

**MARCIN KAMIŃSKI,
JACEK SZAFRAN,
PIOTR ŚWITA**

Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska
Politechniki Łódzkiej
Zakład Konstrukcji Stalowych

ANALIZA STATECZNOŚCI STALOWYCH WIEŻ TELEKOMUNIKACYJNYCH O PARAMETRACH LOSOWYCH

Opiniodawca: **prof. dr hab. inż. Paweł Śniady**

Tematem pracy jest zastosowanie uogólnionej metody perturbacji stochastycznej do wyznaczenia probabilistycznych momentów obciążenia krytycznego stalowych wież telekomunikacyjnych. Obciążenia te wyznacza się przy pomocy Stochastycznej Metody Elementów Skończonych dla losowo określonych parametrów geometrycznych przekroju i modułu Younga stali konstrukcyjnej. Wykorzystując metodę funkcji odpowiedzi, oblicza się wartości oczekiwane i odchylenia standardowe sił krytycznych, które można wykorzystać przy montażu kolejnych urządzeń nadawczych, a także – do wyznaczania wskaźników niezawodności tych konstrukcji. Przeprowadzana analiza ma również na celu weryfikację wrażliwości konstrukcji na parametry projektowe przyjęte jako zmienne losowe.

1. Wstęp

Zastosowanie metod probabilistycznych w rozwiązywaniu problemów inżynierskich polegających na analizie losowej znalazło swoje bezpośrednie zastosowanie w normach do projektowania *Eurocode*. W zakresie konstrukcji stalowych stosuje się podział ogółu przekrojów stalowych w zależności od ich smukłości na cztery klasy w celu określenia, czy zniszczenie następuje przez uplastycznienie, czy poprzez utratę stateczności. W szczególnych przypadkach zjawiska niestateczności mogą okazać się decydujące, również w przypadku z lokalnymi lub globalnymi parametrami losowymi [1, 2, 3]. Powszechnie stosowana w budownictwie w trakcie procesu projektowania optymalizacja ma na

celu ograniczenie do minimum kosztów konstrukcji, a co się z tym wiąże, redukcję przekrojów elementów przy najbardziej optymalnych schematach statycznych ustroju konstrukcyjnego – w ten sposób uzyskuje się lekki ustrój, w którym rezerwy nośności zostały możliwie ograniczone. Jak wiadomo, zmniejszanie przekrojów efektywnych w konstrukcjach stalowych prowadzi do znacznego zwiększenia smukłości kluczowych elementów konstrukcyjnych, a problematyka stateczności konstrukcji wiąże się między innymi ze znajomością podstawowych charakterystyk zarówno materiału, przekroju i jej wymiarów geometrycznych. Niestety, trudne do przewidzenia zmienne parametry materiału i przekroju, mając na względzie szczególnie jego postępującą korozję, mogą w istotny sposób przyspieszyć utratę stateczności – stąd też konieczność rozwiązywania zagadnień probabilistycznego wyoboczenia dla skomplikowanych schematów statycznych konstrukcji oraz różnorodnego sposobu obciążeń. W celu przeprowadzenia ogólnej oceny stateczności zastosowano w pracy metodę perturbacji stochastycznej zrealizowaną numerycznie przy pomocy Metody Elementów Skończonych. Przy jej pomocy znaleziono i przeanalizowano zmienność wartości oczekiwanych i odchyłeń standardowych w funkcji rozrzutu losowego założonych parametrów losowych. Analizę przeprowadzono na przykładzie jednej z wielu typowych przestrzennych prętowych konstrukcji stalowych – wieży telefonii komórkowej, jakich wiele nadal projektuje się i wykonuje w praktyce budowlanej. Uzyskane wyniki, jak również zastosowaną metodę można z powodzeniem zastosować przy analizie niezawodności [13] takich wież (w kontekście analizy deformacji, stanu naprężenia oraz stateczności), ale również przy dalszej optymalizacji kształtu jej struktury wewnętrznej. Należy podkreślić, że, ze względu na charakter metody perturbacji, w trakcie modelowania losowego obciążenia krytycznego sprawdza się również wrażliwość obciążenia krytycznego omawianej konstrukcji na zmienne projektowe [11], jakimi są tutaj moduł Younga dla stali oraz średnice krawężników. Wynika to z faktu wyznaczania w metodzie perturbacji gradientów tego obciążenia względem obydwu zmiennych; dotyczy nie tylko gradientów pierwszego rzędu, ale do n-tego rzędu włącznie i, co najważniejsze, nie jest właściwe dla innych metod obliczeniowych stosowanych w mechanice stochastycznej.

