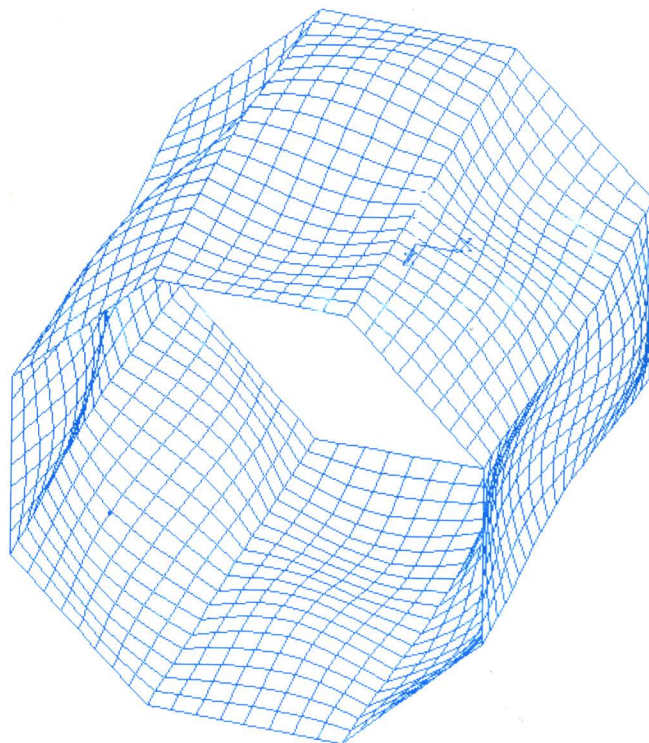


**STABILITY OF STRUCTURES
XTH SYMPOSIUM**



**X
S Y M P O Z J U M
S T A T E C Z N O Ś C I
K O N S T R U K C J I**

ZAKOPANE 8-12 WRZEŚNIA 2003

Biblioteka Główna PŁ
Termin zwrotu książki

5 - LUT. 2006

3 1 LIP. 2006

14 GRU. 2009

16 GRU. 2009

0 6 LIP. 2011

X SYMPOZJUM STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI

**Patronat honorowy
JM Rektor Politechniki Łódzkiej
prof. dr hab. inż. Jan Krysiński**

**Redakcja
Katarzyna Kowal-Michalska
Zbigniew Kołakowski**

Organizatorzy

- Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
- Zespół Stateczności Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN
- Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej

Zakopane, 8 - 12 września 2003

KOMITET NAUKOWY

Ryszard Grądzki, Stefan Joniak, Zbigniew Kołakowski, Katarzyna Kowal-Michalska, Vasily Krasowsky (Ukraina), Marian Królak – *przewodniczący*, Krzysztof Magnucki, Arkady Manevich (Ukraina), Janusz Murzewski, Wiesław Ostachowicz, James Rhodes (Wielka Brytania), Franciszek Romanów, Czesław Szymczak, Marek Trombski



97055

KOMITET ORGANIZACYJNY

Zbigniew Kołakowski – *przewodniczący*, Maria Kotelko, Tomasz Kubiak, Anna Kuźniarek, Jacek Świniarski, Jan Zaraś, Andrzej Żeligowski

Referaty (na prawach rękopisu) zostały zakwalifikowane do druku przez członków Komitetu Naukowego

Druk materiałów konferencyjnych został dofinansowany przez Komitet Badań Naukowych

ISBN 83-914019-2-8

Wydawca: Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej,
94-024 Łódź, ul. Stefanowskiego 1/15

tel.: (42) 636-49-85, (42) 631-22-14; fax.: (42) 631-22-17

Druk: Oficyna Drukarska Witold Kosmański, 95-200 Pabianice, ul. Św. Rocha 2A

tel.: (42) 215-72-82

Nakład 100 egz. Format B5.

Przedmowa

Jest to już X (dziesiąte) Jubileuszowe Sympozjum poświęcone tematyce konstrukcji prętowych i cienkościennych, ich stateczności, stanom zakrytycznym i nośności granicznej przy obciążeniach statycznych i dynamicznych w aspekcie teorii, zastosowań i badań doświadczalnych. Pierwsze Sympozjum Stateczności odbyło się czterdzieści lat temu, w maju 1963, roku, a zatem jest to podwójny jubileusz. Z tych względów patronat honorowy nad tym Sympozjum objął JM Rektor Politechniki Łódzkiej prof. dr hab. inż. Jan Krysiński.

Od wielu lat liczny udział gości zagranicznych z Wielkiej Brytanii, Ukrainy, Rosji i Japonii podkreśla rangę tej monotematycznej kameralnej konferencji.

Uczestnictwo w sympozjach pozwala na szeroką wymianę poglądów naukowców zajmujących się różnymi gałęziami stateczności konstrukcji. Sądzymy, że dyskusje wpłyną pozytywnie na twórcze i efektywne rozwiązywanie ważnych oraz interesujących pod względem naukowym, twórczym i praktycznym problemów pojawiających się w konstrukcjach cienkościennych.

Wygłoszone i opublikowane referaty, dyskusje naukowe na obradach i poza nimi, rozwój młodej kadry naukowej są rezultatami naszych sympozjów.

Szczególne podziękowanie należą się Autorom zgłoszonych referatów przeglądowych i problemowych za trud włożony w ich przygotowanie oraz Recenzentom z Komitetu Naukowego za sprawne i rzeczowe przygotowanie opinii.

Materiały jubileuszowego Sympozjum zawierają referaty przeglądowe opracowane przez zaproszonych przez Komitet Organizacyjny wybitnych naukowców, z Wielkiej Brytanii, Ukrainy i Polski, reprezentujących najnowsze kierunki rozwoju mechaniki. Pozostałe pięćdziesiąt trzy referaty zostały zamieszczone jako referaty problemowe. Obejmują one szeroką tematykę nieliniowej stateczności i dynamiki konstrukcji. Badano zarówno konstrukcje prętowe, kratowe, płytowe i powłokowe jedno- i wielowarstwowe, sandwichowe oraz periodyczne o konstrukcji ortotropowej. Przedmiotem badań była stateczność, stany zakrytyczne i nośność konstrukcji.

W kilku referatach omówiono także termosprężystość konstrukcji cienkościennych, optymalizację i wytrzymałość konstrukcji. Użyty aparat matematyczny w prezentowanych referatach może być w niektórych przypadkach łatwo adoptowany do wykorzystania przez inżynierów, zaś w innych wymaga doskonałej znajomości matematyki i jej zapisu. Obecnie obserwuje się coraz szersze zastosowanie metod czysto numerycznych do analizy stateczności konstrukcji

Na szczególną uwagę zasługują referaty omawiające badania doświadczalne, które ze względów na koszty, czas ich przygotowania i trwania

oraz złożoność są bardzo często zastępowane przez tak zwany eksperyment numeryczny. Symulacja numeryczna może ograniczyć zakres badań doświadczalnych, ale nie może ich wykluczyć.

Symposium zostało zorganizowane przez pracowników Katedry Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej, Zespół Stateczności Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN oraz Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. W tym miejscu pragniemy podziękować wszystkim, którzy przyczynili się do zorganizowania X Symposium Stateczności Konstrukcji w dniach 8-12 września 2003 roku w Zakopanem.

Na zakończenie pragniemy Autorom referatów i Uczestnikom X-ego Jubileuszowego Symposium życzyć dalszych sukcesów w pracy naukowej oraz zawarcia nowych i umocnienia przyjaznych kontaktów zawodowych i międzyludzkich.

*Marian Królak
przewodniczący Komitetu Naukowego*

*Zbigniew Kołakowski
przewodniczący Komitetu Organizacyjnego*

*Katarzyna Kowal-Michalska
redaktor*

Preface

That is the X (the tenth) Jubilee Symposium devoted to the domain of bar and thin-walled structures, their stability, post-buckling and load-carrying capacity under static and dynamic loads in the aspects of the theory, applications and experimental investigations. The first Stability of Structures Symposium took place forty years ago, in May 1963. Thus, we celebrate the double jubilee and for that reason the Symposium is held under the patronage of His Magnificence the Rector of the Technical University of Łódź Professor Jan Krysiński.

For many years the participation of foreign guests from Great Britain, Ukraine, Russia and Japan has raised the rank of this monothematic conference held in closed-circled atmosphere.

Participants of the Symposia have had the opportunity to exchange their views on the wide front of different branches of the stability of structures. The papers presented and published within preceding Symposia and also discussions conducted during sessions and informal meetings have contributed to the progress in the area of stability of structures and to the intellectual and scientific development of young researchers.

We believe that discussions during this Symposium will result in creative and effective solutions of many problems that appear in thin-walled structures and are important from both scientific and engineering point of view.

We express our special gratitude to all Authors of key-note lectures and papers for their hard work as well as we are extremely thankful all the Referees from the Scientific Committee for the efficient preparation of matter-of-fact references.

The Conference Proceedings contain key-note lectures prepared by eminent scientists from Great Britain, Ukraine and Poland representing the newest trends in mechanics, invited by the Organizing Committee. Other fifty three papers have been published as monothematic works concerning certain problems. They embrace a wide domain of the non-linear stability and dynamics of structures. The subjects under investigation were bar and truss structures, and also plate and shell structural members both one-layered and multi-layered, including sandwich elements and periodic orthotropic structures. The stability, post-buckling and load-carrying capacity of the structures mentioned above was investigated.

Some papers deal with thermo-elasticity of thin-walled structures, optimisation and also strength of structures. The mathematical apparatus applied in some of the presented papers can be easily adopted to be used in engineering analyses, but in some cases it demands a perfect knowledge of mathematics and mathematical notation. It should be underlined here that

nowadays one can observe the wider and wider applications of purely numerical methods in the analyses of the stability of structures.

A particular attention should be paid to the papers devoted to experimental investigations which are very often replaced by so called "numerical experiment" because of high cost, long time of preparation and conducting as well as their complexity. It is a dangerous trend since the numerical simulation can limit a range of experimental works successfully, but these works can not be entirely abandoned.

The Symposium has been organized by the staff of the Department of Strength of Materials and Structures, the Division of Stability of Structures, Committee of Machine Design of the Polish Academy of Sciences and the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, branch of Łódź. We would like here to pass on our sincere thanks to all, who have contributed to the organization of the X Stability of Structures Symposium held in 8-12 September 2003 at Zakopane.

Finally, we wish the Authors of papers and all Participants of the X Jubilee Symposium many further success in research. We hope you to maintain old friendship and professional contacts as well as make new friends.

Marian Królak
Chairman of the Scientific Committee

Zbigniew Kołakowski
Chairman of the Organizing Committee

Katarzyna Kowal-Michalska
Editor

SPIS TREŚCI - CONTENTS

Jubileusz Czterdziestolecia Sympozjów Stateczności Konstrukcji 1963-2003	13
Fortieth Anniversary of Stability of Structures Symposia 1963–2003	15
Autorzy referatów wydrukowanych w materiałach konferencyjnych w latach 1963-2003	17
<i>Authors of papers published in the symposia proceedings (1963-2003)</i>	
Komitety Naukowe Sympozjów w latach 1963-2003	23
<i>Scientific Committees (1963-2003)</i>	
Komitety Organizacyjne Sympozjów w latach 1963-2003	24
<i>Organizing Committees (1963-2003)</i>	
<u>Referaty przeglądowe - <i>Keynote lectures</i></u>	25
V.Z. Gristchak - Hybrid asymptotic approaches with application to the stability and dynamics of structures	27
D. H. Nash, J. Spence - The buckling and collapse behaviour of saddle supported vessels	43
J. Rhodes - On the development of simple user friendly microcomputer programs for structural analysis. Some personal thoughts	57
Cz. Szymczak - A review of stability problems of thin-walled structures developed at Gdańsk University of Technology	69
J. Zielnica - A survey on stability analysis of elastic-plastic plates and shells	79
<u>Referaty problemowe – <i>Session papers</i></u>	91
W. Banasiak, M. Taczała - Buckling of all-steel sandwich panels	93
W. Barnat - Problemy niestateczności termosprężystej w mechanizmach ciernych ze szczególnym uwzględnieniem własności materiałów i obudów sprzęgieł <i>Problems of sedateness in friction- mechanisms with special regard of property of materials and of casings of clutches</i>	99
E. Baron - Nieasymptotyczne modelowanie zagadnień stateczności średniej grubości płyt uniperiodycznych <i>Nonasymptotic modelling of the stability problems for a uniperiodic medium-thickness plate</i>	107
J. Chróścielewski, I. Lubowiecka, W. Witkowski - Some remarks about numerical stability in non-linear dynamics on the basis of truss structures	115
A. Chudzik, J. Świniarski - Wpływ zmian grubości płyty perforowanej wymiennika ciepła na stateczność konstrukcji <i>Effect of changes in the thickness of a perforated plate of the heat exchanger on its structural stability</i>	121

M. Dacko, W. Barnat - Wpływ wzrostu temperatury na powierzchniach ciernych na stateczność tarczy hamulcowej szybkobieżnego pojazdu gąsienicowego <i>Influence of height of temperature on friction - surfaces on sedateness of brake - disk of high-speed caterpillar vehicle</i>	129
J. Dymkowska, A. Borisovich, Cz. Szymczak - Bifurkacje w zagadnieniu von Kármána dla prostokątnej płyty na podłożu nieliniowo sprężystym <i>Bifurcations in von Kármán problem for rectangular plate lying on nonlinear elastic foundation</i>	137
G.D. Gavrylenko - Development of numerical and experimental methods of carrying capacity estimation of shells & comparison of their results	145
T.S. Gerasimov, V.Z. Gristchak - A hybrid WKBJ-variational technique with application to stability and dynamics of structures	151
R. Grądzki, K. Kowal-Michalska - Wpływ doboru warstw na stateczność i nośność ortotropowych płyt pięciowarstwowych <i>Influence of layers arrangement on stability and ultimate load of five-layered orthotropic plates</i>	157
V.Z. Gristchak, V.V. Lysenko - Solution of non-linear problems of structures with time dependent parameters on the basis of hybrid asymptotic method	165
M. Guminiak, R. Sygulski - Stateczność początkowa płyt cienkich w ujęciu metody elementów brzegowych <i>Initial stability of Kirchhoff plates by the boundary element method</i>	173
P. Iwicki - Analiza wrażliwości sił krytycznych pręta cienkościennego przy zmianach temperatury na podstawie normy PN-90/B-03200 <i>Sensitivity analysis of critical buckling load of thin-walled columns due to temperature change according to Polish Code PN-90/B-03200</i>	181
J. Jędrzyak - On a dynamical stability of thin periodic plates	187
S. Joniak - Nieliniowe zagadnienie stateczności powłoki półkulistej obciążonej momentem obrotowym <i>Non-linear stability problem of semi-spherical shell loaded with torque</i>	193
L. Kielski - Analiza stateczności regularnej konstrukcji prętowej <i>Analysis of stability of regular rod structure</i>	199
S. Konieczny, Sz. Langier, R. Mes - Stability of composite plates under varying axial forces	207
M. Kotelko, S. Lipa - Numeryczna analiza zniszczenia absorbera energii zbudowanego z rur cienkościennych poddanych zgniotowi <i>Numerical collapse analysis of tubular multi-member energy absorbers under lateral compression</i>	211
W. Krason, M. Wieczorek - Badania numeryczne nośności granicznej mostu pływającego <i>Numerical investigation of the load capacity of floating bridge</i>	219
V.L. Krasovsky, M.A. Varianichko, D.V. Nagorny - "Static resonance" phenomena in thin-walled cylindrical shells	227
M. Królak, R. Grądzki - Stateczność i nośność graniczna	235

<p>cienkościennych słupów wieloobwodowych poddanych równomiernemu ścisnaniu <i>Stability and ultimate load of multi-cell thin-walled columns subjected to uniform compression (consisting of square moduli)</i></p>	
T. Kubiak, Z. Kołakowski - Nośność cienkościennych konstrukcji kompozytowych <i>Carrying capacity of thin-walled composite structures</i>	243
T. Kubiak, T. Niezgodziński - Analiza stateczności cienkościennych dźwigarów skrzynkowych obciążonych cieplnie <i>Stability of thin-walled girders subjected to thermal load</i>	251
M. Macdonald, J. Rhodes, M. Kotelko - Behaviour of stainless steel columns under combined bending and axial compression loading	259
K. Magnucki, P. Stasiewicz - Wyboczenie sprężyste belki porowatej <i>Elastic buckling of a porous beam</i>	267
A.I. Manevich, Z. Kołakowski - Interaction of global and local modes at free oscillations of compressed thin-walled beams	275
R. Mania - Wpływ modułu sprężystości postaciowej na stateczność płyt trójwarstwowych <i>The influence of a shear modulus of elasticity on the sandwich plate buckling</i>	283
J. Marcinowski, T. Socha - Wyznaczenie czasu krytycznego w problemie stateczności lepkosprężystej kratownicy Misesa <i>Determination of critical time in stability problem of viscoelastic Mises truss</i>	291
K. Mazur-Śniady, Cz. Woźniak - A 2d-model for the stability of elastic plates with a periodic structure	299
B. Michalak - Stateczność płyt kompozytowych z niejednorodnym rozkładem składników <i>Stability of composite plates with non-uniform distribution of constituents</i>	305
J. Misiak, S. Stachura - Analiza stateczności dźwigara prętowego <i>Stability analysis of truss girder</i>	309
A. Muc - Buckling analysis and optimal design of axially compressed composite plates in a fuzzy environment <i>Wyboczenie i optymalizacja ściskanych płyt kompozytowych w ujęciu teorii zbiorów rozmytych</i>	317
A. Muc, T. Fugiel - Non-linear approach in design of composite structures <i>Efekty nieliniowe w projektowaniu struktur kompozytowych</i>	323
J. Murzewski - Niestateczność i efekty drugiego rzędu masztów stalowych <i>Instability and second order effects of steel masts</i>	331
W. Nagórko, Cz. Woźniak - A nonasymptotic model for the stability analysis of stiffened plates	339
P. Paczos, J. Zielnica - Zagadnienie utraty stateczności powłok dwuwarstwowych <i>The problem of stability loss of bilayered conical shells</i>	345
D. Pawlus - Krytyczne obciążenia statyczne trójwarstwowych płyt	353

	pierścieniowych	
	<i>Critical static stress of three-layered annular plates</i>	
D. Pawlus	- Stateczność dynamiczna warstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym	359
	<i>Dynamic stability of three-layered annular plate with elastic or viscoelastic core</i>	
S. V. Raksha	- Three-criteria optimization of compressed and bent thin-walled beams-columns	367
F. Romanów, P. Najdychor	- Post-critical state of compressed plate within the framework of bi-nonlinear theory	373
S. Shimizu, N. Iwamoto	- Behaviour of a concrete filled steel box column with considering delamination of steel-concrete interface	379
E. Szymczyk, M. Wieczorek	- Analiza stateczności i wytrzymałości granicznej warstwowego elementu prętowego	385
	<i>Stability and strength analysis of layered beam element</i>	
A. Teter, Z. Kołakowski, T. Kubiak	- Wyboczenie cienkościennych konstrukcji kompozytowych z żebrami pośrednimi	391
	<i>Buckling of thin-walled composite structures with intermediate stiffeners</i>	
B. Tomczyk	- Stability of thin uniperiodic cylindrical shells	399
L. Tomski, I. Podgórska-Brzdękiewicz, J. Szmidla	- Drgania i stateczność kolumn poddanych obciążeniu uogólnionemu z siłą skierowaną do bieguna z uwzględnieniem podatności węzłów konstrukcyjnych	407
	<i>Stability and vibration of columns under generalised load directed towards a pole with flexible constructional joints</i>	
L. Tomski, J. Szmidla, M. Gołębiowska – Rozanow, A. Kasprzycki	- Drgania i stateczność kolumny liniowej i geometrycznie nieliniowej obciążonej siłą skierowaną do bieguna (aproksymacja kolumny Becka)	415
	<i>Stability and vibration of centripetally loaded geometrically linear and non-linear columns (Beck's column approximation)</i>	
M. Wieczorek, K. Kosiuczenko	- Wpływ sposobu modelowania właściwości materiału na wyliczoną twardość Brinella	423
	<i>Influence of the material modelling procedure on the calculated hardness</i>	
E. Wierzbicki, Cz. Woźniak	- On the modelling of stability problems for microperiodic solids and structures	429
L. Witek	- Eksperymentalna analiza stateczności skręcanej powłoki walcowej wzmocnionej profilami zamkniętymi	437
	<i>Experimental analysis of stability of thin-walled cylindrical shell reinforced by stringers in the shape of closed formers</i>	
L. Witek	- Numeryczna analiza stateczności oraz nośności granicznej skręcanej powłoki walcowej wzmocnionej profilami zamkniętymi	443
	<i>Numerical analysis of stability and destructive load of thin-walled cylindrical shell reinforced by stringers in the shape of closed formers</i>	
W. Witkowski, Cz. Szymczak, I. Lubowiecka, J. Chróścielewski		451

- Torsional buckling of thin-walled I-beam column with warping stiffeners
- M. Woźniak, K. Błażejowski** - Stateczność sprężystej belki współdziałającej z poprzecznie periodycznym lepkosprężystym podłożem 457
On a stability of an elastic beam interacting with a transversally periodic viscoelastic subsoil
- Yu.D. Zozulyak** - Simulation and optimization of dynamic processes in thin-walled shells in a three-dimensional approximation 465

JUBILEUSZ CZTERDZIESTOLECIA SYMPOZJÓW STATECZNOŚCI KONSTRUKCJI 1963-2003

W dniu 25 maja 1963 roku odbyło się skromne jednodniowe I Sympozjum Stateczności Konstrukcji, na którym wygłoszono 7 referatów i wzięło w nim udział 27 uczestników. Materiały konferencyjne w postaci cienkiej broszury, zawierające jednostronicowe streszczenia wygłoszonych referatów, wydano metodą powielaczową. Konferencja została zorganizowana przez Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej przy współudziale Włodzimierza Derskiego, Jerzego Głuzy, Kazimierza Grossmana, Jerzego Leyko, Zdzisława Parszewskiego, Jana Szmeltera.

Kolejne dwa Sympozja odbyły się w cyklu ośmioletnim.

II Sympozjum Stateczności Konstrukcji miało miejsce w Łodzi w dniach 18-19 listopada 1971 roku, w którym uczestniczyło 90 osób. Wygłoszono 24 referaty. Materiały konferencyjne opublikowane w postaci streszczenia referatów zawierały 50 stron. Organizatorem Sympozjum był Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej kierowany przez prof. Jerzego Leyko oraz Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej. Profesor Jerzy Leyko był twórcą uznanej w kraju „łódzkiej szkoły stateczności konstrukcji” i zainicjował organizację sympozjów stateczności konstrukcji z udziałem gości zagranicznych. Przewodniczył Komitetem Organizacyjnym kilku pierwszych sympozjów, które na stałe weszły do kalendarza imprez naukowych organizowanych w kraju.

Tematyka wszystkich sympozjów obejmowała:

- konstrukcje prętowe: belki, słupy, ramy, kratownice;
- konstrukcje cienkościenne: płytowe, powłokowe;
- stateczność, stany zakrytyczne i nośność graniczną konstrukcji cienkościennych;
- stateczność przy obciążeniach dynamicznych;
- wyboczenie sprzężone;
- numeryczną symulację i modele obliczeniowe stanów granicznych;
- badania doświadczalne.

W dniach 26-27 października 1979 roku w Łodzi odbyło się III Sympozjum Stateczności. Od tego momentu stałym współorganizatorem sympozjów został Zespół Stateczności Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN. Ponadto współorganizatorem jedynie III Sympozjum była Sekcja Wytrzymałości Materiałów SIMP Oddziału Łódzkiego. Na konferencji tej podjęto decyzję o organizowaniu sympozjów co trzy lata.

Stan wojenny uniemożliwił zorganizowanie IV Sympozjum Stateczności w 1982 roku. Odbyło się ono trzy lata później w Sulejowie w dniach 9-11 października 1985 roku. Od tej chwili referaty zaczęły być publikowane w formie materiałów konferencyjnych.

Kolejne sympozja miały miejsce:

- V Sympozjum 3-7 X 1988 r. w Cedzynie koło Kielc;
- VI Sympozjum 5-8 XI 1991 r. w Spale;
- VII Sympozjum 7-9 XII 1994 r. w Jaworzu koło Bielska-Białej;
- VIII Sympozjum 22-26 IX 1997 r. w Zakopanem;
- IX Sympozjum 25-29 IX 2000 r. w Zakopanem;

Jubileuszowe X Sympozjum odbywa się w dniach 8-12 IX 2003 r. w Zakopanem.

Współorganizatorem sympozjów po 1991 roku jest Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji utworzona po podziale Instytutu Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej na trzy katedry.

Sprawna organizacja nie byłaby możliwa, gdyby nie ofiarna praca członków Komitetów Organizacyjnych w okresie przygotowawczym oraz podczas samych sympozjów. Prawie wszyscy byli lub są członkami Oddziału Łódzkiego Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej oraz jednocześnie są pracownikami różnych jednostek organizacyjnych PŁ. W tym miejscu należy wspomnieć, że X Sympozjum Stateczności przypada w 45-lecie powstania PTMTS oraz niektórych jego oddziałów, w tym Oddziału Łódzkiego.

Udział gości zagranicznych w sympozjach stateczności, a głównie prof. Jamesa Rhodesa oraz uznanie poziomu naukowego prac prowadzonych przez „ośrodek łódzki” zaowocował powierzeniem Katedrze Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej współorganizowania Third International Conference on Thin-Walled Structures w Tomaszewicach koło Krakowa w dniach 5-8 czerwca 2001 roku. Współorganizatorami byli Department of Mechanical Engineering University of Strathclyde oraz College of Aeronautics Cranfield University w Wielkiej Brytani.

W czterdziestą rocznicę Sympozjów Stateczności Konstrukcji pragniemy bardzo gorąco podziękować i przekazać wyrazu szacunku wszystkim ich uczestnikom. Jednocześnie pragniemy przywołać pamięć i złożyć hołd nieżyjącym już uczestnikom naszych sympozjów. W szczególnej pamięci zachowamy postać prof. Jerzego Leyko.

Poniżej przedstawiono pełną dokumentację dotyczącą organizatorów, autorów referatów oraz członków komitetów naukowych i organizacyjnych. Komitety naukowe zaczęto powoływać od VII Sympozjum.

ORGANIZATORZY SYMPOZJÓW

- Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Łódzkiej: *II-VI*
- Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej: *VII-X*
- Oddział Łódzki Polskiego Towarzystwa Mechaniki Teoretycznej i Stosowanej: *I-X*
- Zespół Stateczności Konstrukcji Komitetu Budowy Maszyn PAN: *III-X*
- Sekcja Wytrzymałości Materiałów Stowarzyszenia Inżynierów Mechaników Polskich (SIMP) Oddziału Łódzkiego: *III*

Fortieth anniversary of Stability of Structures Symposia 1963 – 2003

The First Stability of Structures Symposium took place on 25th of May 1963 in Łódź. It was a modest, one-day conference, within which 7 papers were presented and 27 participants took part in. The proceedings in the form of a thin brochure contained only abstracts of presented papers and were published using an old fashioned duplicator. The Symposium was organized by the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics (branch in Łódź) with the supportive co-operation of Professors: Włodzimierz Derski, Jerzy Gluza, Kazimierz Grossman, Jerzy Leyko, Zdzisław Parszewski and Jan Szmelter. The subsequent two Symposia were held in 8-years intervals.

The Second Symposium took place in Łódź on 18-19 November 1971. There were 90 participants and 24 papers were presented. The proceedings contained 50 pages of abstracts. The organizers of this Symposium were Institute of Applied Mechanics, Technical University of Łódź (TUL), headed by Professor Jerzy Leyko and the Łódź Branch of the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics. Professor Jerzy Leyko was an originator of the “the stability of structures school of Łódź” well recognized in Poland. It was also him, who initiated the organization of Stability of Structures Symposia with the participation of foreign guest researchers working in the domain of stability of structures. He was a chairman of several symposia, which became permanent events of the calendar of Polish scientific conferences.

Main topics of all symposia embraced following areas:

- bar structures: beams, columns, frames and trusses,
- thin-walled structures: plates and shells,
- stability, post-buckling and load-capacity of thin-walled structures,
- dynamic stability of structures,
- coupled instabilities,
- numerical simulation and computational models of limit states,
- experimental investigations.

The next, IIIrd Stability of Structures Symposium took place on October 26-27 1979 in Łódź. Since then the Division of Stability of Structures, Committee of Machine Design of the Polish Academy of Sciences has been becoming a permanent co-organizer of Symposia. Moreover, a co-organizer of that particular IIIrd Symposium was the Division of Strength of Materials and Structures of the Society of Polish Mechanical Engineers (Branch of Łódź). It was that Symposium, at which a decision has been taken to organize the Symposia every three years.

The well known turbulent historical events in Poland and the Martial Law proclaimed by the communist government of that time made impossible to organize the IVth Symposium in 1982. It eventually was held three years later, on 9-11 of October 1985 in Sulejów on Pilica river. Since then the Proceedings have been containing not abstract only, but full papers to be presented at a Symposium.

The next Symposia were held as follows:

- V Symposium on 3-7 October 1988 at Cedzyna near Kielce (southern Poland)
- VI Symposium on 5-8 November 1991 at Spała on Pilica river (near Łódź),
- VII Symposium on 7-9 November 1994 at Jaworze (near Bielsko-Biała) in Beskidy Mountains,

- VIII Symposium on 22-26 September 1997 in Zakopane (the capital of the Polish Tatra Mountains),
- IX Symposium on 25-29 September 2000 in Zakopane.

The main organizer of the Symposia since the year 1991 has been the Department of Strength of Materials and Structures of the Technical University of Łódź, after the division of the former Institute of Applied Mechanics into three departments.

An efficient organization of the Symposia would be impossible without the dedicated work of all members of the Organizing Committees both in the stage of preparation and during the Symposia. Nearly all of them are or used to be members of the Łódź Branch of the Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics (PTMTS) and at the same time are members of staff of different departments of the Technical University of Łódź. It should be underlined here, that the Xth Symposium falls on the 45th anniversary of the PTMTS and some branches of this Society, including the Branch of Łódź.

The participation of foreign guests from the United Kingdom (particularly Professor James Rhodes from the University of Strathclyde, Scotland), Ukraine, Slovakia and Japan in the Stability of Structures Symposia, as well as the recognition of high scientific level of research conducted in the “Łódź Centre of Stability of Structures” has fructified in the decision taken by the Scientific Committee of International Conferences on Thin-Walled Structures to entrust the organization of the Third Conference to the Department of Strength of Materials and Structures, TUL. The Third International Conference on Thin-Walled Structures took place on 5-8 of June 2001 at Tomaszewice near Krakow. The co-organizers were Department of Mechanical Engineering of the University of Strathclyde and the College of Aeronautics of the Cranfield University, both from United Kingdom.

On the 40th anniversary of the Stability of Structures Symposia we would like to express a very special gratitude for all their participants. At the same time we call our memory and we pay our homage to all late participants of the Symposia. We especially will keep in our remembrance the great personality of the late Professor Jerzy Leyko.

The full documentation of all Symposia, including organizers, authors of papers and members of both Organizing and Scientific Committees is presented below. Scientific Committees have been being appointed since the VII Symposium.

ORGANIZERS OF THE SYMPOSIA

- Institute of Applied Mechanics, TUL *II – VI*
- Department of Strength of Materials and Structures, TUL *VII-X*
- Polish Society of Theoretical and Applied Mechanics, Branch of Łódź *I – X*
- Division of Stability of Structures; Committee of Machine Design of the Polish Academy of Sciences *II – X*
- Division of Strength of Materials of the Society of Polish Mechanical Engineers, Branch of Łódź *III*

**AUTORZY REFERATÓW WYDRUKOWANYCH W
MATERIAŁACH KONFERENCYJNYCH
W LATACH 1963-2003
*AUTHORS OF PAPERS PUBLISHED IN THE SYMPOSIA
PROCEEDINGS (1963-2003)***

1. L. Adamiec II
2. I. Andrianov VII, VIII
3. H. Aurich III
4. M. Banasiak I
5. W. Banasiak X
6. W. Barnat IX, X
7. E. Baron VIII, IX, X
8. J. Bauer II
9. W. Berczyński III
10. P. Bereza VI
11. A. Biegus III
12. R. Bijak V
13. K. Błażejowski X
14. W. Bodaszewski VIII, IX
15. M. Bogdaniuk IX
16. A. Borisovich X
17. M. Bourdeix VIII
18. S. Bućko VIII
19. D. Bugajny II
20. E. Byskov VIII
21. L. Chodor V
22. C.D. Christensen VIII
23. J. Christoffersen VIII
24. J. Chróścielewski VIII, X
25. A. Chudzik X
26. Cz. Cichoń III, IV, IX
27. W. Cykowski VII
28. J. Czmochowski III, IV, V
29. G. Czun-hen I
30. R. Cwik VII
31. M. Dacko IX, X
32. R. Dąbrowski II
33. H. Dębski IX
34. F. Dinu VIII
35. J. Djubek V
36. Z. Dobiejewski IV
37. J. Drewko IV
38. D. Dubina VIII
39. C. Duong Nguyen III
40. J. Dymkowska X
41. S. Dzielendziak IV, V

42. A. Evkin VI, VII
43. M. Ferdynus VIII
44. A. Figiel V
45. G. Filatov VI
46. T. Fugiel IX, X
47. T. Gałkiewicz I, II, III, IV
48. R. Gancarek VII
49. G.D. Gavrylenko X
50. O. Gendelman VII
51. T.S. Gerasimov X
52. T. Gibczyńska VI
53. D. Giraud VIII
54. W. Głabisz VIII
55. Z. Głażewski VII
56. D. Goina VIII
57. Z. Golan V
58. M. Gołębiowska- Rozanow VIII, IX, X
59. R. Grądzki III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
60. D. Grecea VIII
61. S. Grishchak VI
62. V.Z. Gristchak VI, X
63. M. Guminiak X
64. W. Gutkowski II
65. M. Gwóźdź V, VIII
66. K-H. Hahn III
67. J. Hanćkowiak IX
68. P. Hémon VIII
69. B. Husiar II
70. N. Iwamoto X
71. P. Iwicki IX, X
72. J. Jachimowicz IX
73. S. Jakubowski III, V, VI
74. S. Janecki III
75. M. Janowski III, IV
76. F. Jarzyński III
77. A. Jaworski II
78. J. Jędrysiak VIII, IX, X
79. S. Joniak II, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
80. A. Kabała IV, V
81. T. Kacperski V
82. M. Kameko IX
83. R. Kasperska IX
84. T. Kasprzak IX
85. A. Kasprzycki X
86. W. Kąkol V
87. A. Kelm III
88. S. Kędziora VIII
89. L. Kielski V, VIII, X

90. M. Klasztorny IV
91. K. Kluk III
92. M. Kłosowicz V
93. M. Kmieciak II, III, IV
94. J. Kobzdej III
95. I. Kogemyakina VIII
96. Z. Kołakowski III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
97. S. Konieczny V, VII, VIII, IX, X
98. L. Kopczyński V
99. H. Kopecki II, III, IV, IX
100. Z. Kordecki III, IV
101. K. Kosiuczenko X
102. V. Kostirko V, IX
103. M. Kotełko III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
104. Z. Kowal III
105. M. Kowalczyk VII
106. K. Kowal-Michalska III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
107. W. Krasoń IX, X
108. V. Krasovsky V, VI, VII, VIII, IX, X
109. M. Krawczuk VI, VII, VIII
110. J. Kriváček V
111. M. Królak III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
112. T. Kubiak VII, VIII, IX, X
113. J. Kukuczka III
114. R. Kutylowski III
115. R. Laboube VIII
116. S. Langier X
117. J. Lewiński III
118. J. Leyko III
119. S. Lipa X
120. J. Lipiński II
121. I. Lubowiecka VIII, IX, X
122. V.V. Lysenko X
123. W. Łaban III
124. S. Łukasiewicz II
125. P. Łuźniecki V
126. M. Macdonald VIII, IX, X
127. K. Magnucki III, V, VI, VII, VIII, IX, X
128. W. Majchrzak III
129. W. Majewski III
130. M. Malinowski VII, VIII
131. A. Manevich VI, VII, VIII, IX, X
132. E. Manevitch VII
133. L. Manevitch VII
134. O. Manhes VIII
135. R. Mania III, IV, V, X
136. B. Mańko IV
137. Z. Mańko III

138. J. Marcinowski IX, X
139. M. Matyash VIII
140. S. Mazur V, VI, VII, IX
141. K. Mazur-Śniady VIII, X
142. R. Mes X
143. B. Michalak VIII, X
144. G. Mielczarek VII
145. T. Mikulski IX
146. J. Misiak III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
147. A. Muc VII, VIII, IX, X
148. K. Murawski VI, VII
149. J. Murzewski II, V, VI, VII, VIII, IX, X
150. W. Nagórko X
151. D.V. Nagorny X
152. D. Nash VIII, X
153. P. Najdychor X
154. T. Niezgodziński IX, X
155. J. Obrębski VIII, IX
156. W. Ostachowicz III, IV, VI, VII, VIII
157. E. Ostrowska III
158. M. Ostwald III, V, VI, VII, IX
159. P. Paczos X
160. A. Paschnik VII
161. W. Pauk IX
162. Z. Pawicki IV
163. D. Pawlus VII, VIII, IX, X
164. J. Perz IV, V
165. J. Pieczara IV
166. M. Piekarczyk V
167. J. Piekarski VII
168. P. Pluciński IX
169. J. Podczerwiński IV
170. I. Podgórska-Brzdękiewicz VIII, X
171. J. Przybylski IV, VIII
172. W. Puch IX
173. E. Pytel III, IV
174. A. Raczyński IX
175. M. Radwańska III
176. S. Raksha IX, X
177. J. Ravinger VIII
178. J. Rhodes V, VIII, IX, X
179. F. Romanów III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
180. M. Roszkowski I
181. E. Rusiński III
182. K. Rzegocińska-Pelech III
183. F. Santi VIII
184. Z. Sekulski III
185. S. Shimizu IX, X

186. V. Shvayko VI, VII, VIII
187. T. Siegmüller V, VII
188. J. Siepak II, V, VI
189. G. Sobek VI
190. J. Sobiech V
191. K. Sobiesiak II
192. T. Socha X
193. J. Spence X
194. S. Spryszyński II
195. S. Stachura VI, VIII, IX, X
196. P. Stasiewicz VIII, IX, X
197. Z. Stojek II
198. L. Stricker III
199. A. Strzelczyk III
200. R. Sygulski III, IX, X
201. J. Szmelter I
202. J. Szmidła IX, X
203. R. Szmigielski III
204. W. Szcyc II, VIII, IX
205. Cz. Szymczak III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X
206. E. Szymczyk VI, VII, VIII, X
207. P. Śniady VIII
208. J. Świniarski X
209. E. Świtoński II
210. M. Taczała VII, VIII, X
211. V. Tarnovskij VI, VII, VIII, IX
212. J. Teisseyre III
213. E. Tertel VIII
214. A. Teter VII, VIII, IX, X
215. B. Tomczyk VIII, IX, X
216. L. Tomski IV, VIII, IX, X
217. M. Trombski II, III, V
218. M. Trzebicki VIII
219. W. Urbanowski I
220. M.A. Varianichko X
221. J. Walczak IV
222. W. Walczak II, III, IV, V
223. W. Walczyk IX
224. Z. Waszczyszyn II, III, IV
225. A. Wawrzyniak IX
226. S. Weiss IV
227. J. Weselak III
228. Z. Wesołowski I
229. M. Wieczorek IV, VI, VII, VIII, IX, X
230. E. Wierzbicki IX, X
231. J. Wierzchowski III
232. L. Witek X
233. W. Witkowski IX, X

- 234. S. Wojciech III, V
- 235. M. Wojtasiewicz VIII
- 236. Cz. Woźniak VII, VIII, IX, X
- 237. M. Woźniak VII, VIII, IX, X
- 238. Z. Wójcicki IV
- 239. P. Wrzecioniarz III, V, VI
- 240. S. Wu VIII
- 241. T. Yamamoto IX
- 242. A. Yevtushenko IX
- 243. W.W Yu VIII
- 244. J.S. Zacharzewski II, IX
- 245. S. Zahorski I
- 246. Z. Zając V
- 247. J. Zaraś III, V
- 248. J. Zielnica II, III, IV, V, VIII, IX, X
- 249. Yu.D. Zozulak X
- 250. W. Zwoliński II
- 251. A. Żak VIII
- 252. A. Żeligowski III, IV

**KOMITETY NAUKOWE SYMPOZJÓW
W LATACH 1963-2003
SCIENTIFIC COMMITTEES (1963-2003)**

- przewodniczący (chairman):* M. Królak VII-X
1. Cz. Cichoń VII, VIII
 2. T. Gałkiewicz VII, VIII, IX
 3. R. Grądzki X
 4. S. Joniak VII, VIII, IX, X
 5. Z. Kołakowski VII, VIII, IX, X
 6. K. Kowal-Michalska VIII, IX, X
 7. V. Krasovsky X
 8. M. Królak VII, VIII, IX, X
 9. J. Leyko VII
 10. K. Magnucki X
 11. A. Manevich VII, VIII, IX, X
 12. J. Misiak VII, VIII, IX
 13. J. Murzewski VII, VIII, IX, X
 14. W. Ostachowicz VII, VIII, IX, X
 15. J. Rhodes VII, VIII, IX, X
 16. F. Romanów VII, VIII, IX, X
 17. Cz. Szymczak VII, VIII, IX, X
 18. M. Trombski VII, VIII, IX, X

**KOMITETY ORGANIZACYJNE SYMPOZJÓW
W LATACH 1963-2003
ORGANIZING COMMITTEES (1963-2003)**

przewodniczący (chairman): J. Leyko I-III
M. Królak IV-VIII
Z. Kołakowski IX-X

1. M. Banasiak III
2. Z. Brzoska III
3. T. Gałkiewicz II, IV, V
4. Z. Gałwa VII, VIII
5. R. Grądzki IV, V, VI, IX
6. S. Jakubowski III, V
7. W. Kobza IV
8. Z. Kołakowski IV, V, VI, VIII, IX, X
9. M. Kotełko VI, VII, VIII, IX, X
10. K. Kowal-Michalska III, IV, V, VI, VII, VIII
11. M. Królak III, IV, V, VI, VII, VIII
12. T. Kubiak VII, VIII, IX, X
13. A. Kuźniarek IX, X
14. J. Leyko II, III, IV, V, VI
15. J. Lipiński II, III
16. S. Łukasiewicz III
17. E. Ostrowska III
18. J. Piątek III
19. M. Suchar II, III
20. J. Świniarski X
21. W. Walczak II, III
22. J. Zaraś IV, V, VII
23. A. Żeligowski V, VI, VII, VIII, IX, X

REFERATY PRZEGLĄDOWE

KEYNOTE LECTURES

HYBRID ASYMPTOTIC APPROACHES WITH APPLICATION TO THE STABILITY AND DYNAMICS OF STRUCTURES

V. Z. GRISTCHAK

Department of Applied Mathematics, Zaporizhzhia State University
Zhukovskogo 66, 69063 Zaporizhzhia, Ukraine

1. INTRODUCTION

It is very rarely possible to integrate analytically and precisely the differential equations, which arise in mechanics of deformable solid (the stability and dynamics problems of inhomogeneous thin-walled structures). Hence there is a necessity to formulate an effective approximate methods and approaches.

Among the analytical approximate techniques the direct variation approaches (Euler, Rayleigh - Ritz, Kantorovich etc.) and non-variation (Boobnov - Galerkin, perturbation methods) are well known and the most developed. The first class of methods is based on minimization principle of system energy (Lagrange, Hamilton principles) and is used to be applied for problems, which are formulated in variation form. The perturbation methods are convenient to use for solution the value problems for differential equations, which contain a scalar parameter ε (small or large).

The problems of stability and dynamics of inhomogeneous thin-walled structures can be reduced namely to the latter ones. Usually, a scalar parameter ε is introduced into the equation of the problem naturally or artificially. It may represent, for instance, non-dimensional eigenfrequency, the ratio of the smallest to the largest of structure's linear dimensions. In the shell theory the small parameter may characterize the ratio of the thickness or normal displacement to the radius, the ratio of the stiffness coefficients of constructive-orthotropic shell, etc. It may also define the small divergence of structure's initial form from circular, cylindrical, etc. forms.

The perturbation methods have at least two drawbacks. The first, less significant, is that, only a few terms in a perturbation expansion can be computed because of the rapidly increasing amount of "labor" that is required to compute each additional term. And the second one, much more significant is that, in order to obtain approximation of acceptable accuracy, the expansion parameter ε must be restricted.

That is why the approaches, which allow expanding the range of usage of the classical asymptotic techniques, so called the *hybrid* approaches, have recently attracted great attention of investigators. They are based on the idea of using some numeric techniques or perturbation expansions in conjunction with Boobnov-Galerkin or variation techniques. Among the hybrid approaches the following ones are well-known: Noor's reduced basis method [1-4], perturbation-Galerkin [5-8] and WKBJ-Galerkin [9], WKBJ-variation methods.

Here two different types of the hybrid techniques for the boundary value problems of mechanics, which can be reduced to linear or non-linear differential equations with variable coefficients and perturbation parameter near the highest derivatives are presented and discussed.

The first type, at the first step, the WKBJ-method is used to determine the approximate solution of the boundary value problem, containing a perturbation parameter ε . The obtained general WKBJ-solution is valid only for special values of the parameter (usually for small ones). At the second step, a subset of coordinate functions of WKBJ-expansion, determined at step one, is used with new “amplitudes” in a WKBJ type expansion, named as hybrid. The unknown amplitudes of the latter “refined” solution can be determined applying: a) the sufficient condition of existence an extremum of a functional, which realizes an equation of boundary value problem; b) the Boobnov-Galerkin procedure.

