

# WPLYW MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI POSTACIOWEJ NA STATECZNOŚĆ PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH

R. MANIA

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej  
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy podano wyniki analizy stateczności globalnej płyt trójwarstwowych w kształcie trapezu równoramiennego swobodnie podpartych na całym obwodzie, poddanych osiowemu ściskaniu. Omówiono szczególny wpływ materiału rdzenia – jego modułu odkształcenia postaciowego – na wybór modelu płyty dla rozwiązania zagadnienia stateczności oraz na poziom obciążenia krytycznego płyty. Zamieszczono i omówiono wyniki rozwiązania analitycznego i rozwiązania numerycznego metodą elementów skończonych.

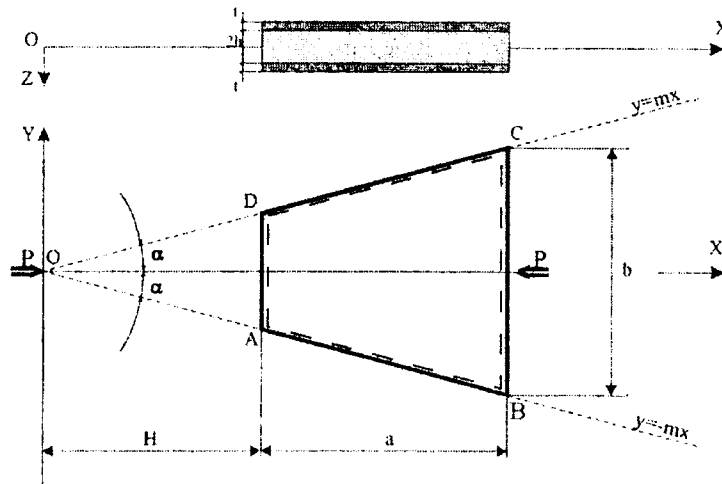
## 1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach obserwujemy szybko rosnący obszar stosowania kompozytów laminowanych w konstrukcjach inżynierskich. Wprowadzane są różnego rodzaju połączenia materiałowe optymalizujące cechy wytrzymałościowe i lekkość elementów składowych. Pewną grupę kompozytów laminowanych stanowią płyty trójwarstwowe (sandwich). Dwie zewnętrzne warstwy nazywane okładzinami traktowane jako cienkie płyty, oddzielone są przez względnie grubą środkową warstwę pełniącą rolę rdzenia. Zazwyczaj okładziny wykonane są z materiałów o wysokiej wytrzymałości (np. stal, aluminium, kompozyty wzmocnione włóknami), natomiast stosowane warstwy rdzenia odznaczają się większą różnorodnością co do formy i kształtu. Ograniczając uwagę do cienkich płyt warstwowych, z uwagi na parametry materiałowe rdzeni i ich udział w przenoszonych przez płytę obciążeniach, rozróżnia się rdzenie miękkie i twarde. Podczas pracy konstrukcji trójwarstwowych typowym obciążeniem jest ściskanie mogące doprowadzić do wyboczenia. Przedstawiona analiza dotyczy przypadku wyboczenie globalnego płyty.

W literaturze zdecydowana większość prac skoncentrowana jest na analizie stateczności laminowanych płyt prostokątnych [3], [6], [7]. Znakomicie mniej publikacji dotyczy płyt o kształcie trapezu [1], [2]. W przypadku trójwarstwowych płyt trapezowych na poziom obciążenia krytycznego oprócz warunków brzegowych, parametrów geometrycznych takich jak proporcje wymiarów liniowych i proporcje grubości warstw oraz własności materiałów warstw, ma wpływ dodatkowy czynnik mający - kąt nachylenia bocznych krawędzi trapezu. Przedmiotem pracy są płyty (rys. 1), dla których kąt ten zmieniał się w przedziale  $0-15^\circ$ . Badano wpływ tego parametru jak i modułu odkształcenia postaciowego rdzenia ( $G_r$ ,  $G_{xy}$  odpowiednio) na stateczność płyt trójwarstwowych w kształcie trapezu równoramiennego [5].

## 2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Przedmiotem analizy były cienkie płyty trójwarstwowe w kształcie trapezu równoramiennego o symetrycznej budowie względem warstwy środkowej. Przyjęto, że warstwy zewnętrzne (okładziny) wykonane są z jednakowego, izotropowego materiału zaś rdzeń może być wykonany z piankowego tworzywa sztucznego (poliuretan) o stałej bądź zmiennej charakterystyce materiałowej, albo z materiału charakteryzującego się ogólną ortotropią.



