

# STATECZNOŚĆ I NOŚNOŚĆ GRANICZNA CIENKOŚCIENNYCH SŁUPÓW WIELOOBWODOWYCH PODDANYCH RÓWNOMIERNEMU ŚCISKANIU

**M. KRÓLAK**

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej,  
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

**R. GRĄDZKI**

Zakład Podstawowych Problemów Techniki, Instytut Zarządzania Politechniki Łódzkiej,  
ul. Piotrkowska 266, 90-924 Łódź

W pracy przeprowadzono analizę stateczności lokalnej i globalnej (eulerowskiej) oraz nośności granicznej równomiernie ściskanych izotropowych słupów o przekrojach kwadratowych wieloobwodowych (wielokomorowych) o stałym polu powierzchni przekroju poprzecznego. Wyniki analizy (wpływ ilości komór na stateczność i nośność) przedstawiono w postaci wykresów. Wykazano duży wzrost odporności słupów o dużej liczbie komór na wyboczenia lokalne.

## 1. WPROWADZENIE

Utrata stateczności (wyboczenie globalne, lokalne lub interakcyjne) cienkościennych elementów nośnych konstrukcji, o takim samym polu powierzchni przekroju poprzecznego, zależy od wielu czynników takich jak: rodzaj obciążenia, własności materiałowe, warunki brzegowe, wymiary geometryczne oraz kształt przekroju poprzecznego.

Szczególnie niebezpiecznym przypadkiem obciążenia ze względu na utratę stateczności jest osiowe lub mimośrodowe ściskanie.

Na globalną utratę stateczności najbardziej narażone są długie pręty cienkościenne o małych wymiarach gabarytowych przekroju poprzecznego (pręty smukłe), poddane ścisłkaniu.

Wiadomo również, że konstrukcje cienkościenne o profilu otwartym są bardziej podatne na utratę stateczności (różne postacie wyboczenia) niż konstrukcje o profilu zamkniętym.

Ponieważ obciążenie, przy którym występuje wyboczenie globalne jest dla konstrukcji na ogół obciążeniem niszczącym, należy tak dobrać wymiary konstrukcji, aby wyboczenie globalne nie wystąpiło lub wartości naprężeń krytycznych wyboczenia globalnego były co najmniej kilka lub nawet kilkanaście razy większe od naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego.

Trzeba pamiętać, że nawet niezbyt bliskie sobie wartości naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego i globalnego mogą spowodować wyboczenie interakcyjne przy znacznie niższych wartościach obciążenia konstrukcji cienkościennej.

W konstrukcjach cienkościennych o przekrojach jednoobwodowych zamkniętych większe gabaryty przekroju poprzecznego, przy tym samym polu powierzchni przekroju, to mniejsza grubość ścianek i większa ich szerokość, a to oznacza wzrost naprężeń

wyboczenia globalnego i często znaczny spadek naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego.

W niniejszej pracy wykazano, że niską odporność na wyboczenie lokalne cienkościennych słupów o profilu jednoobwodowym można w istotnym stopniu podwyższyć poprzez zastosowanie przekroju wieloobwodowego (wielokomorowego) o takim samym polu powierzchni przekroju poprzecznego (takim samym ciężarze).

W procesie projektowania trzeba pamiętać, że zastosowanie przekroju wieloobwodowego o takich samych gabarytach i polu powierzchni, co słupa jednoobwodowego obniża nieco naprężenie krytyczne wyboczenia globalnego.

Tematyka stateczności, stanów zakrytycznych i nośności pryzmatycznych belek – słupów o przekrojach poprzecznych wieloobwodowych praktycznie nie była dotychczas rozpatrywana. Jedynie w pracach K. Heung – Soo [1] oraz W.Chena i T. Wierzbickiego [2], dotyczących absorpcji energii przez profile wielokomorowe (multi – cell), podano wykresy sił niszczących dla badanych tam profili w funkcji przemieszczeń, z których można odczytać nośność badanych profili.