Proposed techniques allow to determine approximate analytical solutions of the problems with a high level of accuracy (much more accurate than the WKBJ-solution on which they are based). Yielded solutions are valid on the wide interval of perturbation parameter.

2. DESCRIPTION OF THE HYBRID TECHNIQUES BASED ON THE WKBJ METHOD

To describe the hybrid technique, based on the WKBJ-method in detail, let us consider the boundary value problem for linear differential equation of order n with variable coefficients, which contains a perturbation parameter ε near the highest derivatives:

$$L(x, \varepsilon, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

The function $y(x)$ is subjected to the boundary conditions of the simplest type

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B. \quad (2)$$

At step one, for small values of ε we use the WKBJ-method to find an approximate solution for $y(x)$ in the form

$$y_{WKBJ} = \exp \int_a^x \sum_{j=0} \varepsilon^{j-1} \psi_j dx \quad (3)$$

where $\{\psi_j\}$ are the unknown WKBJ-coordinate functions. These quantities can be determined in standard manner: we have to substitute the expansion (3) into equation (1), equate the coefficients of like powers of ε in the resulting equation, and solve a sequence of equations for each of the unknowns $\{\psi_j\}$.

As it was already mentioned, the WKBJ-method, being one of the perturbation techniques, suffers the same drawbacks. Thus, the terms $\{\psi_j\}$ of order $j > 1$ of WKBJ-expansion (3) can be computed only in number of cases. That is why, in applied problems, we usually determine ψ_0 and ψ_1 , that provides an acceptable accuracy of general WKBJ-solution of equation (1) when the values ε are really small. The biggest drawback of approximate solution, obtained with the help of the WKBJ-method, still lies in restricted range of its application, caused by the ε smallness. It means that when

ε ceases to be small the WKBJ-method yields the solution, which considerably differs from the numeric or exact solution of the problem (if it's available).

In the purpose to refine the latter one, at step two of the hybrid method, we use a subset of coordinate functions $\{\psi_j\}$ of WKBJ-expansion (3), determined at step one, in a WKBJ type expansion, named as hybrid:

$$\bar{y}_H = \exp \int \sum_{j=0}^N \delta_j \psi_j dx. \quad (4)$$

In formula (4) the $\{\delta_j\}$, $j=0, \dots, N$ represent new "amplitudes" of coordinate functions $\{\psi_j\}$. They should be such, that the general solution $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$, based on the expansion (4), "would correspond to the precise solution of the problem as much as possible". Let's formulate the principle of an optimal determining of the $\{\delta_j\}$.

A) The first principle is based on the idea to replace the initial boundary value problem (1), (2) by the variation problem an extremum of a functional, for which one equation (1) is an equation of the Euler or Euler-Poisson; to determine the function, which realizes an extremum of the functional; and by that to obtain the solution of the boundary value problem.

Let's assume that $V[y(x), \varepsilon]$ is the functional, for which the condition $\delta V[y(x), \varepsilon] = 0$ realizes equation (1) and different types of natural boundary conditions, including (2). In this case, instead of the problem (1), (2) there is the variation problem which consists in finding the function, delivering an extremum to functional $V[y(x), \varepsilon]$. The $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ is the general solution of equation (1), based on the hybrid expansion (3). If now to subject the $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ to appropriate boundary conditions (2), it will be the permissible function of the variation problem for any choice of the $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N$.

Substituting of the $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ into the functional $V[y(x), \varepsilon]$ transforms the latter one into the function of N variables

$$V[\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N), \varepsilon] = \varphi(\delta_0, \dots, \delta_N). \quad (5)$$

Then the sufficient condition of existence an extremum

$$\delta V[\bar{y}_H, \varepsilon] = 0 \quad (6)$$

transforms into the system of equation for each of the unknowns $\{\delta_j\}$, $j=0, \dots, N$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_0} \right|_{\delta_0=\delta_0^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_1} \right|_{\delta_1=\delta_1^*} = 0, \quad \dots \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_N} \right|_{\delta_N=\delta_N^*} = 0. \quad (7)$$

The solution of the system (7) yields such the subset of the values $\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*$, that function $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*)$ delivers the extremum to the functional $V[y(x), \varepsilon]$. Hence, this function $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*)$ is the required hybrid solution of the boundary problem (1), (2).

B) The second principle of an optimal choice the “amplitudes” $\{\delta_j\}$, $j = 0, \dots, N$ of expansion (4) is based on the Boobnov-Galerkin procedure. Thus, the requirement that the residual of equation (1) $R = L(x, \varepsilon, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n)})$ is orthogonal to each of the coordinate functions ψ_j , $j = 0, \dots, N$ over the domain of definition

$$\int_a^b R \psi_j dx = 0 \quad (8)$$

leads to the system of equations concerning unknowns $\{\delta_j\}$.

3. EXAMPLES OF APPLICATION TECHNIQUE

EXAMPLE 1- hybrid asymptotic method for the effect of the local thickness defects and the initial imperfections on the buckling of cylindrical shells under combined loading

It is well known that initial imperfections of shells may have a remarkable effect on the buckling load. Many authors discussed the effect of imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression as well as under external pressure. One can refer to the works by Koiter (1945, 1963), Amazigo and Budiansky (1972), Kan (1966), Volmir (1967), Gristchak (1976), Abdelmoula et al. (1992), Koiter et al. (1994) in details.

In many cases it is impossible to obtain an exact analytical solution of the problem. For this reason the applied mechanics problems are often solved by approximate analytical methods such as perturbation and variation ones. Some mechanical problems yield the governing ordinary differential equations with a parameter at leading derivative. This parameter is natural or is introduced in equations for convenience. In case when this parameter is small enough, one can use WKB method. In case when parameter at leading derivative accepts both large and small values, application of WKB method yields essential error in results. In order to reach an acceptable accuracy in results, asymptotic methods are used with numerical and variation ones. Thus hybrid WKB-Galerkin method allows to obtain solution of mechanical problem within a wide variation interval of parameter.

Following the considerations of Gristchak (1976), Koiter et al. (1994), Geer (1990), hybrid asymptotic methods are proposed for the effect of local thickness and geometric defects and the external pressure on the buckling of compressed shells.

In order to obtain an approximate solution to the buckling problem of a cylindrical shell with thickness and geometric defects we use the double asymptotic expansion technique that includes two steps. In the first step the stress function is presented as an expansion of the magnitude of the thickness defects in terms of a small parameter ε . In

the second step the first term in the obtained expansion is presented as an asymptotic expansion in a small parameter $\frac{\mu^2}{m^2}$ that indicates the thickness defect spread area.

We consider a circular cylindrical shell of the radius R , length L that is made of an isotropic, elastic material with Young's modulus E and Poisson's ratio ν . It is subjected to an axial compressive load P_0 and to an external pressure P_1 .

The governing equations of the pressurised non-uniform cylindrical shell are as follows (Koiter et al., 1994)

$$\begin{aligned} & \frac{Eh^3(x)}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) + \frac{3E}{12(1-\nu^2)} \left(2h(x)h'(x) + h^2(x)h''(x) \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{6E}{12(1-\nu^2)} h^2(x)h'(x) \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{3E}{12(1-\nu^2)} (1-\nu) \left(2h(x)h'(x) + h^2(x)h''(x) \right) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \\ & + P_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + P_1 R \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Eh(x)} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) - \frac{1}{E} \left(\frac{h''(x)h(x) - 2h'(x)^2}{h^3(x)} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \\ & - \frac{2}{E} \frac{h'(x)}{h^2(x)} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y^2} \right) + \frac{1+\nu}{E} \left(\frac{h''(x)h(x) - 2h'(x)^2}{h^3(x)} \right) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

where $x \in \left[-\frac{L}{2}; \frac{L}{2} \right]$ and $y \in [0; 2\pi R]$ are the axial and circumferential coordinates, respectively, $W(x, y)$ is the radial displacement (positive outward), $F(x, y)$ is the stress function, $h(x)$ is the shell thickness.

By introducing the following non-dimensional parameters

$$\xi = \frac{x}{L}, \eta = \frac{y}{L}, H(\xi) = \frac{h(x)}{h_0}, W^*(\xi, \eta) = \frac{W(x, y)}{h_0}, F^*(\xi, \eta) = \frac{F(x, y)}{D}, D = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu^2)},$$

where h_0 is the nominal thickness of the shell, D is the bending stiffness, the governing equations (1.1)-(1.2) can be rewritten into their non-dimensional form

$$\begin{aligned}
& H^3 \left(\frac{\partial^4 W^*}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 W^*}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 W^*}{\partial \eta^4} \right) + 3 \left(2HH'{}^2 + H^2 H'' \right) \left(\frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} \right) + \frac{L^2}{Rh_0} \frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} + \\
& + 6H^2 H' \left(\frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 W^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) - 3(1-\nu) \left(2HH'{}^2 + H^2 H'' \right) \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} + \\
& \frac{P_0 L^2}{D} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} + \frac{P_1 R L^2}{D} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \eta^2} = 0, \tag{1.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& H^2 \left(\frac{\partial^4 F^*}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 F^*}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 F^*}{\partial \eta^4} \right) + 2H'{}^2 \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} \right) - HH'' \left(\frac{\partial^2 F^*}{\partial \xi^2} - \nu \frac{\partial^2 F^*}{\partial \eta^2} \right) - \\
& - 2HH' \left(\frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^3 F^*}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) - \frac{12(1-\nu^2)L^2}{Rh_0} H^3 \frac{\partial^2 W^*}{\partial \xi^2} = 0. \tag{1.4}
\end{aligned}$$

We seek the solution to the initial equations in the following form

$$\left. \begin{aligned}
F^*(\xi, \eta) &= f(\xi) \cos\left(\frac{nL}{R}\eta\right) \\
W^*(\xi, \eta) &= w(\xi) \cos\left(\frac{nL}{R}\eta\right)
\end{aligned} \right\}, \tag{1.5}$$

where n is the wave number in the circumferential direction.

We assume that an axial compressive load P_0 exceeds an external load $P_1 R$ in such a manner that the shape formation corresponds to an axial compression. Thus an external load $P_1 R$ can be expressed as $P_1 R = \alpha P_0$, where $\alpha = \frac{P_1 R}{P_0}$ is the ratio ($0 \leq \alpha \leq 0,5$).

Substituting (1.5) into equations (1.3)-(1.4) and denoting

$$N = \frac{nL}{R}, z = \frac{L}{\sqrt{Rh_0}}, c = \sqrt{3(1-\nu^2)}, \lambda = \frac{P_0}{P_{cr}}, P_{cr} = \frac{Eh_0^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}, \tag{1.6}$$

where λ is the buckling load parameter, P_{cr} is the classical buckling load of the shell with constant thickness.

We consider the local thickness defects in the form

$$H(\xi) = 1 - \varepsilon \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right), \tag{1.7}$$

where $\varepsilon \ll 1$ and μ^2 are parameters indicating the amplitude magnitude of the thickness defects and the character of the defect location, respectively.

Given above form of local thickness defects is "local" in the sense that function (1.7) decays rapidly in the axial direction because of the exponential factor $\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right)$.

The buckling mode of a circular cylindrical shell can be written in the form

$$w(\xi) = [A \cos(m\xi) + B \cos(3m\xi)] \cdot \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right), \quad (1.8)$$

where $m = \frac{pL}{R}$, $p = \frac{p_0}{2}$ is the number of half-waves along the shell length, $p_0 = \sqrt{2c \frac{R}{h_0}}$.

The first term in the brackets is the buckling pattern that satisfies the boundary conditions of the simple support. The second term and modulating factor $\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right)$ are introduced in (1.8) as the local thickness defects may initiate the local buckling mode.

In order to obtain an approximate analytical solution of the compatibility equation (1.4) we shall use the double asymptotic expansion method described above.

The unknown function $f(\xi)$ we seek as a two-terms expansion on the small defect parameter ε

$$f(\xi) = \tilde{\varphi}_0(\xi) \exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\xi^2\right) + \varepsilon \tilde{\varphi}_1(\xi) \exp\left(-\mu^2\xi^2\right) + \dots \quad (1.9)$$

Taking into account that the wave number $p_0 = \sqrt{2c \frac{R}{h_0}}$ is large enough for thin shells, and respectively $m = \frac{pL}{R} \gg 1$ we may consider $\frac{\mu^2}{m^2} \ll 1$ being a small parameter.

The function $\tilde{\varphi}_0(\xi)$ can be represented as an asymptotic expansion on the small parameter $\beta^2 = \frac{\mu^2}{m^2}$ such as

$$\tilde{\varphi}_0(\xi) = \tilde{f}_0(\xi) + \beta^2 \tilde{f}_1(\xi) + \dots \quad (1.10)$$

Substituting expansions (1.9)-(1.10) into (1.4) and accounting (1.7)-(1.8) after collecting the coefficients with equal orders of parameters ε and β^2 we obtain a system with unknown functions $\tilde{f}_0(\xi)$, $\tilde{f}_1(\xi)$, $\tilde{\varphi}_1(\xi)$.

It should be noted that there are many coincident modes and the corresponding wavenumbers n and p are located on the Koiter's circle. We consider the case when the buckling mode has the same wavenumbers both in the axial and circumferential directions. Thus, in this case we have relations

$$p = n = \frac{p_0}{2}, \quad p_0^2 = 2c \frac{R}{h_0}, \quad cz^2 = 2m^2. \quad (1.11)$$

We apply the Boobnov-Galerkin procedure to equilibrium equation (1.3). Admittedly, it should be pointed out that in order to obtain analytical forms of all integrals in the solution we replace the finite limits of the integrals by infinite ones. It is possible as the process of deformation has the local character.

All integrals from (1.3) are the followers

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta^2 \tilde{\xi}^2) d\tilde{\xi} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}, & \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta^2 \tilde{\xi}^2) \cos(k\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{k^2}{4\beta^2}\right), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\xi} \exp(-\beta^2 \tilde{\xi}^2) \sin(k\tilde{\xi}) d\tilde{\xi} &= \frac{k\sqrt{\pi}}{2\beta^3} \exp\left(-\frac{k^2}{4\beta^2}\right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Here k as integer.

The Boobnov-Galerkin procedure yields the eigenvalue problem. After simplification we obtain an asymptotic formula for the critical buckling load parameter λ

$$\lambda = 1 - \left[\frac{\sqrt{2\varepsilon(1+K)} + \alpha}{1 + \beta^2 + \alpha} \right]. \quad (1.13)$$

As indicated in formula (1.13) the external pressure and the local thickness defects in the form (1.7) cause the reduction of critical buckling load parameter.

Obtained formula (1.13) enables us to get the values of the critical buckling load parameter λ when the external pressure is absent. In this case we put $\alpha = 0$ and get an asymptotic formula

$$\lambda = 1 - \left[\frac{\sqrt{2\varepsilon(1+K)}}{1 + \beta^2} \right]. \quad (1.14)$$

In Table 1 we compare the results corresponding to the buckling load parameter λ (formula (1.14)) for cylindrical shells with the local thickness defects in form (1.7) and with the periodical ones in the form $H(\xi) = 1 - \varepsilon \cos(2m\xi)$, which were considered by Koiter et al., (1994).

Table 1.

ε	Koiter's formula	Formula (1.22) $\beta^2 = 0,05$	Formula (1.22) $\beta^2 = 0,1$
0,01	0,998	0,987	0,987
0,05	0,988	0,933	0,936
0,1	0,966	0,865	0,871
0,15	0,935	0,798	0,807

As the results show, the local form of thickness variation as well as the periodical one effects on the buckling load parameter. It is easy to see in Table 1 that at fixed parameter β^2 the increasing of amplitude of the local thickness defects (parameter ε) causes the reduction of critical buckling load. In particular, when amplitude of the local thickness defects increases by 15% ($\varepsilon = 0,15$) and the defect area amounts to about 45% (when $\beta^2 = 0,1$) of the shell length, the critical buckling load parameter decreases by 20% in comparison with the perfect shell. At the same time at fixed parameter ε the increasing of parameter β^2 (that means narrowing of the defect area) lowers the shell sensitivity to this defect. Thus, the local thickness defects of a cylindrical shell are as harmful as those of periodical type at Koiter et al., (1994).

Values of the critical buckling load parameter λ (formula (1.13)) for different values of the external pressure and the thickness parameter ε are given in Figure 1.

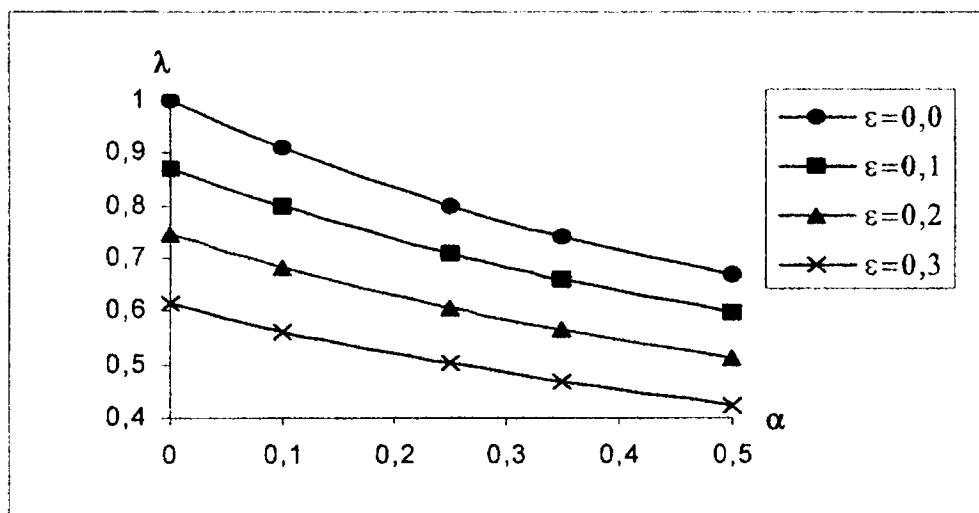


Fig.1. Reduction of the critical load parameter in the presence of the local thickness defects and the external pressure

The above results show that in situation when the defects of the shell thickness are absent ($\varepsilon = 0$) the external pressure causes the reduction of parameter λ by 26% ($P_1 \approx 35\% P_0$). In its turn, the local defects of thickness in the absence of an external pressure even if the amplitude of the thickness defects is 0,15 reduce the buckling load by 19% compared to the shell with constant thickness. So, the presence in the shell both

the local thickness defects and the external pressure has more influence on the classical buckling load, reducing it by 53% ($\varepsilon = 0,3$, $P_1 \approx 35\% P_0$).

EXAMPLE 2. hybrid WKB-Galerkin method in buckling problem of conical shells

Hybrid WKB-Galerkin method is used to the buckling problem of a cone. In the first step solution to the governing differential equation is sought, using WKB method. In the second step the obtained functions are assumed as basis ones for Galerkin solution with unknown coefficients δ_i . Using Galerkin criterion of orthogonality, we get coefficients δ_i at basis functions and, so obtain WKB-Galerkin solution of the equation.

We consider a conical shell with the constant thickness that is subjected to external pressure q . Here s is the coordinate (along forming); l_1 is the distance from imaginary top of the shell up to the smaller foundation; α is base angles of a cone.

Using some replacements, after simplification we get the governing differential equation of the fourth order in a such form

$$\psi^{(4)} + \frac{6}{s}\psi''' + \left(\frac{6}{s^2} + \frac{p^2 l_1 \eta}{s^3}\right)\psi'' - \left(\frac{p^3 \nu}{l_1 s^3} - \frac{p^4 l_1^2}{s^6}\right)\psi = 0, \quad (2.1)$$

where s is coordinate along forming, ψ is the displacement function, p is the wave parameter; l_1 is length of forming from top up to the greater foundation; η is parameter of axial load, which is perpendicular to the foundation; ν is the external pressure parameter.

The boundary conditions we assume as follows

$$\psi(l_0) = \psi(l_1) = \psi'(l_0) = \psi'(l_1) = 0, \quad (2.2)$$

where l_0 is the distance from top of the cone up to the smaller foundation.

We assume $\varepsilon = \frac{1}{p}$ being a small parameter. Then initial equation (2.1) may be rewritten into the form

$$\varepsilon^4 \psi^{(4)} + \varepsilon^4 \frac{6}{s}\psi''' + \varepsilon^4 \left(\frac{6}{s^2} + \frac{p^2 l_1 \eta}{s^3}\right)\psi'' - \left(\frac{\nu}{l_1 p s^3} - \frac{l_1^2}{s^6}\right)\psi = 0. \quad (2.3)$$

According to WKB-method solution of the equation (2.3) is sought as

$$\psi_{WKB} = \exp\left(\int_{l_0}^s \frac{1}{\varepsilon} \psi_0 ds\right). \quad (2.4)$$

Substituting (2.4) into (2.3) after collecting the coefficients with equal orders of parameters ε we obtain the unknown functions ψ_0

$$\psi_0 = 4 \sqrt[4]{\frac{\nu}{l_1 p s^3} - \frac{l_1^2}{s^6}}. \quad (2.5)$$

Taking function ψ_0 (2.5) as the coordinate one, we use criterion of orthogonality in order to determine the unknown coefficient δ_0 in hybrid solution ψ_H

$$\psi_H = \exp\left(\int_{l_0}^s \delta_0 \psi_0 ds\right). \quad (2.6)$$

Substituting function (2.6) into initial equation (2.1), we get discrepancy

$$R = \left(\delta_0^4 \psi_0^4 + 6\delta_0^3 \psi_0^2 \psi_0' + 4\delta_0^2 \psi_0 \psi_0'' + 3\delta_0^2 (\psi_0')^2 + \delta_0 \psi_0'''\right) + \frac{6}{s} \left(\delta_0^3 \psi_0^3 + 3\delta_0^2 \psi_0 \psi_0' + \delta_0 \psi_0''\right) + \left(\frac{6}{s^2} + \frac{p^2 l_1 \eta}{s^3}\right) \left(\delta_0^2 \psi_0^2 + \delta_0 \psi_0'\right) - \left(\frac{p^3 \nu}{l_1 s^3} - \frac{p^4 l_1^2}{s^6}\right). \quad (2.7)$$

Using Galerkin criterion of orthogonality, we obtain the algebraic equation of the fourth order with unknown parameter δ_0

$$k_0 \delta_0^4 + k_1 \delta_0^3 + k_2 \delta_0^2 + k_3 \delta_0 + k_4 = 0, \quad (2.8)$$

where coefficients k_i are as follows

$$k_0 = \int_{l_0}^{l_1} \psi_0^4 ds, \quad k_1 = \int_{l_0}^{l_1} \left(6\psi_0^3 \psi_0' + \frac{6}{s} \psi_0^4\right) ds,$$

$$k_2 = \int_{l_0}^{l_1} \left(4\psi_0^2 \psi_0'' + 3\psi_0 (\psi_0')^2 + \frac{18}{s} \psi_0^2 \psi_0' + \left(\frac{6}{s^2} + \frac{p^2 l_1 \eta}{s^3}\right) \psi_0^3\right) ds, \quad (2.9)$$

$$k_3 = \int_{l_0}^{l_1} \left(\psi_0''' \psi_0 + \frac{6}{s} \psi_0'' \psi_0 + \left(\frac{6}{s^2} + \frac{p^2 l_1 \eta}{s^3}\right) \psi_0' \psi_0\right) ds,$$

$$k_4 = - \int_{l_0}^{l_1} \left(\frac{p^3 \nu}{l_1 s^3} - \frac{p^4 l_1^2}{s^6} \right) \psi_0 ds.$$

Having solved the equation (2.8), we obtain hybrid solution of the equation (2.1)

$$\begin{aligned} \psi_H = C_1 \exp \left(\int_{l_0}^s \delta_{01} \psi_0 ds \right) + C_2 \exp \left(\int_{l_0}^s \delta_{02} \psi_0 ds \right) + C_3 \exp \left(\int_{l_0}^s \delta_{03} \psi_0 ds \right) + \\ + C_4 \exp \left(\int_{l_0}^s \delta_{04} \psi_0 ds \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Substituting the approximate solution (2.10) in boundary conditions (2.2), we get homogeneous system of four equations with unknowns C_i . Using the requirement of nontrivial solution of the system and having divided on $\psi_0(l_0) \psi_0(l_1)$, we obtain the equation for the critical buckling load in the form

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \delta_{01} & \delta_{02} & \delta_{03} & \delta_{04} \\ f^{\delta_{01}} & f^{\delta_{02}} & f^{\delta_{03}} & f^{\delta_{04}} \\ \delta_{01} f^{\delta_{01}} & \delta_{02} f^{\delta_{02}} & \delta_{03} f^{\delta_{03}} & \delta_{04} f^{\delta_{04}} \end{vmatrix} = 0. \quad \text{where } f = \exp \left(\int_{l_0}^s \psi_0 ds \right). \quad (2.11)$$

We consider only that variation interval of the parameter η , for what restriction $\nu > \frac{pl_1^3}{s^3}$ takes place.

As analysis of parameter ε shows, its magnitude depends on geometric and mechanical properties of conic shell as well as numbers of waves in circumferential direction. Magnitude of parameter ε may be both large and small.

As the results show, the decreasing of base angles of a cone causes the reduction of the critical buckling load. The critical value of the external pressure is attained at $n = 5$ and amounts to $q_{kp} = 0,0036$ at $\alpha = \pi/4$; $q_{kp} = 0,002$ at $\alpha = 5\pi/24$; $q_{kp} = 0,001$ at $\alpha = \pi/6$.

EXAMPLE 3: hybrid asymptotic technique in vibrations problem of circular plates with variable thickness

In this section, as an example of the proposed hybrid techniques (WKBJ-variation) application, we consider the problem of free transverse vibrations of a circular plate with central hole and radially-variable thickness. Thus, the strain and the kinetic energies of a round plate of radius a and central hole of radius b as functions of the transverse displacement $W = W(r, \theta, t)$ are of the form

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} D(r) \left\{ \left(\nabla^2 W \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta$$

$$K = \frac{\rho}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} h(r) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta$$

where: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$ - is the Laplace operator in polar coordinates,

$D(r) = \frac{Eh^3(r)}{12(1-\nu^2)}$ - is the bending stiffness, $h(r) = h_0 \varphi(r)$ - is the variable thickness,

assumed to vary along the coordinate r , h_0 - is the nominal thickness, $\varphi(r)$ - is the function of thickness variety (preliminary unknown), E - is the Young's modulus, ν - is the Poisson ratio, ρ - is the material density.

The variation form of the plate's vibration problem, based on the Hamilton's principle, is the following

$$\delta \Phi [W(r, \theta, t)] = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt = 0 \quad (3.1)$$

We introduce the non-dimensional variables $\tilde{W} = W/a$, $x = r/a$, $\tau = t/T$, where T is the scale of time, defined by an equation $12\rho h_0^2(1-\nu^2)/ET^2 = 1$ and separate variables by writing $\tilde{W}(x, \theta, \tau) = U(x)e^{in\theta}e^{i\omega\tau}$, where ω is the natural non-dimensional frequency, n is the number of nodal diameters. This procedure yields formula (3.1) as

$$\delta \Phi [U(x)] = 0 \quad (3.2)$$

where:

$$\Phi [U(x)] = \frac{1}{2} \int_{b/a}^1 \left[\varepsilon^4 \varphi^3(ax) \left\{ \left(U'' + \frac{U'}{x} - \frac{n^2 U}{x^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[U'' \left(\frac{U'}{x} - \frac{n^2 U}{x^2} \right) + \frac{n^2}{x^2} \left(U' - \frac{U}{x} \right)^2 \right] \right\} + \omega^2 \varphi(ax) U^2 \right] x dx \quad (3.3)$$

Condition (3.2) brings us to the boundary value problem that is governed by the equation with variable coefficients and a small parameter $\varepsilon = h_0/a$

$$\varepsilon^4 \left\{ \alpha_1(x) U^{iv} + \alpha_2(x) U''' + \alpha_3(x) U'' + \alpha_4(x) U' \right\} - \left\{ \omega^2 \varphi(ax) - \varepsilon^4 \alpha_5(x) \right\} U = 0 \quad (3.4)$$

where:

$$\begin{aligned}\alpha_1(x) &= \varphi^3(ax), & \alpha_2(x) &= 2x^{-1} + [\varphi^3(ax)]' \\ \alpha_3(x) &= -(2n^2 + 1)x^{-2}\varphi^3(ax) + (2 + \nu)x^{-1}[\varphi^3(ax)]' + [\varphi^3(ax)]'' \\ \alpha_4(x) &= (2n^2 + 1)x^{-3}\varphi^3(ax) - (2n^2 + 1)x^{-2}[\varphi^3(ax)]' + \nu x^{-1}[\varphi^3(ax)]'' \\ \alpha_5(x) &= (n^4 - 4n^2)x^{-4}\varphi^3(ax) + 3n^2x^{-3}[\varphi^3(ax)]' - \nu n^2x^{-2}[\varphi^3(ax)]''\end{aligned}$$

and to the natural boundary conditions of clamped and supported edges of the plate

$$U(x) = 0, \quad U'(x) = 0, \quad \text{when } x = b/a \quad (3.5)$$

$$U(x) = 0, \quad U''(x) + \nu \left(\frac{U'(x)}{x} - \frac{n^2 U(x)}{x^2} \right) = 0, \quad \text{when } x = 1 \quad (3.6)$$

The hybrid technique proposed in section 2 is applied here to obtain approximate values of eigenfrequencies for the problem (3.5)-(3.6). Eigenfrequencies calculated by the hybrid WKBJ-variational technique as functions of parameter $\varepsilon = h_0/a$ are presented in table 2. The number of nodal diameters and nodal circles assumed to be $n = 0, m = 0, 1, 2, 3$. Function of plate's thickness variety is $\varphi = \exp[0,5(b - ax)]$.

It easy to see that the accuracy of the WKBJ solutions decreases when ε ceases to be small, whereas the hybrid solutions agree well with numerical results and are more accurate than the WKBJ-solutions, on which they are based.

Table 2. Eigenfrequencies of the problem obtained by the WKBJ, the hybrid WKBJ-variation and numerical techniques for some values of parameter $\varepsilon = h_0/a$.

ε	m	ω_{WKBJ}	ω_{Hybrid}	$\omega_{Numeric}$
0.1	0	0.02498	0.02458	0.02461
	1	0.07789	0.08044	0.08057
	2	0.16104	0.16618	0.16629
	3	0.27939	0.28118	0.28152
0.5	0	0.62471	0.51713	0.51747
	1	1.94736	1.76665	1.76710
	2	4.02607	3.76506	3.76524
	3	6.85989	6.50400	6.50417
2	0	9.99532	7.02564	7.02592
	1	31.15774	26.64538	26.64572
	2	64.41710	58.43488	58.43507
	3	109.75825	102.15783	102.15821

In Figure 2 the approximations to the mode shapes $U(x)$ obtained by the hybrid WKBJ-variation technique are plotted. Structure of the hybrid solution for $U(x)$ contains function of plate's thickness variety φ that let analyse how the letter one influences on the mode shapes of the plate's vibration. For the plotted mode shapes the following assumptions are made: the external plate's radius $a = 10$, the radius of the

central hole $b = 2$, $\varepsilon = 0.1$, Poisson ratio $\nu = 1/3$, the number of nodal diameters and nodal circles are respectively $n = 0, m = 0$.

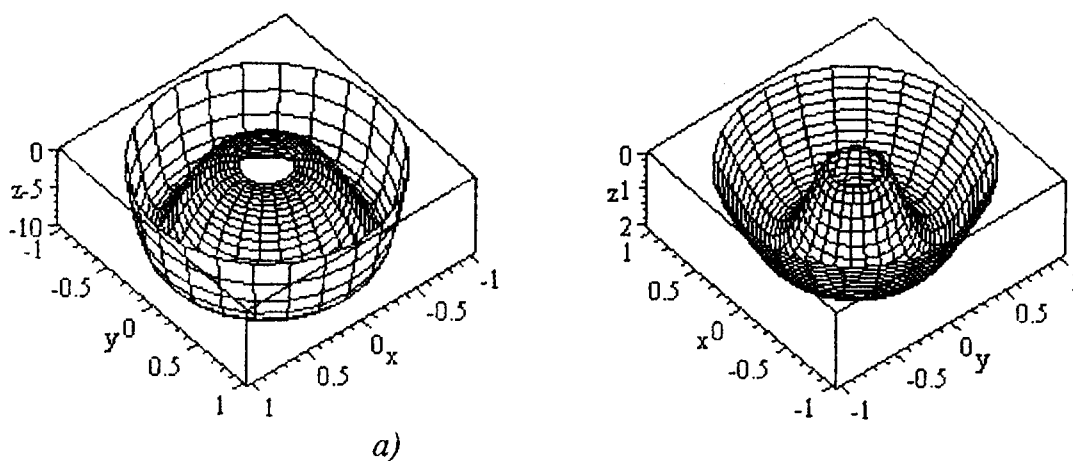


Fig.2. The first mode shapes $U(x)$ of the plate's vibrations, depending on the function of thickness variety φ : a) $\varphi = \exp[0,5(b - ax)]$; b) $\varphi = \exp[0,3(ax - a)]$

The eigenvalue problem above rarely has precise analytical solutions. In this section with the help of hybrid approach we constructed approximate analytical solutions for eigenfrequencies and eigenfunctions with high level of accuracy. Obtained solutions contain the function of plate's thickness variety and let analyse its influence on the forms and frequencies of the plate vibrations.

REFERENCES

To examples 1, 2

- [1] Abdelmoula, R.; Damil, N.; Potier-Ferry, M.: Influence of Distributed and Localized Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells under External Pressure. *Int. J. Solids Structures* 29, No.1, (1992), 1-25.
- [2] Amazigo, J.C.; Budiansky, B.: Asymptotic Formulas for the Buckling Stresses of Axially Compressed Cylinders with Localized or Random Axisymmetric Imperfections. *J. Appl. Mech.* 39, (1972), 179-184.
- [3] Gristchak, V.Z.: Asymptotic Formula for the Buckling Stress of Axially Compressed Circular Cylindrical Shells with More or Less Localized Short-wave Imperfections, Rep. WTHD 88, Delft, (1976), 1-17.
- [4] Kan, S.N.: *Building Mechanics of Shells*. Moscow, "Mashinostroyeniye", (1966), 508.
- [5] Koiter, W.T.: *The Stability of Elastic Equilibrium* (in Dutch). Ph. D. thesis, Delft, Netherlands, (1945).
- [6] Koiter, W.T.: The Effect of Axisymmetric Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells under Axial Compression. *Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap. Proc.* 66, (1963), 265-279.
- [7] Koiter, W.T.; Elishakoff, I.; Starnes, J.H.: Buckling of an axially compressed cylindrical shell of variable thickness. *Int. J. Solids Structures* 31, No.6, (1994), 797-805.
- [8] Volmir, A.S.: *Stability of the Deformed Systems*. Moscow, "Nauka", (1967), 984.

To introduction and example .3.

- [1] Noor A., Peters J., Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures, Proc. of the AIAA-ASME-ASCE-AHS 20th Structures, Structural Dynamics and Materials conference, St. Louis, 1979, pp. 116-126.
- [2] Noor A., Andersen C., Peters J., Reduced basis technique for collapse analysis of shells, AIAA J., 1981, №19, pp. 393-397.
- [3] Fink J., Rheinbolt W., On the error behavior of the reduced basis technique for nonlinear finite element approximations, ZAMM, 1983, № 63, pp. 21-28.
- [4] Noor A. Analytical technique for nonlinear analysis of structures, AIAA J., 1985, № 23, pp. 938-946.
- [5] Geer J., Andersen C., Investigating a hybrid perturbation-Galerkin technique using computer algebra, Rep. NASA, Hampton, Virginia, 1988, 25 p.
- [6] Geer J., Andersen C., A hybrid perturbation-Galerkin technique with applications to slender body theory, SIAM J. Appl. Math, 1989, № 2, pp. 344-361.
- [7] Geer J., Andersen C., A hybrid perturbation-Galerkin method for differential equations containing a parameter, Rep. NASA, Hampton, Virginia, 1989, 28 p.
- [8] Geer J., Andersen C., A hybrid perturbation-Galerkin technique for partial differential equations, Rep. NASA, Hampton, Virginia, 1990, 25 p.
- [9] Gristchak V., Dmitrijeva Ye., A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Application, Technische Mechanik, 1995, № 15, pp. 281-294.

THE BUCKLING AND COLLAPSE BEHAVIOUR OF SADDLE SUPPORTED VESSELS

D. H. NASH, J. SPENCE

Department of Mechanical Engineering,
University of Strathclyde,
75 Montrose Street, Glasgow, G1 1XJ, UK

Horizontal twin saddle supported cylinders are a common and convenient means of storing liquids and gases. An extensive programme of work on the elastic-plastic buckling and collapse behaviour of such vessels is reviewed. This programme of work is essentially based on the work of the late Professor A.S. Tooth and his researchers, particularly Moses Chan, at the University of Strathclyde.

From this work, a number of failure modes have been identified and are discussed herein. Two of these are treated in detail in the paper. The work includes a series of 40 experimental tests on model vessels with a variety of geometries. Several different buckling or collapse modes are described. In the case of elastic-plastic buckling, the tests are compared with the available design codes. However, for thicker vessels, where plastic collapse is relevant, there are no applicable design codes. In this case, the tests are compared with a variety of theoretical approaches. The 'best' theoretical approach, namely the elastic-plastic finite element method is then used to conduct a parametric study. Results from this study are presented in a form suitable for design.

1. INTRODUCTION

A typical horizontal vessel supported on twin saddles is shown in Figure 1a. The saddles may be either welded or loosely fitted to the vessel. The saddles themselves may be rigid or flexible. Vessels placed on welded, rigid saddles tend to exhibit higher stresses and this is often treated as a worst case. The present paper only considers rigid saddles. Current design rules address the rigid saddle configuration and tend to limit the maximum stress in the saddle region to a particular value or to employ a Design-by-Analysis approach. The two approaches differ little in the final design.

However, horizontal saddle supported vessels may need to be designed against a variety of failure modes. These include the following four.

- 1) **Fatigue** – fatigue assessment is well handled by the various design codes although the stress analysis is often left to the designer. This topic has been discussed and a design approach suggested in [1].
- 2) **Shakedown** – it is common to design such that the component does not experience reverse plasticity or ratcheting i.e. it 'shakes down' to elastic behaviour after a limited number of cycles. Many of the design codes have this approach inherent within their methodology. The stress limits within the 'design-by-analysis' approach essentially ensure shakedown is achieved.
- 3) **Buckling** – for thin-walled vessels, where the corresponding values of the thickness ratio, R/t , are high, the compressive stresses generated in the vessel may reach a value high enough to cause buckling. This may be elastic buckling or

elastic-plastic buckling. For saddle-supported cylinders, this type of failure general occurs with R/t ratios of greater than approximately 200.

- 4) **Collapse** – for vessels with $R/t < 200$, the failure mode is generally plastic collapse where non-cyclic loading conditions apply. In practice, design loadings will rarely endanger the vessel in this mode but knowledge of the collapse condition allows an alternative approach to design via an appropriate design factor, usually 1.5. This may provide an attractive alternative and avoids stress categorisation problems.

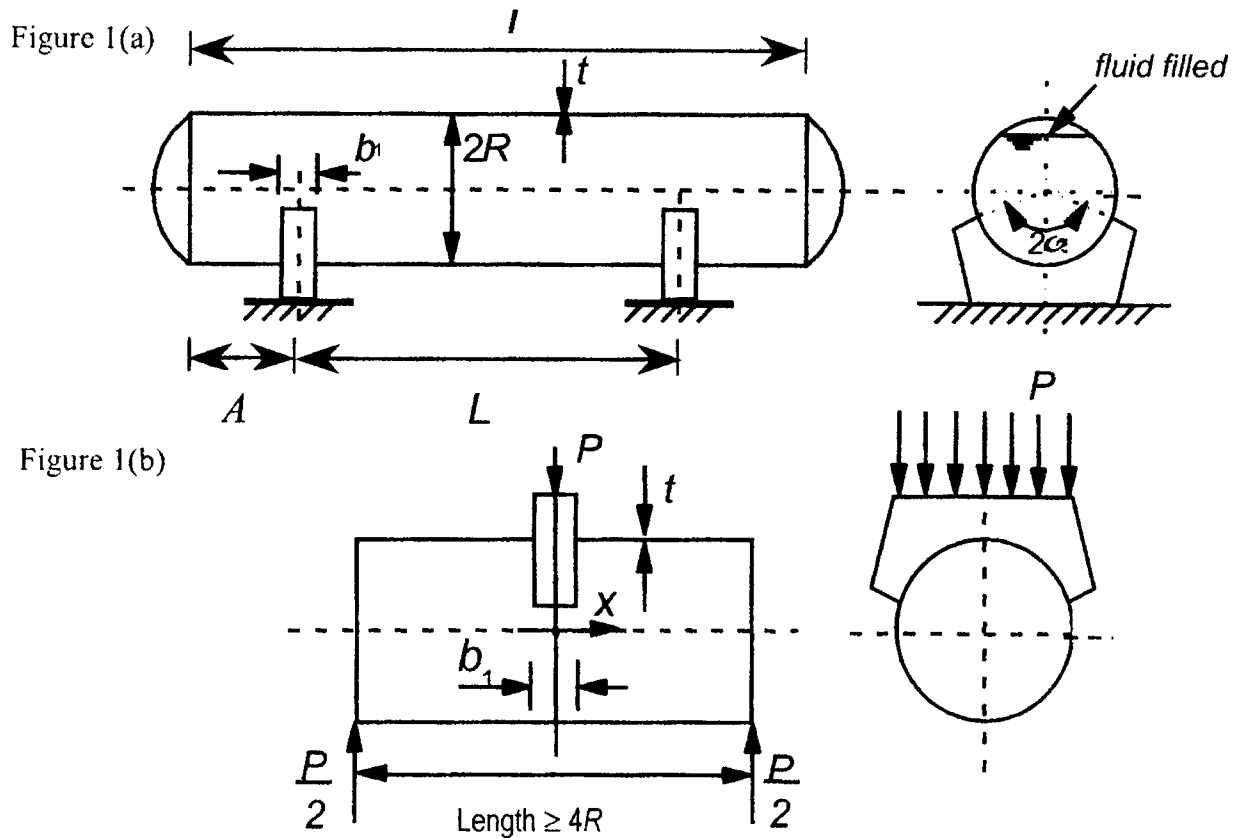


Fig. 1. Geometric details of saddle supported vessel and simple test arrangement

The first two modes will not be discussed further here. The test programme described herein was devised to cover a range of model geometries such that both the buckling and plastic collapse mechanisms could be explored in both welded and loose saddle configurations. The models covered a range of R/t ratios from 62 to 455. In [2], these test results were brought together with other similar experimental results to give a total experimental base for comparison of 70 tests. The collapse load is simply defined as the highest load sustained in the test.

In the case of buckling, the experimental results from the test programme have been compared with the relevant design codes including PD 5500, ECCS and Eurocode 3 [3-5], where recommended values are given for stress limits on compressive stresses.

In the case of plastic collapse, there is no obvious design approach available. However, design based upon collapse may well be attractive under non-cyclic conditions and offer some economies compared with normal code design. Thus, this aspect has been examined in some detail. A number of theoretical approaches have been developed for comparison with the test data. The following methods of analyses were used [6] to give estimates of the collapse loads for both welded and loose saddles.

- a) Rigorous upper bound analysis, P_{\min} [7].
- b) As above, with an inscribed yield surface, P_{inc} [7].
- c) A simplified upper bound solution, P_{krup} [8,9].
- d) An elastic compensation method, lower bound, P_{lb} [10,11].
- e) An elastic compensation method, upper bound, P_{ub} [10,11].
- f) An elastic-plastic finite element method, P_{ep} .

A comparison of the six approaches above indicates that the elastic-plastic finite element method gave the best comparison with the experiments on the model tests. The finite element approach was thereafter used to explore the effect of various geometric parameters and subsequently to conduct a full parametric study on realistic geometry configurations appropriate to 'real' vessels rather than the test models.

2. TEST PROGRAMME AND RESULTS

Ideally, the testing of a model vessel should be carried out, as in the actual storage vessel, by filling it progressively with fluid. However, to cause collapse of the model vessel using this procedure is rather difficult, as the vessel would have to be very thin or the fluid would require to have a high specific gravity. Furthermore, there is no easy means of varying the density of the fluid to achieve the exact collapse load for a particular vessel configuration. However, attempts have been made [12,13] using models made from polyester film, where the vessels were supported at their ends and progressively filled with water. The work provided information on the vessel mid-span collapse behaviour of the partially and totally filled vessels, Fig 2. Similar polyester models were used to examine the buckling behaviour of the vessels when placed on twin saddles. These studies could not simulate the behaviour of steel vessels in which plastic collapse or plastic buckling was likely.



Fig. 2. Mid-span buckle

The decision was made to examine steel vessels with particular reference to the critical saddle support region. A portion of the vessel was isolated at a distance $2R$ from either side of the saddle, i.e. a vessel length of $4R$. This truncated vessel was inverted and the saddle reaction force was applied through a saddle acting centrally on the isolated cylindrical vessel, supported at the ends on similar saddles. This method was adopted by Wilson and Olsen [14], Tooth and Jones [7], White [15], and Krüпка [8,9,16]. The procedure is illustrated in Figure 1b. The length $4R$ was probably adopted from the earlier work of Zick [17]. The length to radius ratios were approximately 4.2.

The model vessels were fabricated from steel sheets rolled into an open cylinder and the seams lapped, crimped and riveted. The geometries are given in Table 1. End

plates were provided in the form of an annular flange with a reduced-diameter 'spigot', of 25 mm length, to fit neatly into the rolled vessel inner diameter. The vessel was fixed to the spigot region by a series of closely pitched set-screws. These flanges provided the stiffness at the ends of the vessel and prevented radial movement of the vessel, in a way similar to the use of dished end closures.

Two forms of saddle attachment were utilised; saddles were either loosely fitted or welded to the vessel. The loosely attached saddles were simply placed on the cylinder with a coating of grease applied between the saddle and vessel interface to minimise friction. The welded saddles were either spot or stitch welded onto the vessel.