Rys. 1. Trójwarstwowa płyta trapezowa o symetrycznej budowie poddana osiowemu ścisnaniu

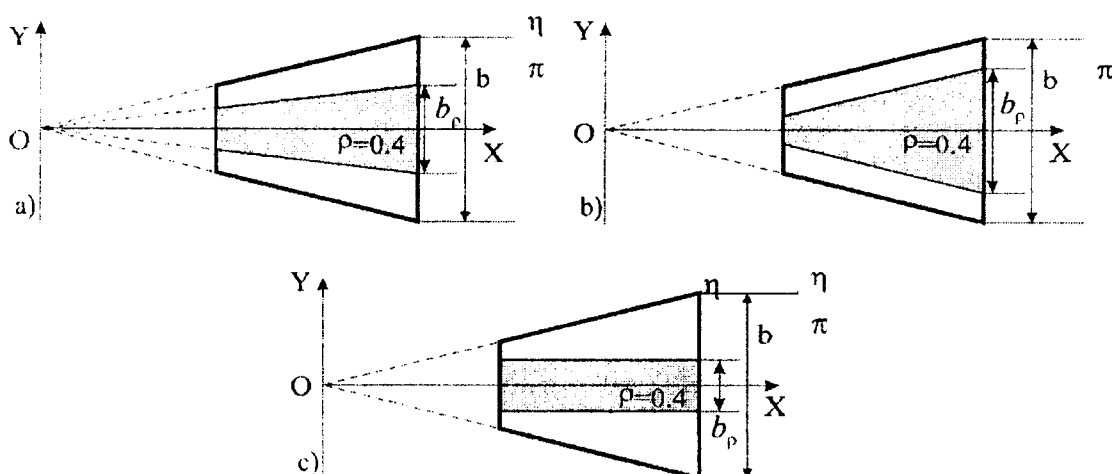
W przypadku płyt trójwarstwowych, dla których konstrukcja rdzenia (np. rdzenie ulowe, strukturalne) bądź jego własności materiałowe (tworzywa piankowe) spełniają niżej podane zależności, analizę stateczności przeprowadzono na podstawie teorii pierwszego rzędu Reissnera-Mindlina [7]. Teoria ta dotyczy tak zwanych rdzeni miękkich i nazywana bywa hipotezą linii łamanej. Przyjmuje się wówczas, że obciążenie normalne w płaszczyźnie równoległej do powierzchni płyty przenoszą jedynie okładziny, zaś rdzeń uczestniczy tylko w przeniesieniu poprzecznego ścinania. W praktyce ma to miejsce, gdy  $E_r h / E_f t < 0,1$  - stosunek modułu sprężystości  $E_f$  okładzin do modułu sprężystości  $E_r$  rdzenia jest duży, zaś stosunek grubości  $t$  okładziny do grubości  $2h$  rdzenia jest mały. Właściwości rdzenia definiuje współczynnik podatności  $k$  określony zależnością:

$$k = \frac{\pi^2 E_f t h}{(1 - \nu^2) G_r b^2}, \quad (1)$$

który w prezentowanej pracy nie jest wielkością stałą lecz może być funkcją dwóch współrzędnych  $x$  oraz  $y$ , tj.  $k = k(x, y)$ , w szczególności tylko jednej współrzędnej, tj.  $k = k(x)$  albo  $k = k(y)$ . Współczynnik ten nie zależy natomiast od współrzędnej  $z$ . Jak wynika z postaci wzoru (1), definiującego współczynnik  $k$ , zmienność tego współczynnika może powodować zarówno zmieniająca się wartość  $E_f t$  - sztywności okładziny,  $G_r$  modułu Kirchhoffa materiału rdzenia, jak również zmienna geometria płyty, w tym grubość rdzenia. Praktycznie najbardziej interesujący jest przypadek, gdy

plyta charakteryzuje się zmienną wartością  $G_r$  modułu sprężystości postaciowej materiału rdzenia. Wynika to z możliwości racjonalnego modelowania zmian własności mechanicznych rdzenia płyty, w szczególności jego modułu sprężystości postaciowej  $G_r$ , będącego w przypadku tworzyw porowatych funkcją gęstości tworzywa [6]. W analizie przyjęto, że w środkowej części rdzenia utworzone zostaje pasmo o zwiększonej  $q$ -razy w stosunku do pozostałej części sztywności ↔ gęstości, usytuowane symetrycznie względem osi symetrii trapezu. Rozważono trzy warianty kształtu środkowego pasma rdzenia, a mianowicie:

- w kształcie trapezu o bocznych krawędziach, zbiegających się w wierzchołku O klina (rys. 2a),
- w kształcie trapezu o bocznych krawędziach, równoległych do odpowiednich krawędzi płyty trapezowej (rys. 2b),
- w kształcie prostokąta (rys. 2c).