Aktualny poziom technologii umożliwia wykonanie słupów o przekrojach wieloobwodowych, zarówno z metali jak i z materiałów kompozytowych, co skłoniło autorów tej pracy do zajęcia się zagadnieniami stateczności i nośności takich słupów.

Brak publikacji z tej tematyki wydaje się zaskakujący przy bardzo bogatej literaturze dotyczącej stateczności, stanów zakrytycznych i nośności cienkościennych konstrukcji o przekrojach jednoobwodowych (gładkich i uźebrowanych).

W dalszej części pracy zostanie przeprowadzona analiza stateczności lokalnej i globalnej oraz nośności najprostszego przypadku słupa wieloobwodowego o przekroju kwadratowym poddanego równomiernemu ściskaniu.

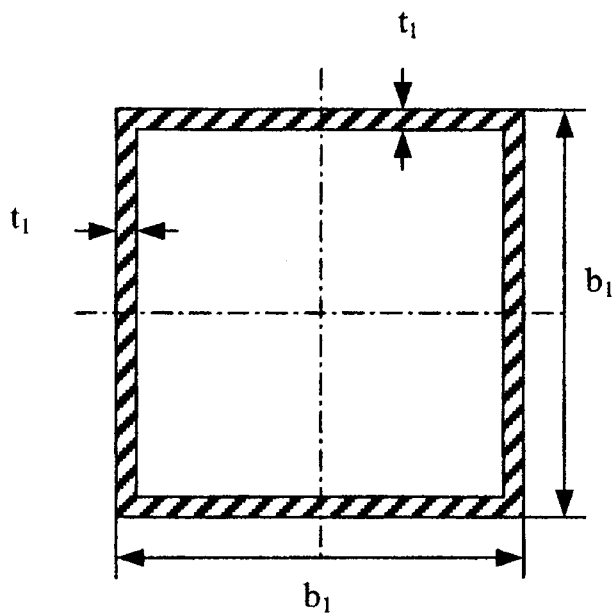
## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozpatrzmy cienkościenny jednoobwodowy słupek pryzmatyczny o przekroju kwadratowym  $b_1 \times b_1$  i o grubości ścian  $t_1$  (rys.1), ściskany równomiernie naprężeniami  $\sigma$  wywołanymi przez siłę ściskającą  $P$ . Na rys.2 pokazano przekroje słupów wieloobwodowych złożone z  $n^2$  kwadratowych komór o wymiarach  $b_n \times b_n$ , których gabaryty i pola powierzchni przekroju są takie same jak słupa jednoobwodowego. Przyjęto, że grubość wszystkich ścianek słupa wieloobwodowego  $t_n$  są takie same.

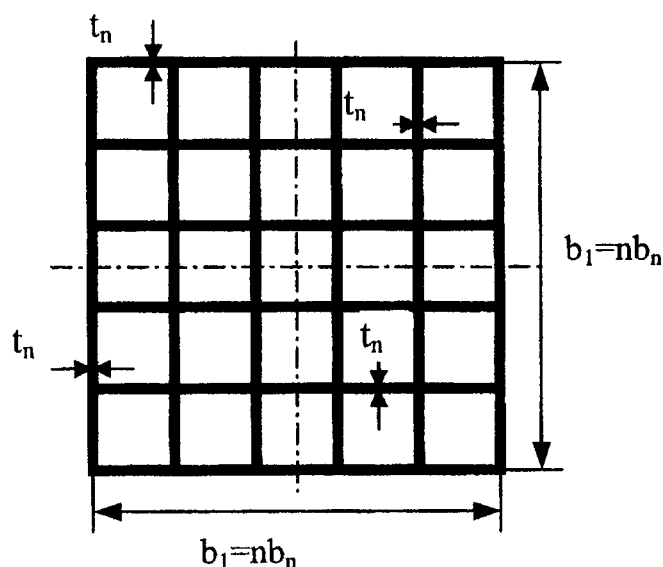
Z warunku równości pól powierzchni i długości wszystkich rozpatrywanych słupów (jednakowych ich ciężarów) wynika, że:

