycia \mathcal{F} w sensie Vitalego zbioru E przedziałami zwartymi zawartymi w (a, b) i dowolnego $\varepsilon > 0$ można wybrać skończoną rozłączną podrodzinę $\{I_1, \dots, I_n\} \subset \mathcal{F}$ taką, że $\lambda^*(E \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j) < \varepsilon$.

Zadanie 7.28. Wykazać, że dla funkcji $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{dla } x = 0 \\ \sqrt{x} \sin(1/x) & \text{dla } x \neq 0 \end{cases}$$

każdy element $\alpha \in [-\infty, \infty]$ jest liczbą pochodną w punkcie 0.

Zadanie 7.29. [1, str. 460] Wykazać, że dla każdego zbioru $E \subset [a, b]$ miary Lebesgue'a zero istnieje funkcja rosnąca i ciągła $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że $f'(x) = \infty$ dla każdego $x \in E$.

7.5 Funkcje absolutnie ciągłe

Zadanie 7.30. Niech funkcje $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będą absolutnie ciągłe. Wykazać, że $f + g$ oraz fg są absolutnie ciągłe.

Zadanie 7.31. [3, str. 285–286] Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:

- (1) Funkcja f jest absolutnie ciągła na $[a, b]$.
- (2) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej rodziny $\{[c_i, d_i]: i \leq n\} \in NZS[a, b]$, z nierówności $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$ wynika, że $|\sum_{i=1}^n (f(d_i) - f(c_i))| < \varepsilon$.
- (3) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej rodziny $\{[c_i, d_i]: i \leq n\} \in NZS[a, b]$, z nierówności $\sum_{i=1}^n (d_i - c_i) < \delta$ wynika, że $\sum_{i=1}^n \bigvee_{c_i}^{d_i} f < \varepsilon$.
- (4) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdej rodziny $\{[c_i, d_i]: i \in \mathbb{N}\}$ podprzedziałów $[a, b]$ nie zachodzących na siebie, z nierówności $\sum_{i=1}^{\infty} (d_i - c_i) < \delta$ wynika, że $\sum_{i=1}^{\infty} |f(d_i) - f(c_i)| < \varepsilon$.

Zadanie 7.32. Pokazać, że złożenie dwóch funkcji absolutnie ciągłych nie musi być funkcją absolutnie ciągłą. Wskazówka: rozważyć $f \circ g$, gdzie $f(x) := \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, oraz $g(0) := 0$, $g(x) := x^2 |\sin(\pi/x)|$ dla $x \in (0, 1]$.

Zadanie 7.33. Podać przykład funkcji rosnącej absolutnie ciągłej, dla której funkcja odwrotna nie jest absolutnie ciągła. Wskazówka: rozważyć $h(x) := f(x) + x$, $x \in [0, 1]$, gdzie f jest funkcją Cantora.

Zadanie 7.34. Podać przykład ciągu funkcji absolutnie ciągłych na $[0, 1]$, zbieżnego jednostajnie do funkcji, która nie jest absolutnie ciągła.

7.6 Funkcje pierwszej klasy Baire’a

Zadanie 7.35. Niech $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ oraz $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$. Wykazać, że w obu przypadkach

- f jest ciągła, g jest 1 klasy Baire’a;
- g jest ciągła, f jest 1 klasy Baire’a,

funkcja złożona $f \circ g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ jest 1 klasy Baire’a.

Zadanie 7.36. Wykazać wniosek wynikający z charakteryzacji Lebesgue’a:

Funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest 1 klasy Baire’a wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}$ przeciwobraz $f^{-1}[U]$ jest zbiorem typu F_σ .

Zadanie 7.37. Dla $m \in \mathbb{N}$ niech funkcje $f_m: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, będą dane wzorem

$$f_m(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos m! \pi x)^{2n} \quad \text{dla } x \in [0, 1] \quad \text{oraz } m \in \mathbb{N}.$$

Są to funkcje 1 klasy Baire’a, które przyjmują tylko wartości 0 lub 1. Ustalić, dla jakich x są przyjmowane wartości 1 funkcji f_m . Pokazać, że

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_m(x)$$

jest funkcją Dirichleta na $[0, 1]$. Korzystając z charakteryzacji Lebesgue’a, wykazać, że f nie jest funkcją 1 klasy Baire’a (zastosować fakt, że zbiór liczb niewymiernych przedziału $[0, 1]$ nie jest typu F_σ).

7.7 Wybrane rozwiązania

Rozwiązanie Zadania 7.8.

Zauważmy, że jeśli a, b nie są punktami skupienia zbioru Z , to $a, b \in Z$.