Rys. 2. Kształt pasma wzmocnienia w trójwarstwowej płycie trapezowej

We wszystkich wariantach szerokość pasma środkowego, przy dłuższej podstawie trapezu wynosiła  $b_p = \rho b$ . Wartość  $\rho$  może zmieniać się, w ogólnym przypadku, w przedziale  $\langle 0, 1 \rangle$ . Aby pasmo to rozciągało się między podstawami trapezu na całej jego wysokości, w wariantcie (b) przedział ten ograniczono od dołu, zaś w wariantcie (c) od góry. Wartości graniczne przedziału określoności parametru  $\rho$  zależą od kształtu danej płyty.

W przypadku płyt trójwarstwowych, dla których stałe materiałowe okładzin i rdzenia (moduły Younga) są tego samego rzędu, mówimy o płycie z rdzeniem twardym. Założenie powyższe implikuje przyjęcie dla całego przekroju poprzecznego płyty hipotezy Kirchhoffa-Love'a, nazywanej hipotezą prostej normalnej [3], [7]. W płycie z rdzeniem twardym wszystkie warstwy uczestniczą w przeniesieniu obciążeń normalnych w płaszczyźnie równoległej do powierzchni płyty. Analizowano rdzenie charakteryzujące się ogólną ortotropią materiałową.

Zagadnienie stateczności obydwu wymienionych wyżej rodzajów płyt trójwarstwowych rozwiązano analitycznie z zastosowaniem metody ortogonalizacyjnej Galerkinia w połączeniu z zaproponowaną metodą transformacji układu współrzędnych. Dodatkowo, metodą wartości własnych określono wielkość obciążeń krytycznych (punkty bifurkacji) analizowanych płyt z zastosowaniem metody elementów skończonych w komercyjnym programie ANSYS.

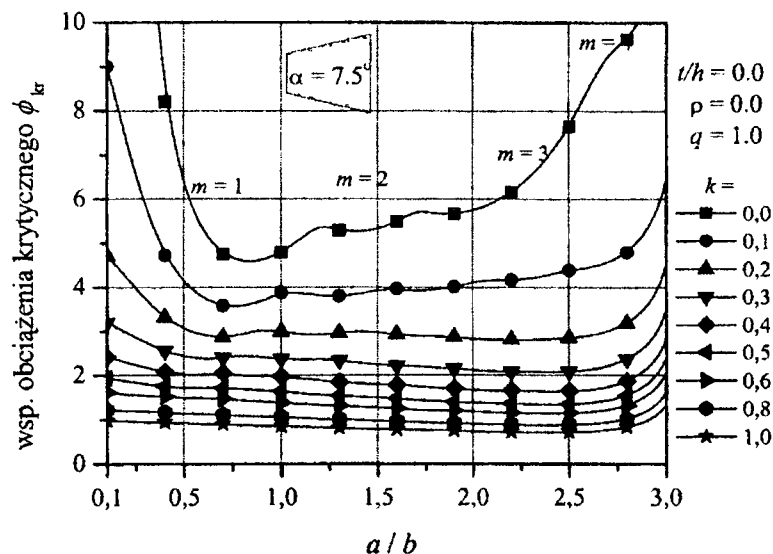
### 3. PRZYKŁADOWE WYNIKI OBLICZEŃ

Zagadnienie zostało rozwiązane dla płyt swobodnie podpartych na całym obwodzie. W rozwiązaniu analitycznym obliczono wartości krytyczne współczynnika obciążenia  $\phi$  określonego zależnościami:

$$(a) \quad \phi = \frac{Pb(1-\nu^2)}{2\pi^2 E_f t \left(h + \frac{t}{2}\right)^2} \quad (b) \quad \phi = \frac{Pb}{\pi^2 E_2 t^3} \quad (2)$$

Wyrażenie (2.a) dotyczy płyty z miękkim rdzeniem, natomiast (2.b) płyty z twardym rdzeniem. W wyrażeniu tym  $E_2$  jest modułem Younga materiału rdzenia w jednym z kierunków ortotropii.  $P$  jest wartością siły ściskającej płytę.