- naprężenia w stanie przedwyboczeniowym we wszystkich słupach są takie same i wynoszą  $\sigma = P/F$
- grubość ścian  $t_n$  w słupach o  $n^2$  komorach określone są wzorem

$$t_n = \frac{2}{n+1} t_1 \quad (1)$$



Rys. 1. Przekrój poprzeczny jednoobwodowy



Rys. 2. Przekrój poprzeczny wieloobwodowy

### 3. LOKALNA UTRATA STATECZNOŚCI

Przy dużej długości  $l$  słupów, w porównaniu z wymiarami  $b_n$ , naprężenia krytyczne wyboczenia lokalnego analizowanych słupów określone są wzorami (jak dla ściskanych jednokierunkowo przegubowo podpartych pasm płytowych):

$$\sigma_{k_{rn}}^{(lok)} = 4\pi^2 \frac{D_n}{b_n^2 t_n} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t_n}{b_n}\right)^2 \quad (2)$$

gdzie  $E$  i  $\nu$  są stałymi materiałowymi (moduł Younga i liczba Poissona). Po wykorzystaniu zależności (1) oraz  $b_n = b_1/n$  otrzymano

$$\sigma_{km}^{(lok)} = \left( \frac{2n}{n+1} \right)^2 \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left( \frac{t_1}{b_1} \right)^2 = \alpha_n \sigma_{kr1}^{(lok)} \quad (3)$$

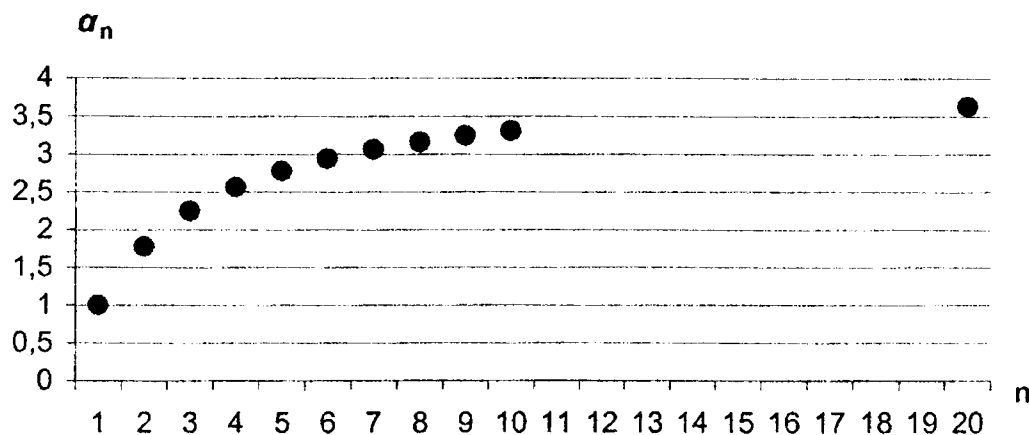
gdzie

$$\alpha_n = \left( \frac{2n}{n+1} \right)^2 \quad (4)$$

Wartość współczynnika  $\alpha_n$  dla  $n=1,2,\dots,\infty$  zestawiono w tabeli 1 i przedstawiono na wykresie (rys. 3).

Tabela 1

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$\alpha_8$	$\alpha_9$	$\alpha_{10}$	$\alpha_{20}$	$\alpha_\infty$
1,0	1,778	2,250	2,560	2,778	2,939	3,060	3,160	3,240	3,306	3,628	4,000