2. Metoda perturbacji stochastycznej

Rozważmy zmienną losową $b \equiv b(\omega)$ i jej funkcję gęstości prawdopodobieństwa jako $p(b)$. Centralne momenty probabilistyczne tej zmiennej definiujemy jako

$$\mu_m(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (b - E[b])^m p(b) db \quad (1)$$

Podstawowym założeniem perturbacji stochastycznej jest rozwinięcie wszystkich wprowadzanych zmiennych i wszystkich funkcji stanu w szereg Taylora przy założeniu parametru perturbacji w postaci małego $\varepsilon > 0$. W przypadku losowej wielkości siły krytycznej P_{cr} rozwinięcie to dla losowej wielkości b przedstawia się następująco [7]:

$$P_{cr} = P_{cr}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n P_{cr}}{\partial b^n} (\Delta b)^n \quad (2)$$

gdzie

$$\varepsilon \Delta b = \varepsilon (b - b^0) \quad (3)$$

jest wariacją pierwszego rzędu b w otoczeniu jej wartości oczekiwanej b^0 . Wartość oczekiwana P_{cr} będzie więc równa

$$E[P_{cr}] = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{cr}(b) p(b) db = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(P_{cr}^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varepsilon^n \frac{\partial^n P_{cr}}{\partial b^n} \Delta b^n \right) p(b) db \quad (4)$$

Z numerycznego punktu widzenia rozwinięcie (2) jest zapisane jako suma wszystkich składników, ale równanie (4) jako zapis całkowy jest zawsze wyznaczane dla granic skończonych, a dolna i górna granica całkowania musi mieć fizyczne uzasadnienie lub jest określona na drodze eksperymentalnej. Przy zmiennej losowej zgodnej z rozkładem Gaussa lub innym symetrycznym rozkładem prawdopodobieństwa równanie (4) można zapisać jako

$$E[P_{cr}] = P_{cr}(b^0) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 P_{cr}(b^0)}{\partial b^2} \mu_2(b^0) + \frac{1}{24} \varepsilon^4 \frac{\partial^4 P_{cr}(b^0)}{\partial b^4} \mu_4(b^0) + \dots \quad (5)$$

Wartość oczekiwana może być obliczona analitycznie lub wyznaczona w postaci symbolicznej wtedy i tylko wtedy, gdy znamy funkcję parametru losowego $P_{cr} = P_{cr}(b)$. Rachunkowa implementacja symboliczna, wprowadzona do programu komputerowego (np. MAPLE), a także połączona z zadowalającą wizualizacją odpowiednich charakterystyk losowych zapewnia szybsze rozwiązanie zadanego problemu i ułatwia analizę jakościową otrzymanych wyników. Znajomość analitycznej funkcji $P_{cr}(b)$, a więc i jej pochodnych, umożliwia bezpośrednio otrzymanie wartości oczekiwanych momentów wyższych rzędów również w postaci analitycznej, np. jako funkcji parametru ε

oraz rozrzutu losowego zadanej zmiennej losowej. Wówczas dodatkowo można wybrać rozkład prawdopodobieństwa, zgodnie z którym chcemy analizować wybraną zmienną (norma zaleca tutaj rozkład normalny, logarymiczno-normalny lub funkcję Gumbela, ale w praktyce inżynierskiej również stosuje się rozkład Weibulla) i analizować charakterystyki losowe siły krytycznej jako kombinacje tych parametrów. Wyniki liczbowe takiej analizy można porównywać z rezultatami dostatecznie dużych symulacji Monte-Carlo lub, w szczególnych przypadkach, wynikami teoretycznymi uzyskanym na drodze bezpośredniego całkowania. Biorąc pod uwagę klasyczny w liniowej teorii stateczności wzór Eulera dla belki swobodnie podpartej na obu końcach [5, 6], wyznaczenie wartości oczekiwanej siły krytycznej przy zadanym losowym parametrze w postaci długości elementu l , przedstawia się w postaci:

$$E[P_{cr}(b^0)] = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} (l + 3 \varepsilon^2 \alpha^2(l) + 15 \varepsilon^4 \alpha^4(l) + 105 \varepsilon^6 \alpha^6(l)) \\ + \frac{\pi^2 EJ}{l^2} (945 \varepsilon^8 \alpha^8(l) + 10395 \varepsilon^{10} \alpha^{10}(l)) \quad (6)$$

Ponieważ we wzorze (1) dla kolejnych momentów centralnych występują kolejne pochodne różnicy pomiędzy zmienną losową a jej wartością oczekiwaną, więc należy się spodziewać, iż długość rozwinięcia perturbacyjnego dla kolejnych momentów centralnych będzie wzrastała nieproporcjonalnie szybciej niż rząd rozpatrywanego momentu. Widać to dobrze na przykładzie wariancji siły krytycznej, której rozwinięcie zamieszczono poniżej jedynie z dokładnością do wyrazów rzędu szóstego. Otrzymujemy [8]

$$\text{Var}(P_{cr}(b)) = \varepsilon^2 \mu_2(b) \left(\frac{\partial P_{cr}(b^0)}{\partial b} \right)^2 \\ + \varepsilon^4 \mu_4(b) \left(\frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 P_{cr}(b^0)}{\partial b^2} \right)^2 + \frac{2}{3!} \frac{\partial P_{cr}(b^0)}{\partial b} \frac{\partial^3 P_{cr}(b^0)}{\partial b^3} \right) \\ + \varepsilon^6 \mu_6(b) \left(\left(\frac{1}{3!} \right)^2 \left(\frac{\partial^3 P_{cr}(b^0)}{\partial b^3} \right)^2 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^2 P_{cr}(b^0)}{\partial b^2} \frac{\partial^4 P_{cr}(b^0)}{\partial b^4} \right) \\ + \varepsilon^6 \mu_6(b) \left(\frac{2}{5!} \frac{\partial P_{cr}(b^0)}{\partial b} \frac{\partial^5 P_{cr}(b^0)}{\partial b^5} \right) \quad (7)$$