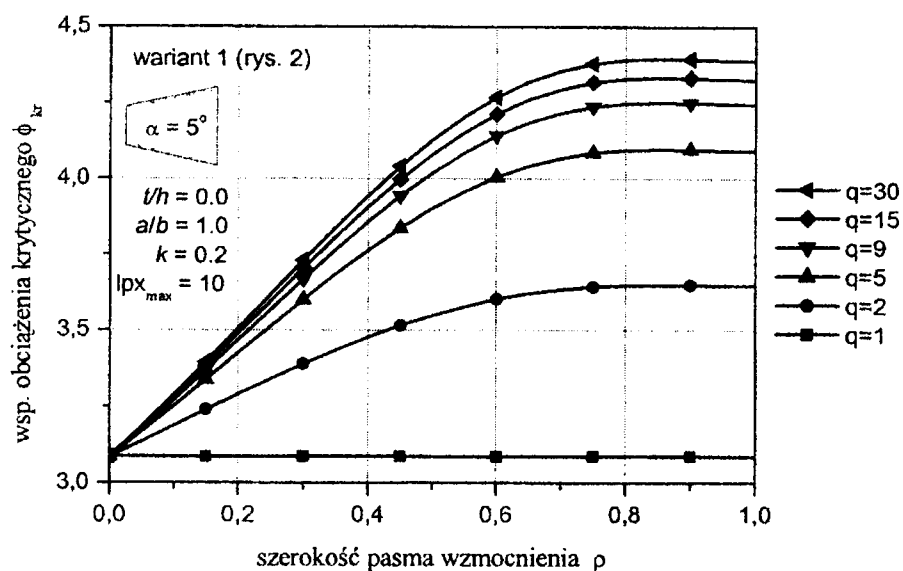
Rysunek 3 pokazuje charakterystyczne krzywe wyboczenia, będące przykładowymi wynikami obliczeń współczynnika obciążenia krytycznego trapezowych płyt trójwarstwowych z miękkim rdzeniem o stałej charakterystyce ( $q=1$  i  $\rho=0$ ). Jak wynika z definicji (1), przy ustalonych wartościach wymiarów płyty i niezmiennym materiale okładzin, współczynnik  $k$  charakteryzuje wpływ modułu  $G_r$  materiału rdzenia na obciążenie krytyczne. Krótkie płyty o wartości ilorazu  $a/b < 1,5$  i kącie nachylenia bocznych krawędzi  $\alpha < 5^\circ$  wybaczą się podobnie do płyt prostokątnych, tj. mniejszym wartościom modułu  $G_r$  (większe wartości współczynnika  $k$ ) odpowiada obniżenie wartości obciążenia krytycznego oraz zanika zależność tego obciążenia od liczby półfal powierzchni wyboczenia. Zróżnicowane natomiast jest zachowanie sztywniejszych płyt trapezowych, tj. charakteryzujących się współczynnikiem podatności  $k$  mniejszym od 0.2-0.3, w stosunku do płyt podatnych, dla których współczynnik  $k > 0.3$ .



Rys. 3. Wartość obciążenia krytycznego w funkcji współczynnika  $k$  podatności płyty, płyta trapezowa o kącie  $\alpha = 7,5^\circ$ , rdzeń o stałej sztywności

W przypadku pierwszej grupy płyt ze wzrostem wartości kąta  $\alpha$  nachylenia ramion trapezu oraz wzrostem liczby półfal powierzchni wyboczenia w kierunku ściskania,

rosną wartości współczynnika  $\varphi_{kr}$ . Wzrostowi wartości kąta  $\alpha$  oraz współczynnika  $k$  podatności płyty towarzyszy skrócenie długości półfali wyboczenia w kierunku ściskania. Skrócenie długości półfali wyboczenia ma miejsce również dla płyt mniej sztywnych, gdy  $k > 0.3$ , ale przy mniejszym gradiencie zmian długości półfali (rys. 3).