Rys. 3 Wykres współczynnika stateczności lokalnej  $\alpha_n$  w funkcji  $n$

#### 4. GLOBALNA (EULEROWSKA) UTRATA STATECZNOŚCI

Napężenie krytyczne sprężystego wyboczenia globalnego wynika ze wzoru Eulera

$$\sigma_{km}^{(gl)} = \frac{\pi^2 EI_n}{Fl_w^2} = \frac{\pi^2 Ei_n^2}{l_w^2} = \frac{\pi^2 E}{s_n^2} \quad (5)$$

gdzie:

$$s_n^2 = \frac{l_w^2}{i_n^2} = \frac{l_w^2 F}{I_n} ; \quad I_n = \frac{2}{3} b_1^3 t_1 \left[ \frac{6}{n+1} \sum_{i=0}^k \left( \frac{1}{2} - \frac{i}{n} \right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{(n+1)^2} \left( \frac{t_1}{b_1} \right)^2 \right] \quad (6)$$

Po pominięciu ostatniego członu we wzorze (6), jako wielkości małej wyższego rzędu otrzymano:

$$I_n \cong \frac{2}{3} b_1^3 t_1 \left[ \frac{6}{n+1} \sum_{i=0}^k \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{n} \right)^2 + \frac{1}{4} \right], \quad (7)$$

gdzie:  $k = \frac{n-1}{2}$  dla  $n$  nieparzystych,  $k = \frac{1}{2}n$  dla  $n$  parzystych.

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\beta_n = \frac{6}{n+1} \sum_{i=0}^k \left( \frac{1}{2} + \frac{i}{n} \right)^2 + \frac{1}{4},$$

$$\sigma_{kr1}^{(gl)} = \frac{\pi^2 E}{6 \left( \frac{l_w}{b_1} \right)^2}; \quad (8)$$

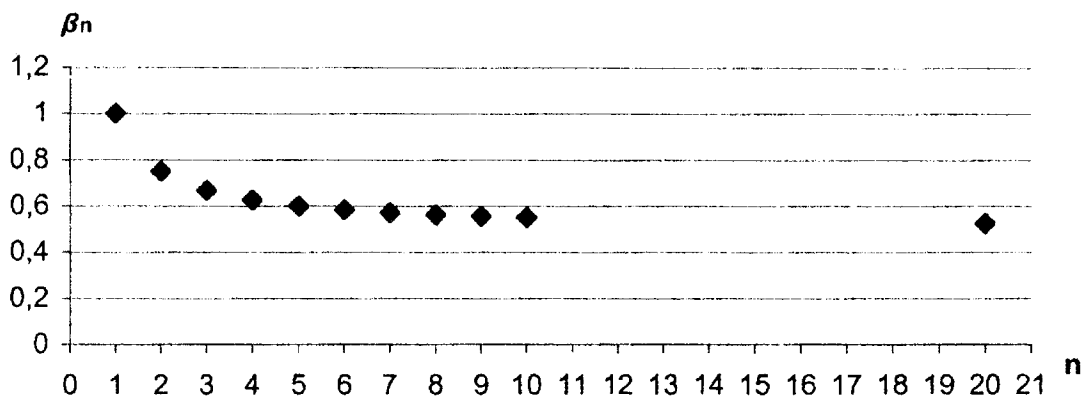
otrzymano

$$\sigma_{krn}^{(gl)} = \beta_n \sigma_{kr1}^{(gl)} \quad (9)$$

Wartości współczynnika  $\beta_n$  dla  $n=1,2,\dots,\infty$  podano w tabelicy 2 i przedstawiono na wykresie (rys.4).

Tabela 2

$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$	$\beta_5$	$\beta_6$	$\beta_7$	$\beta_8$	$\beta_9$	$\beta_{10}$	$\beta_{20}$	$\beta_\infty$
1,000	0,750	0,667	0,625	0,600	0,583	0,571	0,562	0,555	0,550	0,525	0,500



**Rys. 4 Wykres współczynnika stateczności globalnej  $\beta_n$  w funkcji  $n$**

## 5. NOŚNOŚĆ GRANICZNA

Założmy, że wymiary rozpatrywanych słupów zostały tak dobrane, aby ich wyboczenie globalne nie wystąpiło lub naprężenie krytyczne wyboczenia globalnego było co najmniej kilkanaście razy większe od naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego. Przy takim stosunku  $\sigma_{kr}^{(gl)} / \sigma_{kr}^{(lok)}$  nie powinno wystąpić wyboczenie interakcyjne. Aby ocenić wpływ ilości komórek  $n^2$  na stateczność lokalną i nośność ściskanych słupów kwadratowych o stałym polu powierzchni przekroju poprzecznego, przeprowadzono obliczenia numeryczne słupów o następujących danych:  
 $E=2,05 \cdot 10^5$  MPa;  $\nu=0,3$ ;  $R_e=300$  MPa;  $t_1/b_1=0,01$ ;  $l \gg b_1$ .