The model vessels were tested on a Tinius Olsen 'displacement-controlled' screw driven testing machine. As indicated earlier, loading was by a vertical compressive force applied to the saddle acting centrally on the vessel. During the loading, the vertical displacement of the central saddle, relative to the base, was measured using a displacement transducer. The loading was progressively increased in small increments until the maximum load was achieved, at which point the recorded load value reduced. In certain cases the reduction was small while in others, the drop was dramatic. In both cases, the vertical displacement was such that the vessel could not sustain an increase in the load value, and a pattern of collapse was established when further load was applied.

A tensile test programme was carried out to ascertain the actual tensile yield stress for each sheet of plate material. The yield stress was taken as the 0.2% offset and in each case was the average of six tests. The form of the strain-load curves indicated that the material was elastic-ideally plastic in the region up to at least 2% strain.

3. OBSERVATIONS ON THE TESTS

A total of 40 model cylindrical vessels were fabricated using the technique described above, with R/t varying from 62 to 455 and loose and welded saddles of 120° and 150° saddle embracing angles, where 20 had welded saddles and 20 loose saddles. The geometric and material properties of these are shown in Tables 1 and 2. The modes of failure were either by plastic collapse, i.e. through the progressive formation of plastic hinges located in those regions where the local bending stresses were high, followed by plastic buckling, or by elastic-plastic buckling where the in-plane axial or circumferential stresses were high and compressive.

It is convenient to define the nadir as the region at the lowest point of the vessel at the centre of the saddle and the zenith as the corresponding uppermost location of the actual vessel. These definitions are used throughout even though the model vessel is inverted. The results of the tests are tabulated in Tables 1 and 2. In these, four collapse modes were identified as follows:

- 1) **Plastic collapse.** For *loose saddles*, plastic hinges form on the periphery of the saddle-vessel interface; this results in a localised indentation on the shell surface under the saddle, referred to by Krüpká [16] as a 'footprint', and it was followed by a plastic buckle in a region immediately 'above' the horn. For *welded saddles*, a plastic hinge first forms at the horn; followed by a fold on one side of the saddle at the nadir and around the saddle towards the horn. This is considered to be plastic buckling, the formation of which is particularly dramatic when R/t is high. Examples are shown in Fig. 3 for a loose saddle and Fig. 4 for a welded saddle.

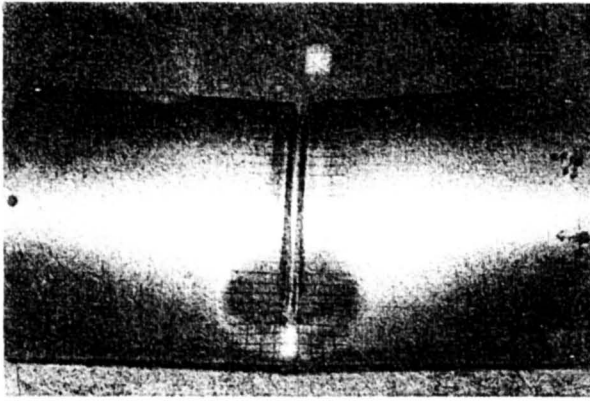


Fig. 3. Plastic collapse – loose saddle

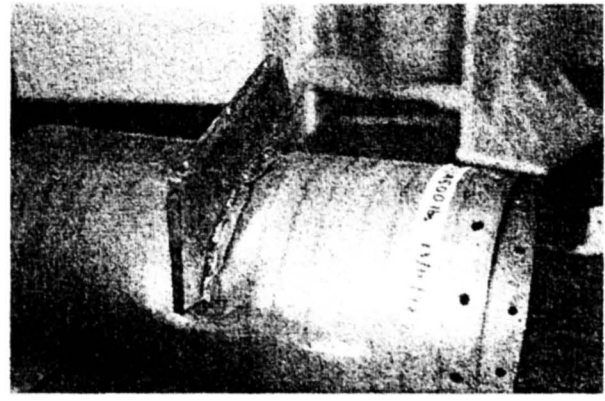


Fig. 4. Plastic collapse – welded saddle

- 2) ***Diamond-shaped buckle.*** (*welded saddles*). When the in-plane axial compressive stress reaches a critical value the shell may buckle into a symmetric or regular diamond pattern. This invariably occurs at the nadir in the region close to the saddle support and has only been observed in welded saddles (e.g. Fig. 5).

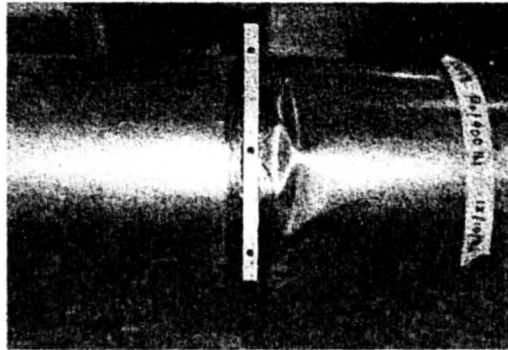


Fig. 5. Diamond buckle – welded saddle

- 3) ***Crumpled buckle.*** (*welded saddles*). In those cases where R/t is high and the compressive in-plane axial stress reaches a critical value, the shell may deform dramatically into a random large-amplitude diamond-like pattern, producing a 'crumpled' shape, again in the general region of the nadir. This phenomenon has only been observed for welded saddles as in Fig. 6.

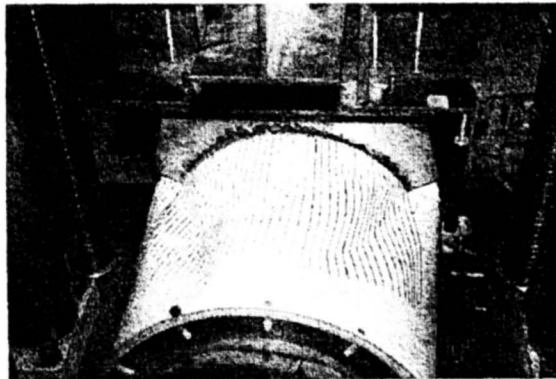


Fig. 6. Crumpled buckle – welded saddle

- 4) **Corrugated buckles.** When loose saddles are employed and R/t is high, the compressive circumferential stress in the vessel immediately under the saddle reaches a critical value and corrugated buckles occur in the 'footprint' region. This behaviour is invariably followed by a plastic buckle in the vessel immediately 'above' the horn with a resulting 'kidney' shape as shown in Fig. 7.

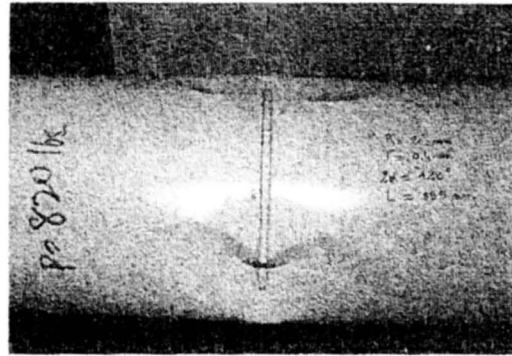


Fig. 7. Kidney shaped buckle – loose saddle

It is noticed that, for vessels with similar R/t ratios, the load carrying capacity of welded saddles is about twice that of loose saddles. The collapse load results P (given in Tables 1 and 2) were normalised with respect to the vessel thickness and the yield stress of the material, i.e. $P/\sigma_y t^2$, and plotted against R/t . The results are shown in Figs. 8 and 9, for welded and loose saddles respectively. Three curves are identified for the different vessels ($R=130$ and 200 mm) and the two different saddle angles ($2\alpha=120^\circ$ and 150°).

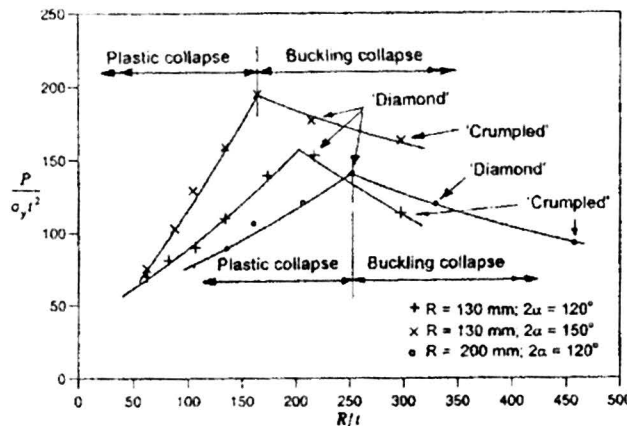


Fig. 8. Normalised collapse and buckling loads for welded saddles

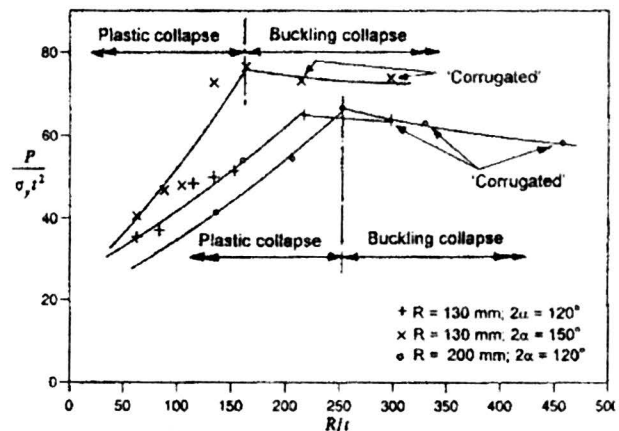


Fig. 9. Normalised collapse and buckling loads for loose saddles

The results have two distinct parts. For the lower values of R/t the results are associated with plastic collapse and for higher values of R/t with buckling. In the plastic collapse region, as the R/t value increases, the curves follow an upward trend. In the region $165 < R/t < 250$, the plastic collapse curves meet those associated with buckling failures.; thereafter the curves show a gentle decline as R/t increases further. In those cases, where experimental points are plotted in the region of the mode change, plastic collapse was invariably followed by the onset of buckling. The curves for the welded and loose saddles are similar; however the points for the loose saddle (Fig. 9) show more scatter than the welded cases (Fig. 8) because, no doubt, of the variableness of the saddle fit. The evidence of elastic buckling for the loose saddle case is less pronounced,

owing to the local nature of the deformations which occur in the case of the loose saddle.

4. COMPARISON WITH DESIGN CODES FOR BUCKLING

In the case of the tests which failed in a buckling mode, it is possible to make some comparisons with existing design codes. In fact, none of the available design codes address the buckling of saddle supported cylinders directly. It is therefore necessary to use engineering judgement and interpret the criteria within the codes and apply it carefully. Essentially the approach used for the purposes of comparison is to take the allowable compressive stress from the code equations (albeit for different geometric and loading configurations) and apply them to the saddle problem. These equations tend to be based on a theoretical buckling approach with a 'knock down' factor. The latter may be arbitrary, based on experience or based on appropriate experiments. A crucial factor in buckling is the degree of imperfection from the idealised geometry and some codes treat this by a global factor, whereas some make an allowance for imperfections. Details and comparisons are published in [2] and [18]. The vessels with welded saddles, which failed by buckling, are identified in Table 1, cases chosen for comparison are highlighted, and the results are given in Table 3.

Table 1. Experimental results for end supported vessels: welded saddle (saddle width $b_1=10\text{mm}$)

Vessel number	Radius R (mm)	Thickness t (mm)	Length L (mm)	R/t	Angle 2α (degs)	Yield stress σ_y (N/mm ²)	Collapse load P (kN)	Collapse mode
1	130	0.44	555	295	120	332	7.20	Crumpled
2	130	0.60	555	217	120	153	8.45	Diamond
3	130	0.75	555	173	120	176	13.79	Plastic
4	130	0.97	555	134	120	160	16.61	Plastic
5	130	1.22	555	107	120	222	29.85	Plastic
6	130	1.57	555	83	120	222	44.50	Plastic
7	130	2.08	555	62	120	214	64.52	Plastic
8	130	0.44	555	295	150	332	10.35	Crumpled
9	130	0.61	555	213	150	276	18.00	Diamond
10	130	0.79	555	165	150	187	22.95	Plastic
11	130	0.97	555	134	150	160	24.00	Plastic
12	130	1.25	555	104	150	175	35.00	Plastic
13	130	1.47	555	88	150	251	55.80	Plastic
14	130	2.08	555	62	150	214	69.81	Plastic
15	200	0.44	835	455	120	332	5.85	Crumpled
16	200	0.61	835	328	120	276	12.15	Diamond
17	200	0.79	835	253	120	187	16.52	Diamond
18	200	0.97	835	206	120	160	18.22	Plastic
19	200	1.25	835	160	120	175	28.89	Plastic
20	200	1.47	835	136	120	251	48.50	Plastic

Table 2. Experimental results for end supported vessels: loose saddle (saddle width $b_1=10\text{mm}$)

Vessel number	Radius R (mm)	Thickness t (mm)	Length L (mm)	R/t	Angle 2α (degs)	Yield stress σ_y (N/mm ²)	Collapse load P (kN)	Collapse mode
21	130	0.44	555	295	120	332	4.05	Corrugated
22	130	0.60	555	217	120	153	6.45	Plastic
23	130	0.75	555	173	120	176	10.23	Plastic
24	130	0.97	555	134	120	160	7.55	Plastic
25	130	1.22	555	107	120	222	17.00	Plastic
26	130	1.57	555	83	120	222	24.47	Plastic
27	130	2.08	555	62	120	214	32.73	Plastic
28	130	0.44	555	295	150	332	4.68	Corrugated
29	130	0.61	555	213	150	276	7.43	Corrugated
30	130	0.79	555	165	150	187	9.00	Plastic
31	130	0.97	555	134	150	160	11.00	Plastic
32	130	1.25	555	104	150	175	13.00	Plastic
33	130	1.47	555	88	150	251	25.38	Plastic
34	130	2.08	555	62	150	214	37.50	Plastic
35	200	0.44	835	455	120	332	3.69	Corrugated
36	200	0.61	835	328	120	276	6.41	Corrugated
37	200	0.79	835	253	120	187	7.85	Plastic
38	200	0.97	835	206	120	160	8.23	Plastic
39	200	1.25	835	160	120	175	14.62	Plastic
40	200	1.47	835	136	120	251	22.46	Plastic

Table 3. Allowable (design) buckling stresses and ‘experimental’ values (N/mm²)

Vessel number	Classical	PD 5500	ECCS (based on pure bending)		Eurocode 3 ENV 1993 1-6		‘Experimental’ stress
			a	b	Class B	Class C	
1	41	47	101	52	109	74	155
2	56	53	75	61	101	91	122
3	70	64	88	74	121	111	150
8	41	47	101	52	109	74	134
9	57	61	115	79	145	117	157
10	74	68	94	78	128	119	145
15	26	31	60	30	58	38	88
16	37	42	87	46	94	63	123
17	48	50	82	61	106	88	121
18	59	55	79	64	106	96	105

a - values with imperfection amplitude = 0.01 including a safety factor of 1.5

b - values with imperfection amplitude = 0.02 including a safety factor of 1.5

The classical buckling results are based on the well-known equation,

$$\sigma_{allowable} = 0.06 \frac{Et}{R}$$

The PD 5500 code limits the longitudinal compressive stress to,

$$\sigma_{allowable} \leq \Delta s f$$

where Δ is a factor related to external pressure buckling (not quite applicable here!), f is the design stress and s is a material factor (1.4 for carbon steel, 1.1 for austenitic steel). PD 5500 also allows an alternative approach based on the ECCS 1998 rules.

The ECCS rules differentiate between different levels of imperfection w/l , where w is the imperfection amplitude and l is the corresponding template length, $l = 4\sqrt{Rt}$. In Table 3, results have been given for $w/l=0.01$ and 0.02 .

Eurocode 3 distinguishes between the different categories of construction through a quality parameter Q , namely 'excellent' (A), 'high' (B) and 'normal' (C). Values have been given in Table 3 for classes B and C.

The 'experimental' stresses in Table 3 have been derived from the experimental buckling loads resulting from the linear elastic analysis *SADDLE* program presented in [1]. This program could be used to evaluate compressive stresses in the saddle region for any vessel configuration, which could then be compared with the codes.

In [2] and [18], it was concluded that the comparison with the experiments was satisfactory in the case of the PD5500 and ECCS with $w/l=0.02$ in that there was sufficient margin between the allowable and the experiment. Similarly, in the case of the Eurocode, it was concluded that only Class C gave an acceptable margin for all cases. However the comparison is somewhat unsatisfactory since the actual imperfections on the test models are unknown. Nevertheless, overall it was deemed that the comparisons were satisfactory provided that allowances were made for manufacturing tolerances.

5. THEORETICAL COMPARISONS FOR PLASTIC COLLAPSE

The majority of the results in Tables 1 and 2 exhibit plastic collapse type behaviour rather than buckling. There are no convenient design codes to which the plastic collapse loads may be compared. Accordingly as mentioned earlier, a variety of theoretical approaches were investigated. These are listed in the introduction and described in detail in [6]. Typical results from the theoretical approaches together with the experiments are shown in Figures 10 and 11 for welded saddles and loose saddles respectively. The theoretical results have been given for the full range of R/t although they will not be applicable for high R/t . From these results and the others in [6] the best comparison with the experiments for both welded and loose saddles is given by the results from the elastic-plastic finite element analysis. It is noted that care must be taken over the mesh refinement and boundary conditions. The good comparison with the elastic-plastic analysis provided the incentive to use this method for a parameter study.

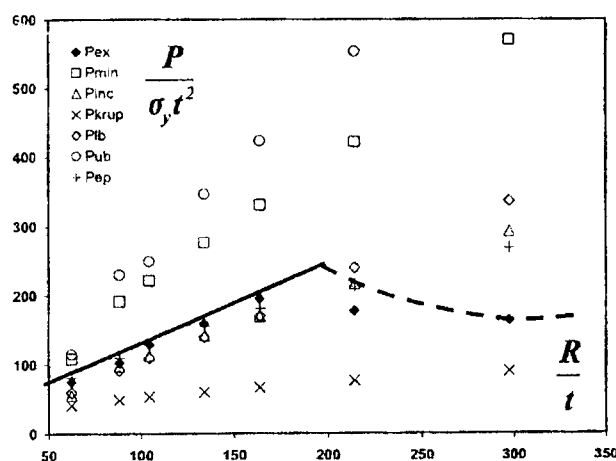


Fig. 10. Collapse loads for vessels with welded saddles

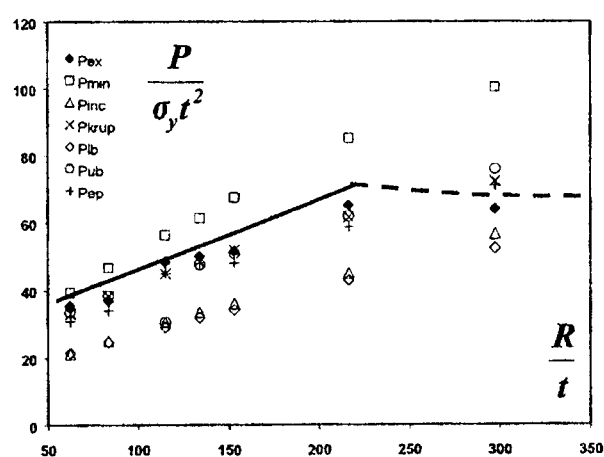


Fig. 11. Collapse loads for vessels with loose saddles

6. PARAMETRIC STUDY

It will be appreciated that all of the above theoretical results are restricted since they either treat the saddle-supported problem as a local problem, or they have been configured to suit the experimental set-up. In order to conduct a parametric survey which is appropriate to actual vessels, it is necessary to include all of the factors which influence the collapse of horizontal vessels supported on twin saddle supports: these include,

- (a) the fixture of the saddle and vessel, i.e. welded or loose
- (b) saddle embracing angle (2α)
- (c) saddle width (b_1)
- (d) total length of the vessel (L)
- (e) distance of the saddle centre profile from the vessel 'head' (A)

Preliminary work established that the length $L=4R$ was not adequate for assessing the load on actual vessels i.e. of $L >> 4R$. For longer lengths of cylinders, the collapse load could be substantially lower than those of the model tests especially for welded saddles [18]. A different finite element (FE) model was employed which simulated the stiffness of the vessel end on one side of the saddle as before but also simulated the length to, and the symmetry conditions at, the vessel centre. This also gave somewhat different results compared with the fully symmetrical FE model used to evaluate the experiments. The welded cases were approximately two thirds those found previously although the loose saddle results were not much different. Thus the model experiments, while useful as a database of tests, should not be considered representative of collapse or buckling loads for actual vessels of corresponding geometric dimensions.

Vessels of A/R ratio equal to 0.5, 1.0, 2.0 and 6.0 and values of $R\alpha/b_1$ (where α is in radians) of 2.0, 3.5, 5.0, 7.5 and 10.0 were examined with the revised FE model. Various vessel radii of 130mm, 500mm, 1000mm and 4000mm were used. The saddle location was restricted to the quarter point on the vessel but with the vessel's total length varying from $2R$, $4R$, $8R$ and $24R$ (representing A/R of 0.5, 1.0, 2.0 and 6.0). The saddle-embracing angle was restricted to between 120° and 150° . The saddle width, saddle embracing angle and the vessel's radius were varied to include a range of values of the ratio $R\alpha/b_1$ namely 2, 3.5, 5.0, 7.5 and 10.0. The thickness of the vessels was such that the R/t ratio does not exceed 300 to adequately ensure the cases correspond to plastic collapse. The material property of the shell is assumed to be elastic-perfectly plastic with a yield strength of 300N/mm^2 . A total of 105 vessels with welded saddles and 113 vessels with loose saddles were analysed to determine the various collapse loads. Fig 12 shows some typical results for a welded saddle for a fixed value $A/R = 1.0$. There is a slight scatter in the results due to the combined geometrical parameter involving b_1/R and R/t . Results for loose saddles are generally similar but tend to be slightly lower for a given geometry. Other values of A/R are given in [6].

From the point of view of application in design situations, it may be useful to have the parametric results in a more directly useable form. Accordingly the best fit curves for the data, have been characterised in terms of a simple power law of the form,

$$\frac{P}{\sigma_y t^2} = K_1 \left(\frac{R\alpha}{b_1} \right)^n$$

Values of K_1 and n are given in Table 4 for the welded saddle cases for $A/R = 1.0$.

Table 4. Curve-fit constants for welded saddle with $A/R=1.0$

$R\alpha/b_1$	K_1	n
10	71.198	1.4604
7.5	45.598	1.5391
5	27.737	1.4136
3.5	16.301	1.4558
2	7.6067	1.4741

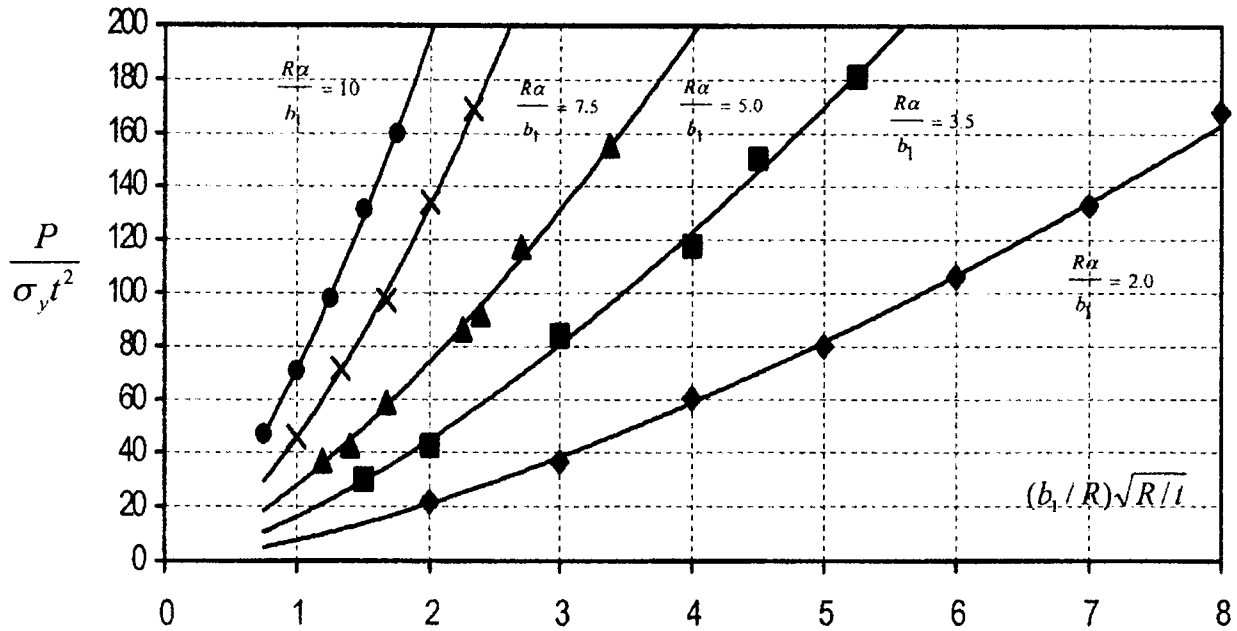


Fig. 12. Collapse curves for welded saddle vessels for $A/R=1.0$

Values for other A/R ratios are given in [6]. It is in fact possible to further condense the parametric collapse load results by increasing the combination of geometric parameters, albeit this results in some additional scatter. The results are shown in Figures 13 and 14 for welded and loose saddle cases against the grouped parameter

$$\frac{b_1}{\sqrt{Rt}} \left(\frac{R\alpha}{b_1} \right).$$

This has the merit of allowing all the results to be shown neatly on two graphs. Again these may be fitted with a simple power law of the form,

$$\frac{P}{\sigma_y t^2} = K_2 \left[\frac{b_1}{\sqrt{Rt}} \left(\frac{R\alpha}{b_1} \right)^{0.93} \right]^m$$

for the welded case and,

$$\frac{P}{\sigma_y t^2} = K_2 \left[\frac{b_1}{\sqrt{Rt}} \left(\frac{R\alpha}{b_1} \right)^q \right]^m$$

for the loose saddle case. The values of K_2 and m are given in Table 5 for both the welded and loose saddle cases (with the values of q identified in Fig. 14 for the loose case). These two equations can be used directly.

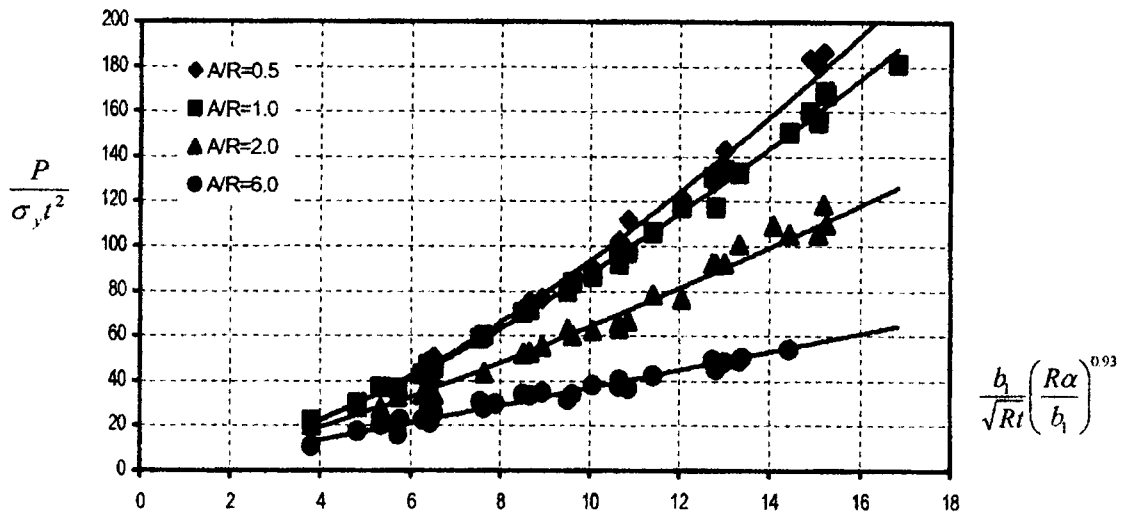


Fig. 13. Condensed plot of collapse loads for vessels with welded saddles

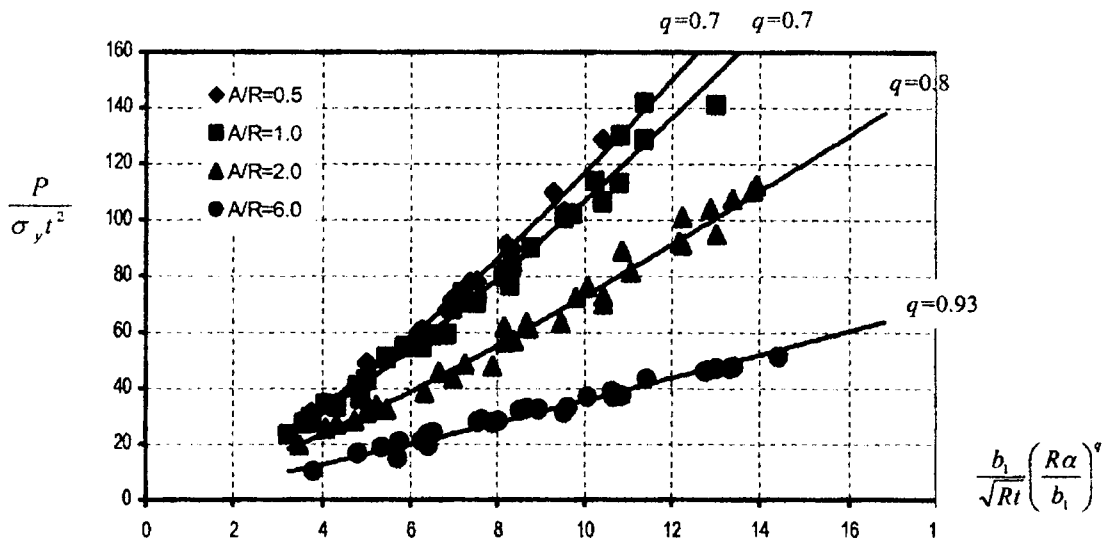


Fig. 14. Condensed plot of collapse loads for vessels with loose saddles

Table 5. Curve-fit constants for saddle condensed data

A/R	Welded		Loose	
	K_2	m	K_2	m
0.5	2.58	1.56	5.07	1.363
1.0	3.00	1.47	4.89	1.340
2.0	3.22	1.30	4.25	1.233
6.0	3.08	1.08	2.66	1.126

7. CONCLUDING REMARKS

The present paper summarises a programme of work originally undertaken by Prof. A.S. Tooth and his research students. An extensive series of experiments on model vessels are reported which treat the failure mode of a saddle supported cylinder as a local phenomenon. Equal numbers of tests were conducted on both welded and loose saddle configurations. Some of these tests exhibited buckling behaviour although the majority failed by plastic collapse.

The buckling results have been compared with available design codes albeit the codes are not directly applicable to the saddle supported situation. Nevertheless it seems that the allowable compressive stresses from the codes may be used for the test model saddle cases provided due cognisance is taken of realistic imperfections where appropriate.

In the case of the plastic collapse results, a variety of theoretical approaches have been reported. Some of these may be useful for limited application but the best overall comparisons were given by the elastic-plastic finite element solution. Using the finite element approach, a parameter survey has been conducted and the results presented both graphically and in the form of equations which may be helpful in design. The parametric results are for vessels that are supported by twin saddles at the quarter points. They may also be used for vessels that are not supported at the quarter points by using the A/R ratio for that particular vessel since the distance between the supports does not greatly influence collapse [6]. It is important that the appropriate load is used in the calculation. In design, the normal approach would be to reduce the collapse load obtained from the design curves by a factor of, say 1.5, to obtain a working load. The total load on one saddle should be less than this working load.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the use of the ANSYS software [19] through an educational license. Special thanks are due to Professor Tooth, the initiator of this work, who died on 11 April 2001 and to Moses Chan who was his PhD. student.

REFERENCES

- [1] Tooth, A.S. and Nash, D. H., 'Stress analysis and fatigue assessment of twin saddle supported vessels' In the proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Pressure Vessels and Components, San Diego, June 1991. Vol. PVP 217 pp41-48.
- [2] Chan, G.C.M., Tooth, A.S., and Spence, J., 'A study of the buckling behaviour of horizontal saddle supported vessels' Thin Walled Structures, Vol. 30, Nos. 1-4, pp. 3-22, 1998, Elsevier Applied Science.
- [3] PD 5500: 2000, 'Specification for unfired fusion welded pressure vessels' British Standards Institution, London
- [4] European Recommendations ECCS, 'Buckling of steel shells', 4th Edition, No. 56, 1998
- [5] Eurocode 3, 'Design of steel structures. Part 1.6. General rules. Strength and stability of shell structures'. 1993.
- [6] Tooth, A.S., Chan, G.C.M., Spence, J. & Nash, D.H., 'Horizontal saddle supported storage vessels: Theoretical and experimental comparisons of plastic collapse loads'. In Pressure Vessel Technology: Theory and Practice, IMechE, May 2003. Eds. Banks, WM & Nash, DH.

- [7] Tooth A.S. and Jones, N., 'Plastic collapse loads of cylindrical pressure vessels supported by rigid saddles.' *J. of Strain Analysis*, Vol. 17, No. 3, 1982, pp. 187-198.
- [8] Krůpka V., 'Saddle supported unstiffened horizontal vessels.' In *Acta Technica CSAV*, No. 4, Prague, 1988, pp. 472-492.
- [9] Krůpka V., 'Plastic squeeze of circular shell due to saddle or lug.' *IUTAM Symp.*, Prague, 1990.
- [10] Mackenzie D. and Boyle J.T., 'A method of estimating limit loads by interactive elastic analysis I - Simple examples.' *Int. J. Pres. Ves. and Piping*, Vol. 53, 1993, pp. 777-96.
- [11] Mackenzie D, Boyle J.T. & Hamilton R., 'The elastic compensation method for limit and shakedown analysis: a review.' *J. of Strain Analysis*, Vol. 35, No. 3, 2000, pp. 171-188.
- [12] Fernandez, J.A., and Tooth, A.S., 'A study of the buckling behaviour of horizontally supported thin walled cylindrical storage vessels which contain fluid'. In *Stability Problems in Engineering Structures and Components*, ed. T.H. Richards and P. Stanley, 1979, pp. 315-340, Applied Science Pubs., London.
- [13] Susatijo, I. And Tooth, A.S., 'A study of the stability of horizontal cylindrical vessels filled with varying amounts of liquid – Part 1 Experimental Investigation'. *Journal of thin Walled Structures*, Vol. 1. pp. 121-138, 1983.
- [14] Wilson, W.M. and Olsen, E.D., 'Tests on cylindrical shells'. *University of Illinois Engineering Experimental Station Bulletin 331*, 23 September 1941.
- [15] White, D.H., 'Experimental determination of plastic collapse loads for cylindrical shells loaded radially through rigid supports'. In *Proceeding of the 2nd International Conference on pressure vessel technology*, San Antonio, Texas, Oct 1973, pp. 343-360.
- [16] Krůpka, V., 'Saddle and lug supported tanks and vessels'. *Proceeding of the Institution of mechanical Engineers, Part E, Journal of process Mechanical Engineering* Vol. 208 (E1), pp. 17-21, 1994.
- [17] Zick, L.P., 'Stresses in large horizontal cylindrical pressure vessels on two saddle supports'. *Welding Research Supplement No. 30.*, pp. 435-s to 445-s, 1951.
- [18] Tooth, A.S., Spence, J., and Chan, G.C.M., 'The buckling behaviour of horizontal storage vessels – experiments and codes' *Thin Walled Structures, Research and Development*, Ed. Shanmugam, N.E., Liew, J.Y.R., and Thevendran, V., *Proceeding of the 2nd International Conference on Thin Walled Structures*, Singapore, 1998. pp. 597-604.
- [19] ANSYS Finite Element Program, ANSYS Inc. Houston, PA.

ON THE DEVELOPMENT OF SIMPLE USER FRIENDLY MICROCOMPUTER PROGRAMS FOR STRUCTURAL ANALYSIS. SOME PERSONAL THOUGHTS

J. RHODES

Department of Mechanical Engineering, University of Strathclyde
James Weir Building, 75 Montrose Street, Glasgow G1 1XJ, Scotland

This paper gives brief details of microcomputer programs developed by the author to deal with different aspects of structural analysis. Programs written with different aims, for example for teaching purposes, for in-house use by companies, for product development and publicity and for design particular specifications are discussed.

1. INTRODUCTION

The history of microcomputers is not long, spanning less than 30 years since the Apple 1 computer was launched in the USA in 1976. In the early years a number of manufacturers introduced microcomputers with a variety of operating systems and features, and these were to a large extent self contained and not interchangeable. Transfer of programs and information between different brands of computer was difficult or impossible and users in general wrote programs for their own personal use.

When the first IBM PC was introduced in 1981 it was not obvious to all that this product, or its descendants, would dominate the market in years to come. The writer's computer usage began with an Apple computer, followed by a Sharp MZ80K, a BBC 'B', a BBC 'Master' and an Atari ST before he was enticed to purchase an IBM AT clone. Since then the growth in dominance of IBM PCs has been such that it was only sensible to keep to that type of computer.

The 'Basic' computing language grew alongside the growth in microcomputers. The first commercial 'Basic' was produced in 1975 by Bill Gates and Paul Allen in the same year that they founded Microsoft. Early microcomputers tended to use different versions of the 'Basic' language, with a large variation in speed and utility, although it is true that some of the early computers could be adapted to use versions of Fortran and other languages. In the writer's case he had had the misfortune to learn 'Algol' rather than Fortran in his postgraduate research years, and when this lost popularity he found it easier to use Basic rather than Fortran. In his pre-IBM PC years BBC Basic, and then Atari FastBasic were about the quickest and most powerful of the basic languages around. On progressing to IBM PCs, compiled Basic languages such as Turbo-Basic, produced in 1985 and PowerBasic, produced a few years later were in the same general range of speed as Fortran and other high level compiled languages.

In recent years Microsoft Visual Basic has become perhaps the most widely used of the Basic languages due, to some extent to its promoters, but also because it is ideally suited to the "Windows" environment, although it is significantly slower in number crunching than PowerBasic. This disadvantage can be overcome, however, by using Visual Basic as the parent language assisted by dynamic link library files or executable files written in PowerBasic to handle number crunching jobs such as

inverting matrices. The computer programs described in this paper have been written either in PowerBasic or in Visual Basic assisted by PowerBasic dlls.

2. USER FRIENDLINESS

The first user friendly program developed by the writer arose from comments made by industrial visitors on a program developed on a BBC computer to evaluate the section properties of cold-formed steel open sections. This program was developed primarily to give accurate analysis of the effects of rounded corners on the various section properties of an open section, primarily the 'difficult to compute' properties such as the Warping Constant. While the BBC computer at that time had only 4k of storage capability at its highest display resolution the fact that calculations could be carried out consecutively rather than simultaneously made it a fairly simple task to program these calculations without using a great deal of memory. Also, while the properties of curved walls can be computed without undue difficulty the simple expedient of considering each corner as a set of 50 straight elements removed any problems of curved element analysis.

On seeing this program the visitors suggested that it was easier to use, and more comprehensive, than their in-house package and that it should be developed commercially. This led to the development of the program "SP" in which the user inputs the dimensions of the flat width, inside corner radius and corner bend angle for each element of an open cross section, with the section displayed on-screen as it developed to allow the user to ensure that the correct input was being given. When the required data had been input the section properties were computed and the user could view the results either in semi-graphical form as shown on Figure 1 or in purely numerical and more comprehensive form. The program can then be used to analyse columns subject to flexural or torsional-flexural buckling and beams under elasto-plastic bending in accordance with the British Standard for the design of Cold-Formed Steel Members[1], or adaptations of this specification in the case of members not covered by the standard such as completely unsymmetrical sections. In the analysis of beams and columns local buckling was taken into account using the 'effective width' approach and the interaction of local and overall buckling and material yield was considered using the Perry-Robertson approach.

This program, written initially in Turbo-Basic and later converted to PowerBasic, was bought and used by most of the major cold-formed steel manufacturers in the UK. It was later incorporated, in a modified form, into a package used by one of the major companies for distribution to Consultants and Architects throughout the UK as a product design tool. In later years the program was also modified to deal with perforated members as used in the storage racking industry.

During the development of this program the writer came to a number of conclusions regarding user friendliness in computer programs. These are:

1. The program should have simple instructions easily observed before use.
2. It should be capable of intuitive usage.
3. Input required from the user should be kept to a minimum.
4. The input should be checked by the program and disallowed if nonsensical
5. The user must be instructed on how to change nonsensical input
6. Changes to input in order to solve related problems should be easy to carry out.

7. The program should be capable of saving input and output for later use.
8. The program should allow the user to change input in later runs.
9. Output should be in an attractive form, involving graphics where possible.

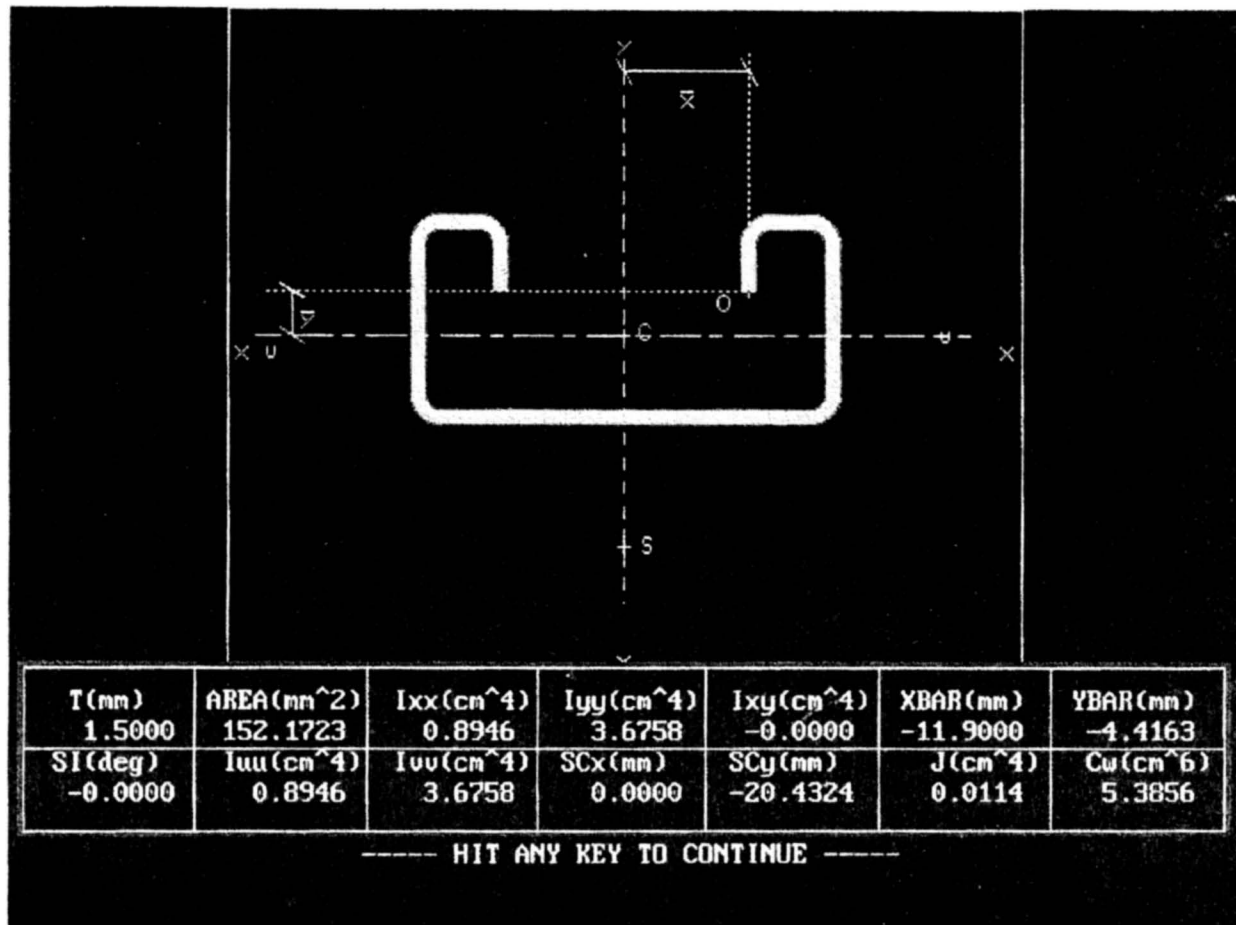


Fig. 1. A results screen from computer program SP

3. TEACHING PROGRAMS

The first program developed by the writer primarily for teaching purposes was aimed at students undertaking third year Structural Mechanics at the University of Strathclyde. This program was called "BEAMS" and the purpose was twofold, (a) to allow students to become familiar with the analysis method known as "Macaulay's Method" in the UK, (in Europe other names are given to this approach) and (b) to analyse if required beams subjected to complex support and loading conditions.

The program was written in PowerBasic and prompted the user to set up the beam dimensions, supports and loadings in a question and answer fashion. For beams with an easily manageable solution process which could be illustrated on-screen the Macaulay approach was shown in a step by step procedure involving setting up the differential equation, applying the double integration process, satisfying equilibrium and kinetic boundary conditions and thus finding the final results in the form of equations before displaying the loading, shear force, bending moment and deflection diagrams.