Z tego względu oraz biorąc pod uwagę brak automatycznych narzędzi symbolicznych do wyprowadzania takich wzorów dla z góry zadanego rzędu

perturbacji momenty rzędu trzeciego oraz czwartego ograniczamy do jedynie pierwszych paru składników, korzystając z następujących zależności [8]:

$$\begin{aligned} \mu_3(P_{cr}(b^0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (P_{cr}(b) - E[P_{cr}(b)])^3 p(b) db \\ &\cong \frac{3}{2} \varepsilon^4 \mu_4(b) \left(\frac{\partial P_{cr}(b^0)}{\partial b} \right)^2 \frac{\partial^2 P_{cr}(b^0)}{\partial b^2} + \frac{1}{8} \varepsilon^6 \mu_6(b) \left(\frac{\partial^2 P_{cr}(b^0)}{\partial b^2} \right)^3 \end{aligned} \quad (8)$$

jak również

$$\begin{aligned} \mu_4(P_{cr}(b^0)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (P_{cr}(b) - E[P_{cr}(b)])^4 p(b) db \\ &\cong \varepsilon^4 \mu_4(b) \left(\frac{\partial P_{cr}(b^0)}{\partial b} \right)^4 + \frac{3}{2} \varepsilon^6 \mu_6(b) \left(\frac{\partial P_{cr}(b^0)}{\partial b} \frac{\partial^2 P_{cr}(b^0)}{\partial b^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{16} \varepsilon^8 \mu_8(b) \left(\frac{\partial^2 P_{cr}(b^0)}{\partial b^2} \right)^4 \end{aligned} \quad (9)$$

Ostatecznie, wykorzystując podstawowe zależności znane z rachunku prawdopodobieństwa, obliczamy współczynniki wariancji, skośności oraz kurtozy dla siły krytycznej bezpośrednio, wykorzystując powyższe zależności. Mamy

$$\alpha(P_{cr}) = \frac{\sqrt{\text{Var}(P_{cr})}}{E[P_{cr}]}, \quad \beta(P_{cr}) = \frac{\mu_3(P_{cr})}{\sigma^3(P_{cr})}, \quad \kappa(P_{cr}) = \frac{\mu_4(P_{cr})}{\sigma^4(P_{cr})} - 3. \quad (10)$$

3. Analiza stateczności i elementy skończone

Rozważmy liniowy element skończony w postaci pręta prostego, których węzły oznaczamy jako i oraz j . Energię odkształcenia pręta pryzmatycznego dla wyidealizowanego elementu skończonego w zagadnieniach liniowej teorii sprężystości zapisujemy jako [9, 10]

$$U^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{(\alpha)}^T \mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)} \mathbf{q}_{(\alpha)} + \frac{1}{2} \mathbf{q}_{(\alpha)}^T \mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)} \mathbf{q}_{(\alpha)} \quad (11)$$

gdzie $\mathbf{q}_{(\alpha)}$ jest następującym wektorem przemieszczeń węzłów

$$\mathbf{q}_{(\alpha)} = \{u_{x(\alpha)}^{(i)}, u_{y(\alpha)}^{(i)}, u_{z(\alpha)}^{(i)}, u_{x(\alpha)}^{(j)}, u_{y(\alpha)}^{(j)}, u_{z(\alpha)}^{(j)}\}, \quad (12)$$

$\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)}$ jest macierzą sztywności sprężystej elementu oznaczoną jako

$$\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)} = \frac{E_{(\alpha)} A_{(\alpha)}}{l_{(\alpha)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

i $\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)}$ to macierz sztywności geometrycznej elementu skończonego

$$\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)} = \frac{F_{(\alpha)}}{l_{(\alpha)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Funkcjonał energii potencjalnej w odniesieniu do elementu skończonego może być przedstawiony jako

$$J_P^{(\alpha)} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_{(\alpha)}^T (\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)} + \mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)}) \mathbf{q}_{(\alpha)} - \mathbf{R}_{(\alpha)}^T \mathbf{q}_{(\alpha)} \quad (15)$$

co, wykorzystując procedurę jego minimalizacji, pozwala otrzymać

$$(\mathbf{k}_{(\alpha)}^{(s)} + \mathbf{k}_{(\alpha)}^{(\sigma)}) \mathbf{q}_{(\alpha)} = \mathbf{R}_{(\alpha)} \quad (16)$$