Jeśli zaś a, b są punktami skupienia zbioru Z , to z twierdzenia o granicach jednostronnych funkcji monotonicznej wiemy, że istnieją $f(a+)$ oraz $f(b-)$. Rozszerzmy więc funkcję f do zbioru $Z \cup \{a, b\}$, kładąc $f(a) := f(a+)$ oraz $f(b) := f(b-)$. Wtedy funkcja f pozostaje niemalejąca.

W myśl powyższej uwagi możemy założyć, że $a, b \in Z$. Rozszerzmy funkcję f do funkcji niemalejącej g określonej na $[a, b]$. Przez Z' oznaczmy zbiór punktów skupienia zbioru Z oraz niech Z'_+ (odpowiednio Z'_-) oznacza zbiór prawostronnych (lewostronnych) punktów skupienia zbioru Z . Oczywiście $Z' = Z'_+ \cup Z'_-$.

Przyjmijmy $g(x) := f(x)$ dla $x \in Z$. Niech ponadto

$$g(x) := f(x-) \quad \text{dla } x \in Z'_- \setminus Z \quad \text{oraz } g(x) := f(x+) \quad \text{dla } x \in Z'_+ \setminus (Z'_- \cup Z).$$

W ten sposób funkcja g jest określona na domknięciu $\bar{Z} = Z \cup Z'$ i jest ona niemalejąca, co wynika z własności granic jednostronnych funkcji niemalejącej f .

Skoro $a, b \in Z$, to zbiór $[a, b] \setminus \bar{Z}$ jest otwarty w \mathbb{R} . Jest on więc sumą rozłącznej rodziny przeliczalnej przedziałów otwartych (a_n, b_n) . Oczywiście końce a_n, b_n przedziału (a_n, b_n) należą do \bar{Z} . Wystarczy więc określić g na (a_n, b_n) jako funkcję afiniczną, której wykres łączy odcinkiem punkty $(a_n, g(a_n))$ oraz $(b_n, g(b_n))$. Otrzymana funkcja

g spełnia żądane warunki.

Rozwiązanie Zadania 7.12 dla $\alpha = 1$.

Ciągłość f na $(0, 1]$ jest oczywista. Ciągłość f w punkcie 0 wynika stąd, że jeśli $x_n \rightarrow 0^+$, to

$$|f(x_n)| = \left| x_n \sin \frac{1}{x_n} \right| \leq |x_n| \rightarrow 0 = |f(0)|.$$

Zbadajmy, kiedy $\sin \frac{1}{x} = 1$. Równość ta zachodzi dla $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, czyli dla

$$x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Podobnie równość $\sin \frac{1}{x} = -1$ zachodzi dla $\frac{1}{x} = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, czyli dla

$$x = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dla $n \in \mathbb{N}$ rozważmy podział P_n przedziału $[0, 1]$ złożony z punktów

$$0, \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2n\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}, \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2(n-1)\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2(n-1)\pi}, \dots, \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}, \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1.$$

Oznaczmy te punkty kolejno

$$0, y_n, x_n, y_{n-1}, x_{n-1}, \dots, y_1, x_1, y_0, x_0, 1.$$

Rozważmy część sumy wahaniowej odpowiadającej podziałowi P_n :

$$\begin{aligned} & |f(x_n) - f(y_n)| + |f(x_{n-1}) - f(y_{n-1})| + \dots + |f(x_1) - f(y_1)| + |f(x_0) - f(y_0)| \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi} + \frac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi} \right) \geq 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2\pi + 2k\pi} = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \rightarrow \infty, \text{ gdy } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Stąd wynika, że $\bigvee_0^1 f = \infty$.

Rozwiązanie Zadania 7.23.

Obliczmy całki:

$$I_5 := \int_0^1 x^2 d\gamma, \quad I_6 := \int_0^1 \gamma(x) dx^2, \quad \text{gdzie } \gamma := \chi_{\{1/2\}}.$$

I metoda. Weźmy dowolny podział $P := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathcal{P}([0, 1])$ oraz układ punktów pośrednich $\bar{t} := (t_1, \dots, t_n)$, gdzie $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ dla $i = 1, \dots, n$. Utwórzmy sumę

$$S = S(x^2, \gamma, P, \bar{t}) = \sum_{i=1}^n (t_i)^2 (\gamma(x_i) - \gamma(x_{i-1})).$$

Mamy dwa przypadki:

1^0 $1/2 = x_k$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Wtedy

$$S = (t_k)^2(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})) + (t_{k+1})^2(\gamma(x_{k+1}) - \gamma(x_k)) \rightarrow (1/2)^2 \cdot 1 + (1/2)^2 \cdot (-1) = 0,$$

gdy $\mu(P) \rightarrow 0$ (wtedy $t_k \rightarrow 1/2$ oraz $t_{k+1} \rightarrow 1/2$).