For beams with many supports and loads, for which the solution was too extensive to display on-screen, the display of the solution was not shown and the program showed

the final results immediately upon specification of the loading and support conditions. Fig. 2 shows the screen partway through the solution procedure and

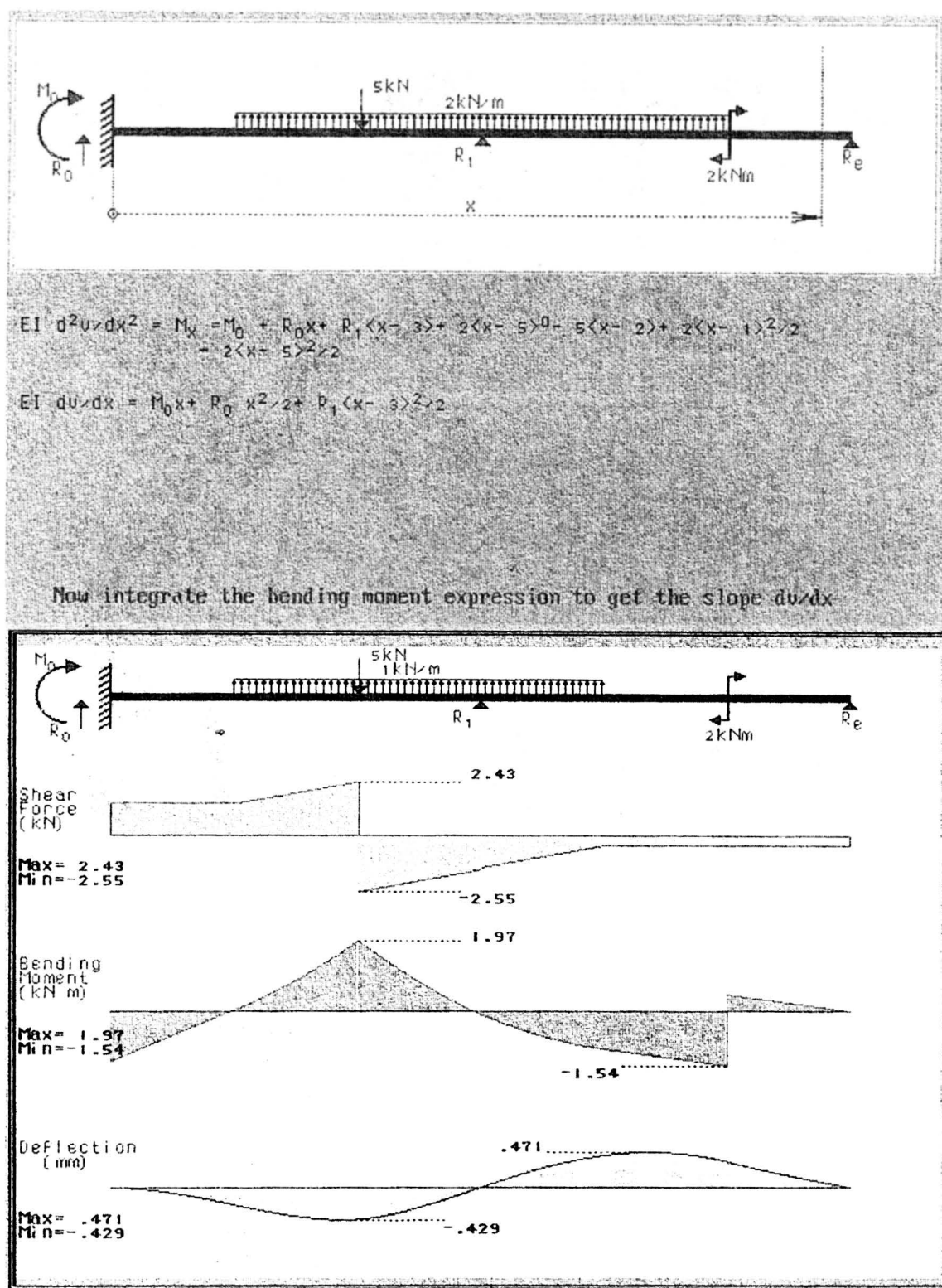


Fig. 2. Screen during mid-solution and final results for program PC.

at the final results stage for beam problems. (Note that there are slight differences in the loading for the bottom diagram as screens taken from different problems were used in setting up the figure)

Some time after this program a teaching program for column analysis was written as a Masters project [2] by a student of the writer. This program was written in an early version of visual basic and was Microsoft Windows orientated. The program dealt with a single column with any combination of fixed, pinned and free ends and displayed any of four different analysis methods; exact solution of the elastic differential equation, Rayleigh-Ritz analysis, Timoshenko's method and finite element analysis using a small number (20 max) of beam elements. In the use of the first three methods the solution procedure was displayed, and for the finite element only the final solution was given. When using this method different properties could be specified for different elements. Both programs were incorporated on the teaching PCs used by Strathclyde University students.

4. PROGRAMS FOR INDUSTRY

The writer is involved mainly with Cold-Formed Steel manufacturing companies. In the UK these companies tend to have three different engineering uses for computer programs. These are:- to run and manage the Company's production equipment, to use for in-house analysis and development of the Company's products and to promote the use of their products by construction companies, architects and consultants by making design of buildings etc. as simple as possible if the Company's products are used. To achieve the final end many companies in the UK produce computer packages which can be used to design structures using their products and distribute these freely to thousands of potential customers. As all references in the programs are to the products of that company, and as the design procedures used by different companies are jealously guarded, and are often based at least partially on testing, the software can only be used for the donor company's products. In general these programs also produce, in addition to design analysis, order forms which can be checked for design adequacy and processed quickly and cheaply by the donor company as they are intimately involved with the software which produced the designs.

In the early development of this type of promotional software, companies which produced roof purlins were mainly involved. Since the early 1980's all major roof purlin manufacturers have produced promotional disks (and in the early days even tapes). These packages were initially used to design purlins, side-rails and ancillary items against download and wind uplift loading. As the years progressed and computational capacity grew, so also did the complexities of design and the slenderness of the member cross sections. New wind codes and snow loading specifications made it necessary to design building products against wind loads which varied along roofs and snow drift roof loads which varied depending on building shape, location and elevation.

The writer has been involved in promotional and in-house analysis programs of this type for a number of companies since the mid 1980's, although in recent years he has worked exclusively for a single company as far as roof purlins are involved. A typical in-house version of promotional software from that company is shown in Fig. 3. The particular problem under examination in this figure is that of a set of purlins joined by semi-rigid sleeve connections (termed the Heavy End Bay System since the purlins at each end are generally thicker than the internal purlins) and subject to wind uplift loading which varies in four bands across the roof. The screen shown displays the variation in bending moments along the system. Another screen shows capacities of all purlins manufactured by the company, coloured in white if the purlin capacity is

sufficient to withstand the loading applied and red if it is insufficient. Yet another screen allows the user to change purlins at will to observe numerically the effect of changing end and intermediate purlins and connections on the capacity.

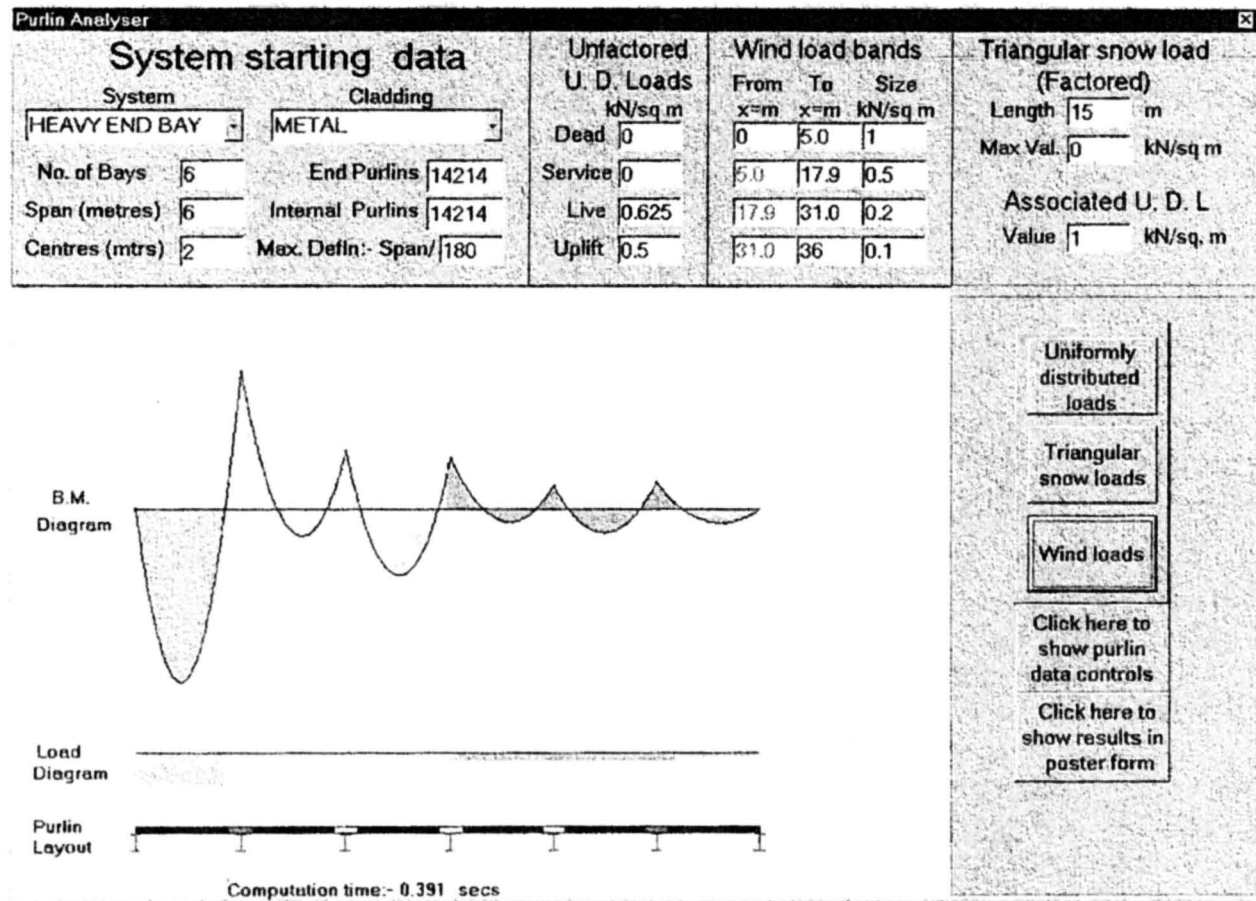


Fig. 3. In-house version of computer program for purlin analysis

Cold formed steel companies have in recent years also produced promotional and associated in-house software packages to deal with a wide variety of pre-engineered building structures, for example portal frames, lattice beams, flooring and mezzanine floor systems. An example of this is shown in Fig. 4 which shows a screen from the in-house version of a lattice beam design program. The program uses a finite element approach to analyse the frame and then applies strength and stability checks on all members according to the British Standard [1]. As the member loadings are to an extent dependant on the relative member dimensions re-dimensioning of members to achieve the lightest possible structure requires an iterative approach. A variety of different types of lattice frame can be dealt with, and a similar approach has recently been produced to deal with curved lattice beams.

One aspect of cold-formed steel design not specifically mentioned as yet concerns storage racking. This type of structure is particularly prone to buckling of various forms and the writer has had substantial connection with the storage racking industry, having produced design programs for a number of companies in this field. This industry has had a new specification written which requires programming to deal with second order effects, and will be discussed at greater length later in the paper.

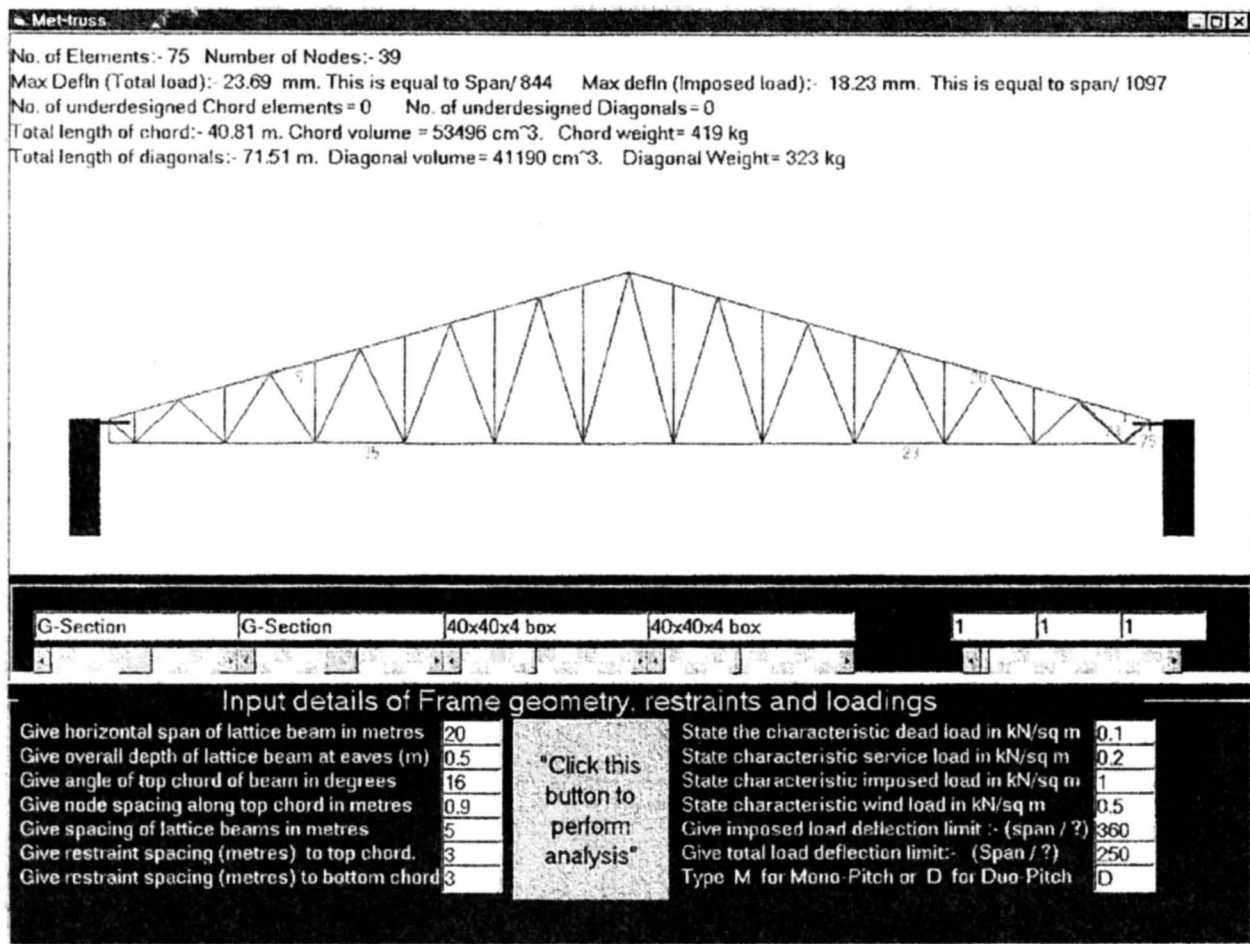


Fig. 4. Program to develop lightest possible lattice beam under specified conditions

5. ANALYSIS PROGRAMS

Perhaps the most satisfying of computer programs are those written purely for personal research and analysis purposes. These strictly speaking do not need to be user friendly, but sometimes with increasing use and development they become user friendly simply to ensure that the user is able to operate his own programs with greater ease than before.

An analysis method of particular interest to the writer for a number of years has been the finite strip method, originally developed by Cheung [3] in the early 1970s. This method is ideally suited to microcomputer use, and in the late 70s the writer developed a finite element type analysis approach to the buckling of thin-walled sections which was more efficient in computer storage requirements, although slightly more complex, than the existing finite strip approaches. The earliest computer programs for this approach were written for the MZ80K computer, modified for BBC computers then for an Atari ST computer before being used on a PC. A number of research students, for example Khong [4] assisted in the development of the finite strip method to use higher order strips, so that linear strips, cubic strips, quintic strips and even septic strips have been used to date. The early programs were crude, with the main objective being to produce numerical results for use in a Masters class, but at present several programs exist which may be termed user friendly. One of these is the cubic strip program 'FS' which is written in Visual Basic. In this program the cross section is specified by inputting dimensions and angles for successive walls, which are displayed immediately as they

are input. A start length for the member, an initial increment of length and the number of increments to be used is then specified, whereupon the computer gives values for the buckling coefficient, post buckling change of axial stiffness and post-buckling change of flexural stiffnesses for each individual half wavelength examined. These results can be displayed in graphical form at will.

The layout of the results screen for a typical cross section is shown in Fig. 5. Here the member is a simple hat section under uniform compression with a single strip per wall. The top right section shows the member and its buckling mode for the half wavelength corresponding to the small circle shown on the bottom right section. The bottom right section plots the variation in buckling coefficient shows the variation in buckling coefficient with buckle half wavelength. By clicking on the plot with a mouse at any position the buckling mode corresponding to the relevant half wavelength replaces the mode shown on the top right section. Clicking the arrowed button in the bottom right section replaces the buckling coefficient plot by a plot of reduction in axial stiffness against half wavelength, and subsequent clicks produce plots of post-buckling reductions in flexural stiffnesses. In this program the number of effective strips can be doubled (the width of each strip is halved) at the click of a button, and the resulting buckling coefficient plot can be made to appear superimposed on the previous plot. This process can be repeated indefinitely to illustrate the greater accuracy of more strips, but in actuality after one single doubling event further repetitions produce very little change indicating that two strips per wall give highly accurate results

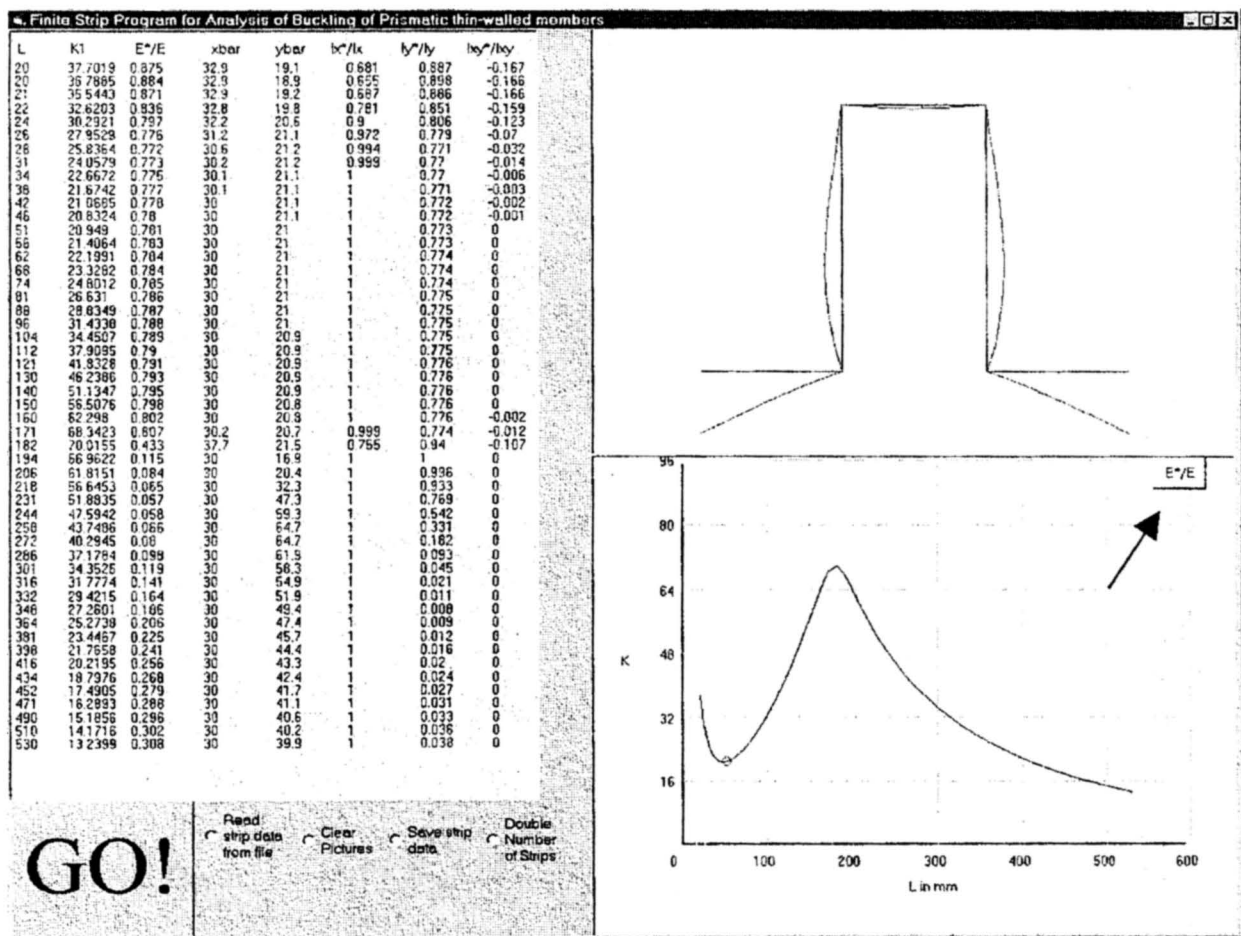


Fig. 5 Results screen from finite strip program "FS" for a simple problem

A quintic strip program which also uses a more rigorous postbuckling analysis than that used with the cubic strip and a septic strip which ensures high accuracy within the complete validity range of von Karman's equations is also available, but lack of space prohibits its display in this paper.

One reason for the development of finite strip programs for microcomputer use can be found in the shortage of storage capacity and lack of speed of the early microcomputers, which limited finite element programs to relatively small numbers of elements. With the growth in speed (3.2 GHz today as opposed to 4.7 MHz for the first IBM PC) and growth in capacity of microcomputers this problem has been eliminated for some time now. The finite element field is nowadays dominated by companies which produce large multipurpose packages capable of dealing with almost any problem posed. There is little point in attempting to enter into competition with existing companies who have invested an enormous number of man-years in development of highly professional packages. Such packages, although extremely useful and versatile, can be rather expensive to buy, maintain and use, and there is room for smaller, dedicated programs suitable for specific tasks and areas of application, particularly if the producer of such programs gets pleasure from the act of production. The writer has concerned himself to date with relatively simple finite element programs which use only beam elements, but which are suitable for application to many problems and enhance the user's knowledge of structural behaviour while also producing useful results.

The first finite element program produced by the writer was based on an existing Turbo-Basic program "FEA" produced at Strathclyde University by Dr. J. Hossack. Starting from this program the writer modified the input and output procedures and added graphics. The initial program "FRAMEFE" was limited to approximately 40 nodes due to the direct method of matrix inversion used together with the MSDOS limitations on array size. With subsequent use of a "skyline" matrix solving approach the size limitation was substantially enhanced, and the adoption of PowerBasic produced some improvements in graphics resolution. A typical results screen obtained for the analysis of a lattice beam is shown in Fig. 6. The display could be modified to show moment variation, shear variation or end load variation throughout the structure instead of the deflection variation displayed in Fig. 6 and the magnification of the effects displaced could be varied at will. Another screen could be used to interrogate each element individually so that all effects on any element could be viewed at will. To assist in the input of large amounts of data, some of the last MSDOS versions of the program incorporated routines for automatic production of nodes and elements for highly repetitive structures. Non-linear analysis versions of the program were also produced which used stability functions in the derivation of the element matrices, but these were not developed to a great extent, as major changes in the programming language used were becoming of high importance at this time.

With the advent of Windows and Microsoft Visual Basic the potential advantages to be gained by the capability of the use of enormous arrays and the improvements in graphical resolution made the switch to Visual Basic of substantial interest. Unfortunately the "number crunching" speed of Visual Basic was far less than that of PowerBasic. This difficulty was overcome by the incorporation of PowerBasic dlls in the Visual Basic programs which took care of matrix inversion while using Visual Basic for the graphics procedures and other routines for which Visual Basic was superior.

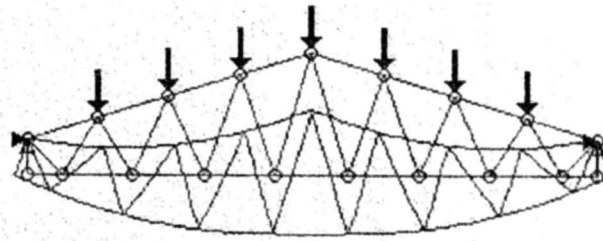
A screen from a Visual Basic version of "FRAMEFE" is also shown in Fig. 6. in which a frame structure of arbitrary shape is examined. With the use of Windows there

Max. Nodal Displacements
 Disp Value Node
 Ux 1.62E-01 mm 10
 Uy 7.51E-01 mm 5
 Rotn 2.18E-02 deg 9

Max out of plane defln
 7.58E-01 mm on el. 5
 (Nodes 5 - 6)

Nsum= 1005
 Terms= 4132

Computation time -0.0secs



To double/half scale of displacements type 1/2
 To expand/change highlighted element type 3/43(4)
 To re-view complete structure type 5
 To carry on press <ENTER>

Program for the linear elastic finite element analysis of frames and frame type structures.

Nodes Elements Joint Stiffness Loads Supports Node Nos Elmnt Nos Solution Quickbuild Draw s+ s-
 Magn+ Magn- Normal

NODAL DISPLACEMENTS				SOLVE
Node	U	V	Rotn	
1	0	0	0.077	
2	-1.317	0.456	-0.001	
3	-1.578	-0.076	-0.019	
4	-1.675	-0.239	0.002	
5	-1.695	-0.28	0.002	
6	-1.662	-0.256	0.004	
7	-1.599	-0.196	0.003	
8	-1.498	-0.168	0.007	

27.444 1.351

Individual Element Results

Element Number	54
Node 1	39
Node 2	43
Axial Load (kN)	21.422
Max Shear Force (kN)	7.086
Max Moment (kNm)	1.331
Nodal Disp. u1 (mm)	-2.956
Nodal disp. v1 (mm)	-0.249
End Rotation r1 (degs)	0.718
Nodal Disp. u2 (mm)	-3.481
Nodal Disp. v2 (mm)	-0.052
End Rotation r2 (degs)	-0.685
Max Deflection (mm)	11.672

Fig. 6. Screens from PowerBasic version and Visual Basic version of "FRAMEFE"

is a substantial increase in the amount of information which can be displayed on a single screen via the use of scroll bars etc. In addition more realism in the appearance of structures can easily be achieved in the Windows environment. In the Visual Basic version of "FRAMEFE" the magnification of effects such as displacements and of any selected part of the structure can be accomplished with clicks on the mouse, modifications to any part of the structure can be carried out at will, and if desired the deflection and moment variations can be animated.

The "FRAMEFE" program and its associated PowerBasic dll have formed the engine for a number of dedicated analysis programs, for example the lattice beam analysis program shown in Fig. 4.

6. NONLINEAR ANALYSIS

The most recent development of the "FRAMEFE" program was in the production of a dedicated nonlinear analysis program for design of storage racking with semi-rigid beam end connectors as required by the recent FEM code for storage racking [5]. This code requires a class A (high quality) second order analysis of a racking system under down-aisle conditions tied to a second order analysis of the cross-aisle conditions, and a computer program to carry out this analysis was commissioned by the Storage Equipment Manufacturer's Association (SEMA). To produce such a program a modified version of "FRAMEFE" was employed, with stability functions used in the set-up of the element matrices. The program was required to analyse racking in the

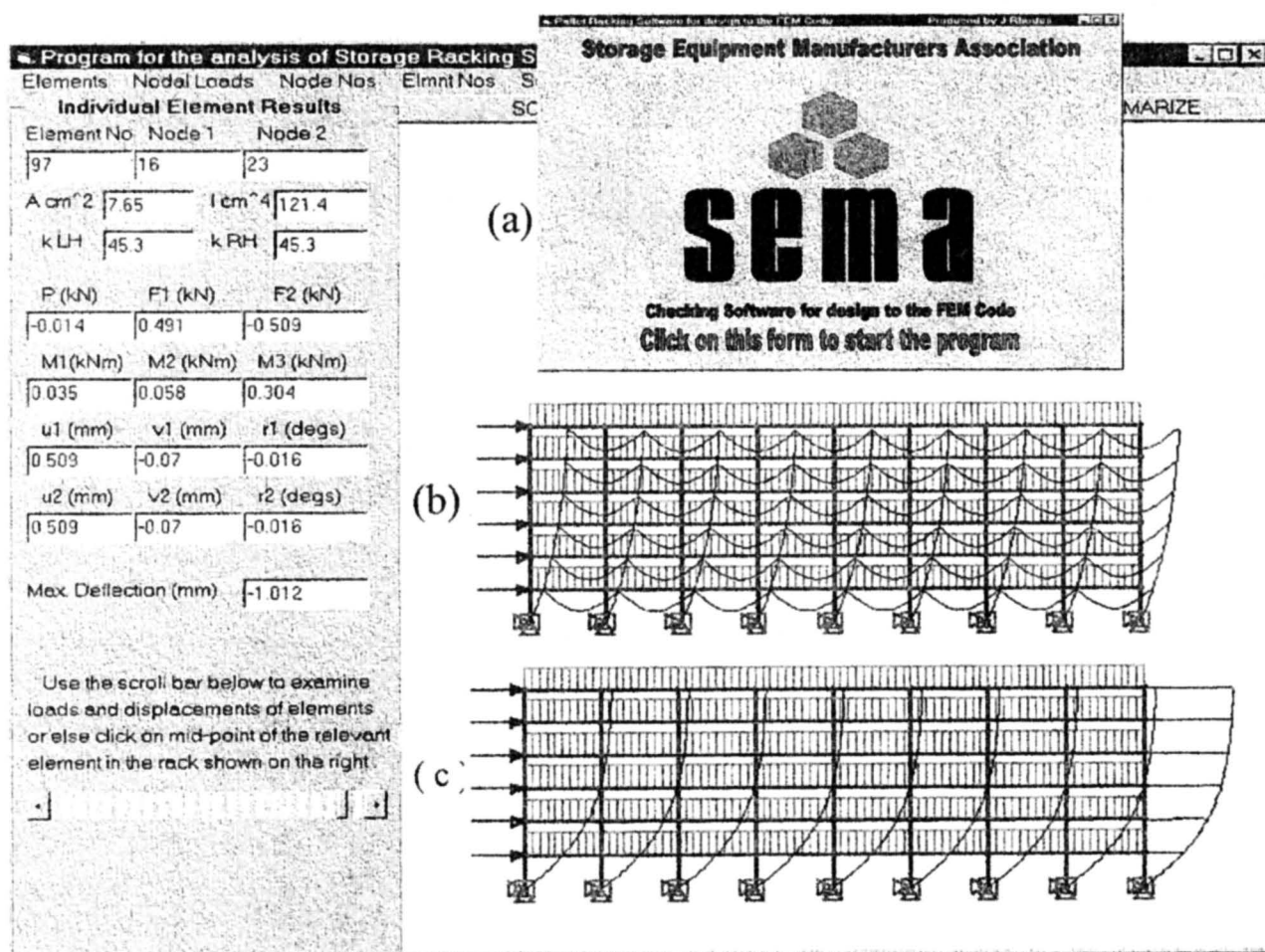


Fig. 7. Program for the analysis of storage racking

linear range, at any specific loading in the non-linear range and also to find the overall buckling capacity in absence of yielding. Design analysis of the individual elements subjected to the loads produced by the relevant non-linear analysis was then carried out and the consequences of down-aisle effects and cross-aisle effects acting simultaneously were assessed using interaction equations as specified by the FEM code.

The program produced standard, fully loaded racking systems automatically upon specification of several variables and these could then be varied at will by using mouse clicks to modify individual bays, beams, loads etc. and to alter, add or remove loads, members and supports. Analysis of cross-aisle behaviour, either linear analysis or analysis to any load using non-linear analysis was then carried out with regard to both down-aisle and cross-aisle effects and the FEM rules were then applied to the members.

Fig. 7 shows a combination of some screen details from this program. Item(a) shows the start screen, item (b) shows the deflected form in the initial stages of loading, where beam and upright deflections are of the same order and item (c) shows the deflected form near ultimate load, where the high column loads produce much greater amplification of deflection magnitude than the relatively small axial loads in the beams.

The final screen of this program produces the main results of the nonlinear analyses and those given by the subsequent application of the relevant FEM checking procedures. The program is used for assessment of racking design to the FEM code.

7. SUMMARY

The writer's involvement in producing user friendly computer programs have cost him many many hours of frustration and countless days of hard work with little return, but also many moments of deep satisfaction and feelings of achievement. While the production of some types of computer programs, such as games etc., requires dedicated and skilled professional programmers, the evolution of user friendly structural analysis programs such as those shown in this paper, can be carried out by an amateur with little computing skill and no comprehension of structured programming using simple computer languages allied to some basic knowledge of structural analysis.

REFERENCES

- [1] BS 5950: Part 5. Code of practice for the design of cold formed sections, 1987
- [2] Frenot D., Teaching and analysis software for column buckling. MSc Thesis, University of Strathclyde, 1994
- [3] Cheung Y., The finite strip method in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends, Proc. Inst. C. Eng, 40, 1968, pp 1-7
- [4] Rhodes J., Khong P., Linear and non-linear analysis on the micro using finite strips, Proc. Stress Analysis and the Micro, Brunel University, London, 1988
- [5] Federation Europeene de la Manutention, Section X, Recommendations for the design of pallet racking and shelving, 2000

A REVIEW OF STABILITY PROBLEMS OF THIN-WALLED STRUCTURES DEVELOPED AT GDAŃSK UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

C. SZYMCZAK

Department of Structural Mechanics, Gdańsk University of Technology,
Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk, Poland

The present paper is intended to be a review of stability problems examined within the frames of the theory of thin-walled structures, developed at the Gdańsk University of Technology. Researches into the area discussed, have been conducted mainly in the Department of Structural Mechanics. In the fifties and sixties, major attention was paid to engineering problems of stability analysis of columns with non-deformable and deformable constant cross-section. Moreover, close consideration was given to the matter of stability of an arch as a part of the cable stayed bridge, as well as beams and columns with variable cross-section. In the eighties, selected problems of optimal design of columns and their post-buckling behaviour were investigated. Recently, more attention has been devoted to sensitivity-analysis -related problems and frame structures.

1. INTRODUCTION

In 1897, an influential editor of the liberal "Danzinger Zeitung", Heinrich Rickert, put forward the idea of creating the Technical University of Gdańsk. In the same year, the emperor William II declared to create the University, and according to the act of October 1st, 1904, the Royal Technical University of Danzig (Königliche Technische Hochschule zu Danzig) was established. The accepted organisation scheme was similar to that of the Technical University in Aachen, with the exception of the Mining Faculty, instead of which the Ship Building Faculty was created. There were six faculties with 28 permanent professors and 12 associate professors. The buildings of the University were designed for 600 students, whereas 187 students were registered in 1907. Between World War I and World War II, the University of the Free City of Gdańsk expanded with the number of students reaching 1700. In May 1945, following the end of World War II, the University was transformed into the Polish state academic school. Currently, the Gdańsk University of Technology is the biggest, fully autonomous technical university in the Northern Poland. Ten faculties educate more than 17 000 students. Next year's anniversary of the 10th Symposium on Stability of Structures coinciding with the celebration of the one hundred years of the Gdańsk University of Technology existence, together with the sixtieth anniversary of the Gdańsk University of Technology as a Polish university due in two years' time, invite to present a review of stability problems researched at the institution. The attention of the present study is confined to thin-walled structures and their importance in the practical application, due to the limited space of this paper. There are two departments at the Gdańsk University of Technology where stability problems of thin-walled members have been examined: the Department of Strength of Materials at the Faculty of Mechanical Engineering, and the

Department of Structural Mechanics at the Faculty of Civil Engineering. Since a vast number of noteworthy and significant papers produced so far have been written in Polish, they are not available for English language readers. Accordingly, the main purpose of this review is to enable a broader group of readers to get familiar with the achievements discussed.

2. STABILITY OF COLUMNS AND ARCHES

It is noteworthy that the first paper devoted to torsional stability of axially compressed, thin-walled columns with open cross-section, was published by Wagner [1] from the Royal Technical University of Danzig before World War II. The critical buckling loads were found under assumption that cross-section rotates about the shear centre of cross-section. Kappus proved later (see references in [2]), that the supposition mentioned is correct only in the case of the gravity centre coinciding with the shear centre of cross-section. Moreover, all assumptions of classical theory of thin-walled beams with non-deformable cross-section were considered. A comprehensive and very valuable, from the practical point of view, review of stability problems of thin-walled columns with open monosymmetric or bisymmetric cross-section is provided by Dąbrowski [2]. Special attention is paid to the role of torsional buckling of axially or eccentrically compressed columns. A unique instance of buckling of axially compressed column with arbitrary cross-section, accounting for a restraint upon its flexure, is presented in Ref. [3]. The problem of stability of a bridge structure consisting of a single main girder connected with a stiffening arch with thin-walled monosymmetric open cross-section by means of hangers is considered by Dąbrowski [4]. Fundamental differential equations of stability of curved thin-walled bars are derived and solved with aid of Fourier's series. Piątek [5] presents a general solution to the problem of torsional-flexural buckling of thin-walled beams. The effect of a cross-section deformability on the buckling of a thin-walled bar is investigated by Rutecki [6].

Chudzikiewicz [7-13] published a series of papers focused on the effect of a cross-section deformation on various kinds of critical buckling loads. Firstly, some special problems are considered: flexure buckling of an I column [7], torsional buckling of an I column [8], flexure and torsional-flexure buckling of a channel column [9], local buckling of a box column [10] and finally, in [11,12] a general problem of stability accounting for deformability of cross-section is investigated. Moreover, an attempt to examine an effect of diaphragms on stability of a channel column [13], as well as an I column [14] is undertaken. All these solutions were found with aid of the Fourier's series, assuming that the member was to be built up with some plates. It should be emphasized that researches discussed were considered original and pioneer in those times.

The monograph [15] includes one chapter referring to stability problems, which is devoted to static and stability analysis of thin-walled members with open and closed cross-section.

Nevertheless, in all the above papers it is assumed that the members have constant cross-section. Cywiński [16-18] was the first author who paid attention to torsional buckling of columns with variable bisymmetric cross-section. Solution of the fundamental differential equation of torsional buckling [16] proves, that the critical load for an I-column with concave parabolic width of flanges is higher than in the case of a

column with constant maximum cross-section [17]. This somewhat unusual property is not only confirmed in [19-22], but also presented with respect to the step variable width of flanges, in which the critical load is smaller than identical one for constant minimum cross-section. Reasons explaining the property of torsional buckling are provided by Dąbrowski [23] and Cywiński [24]. A number of further investigations on this paradox are shown in Refs. [25-27]. Recently, comparative study of torsional buckling of I-columns with variable width of flanges [28, 29] based on the theory of thin-walled beams and the fully non-linear theory of shells, has confirmed to certain extent the property of torsional buckling under consideration.

The influence of an initial curvature of the I column axis on the torsional buckling load is investigated on the basis of the theory of a thin-walled beam with non-deformable cross-section [30-31], and the fully non-linear shell theory [32]. It has been observed that the critical load decreases due to the imperfections mentioned as well as local buckling of the flanges. A localization of the mode of local buckling should be noticed too.

Frequently, in order to increase torsional stiffness of members with open cross-section, different kinds of stiffeners such as: transverse plate stiffeners, battens or lattice stiffeners are used. Thus, a question arises - how to estimate this effect on the critical buckling loads? An answer to this question related to torsional buckling can be found in Ref. [33]. The effect of elastic support on the critical loads of both flexural and torsional buckling, is considered by Szymczak [34].

As far as rolled or welded members are concerned, as a result of certain initial stresses arising there, an interesting, from the practical point of view, problem of their influence on the critical loads emerges. The problem considered, which is related to torsional buckling of I columns and cruciform columns, was solved within assumptions of classical theory of thin-walled beams [35, 36]. In the above-mentioned references, the elastic range of the material behavior is assumed. In Refs. [37,38], torsional buckling of columns with bisymmetric cross-section made of material such as, for instance, aluminium, which obeys non-linear stress-strain relationship, is investigated.

Remarks on the flexural-torsional stability of a thin-walled arch are presented in Ref. [39], whereas remarks concerning torsional buckling of a thin-walled column with cruciform cross-section in Refs. [40,41]. Torsional buckling of thin-walled continuous members is discussed by Cywiński [42].

A noteworthy review of papers focused on stability problems, including thin-walled structures, was produced by Dąbrowski [43]. The general report [44] contains a brief state-of-art within the field considered together with a compact review of papers from relevant Working Session.

3. POST-BUCKLING BEHAVIOUR OF MEMBERS

It is a well-known fact that post-buckling analysis is necessary so as to determine the sensitivity of the critical loads upon inevitable geometric imperfections. The post-buckling behaviour of an axially compressed I column with constant and variable width of flanges after torsional buckling is determined in Refs. [45-48]. It should be noticed that all bifurcation points prove to be symmetric and stable, which means that the critical loads are not sensitive to unavoidable initial geometric imperfections. Similar investigation, yet with accounting for the residual stresses, is carried out in Ref. [35].

Small effect of the initial stresses on the post-buckling equilibrium paths is noticed. Applying the same perturbation procedure, the post-buckling behaviour of the I column with an elastic restraint [34], and the column made of non-linearly elastic material [37,38] are examined. The ultimate load of an axially compressed column with box or cruciform cross-section is determined by Dąbrowski [49]. A number of remarks on optimal design of the columns are also included. Chróścielewski et al [50,51] presents the FEM of non-linear post-buckling analysis of a thin-walled box in the elastic range of the beam material behavior. Selected problems of the FEM post-buckling analysis are shown in Ref. [52]. Post-buckling behavior of hybrid plate girders with web openings carried out by the FEM is investigated in Refs. [53,54]. A review of certain problems concerning non-linear analysis and post-buckling analysis of thin-walled members is provided in Ref. [55].

4. OPTIMAL DESIGN AND SENSITIVITY ANALYSIS

Application of non-linear programming method to optimal design of axially compressed steel I columns or with channel constant cross-section is presented by Szymczak [56], whereas for eccentrically compressed columns by Mikulski, Szymczak [57]. Application of the Pontryagin's maximum principle to optimisation of I columns with respect to eigenvalues is shown in Ref. [58, 59]. It allows to prove that the above property (Chapter 2) of the critical load of torsional buckling of I columns with variable cross-section to overpass limits described by the loads corresponding to the extreme constant cross-sections, is inherently related to the structure of the fundamental differential equation. Obviously, this property does not hold in the case of flexural buckling. Selected problems dealing with sensitivity analysis of the critical loads of flexural-torsional buckling of a monosymmetric and bisymmetric I beam are investigated in Refs. [60-63]. Two parametric loads consisting of flexural moment and axial end loads are also considered and the first variation of the stability boundary is determined within the frames of classical theory of thin-walled members. The first variation of the critical torsional buckling load of an axially loaded I column due to the support shifts is derived by Szymczak [64]. The accuracy of sensitivity analysis is also examined.

For the purposes of sensitivity analysis of the critical loads of torsional buckling carried out in Refs. [65-67], various kinds of stiffeners are taken into account. The simplified formulas for the stiffener's stiffness given in literature are applied in this study. Sensitivity analysis of capacity of a column in accordance with Polish Code PN-88/B-03243, accounting for stability conditions, is described in Ref. [68]. The effect of linear elastic foundation on sensitivity analysis of the critical torsional buckling load of thin-walled columns with bisymmetric cross-section is examined in Ref. [69]. Refs.[70-74] show the application of sensitivity analysis to torsional and flexural-torsional buckling of thin-walled members. The accuracy of sensitivity analysis is determined on the basis of detailed analysis.

A review of papers devoted to buckling of the frames assembled with thin-walled members is included in Ref. [75].

5. CONCLUSIONS

The review of stability problems presented, is restricted to thin-walled members only due to the limited number of pages imposed. A large number of papers loosely related to these problems, for instance some basic theoretical considerations of non-linear state of stresses and strains of thin-walled members, which are crucial for proper description of stability and post-buckling behaviour, are omitted. Additional references can be found in the papers quoted.

The present review allows to draw the following conclusions:

1. The majority of classical stability-related problems are considered within the frames of the theory of thin-walled beams with non-deformable cross-section. Nowadays, it is possible to investigate stability and post-buckling problems on the more general basis, not so rigorously restricted by classical theory assumptions, however, it should be noticed that the engineering codes and other regulations are usually based on the theory of beams with non-deformable cross-section. It should be also emphasized that although analysis and stability problems are well developed with reference to straight-axis members, yet in the analysis of structures such as frames or grids assembled with thin-walled members undergoing torsion, certain specific problems related to bimoment distribution in nodes arise (see [75]). Recently, a model of a frame consisting of the node superelements mentioned in Ref. [74] has been successfully applied in static analysis of frames.

2. Lately, attention of the researches carried out has been focused on the optimal design and sensitivity analysis problems. The first variation of the critical buckling loads, described by means of sensitivity theory, is very useful for reanalysis of the structures due to the design variable changes, as well as in the optimisation and parametric identification of the structures. In the author's opinion, especially the latter one will be of great importance in further improvement of the engineering assessment of a structure's behaviour.

3. It should be mentioned that some extremely interesting, from the practical point of view, problems of stability analysis of thin-walled members are not developed in appropriate manner. These are, for instance, those dealing with: members with curvilinear axis, members with arbitrary, not only bisymmetric or monosymmetric, cross-section, multimodal buckling and post-buckling behavior of thin-walled structures. Generalization of the problems mentioned above to the structures made of materials with non-linear stress-strain relations appear promising.

ACKNOWLEDGEMENTS

The financial support of the Polish State Committee for Scientific Research under Grant No. 7 T07E 01519 is gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] Wagner H., Verdrehung und Knickung von offenen Profilen, Festschrift XXV Jahre Technische Hochschule, Danzig, 1929, pp.329-344.