Procedura agregacji elementów skończonych w jeden układ globalny prowadzi do równania macierzowego postaci

$$\left(\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(s)} + \lambda_{(\alpha)} \mathbf{K}_{(\alpha)}^{(\sigma)}(F_{(\alpha)})\right) \mathbf{r}_{(\alpha)} = \lambda_{(\alpha)} \mathbf{R}_{(\alpha)} \quad (17)$$

gdzie $\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(\sigma)}(F_{(\alpha)})$ jest macierzą sztywności geometrycznej, $\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(s)}$ – macierzą sztywności sprężystej, obciążenie $\mathbf{R}_{(\alpha)}$ ma charakter proporcjonalny typu $\lambda_{(\alpha)} \mathbf{R}_{(\alpha)}$, gdzie $\lambda_{(\alpha)}$ to mnożnik obciążenia, $\hat{\mathbf{R}}_{(\alpha)}$ – pewne obciążenie wyjściowe. Warunkiem otrzymania wartości krytycznej $\lambda_{(\alpha)} = \lambda_{cr(\alpha)}$ oraz obciążenia krytycznego $\mathbf{R}_{cr(\alpha)} = \lambda_{cr(\alpha)} \mathbf{R}_{(\alpha)}$ jest niezerowe rozwiązanie równania

$$\det\left(\mathbf{K}_{(\alpha)}^{(s)} + \lambda_{(\alpha)} \mathbf{K}_{(\alpha)}^{(\sigma)}(F_{(\alpha)})\right) = 0 \quad (18)$$

W przypadku losowym chcemy ustalić zależność pomiędzy wielkością krytyczną λ_{cr} i zmienną losową b , którą proponujemy w postaci wielomianowej jako

$$\lambda_{cr}^{(m)} = D_{mk} b^k \quad (19)$$

Współczynniki D_{mk} są określone numerycznie w zależności od serii deterministycznych rozwiązań problemu stateczności przy pomocy modelu MES z parametrem losowym o wartości iterowanej wewnątrz przedziału $b = [b^0 - \Delta b, b^0 + \Delta b]$. Ostateczną postać funkcji znajdujemy przy pomocy metody najmniejszych kwadratów i ostatecznie obliczamy pochodne cząstkowe funkcji z następującym równaniem

$$\frac{\partial^k \lambda_{cr}^{(m)}}{\partial b^k} = \prod_{j=1}^k (n-j) D_{m1} b^{n-k} + \prod_{j=2}^k (n-j) D_{m2} b^{n-(k+1)} + \dots + D_{mn-k} \quad (20)$$

W przypadku zdefiniowania obciążenia krytycznego jako wielomianu

$$\lambda_{(cr)} = \sum_{k=0}^9 D_k b^k \quad (21)$$

wartość oczekiwana siły krytycznej jest obliczana z zależności

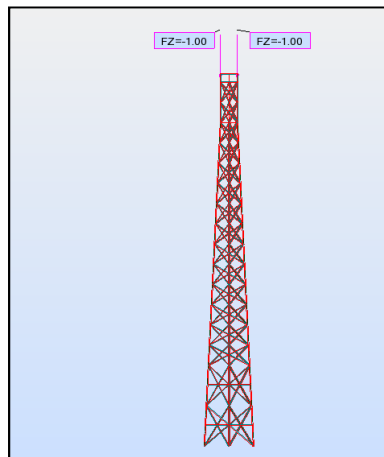
$$\begin{aligned}
 E[\lambda_{(cr)}] = & \sum_{k=1}^9 D_k b^k + D_0 + 4374 \alpha^8 \varepsilon^8 (3.6288 D_9 b + 40320 D_8) + \\
 & + 972 \alpha^6 \varepsilon^6 (60480 D_9 b^3 + 20160 D_8 b^2 + 5040 D_7 b + 720 D_6) + \\
 & + 162 \alpha^4 \varepsilon^4 \left(3024 D_9 b^5 + 1680 D_8 b^4 + 840 D_7 b^3 + \right. \\
 & \left. + 360 D_6 b^2 + 120 D_5 b + 24 D_4 \right) + \\
 & + 18 \alpha^2 \varepsilon^2 \left(72 D_9 b^7 + 56 D_8 b^6 + 42 D_7 b^5 + 30 D_6 b^4 + 20 D_5 b^3 + \right. \\
 & \left. + 12 D_4 b^2 + 6 D_3 b + 2 D_2 \right)
 \end{aligned} \tag{22}$$

Zgodnie z wcześniejszymi uwagami długość rozwinięcia wzrasta znacznie szybciej niż rząd rozpatrywanego momentu centralnego, tak więc wzorów analitycznych na wariancję oraz moment centralny trzeci i czwarty nie zamieszczono w pracy.