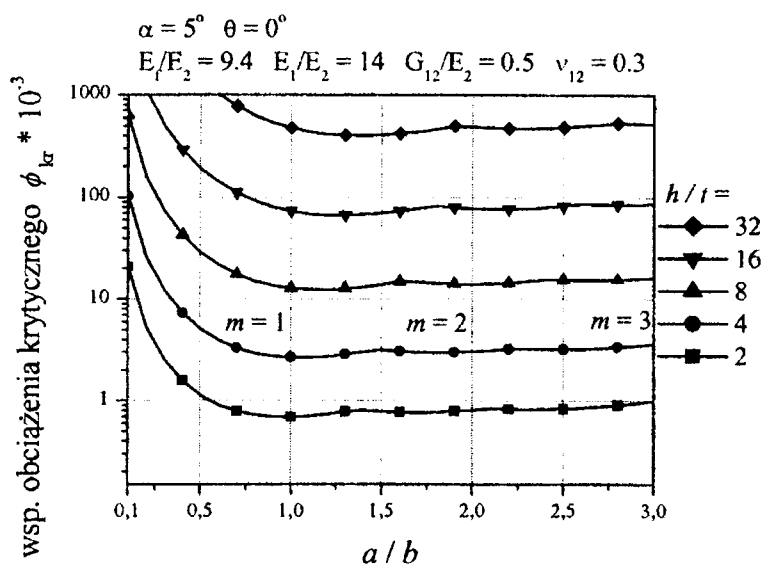
Rys. 4. Wartość obciążenia krytycznego dla różnych wartości współczynnika wzmocnienia  $q$ , płyta trapezowa z rdzeniem o zmiennej charakterystyce wg wariantu 1 (rys 2a), kącie nachylenia  $\alpha = 5^\circ$ , współczynnika podatności  $k = 0.2$  oraz wartości ilorazu  $a/b = 1.0$

Odwróceniu ulega natomiast tendencja zmian współczynnika  $\varphi_{kr}$ , a mianowicie wzrostowi wartości współczynnika  $k$  oraz długości płyty, towarzyszy obniżenie wartości współczynnika  $\varphi_{kr}$ . Dla  $a/b$  bliskiego pewnej wielkości granicznej związanej ze zbliżaniem się kształtu płyty do kształtu trójkąta, występuje ponowny wzrost wartości obciążenia krytycznego (rys. 3).

Wpływ wzmocnienia rdzenia pasmem o kształcie pokazanym na rysunku 2 prezentuje przykładowo rysunek 4. Wartość współczynnika wzmocnienia  $q$  zmieniano w granicach od 1 do 30, prowadząc obliczenia dla każdego z trzech przyjętych wariantów kształtu środkowego pasma rdzenia (rys. 2). Wpływ samego kształtu tego pasma na skuteczność wzmocnienia jest niewielki. Przyrost szerokości pasma środkowego szczególnie efektywnie wpływa na wzrost obciążenia krytycznego do szerokości względnej  $\rho = 0.6 \div 0.8$ , zaś powyżej tego zakresu możliwe jest nawet lekkie obniżenie wartości obciążenia krytycznego, szczególnie dla płyt trapezowych o podatnych rdzeniach i kącie  $\alpha$  nachylenia bocznych krawędzi większym od  $10^\circ$ .

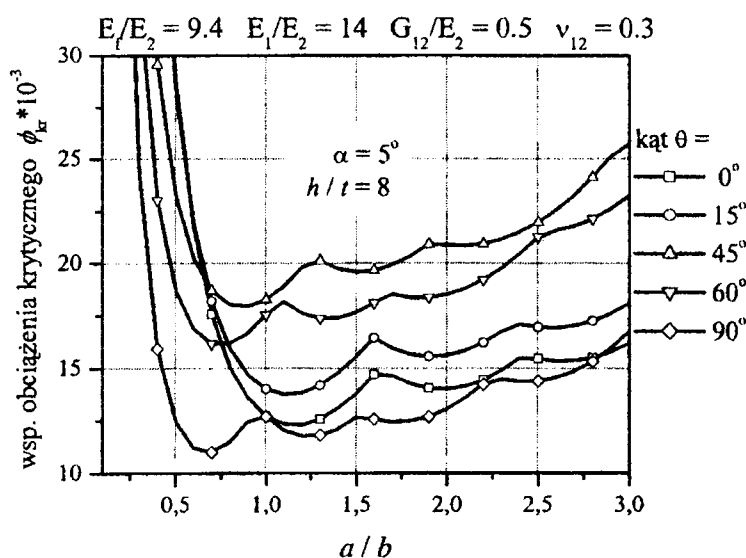
Z kolei krzywe na rysunkach 5 i 6 pokazują obliczone wartości krytyczne współczynnika obciążenia (2.b) uzyskane dla trapezowej płyty trójwarstwowej z twardym rdzeniem ortotropowym. Wykresy mają charakter bezwymiarowy, a w legendzie wykresu podano sposób zastosowanej normalizacji stałych materiałowych, w tym i modułu  $G_{xy}$  rdzenia. Szczególnie ciekawym wydaje się rysunek 6 pokazujący wpływ kąta laminacji na obciążenie krytyczne przy ustalonych pozostałych parametrach płyty trójwarstwowej, co w przypadku prostokątnych płyt wielowarstwowych analizował Loughlan [4]. Ekstremum obciążenia krytycznego dla płyt krótszych ( $a/b < 1$ )

