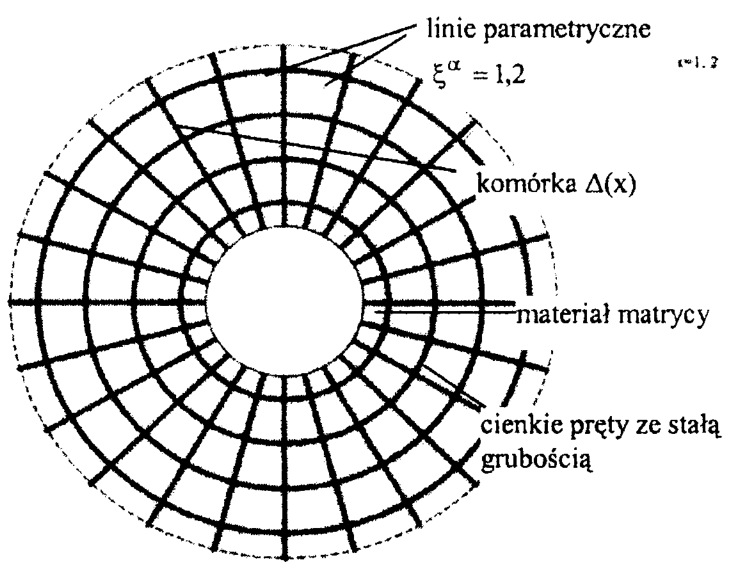
# STATECZNOŚĆ PŁYT KOMPOZYTOWYCH Z NIEJEDNORODNYM ROZKŁADEM SKŁADNIKÓW

**B. MICHALAK**
Katedra Mechaniki Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Al. Politechniki 6, 93-590 Łódź

Celem pracy jest sformułowanie i zbadanie uśrednionego modelu opisującego stateczność płyty kompozytowej z niejednorodnym rozkładem składników. Rozpatrywana płyta ma określona budowę, która nie jest periodyczna ale która w małym obszarze rozpatrywanej płyty może być w przybliżeniu traktowana jako periodyczna. Sformułowanie przybliżonego modelu matematycznego bazuje na koncepcji *uśredniania tolerancyjnego* przedstawionej w pracy Woźniaka i Wierzbickiego [1], gdzie ciało tego rodzaju nazwane jest ciałem heteroperiodycznym.

## 1. BEZPOŚREDNI OPIS ANALIZOWANEJ PŁYTY

Przedmiotem analizy jest kolista płyta kompozytowa zbudowana z dwóch rodzajów sprężystych prętów których osie przecinają się pod kątem prostym. Obszar pomiędzy prętami wypełnia jednorodny sprężysty materiał matrycy (Rys. 1).




Rys. 1. Schemat płyty

Celem pracy będzie uzyskanie i zbadanie uśrednionego modelu opisującego stateczność tego rodzaju płyt, które nazywać będziemy płytami heteroperiodycznymi. W celu otrzymania równań modelu uśrednionego zastosujemy formalnie technikę uśredniania tolerancyjnego dla ciał periodycznych przedstawioną w pracy [1], gdyż będzie ona odniesiona do pewnego małego obszaru płyty w którym z pewną tolerancją płyta może być traktowana jako periodyczna.

W pracy indeksy $\alpha$, $\beta$ przebiegają ciąg 1, 2, a kreska pionowa oznacza pochodną kowariantną w biegunowym układzie współrzędnych $\xi^\alpha$.

Punktem wyjścia do otrzymania modelu uśrednionego będą znane równania nieliniowej teorii II rzędu płyt cienkich [3]

(i) równania równowagi

$$n^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + p^{\beta} = 0, \qquad m^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} + (n^{\alpha\beta} w_{|\beta})_{|\alpha} + p = 0 \tag{1}$$

(ii) związki konstytutywne

$$n^{\alpha\beta} = D\, H^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \varepsilon_{\gamma\delta}, \qquad m^{\alpha\beta} = B\, H^{\alpha\beta\gamma\delta}\, \kappa_{\gamma\delta} \tag{2}$$

gdzie: $H^{\alpha\beta\gamma\delta} = [g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + \nu(\in^{\alpha\gamma} \in^{\beta\delta} + \in^{\alpha\delta} \in^{\beta\gamma})]/2$,