4. Analiza numeryczna

Głównym celem jest wyznaczenie podstawowych charakterystyk losowych obciążenia krytycznego dla wieży telekomunikacyjnej, której model pokazano na rys. 1. W tym celu wieża została obciążona jednostkowymi siłami skupionymi w punktach zamocowania urządzeń telekomunikacyjnych oraz oczywiście ciężarem własnym wszystkich elementów konstrukcyjnych. Znajomość poszukiwanych charakterystyk losowych jest, jak wiadomo, konieczna do analizy niezawodności konstrukcji, a także określenia, jakie urządzenia da się zainstalować na istniejącej już konstrukcji. Do wykonania analizy komputerowej wykorzystano komercyjny program MES ROBOT, natomiast niezbędne obliczenia symboliczne przeprowadzono przy pomocy programu MAPLE. Konstrukcja stalowa wieży ma wysokość 55,20 m i została ona podzielona na 9 sześciometrowych segmentów; posiada ona skratowanie typu X z krzyżulcami pracującymi na ściskanie i rozciąganie. Przekrój wieży jest trójkątem równobocznym, a rozstaw krawężników u podstawy wieży wynosi 7,3 m, zaś u wierzchołka 2,5 m. Najwyższy górny segment jest niezbieżny, pozostałe osiem ma stałą zbieżność wynoszącą w płaszczyźnie ściany 5%. Krawężniki wieży wykonano ze stalowych prętów pełnych o przekroju okrągłym o średnicach (poczynając od dołu) 110, 100, 90 oraz 80 mm. Segmenty wieży połączono ze sobą za pomocą skręcanych kołnierzy pierścieniowych, a blachy węzłowe o grubości 10 mm przyspawano bezpośrednio do krawężników. Krzyżulce wykonano z kątowników nierównoramienne L150×100×10, L120×80×10 oraz L90×60×8. Nad ostatnim segmentem wykonana jest dodatkowa konstrukcja wysokości 1,2 m z trzech rur Ø82,9×4 mocowanych do krawężników i usztywnionych ramką stanowiącą

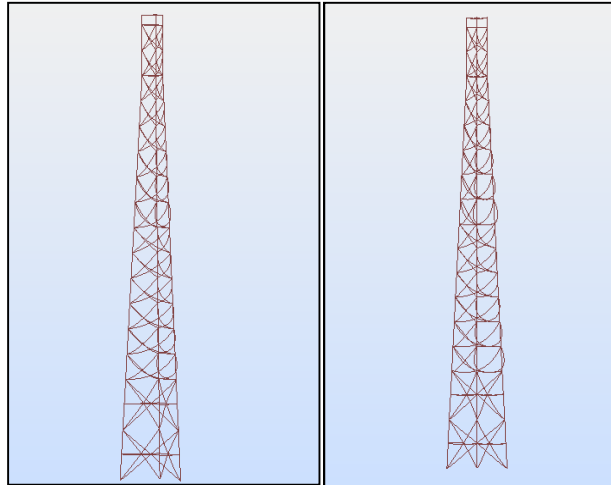
jednocześnie barierę pomostu. Wieża oparta jest na trzech stopach fundamentowych, w których osadzone są stalowe kotwy do połączenia z krawężnikami dolnego segmentu. Przyjęto stopy fundamentowe monolityczne, żelbetowe, o wymiarach w rzucie $4,0 \times 4,0$ m posadowione na głębokości – 3,00 m. W obliczeniach wybrano moduł Younga oraz średnicę dolnej części krawężnika jako losowe parametry losowe posiadające rozkład Gaussa, dla których przeanalizowano najpierw funkcje odpowiedzi, a potem kolejno – wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i inne charakterystyki losowe obciążenia krytycznego. Model komputerowy w programie ROBOT został wykonany przy użyciu 30 belkowych elementów skończonych 3D modelujących krawężniki, 156 elementów kratownicowych 3D do dyskretyzacji skratowania; łącznie wprowadzono 298 węzłów.



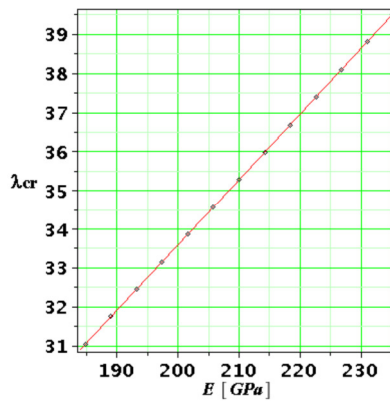
Rys. 1. Model 3D wieży stalowej
Fig. 1. 3D FEM model of the steel tower

Wyniki przeprowadzonej analizy numerycznej zamieszczono na poniższych rysunkach z wyszczególnieniem pierwszej postaci wybożenia dla obydwu parametrów projektowych (rys. 2), a także funkcji odpowiedzi siły krytycznej na parametry projektowe – moduł Younga w próbie o liczności 13 (rys. 3). Jak wynika z porównania obydwu postaci odkształconych z rys. 2, utrata stateczności ma podobny charakter w obydwu przypadkach, w którym dominuje ściskanie krawężników oraz zginanie ścispanych krzyżulców, natomiast cała wieża zachowuje swoją pierwotną pionową oś symetrii i kształt podłużny. Kolejno pokazano wartości oczekiwane obciążenia krytycznego w odniesieniu do obydwu zmiennych losowych na rys. 4 (dla analizy rzędu drugiego, czwartego, szóstego, ósmego i dziesiątego), a w dalszej kolejności – współczynniki wariancji (rys. 5), współczynniki skośności (rys. 6) oraz kurtozę (rys. 7) – w modelach rzędu drugiego, czwartego i szóstego łącznie. Wszystkie charakterystyki losowe zostały pokazane