- [2] Dąbrowski R., Some practically important cases of torsional buckling of thin-walled bars, *Archiwum Inżynierii Łądowej*, 1, 1956, pp.45-108 (in Polish).
- [3] Dąbrowski R., The effect of torsion on buckling of thin-walled member with restricted flexure deformation, *Archiwum Inżynierii Łądowej*, 1, 1956, pp.169-176 (in Polish).
- [4] Dąbrowski R., Stability of a single girder bridge, *Rozprawy Inżynierskie*, 4, 1956, pp.579-633 (in Polish).
- [5] Piątek M., Flexural-torsional thin-walled beams in general case, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 4, 1953 (in Polish).
- [6] Rutecki J., Instability of thin-walled bar with open cross-section accounting for its deformability, *Archiwum Mechaniki Stosowanej*, 3, 1951, pp. 437-460 (in Polish).
- [7] Chudzikiewicz A., The influence of the deformability of the cross-section on the Eulerian critical force of thin-walled column, *Rozprawy Inżynierskie*, 8, 1960, pp. 101-119 (in Polish).
- [8] Chudzikiewicz A., The influence of the deformability of the cross-section on the critical force of torsional buckling of an I-column, *Rozprawy Inżynierskie*, 8, 1960, pp. 177-186 (in Polish).
- [9] Chudzikiewicz A., Bending and flexural-torsional buckling of a channel with deformable cross-section, *Rozprawy Inżynierskie*, 8, 1960, pp. 177-186 (in Polish).
- [10] Chudzikiewicz A., Instability of thin-walled bar due to deformation of cross-section, *Rozprawy Inżynierskie*, 8, 1960, pp. 47-61 (in Polish).
- [11] Chudzikiewicz A., General theory of stability of thin-walled bars with deformable cross-section. Part I. Bars with simple cross-section, *Rozprawy Inżynierskie*, 8, 1960, pp. 421-461 (in Polish).
- [12] Chudzikiewicz A., General theory of stability of thin-walled bars with deformable cross-section. Part II. Bars with composite cross-section, *Rozprawy Inżynierskie*, 8, 1960, pp. 803-843 (in Polish).
- [13] Chudzikiewicz A., Effect of intermediate diaphragms on stability of thin-walled bar, *Rozprawy Inżynierskie*, 9, 1961, pp. 193-207 (in Polish).
- [14] Chudzikiewicz A., Effect of flexural stiffness of diaphragms on stability of thin-walled bar, *Rozprawy Inżynierskie*, 9, 1961, pp. 745-756 (in Polish).
- [15] Rutecki J., *Thin-walled structures*, PWN, Warsaw 1966 (in Polish).
- [16] Cywiński Z., Equations of torsional buckling of I-bar with variable cross-section, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, 162, 1970, pp.19-41 (in Polish).
- [17] Cywiński Z., Kollbrunner C. F., *Drillknicken dünnwandiger I-Stäbe mit veränderlichen, doppelt-symmetrischen Querschnitten*, Institut für bauwissenschaftliche Forschung, 18, 1971, Verlag Leemann, Zürich.
- [18] Cywiński Z., Kollbrunner C. F., *Neues zu einem Paradoxon des Drillknickens*, Institut für bauwissenschaftliche Forschung, 50, 1982, Verlag Leemann, Zürich.
- [19] Szymczak C., Torsional buckling of thin-walled bars with bisymmetric cross-section, *Rozprawy Inżynierskie*, 26, 1978, pp.323-330 (in Polish).
- [20] Szymczak C., Torsional vibrations of thin-walled bars with bisymmetric cross-section, *Rozprawy Inżynierskie*, 26, 1978, pp.267-274 (in Polish).
- [21] Szymczak C., On torsional buckling thin-walled I-columns, III Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Łódź, 1979, pp.271-278 (in Polish).

- [22] Szymczak C., On the buckling and post-buckling behaviour of thin-walled columns with bisymmetric open cross-section, Second Regional Colloquium on Stability of Steel Structures. Hungary, 1986, Proc. pp.301-307.
Stability of Steel Structures, ed. M. Ivanyi, Akademiai Kiado, Budapest, 1988, **2**, pp.903-909.
- [23] Dąbrowski R., On a certain paradox in torsional buckling of I-columns, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, **331**, 1981, pp.75-80 (in Polish).
- [24] Cywiński Z., Facts on certain paradox, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, **331**, 1981, pp.93-111 (in Polish).
- [25] Cywiński Z., The paradox of torsional buckling, Mechanika Teoretyczna i Stosowana, **4**, 1981, pp.799-816 .
- [26] Cywiński Z., On certain paradox of torsional buckling. State-of-the-art, Second Regional Colloquium on Stability of Steel Structures, Hungary, 1988, Proc. pp.51-58.
- [27] Cywiński Z., 25 years of the torsional buckling paradox, Proc. 5th Int. Colloquium „Stability and Ductility of Steel Structures”, Nagoya, 1997, pp.467-474.
- [28] Chróścielewski J., Lubowiecka I., Szymczak C., Comparative study of torsional buckling of thin-walled I columns”, X Int. Scientific-Technical Conference „Metal Structures – Gdańsk 2001”, Gdańsk, Ed. J. Ziółko, E. Supernak, **2**, pp. 357-364.
- [29] Szymczak C., Chróścielewski J., Lubowiecka I., On the paradox of torsional buckling of thin-walled I columns, Archives of Civil Engineering, **44**, 2003, pp. 3-13.
- [30] Szymczak C., Effect of geometric imperfections on critical load of torsional buckling of I-column, Proc. IV Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Sulejów 1985, pp.91-94 (in Polish).
- [31] Szymczak C., Torsional buckling of I-columns with initial curvature, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, **408**, 1987, pp.209-216 (in Polish).
- [32] Chróścielewski J., Lubowiecka I., Szymczak C., The effect of initial curvature on critical load of torsional buckling of I-column, Proc. VIII Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane, 1997, pp.55-60 (in Polish).
- [33] Szymczak C., Effect of stiffeners on critical loads of thin-walled members, Inżynieria i Budownictwo, **53**, 1997, pp.364-366 (in Polish).
- [34] Szymczak C., Effect of elastic restraints on buckling and initial post-buckling behaviour of thin-walled column, Archives of Civil Engineering, **40**, 1999, pp. 601-615.
- [35] Szymczak C., Effect of residual stresses on buckling and initial post-buckling behaviour of thin-walled columns, Archives of Civil Engineering, **39**, 1998, pp. 287-297.
- [36] Szymczak C., Mikulski T., Iwicki P., The effect of initial welding stresses on torsional buckling of member with bisymmetric cross-section, Proc. Konferencja "Zbiorniki cienkościenne", Karłów, 1998, pp.79-82 (in Polish).
- [37] Szymczak C., The effect of material non-linearity on buckling and post-buckling behavior of axially compressed columns, Int. Colloquium "Stability of Steel Structures", Budapest, 1990, Preliminary report, **1**, pp.111-118.

- [38] Szymczak C., The effect of material non-linearity on buckling and post-buckling behavior of axially compressed columns with bisymmetric cross-section, Proc. V Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Cedzyna, 1988, Pp.116-119 (in Polish).
- [39] Dąbrowski R., Discussion on a paper by Papangelis J.P. and Trahair J. "Flexural-torsional buckling of arches", J. Struct. Engng. ASCE, **115**, 1989, p.242.
- [40] Dąbrowski R., On torsional stability of cruciform columns, J. of Constructional Research, **9**, 1988, pp.51-59.
- [41] Dąbrowski R., On stability of thin-walled columns with cruciform cross-section, Second Regional Colloquium on Stability of Steel Structures, Hungary, 1988, Proc. pp.211-218.
- [42] Cywiński Z., On torsional buckling of thin-walled continuous members, Miscellany dedicated to the 65th birthday of academician professor dr Nikola Hajdin, Ed. Naerlović-Veljaković, University of Belgrade, 1988, pp.151-160.
- [43] Dąbrowski R., Stability, Plenary lecture, VII Int. Scientific Technical Conference "Metal Structures", Gdańsk, 1985, **6**, pp.24-50 (in Polish).
- [44] Cywiński Z., Branicki C., Compression members (general report), Int. Colloquium "Stability of Structures", Budapest, 1995, **1**, pp.1857-1862.
- [45] Szymczak C., Post-buckling behaviour of axially compressed I column, Proc. XXIV Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, **1**, 1978, pp.243-250 (in Polish).
- [46] Szymczak C., Post-buckling behaviour of I column, (in) Thin-walled structures. Recent technical advances and trends in design, research and construction, International Conference at the University of Strathclyde, Glasgow 1979, Ed. J. Rhodes and A. C. Walker, Granada Publishing Ltd. London 1980, pp.28-39.
- [47] Szymczak C., Post-critical behaviour of thin-walled I-bar after torsional buckling, Archiwum Inżynierii Lądowej, **25**, 1979, pp.399-410 (in Polish).
- [48] Szymczak C., Buckling and initial post-buckling behavior of thin-walled I columns, Computers and Structures, **11**, 1980, pp.481-487.
- [49] Dąbrowski R., On the stability of thin-walled bars with box or cruciform cross-section, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, **370**, 1984, pp.27-44 (in Polish).
- [50] Chróścielewski J., Non-linear FEM analysis of space box-plate systems, Problems of modeling, mesh generation and solution control, IX Konferencja "Metody komputerowe w mechanice", Kraków-Rybro, 1989, pp.123-130 (in Polish).
- [51] Chróścielewski J., Piekarczyk M., Siepak J.S., Numerical analysis of the post-buckling behaviour of a steel box-girder, VII Int. Scientific Technical Conference „Metal Structures”, Gdańsk, 1989, pp.44-51 (in Polish).
- [52] Chróścielewski J., Szymczak C., Wuttrich R., Numerical analysis of non-linear behaviour of thin-walled structural elements, Proc. Konferencja Naukowa „Konstrukcje i mechanika okrętu”, Szczecin 1996, pp.49-59. (in Polish).
- [53] Chróścielewski J., Cywiński Z., Smoleński W., Non-linear space analysis of high-rise building floor beams with openings, Proc. Int. Conference on High-rise Buildings, Nanjing, China, 1989, pp.131-136.
- [54] Chróścielewski J., Cywiński Z., Smoleński W., Post-buckling behaviour of hybrid plate girders with web openings, Int. Colloquium "Stability of Steel Structures", Budapest, 1990, Preliminary report, **2**, pp.13-20.

- [55] Chróścielewski J., Makowski J., Szymczak C., Some problems of nonlinear analysis of thin-walled members, Sixth Polish-Hungarian seminar „Computers and the future of structural mechanics”, Kraków, 1995, Ed. Cichoń C., Pabisek E., Pamin J., Radwańska M., Rodzynkiewicz B., Suberlak K., pp. 48-50.
- [56] Szymczak C., Optimal design of axially compressed thin-walled columns, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, **294**, 1978, pp.4350 (in Polish).
- [57] Mikulski T., Szymczak C., Optimal design of compressed columns with open cross-section, *Inżynieria i Budownictwo*, 1986, pp.454-457 (in Polish).
- [58] Szymczak C., Optimization of thin-walled I bars with bisymmetric cross-section subject to eigenvalue constraints, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, **35**, 1980, pp.86 (in Polish).
- [59] Szymczak C., On torsional buckling of thin-walled I columns with variable cross-section, *Int. Journal Solids and Structures*, **19**, 1983, pp.509-518.
- [60] Szymczak C., First variation of critical moment of flexural-torsional buckling of thin-walled I beam, *Proc. VII Sympozjum Stateczności Konstrukcji*, Bielsko-Biała, 1994, pp.155-160 (in Polish).
- [61] Szymczak C., Sensitivity analysis of beams with respect to flexural-torsional buckling, *Proc. IX Int. Conference "Metal Structures"*, Kraków, 1995, Preliminary report, **2**, pp.235-240 (in Polish).
- [62] Szymczak C., Sensitivity analysis of critical loads of flexural-torsional buckling of thin-walled I beam, *Archives of Civil Engineering*, **40**, 1999, pp. 401-412.
- [63] Szymczak C., Sensitivity analysis of critical loads of thin-walled member with monosymmetric cross-section, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, **585**, 2001, pp. 265-272 (in Polish).
- [64] Szymczak C., Effect of the support shift on critical load of torsional buckling, *Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej*, **520**, 1995, pp.261-267 (in Polish).
- [65] Szymczak C., On effect of warping stiffeners on torsional buckling of column, *Księga Jubileuszowa Profesora Zbigniewa Kączkowskiego*, Warszawa 1996, pp. 377-384.
- [66] Iwicki P., Sensitivity analysis of critical torsional buckling load of thin-walled columns with stiffeners, *Proc. IX Sympozjum Stateczności Konstrukcji*, Zakopane 2000, Ed. Królak M., Kowal-Michalska K., Łódź, *Proc.* pp.69-76.
- [67] Szymczak C., The effect of stiffeners on variation of critical load of torsional buckling of column with bisymmetric cross-section, *Proc. VIII Sympozjum Stateczności Konstrukcji*, Zakopane, 1997, pp. 259- 264 (in Polish).
- [68] Szymczak C., Iwicki P., Sensitivity analysis of capacity of column with accord to Polish Code PN-88/B-03243, *Inżynieria i Budownictwo*, **52**, 1996, pp.452-454 (in Polish).
- [69] Budkowska B.B., Szymczak C., Eigenvalue sensitivity analysis of thin-walled beams on elastic foundation, *Proc. 13th Australasian Conference on the Mechanics and Materials*, University of Wollongong, Australia, 1993, **1**, pp.145-151.
- [70] Iwicki P., Mikulski T., Szymczak C., Eigenvalue sensitivity analysis of thin-walled members, *32nd Solid Mechanics Conference*, Zakopane, 1998, pp.181-182.

- [71] Szymczak C., Mikulski T., Iwicki P., "Some problems of sensitivity analysis of thin-walled members with open cross-section", 4th Euromech Solid Mechanics Conference, Metz, 2000, Book of abstracts p.565.
- [72] Szymczak C., Mikulski T., "Selected problems of sensitivity analysis critical loads of thin-walled members with open cross-section, Proc. IX Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane 2000, 269-276 (in Polish).
- [73] Szymczak C., Mikulski T., Iwicki P., "Problems of sensitivity analysis of thin-walled structures, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, Politechnika Śląska, 2000, pp.129-134 (in Polish).
- [74] Szymczak C., "Sensitivity analysis of thin-walled members, problems and applications", Thin-Walled Structures, 41, 2003, pp. 271-290.
- [75] Cywiński Z., "On buckling of thin-walled frames, Proc. Second Regional Colloquium on Stability of Steel Structures, Hungary, 1988, pp.157-160.

A SURVEY ON STABILITY ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC PLATES AND SHELLS

J. ZIELNICA

Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Poznańskiej
Piotrowo 3, 60-965 Poznań, Poland

A general approach in stability analysis of elastic-plastic shell structures is presented. Among all, cylindrical shells under axisymmetrical loads were discussed and analysed preferably, because their application in engineering practice is very important. Also, spherical and conical shells of different shape were considered giving both analytical and numerical solutions. Computer methods are preferred in the solutions, because in most cases the resulting equations of stability problems are transcendental, so, the paper presents the main topics on the numerical iterative algorithms and their computer implementation. The algorithms make possible to perform a specific analysis of the considered problems, with taking into consideration possible imperfections, geometrical and material nonlinearities, boundary conditions and different loadings.

1. INTRODUCTION

Stability analysis is very important in linear and nonlinear strength analysis of thin-walled structures. Thin-walled elements have many advantages, as lightweight, resisting the large loadings, thermoinsulation properties (like sandwich structures). Proper design of such structures is a specific challenge to engineers. Now, the analysis limited to elastic states is not sufficient; the knowledge of all steps from first plastic deformations up to the limit load is essential. When the elastic-plastic material model is accepted in the analysis then the total evaluation of structure behaviour will be more close to real conditions. A complex analysis, considering stability and plastic deformations is required in many branches of engineering sciences, like design of ships, planes, modern civil engineering structures, and chemical equipment. A noticeable development of theory and methods of analysis of plate and shell structures observed last time results from the need for more comprehensive calculation methods of complex systems used in modern load carrying structures. The conclusions from investigations show that plastic flow of a material is very complicated (see [5]). Such properties of plastic materials as nonlinear behaviour anisotropy, influence of dynamical load on material behaviour should be considered in the inelastic analysis of structures. However, in practice the theory that considers only some aspects of such effects is quite sufficient. This paper discusses only the mechanical effects related with stability of elastic-plastic isotropic and anisotropic shells without considering thermal effects, and strain ratio. Because even in such simplified approach the resulting elastic-plastic stability equations are very complicated and mathematical difficulties are commonly known, almost all theoretical investigations are focussed on the designing of effective numerical algorithms that use the finite element method. However, having in mind engineering applications, the problems discussed in this paper deal with analytical and numerical-analytical methods that, otherwise, are still the subject of extensive investigations. Less attention has been

paid for the application of the finite element method in elastic-plastic stability problems, because the literature related with these problems is quite extensive and it can be the subject of a separate paper.

2. GENERAL APPROACH IN STABILITY OF ELASTIC-PLASTIC SHELLS

In static analysis of perfect structures, there are two phenomena commonly termed “buckling”, namely: collapse at the maximum point in load versus deflection and bifurcation buckling. The complexity of elastic-plastic stability loss of shells can be well explained using load displacement curves presented in Fig. 1. If we take, for example, a perfect axially compressed cylindrical or conical shell, it deforms axi-

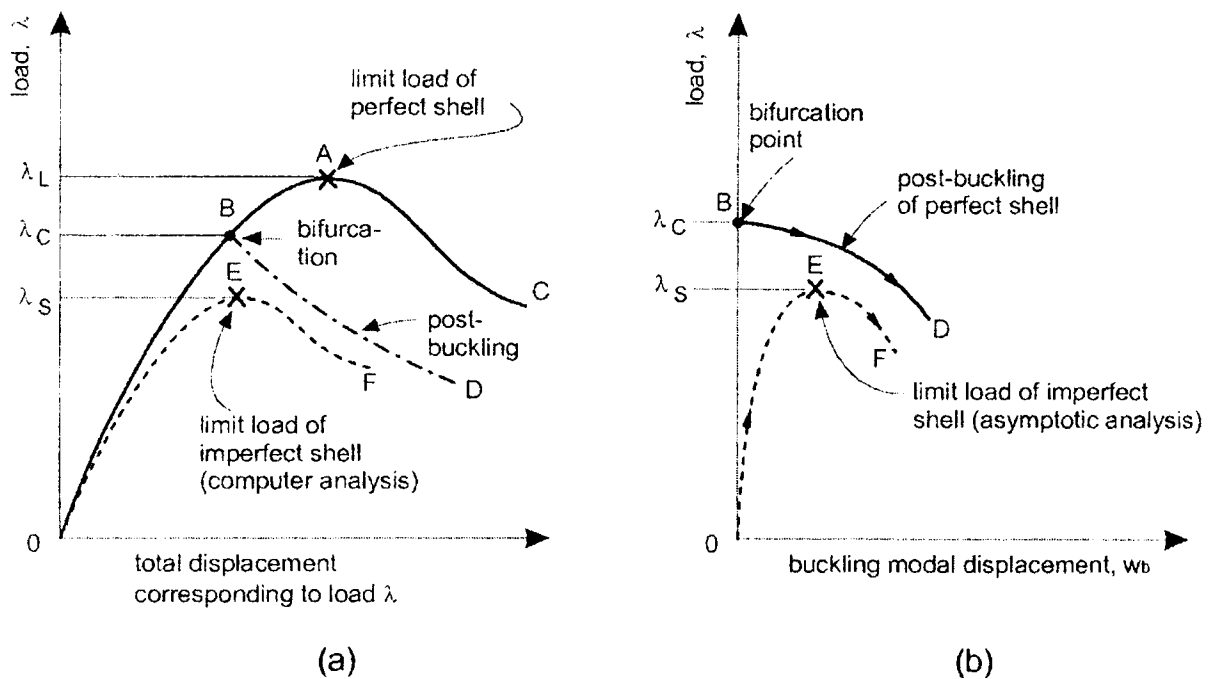


Fig. 1. Limit and bifurcation points on load-deflection curves
(a) General nonlinear analysis, (b) Asymptotic analysis

symmetrically along the path OA until a maximum or limit load λ_L is reached at point A. If the axial load λ is not sufficiently relieved by the reduction in axial stiffness, the perfect shell will fail at this limit load, following either the path AC along which it continues to deform axisymmetrically, or some other path along which it first deforms axisymmetrically and then nonaxisymmetrically. Limit point buckling, called “snap through”, occurs at point A and bifurcation point at point B. The significance of the word “plastic” is that buckling of either type occurs at loads for which some or all of the structural material has been stressed beyond its yield limit. In the case shown in Fig. 1(a) the collapse load of the perfect structure λ_L is of less engineering significance than the bifurcation load λ_C . In the case of real structures which contain unavoidable imperfections, there is no such thing as bifurcation buckling, see Fig. 1(b). The actual structure will follow a fundamental path OEF, with the failure corresponding to “snap through” at point E at the collapse load λ_S . The bifurcation buckling analytical model is

valid in that it is convenient and often leads to a good approximation of the actual failure load and buckling mode [2].

The diagrams shown in Fig. 1 illustrate the two very different approaches to the plastic buckling problems. In the general nonlinear approach the computations involve essentially a "prebuckling" analysis, or a determination of the unique equilibrium states along the fundamental path OEF (Fig. 1a). In the asymptotic approach (Fig. 1b) the prebuckling state is usually statically determinate. The secondary path BD of the perfect structure and the limit point E on the fundamental path of the imperfect structure are determined by expansion of the solution in a power series of the bifurcation modal amplitude that is asymptotically exact at the bifurcation point B.

In general, systems involving plastic flow are nonconservative. The energy required to bring a structure from its prebifurcation state to an adjacent buckled state depends upon the path of transition if any of the material is loaded into the plastic region. Hill [3,4] has shown, however, that as long as the infinitesimal path is reasonably direct, the variation in infinitesimal energy dissipation from one path to another consists of higher order terms only.

Before the 1970's bifurcation buckling analyses involving plasticity were applied to simple structures with uniform pre-stress. Sewell [6] gives an extensive survey and a bibliography with more than 600 papers. Basic difficulties were cleared up and paradoxes resolved. It is now clear that the nonconservative nature of plastic flow does not prevent the use of bifurcation buckling analysis to predict instability failure of practical structures; the concept of consistent loading of the material in the transition from the prebifurcation state to an adjacent post-bifurcation state permits the use of instantaneous prebifurcation material properties in the stability equations; and an investigation of the effect of very small initial imperfections on the collapse loads of columns indicates that the reduced shear modulus G obtained from deformation theory should be used in the stability equations even if there is no history of shear along the prebifurcation path.

Now, with the PC computers, it is feasible to calculate the elastic-plastic bifurcation buckling loads of rather complex structures, including large prebuckling deflections and elastic-plastic effects. Analysis of the bifurcation buckling of elastic-plastic structures dates the end of XIX century. Engesser [1] presented the tangent modulus theory for columns. He assumed that the total load on the column remains constant during buckling. In 1910, Karman [1] presented the Engesser theory again, with actual evaluation of the reduced modulus for rectangular and idealized H -sections and comparisons with tests. Until Shanley's paper appeared in 1947 [7] the reduced modulus or "double modulus" model was accepted as the exact theory of column action, even though the tangent modulus model gave better agreement with tests. Shanley [7] resolved the paradox showing that stability loss occurs under "increasing axial load". The "total loading" condition cited in the Shanley's paper justifies the use of the "tangent modulus" approach to bifurcation buckling problems of elastic-plastic shells. For bifurcation buckling of general shells under combined loading, in which the stresses are nonuniform and in which the prebuckling solution may be characterized by regions which are elastic or unloading and other regions which are loading into the plastic range, the "total loading" condition may be generalized by the statement that the rate of change of material properties or "tangent properties" in the pre-bifurcation analysis govern the eigenvalue analysis also.

Let us suppose that an eigenvalue and corresponding kinematically admissible mode have been determined from the consistent loading model. Now assume that a new nonlinear equilibrium analysis is performed for the shell with an infinitesimal imperfection of the same shape as this buckling mode. Since the imperfection is infinitesimal, the load-deflection behaviour will differ from that of the perfect shell only infinitesimally for loads smaller than the lowest eigenvalue obtained from the consistent loading model. If, as hypothesized, this eigenvalue were physically meaningless and the true bifurcation point lies a finite load increment above it, then the material of the infinitesimally imperfect shell would continue to load consistently right through the neighborhood of the bifurcation load calculated by means of the consistent loading model. It has just been hypothesized that the eigenvalue from the consistent loading model is physically meaningless because infinitesimal perturbations of the form of the buckling mode cause a finite amount of the material to unload suddenly. However, the material of an actual shell containing such a perturbation in geometry loads consistently at the eigenvalue calculated from the consistent loading model. Therefore, this eigenvalue must be physically meaningful and must correspond to a bifurcation point on the load-deflection curve of the perfect shell.

3. CONSTITUTIVE RELATIONS

The two theories of plasticity are used in stability analysis of elastic plastic structures, namely: theory of small elastic plastic deformations (Nadai-Hencky deformation theory) and plastic flow J_2 theory (Prandtl-Reuss). During the years when plastic buckling of uniformly stressed plates and shells was first being investigated, a paradox became apparent: Theoretical considerations and direct experimental evidence indicates that for general load paths flow theory is correct while deformation theory is not. However, bifurcation buckling analyses based on deformation theory conform better to experimentally determined buckling loads than do such analyses based on flow theory. The discrepancy may have to do with whether or not the instantaneous yield surface has corners. Experimental evidence on this point is contradictory. About half of the experiments indicate that corners develop on yield surfaces and half do not. The discrepancy in the prediction of bifurcation buckling loads is most pronounced in the case of an axially compressed cruciform column. If the column is not too long, it buckles in a torsional mode. The prebifurcation stress state is uniform compression while the bifurcation mode involves pure shear. In a flow theory involving a smooth yield surface the shear modulus remains elastic as the material of the column is uniformly compressed into the plastic range.

In cases involving no in-plane shear either in the prebuckling phase or in the buckling process, deformation theory still predicts lower bifurcation buckling loads than does flow theory. The axisymmetric buckling analysis of a spherical shell presented by Hutchinson [8] is a good example. Since J_2 deformation theory has given better agreement than has J_2 flow theory, and since the discrepancy is not entirely related to the difference in effective shear modulus this is prudent to perform stability analyses using both theories in order to establish the sensitivity of the predictions to the two theories.

The substantial difference between theory of elasticity and the said plasticity theory is that stresses and stress rate in plastic flow theory are related with strain rate by a nonholonomic constitutive plasticity law, which is plastic flow rule accompanied by the

H-M yield criterion generalized on stress hardening case in plastic region. Basic equations of this theory are as follows

$$D_{\dot{\epsilon}} = \lambda D_{\dot{\sigma}} + \frac{1}{2G} D_{\dot{\sigma}}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = \lambda s_{ij} + \frac{1}{2G} \dot{s}_{ij} \quad (1)$$

Here $D_{\dot{\epsilon}}$, and $D_{\dot{\sigma}}$ are deviatoric strain rate and stress rate, respectively, λ is stress hardening parameter which is to be determined from the yield condition. Taking in mind that plastic strain rate vector is directed perpendicular to yield surface at the point with coordinates determining the stress state at which yield criterion $F(\sigma_{ij})=0$ is satisfied, the plastic strain rates can be described in the following way

$$d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_m \right) + 3d\lambda (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m), \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_{kk}, \quad d\lambda = \frac{1}{2} \frac{d\bar{\epsilon}_i^p}{\sigma_i} \quad (2)$$

4. ASYMPTOTIC ANALYSIS AND GENERAL NONLINEAR ANALYSIS

When one says about asymptotic analysis it is necessary to distinguish the two main directions: post-bifurcation, and imperfection sensitivity in plastic range. All the work related with asymptotic analysis has been done by Hutchinson, Tvergaard and Needleman [10,11]. The theory represents extensions to the general theory of uniqueness and bifurcation in elastic-plastic solids derived by Hill [4] and the general post-buckling theory developed by Koiter for elastic structures [12]. At a bifurcation point where the buckling mode is unique, the general elastic post-buckling theory leads to an asymptotically exact expansion for the load parameter λ in terms of the bifurcation buckling modal amplitude, w_b :

$$\lambda / \lambda_c = 1 + a_1 w_b + a_2 w_b^2 + \dots \quad (3)$$

In general, three types of elastic initial post-buckling behavior are distinguished: *i)* $a_1 \neq 0$, *ii)* $a_1 = 0$ and $a_2 < 0$, *iii)* $a_1 = 0$, and $a_2 > 0$. The ultimate load carrying capabilities of the structures corresponding to type *(i)*, and *(ii)* are sensitive to initial imperfections while that represented by type *(iii)* is not. For the case *(i)*, which is asymmetric with respect to the sign of the buckling modal amplitude w_b , a negative imperfection amplitude w_{imp} converts bifurcation buckling into limit-point or “snap” buckling at a reduced load λ_s given by Koiter’s general theory as

$$\lambda_s / \lambda_c = 1 - 2\sqrt{-\rho a_1 w_{imp}}, \quad (4)$$

where ρ is a constant that depends on the imperfection shape. For the symmetric case *(ii)* the limit load of the imperfect structure is as follows

$$\lambda_s / \lambda_c \cong 1 - 3(-a_2 / 4)^{1/3} (-\rho a_1 w_{imp})^{2/3}. \quad (5)$$

The similar formula for initial post-buckling in cases where there are several buckling modes with the critical bifurcation point is given by Tvergaard [13].

The analogous behaviour of the structure one may distinguish for plastic post-bifurcation analysis. Bifurcation in the plastic range occurs under increasing load, so that unlike the elastic cases, the maximum load carrying capability of perfect structures is slightly above the bifurcation load λ_c and occurs at amplitudes w_b for which a finite amount of material has experienced strain reversal.

For the plastic range an asymptotic theory of initial post-bifurcation behavior of perfect structures was developed by Hutchinson [9]. An asymptotic expansion is obtained for the initial post-bifurcation load in terms of the bifurcation modal amplitude, w_b , as in Koiter's elastic post-buckling theory. In the plastic range, the treatment is complicated by the phenomenon of the elastic unloading which starts at bifurcation and spreads into the material as the buckling modal amplitude increases. When the buckling mode is unique the asymptotically exact expression for the load parameter λ in terms of the buckling modal amplitude w_b , is as follows

$$\lambda / \lambda_c = 1 + \lambda_1 w_b + \lambda_2 w_b^{(1+\beta)}, \quad (6)$$

with $0 < \beta < 1$. The value of β depends on the shape of the unloading regions [8]. The constant λ_1 is positive since bifurcation takes place under increasing load. Its value is determined by the requirement that plastic loading takes place. The coefficient λ_2 is negative, so that the truncated expansion [13] can be used to estimate the maximum support load of the perfect structure, which is slightly above the critical bifurcation load.

Hutchinson [8] brought the results of a numerical axisymmetric plastic buckling analysis of a perfect and imperfect spherical shells loaded by uniform external pressure. The shell material is characterized by a Ramberg-Osgood stress-strain relation

$$\varepsilon / \varepsilon_Y = \sigma / \sigma_Y + \alpha (\sigma / \sigma_Y)^n, \quad (7)$$

with $\alpha=0.1$ and $n=6$. From the reported results it is concluded that the bifurcation stress of the perfect shell is 1.5 times the effective yield stress σ_Y and is about 7% above the prediction of J_2 deformation theory of plasticity. Hutchinson also points out that imperfection sensitivity is not as severe a problem for plastic as it is for elastic structures because plastic buckling requires relatively high thickness-to-radius ratios for which it is much less difficult to manufacture "reasonably perfect" shells.

Hutchinson further discusses the effect of small imperfections on plastic buckling loads in [10]. There he provides an asymptotic estimation of the load at which elastic unloading begins. For many unstable structures this load is only slightly below the limit load. An asymptotic expression for the limit load, such as given by Koiter's general theory for elastic shells [Eqs. (4), and (5)] is not yet available. The main problem is that the limit load of the structure with an infinitesimal imperfection in the form of the critical bifurcation buckling mode is not infinitesimally close to the bifurcation point, as is true in the elastic range, but lies a finite distance away. Consequently, elastic unloading usually occurs before the limit point is reached. An asymptotic expansion of the initial part of the equilibrium solution for the imperfect structure is valid only to the

point at which elastic unloading begins. Representation of the remaining part requires a second asymptotic expansion that accounts for the growing elastic unloading region.

The majority of analyses involving plastic buckling are performed with general purpose computer programs that are based on the displacement method with finite element discretization. Application of the finite element method for the solution of nonlinear structural problems began in the early 1960's. For formulations with combined geometric and material nonlinearities, the tangent stiffness method is favored because it is required anyway for convergence in cases involving significant geometric nonlinearities. Currently the Total Lagrangian formulation seems to be favoured for applications involving large rotations and small strains. The favored solution strategy is modified Newton-Raphson method because it provides a reliable equilibrium check without the use of an inordinate amount of computer time. The classical plasticity theories used in stability analyses are based on the following assumptions: (i) materials are isotropic with respect to initial yielding, (ii) plastic deformation occurs with no change in volume and there is negligible plastic flow under pure hydrostatic pressure, (iii) yielding and subsequent response are insensitive to the rate of deformation, (iv) the material exhibits no hysteresis, (v) the total strain may be decomposed into elastic and plastic components, (vi) the relationship between stress and strain determined from a uniaxial test holds for multi-axial loading, in which "stress" is replaced by an "effective stress" quantity and "strain" is replaced by an "effective strain" quantity.

The most popular yield criterion in use today for nonlinear computerized analysis of metallic structures is due to M.T.Huber, and R. von Mises (1905, 1913). They realized that since negligible plastic flow occurs under hydrostatic pressure, the yield condition should be expressed in terms of deviatoric stress components and that this condition should not depend on coordinate transformations. Thus, the yield limit is defined in terms of the second invariant of these deviatoric components. Most applications of plastic analysis have been restricted to isothermal conditions. Non-isothermal plasticity forms the basis for the general-purpose computer programs described in [1].

Shell-of-revolution codes for plastic buckling represent implementation of two distinct analyses: (i) a nonlinear stress analysis for axisymmetric behavior of axisymmetric shell systems (including large deflections, elastic-plastic material behaviour, and creep), (ii) an eigenvalue analysis in which the eigenvalues represent bifurcation buckling loads of axisymmetric shell systems subjected to axisymmetric loads, and eigenvectors represent axisymmetric or nonsymmetric buckling modes. The efficiency of computer codes for shells of revolution derives from the fact that for the two types of analysis just listed the independent variables can be separated and an analytically two-dimensional problem thus reduced to a numerically one-dimensional model. Such a model leads to compact, narrowly banded stiffness, load-geometric, and mass matrices.

The independent variables in majority of computer codes are the arc length s measured along the shell reference surface, and the circumferential coordinate φ . The dependent variables are the displacement components u , v , w of the shell wall reference surface, which are of the form

$$\begin{aligned}
u(s, \varphi) &= u_o(s) + \sum_{n=n_{\min}}^{n=n_{\max}} u_n(s) \sin n\varphi, & v(s, \varphi) &= \sum v_n(s) \cos n\varphi, \\
w(s, \varphi) &= w_o(s) + \sum w_n(s) \sin n\varphi.
\end{aligned} \tag{8}$$

In the nonlinear prebuckling phase only the axisymmetric displacement components $u_o(s)$, and $w_o(s)$ in Eq. (8) are nonzero. Terms linear through quadratic appear in the total prebuckling energy functional. This energy functional, originally an integro-differential form, is converted into an algebraic form by appropriate discretization and numerical integration over the meridian coordinate. The simultaneous nonlinear algebraic equations obtained by minimization of the algebraic form with respect to nodal point displacement components u_{oi} and w_{oi} and Lagrange multipliers λ_i are solved by the separate procedures. Results from the nonlinear axisymmetric stress analysis are used in the eigenvalue analyses for plastic bifurcation buckling. The prebuckling meridian and circumferential stress resultants and the meridian rotation appear as known variable coefficients in the energy expression, which governs plastic bifurcation buckling. In the bifurcation buckling analysis the symmetric and non-symmetric displacement components contained in the summations indicated in Eq. (8) are considered to be infinitesimal, kinematically admissible variations of displacements from the "prebuckled" state $u_o(s)$, $w_o(s)$ obtained from the nonlinear stress analysis. Since the buckling displacements u_n , v_n , and w_n are infinitesimal, one need only retain linear terms in u_n , v_n , and w_n in the kinematic relations and constraint conditions. Hence the energy functional governing bifurcation buckling becomes a homogeneous quadratic form in nodal point displacement components u_{ni} , v_{ni} , and w_{ni} , and Lagrange multipliers λ_{ni} . The values of the load parameter (eigenvalues) which render the quadratic form stationary with respect to u_{ni} , v_{ni} , w_{ni} , and λ_{ni} represent buckling loads, and the normalized eigenvectors represent buckling modes. The minimum critical load as a function of circumferential wave number n is found by means of a separated strategy.

5. AN EXAMPLE OF NONLINEAR STABILITY ANALYSIS OF CONICAL SHELLS

We consider, as an example, large deformation stability problem of a conical shell with the assumptions that the shell material has elastic-plastic properties and the shell has initial shape imperfections of the order of shell thickness. The material of the shell follows a linear stress-strain relation with linear stress hardening. It also follows the plastic flow incremental theory of plasticity with H-M (Huber-Mises) yield criterion, and incompressibility of the material is taken into account in the plastic region. In general, the problem is reduced to a set of two non-linear partial differential equations of the fourth order with the two unknown functions, i.e. deflection function w , and stress function ψ . As a result of the solution the non-linear relation between the load and deflection parameter is obtained. The semi-analytical procedure is formulated for geometrically and physically nonlinear problems. It is evident that for the elastic-plastic stability of shells, while axisymmetric imperfections tend to be more significant in decreasing the stability of the structure, non-axisymmetric imperfections cause

circumferential bending which can influence the onset of yielding of the structure and hence reduce its inelastic buckling capacity. The stability equations are solved by Galerkin method and with the help of special numerical algorithms and iterative procedures. The accepted approximate functions strictly satisfy the boundary conditions of free-supported shell edges.

Stability equations are derived directly from general equations of the equilibrium of an infinitesimal shallow thin-walled shell of arbitrary shape; use is also made of strain compatibility equation. From the total number of six equilibrium equations for the shell element the first two equations (projection of forces onto longitudinal and circumferential direction) are satisfied identically if we introduce a force function ψ . We assume that stability loss of the considered system occurs if the stress state exceeds the yield limit of the shell's material, and variations of resultant forces and moments developed by stability loss of the shell are determined by summing up the stresses along the shell wall thickness. Thus, we get

$$\delta \mathbf{N} = \mathbf{B} \delta \underline{\varepsilon}, \quad \delta \mathbf{M} = \mathbf{D} \delta \underline{\sigma}. \quad (9)$$

Here, \mathbf{B} and \mathbf{D} are local stiffness matrices. The physical relations of plastic flow theory are expressed exclusively in term of tangent modulus E_t , $E_t = d\underline{\sigma} / d\underline{\varepsilon}$, where $d\underline{\varepsilon} = \sqrt{2/3} (\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij})^{1/2}$ is equivalent strain increment. It turns out that the local stiffness matrix coefficients are constant if we take a bilinear stress-strain relation with linear stress hardening [14]. The use will be made of this specific feature of the plastic flow theory in the solving process of the problem.

An inverse has to be made to the first set of three physical relations in (9) because strain compatibility equation requires the substitution of the strain tensor components. As a result of transformation we get a set of two nonlinear partial differential equations the coefficients of which include the local matrix stiffnesses D_{ij} , and \overline{B}_{ij} and their first and second derivatives with respect to spatial variable s . All the quantities related with strains and stresses have to be periodical functions of variable ϕ with period 2π , thus we can accept deflection w , and stress function ψ in a form of trigonometric series.

$$\psi = F(z) \cos(n\phi_1), \quad w = \cot \alpha e^{\nu_1 z} w(z) \cos(n\phi_1). \quad (10)$$

If we substitute expressions (10) into stability equations, we transform the set of two nonlinear partial differential equations into the set of ordinary differential equations of the fourth order. The following solution procedure of these equations was accepted. We assume the form of deflection function $w(z)$ and imperfection parameter function $w_0(z)$ and we substitute these into the strain compatibility equation from which we determine the stress function ψ . Then, we substitute the stress function ψ , deflection function w , and imperfection parameter w_0 into the equilibrium equation. When the shell is loaded by a uniform external hydrostatic pressure, and constitutive relations of the plastic flow theory are used then assuming a bilinear stress-strain relation with linear stress hardening one may write the following stiffnesses of the considered conical shell

$$\mathbf{D} = \frac{h^2}{12} \mathbf{B} = \frac{Eh^3}{12} \begin{vmatrix} \frac{1+\frac{3}{4}\omega_t}{1-\nu^2+\frac{3}{4}\omega_t} & \frac{\nu}{1-\nu^2+\frac{3}{4}\omega_t} & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ \frac{1-\nu^2+\frac{3}{4}\omega_t}{1-\nu^2+\frac{3}{4}\omega_t} & \frac{1}{1-\nu^2+\frac{3}{4}\omega_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1+\nu} \end{vmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{Eh} \begin{vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1+\frac{3}{4}\omega_t & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Equilibrium equation will be solved by Galerkin method. We denote the left hand side of this equation by $L(z, \phi_1)$ and we perform orthogonalization twice by each term of the deflection function $w(z)$ on the entire shell surface.

$$\int_0^{\ln \frac{s_2}{s_1}} \int_0^{2\pi \sin \alpha} L(z, \phi_1) e^{(\nu_1+2)} \sin im_1 z \cos n\phi_1 dz d\phi_1 = 0, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

After performing the integration we get a set of two algebraic equations, the coefficients of which depend on material constants, geometrical parameters of the shell, and basically, their values will be different if the stress state in the shell is elastic or plastic one.

$$p^* = \frac{\tilde{H}_5 + \tilde{H}_6 f_1}{\hat{K}_{1n} + \hat{K}_{2n} f_1} \frac{hH_s}{s_1 \tan^3 \gamma} \frac{\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 f_1 + \tilde{H}_3 f_1^2 + \tilde{H}_4 f_1^3}{\hat{K}_{1n} + \hat{K}_{2n} f_1} \left(\frac{hH_s}{s_1 \tan^3 \alpha} \right) \times \quad (13)$$

$$\times \frac{(\tilde{G}_5 + \tilde{G}_6 f_1)(\hat{K}_{1n} + \hat{K}_{2n} f_1) - (\tilde{H}_5 + \tilde{H}_6 f_1)(\hat{K}_{5n} + \hat{K}_{6n} f_1)}{(\tilde{H}_1 + \tilde{H}_2 f_1 + \tilde{H}_3 f_1^2 + \tilde{H}_4 f_1^3)(\hat{K}_{5n} + \hat{K}_{6n} f_1) - (\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2 f_1 + \tilde{G}_3 f_1^2 + \tilde{G}_4 f_1^3)(\hat{K}_{1n} + \hat{K}_{2n} f_1)}$$

From the first of the stability equations we determine load p^* as the function of deflection function parameter f_1 . Next, we assume material constants ν , E , E_t , σ_Y , and geometrical parameters h , s_1 , s_2 , α . With fixed value of longitudinal wave number m we determine functions \tilde{G}_i , \tilde{H}_i and substitute them into resulting stability equations what results in a pair of nonlinear algebraic equations for each value of circumferential buckle wave number n . Stability equation can be reduced to the form of

$$f_1^4 + \zeta_3 f_1^3 + \zeta_2 f_1^2 + \zeta_1 f_1 + \zeta_0 = 0, \quad (14)$$

which will be solved with the help of a special procedure in the numerical calculation algorithm of the problem (see Fig. 2). From the roots of Eqn. (14), obtained for each pair of f , and f_0 we choose the one that have the smallest positive module. Next, we draw a curve (equilibrium path) in coordinate system p^*-f . The curve, from which the lowest critical load is readout, determines parameter n that is related with the number of circumferential buckle wave number at critical state of stress.

6. CONCLUDING REMARKS

Elastic-plastic buckling of shell structures is a difficult field for engineer or designer. The simultaneous presence of moderately large deflections and nonlinear paths-dependent material behaviour leads to a set of transcendental equations that can be resolved only numerically using computers. Most computer programs for plastic buckling analysis require decisions by the user, which, otherwise must be familiar with the stability problems and plasticity theories as well. However, by the application of full elastic-plastic analysis one can design lightweight and more sophisticated structures.