$D \equiv E\delta/(1-\nu^2)$, $\qquad B \equiv E\delta^3/12(1-\nu^2)$

(iii) relacje odkształcenia przemieszczenia

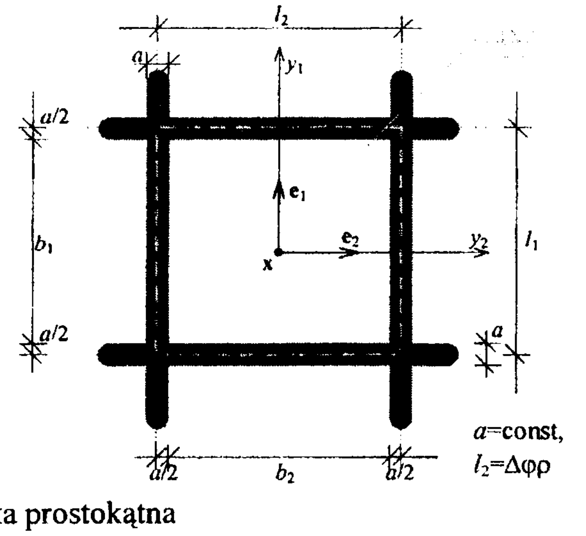
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha|\beta}, \qquad \kappa_{\alpha\beta} = -w_{|\alpha\beta}. \tag{3}$$

Przyjmijmy, że obciążenie zewnętrzne działające na płytę $p^{\beta} = p = 0$. Obliczając pochodne iloczynów występujących w (1.2) i uwzględniając rów. (1.1) otrzymujemy

$$m^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} w_{|\alpha\beta} = 0. \tag{4}$$

## 2. PROCEDURA MODELOWANIA

Podstawowym założeniem przyjętym w trakcie modelowania będzie przyjęcie, że każda komórka Δ(x) z Rys.1 może być traktowana z pewną tolerancją jako nierozróżnialna z komórką prostokątną pokazaną na Rys.2.




Rys. 2. Komórka prostokątna

*Założenia o dostosowaniu CA.* Przyjmijmy, że przemieszczenia powierzchni środkowej płyty są opisane funkcją o charakterze periodycznym w ramach pewnego systemu tolerancji $T(\cdot)$

$$w(\xi^\alpha,\, t) \in PL(T) \tag{5}$$

gdzie $T = (F(\Omega), \varepsilon(\cdot), l(\cdot))$ jest przyjętym systemem tolerancji. Stąd istnieje następująca dekompozycja funkcji przemieszczeń

$$w(\xi^\alpha, t) = w^0(\xi^\alpha, t) + \tilde{w}(\xi^\alpha, t) \tag{6}$$

gdzie funkcja $w^0(\cdot) \in SV_{\Delta(x)}(T)$ opisuje uśrednione przemieszczenia, natomiast funkcja $\tilde{w}(\cdot) \in PL^\mu(T)$, $<\tilde{w}>(\cdot) = 0$ opisuje lokalne oscylacje przemieszczeń wywołane niejednorodną budową płyty. Funkcja $\tilde{w}(\cdot)$ może być aproksymowana w każdej komórce $\Delta(x)$ funkcją $\Delta$-periodyczną $w_x(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$.

## 3. RÓWNANIA OPISUJĄCE MODEL UŚREDNIONY

Podstawiając do rów. (4) związki konstytutywne (2) oraz traktując siły $n^{\alpha\beta}$ jako znane funkcje wolnozmienne $n^{\alpha\beta}(\cdot) \in SV_{\Delta(x)}(T)$ i korzystając z zasad uśredniania tolerancyjnego podanych w [1] otrzymujemy następujące uśrednione równanie równowagi

$$\begin{gathered}[<B\,H^{\alpha\beta\gamma\delta}>(\xi^\tau)\; w^0{}_{|\gamma\delta}(\xi^\tau,t)]_{|\alpha\beta} + [<B\,H^{\alpha\beta\gamma\delta}>(\xi^\tau)\; \tilde{w}_{|\gamma\delta}(\xi^\tau,t)]_{|\alpha\beta} - \\ - n^{\alpha\beta}(\xi^\tau)\; w^0{}_{|\alpha\beta}(\xi^\tau,t) = 0\end{gathered} \tag{7}$$

W powyższym przyjęto, że w iloczynie $n^{\alpha\beta}\,(w^0{}_{|\alpha\beta} + \tilde{w}_{|\alpha\beta})$ - $\tilde{w}_{|\alpha\beta} << w^0{}_{|\alpha\beta}$.

Mnożąc rów. (4) przez dowolną $\Delta_x$-periodyczna funkcję testową $\delta w^* \in H^1_{per}(\Delta_x)$ taką że $<\delta w^*>= 0$ otrzymujemy następujący warunek wariacyjny dla $\Delta_x$-periodycznej nieznanej funkcji $\tilde{w}_x(\xi^\alpha, t)$

$$\begin{gathered}<\delta w^*{}_{|\alpha\beta}\; B\,H^{\alpha\beta\gamma\delta}\; \tilde{w}_{x|\gamma\delta}>(\xi^\tau,t) - <\delta w^*{}_{|\alpha\beta}\, \tilde{w}_x>(\xi^\tau,t)\; n^{\alpha\beta}(\xi^\tau) = \\ =<\delta w^*{}_{|\alpha\beta}\; B\,H^{\alpha\beta\gamma\delta}>(\xi^\tau)\; w^0{}_{|\gamma\delta}(\xi^\tau,t)\end{gathered}, \tag{8}$$

który musi być spełniony dla każdej funkcji testowej $\delta w^*$.