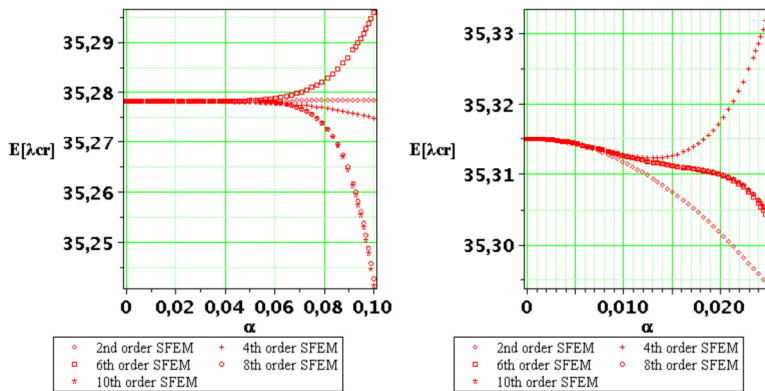
w funkcji współczynnika wariancji wejściowej zmiennej losowej, który ilustruje wielkość losowych fluktuacji danego parametru projektowego, natomiast wartości przedstawione na osiach pionowych rys. 3 oraz 4 podano w kN.



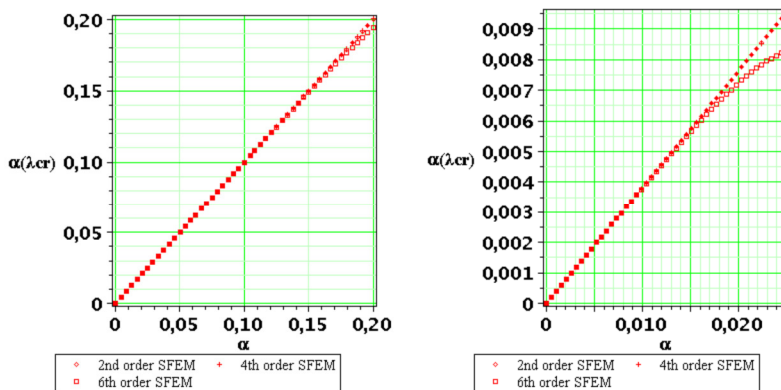
Rys. 2. Pierwsza postać wybożenia dla modułu Younga (lewy wykres) oraz dla średnicy krawężników (prawy wykres)
 Fig. 2. First critical configuration for Young modulus (left) and for the random diameter of the structural elements (right)



Rys. 3. Wielomianowa funkcja odpowiedzi dla siły krytycznej (pierwsza postać) dla losowego modułu Younga
 Fig. 3. Polynomial response function for the critical load (first critical value) for the randomized Young modulus



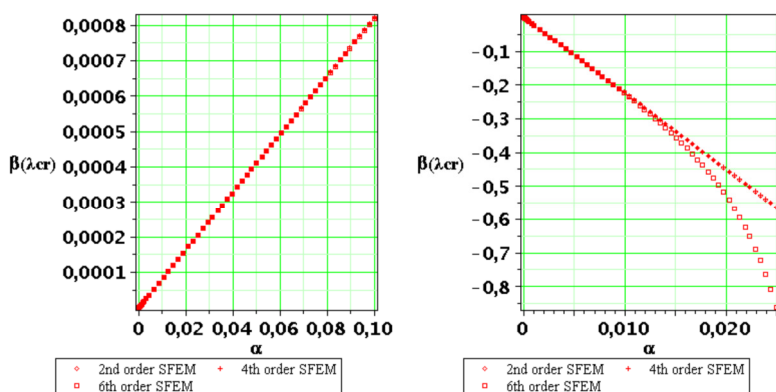
Rys. 4. Wartość oczekiwana siły krytycznej (pierwsza postać wyboczenia) dla losowego modułu Younga (lewy wykres) oraz średnicy krawężników (prawy)
 Fig. 4. The expected values for the critical force (first critical value) for the randomized Young modulus (left graph) and diameter (right)