2^0 $x_{k-1} < 1/2 < x_k$ dla pewnego $k \in \{1, \dots, n\}$. Wtedy

$$S = (t_k)^2(\gamma(x_k) - \gamma(x_{k-1})) = 0 \rightarrow 0,$$

gdy $\mu(P) \rightarrow 0$ (wtedy $t_k \rightarrow 1/2$). Zatem $I_5 = 0$. Całkę I_6 liczymy przez części i jest ona równa 0.

II metoda. Liczymy całkę I_6 , zamieniając ją na całkę Riemanna

$$I_6 = \int_0^1 \gamma(x)(x^2)' dx = 2 \int_0^1 \gamma(x)x dx = \int_0^1 0 dx = 0.$$

Całkę I_5 liczymy przez części i jest ona równa 0.

Rozwiązanie Zadania 7.27.

(i) \Rightarrow (ii) Załóżmy (i) i niech \mathcal{F} będzie pokryciem w sensie Vitalego zbioru $E \subset (a, b)$ przedziałami zwartymi zawartymi w (a, b) . Rozważmy rodzinę \mathcal{F}_* taką jak w (i). Jeśli jest ona skończona, to warunek (ii) jest oczywisty. Niech więc $\mathcal{F}_* = \{I_1, I_2, \dots\}$. Oczywiście $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda(I_i) \leq b - a < \infty$, więc istnieje n takie, że $\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda(I_i) < \varepsilon$. Stąd

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^n I_i \right) \leq \lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right) + \lambda^* \left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} I_i \right) < \varepsilon.$$

(ii) \Rightarrow (i) Załóżmy (ii) oraz niech \mathcal{F} będzie pokryciem w sensie Vitalego zbioru $E \subset (a, b)$ przedziałami zwartymi zawartymi w (a, b) . Pokażemy, że istnieje rodzina rozłączna $\{I_1, I_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$ oraz rosnący ciąg indeksów $k_1 < k_2 < \dots$ taki, że

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} I_i \right) < \frac{1}{n} \quad \text{dla każdego } n \in \mathbb{N}. \quad (7.1)$$

Wtedy dla każdego n mamy

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right) \leq \lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_n} I_i \right) < \frac{1}{n}.$$

Stąd dla $n \rightarrow \infty$ dostajemy $\lambda^*(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i) = 0$ i wystarczy przyjąć $\mathcal{F}_* := \{I_1, I_2, \dots\}$.

Dla dowodu warunku (7.1) postępujemy indukcyjnie. Dla $n = 1$ stosując założenie (ii), znajdujemy rozłączną skończoną rodzinę $\{I_1, \dots, I_{k_1}\} \subset \mathcal{F}$ taką, że (7.1) zachodzi. Zauważmy, że rodzina $\mathcal{F}_1 := \left\{ I \in \mathcal{F} : I \subset (a, b) \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} I_i \right\}$ pokrywa zbiór $E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} I_i$ w sensie Vitalego. Stosując założenie (ii), znajdziemy skończoną rozłączną rodzinę $\{I_{k_1+1}, \dots, I_{k_2}\} \subset \mathcal{F}_1$ taką, że

$$\lambda^* \left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} I_i \setminus \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} I_i \right) < \frac{1}{2}.$$

Zatem rodzina $\{I_1, \dots, I_{k_2}\}$ jest rozłączna i zawarta w \mathcal{F} oraz spełnia warunek (7.1) dla $n = 2$. Kolejne etapy konstrukcji przeprowadzamy analogicznie.

Udowodniona własność pokazuje, że twierdzenie Vitalego o pokryciu dla zbiorów ograniczonych można sformułować w równoważnej formie za pomocą warunku (ii).

Bibliografia

- [1] A.M. Bruckner, J.B. Bruckner, B.S. Thomson, *Real analysis*, Second Edition, www.ClassicalRealAnalysis.com 2008
- [2] L. Bukovský, *The structure of the real line*, Monografie Matematyczne, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [3] R.A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.
- [4] W.J. Kaczor, M.T. Nowak, *Zadania z analizy matematycznej 3*, PWN, Warszawa, 2012.
- [5] M. Laczko, V.T. Sós, *Real analysis. Foundations and functions of one variable*, Springer, New York, 2015.
- [6] S. Łojasiewicz, *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, PWN, Warszawa, 1976.
- [7] R. Sikorski, *Funkcje rzeczywiste*, tom I, PWN, Warszawa, 1958.
- [8] S. Todorćevic, *Topics in topology*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, Berlin - Heidelberg, 1997.
- [9] X. Wang, *Lecture notes in real analysis*, Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser/Springer, Cham, 2018.

ISBN 978-83-66741-45-4



9 788366 741454