Zakładając chwilowo, że funkcja $w^0(\cdot)$ jest ustalona możemy z rów.(8) otrzymać zagadnienie na komórce $\Delta_x$ którego przybliżone rozwiązanie przyjmiemy w postaci

$$\tilde{w}_x(\xi^\tau, t) \cong h^\alpha(\mathbf{y})\; V_\alpha(\xi^\tau, t), \tag{9}$$

gdzie $h^\alpha(\cdot) \in C^2_{per}(\Delta_x)$ są przyjętymi dla każdego rozważanego problemu $\Delta_x$-periodycznymi funkcjami kształtu takimi że, $<h^\alpha(\cdot)>= 0$, poza tym spełniającymi warunek $h^\alpha{}_{|\gamma\delta}(\mathbf{y}) \in O(1)$. Nieznane zmienne wewnętrzne $V_\alpha(\xi^\tau, t)$ są funkcjami wolno zmiennymi $V_\alpha(\cdot) \in SV_{\Delta x}(T)$.

Wynika stąd, że pole przemieszczeń $w(\xi^\tau,t)$ może być przyjęte w przybliżonej postaci

$$w(\xi^\tau,t) \cong w^0(\xi^\tau,t) + h^\alpha(\mathrm{y})\, V_\alpha(\xi^\tau,t), \tag{10}$$

gdzie $w^0(\cdot) \in SV_{\Delta x}(T)$ i $V_\alpha(\cdot) \in SV_{\Delta x}(T)$ są podstawowymi niewiadomymi.

Wykorzystując zasady uśredniania tolerancyjnego [1] dla przyjętej funkcji przemieszczenia (10), otrzymujemy z rów. (7) i (8) następujące równania opisujące stateczność płyty heteroperiodycznej

$$\begin{gathered}[< B H^{\alpha\beta\gamma\delta} > (\xi^\tau)\; w^0{}_{|\gamma\delta}(\xi^\tau,t)]_{|\alpha\beta} + [< B H^{\alpha\beta\gamma\delta}\, h^\mu{}_{|\gamma\delta} > (\xi^\tau)\; V_\mu(\xi^\tau,t)]_{|\alpha\beta} - \\ - n^{\alpha\beta}(\xi^\tau)\; w^0{}_{|\alpha\beta}(\xi^\tau,t) = 0\end{gathered}\quad , \tag{11}$$

$$< B H^{\alpha\beta\gamma\delta}\, h^\mu{}_{|\alpha\beta} > (\xi^\tau)\; w^0{}_{|\gamma\delta}(\xi^\tau,t) + < B H^{\alpha\beta\gamma\delta}\, h^\mu{}_{|\alpha\beta}\, h^\lambda{}_{|\gamma\delta} > (\xi^\tau)\; V_\lambda(\xi^\tau,t) = 0 .$$

Współczynniki w powyższych równaniach w przeciwieństwie do równań opisujących płytę periodyczną nie są wielkościami stałymi lecz funkcjami wolnozmiennymi wywołanymi przez heteroperiodyczną niejednorodność płyty kompozytowej.

Należy zauważyć, że wyniki pracy nie mogą być otrzymane przy użyciu metod homogenizacji asymptotycznej dla ciał periodycznych z pewną parametryzacją krzywoliniową [2]. Otrzymane ogólne wyniki zostaną zilustrowane wybranymi przykładami.

LITERATURA

[1] Woźniak C., Wierzbicki E., Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2000.
[2] Lewiński T., Telega J. J., Plates, laminates and shells, World Scientific, Singapore, 1999.
[3] Mechanika Techniczna, Mechanika sprężystych płyt i powłok, pod red. Cz. Woźniaka, PWN, Warszawa 2001.

## STABILITY OF COMPOSITE PLATES WITH NON-UNIFORM DISTRIBUTION OF CONSTITUENTS

This contribution deals with stability of certain composite plates with a deterministic material structure, which is not periodic, but in small regions of a plate can be approximately regarded as periodic. The formulation of approximate mathematical models of these plates, based on the concept of what is called a *tolerance averaging*, was discussed in [1] where the solids of this kind where referred to as the heteroperiodic solids. In this contribution a certain approximate solutions to the periodic cell problems for the composite plates under consideration are proposed. These solutions are based on same heuristic assumptions and lead to the system of equations with functional but slowly-varying coefficients. It has to be mentioned that the results obtained in this contribution cannot be derived by using the homogenization method related to solids which are periodic with respect to a certain curvilinear parameterisation, [2]. The obtained general results will be illustrated by an example of the selected stability problems.