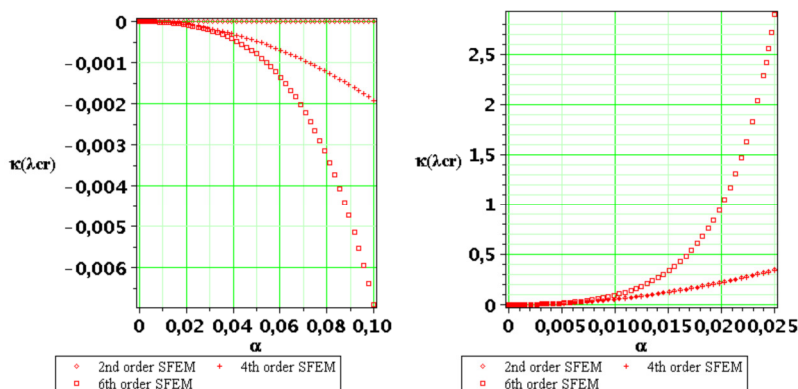
Rys. 5. Współczynniki wariancji siły krytycznej (pierwsza postać wyboczenia) dla losowego modułu Younga (lewy wykres) oraz średnicy krawężników (prawy)
 Fig. 5. The coefficient of variation for the critical force (first critical value) for the random Young modulus (left graph) and random diameter (right)

Pierwszym ważnym rezultatem przeprowadzonej analizy jest potwierdzenie liniowej zależności siły krytycznej od modułu Younga, a także – niezwykle dużej wrażliwości struktury na średnicę krawężników. W przypadku podstawowych charakterystyk losowych obciążenia krytycznego dla losowego modułu Younga otrzymujemy skośności i kurtozy z dobrym przybliżeniem równe 0 dla wszystkich rzędów metody perturbacji, a także liniową zależność pomiędzy wyjściowym a wejściowym współczynnikiem wariancji (rys. 5) – również prawie identyczne dla przybliżenia rzędu drugiego, czwartego oraz szóstego. W związku z powyższym, jak należało oczekiwać na podstawie wzoru Eulera, obciążenie krytyczne ma rozkład Gaussa, tak więc stosowanie wzoru na wskaźnik

niezawodności zgodnie z teorią przedstawioną w normie Eurocode 0 jest uzasadnione. Co prawda na rys. 4 widać wyraźnie, iż przy wzrastających wartościach $\alpha(E)$ wartości oczekiwane uzyskane dla różnych rzędów metody perturbacji zaczynają się od siebie różnić, ale ze skali osi pionowej wynika, że zaobserwowane różnice są nadal w granicy błędu numerycznego metody (czwarta cyfra znacząca). Sytuacja jest znacznie bardziej skomplikowana w przypadku losowej średnicy krawężników, gdyż na podstawie wartości oczekiwanej widać znacznie większą wrażliwość na losowe fluktuacje średnicy krawężników, gdyż ze względu na optymalne zaprojektowanie przekrojów niewielka zmiana ich średnicy może doprowadzić do utraty stateczności. Stąd wynikają ograniczenia metody perturbacji, którą można zastosować w tym szczególnym przypadku jedynie dla bardzo małych wartości $\alpha(d)$. Jak należało oczekiwać zwiększanie rozrzutu losowego tego parametru prowadzi do zmniejszania się wartości oczekiwanej obciążenia krytycznego (rys. 3). W przyjętym zakresie zmienności współczynnika wariancji parametru d rozrzut losowy obciążenia krytycznego jest prawie trzykrotnie mniejszy niż wejściowy, co przy wartościach współczynnika skośności oraz kurtozy, znacznie odbiegających od 0 (rys. 6 i 7) prowadzi do wniosku, że rozkład obciążenia krytycznego jest tutaj całkowicie odmienny od krzywej Gaussa. Ze względu na wyraźnie dodatni charakter kurtozy można wnioskować, że otrzymany rozkład jest znacznie bardziej skoncentrowany wokół swojej wartości oczekiwanej, niż wejściowy rozkład średnicy elementów, a koncentracja ta wzrasta wraz ze wzrostem zastosowanego rzędu perturbacji. Całkowicie odmiennie od poprzedniego przypadku wszystkie charakterystyki losowe są silnie zależne od zastosowanego rzędu przybliżenia w metodzie perturbacji stochastycznej.



Rys. 6. Współczynniki skośności siły krytycznej (pierwsza postać wyboczenia) dla losowego moduła Younga (lewy wykres) oraz średnicy krawężników (prawy)
 Fig. 6. The coefficient of skewness for the critical force (first critical value) for the random Young modulus (left graph) and random diameter (right)



Rys. 7. Kurtosis siły krytycznej (pierwsza postać wybożenia) dla losowego modułu Younga (lewy wykres) oraz średnicy krawężników (prawy)

Fig. 7. Kurtosis for the critical force (first critical value) for the random Young modulus (left graph) and random diameter (right)