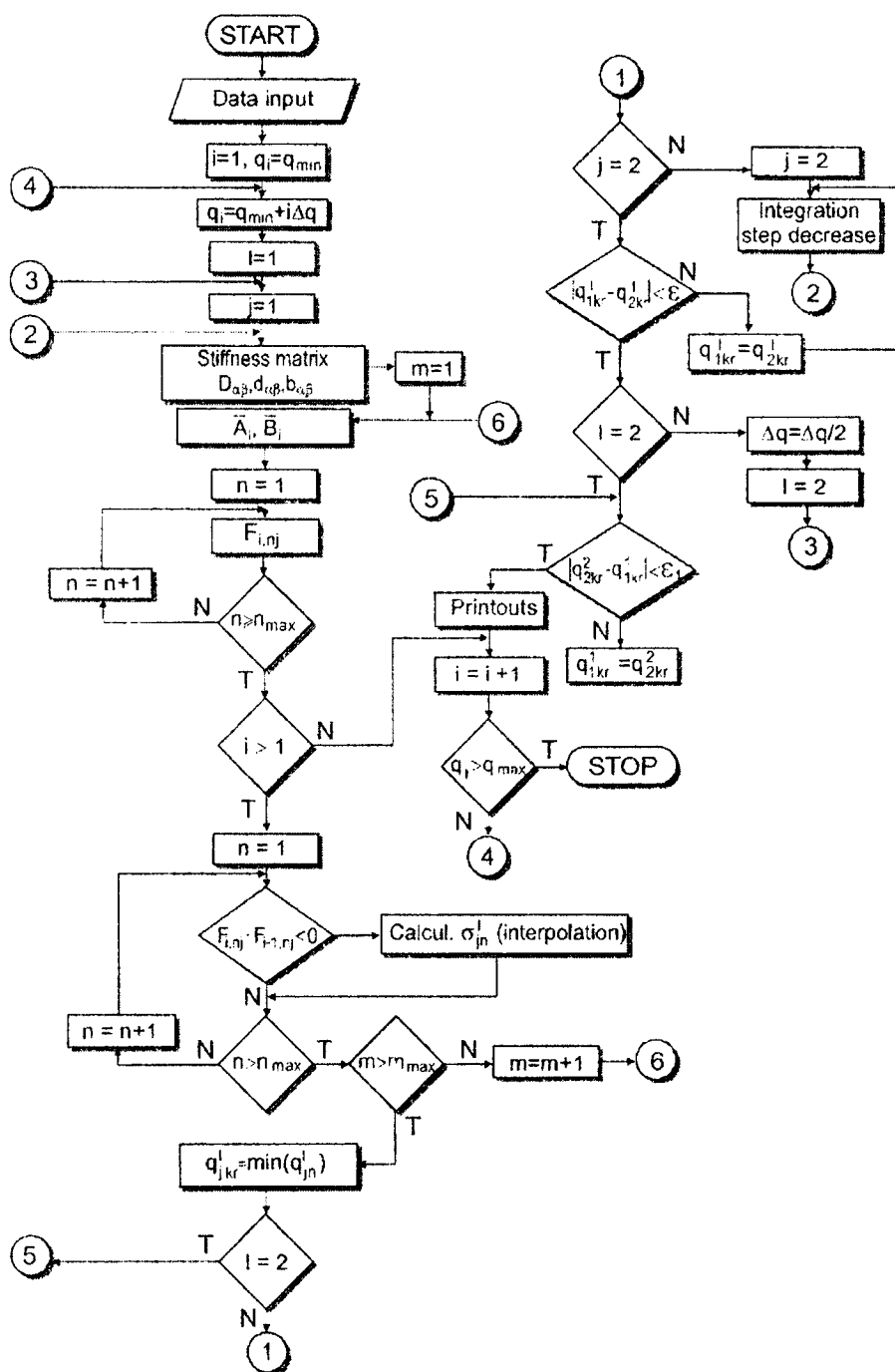


Fig. 2. Typical flow chart of iterative calculation of elastic-plastic stability of shells

REFERENCES

- [1] Bushnell D., Plastic Buckling of Various Shells, *Trans. ASME, Journ. of Pressure Vessel Technology*, 1982, 104, 5.
- [2] Brush D.O., Almroth, B.O., *Buckling of bars, plates and shells*, McGraw-Hill, New York, 1975.
- [3] Hill R., A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, 1958, Vol. 6, p 236-249.
- [4] Hill R., Some basic principles in the mechanics of solids without a natural time, *Journal Mech. Phys. Solids*, 1959, 7.
- [5] Kleiber M., *Large deformations of elastic-plastic bodies, Theory and numerical analysis of structures [in Polish]*. IPPT PAN, Warsaw, 1978.
- [6] Sewell, M. J., A survey of plastic buckling, in: *Stability* (H. Leipholz, Ed.), Chap. 5, p. 85-197, Univ. of Waterloo Press, Ontario, 1972.
- [7] Shanley F. R., Inelastic column theory, *J. Aeron. Sci.*, 1947, 14, p. 261-267.
- [8] Hutchinson J. W., On the postbuckling behavior of imperfection-sensitive structures in the plastic range, *J. Appl. Mech.* 1972, Vol. 39, p. 155-162.
- [9] Hutchinson J. W., Post-bifurcation behavior in the plastic range, *J. Mech. Phys. Solids*, 1973, Vol. 21, p. 163-190.
- [10] Hutchinson J. W., Imperfection sensitivity in the plastic range, *J. Mech. Phys. Solids*, 1973, Vol. 21, p. 191-204.
- [11] Needleman A., Tvergaard V., An analysis of the imperfection-sensitivity of square elastic-plastic plates under axial compression, *Int. J. Solids Structures*, 1976, Vol. 12, p. 185-201.
- [12] Koiter W. T., *Over de stabiliteit van het elastisch evenwicht*, Delft Thesis, Nat. Aeronaut. Space Admin, Rep. TTF-10, 1967.
- [13] Tvergaard V., Buckling behaviour of plate and shell Structures, *Proc. 4-th Int. Congr. of Theor. and Appl. Mech.*, North-Holland Publ. Co, 1976, p. 233-247.
- [14] Zielnica J., Large deformations and stability of bilayered elastic-plastic open conical shells, *Archives of Civil Engineering*, 1999, XLV, 3, p. 521-536.
- [15] Zielnica J., Elastic-plastic buckling of sandwich conical shells under axial compression and external pressure. (presented by A. Sawczuk) *Bulletin de L'academie Polonaise des Sciences, Ser. des Sci. Techniques*, 1981, XXIX, 11-12, s. 239-251.
- [16] Zielnica J., Inelastic Buckling of a Layered Conical Shell, w: *Proceedings of the 2-nd International Conference on Thin-Walled Structures, Techn. Session 2B: Shells and Pressure Vessels, ICTWS 1998, 2-4 Dec. 1998, Singapore*, Ed. Elsevier USA, p.247-255.

REFERATY PROBLEMOWE
SESSION PAPERS

BUCKLING OF ALL-STEEL SANDWICH PANELS

W. BANASIAK, M. TACZAŁA

Katedra Konstrukcji i Mechaniki Okrętów Politechniki Szczecińskiej
al. Piastów 41, 71-065 Szczecin

Ship hull structural mass optimisation calls for application of innovative materials and structural components. An option is using all-steel sandwich panels; structural components with internal structure. All-steel sandwich panels are composed of two plates stiffened by vertical ribs (I-core) or ribs of different shape (V-core, S-core, C-core). Such panels are applied as the ship hull structural components, replacing traditional stiffened plates. They are subject to typical loadings acting in the ship hull; tension, compression and lateral loading. Analysis of stability and ultimate capacity of all-steel sandwich panels subject to compressive loading is presented in the paper. The local stability of the internal structure of panels, stability of ribs under the lateral loading of panels, is also presented. The results are compared to the results of other numerical and experimental analyses.

1. INTRODUCTION

In recent years innovative structures like sandwich panels started to be applied in shipbuilding industry. Sandwich panels have proven to have many advantages over traditional plates; low weight, modular prefabrication, decrease of labour demand etc. The panels are employed in production of walls, decks, bulkheads, staircases and deckhouses on ships [11]. Vehicle deck section made of the Sandwich Plate System (SPS) was assembled into the RoPax vessel [10]. Presently after a year in service, the ship has not experienced any problems concerning the strength or degradation of the innovative structure. Since the sandwich panels are quite a new application in shipbuilding the knowledge concerning the behaviour of this type of structure is still insufficient. They are even not referred to by the rules of classification societies.

Analysis of sandwich panels with different cores has been a subject investigated and presented by many authors. The local buckling of sandwich panels made up of hybrid laminated faces and flexible core is investigated by Aiello and Ombres [1]. A stability analysis of sandwich panels with a flexible core is presented by Frostig [5]. The analysis uses high-order theory and determines the bifurcation loads and local and overall buckling modes of panels. Wrinkling analysis of sandwich panels containing holes is presented by Hadi and Matthews [6]. Razi *et al.* [17] used cylindrical holes to model of sandwich panels with damages. They present an analytical method to determine the stress distribution in panels with arbitrarily located damage. Mostly sheet faces and core of sandwich panels are modelled by using two-dimensional plate and three-dimensional solid elements. The face plates were modelled with a nine-node isoparametric elements based on the Mindlin's plate theory to bending and vibration analysis by Lee and Fan [9]. Philippe *et al.* [14] developed a new model of sandwich structure referred to as a tri-particle model. The tri-particle solution was compared to exact Pagano solution and Reissner solution. The core material is considered as isotropic for cellular cores or as orthotropic for honeycomb. Review of the analytic solutions for bending and buckling of flat rectangular orthotropic plates is presented by

Bao et al. [2]. The experimental research of double skin composite elements under lateral and axial loads were carried out by Wright, Oduyemi and Evans [13, 19].

Laser welded panels, known as I-core panels, produced by Meyer-Werft shipyard in Papenburg are presented by Kozak [8]. In the paper tests of sandwich panels developed under the European Union Project "SANDWICH" are described. The purpose of experimental tests of I-core and V-core sandwich panels is to define strength properties of such innovative structures. Naar et al. [12] in their paper analysed the resistance of various types of double bottom structures. Among other types compared are conventional ship and steel sandwich structure. Behaviour of fibre-reinforced plastic deck of bridge structures is described by Qiao et al. [16]. To simplify analysis of bridge deck an equivalent orthotropic plate was used instead of exact model of the actual deck geometry.

In the present paper stability of the I-core panel under compressive loading using the finite elements method is considered. The considered I-core plate is a laser welded steel sandwich panel produced by Meyer-Werft shipyard. The panel is composed of two thin face plates joined by ribs.

2. THEORETICAL BACKGROUND

We start with the equation for the total potential energy of the system, assuming that the compressive stress σ_{X_2} acts in the direction of X_2 axis of the global coordinate system

$$\Pi = E_p + L = E_p + \frac{1}{2} \sigma_{X_2} t \int_{A_p} (u_{1,X_2}^2 + u_{3,X_2}^2) dA \quad (1)$$

where:

Π - the total potential energy of the system;

E_p - the strain energy;

L - the potential energy of loading;

u_1, u_3 - the in-plane and out-of-plane displacements, respectively;

u_{j,X_2} - denotes differentiation of the displacement function u_j with respect to the global coordinate X_2 .

Employing the finite element interpolation $u_i = N_{ij} d_j$ the potential energy of loading can be expressed in terms of the displacement vector \mathbf{d}

$$L = \frac{1}{2} \sigma_{X_2} t \left[\int_{A_p} (N_{1i,X_2} N_{1j,X_2} + N_{3j,X_2} N_{3j,X_2}) dA \right] d_i d_j \quad (2)$$

As the shape functions are explicitly dependent on the local coordinates, differentiation with respect to the global coordinate X_2 can be made using the chain rule

$$N_{ij,X_2} = \frac{\partial N_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_2} = N_{ij,x_k} T_{k2} \quad (3)$$

and Eq. (2) takes the form

$$L = \frac{1}{2} \sigma_{X_2} t \left[\int_{A_p} (T_{k2} N_{li,x_k} T_{m2} N_{lj,x_m} + T_{k2} T_{m2} N_{3i,x_k} N_{3j,x_m}) dA \right] d_i d_j \quad (4)$$

Principle of stationary potential energy requires that

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial d_i} &= \frac{\partial E_p}{\partial d_i} + \frac{\partial L}{\partial d_i} = \\ &= \frac{\partial E_p}{\partial d_i} + \sigma_{X_2} t \left[\int_{A_p} (T_{k2} N_{li,x_k} T_{m2} N_{lj,x_m} + T_{k2} T_{m2} N_{3i,x_k} N_{3j,x_m}) dA \right] d_j \end{aligned} \quad (5)$$

where the first term in Eq. (5) yields the typical stiffness matrix of the combined membrane/plate finite element K_{pq} and

$$K_{ij}^G = \frac{1}{2} \sigma_{X_2} t \left[\int_{A_p} (T_{k2} N_{li,x_k} T_{m2} N_{lj,x_m} + T_{k2} T_{m2} N_{3i,x_k} N_{3j,x_m}) dA \right] \quad (6)$$

is a geometrical matrix. Equation of the form which is produced directly from Eq. (5)

$$\left[K_{pq} + K_{pq}^G \right] d_q = 0 \quad (7)$$

is a standard eigenvalue problem solved in the present formulation applying the subspace iteration algorithm originally developed by BATHE [3].

3. NUMERICAL EXAMPLES

3.1. EXAMPLE 1

The I-core panels (Fig. 1.) with dimensions and scantlings given in Table 2 was analysed.

The panels were compressed in the direction in accordance with the position of the ribs. The first buckling modes of analysed panels are shown on the Fig.2-5. All analysed models were simply supported along the edges parallels to the ribs and clamped on the perpendicular edges.

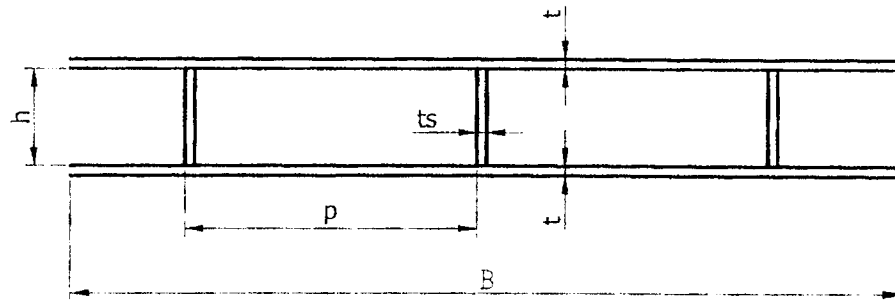


Fig. 1. The I-core panel

Table 2. Dimensions of analysed I-core panels.

	Length of the panel	B	p	h	t	ts
	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Panel 1	600	600	120	20	10	10
Panel 2	1800	600	120	20	10	10
Panel 3	600	600	120	40	3	3
Panel 4	1800	600	120	40	3	3

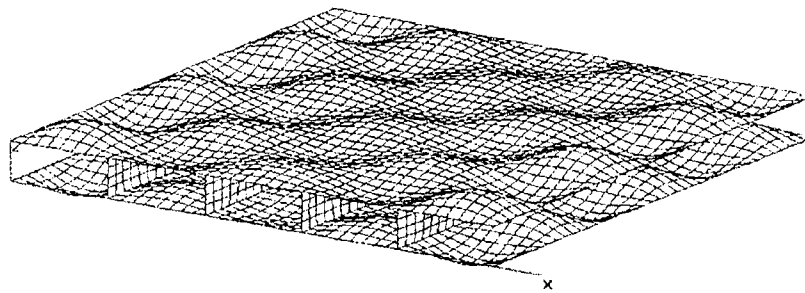


Fig. 2. First buckling mode of Panel 1. Scale 20:1. Critical stress 528 MPa

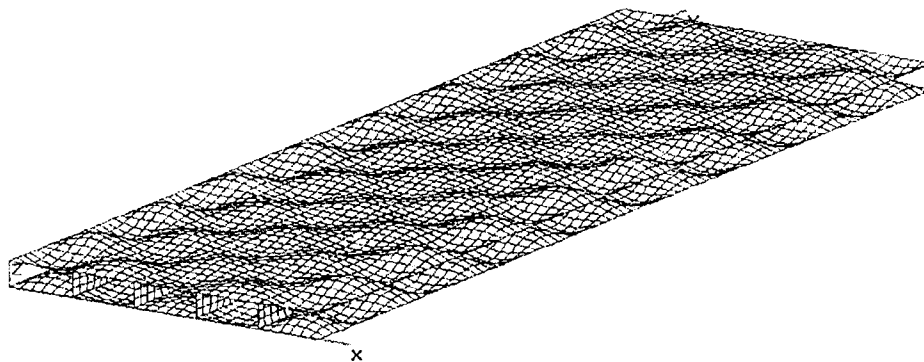


Fig. 3. First buckling mode of Panel 2. Scale 20:1. Critical stress 519 MPa

As only local buckling modes appeared in the presented cases, hypothetical examples were assumed having thickness $t=10$ mm. Now the overall buckling mode turned to be dominant (Fig. 4 and Fig. 5).

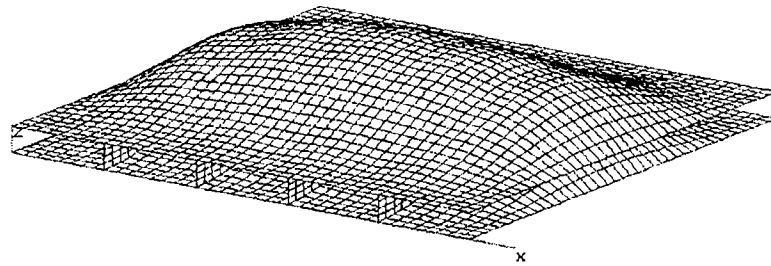


Fig. 4. First buckling mode of Panel 1. Scale 100:1. Critical stress 3212 MPa

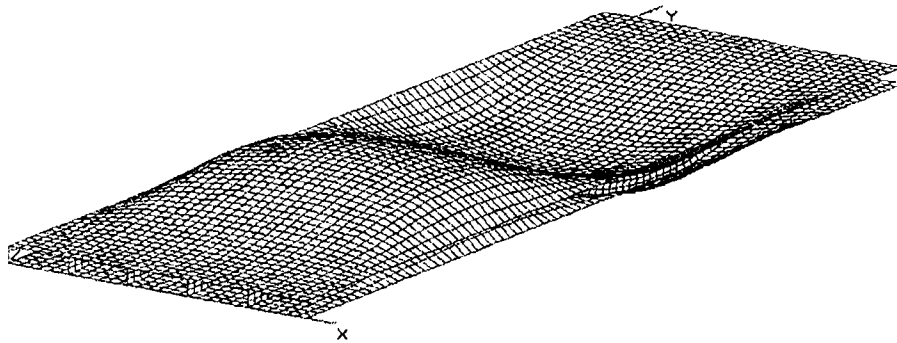


Fig. 5. First buckling mode of Panel 2. Scale 100:1. Critical stress 1977 MPa

3.2. EXAMPLE 2

Another interesting structural design is a V-core panel, where the ribs are not situated vertically but at a certain angle with respect to the facings. The model of such a panel taken for investigation is presented in Fig. 6

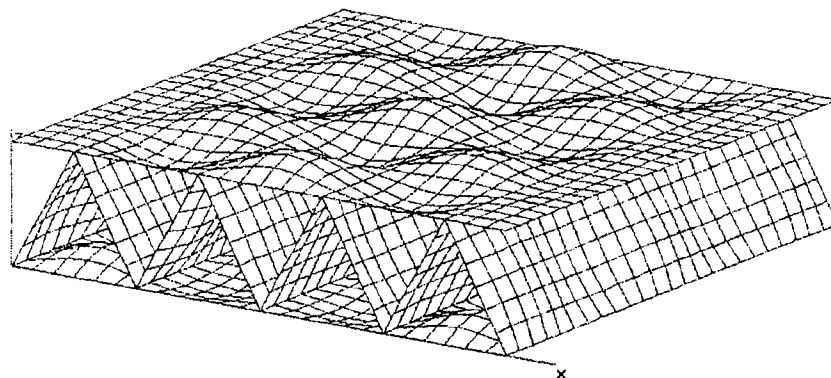


Fig. 6. Second buckling mode of V-core panel. Scale 20:1. Critical stress 47.9 MPa

4. CONCLUSIONS

A method for investigation of linearised buckling for structures with ribs modelled using plate elements was presented. The method was implemented in the finite element code. Examples of analysis of buckling of the I-core and V-core panels subject to compressive loading with a possibility to detect both the overall and local buckling modes were given. The presented investigation is a beginning of the more complex analysis and was intended to detect the buckling modes to model initial deflections of

the structures for non-linear analysis. Correct determination of the initial deflections generally eases and in many cases simply enables non-linear elastic-plastic analysis.

REFERENCES

- [1] Aiello M. A., Ombres L., Local buckling loads of sandwich panels made with laminated faces, *Composite Structures*, 1997, 38, 191-201.
- [2] Bao G., Jiang W., Roberts J. C., Analytic and finite element solutions for bending and buckling of orthotropic rectangular plates, *Int. J. Solids Structures*, 1997, 34, 1797-1822.
- [3] Bathe, K.-J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1996.
- [4] Burton W. S., Noor A. K., Assessment of continuum models for sandwich panels honeycomb core, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1997, 145, 341-360.
- [5] Frostig Y., Buckling of sandwich panels with a flexible core – high-order theory, *Int. J. Solids Structures*, 1998, 35, 183-204.
- [6] Hadi B. K., Matthews F. L., Buckling of anisotropic sandwich panels containing holes: Part II - wrinkling, *Composite Structures*, 2001, 54, 103-109.
- [7] Jiang W., Bao G., Roberts J.C., Finite element modelling of stiffened and unstiffened orthotropic plates, *Computers & Structures*, 1997, 63, 105-117.
- [8] Kozak J., Stalowe panele typu sandwich – nowe elementy konstrukcji statku, XX Sesja Naukowa Okrętowców, Conference materials, 2002, 283-292.
- [9] Lee L. J., Fan Y. J., Bending and vibration analysis of composite sandwich plates, *Computers & Structures*, 1996, 60, 103-112.
- [10] Lloyd's Register, A new concept for a new age – the Sandwich Plate System (SPS) for shipbuilding, *Marine Bulletin Special Report*, September 2000.
- [11] Meyer-Werft shipyard, Laser Welding and I-core[®] Panels, Advertise materials www.i-core.com, 2002.
- [12] Naar H., Kujala P., Simonsen B. C., Ludolph H., Comparison of the crashworthiness of various bottom and side structures, *Marine Structures*, 2002, 15, 443-460.
- [13] Oduyemi T. O. S., Wright H. D., An experimental investigation into the behaviour of double-skin sandwich beams, *J. Construct. Steel Research*, 1989, 14, 197-220.
- [14] Philippe M. H., Naciri T., Ehrlacher A., A tri-particle model of sandwich panels, *Composites Science and Technology*, 1999, 59, 1195-1206.
- [15] Pyszko R., Zastosowanie paneli spawanych laserowo w konstrukcji nadbudówki dużych statków handlowych, XX Sesja Naukowa Okrętowców, Conference materials, 2002, 293-302.
- [16] Qiao P., Davalos J. F., Brown B., A systematic analysis and design approach for single-span FRP deck/stringer bridges, *Composites Part B*, 2000, 31, 593-609.
- [17] Razi H., Sergeev B., Shkarayev S., Madenci E., Analysis of sandwich panels with multiple-site damage, *Eng. Fracture Mechanics*, 1999, 64, 255-268.
- [18] Riks E., Rankin C. C., Sandwich modelling with an application to the residual strength analysis of damaged compression panels, *Int. J. of Non-linear Mechanics*, 2002, 37, 897-908.
- [19] Wright H. D., Oduyemi T. O. S., Evans H. R., The experimental behaviour of double skin composite elements, *J. Construct. Steel Research*, 1991, 19, 97-110.

PROBLEMY NIESTATECZNOŚCI TERMOSPREŻYSTEJ W MECHANIZMACH CIERNYCH ZE SZCZEGÓLNYM UWZGLĘDNIENIEM WŁASNOŚCI MATERIAŁÓW I OBUDÓW SPRZĘGIEŁ

W. BARNAT

Wydział Techniki Wojskowej, Wojskowa Akademia Techniczna w Warszawie
ul Kaliskiego 2, 00-909 Warszawa

W pracy zbadano wpływ materiału na utratę stateczności przez tarczę sprzęgłową. Ponadto w pracy zbadano wpływ obudów sprzęgła (symulowanych przez ciśnienie) na utratę stateczności przez tarczę sprzęgłową. Analizę wykonano przy pomocy oprogramowania MSC Nastran for Windows i MSC Marc.

WSTĘP

Elementy cierne hamulców i sprzęgieł ciernych poddawane są nagrzewaniu tarciovemu. Jednym ze skutków procesu tarcia jest występowanie dużych przyrostów temperatur wywołujących duże naprężenia termiczne. Duża awaryjność tarcz hamulcowych objawiająca się między innymi utratą stateczności w skrzyniach biegów jest wywołana niejednorodnym polem temperatur powstałym w skutek tarcia na powierzchniach ciernych tych tarcz. Niejednorodność tego pola spowodowana jest nierównomiernością rozkładów naprężeń docisku w pakietach tarcz ciernych wywołanych małą sztywnością elementów składowych sprzęgieł. Procesy obciążeń cieplnych są przedmiotem badań eksperymentalnych i teoretycznych [1,2].

Podstawowym problemem w eksploatacji układów napędowych pojazdów jest występowanie niejednorodnych pól temperatur, które przyczyniają się do powstawania zmian w strukturach materiałowych danej tarczy.

W pracy zbadano wpływ niejednorodnego pola temperaturowego oraz własności materiałowych (zależnych od temperatury) na powierzchni tarczy cierniej na jej stateczność. Ponadto zbadano wpływ elementów dociskowych sprzęgła (symulowanych ciśnieniem) na utratę stateczności sprzęgła. Uzyskane wyniki pozwolą ocenić celowość przeprowadzenia modernizacji sprzęgieł skrzyni biegów. Do obliczeń wykorzystano oprogramowanie MSC Nastran for Windows i MSC MARC.

1. OBIEKT BADAŃ

W pracy zajęto się tarczą hamulcową z planetarnej skrzyni biegów czołgu T-72. Na podstawie oględzin zużyciowych oraz badań literaturowych [3] stwierdzono, iż największa awaryjność tarcz ciernych występuje w tych mechanizmach, które charakteryzują się małą sztywnością elementów składowych. Niewystarczająca sztywność elementów hamulca wpływa na nierównomierny rozkład naprężeń docisku w pakietach tarcz [4]. Rozkład naprężeń docisku wpływa na pole temperatury powstałe w wyniku sił tarcia podczas włączania sprzęgła. Ze względu na dużą nierównomierność rozkładów naprężeń docisków istnieje możliwość powstawania, podczas procesu pracy

sprzęgła, dużych gradientów temperatur, które doprowadzają do utraty stateczności tarcz ciernych [5].

W celu sprawdzenia wpływu niejednorodnego pola temperatur sztywności obudów i własności materiałowych na stateczność tarczy zbudowano dwuwymiarowe modele tarcz obciążonych różnorodnymi rozkładami temperatur.

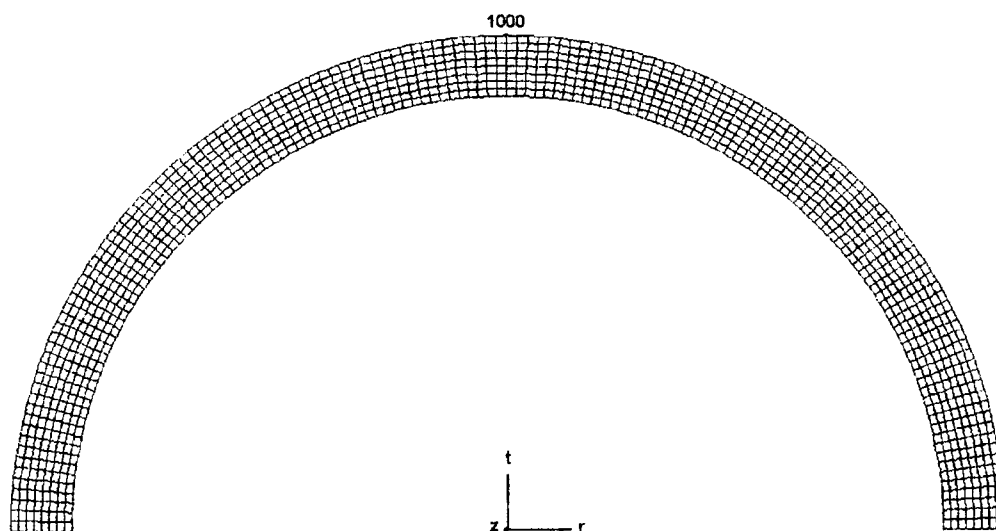
Podstawowym źródłem odkształceń płytek jest rozszerzalność cieplna związana z nagrzewaniem tarciovym. Właściwie połączone sprzęgło narzuca tarczom ciernym więzy w płaszczyźnie. Podczas prawidłowej eksploatacji sprzęgła tarcze cierne powinny być ściśnięte przez dłuższy czas (po zakończeniu poślizgu). Istnieją stany eksploatacyjne, podczas których sprzęgło zostaje rozłączone w bardzo krótkim czasie po zakończeniu poślizgu. W takim przypadku na płytkach mogą występować znaczne gradienty temperatur.

Istotą pracy jest odpowiedź na pytanie, jaki wpływ na stateczność elementów ciernych ma granica plastyczności materiału tarczy oraz pole temperaturowe na powierzchni danego elementu.

2. MODEL TARCZY HAMULCOWEJ

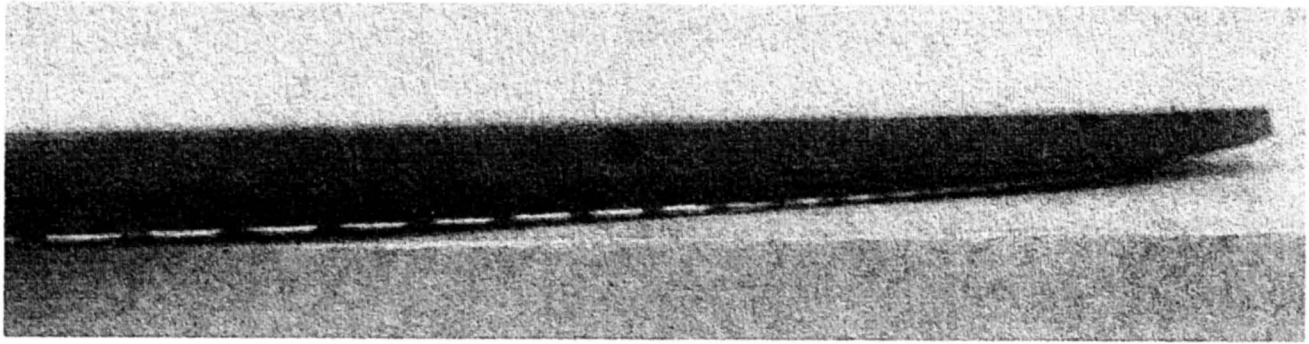
Modele trójwymiarowy tarczy (rys. 1) składał się z ośmio węzłowych elementów typu solid. W kierunku osi „Z” po grubości modele składały się z 4 warstw elementów, a w kierunku promieniowym z 8 warstw. Stałe materiałowe dla poszczególnych temperatur określono na podstawie eksperymentów i dostępnej literatury. Ze względu na kształt tarczy zastosowano globalny walcowy układ współrzędnych.

Wszystkim węzłom tarczy zostały odebrane translacyjne stopnie swobody w kierunku obwodowym (w płaszczyznach symetrii). Dodatkowo, w dwóch węzłach, na promieniu wewnętrznym, na średniej wysokości tarczy odebrano translacyjne stopnie swobody w kierunku osi „z”.



Rys. 1. Schemat dyskretyzacji i przyjęcia warunków brzegowych dla modelu wycinka tarczy sprzęgła. Umieszczenie 1000 węzła modelu tarczy

Tego typu podparcie nie ogranicza przemieszczeń względnych tarczy i umożliwi powstanie pierwszej –osiowosymetrycznej postaci utraty stateczności (rys. 2).



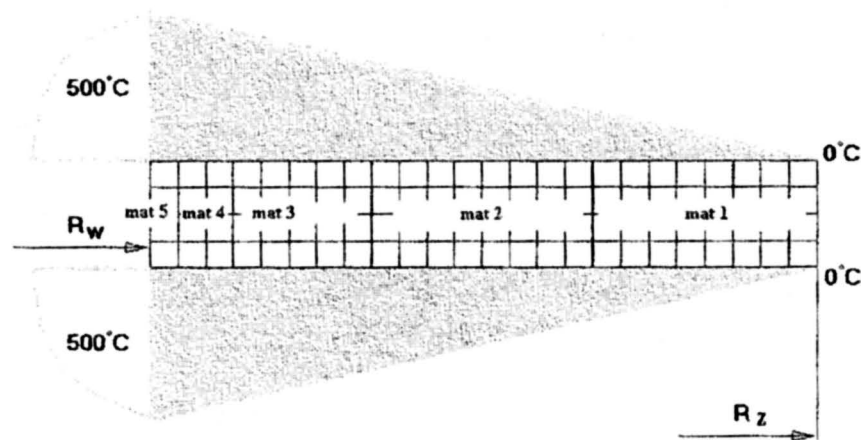
Rys. 2. Pierwsza postać utraty stateczności uszkodzonej rzeczywistej tarczy sprzęgłowej sprzęgła S 3

W referacie tym badano tarczę hamulcową czołgu wykonaną ze stali 30HGSA (o rzeczywistych charakterystykach materiałowych).

Analiza stateczności tarcz była wykonana modulem statyki nieliniowej z wykorzystaniem pełnej metody Newtona Raphsona. Obciążenie realizowano w dwóch etapach. Każdy etap obciążenia był realizowany w 10 krokach. Utratę stateczności przez tarczę określano na podstawie analizy ścieżki równowagi. W pierwszym etapie obciążenia temperatura w węzłach tarczy wzrastała liniowo do osiągnięcia maksymalnej wartości, przy zachowaniu określonego rozkładu, a w drugim etapie w ten sam sposób spadała do zera.

W pierwszym etapie modele obciążono liniowym rozkładem temperatury (rys. 3) gdzie maksymalna wartość temperatury 500°C występuje na wewnętrznej krawędzi tarczy, a na zewnętrznej minimalna 0°C . W drugim etapie model został schłodzony do temperatury 0°C . Rozkłady temperatur są zbliżone do rzeczywistych rozkładów nacisków występujących na pierwszych powierzchniach kontaktu sprzęgieł S-2, S-3, S-4 i S-5.

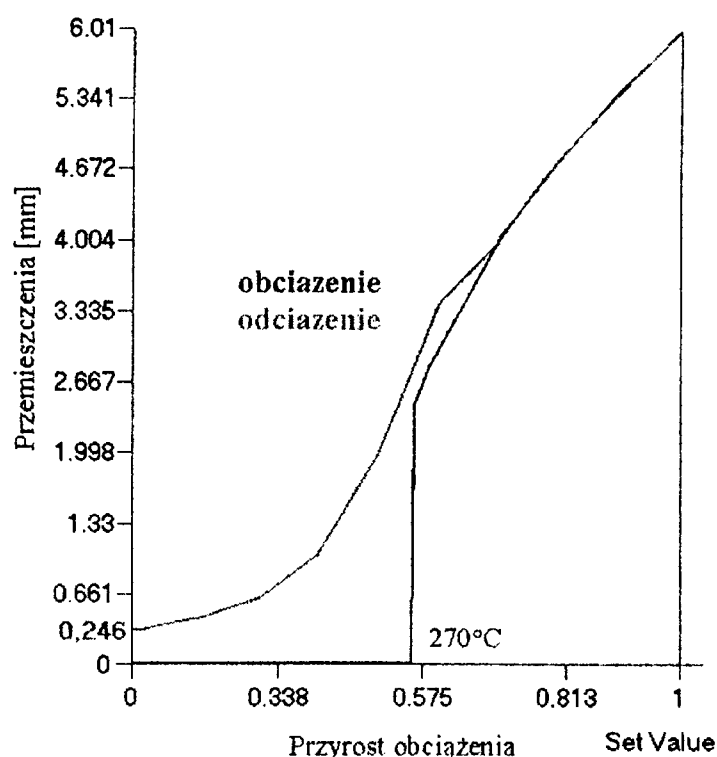
Do analizy wykorzystano sześć nieliniowych charakterystyk materiału uzyskanych w wyniku eksperymentu (odpowiednio w temperaturach: pokojowej, 400°C , 450°C , 500°C , i 600°C).



Rys. 3. Sposób obciążenia modelu tarczy i deklaracji materiału

3. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ PRZEPROWADZONEJ OPROGRAMOWANIEM MSC NASTRAN

W wyniku analizy nieliniowej modelu stwierdzono, iż gwałtowna deformacja całego układu następuje przy temperaturze 270°C (rys. 4). Maksymalne przemieszczenie węzła 1000 tarczy obciążonej wynosi 6.01 mm. Maksymalne przemieszczenie trwałe tego węzła dla tarczy odciążonej wynosi 0.246 mm.



Rys. 4. Wykres przemieszczeń węzła 1000 w procesie obciążenia

Dla modelu tarczy hamulcowej stwierdzono, iż w chwili utraty stateczności (krok 5,5) naprężenia promieniowe osiągnęły lokalnie wartość – 15.8 MPa. Dominującymi są naprężenia obwodowe, które osiągnęły wartość dla wewnętrznej krawędzi – 355 MPa, a dla zewnętrznej 390 MPa.

W chwili zakończenia procesu podgrzewania (koniec etapu 1) wartości naprężeń promieniowych lokalnie zwiększyły do –33 MPa, a naprężenia obwodowe osiągnęły wartość –568 MPa (na krawędzi wewnętrznej) i 672 MPa na krawędzi zewnętrznej przekraczając na dużym obszarze granicę plastyczności 575 MPa. Maksymalne przemieszczenie węzła 1000 wyniosło 6 mm.

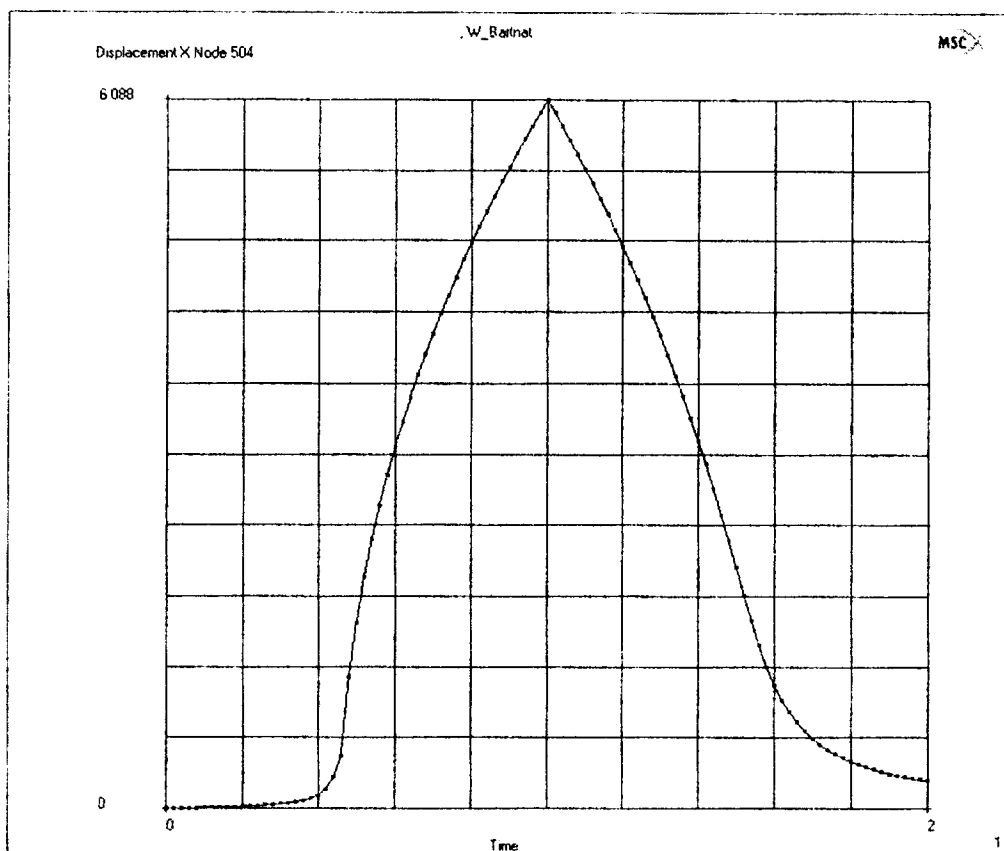
Po odciążeniu naprężenia obwodowe wynosiły lokalnie –28 MPa na promieniu zewnętrznym i 241 MPa na promieniu wewnętrznym.

Warto zaznaczyć, iż model siódmy utracił stateczności w sposób trwały i maksymalne trwałe przemieszczenie węzła 1000 wyniosło 0.246 mm.

4. WYNIKI ANALIZY NUMERYCZNEJ PRZEPROWADZONEJ OPROGRAMOWANIEM MSC MARC

W wyniku analizy nieliniowej modelu stwierdzono, iż podobnie jak w przypadku analizy wykonanej przy pomocy programu MSC Nastran gwałtowna deformacja całego

układu następuje przy temperaturze 270°C (rys. 5). Maksymalne przemieszczenie węzła 504 tarczy obciążonej wynosi 6.088 mm. Maksymalne przemieszczenie trwałe tego węzła dla tarczy odciążonej wynosi 0.245 mm. Wyniki są podobne do wyników poprzedniego modelu.



Rys. 5. Wykres przemieszczeń węzła 504 w procesie obciążenia

Dla modelu tarczy hamulcowej stwierdzono, iż w chwili utraty stateczności naprężenia promieniowe osiągnęły lokalnie wartość – 95 MPa. Dominującymi są naprężenia obwodowe, które osiągnęły wartość dla wewnętrznej krawędzi – 355 MPa, a dla zewnętrznej 390 MPa.

W chwili zakończenia procesu podgrzewania (koniec etapu 1) wartości naprężeń promieniowych lokalnie zwiększyły do –33 MPa, a naprężenia zredukowane osiągnęły wartość 659 MPa.

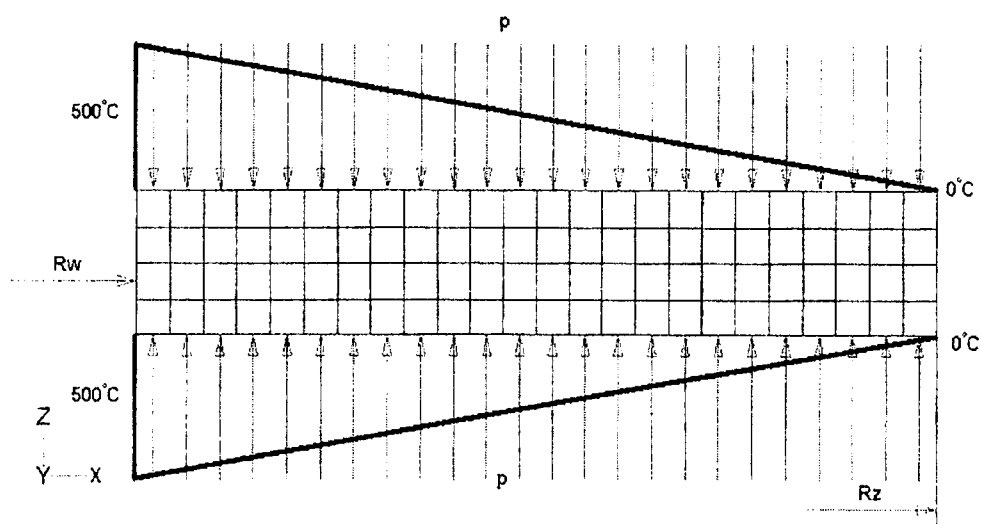
Po odciążeniu naprężenia zredukowane wynosiły lokalnie 28 MPa na promieniu zewnętrznym i 241 MPa na promieniu wewnętrznym.

Warto zaznaczyć, iż model siódmy utracił stateczności w sposób trwały i maksymalne trwałe przemieszczenie węzła 504 wyniosło 0.246 mm.

5. WPLYW OBUDÓW NA STATECZNOŚĆ TARCZ CIERNYCH

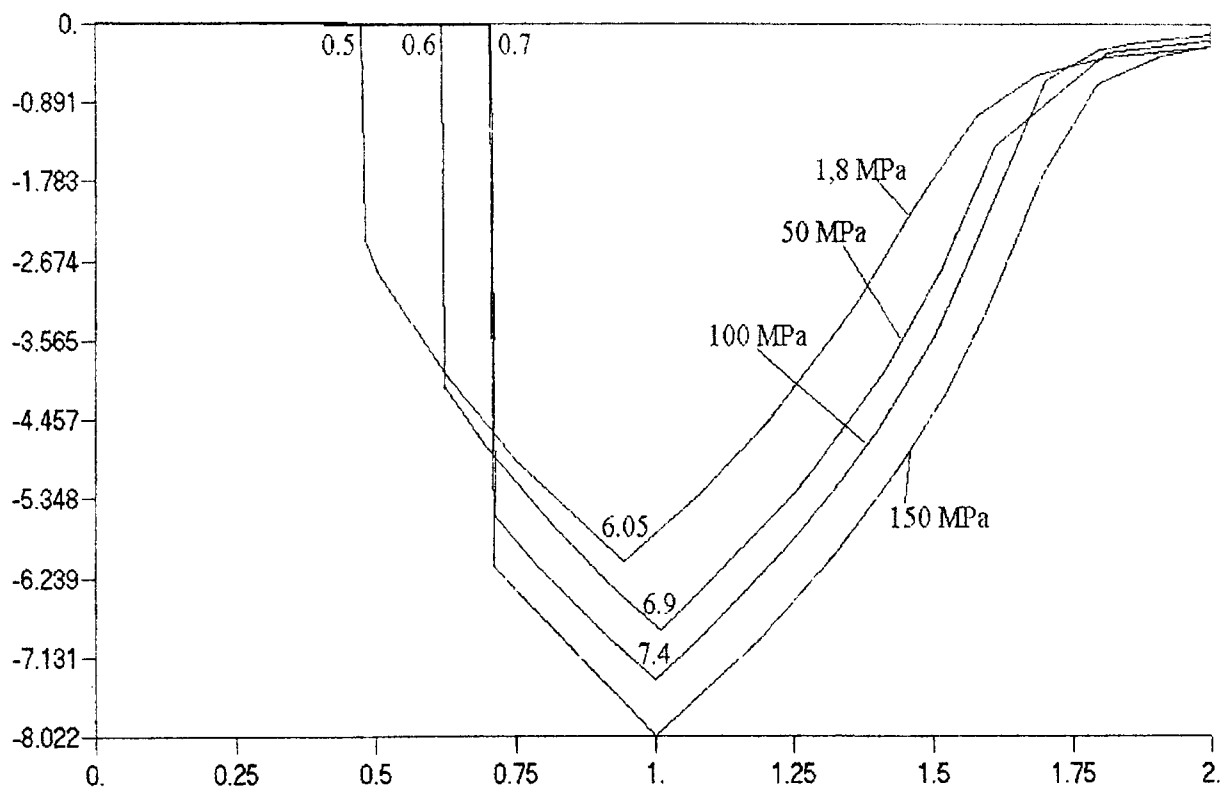
Do zbadania zjawiska wpływu elementów sprzęgła na stateczność wykorzystano model tarczy obciążony dodatkowo (oprócz temperatury) ciśnieniem symulującym docisk pakietu tarcz ciernych przez elementy sprzęgła (rys. 6).