Stosunki grubości ścian do ich szerokości w słupach wieloobwodowych wyznaczono ze wzoru:

$$\frac{t_n}{b_n} = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{t_1}{b_1} \quad (10)$$

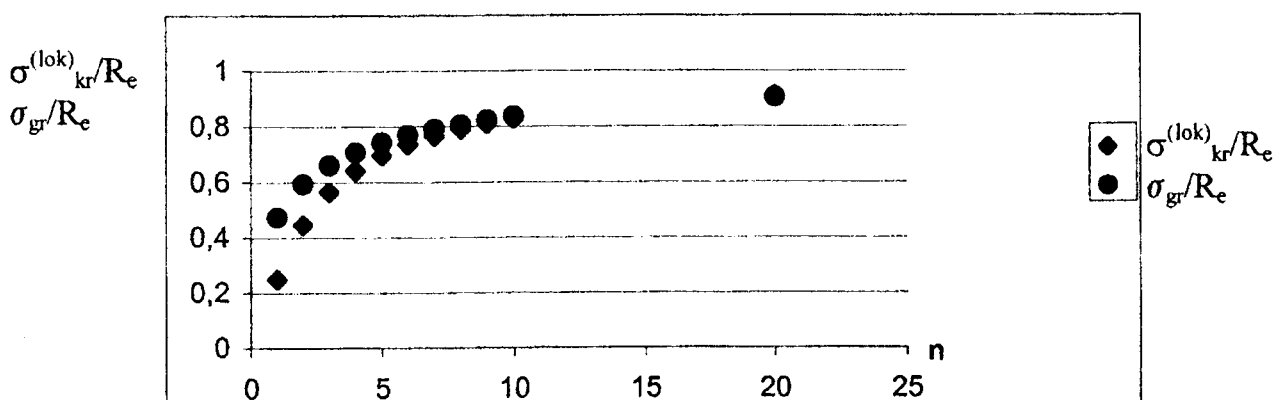
Obliczenia przeprowadzono programem komputerowym opracowanym przez K. Kowal-Michalską i R. Grądzkiego [3]. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 3 i pokazano w postaci wykresów na rys. 5.

Charakterystykę pracy słupa jednoobwodowego  $\left(\frac{t_1}{b_1} = 0,01\right)$  i słupa o bardzo dużej liczbie komór  $\left(\frac{t_\infty}{b_\infty} = 0,02\right)$ , przedstawiono na rys. 5. Przez S oznaczono względne skrócenie słupa o długości równej jednej półfali ( $S=u/b_1$ ). Bezwymiarowe naprężenie graniczne  $\sigma^* = \frac{\sigma_{gr}}{Re}$  przedstawiono w funkcji  $S^*=S/Se$  gdzie  $Se=Re/E$ .