5. Wnioski

W pracy zastosowano uogólnioną stochastyczną metodę elementów skończonych w połączeniu z metodą funkcji odpowiedzi do analizy zagadnień stateczności stalowej wieży telekomunikacyjnej, której parametrami losowymi były moduł Younga oraz średnica krawężników. Analiza ta została wykonana przy pomocy programu komercyjnego MES ROBOT i programu do obliczeń symbolicznych MAPLE. Jak należało się spodziewać na podstawie teorii Eulera, wybór modułu Younga jako gaussowskiego projektowego parametru losowego powoduje, iż obciążenie krytyczne ma również rozkład Gaussa, natomiast ulosowanie średnicy elementów konstrukcyjnych ma skutek odmienny – otrzymujemy rozkład o wyraźnie ujemnej skośności i większej koncentracji wokół wartości oczekiwanej niż rozkład Gaussa. W związku z tym wzór na wskaźnik niezawodności wg teorii Cornella przedstawiony w normie Eurocode można wykorzystać jedynie w pierwszym z omawianych przypadków, natomiast modelowanie niezawodności dla losowej średnicy krawężników (np. wskutek ich intensywnej korozji) wymaga bardziej rozbudowanego wzoru na ten wskaźnik. Jednocześnie zanotowano niezwykle dużą wrażliwość obciążenia krytycznego na średnicę krawężników przy raczej małej wrażliwości na moduł Younga; wynika to oczywiście z optymalnego przyjęcia odpowiednich przekrojów stalowych w trakcie projektowania wieży. W związku z tym analiza losowa przy użyciu metody perturbacji mogła zostać przeprowadzona jedynie dla niewielkich współczynników wariancji zmiennej losowej, gdyż większe wartości tego współczynnika są związane ze znacznym wzrostem prawdopodobieństwa utraty stateczności przez konstrukcję. Wyniki przeprowadzonej analizy można jednak wykorzystać również w kontekście deterministycznych metod projektowych –

zapas bezpieczeństwa, czy też możliwość dalszego dociążania tego typu wieży nowymi urządzeniami można określić poprzez odjęcie od obliczonej wartości pierwszej siły krytycznej ciężaru już zamontowanych na wieży urządzeń. Niezwykle interesującym problemem w zakresie analizy stateczności przy użyciu MES jest stan nadkrytyczny [11] i jego analiza probabilistyczna, a także – modelowanie podatności poszczególnych połączeń w konstrukcjach stalowych [12].

Podziękowania

Pracę napisano w ramach projektu badawczego NN 519-386-636 sponsorowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

Literatura

- [1] **Elishakoff I.**: Probabilistic Methods in the Theory of Structures. New York, Wiley-Interscience 1983.
- [2] **Elishakoff I., Li Y. W., Starnes J.H.**: Nonclassical Problems in the Theory of Elastic Stability. Cambridge, Cambridge University Press 2001.
- [3] **Papadopoulos V., Charmpis V., Papadrakakis M.**: A computationally efficient method for the buckling analysis of shells with stochastic imperfections. *Comput. Mech.* 43, 2009, s. 687-700.
- [4] **Sadovský Z., Drdák M.**: Buckling of plate strip subjected to localised corrosion—a stochastic model, *J. Thin-Walled Struct.* 39, 2001, s. 247-259.
- [5] **Jones R.M.**: Buckling of Bars, Plates and Shells. Blacksburg, Bull Ridge Publishing, Virginia 2006.
- [6] **Timoshenko S.P., Gere J.M.**: Theory of Elastic Stability (second ed.). New York, McGraw-Hill 1961.
- [7] **Kamiński M.**: Generalized perturbation-based stochastic finite element method in elastostatics. *Comput. Struct.* 85, 2007, s. 586-594.
- [8] **Kamiński M., Świta P.**: Generalized Stochastic Finite Element Method in elastic stability problems. *Comput. Struct.* 89, 2011, s. 1241-1252.
- [9] **Bathe K.J.**: Finite Element Procedures. Prentice Hall 1996.
- [10] **Kleiber M.**: Wprowadzenie do Metody Elementów Skończonych. Warsaw-Poznań, Polish Scientific Publishers 1986.
- [11] **Mang H.A., Hofinger G., Jia X.**: In the interdependency of primary and initial secondary equilibrium paths in sensitivity analysis of elastic structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 200(13-16), 2011, s. 1558-1567.
- [12] **Hadianfard M.A., Razani R.**: Effects of semi-rigid behavior of connections in the reliability of steel frames. *Struct. Safety* 25, 2003, s. 123-138.
- [13] **Melchers R.E.**: Structural Reliability. Analysis and Prediction. Ellis Horwood Ltd. 1987.

STABILITY ANALYSIS OF STEEL TELECOMMUNICATION TOWERS WITH RANDOM PARAMETERS

Summary

The main aim of this paper is the stability analysis of the steel telecommunication tower with random parameters using the Generalized Stochastic Finite Element Method. The Taylor expansion with random coefficients of n th order is used to express all random state parameters and to determine the basic probabilistic characteristics of the critical load. The Response Function Method assists to determine higher order partial derivatives of the structural response instead of the Direct Differentiation Method employed widely before and sufficient to assure high quality of the resulting moments. The magnitude of the critical force is examined in terms of random Young modulus as well as of the main structural members diameter to show how much extra load (in the new telecommunication equipment) may be applied in the future at this tower to prevent the structural failure. Further application of this methodology is seen in the reliability analysis and reliability-based topology optimization of such steel structures.