Przeanalizowano model tarczy obciążony ciśnieniem 1.8 MPa, 50 MPa, 100 MPa i 150 MPa. Analizę utraty stateczności wykonano modułem statyki nieliniowej oprogramowaniem NASTRAN.



Rys. 6. Schemat modelu tarczy sprężelowej obciążonej ciśnieniem

W wyniku analizy stwierdzono, że ciśnienie docisku nie ma wpływu na utratę stateczności przez tarczę (rys. 7).



Rys. 7. Wykres przemieszczenia węzła 1000 w zależności od ciśnienia przyłożonego do powierzchni tarcz

Porównanie wyników numerycznej analizy modeli tarcz nieobciążonych ciśnieniem i obciążonej ciśnieniem eksploatacyjnym 1,8 MPa wykazuje, iż ciśnienie w instalacji roboczej pojazdu nie ma wpływu na utratę stateczności przez tarczę. Oznacza to, iż tarcza obciążona polem temperatury 0-500°C utraci stateczność. Wzrost ciśnienia powoduje późniejszą utratę stateczności. W przypadku tarczy nieobciążonej ciśnieniem utrata stateczności następuje przy polu 0-250°C. Dla tarczy obciążonej ciśnieniem 50 MPa utrata stateczności następuje przy polu temperatury 0-300°C a maksymalne przemieszczenie węzła 1000 wynosi 6.9 mm. Dla tarcz obciążonych ciśnieniem 100 i 150 MPa utrata stateczności następuje przy wyższym, co do wartości polu temperaturowym 0-350°C a maksymalne przemieszczenie węzłów wynosi odpowiednio 7.9 i 8.02 mm.

6. ZAKOŃCZENIE

W wyniku przeprowadzonych analiz tarcz sprzęgłowych stwierdzono, iż punkt, w którym tarcza traci stateczność jest jednakowy dla analizy wykonanej oprogramowaniem NASTRAN i MARC. Fakt ten świadczy o poprawności wykonanych modeli. Podobne wartości odkształceń trwałych są spowodowane występowaniem odkształceń sprężystych na dużym obszarze. Uplastycznienie materiału występowało w niewielkich rejonach.

Rozkłady temperatur, którymi zostały obciążone tarcze są zbliżone do rzeczywistych rozkładów nacisków występujących na powierzchniach tarcz ciernych.

W wyniku analizy nieliniowej wpływu własności materiału na trwałą utratę stateczności z wykorzystaniem modeli trójwymiarowych stwierdzono, że dla wszystkich modeli tarcza deformuje się początkowo tylko w płaszczyźnie. Przy temperaturze krytycznej następuje gwałtowna utrata stateczności i przeskok. Warto zaznaczyć, iż przeskok odbywa się przy tej samej temperaturze.

Wpływ ciśnienia jest na stateczność tarczy sprzęgłowej jest nieznaczny, ponieważ w sprzęgle naprężenia docisku (normalne) wahają się w granicach 2 MPa.

Warto zaznaczyć, iż wraz ze wzrostem ciśnienia obciążającego tarcze wzrasta temperatura potrzebna do utraty stateczności przez tarczę.

LITERATURA

- [1] Zagrodzki Wpływ grubości płytek na zjawiska cieplne w sprzęgle wielopłytkowym. TRIBOLOGIA 4-1991r.
- [2] Wielciński P. Zagrodzki Rozkład nacisków normalnych na powierzchniach ciernych sprzęgła blokady przekładni hydrokinetycznej. Przegląd Mechaniczny 11-12/93.
- [3] Zagrodzki P. Wpływ grubości płytek na zjawiska cieplne w sprzęgle wielotarczowym Trybologia 4/1991.
- [4] Chełmżyńska H., Przegaliński S. Charakterystyki stali. Wydawnictwo Śląsk Katowice.

PROBLEMS OF SEDATENESS IN FRICTION- MECHANISMS WITH SPECIAL REGARD OF PROPERTY OF MATERIALS AND OF CASINGS OF CLUTCHES

In work one examined influence of material and of casings of clutch (simulated by through pressure) on sedateness of clutch disk. Analysis one executed at help of software MSC Nastran handicap Windows and MSC Marc.

NIEASYMPTOTYCZNE MODELOWANIE ZAGADNIENIĆ STATECZNOŚCI ŚREDNIEJ GRUBOŚCI PŁYT UNIPERIODYCZNYCH

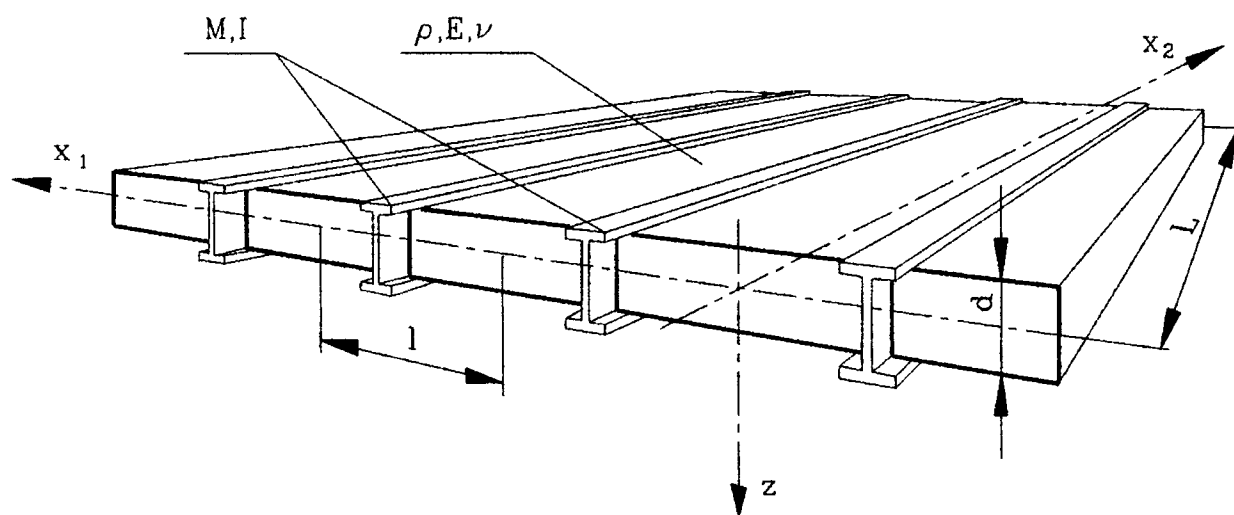
E. BARON

Katedra Teorii Konstrukcji Budowlanych Politechniki Śląskiej
Akademicka 5, 44-100 Gliwice

W referacie przedstawiono nowy, nieasympotyczny model płyt prostokątnych średniej grubości o strukturze uniperiodycznej uwzględniający wpływ wymiaru powtarzalnego segmentu płyty na jej makromechaniczne własności (efekt skali). W stosunku do dotychczas proponowanych modeli nieasympotycznych, np. w [1], umożliwia on rozszerzenie zakresu analizy stateczności tego typu płyt. Otrzymane ogólne równania modelu przystosowano do analizy dynamiki i stateczności płyt materiałowo ortotropowych. Wyprowadzono relacje na siły krytyczne izotropowego, żebrowego, swobodnie podpartego pasma płytowego.

1. WSTĘP

Przedmiotem analizy są średniej grubości, liniowo-sprężyste płyty prostokątne posiadające strukturę jednokierunkowo periodyczną. Płyty takie, nazwane płytami o strukturze uniperiodycznej, składają się z dużej liczby równoległe usytuowanych (i prostopadłych do przeciwnych krawędzi) powtarzalnych segmentów, mających te same wymiary geometryczne i identyczną strukturę materiałową. W płaszczyźnie środkowej, oprócz wymiarów gabarytowych L_1 , L_2 , charakteryzują się dodatkowym wymiarem l będącym okresem powtarzalności. W kierunku prostopadłym do kierunku periodyczności zmienność parametrów płyty może być dowolna, jednak najczęściej w praktyce mamy do czynienia z parametrami stałymi. Fragment takiej płyty, często stosowanej w budownictwie przedstawia rys. 1.



Rys. 1. Płyta o strukturze uniperiodycznej

Modelowanie zagadnień płyt tego typu napotyka na znaczne trudności analityczne. Dlatego też w mechanice ciał o strukturze periodycznej proponuje się modele uproszczone. Najczęściej stosuje się metodę homogenizacji asymptotycznej prowadzącej do równań o stałych współczynnikach aproksymujących równania o periodycznych, silnie oscylujących (i na ogół nieciągłych) współczynnikach funkcyjnych [2], [5]. Jednakże zhomogenizowany model może być zastosowany do analizy tylko tych przypadków, w których wpływ okresu l na makromechaniczne własności płyty jest pomijalnie mały.

W pracy [1] zaproponowano nowy uśredniony model średniej grubości płyt (płyt typu Reissnera) o strukturze uniperiodycznej. Jest to model nieasymptotyczny, otrzymany metodą uśredniania tolerancyjnego (tolerance averaging technique [7]), pozwalający uwzględnić wpływ okresu l na makromechaniczne własności płyty.

Celem tego referatu jest przedstawienie modelu zaproponowanego w [1] z uwzględnieniem słabszych założeń umożliwiających rozszerzenie zakresu analizy zagadnień stateczności płyt o strukturze uniperiodycznej. Dotychczas w modelowaniu płyt periodycznych metodą uśredniania tolerancyjnego, w wyrażeniach zawierających siły osiowe działające w płaszczyźnie środkowej płyty brano pod uwagę jedynie uśrednione przemieszczenia (por. np. [4], [6]). W modelu prezentowanym w tym referacie uwzględniono dodatkowo wpływ zaburzeń przemieszczeń związanych z uniperiodyczną strukturą płyty. Wyprowadzone ogólne równania modelu przekształcono do postaci umożliwiającej analizę zagadnień dynamiki i stateczności prostokątnych, materiałowo ortotropowych płyt uniperiodycznych. Jako przykład wyprowadzono relacje na siły krytyczne dla izotropowego, uniperiodycznego pasma płytowego.

Wskaźniki $\alpha, \beta, \gamma, \dots (i, j, k, \dots)$ przyjmują wartości 1, 2 (1, 2, 3) natomiast wskaźniki $a, b, \dots A, B, \dots$ przebiegają ciąg 1, 2, \dots, n i odpowiednio 1, 2, \dots, N . Obowiązuje konwencja sumacyjna. Ujęcie pary wskaźników w nawias oznacza ich symetryzację.

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA I OZNACZENIA

Dla większej czytelności rozważań powtórzmy podstawowe założenia i oznaczenia przyjęte w pracy [1].

Przez $x = (x_1, x_2)$ oznaczmy współrzędne kartezjańskie punktu na płaszczyźnie środkowej $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$ natomiast przez z współrzędną w kierunku prostopadłym do płaszczyzny środkowej. Przez $z = \pm \delta(x)$, $x \in \Pi$, oznaczmy funkcje określające odpowiednio górną i dolną powierzchnię płyty; tak więc $2\delta(x)$ jest grubością płyty w punkcie $x \in \Pi$. Przez $\rho = \rho(x, z)$ i $A_{ijkl}(x, z)$ oznaczmy gęstość masy i tensor sztywności sprężystej materiału płyty. Oznaczmy także $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = A_{\alpha\beta\gamma\delta} - A_{\alpha\beta 33} A_{33\gamma\delta} (A_{3333})^{-1}$, $B_{\alpha\beta} = A_{\alpha 3\beta 3}$. Zakładamy, że $\delta(\cdot)$, $\rho(\cdot)$, $A_{ijkl}(\cdot)$ są parzystymi funkcjami z , periodycznymi funkcjami o okresie l względem x_1 i dowolnymi, regularnymi funkcjami względem x_2 . Zakładamy także, iż $l \gg \max \delta(x)$. Niech p^+ i p^- są obciążeniami w kierunku osi z odpowiednio górnej i dolnej powierzchni płyty, $N_{\alpha\beta}^0$ jest tensorem wstępnego napięcia w płaszczyźnie środkowej płyty natomiast b jest składową sił masowych względem osi z . Niech t będzie współrzędną czasową. Wartość średnią dowolnej całkowalnej funkcji $\varphi(x_1, x_2, t)$

w przedziale periodyczności $(x_1-l/2, x_1+l/2)$ oznaczmy przez

$$\langle \varphi \rangle(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{l} \int_{x_1-l/2}^{x_1+l/2} \varphi(\xi, x_2, t) d\xi, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2).$$

Dla funkcji $\varphi(\cdot)$ periodycznej względem zmiennej x_1 powyższe uśrednienie jest niezależne od x_1 .

3. PROCEDURA MODELOWANIA. RÓWNANIA MODELU

Oznaczając (w wyrażeniu na $D_{\alpha\beta}$ nie obowiązuje konwencja sumacyjna dla α i β)

$$\begin{aligned} \mu &:= \int_{-\delta}^{\delta} \rho dz, \quad J := \int_{-\delta}^{\delta} z^2 \rho dz, \quad p := p^+ + p^- + b\langle \mu \rangle, \\ G_{\alpha\beta\gamma\delta} &:= \int_{-\delta}^{\delta} z^2 C_{\alpha\beta\gamma\delta} dz, \quad D_{\alpha\beta} := \int_{-\delta}^{\delta} K_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} dz, \end{aligned}$$

gdzie $K_{\alpha\beta}$ są współczynnikami ścinania, otrzymujemy układ równań dla niewiadomych przemieszczeń w i obrotów \mathcal{G}_α

$$\begin{aligned} (G_{\alpha\beta\gamma\delta} \mathcal{G}_{(\gamma,\delta)})_{,\beta} - D_{\alpha\beta} \mathcal{G}_\beta - J \ddot{\mathcal{G}}_\alpha &= 0, \\ N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta} + [D_{\alpha\beta} (\mathcal{G}_\beta + w_{,\beta})]_{,\alpha} - \mu \ddot{w} + p &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

opisujący model płyty średniej grubości przy założeniu kinematycznym Hencky-Boole'a [3]. Dla płyty o strukturze uniperiodycznej jest to układ równań o współczynnikach funkcyjnych, które względem zmiennej x_1 są silnie oscylujące i nieciągłe. Ścisłe rozwiązanie problemu brzegowego jest w tym przypadku bardzo skomplikowane. Dlatego też stosuje się metody przybliżone. Metoda homogenizacji asymptotycznej prowadzi do układu równań o stałych współczynnikach jednak pomija wpływ okresu l na makromechaniczne własności płyty (tzw. efekt skali). W pracy [1] zaproponowano nowy nieasymptotyczny sposób modelowania uwzględniający efekt skali, wykorzystując technikę uśredniania tolerancyjnego równań [7]. Zgodnie z procedurą postępowania przedstawioną w [1] niewiadome przesunięcia i obroty zapiszemy w postaci

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\alpha(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{G}_\alpha^o(\mathbf{x}, t) + \mathcal{G}_\alpha^*(\mathbf{x}, t) \\ w(\mathbf{x}, t) &= w^o(\mathbf{x}, t) + w^*(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

gdzie $w^o(\cdot)$, $\mathcal{G}_\alpha^o(\cdot)$ są uśrednionymi przesunięciami i obrotami, które są *funkcjami wolnozmennymi* natomiast $w^*(\cdot)$, $\mathcal{G}_\alpha^*(\cdot)$ są zaburzeniami przesunięć i obrotów, będące *funk-*

cjami oscylującymi, por. także [7]. Funkcje $w^*(\cdot)$, $\vartheta_\alpha^*(\cdot)$ będziemy aproksymować skończonymi sumami

$$\begin{aligned}\vartheta_{x_\alpha}^*(x, t) &\cong h^a(x_1) \Theta_\alpha^a(x, t), \quad a=1, 2, \dots, n \\ w_x^*(x, t) &\cong g^A(x_1) W^A(x, t), \quad A=1, 2, \dots, N\end{aligned}\quad (3.2)$$

gdzie $\Theta_\alpha^a(\cdot)$, $W^A(\cdot)$ są nowymi niewiadomymi funkcjami wolnozmiennymi (względem x_1) natomiast $h^a(x_1)$, $g^A(x_1)$ jest układem liniowo niezależnych, tzw. modalnych funkcji kształtu spełniających warunki $\langle Jh^a \rangle = 0$, $\langle \mu g^A \rangle = 0$, $h^a(x_1), g^A(x_1) \in O(l)$, $lh_{,1}^a(x_1), lg_{,1}^A(x_1) \in O(l)$. Uwzględniając powyższe warunki zdefiniujemy funkcje

$$\bar{h}^a = l^{-1} h^a, \quad \bar{g}^A = l^{-1} g^A$$

które są rzędu $O(l)$ jeśli $l \rightarrow 0$. W wielu przypadkach postać modalnych funkcji kształtu postuluje się *a priori*, a formuły (3.2) należy traktować jako pewne hipotezy kinematyczne odnośnie zaburzeń przemieszczeń wywołanych uniperiodyczną strukturą płyty.

Dalsza procedura modelowania została opisana szczegółowo w pracy [1]. Różnica pomiędzy podejściem stosowanym w [1] a podejściem proponowanym dalej jest związana z wyrażeniem $N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta}$ występującym w (3.1)₂. W pracy [1] przyjęto, że $N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta}^o$ pomijając tym samym wpływ zaburzeń w^* związanych z uniperiodyczną strukturą płyty na jej stateczność. Po uwzględnieniu, że $N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^o (w^o + w^*)_{,\alpha\beta}$, równania nowego nieasymptotycznego modelu płyty średniej grubości o strukturze uniperiodycznej można przedstawić w postaci:

1° równań ruchu

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta\gamma\delta} - Q_\alpha - \langle J \rangle \ddot{\vartheta}_\alpha^o &= 0, \\ N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta}^o + l N_{\alpha\beta}^o \langle \bar{g}^A \rangle W_{,\alpha\beta}^o + Q_{\alpha,\alpha} - \langle \mu \rangle \ddot{w}^o + p &= 0,\end{aligned}\quad (3.3)$$

2° równań dla Θ^a, W^A

$$\begin{aligned}l^2 \langle J \bar{h}^a \bar{h}^b \rangle \ddot{\Theta}_\alpha^b + M_\alpha^a - l \bar{M}_{\alpha,2}^a &= 0, \\ l^2 \langle \mu \bar{g}^A \bar{g}^B \rangle \ddot{W}^B + Q^A - l \bar{Q}_{,2}^A + \\ - N_{\alpha\beta}^o l \langle \bar{g}^A \rangle w_{,\alpha\beta}^o - l^2 N_{\alpha,2}^o W_{,\alpha,2}^B - N_{11}^o \langle \bar{g}_{,1}^A \bar{g}_{,1}^B \rangle W^B - l \langle \bar{g}^A p \rangle &= 0\end{aligned}\quad (3.4)$$

3° równań konstytutywnych

$$\begin{aligned}M_{\alpha\beta} &= \langle G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o + \langle h_{,1}^a G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \Theta_\delta^a + l \langle \bar{h}^a G_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^a, \\ Q_\alpha &= \langle D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta^a + \langle g_{,1}^A D_{\alpha 1} \rangle W^A + l \langle \bar{g}^A D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}^A, \\ M_\alpha^a &= \langle h_{,1}^a h_{,1}^b G_{\alpha 1 \beta \delta} \rangle \Theta_\delta^b + \langle h_{,1}^a G_{\alpha 1 \gamma \delta} \rangle \vartheta_{(\gamma,\delta)}^o + l \langle h_{,1}^a \bar{h}^b G_{\alpha 1 \beta \delta} \rangle \Theta_{\delta,2}^b + \\ + l^2 \langle \bar{h}^a \bar{h}^b D_{\alpha\beta} \rangle \Theta_\beta^b + l \langle \bar{h}^a D_{\alpha\beta} \rangle (\vartheta_\beta^o + w_{,\beta}^o) + l \langle \bar{h}^a g_{,1}^A D_{\alpha 1} \rangle W^A + l^2 \langle \bar{h}^a \bar{g}^A D_{\alpha 2} \rangle W_{,2}^A,\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_\alpha^a &= \langle \bar{h}^a h_{,i}^b G_{\alpha 2 i b} \rangle \Theta_\delta^b + \langle \bar{h}^a G_{\alpha 2 \gamma \delta} \rangle \mathfrak{S}_{(\gamma, \delta)}^o + l \langle \bar{h}^a \bar{h}^b G_{\beta 2 2 b} \rangle \Theta_{\delta, 2}^b, \\
Q^A &= \langle g_{,i}^A g_{,i}^B D_{11} \rangle W^B + \langle g_{,i}^A D_{1\beta} \rangle (\mathfrak{S}_\beta^o + w_{,\beta}^o) + l \langle g_{,i}^A \bar{h}^a D_{1\beta} \rangle \Theta_\beta^a + l \langle g_{,i}^A \bar{g}^B D_{12} \rangle W_2^B, \\
\tilde{Q}^A &= \langle \bar{g}^A g_{,i}^B D_{21} \rangle W^B + \langle \bar{g}^A D_{2\beta} \rangle (\mathfrak{S}_\beta^o + w_{,\beta}^o) + l \langle \bar{g}^A \bar{h}^a D_{2\beta} \rangle \Theta_\beta^a + l \langle \bar{g}^A \bar{g}^B D_{22} \rangle W_2^B.
\end{aligned} \quad (3.5)$$

Równania (3.3) – (3.5) stanowią punkt wyjścia do dalszej analizy. W równaniach podkreślono czony, których nie zawiera model przedstawiony w [1]. Dla płyty o stałych parametrach w kierunku prostopadłym do kierunku periodyki (rys. 1) jest to układ równań o stałych współczynnikach.

4. UŻEBROWANA PŁYTA ORTOTROPOWA

Założmy, że średniej grubości płyta o strukturze uniperiodycznej opisana równaniami (3.3) – (3.5) jest jednorodna, materiałowo ortotropowa, wzmocniona układem żeber o masie M i momencie bezwładności I , na jednostkę długości żebra rys. 1. Dla uproszczenia rozważań będziemy pomijać sztywność skrętną żeber. Założmy także, iż parametry płyty w kierunku prostopadłym do kierunku periodyki są stałe. Uwzględniając ortotropię płyty oznaczmy

$$\begin{aligned}
G_{11} &= G_{1111}, \quad G_{22} = G_{2222}, \quad G_{12} = G_{1122} = G_{2211}, \\
G &= G_{1212} = G_{1221} = G_{2112} = G_{2121}, \quad D_1 = D_{11}, \quad D_2 = D_{22}
\end{aligned}$$

Przyjmijmy ponadto tylko dwie modalne funkcje kształtu $h(x_1) = h^1(x_1) = \bar{h}(x_1)$, $g(x_1) = g^1(x_1) = \bar{g}(x_1)$. Przyjmijmy, że element reprezentatywny (powtarzalny) jest symetryczny względem osi żeber (reprezentuje go odcinek $(0, l)$ na rys. 1). Uwzględniając tę symetrię założmy, że funkcja $g(x_1)$ jest symetryczna natomiast $h(x_1)$ jest antysymetryczna względem osi żeber.

Przy tych założeniach z (3.3) – (3.5) otrzymamy następujący układ pięciu równań różniczkowych cząstkowych dla niewiadomych $\mathfrak{S}_\alpha, \Theta, w, W$

$$\begin{aligned}
\langle G_{11} \rangle \mathfrak{S}_{1,1}^o + \langle G \rangle \mathfrak{S}_{1,22}^o + (\langle G_{12} \rangle + \langle G \rangle) \mathfrak{S}_{2,12}^o - \langle D_1 \rangle (\mathfrak{S}_1^o + w_{,1}^o) - \langle J \rangle \ddot{\mathfrak{S}}_1^o &= 0 \\
\langle G_{22} \rangle \mathfrak{S}_{2,22}^o + \langle G \rangle \mathfrak{S}_{2,11}^o + (\langle G_{12} \rangle + \langle G \rangle) \mathfrak{S}_{1,12}^o - \langle D_2 \rangle (\mathfrak{S}_2^o + w_{,2}^o) - l \langle \bar{g} D_2 \rangle W_{,2} - \langle J \rangle \ddot{\mathfrak{S}}_2^o &= 0 \\
N_{\alpha\beta}^o w_{,\alpha\beta}^o + \langle D_1 \rangle (\mathfrak{S}_1^o + w_{,1}^o)_{,1} + \langle D_2 \rangle (\mathfrak{S}_2^o + w_{,2}^o)_{,2} + l N_{\alpha\beta}^o \langle \bar{g} \rangle W_{,\alpha\beta} + l \langle \bar{g} D_2 \rangle W_{,22} - \langle \mu \rangle \ddot{w}^o + p &= 0 \\
-l^2 \langle \bar{h}^2 G \rangle \Theta_{1,22} + (\langle \bar{h}_{,i}^2 G_{11} \rangle + l^2 \langle \bar{h}^2 D_1 \rangle) \Theta + l \langle \bar{h} g_{,i} D_1 \rangle W + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta}_1 &= 0 \\
-l^2 N_{\alpha 2}^o \langle \bar{g}^2 \rangle W_{,\alpha 2} - l^2 \langle \bar{g}^2 D_2 \rangle W_{,22} + N_{11}^o \langle g_{,i}^2 \rangle W + \langle g_{,i}^2 D_1 \rangle W - l N_{\alpha\beta}^o \langle \bar{g} \rangle w_{,\alpha\beta}^o + \\
-l \langle \bar{g} D_2 \rangle (\mathfrak{S}_2^o + w_{,2}^o)_{,2} + l \langle \bar{h} g_{,i} D_1 \rangle \Theta_1 + l^2 \langle \bar{g}^2 \mu \rangle \ddot{W} - l \langle \bar{g} p \rangle &= 0
\end{aligned} \quad (4.1)$$

oraz niezależne równanie dla Θ_2

$$-l^2 \langle \bar{h}^2 G_{22} \rangle \Theta_{2,22} + \left(\langle h^2 G \rangle + l^2 \langle \bar{h}^2 D_2 \rangle \right) \Theta_2 + l^2 \langle \bar{h}^2 J \rangle \ddot{\Theta}_2 = 0 \quad (4.2)$$

Układ równań (4.1) jest układem o stałych współczynnikach. Stanowi on narzędzie analizy zagadnień dynamiki i stateczności sprężystych płyt średniej grubości przy dowolnych warunkach podparcia płyty.

5. SIŁA KRYTYCZNA UNIPERIODYCZNEGO PASMA

Rozpatrzmy niezależne od czasu zagadnienie stateczności uniperiodycznego pasma płytowego o strukturze jak na rys. 1 i podpartego wyłącznie na krawędziach $x_2=0$ i $x_2=L_2=L$. Uwzględniając, że wszystkie niewiadome funkcje w równaniach (4.1) i (4.2) są niezależne od czasu a zależne tylko od zmiennej x_2 otrzymamy $\vartheta_1 = \Theta_2 = 0$ oraz układ czterech równań dla niewiadomych $\vartheta_2^\circ, \Theta_1, w^\circ, W$

$$\begin{aligned} H \vartheta_{2,22}^\circ - D(\vartheta_2^\circ + w_{,2}^\circ) - l \langle \bar{g} \rangle D W_{,2} &= 0 \\ (N_{22}^\circ + D) w_{,22}^\circ + D_2 \vartheta_{2,2}^\circ + l \langle \bar{g} \rangle (N_{22}^\circ + D) W_{,22} + p &= 0 \\ -l^2 \langle \bar{h}^2 \rangle H_0 \Theta_{1,22} + \left(\langle h^2 \rangle H + l^2 \langle \bar{h}^2 \rangle D \right) \Theta_1 + l \langle \bar{h} g_{,1} \rangle D W &= 0 \\ -l^2 \langle \bar{g}^2 \rangle (N_{22} + D) W_{,22} + \langle g_{,1}^2 \rangle (N_{11}^\circ + D) W - l \langle \bar{g} \rangle (N_{22}^\circ + D) w_{,22}^\circ + l \langle \bar{h} g_{,1} \rangle D \Theta_1 - l \langle \bar{g} p \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdzie oznaczono

$$H = \langle G_{11} \rangle = \langle G_{22} \rangle, \quad D = \langle D_1 \rangle = \langle D_2 \rangle, \quad H_0 = \langle G \rangle = \frac{1-\nu}{2} H.$$

Dla pasma płytowego swobodnie podpartego na krawędziach $x_2=0$ i $x_2=L$ rozwiązanie układu równań (5.1) poszukujemy w postaci

$$\begin{aligned} w^\circ(x_2) &= w_n \sin k_n x_2, \quad \vartheta_2^\circ(x_2) = \vartheta_n \cos k_n x_2 \\ \Theta_1(x_2) &= \Theta_n \sin k_n x_2, \quad W(x_2) = W_n \sin k_n x_2, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

gdzie $w_n, \vartheta_n, \Theta_n, W_n$ są stałymi.

Wyznacznik główny otrzymanego z (5.1) układu równań dla $w_n, \vartheta_n, \Theta_n, W_n$, przy pominięciu obciążenia poprzecznego płyty, ma postać

$$\begin{vmatrix} k_n^2 H + D & k_n D & 0 & k_n l \langle \bar{g} \rangle D \\ k_n D & k_n^2 (N_{22}^\circ + D) & 0 & k_n^2 l \langle \bar{g} \rangle (N_{22}^\circ + D) \\ 0 & 0 & l^2 \langle \bar{h}^2 \rangle (k_n^2 H_0 + D) + \langle h^2 \rangle H & l \langle \bar{h} g_{,1} \rangle D \\ k_n l \langle \bar{g} \rangle D & k_n^2 l \langle \bar{g} \rangle (N_{22}^\circ + D) & l \langle \bar{h} g_{,1} \rangle D & k_n^2 l^2 \langle \bar{g}^2 \rangle (N_{22}^\circ + D) + \langle g_{,1}^2 \rangle (N_{11}^\circ + D) \end{vmatrix}$$

Z warunku zerowania się tego wyznacznika uzyskano następujące wyrażenia na krytyczne wartości sił ściskających w płaszczyźnie środkowej pasma

$$N'_{22kr,n} = \frac{k_n^2 HD}{k_n^2 H + D}$$

$$N''_{22kr,n} = \frac{\langle g_{,1}^2 \rangle (D + N_{11})}{k_n^2 l^2 (\langle \bar{g}^2 \rangle - \langle \bar{g} \rangle^2)} + \left[1 - \frac{1}{k_n^2 (\langle \bar{g}^2 \rangle - \langle \bar{g} \rangle^2)} \frac{\langle \bar{h} g_{,1} \rangle^2 D}{\langle h_{,1}^2 \rangle H + l^2 \langle \bar{h}^2 \rangle (k_n^2 H_o + D)} \right] \quad (5.2)$$

Wyrażenie na $N'_{22kr,n}$ jest identyczne jak uzyskane metodą homogenizacji asymptotycznej. Formuła dla $N''_{22kr,n}$ nie ma swojego odpowiednika tak w metodach homogenizacyjnych jak również w dotychczas stosowanych modelach nieasymptotycznych.

6. PODSUMOWANIE

Zasadniczym celem referatu było przedstawienie nowego, nieasymptotycznego modelu płyt średniej grubości o strukturze uniperiodycznej, tj. modelu uwzględniającego wpływ okresu periodyczności na stateczność i dynamikę płyty. Model ten, w odróżnieniu od dotychczas proponowanych modeli nieasymptotycznych por. [1], [4], umożliwia bardziej ogólne podejście do analizy zagadnień stateczności. Podano także najprostszy przykład zastosowania wyznaczając siły krytyczne w uniperiodycznym paśmie płytowym. Szczegółowa analiza relacji (5.2)₂ zostanie przedstawiona w trakcie prezentacji referatu.

LITERATURA

- [1] Baron E., On modelling of medium thickness plates with a uniperiodic structure, *Jour. of Theor. and Appl. Mech.* **1**, **40**, 2002, s. 7-222.
- [2] Caillerie D., Thin elastic and periodic plates, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **6**, 1984, s. 159 - 191.
- [3] Jemielita G., Meandry teorii płyt w *Mechanika Sprężystych Płyt i Powłok* (ed. Cz. Woźniak), PWN, Warszawa 2001.
- [4] Jędrusiak J., On stability of thin periodic plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*, **19**, 2000, s.487-502.
- [5] Lewiński T., Homogenizing stiffnesses of plates with periodic structure, *Int. J. Solids Structures*, **21**, 1992, s. 309 - 326.
- [6] Wierzbicki E., Woźniak Cz., Continuum modelling and the internal instability of certain periodic structures, *Arch. of Appl. Mech.*, **72**, 2002, s.451-457.
- [7] Woźniak Cz., Wierzbicki E., *Averaging Techniques in Thermomechanics of Composite Solids*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2000.

NONASYMPTOTIC MODELLING OF THE STABILITY PROBLEMS FOR A UNIPERIODIC MEDIUM-THICKNESS PLATE

A plate with an uniperiodic structure is composed of a large number of the parallel repetitive elements having identical length dimensions and identical material structure. The geometry of the uniperiodic plate, apart of the midplane length dimensions is characterised by the period l of the structure heterogeneity, Fig.1. The aim of this contribution is to propose a certain new nonasymptotic 2D-model of medium thickness (Reissner-type) uniperiodic plates. The modelling approach is based on the tolerance averaging technique [7]. The obtained model equations make it possible to investigate the effect of the period length on dynamic and stability of the plate. The general considerations are illustrated on the example of the uniperiodic plate band. The explicit formulae for the critical forces are derived.

SOME REMARKS ABOUT NUMERICAL STABILITY IN NON-LINEAR DYNAMICS ON THE BASIS OF TRUSS STRUCTURES

J. CHRÓŚCIELEWSKI

Department of Bridge Structures, Gdańsk University of Technology
Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk, Poland

I. LUBOWIECKA¹, W. WITKOWSKI,

Department of Structural Mechanics, Gdańsk University of Technology
Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk, Poland

The effectiveness of integration schemes in non-linear structural dynamics requires long time step sizes what may lead to instability of the solution. Conservation or decaying of total energy and controllable numerical dissipation of unwanted high frequency response during the integration of equations of motion allows one to control the stability and to lengthen the simulation time. This kind of scheme is discussed in the paper on the basis of truss structure.

1. INTRODUCTION

Following the idea by Kuhl and Crisfield [1], the stability and accuracy of time integration schemes are discussed. In the non-linear computational dynamics the main interest is focused on the numerical stability of the algorithm. It is known that unconditionally stable algorithms of linear dynamics often lose this property in problems of non-linear dynamics (e.g. see Lubowiecka [2]). A sufficient condition in the non-linear regime is the conservation or decay of the total energy within a time step. This energy criterion is given by the following inequality (Belytschko and Schoeberle [3])

$$U_{n+1} - U_n + K_{n+1} - K_n \leq \Delta G_{ext}, \quad (1)$$

where $U_{n+1} \equiv U(t_{n+1})$ and $U_n \equiv U(t_n)$ are values of the strain energy $U(t)$ calculated numerically at the beginning t_n and at the end t_{n+1} of the time step $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, respectively, K_{n+1} and K_n are the corresponding values of the kinetic energy $K(t)$, and ΔG_{ext} denotes an increment of the work done by external loads within the time step. The notion 'energy conserving' is related to Hamiltonian systems ($\Delta G_{ext} = 0$).

2. GENERALISED ENERGY-MOMENTUM SCHEME

There are many time-stepping algorithms proposed in the literature for solving dynamical problems. The most popular are those based on the one-step Newmark scheme. Time-stepping algorithms for non-linear dynamical problems involving large overall motions can be characterised by three main features: a) numerical dissipation,

¹ The author is awarded by Foundation for Polish Science.

b) enforced conservation of energy and momenta, and c) algorithmic conservation of energy and momenta. The time integration code used in this report has been so constructed that the above features can be discussed by changing values of some parameters.

Let the time interval $[0, T]$ be $\bigcup_{n=0}^N [t_n, t_{n+1}]$ and $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}(t_n)$, $\mathbf{v}_n = \mathbf{v}(t_n)$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{a}(t_n)$ denote values of the generalised displacements, velocities and accelerations at the typical time instant t_n respectively. The basic problem concerning the discrete time-stepping updating may be formulated as follows.

Having the values \mathbf{u}_n , \mathbf{v}_n and \mathbf{a}_n at time t_n , we search for values of \mathbf{u}_{n+1} , \mathbf{v}_{n+1} and \mathbf{a}_{n+1} at the next time instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, in such a way that they should be consistent with the non-linear dynamic formulation and numerically stable.

After Chung and Hulbert [3] we introduce into the extended Newmark scheme the following scalar parameters $\alpha_f, \alpha_m, \alpha_l, \xi \in [-1, 1]$. In comparison to the paper [1] we introduce an additional parameter α_l responsible for external load approximation. We also use discrete time combinations according to the scheme

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{n+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f)\mathbf{u}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{u}_n, & \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f)\mathbf{v}_{n+1} + \alpha_f\mathbf{v}_n, \\ \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} &= (1-\alpha_m)\mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m\mathbf{a}_n, & \mathbf{f}_{n+1-\alpha_l} &= (1-\alpha_l)\mathbf{f}_{n+1} + \alpha_l\mathbf{f}_n, \\ \mathbf{\&}_{n+1-\alpha_f} &= (1-\alpha_f + \xi)\mathbf{\&}_{n+1} + (\alpha_f - \xi)\mathbf{\&}_n. \end{aligned} \quad (2)$$

The symbol \mathbf{f} means here any of the external load vectors. The subscripts $n+1-\alpha_f$, $n+1-\alpha_m$ and $n+1-\alpha_l$ indicate that these variables are given at an intermediate point of the time step. The term $\mathbf{\&}_{n+1-\alpha_f}$ is the algorithmic strain used in energy conserving method for control of numerical dissipation of higher modes. With (2)_{1,2,3} and the standard Newmark formula, for the generalised accelerations and velocities at the intermediate point we obtain

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} &= \frac{1-\alpha_m}{\beta(\Delta t)^2} \Delta \mathbf{u} - \frac{1-\alpha_m}{\beta \Delta t} \mathbf{v}_n - \frac{1-\alpha_m-2\beta}{2\beta} \mathbf{a}_n, \\ \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} &= \frac{\gamma(1-\alpha_f)}{\beta \Delta t} \Delta \mathbf{u} - \frac{\gamma(1-\alpha_f)-\beta}{\beta} \mathbf{v}_n - \Delta t \frac{(\gamma-2\beta)(1-\alpha_f)}{2\beta} \mathbf{a}_n. \end{aligned} \quad (3)$$

In (3), $0 \leq \beta \leq 0.5$ and $0 \leq \gamma \leq 1$ are parameters of the standard Newmark algorithm. The semidiscrete linearised structural equation of motion is applied to a general intermediate point in the following form:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} + \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} + \mathbf{K}_{\top n+1-\alpha_f}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}_{n+1-\alpha_l}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}) - \mathbf{r}_{n+1-\alpha_f}(\mathbf{u}_{n+1-\alpha_f}), \quad (4)$$

where \mathbf{M} is mass matrix, \mathbf{C} damping matrix, \mathbf{K}_{\top} tangential stiffness matrix and \mathbf{r} denotes internal forces. We assume that mass and damping matrices are constant in the analysis. Equation (4), with application of Eqs. (2)–(3), is the base for iterative

solution which uses Newton–Raphson strategy. On the basis of (2)_{1,2,3,4}, (3) and (4) with $\alpha_i = \alpha_f$, it is possible to construct the energy conserving algorithm which is second order accurate and preserves the total energy (1) within a time step. However this kind of schemes has convergence problems in application to structural dynamics and therefore another modifications of methods are built using (2)₅ (see Simo and Tarnow [5]).

Generalisations (2)–(4) with the criterion (1) are introduced into the classical Newmark scheme in MINIMOD library (Chróścielewski and Branicki [6]). The 2–node truss finite element in updated Lagrangian formulation (UL) with consistent mass and damping matrices (well known from FEM handbooks, e.g. see Bathe [7]) is used in the considered example.

3. NUMERICAL EXAMPLE

The truss structure ($L=10m$, $H=0.5m$, $E=200GPa$, $A=1cm^2$, $\rho A=100kg/m$, Fig. 1) is chosen to point out the properties of discussed implicit time integration scheme. The characteristics of the considered truss structure, boundary conditions and load are chosen in order to become a good test of the algorithm and to obtain comparable values of potential and kinetic component of the energy of the system. The two external dead forces $P(t) = 32.5 \lambda(t) kN$ at the points (b) and (e) and the external follower load $P_{fol}(t) = 250 \lambda(t) kN$ at the points (a)–(d) acts during the first 0.4s of the motion. After 0.4s the truss structure moves freely in the space without any external load. Fig. 2 depicts the load ramp function $\lambda(t)$.

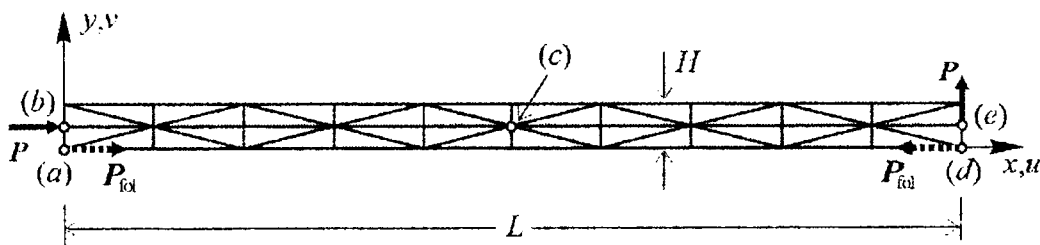


Fig. 1. Truss structure

The calculation of the motion is carried out with different time steps and Newmark parameters $\beta = 1/4$, $\gamma = 1/2$, and $\xi = 0$. The motion of the system during the first 20s is plotted in Fig. 2. This overall motion consists of the global translations and turns of the structure caused by the load $P(t)$ and bending deformations caused by follower load $P_{fol}(t)$. Fig. 3 shows the range of the relative bending deformation ($u_c - v_c$, which may be interpreted as a relative motion of the geometric centre (c) with reference to the mass centre). The effectiveness of discussed methods by means of energy plot is depicted in Fig. 4. Even using disadvantageous long time step ($\Delta t = 0.05s$) we can observe, that instable solution by classical Newmark scheme ($\alpha_m = \alpha_f = \alpha_i = 0$) becomes stable provided that numerical damping (the α – Methods: $\alpha_m = 0$, $\alpha_f = \alpha_i = -0.05$) as well as energy conserving scheme ($\alpha_m = \alpha_f = \alpha_i = 1/2$) is used. Additional parameter α_i

allows one to employ numerical scheme by Simo and Wong [8]. For $\alpha_i = 0$ the energy value is stable on the appropriate level.