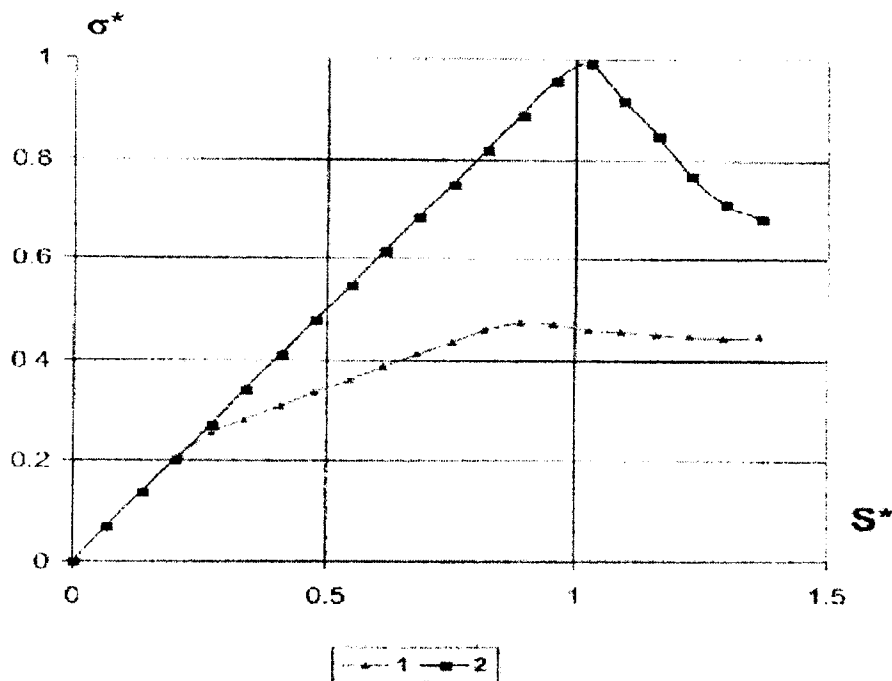
Tabela 3

n	1	2	3	4	5	6	7
$t_n/b_n$	0.0100	0.0133	0.0150	0.0160	0.0167	0.0175	0.0177
$\sigma_{kr}^{(lok)}/Re$	0.25	0.444	0.563	0.640	0.695	0.735	0.765
$\sigma_{gr}/Re$	0.473	0.593	0.660	0.706	0.742	0.768	0.790

n	8	9	10	20	$\infty$
$t_n/b_n$	0.0178	0.0180	0.0181	0.0190	0.0200
$\sigma_{kr}^{(lok)}/Re$	0.790	0.810	0.827	0.907	1.000
$\sigma_{gr}/Re$	0.805	0.822	0.836	0.903	0.985



**Rys. 5 Stateczność lokalna i nośność graniczna cienkościennych słupów wieloobwodowych.**



Rys. 6. Charakterystyka pracy słupów jedno i wieloobwodowego o takich samych polach powierzchni przekroju poprzecznego 1 –  $b/t=100$ , 2 –  $b/t=50$ .

## 6. WNIOSKI

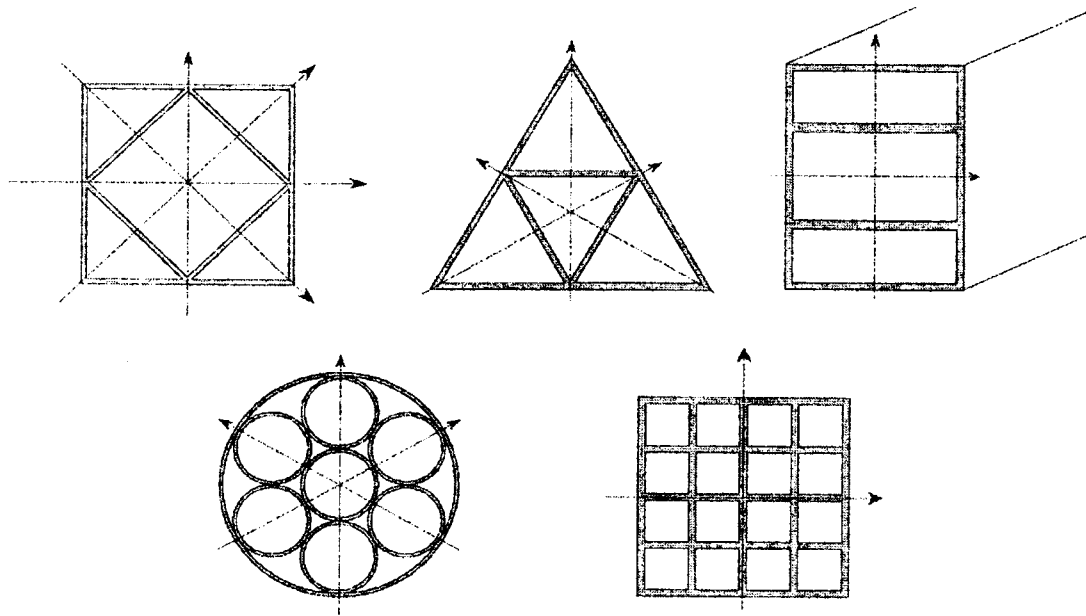
Niniejsza praca jest pierwszym etapem analizy stateczności i nośności granicznej cienkościennych słupów o przekroju poprzecznym wieloobwodowym. Przeanalizowano w niej stateczność lokalną i globalną oraz nośność graniczną idealnych (bez imperfekcji) równomiernie ściskanych izotropowych słupów cienkościennych o przekrojach kwadratowych (rys. 1 i 2) o takich samych polach powierzchni przekroju poprzecznego.