występuje dla kątów  $\theta$  mniejszych od  $45^\circ$ , a dla płyt dłuższych ( $a/b > 1$ ) dla kątów  $\theta$  większych od kąta  $45^\circ$ . Proporcje między grubościami warstw płyty określonymi wartością ilorazu  $h/t$ , nie mają wpływu na zmianę tej właściwości. Przy zbliżaniu się kształtu płyty do kształtu trójkąta widoczny jest wzrost wartości obciążenia krytycznego, zwłaszcza dla płyt trapezowych o kątach nachylenia krawędzi  $\alpha > 10^\circ$ .



Rys. 5. Wykres zależności  $\phi_{kr} = \phi_{kr}(a/b)$  dla kolejnych wartości ilorazu  $h/t$ , płyta trapezowa z twardym rdzeniem ortotropowym, kąt nachylenia  $\alpha = 5^\circ$

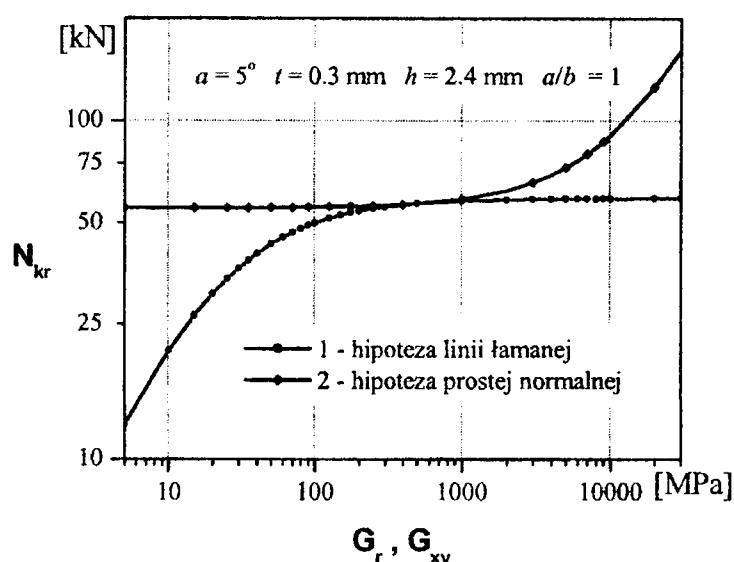
W obliczeniach prowadzonych metodą elementów skończonych w pakiecie ANSYS, pierwotnie płyty trójwarstwowe z miękkim rdzeniem modelowano wielowarstwowymi elementami powłokowymi. Mimo, iż elementy te miały opcję „sandwich logic” [8], przewidzianą do analizy płyt tego typu, to w dalszej analizie właściwszym okazało się modelowanie rdzenia elementami bryłowymi, zaś okładzin



Rys. 6. Wykres zależności  $\phi_{kr} = \phi_{kr}(a/b)$  dla wartości ilorazu  $h/t = 8$ , kąta  $\alpha = 5^\circ$ , dla kilku wartości kąta laminacji  $\theta$

elementami powłokowymi. Podejście takie pozwalało na szerszy zakres zmian parametrów materiałowych płyty, zwłaszcza rdzenia, a tym lepsze spełnienie założeń hipotezy linii łamanej [5]. Płyty z rdzeniem twardym modelowane były wielowarstwowymi elementami powłokowymi z możliwością zmiany kąta laminacji warstwy rdzenia.

Przyjmując konkretne stałe materiałowe okładzin i rdzenia, jednakowe dla rozwiązania zrealizowanego na podstawie hipotezy linii łamanej oraz rozwiązania bazującego na hipotezie prostej normalnej, przy ustalonej geometrii płyty, przeprowadzono obliczenia siły krytycznej w funkcji modułu odkształcenia postaciowego – odpowiednio  $G_r$  dla rdzenia miękkiego oraz  $G_{xy}$  dla twardego rdzenia ortotropowego. Wyniki tych obliczeń obrazuje wykres na rysunku 7. Z przebiegu krzywych (linie 1 i 2) określających wielkość obciążenia krytycznego, widoczne są granice stosowania konkretnej hipotezy, a także obszar wspólny, w którym obserwuje się zbieżność obydwu rozwiązań.



Rys. 7. Wartość siły krytycznej dla trójwarstwowej płyty trapezowej obliczona przy zastosowaniu hipotezy linii łamanej – linia 1 oraz hipotezy prostej normalnej – linia 2.

#### 4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy zaprezentowano wpływ modułu odkształcenia postaciowego materiału rdzenia na wielkość obciążenia krytycznego trójwarstwowych płyt o kształcie trapezu równoramiennego poddanych jednokierunkowemu ścisnaniu. Zagadnienie stateczności płyt z rdzeniem miękkim rozwiązano w oparciu o teorię Reissnera-Mindlina, zaś w przypadku płyt z rdzeniem twardym wykorzystano założenia teorii cienkich płyt laminowanych i hipotezę Kirchhoffa-Love'a. Wyniki numeryczne uzyskano stosując metodę ortogonalizacyjną Galerkiną w połączeniu z metodą transformacji układu współrzędnych. Przeprowadzono weryfikację rozwiązania analitycznego metodą elementów skończonych.

Modelowanie własności mechanicznych rdzenia płyt trójwarstwowych przez zmianę jego gęstości w przypadku rdzeni piankowych, a tym samym zmianę jego modułu odkształcenia postaciowego, ma istotny wpływ na poziom obciążenia

krytycznego oraz postać wyboczenia. W przypadku rdzeni twardych analogiczny wpływ na stateczność płyty trójwarstwowej uzyskuje się - przy ustalonej wartości modułu Kirchhoffa - przez zmianę ułożenia kierunków ortotropii względem krawędzi płyty oraz zmianę względnej proporcji grubości warstw.

Kryterium decydującym o wyborze metody obliczania płyty wielowarstwowej, jest wzajemna proporcja własności materiałowych okładzin oraz rdzenia. Dla szczególnych własności materiałowych warstw składowych płyty, istnieje obszar, w którym wyniki analizy na podstawie hipotezy „linii łamanej” i hipotezy „prostej normalnej” są zbieżne.

## LITERATURA

- [1] Babu C.S., Kant T., Two shear deformable finite element models for buckling analysis of skew fibre-reinforced composite and sandwich panels, *Composite Structures*, 46, 1999.
- [2] H.-T. Hu, W.-L. Tzeng, Buckling analysis of skew laminated plates subjected to uniaxial inplane loads, *Thin-Walled Structures*, 38, 2000, s. 53-77.
- [3] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (Ed), Selected problems of instabilities in composite structures, *A Series of Monographs*, Tech. University of Lodz, 1999.
- [4] Loughlan J., The effect of membrane-flexural coupling on the compressive stability of anti-symmetric angle-ply laminated plates, *III International Conference on Thin-Walled Structures*, Elsevier, 2001, s.507-514.
- [5] Mania R., Analiza wpływu własności materiałowych rdzenia na stateczność trapezowej płyty trójwarstwowej, Politechnika Łódzka, Rozprawa doktorska, 2002.
- [6] Romanów F., Wytrzymałość konstrukcji warstwowych, Wyd. WSI w Zielonej Górze, 1995.
- [7] Vinson J.R., The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials, Technomic Pub. Co., Lancaster, 1999.
- [8] Ansys 5.7.1 HTML Online Documentation, SAS IP, Inc., 2001.

## **THE INFLUENCE OF A SHEAR MODULUS OF ELASTICITY ON THE SANDWICH PLATE BUCKLING**

This work gives the solution for the stability of a simple supported axially loaded trapezoidal sandwich plate. The characteristic influence of a shear modulus of elasticity of the core, as well as the model selection on the buckling load was studied. The results for analytical and FEM solutions are given.