Na podstawie przeprowadzonej analizy wykazano, że:

- naprężenie krytyczne wyboczenia lokalnego  $\sigma_{kr}^{(lok)}$  cienkościennego słupa o przekroju jednoobwodowym (skrzynkowym) jest cztery razy mniejsze niż słupa z dużą liczbą kwadratowych komór;
- naprężenie krytyczne wyboczenia globalnego słupa jednoobwodowego jest dwa razy wyższe niż słupa z dużą liczbą komór;
- nośność graniczna słupa stalowego wieloobwodowego z dużą liczbą komór, wykonanego ze stali o granicy plastyczności  $R_e=300\text{MPa}$  jest około dwa razy większa niż słupa jednoobwodowego o  $t_1/b_1=0,01$ .

Przeprowadzona analiza wykazuje, że stosowanie słupów wieloobwodowych może w istotnym stopniu zmniejszyć ciężar konstrukcji (zużycie materiałów), zwłaszcza w słupach, w których wyboczenie globalne nie występuje (np. w słupach krótkich).

W dalszych etapach pracy przewiduje się analizę stateczności i nośności słupów wieloobwodowych o różnych kształtach przekroju poprzecznego (rys. 7), wykonanych z materiałów izotropowych i ortotropowych (kompozytowych). Obliczenia numeryczne, w przypadku złożonych kształtów przekroju poprzecznego i różnych grubości ścian, prowadzone będą metodą elementów skończonych.



Rys.7. Różne kształty przekroju poprzecznego słupów wieloobwodowych.

Niektóre otrzymane wyniki obliczeń numerycznych weryfikowane będą modelowymi badaniami doświadczalnymi. W analizie uwzględniony zostanie wpływ imperfekcji lokalnych ścian oraz imperfekcje globalne osi słupów na ich stateczność i nośność.

#### LITERATURA

- [1] Heung-Soo Kim: New extruded multi-cell aluminium profile for maximum crash energy absorption and weight efficiency. *Thin-Walled Structures* 2002, 20, 311-327.
- [2] Chen W., Wierzbicki T.: Relative merits of single cell, multi-cell and foam-filled thin-walled structures in energy absorption. *Thin-Walled Structures* 2001, 39, 287-306.
- [3] Grądzki R., Kowal-Michalska K., Ultimate load of laminated plates subjected to simultaneous compression and shear, *The Archive of Mechanical Engineering*, Vol.XLVIII, 3, 2001

### **STABILITY AND ULTIMATE LOAD OF MULTI-CELL THIN-WALLED COLUMNS SUBJECTED TO UNIFORM COMPRESSION (CONSISTING OF SQUARE MODULI)**

In the paper the analysis of local and global stability and ultimate load of uniformly compressed multi-cell isotropic columns is carried out. The columns considered are of constant cross-section with square shape of the cells. The results of the analysis including the influence of the number of cells on the stability and the ultimate load are presented in the figures. The significant increase of the resistance to local buckling has been noticed for columns with higher number of cells.