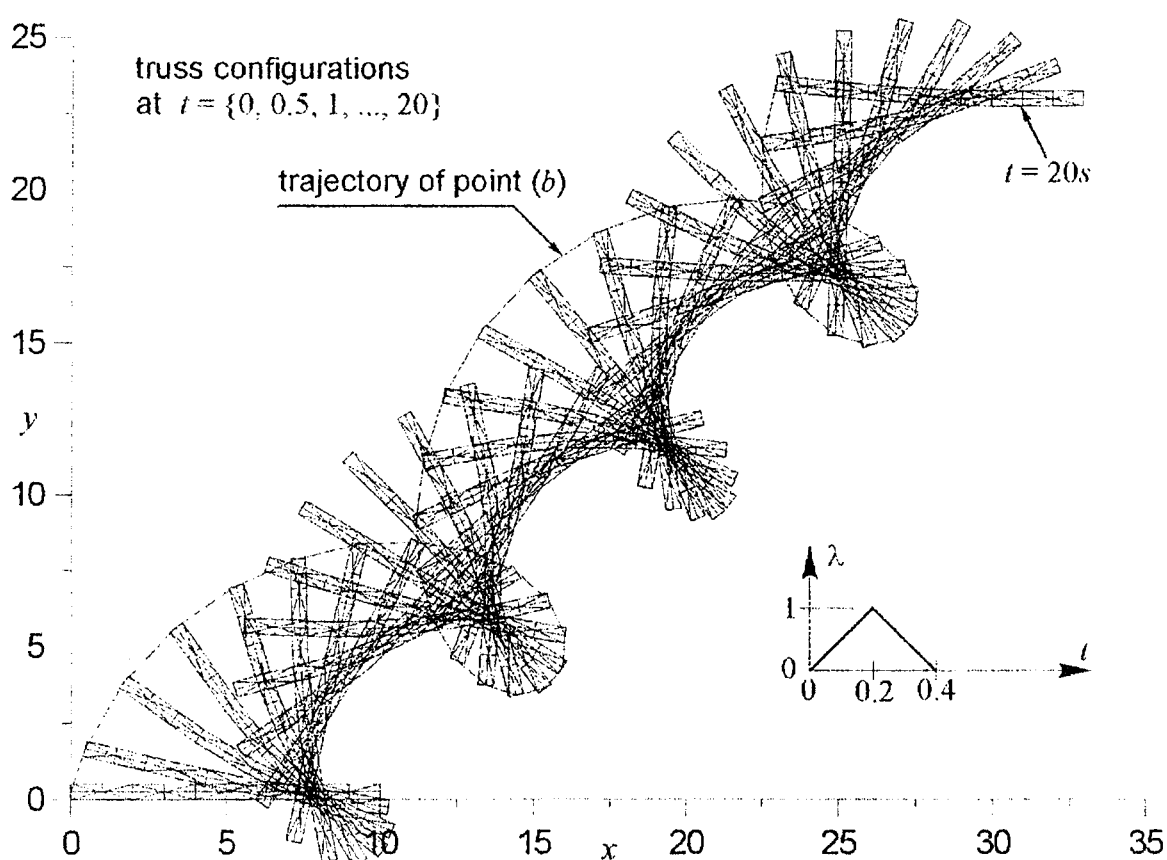


Fig. 2. Global motion of the truss structure during the first 20s, load function

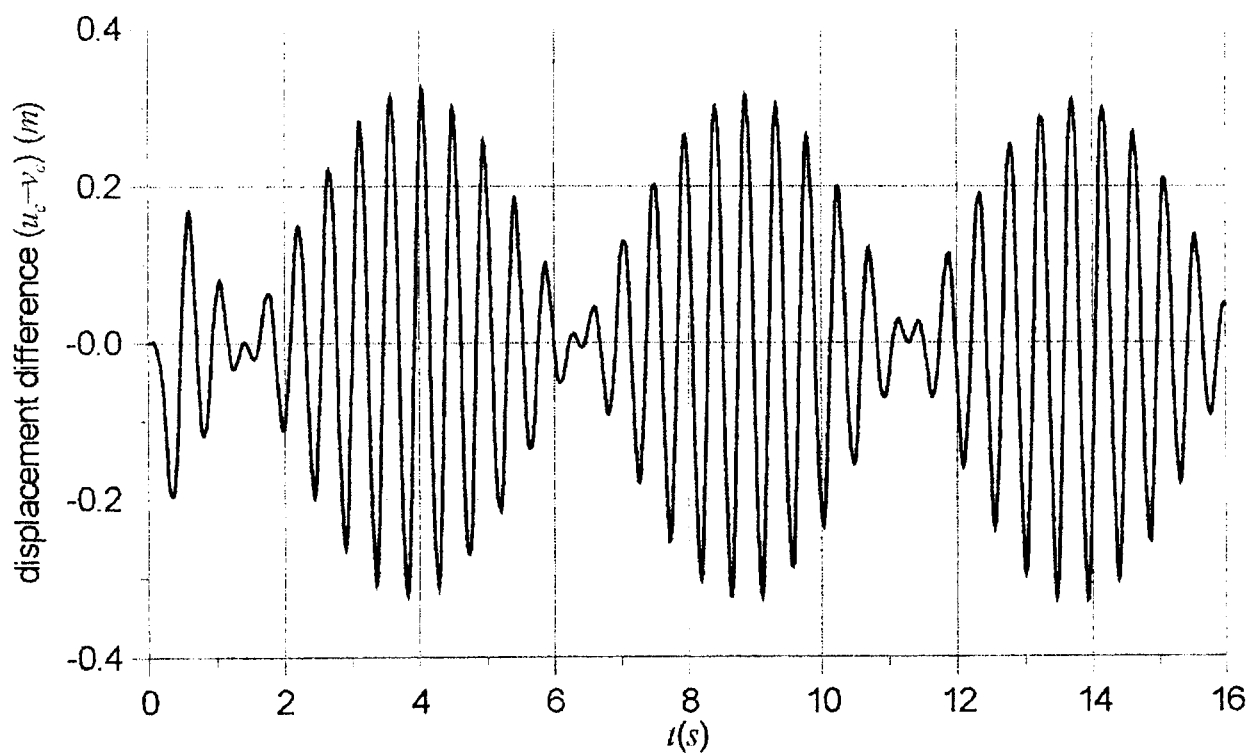


Fig. 3. Relative vibrations of the geometric centre (c) with reference to the mass centre

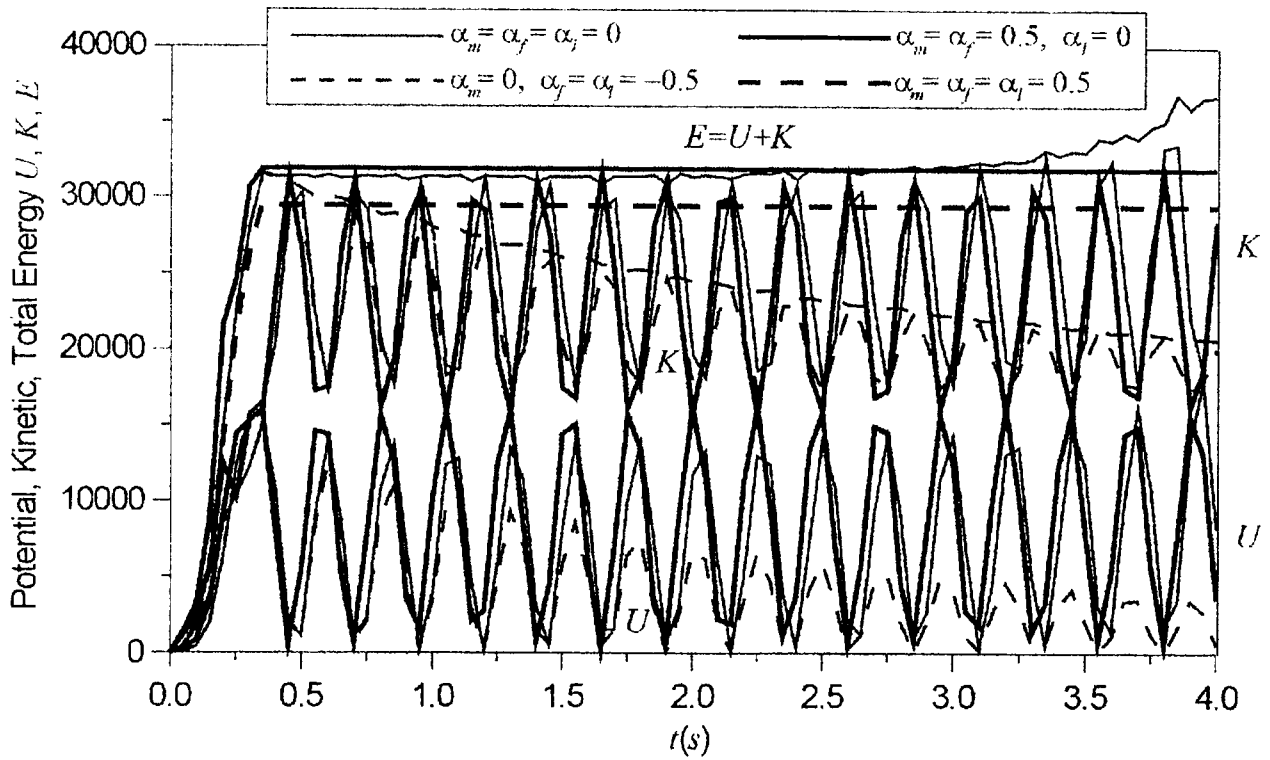


Fig. 4. Energy plot for different numerical integration schemes

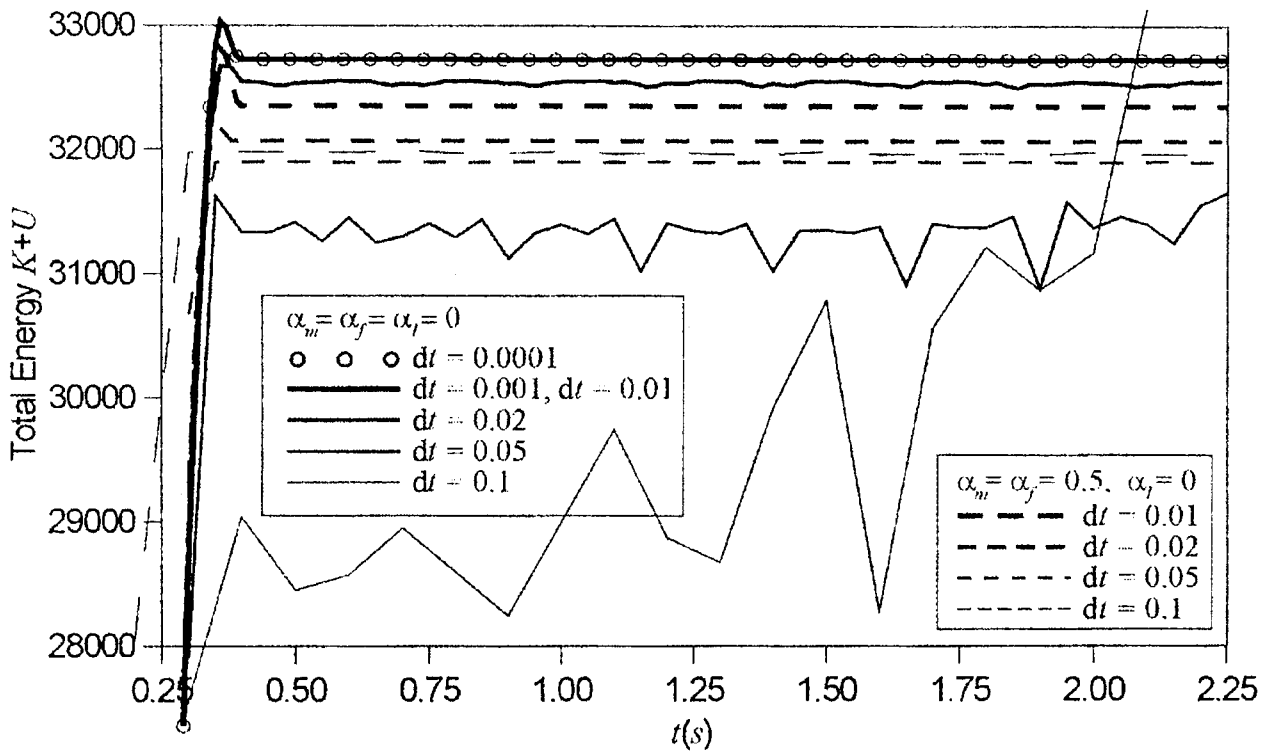


Fig. 5. Energy plot for different time step sizes

Convergence problem on the basis of energy of the system within the integration with different time step sizes $\Delta t = \{0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0.001, 0.0001\}s$ is shown in Fig. 5. Solid lines represent the solutions by classical Newmark method ($\alpha_m = \alpha_f = \alpha_l = 0$)

whereas dashed ones correspond to energy-conserving algorithm ($\alpha_m = \alpha_f = 1/2$, $\alpha_l = 0$).

4. CONCLUSIONS

This example shows the failure of the generalised Newmark method and good performance of the stable integration with energy-conserving algorithm and the inclusion of numerical damping. The accuracy of the algorithm has been verified by observation that the global centre of mass moves along a straight line through the simulation time. Stability of the solution, when external forces are removed, is verified by the conservation of the total energy. The instability of the solution (e.g. using classical Newmark scheme), demonstrates itself as explosive increase of the total energy. The analysis indicates that the proper values of numerical parameters $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$, $\alpha_m = \alpha_f = 1/2$ with our proposal for $\alpha_l = 0$ in algorithmic energy conserving method conserve the total energy of the system and assure, in the sense of (1), the stability of the solution in the long times using relatively long time steps.

REFERENCES

- [1] Kuhl D and Crisfield MA, Energy-conserving algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*; **45**, 1999, pp. 569-599.
- [2] Lubowiecka I, Integration of nonlinear dynamic equations of motion in structural mechanics. Dynamics of elastic shell structures (in Polish), PhD Dissertation Gdańsk University of Technology, 2001.
- [3] Belytschko T., Schoeberle D.F., On the unconditional stability of an implicit algorithm for nonlinear structural dynamics. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME*; **42**, 1975, pp. 865-869.
- [4] Chung J., and Hulbert GM., A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method. *Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME*, **60**, 1993, pp. 371-375.
- [5] Simo JC, and Tarnow N., The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Journal of Applied Mathematics and Physics*; **43**, 1992, pp. 757-792.
- [6] Chróścielewski J., and Branicki C., MINIMOD – Pakiet podprogramów wspomagający badanie zagadnień nieliniowych. IX Konf. Metody Komputerowe w Mechanice. Tom 1, Kraków-Rytko 1989, pp. 131-138.
- [7] Bathe KJ., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Englewood Cliffs. Prentice-Hall, 1982.
- [8] Simo JC, and Wong KK., Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **31**, 1991, pp. 19-52.

WPLYW ZMIAN GRUBOŚCI PŁYTY PERFOROWANEJ WYMIENNIKA CIEPŁA NA STATECZNOŚĆ KONSTRUKCJI

A. CHUDZIK

Katedra Mechaniki Ogólnej Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

J. ŚWINIARSKI

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

Jednym z istotnych elementów wymiennika ciepła są dna sitowe – płyty perforowane o znacznej grubości, w których zamocowane są rurki wkładu grzewczego. Dla konstruktorów wymienników ciepła istotna jest analiza wytrzymałościowa połączenia, pozwalająca na określenie stanu naprężeń oraz obliczenie przemieszczeń dna sitowego po zamocowaniu rurek. Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że maksymalne naprężenia zredukowane w dnie sitowym są dużo niższe od wartości naprężeń dopuszczalnych. W pracy przedstawiono obliczenia naprężeń i odkształceń dla różnych grubości dna sitowego. Na skutek zmniejszenia grubości dna sitowego zwiększa się jego ugięcie przez co bardziej są narażone rurki wkładu grzewczego na utratę stateczności.

1. WPROWADZENIE

Wymienniki ciepła stosowane są w budownictwie i w przemyśle, głównie w energetyce. Jednym z istotnych elementów wymienników ciepła są dna sitowe – płyty perforowane o znacznej grubości, w których zamocowane są rurki wsadu grzewczego. Liczba rurek, a więc otworów w płycie perforowanej sięga wielu tysięcy, otwory te oddzielone są od siebie cienkim mostkiem. Konstrukcja dna sitowego, jako płyty okrągłej osiowo – symetrycznej, na sprężystym podłożu zachęca do stosowania odpowiednich równań wytrzymałości materiałów i teorii sprężystości. W tym celu od lat wykonuje się obliczenia tzw. sztywności zastępczych, zastępczych własności wytrzymałościowych materiału płyty. Dla płaskiego stanu naprężeń w płycie (np.: rozciąganie tarczowe) wyniki tego przybliżenia są zgodne z wynikami badań doświadczalnych. Dla rzeczywistych warunków pracy – (zginanie płyty) przybliżenie to do dziś nie zostało wykonane dostatecznie dokładnie.

Istotnym problemem w dnach sitowych jest zamocowanie rurek w płycie poprzez rozwalcowanie. W wyniku tego procesu następuje trwałe odkształcenie plastyczne wokół otworów, co ma wpływ na kształt sąsiednich otworów, a następnie na pracę całej płyty i rurek.

W pracy przedstawiono obliczenia naprężeń i odkształceń dla różnych grubości dna sitowego. Na skutek zmniejszenia grubości dna sitowego zwiększa się jego ugięcie przez co bardziej są narażone rurki wkładu grzewczego na utratę stateczności.

2. OMÓWIENIE ZAGADNIENIA

Wymienniki ciepła pracują w bardzo wysokich temperaturach. Występująca różnica temperatur poszczególnych części wymiennika ciepła, jest bardzo często źródłem poważnych trudności konstrukcyjnych.

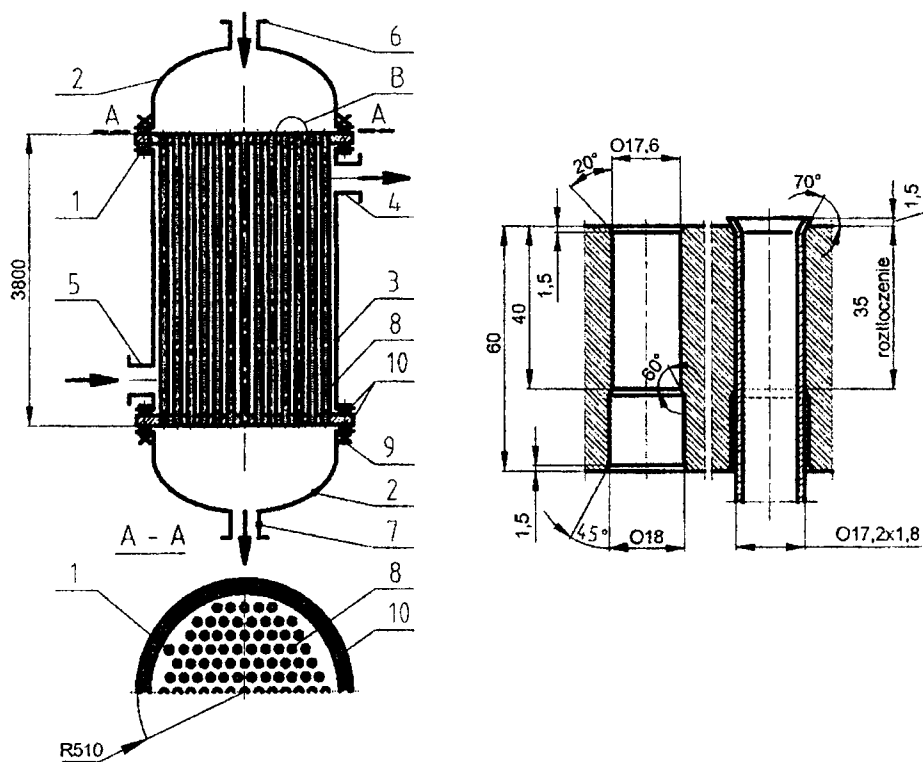
Wiadomo, że objętość materiałów stosowanych w konstrukcji wymienników ciepła zwiększa się przy wzroście temperatury (wymiary płaszcz, płyt sitowych, itd. ulegają zmianie). Są to tak zwane dylatacje cieplne. Nierównomierność temperatur, właściwa każdemu wymiennikowi ciepła powoduje, że rurki wydłużają się inaczej niż płaszcz, płyta sitowa zmienia swoją średnicę inaczej niż ściana zewnętrzna itd.. Powstające różnice poszczególnych wydłużeń powodują nieraz bardzo poważne naprężenia, mogące doprowadzić do trwałych deformacji materiału, utraty stateczności, a nawet do zerwania.

Płaszcz, rurki wkładu grzewczego z płytą sitową są miejscem wymagającym pod tym względem najwięcej ostrożności. Płaszcz osiąga temperaturę bliską temperatury czynnika, który się z nim styka, rurki zaś mają temperaturę pośrednią między temperaturami obu czynników. Pociąga to za sobą dużą różnicę wydłużeń cieplnych i mogą one być przyczyną dużych naprężeń w materiale rurek, płaszczu i płycie perforowanej.

3. OBLICZENIA METODĄ ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

3.1. MODEL OBLICZENIOWY

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla jednobiegowego wymiennika ciepła rys. 1., którego model opracowano na podstawie dokumentacji technicznej podgrzewacza wody zdekarbonizowanej Py-100-020 [8].



Rys. 1. Schemat wymiennika ciepła

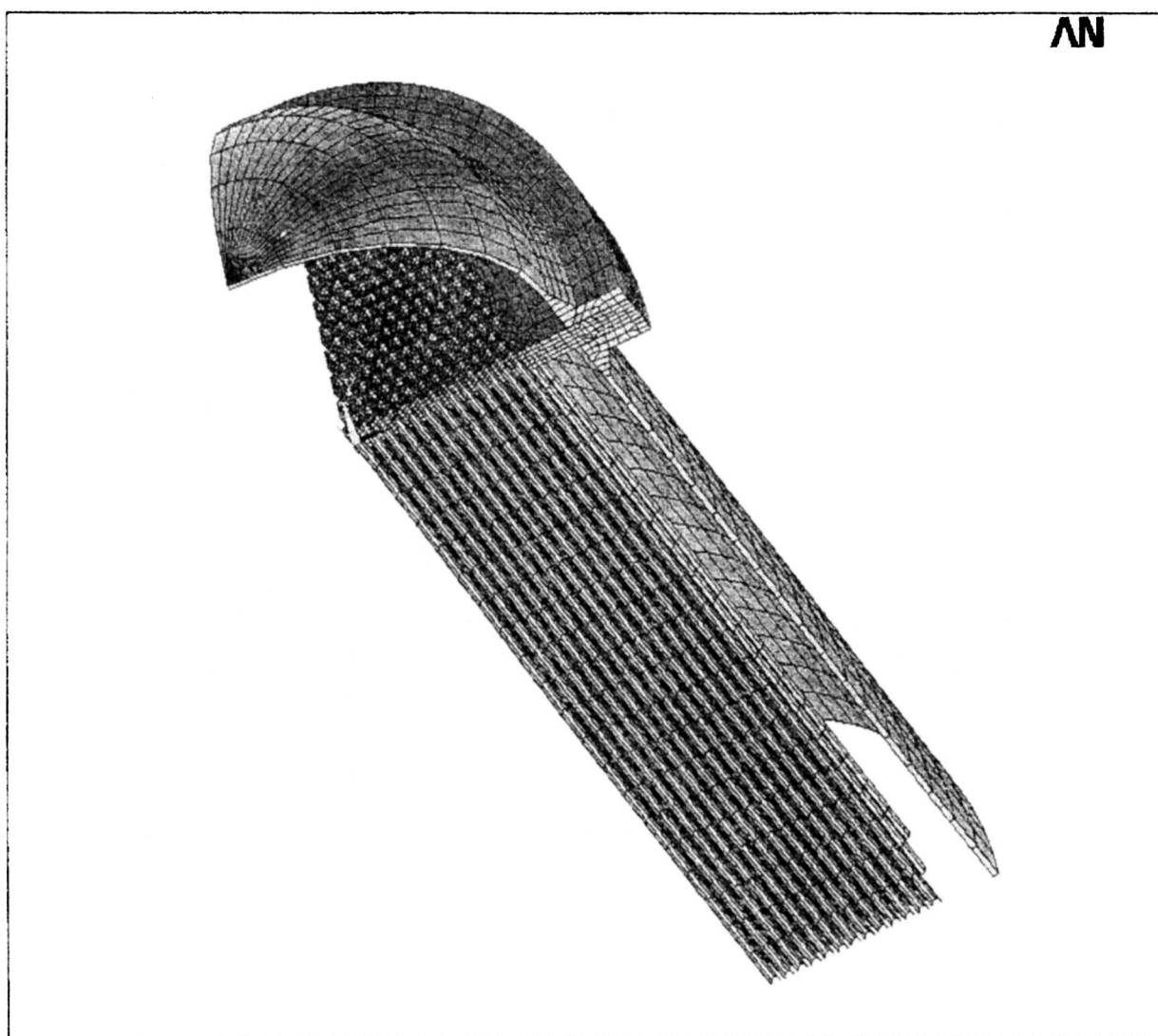
Zasadniczymi elementami wymiennika ciepła są:

- ściany sitowe 1,
- dennice 2,
- płaszcz 3,
- rury wkładu grzewczego 8,
- uszczelki wkładu grzewczego 10.

Ściany sitowe są mocowane do płaszcza i dennic za pomocą śrub łącznych 9. Króćce 6 i 7 doprowadzają i odprowadzają wodę, a króćce 4 i 5 doprowadzają parę. Szczegół „B” pokazuje wymiary otworu w dnie sitowym przed rozwałcowaniem oraz wygląd połączenia rurka – dno sitowe po rozwałczeniu.

3.2. MODEL NUMERYCZNY

Do obliczeń numerycznych zastosowano metodę elementów skończonych stosując konwencjonalne założenia. Wykorzystując warunki symetrii do obliczeń opracowano przedstawiony na rys. 2. model stanowiący 1/8 część wymiennika ciepła. Przyjęto nieliniowy model materiału z liniowym wzmocnieniem. Model ten podzielono na 39243 8-węzłowych elementów typu SOLID45.



Rys. 2. Model numeryczny

Obliczenia wytrzymałościowe przeprowadzono dla dwóch grubości płyty:

1. zgodnie z dokumentacją 60mm,
2. grubość płyty zmniejszono w stosunku 1:2.

Obliczenia przeprowadzono dla przypadku awarii i miały one na celu wyznaczenie odkształceń występujących w rurkach, dnach sitowych oraz w płaszczu. Przypadek awaryjny występuje kiedy dopływ i odpływ wody jest zamknięty, natomiast para grzejna w dalszym ciągu zasila wymiennik.

Tabela 1. Własności materiałów przyjęte do obliczeń MES.

	R_e [MPa]	E [MPa]	ν [-]	Wsp. umocnienia
Dennica St36K PN-75/H-92123	196	$2 \cdot 10^5$	0,3	0,99
Płaszcz St36K PN-75/H-92123	196	$2 \cdot 10^5$	0,3	0,99
Dno sitowe St41K PN-75/H-92123	255	$2 \cdot 10^5$	0,3	0,99
Rurki wymiennika I-K10 PN-74/H-74252	235	$2 \cdot 10^5$	0,3	0,99
Uszczelka polonit 300 PN-79/M-11022.02	---	$0,03 \cdot 10^5$	0,4	---

Nacisk na uszczelkę obliczono na podstawie podanej w dokumentacji technicznej wymiennika ciepła wymaganej wartości napięcia wstępnego śrub połączenia dennica-uszczelka-dno sitowe-uszczelka- płaszcz.

Tabela 2. Wartości obciążeń wynikających z montażu.

Nacisk na uszczelkę	7,1 MPa
Ciśnienie roztłoczenia rurka-dno sitowe	176 MPa

Tabela 3. Awaryjne warunki pracy wymiennika ciepła.

Parametry	Komora wodna	Komora parowa
Ciśnienie	-	$p_0=1,17$ MPa
Temperatura	-	$T_0=523$ K

Tabela 4. Własności współczynników wymiany ciepła

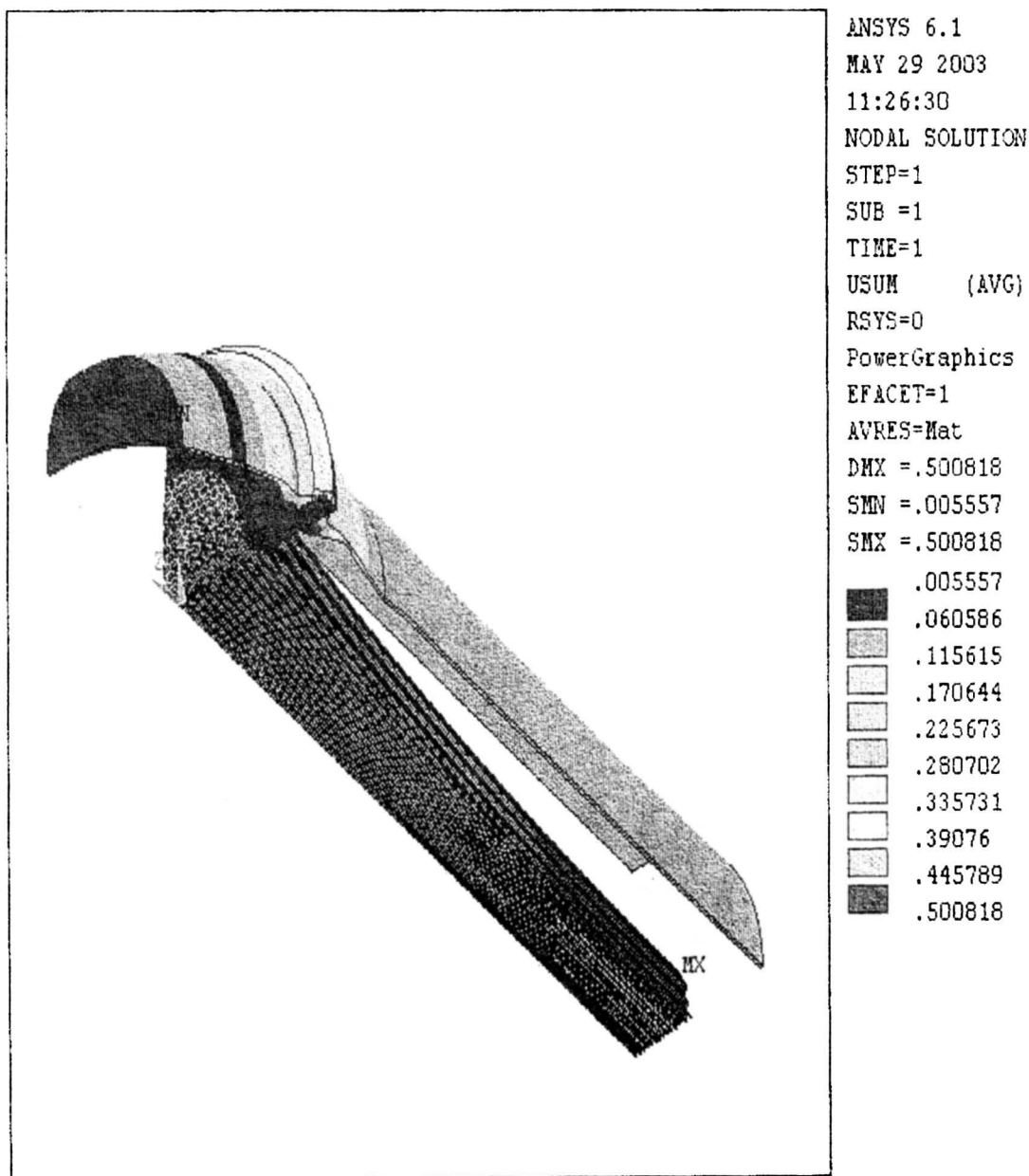
Współczynnik wnikania para-ciecz	$\alpha_w = 17$ W/m ² K
Współczynnik wnikania cieczy	$\alpha_w = 29$ W/m ² K
Współczynnik przewodzenia ciepła przez rury	$\lambda = 49$ W/mK
Współczynnik przewodzenia ciepła przez dno	$\lambda = 47$ W/mK
Współczynnik wnikania powietrza	$\alpha_w = 30$ W/m ² K

4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

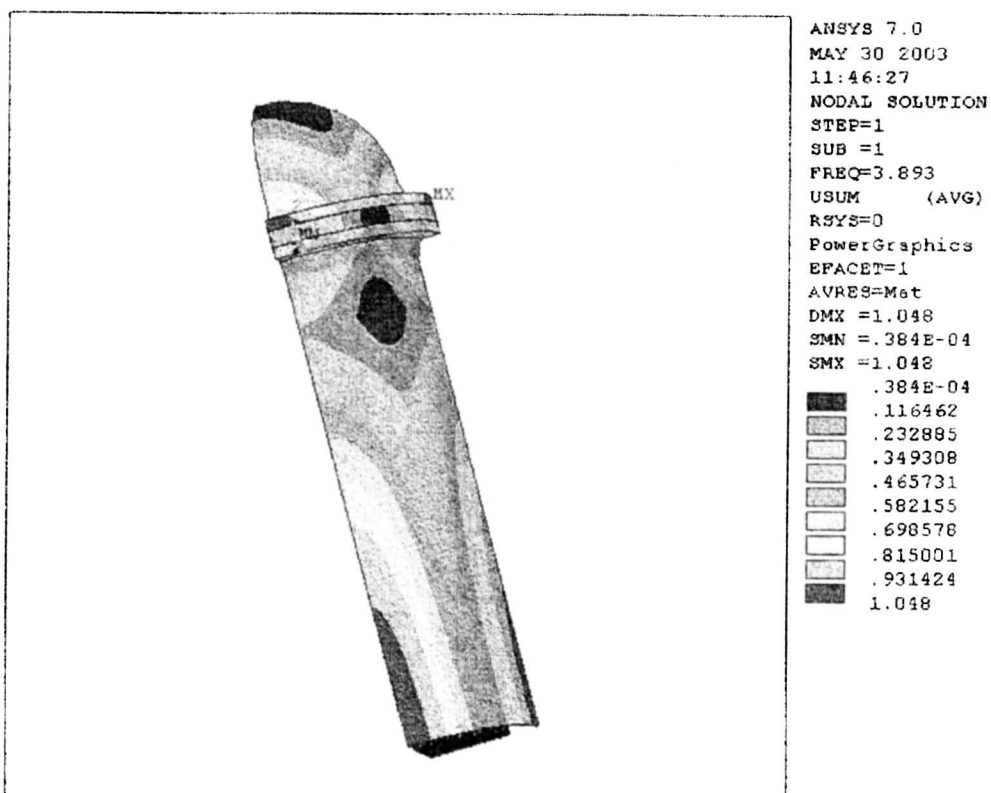
Dla obu przypadków otrzymano rozkłady odkształceń wymiennika ciepła oraz postacie stateczności odpowiadające obciążeniu krytycznemu. Wyniki obliczeń numerycznych dla przypadku pierwszego przedstawia rys. 3 i rys. 4 oraz dla drugiego przypadku rys. 5. i rys. 6.

Na rysunku 3 pokazano odkształcenia wymiennika ciepła w stanie awarii dla grubości dna sitowego wynoszącego 60 mm. Rurki wymiennika ciepła "zapadają" się do środka zbiornika.

Na rysunku 4 przedstawiono pierwszą postać wyboczenia odpowiadającą czterokrotnie większemu obciążeniu niż w momencie awarii dla grubości dna sitowego wynoszącego 60 mm. Dla tych wymiarów płyty wyboczeniu ulega płaszcz wymiennika ciepła.



Rys. 3. Całkowite odkształcenia wymiennika ciepła [mm] (przypadek nr 1).



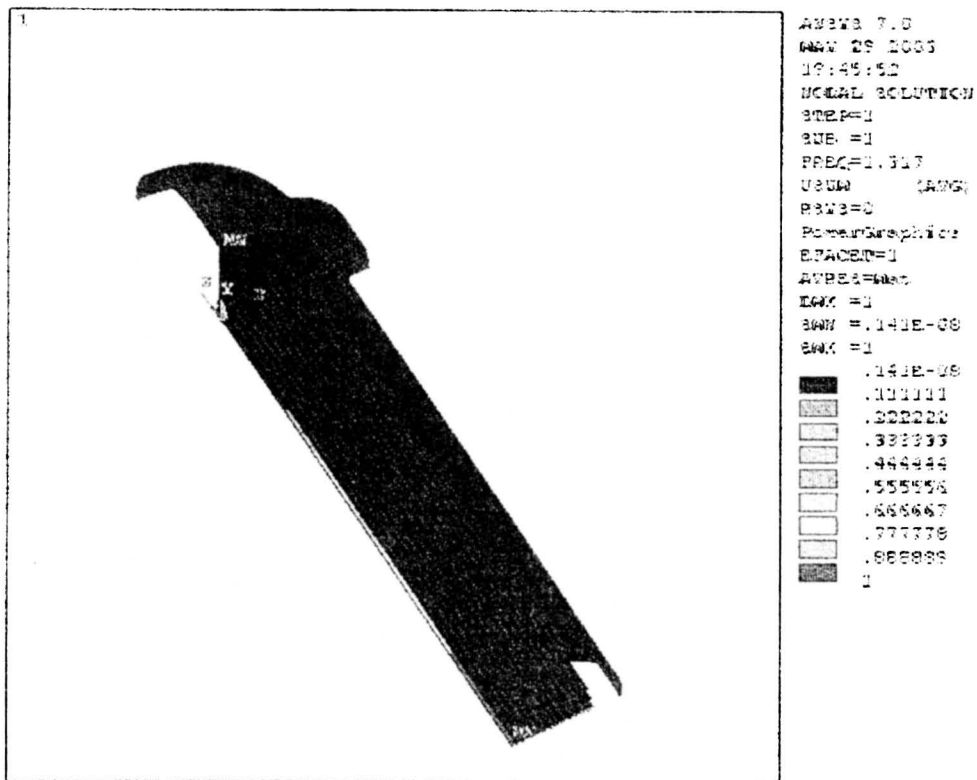
Rys. 4. Postać wyboczenia odpowiadająca najniższemu obciążeniu krytycznemu.

Na rysunku 5 pokazano odkształcenia wymiennika ciepła w stanie awarii dla grubości dna sitowego wynoszącego 30 mm. Rurki wymiennika ciepła odkształcają się w kierunku płaszcza zbiornika.



Rys. 5. Całkowite odkształcenie wymiennika ciepła [mm] (przypadek nr 2).

Na rysunku 6 przedstawiono pierwszą postać wyboczenia odpowiadającą obciążeniu większemu o ok. 30% niż w momencie awarii dla grubości dna sitowego wynoszącego 30 mm. Dla tych wymiarów płyty wyboczeniu ulega środkowa rurka wymiennika.



Rys. 6. Postać wyboczenia odpowiadająca najniższemu obciążeniu krytycznemu.

5. WYNIOSKI

Na podstawie analizy numerycznej można stwierdzić że analizowany zbiornik nie ulegnie wyboczeniu w momencie awarii. W przypadku dna sitowego o grubości 60 mm obciążenie krytyczne jest prawie czterokrotnie większe od rzeczywistego obciążenia wymiennika. Gruba płyta dna sitowego w przypadku osiągnięcia obciążenia krytycznego powoduje że w pierwszej kolejności utracie stateczności podlega płaszcz zbiornika.

W przypadku zmniejszenia grubości płyty dna sitowego o połowę zapas obciążenia krytycznego wynosi około 30%, przy czym wyboczeniu w przypadku obciążenia krytycznego ulega rurka najbardziej bliska osi symetrii zbiornika. Pozostałe elementy zbiornika mają czterokrotny zapas w stosunku do obciążenia krytycznego.

LITERATURA

- [1] Chudzik A.A., Analiza stanu naprężeń w perforowanych płytach wymienników ciepła z uwzględnieniem stref sprężysto – plastycznych, Praca doktorska, Politechnika Łódzka, 2002.
- [2] Dokumentacja koncesyjna podgrzewacza wody zdekarbonizowanej Py-100-020.

- [3] Niezgodziński T., Chudzik A., Badania płyt perforowanych z wtłoczonymi rurkami, Materiały Konferencyjne XIX Sympozjum Mechaniki Ciała Stałego, Jachranka 2000.
- [4] Hobler. T., Ruch ciepła i wymienniki, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1986.
- [5] Niezgodziński M.E., Obliczenia den w zbiornikach ciśnieniowych, Przegląd Mechaniczny, Warszawa nr 18, 1977.
- [6] Niezgodziński M. E., Obliczenia naczyń ciśnieniowych w świetle teorii sprężystości, Przegląd Mechaniczny, nr 17, 1972.
- [7] Niezgodziński M. E., Obliczenie den sitowych zbiorników ciśnieniowych, Przegląd Mechaniczny, nr 3, 1973.
- [8] Niezgodziński M. E., Zwoliński W., Obliczenie den sitowych usztywnionych przez płaszczyznę zbiornika, Przegląd Mechaniczny nr 8, 1973.
- [9] Niezgodziński M. E., Niezgodziński T., Wzory, wykresy i tablice wytrzymałościowe, PWN, Warszawa, 1996.
- [10] User's Guide ANSYS 6.1, Ansys, Inc., Houston, USA.

EFFECT OF CHANGES IN THE THICKNESS OF A PERFORATED PLATE OF THE HEAT EXCHANGER ON ITS STRUCTURAL STABILITY

One of most important elements of heat exchangers are perforated bottoms - perforated plates of significant thickness, in which heating cartridge pipes are mounted. For the designers of heat exchangers, the strength analysis of the connection, which allows for the determination of the state of stress and the calculation of displacements of the perforated bottom after fixing pipes in it, is of special importance. It results from the computations carried out that maximum reduced stresses in the perforated bottom are significantly lower than the values of admissible stresses. In this paper, the computations of stresses and strains for various thicknesses of the perforated bottom have been presented. As a result of a decrease in the thickness of the perforated bottom, its deflection increases and thus the heating system pipes are more exposed to strains and losses of stability.

WPLYW WZROSTU TEMPERATURY NA POWIERZCHNIACH CIERNYCH NA STATECZNOŚĆ TARCZY HAMULCOWEJ SZYBKOBIEŻNEGO POJAZDU GĄSIENICOWEGO

M. DACKO, W. BARNAT

Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej, Wydział Mechaniczny,
Wojskowa Akademia Techniczna w Warszawie
Kaliskiego 2, 00-909 Warszawa

Przedmiotem analizy jest pierścieniowa tarcza sprzęgła planetarnej skrzyni biegów. Rozważono tarczę bez warstw ciernych, obciążoną liniowo zmiennymi wzdłuż promienia polami temperatur. Analizę stateczności przeprowadzono stosując metodę stanów granicznych z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej (duże przemieszczenia) i nieliniowości fizycznej (materiał sprężysto-plastyczny). Do analizy wykorzystano program MSC Nastran for Windows stosując modele trójwymiarowe utworzone z elementów bryłowych.

1. WSTĘP

Elementy cierne hamulców i sprzęgieł ciernych poddawane są nagrzewaniu tarciovemu. Jednym ze skutków procesu tarcia jest wzrost temperatury na powierzchniach trących wywołujący duże naprężenia termiczne. Duża awaryjność tarcz sprzęgłowych objawiająca się między innymi utratą stateczności jest wywołana niejednorodnym polem temperatur powstałym w skutek tarcia na powierzchniach ciernych tych tarcz. Niejednorodność tego pola spowodowana jest nierównomiernością rozkładów naprężeń docisku w pakietach tarcz ciernych wywołanych małą sztywnością elementów składowych sprzęgieł. Procesy obciążeń cieplnych są przedmiotem wielu badań eksperymentalnych i teoretycznych [1,2].

W pracy zbadano wpływ niejednorodnego pola temperaturowego na powierzchni tarczy ciernej na jej trwałą utratę stateczności. Uzyskane wyniki pozwolą ocenić celowość przeprowadzenia modernizacji sprzęgieł skrzyni biegów.

Do obliczeń wykorzystano oprogramowanie firmy MSC Nastran for Windows.

2. OBIEKT BADAŃ

W pracy zajęto się tarczą sprzęgłową z planetarnej skrzyni biegów czołgu. Na podstawie oględzin zużyciowych oraz badań literaturowych [3] stwierdzono iż największa awaryjność tarcz ciernych występuje w tych sprzęgłach i hamulcach, które charakteryzują się małą sztywnością elementów składowych. Niewystarczająca sztywność elementów sprzęgła wpływa na nierównomierny rozkład naprężeń docisku w pakietach tarcz sprzęgłowych [4]. Rozkład naprężeń docisku wpływa na wzrost temperatury powstały w wyniku sił tarcia podczas włączania sprzęgła. Wartość temperatury [2] na powierzchni tarczy jest wprost proporcjonalna do strumienia ciepła który opisany jest przez podstawowy wzór:

$$q = \mu * p * v \quad (1)$$

gdzie:

q- strumień cieplny, μ - współczynnik tarcia,
p- naciski jednostkowe, v- prędkość poślizgu

Ze względu na dużą nierównomierność rozkładów naprężeń docisków istnieje możliwość powstawania, podczas procesu pracy sprzęgła, wzrostu pola temperatury na powierzchniach trących charakteryzującego się dużą nierównomiernością, która doprowadzają do utraty stateczności tarcz ciernych [5].

Z tego względu w pracy został przeanalizowany model tarczy sprzęgłowej z planetarnej skrzyni biegów czołgu.

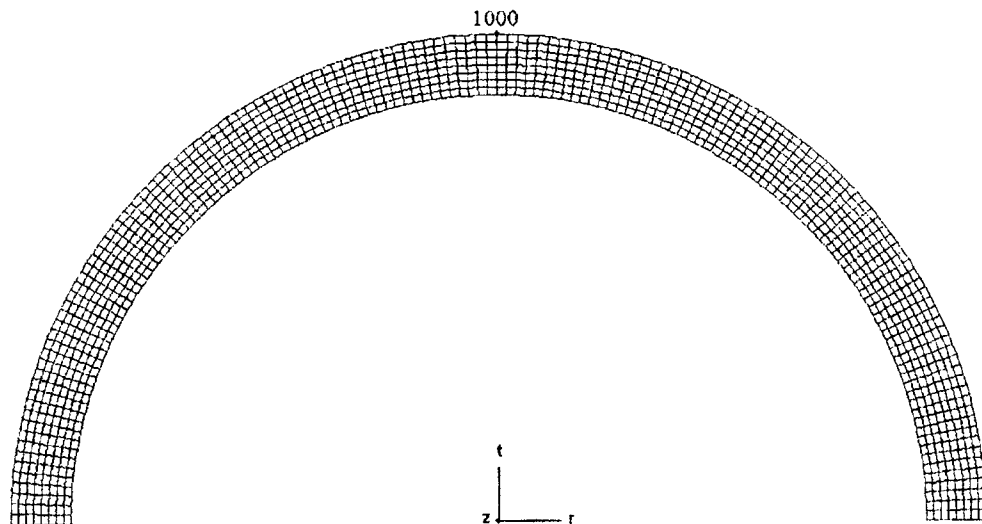
W celu sprawdzenia wpływu niejednorodnego pola temperatur na stateczność tarczy zbudowano modele numeryczne tarcz obciążonych różnorodnymi rozkładami temperatur.

Podstawowym źródłem odkształceń płytek jest rozszerzalność cieplna związana z nagrzewaniem tarciovym. Właściwie połączone sprzęgło narzuca tarczom ciernym więzy w płaszczyźnie. Podczas prawidłowej eksploatacji sprzęgła tarcze cierne powinny być ściśnięte przez dłuższy czas (po zakończeniu poślizgu). Istnieją stany eksploatacyjne podczas których sprzęgło zostaje rozłączone w bardzo krótkim czasie po zakończeniu poślizgu. W takim przypadku na płytkach mogą występować znaczne gradienty temperatur. Wtedy istnieje możliwość utraty stateczności przez tarczę.

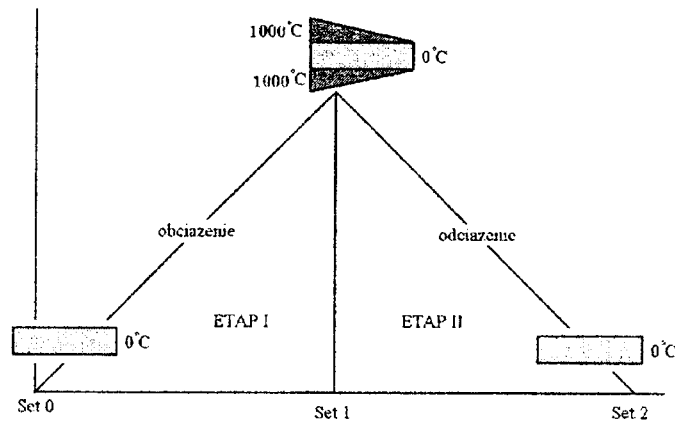
Istotą pracy jest odpowiedź na pytanie jaki wpływ na stateczność elementów ciernych ma pole temperaturowe na powierzchni danego elementu.

3. MODEL NUMERYCZNY TARCZ SPRZĘGŁA

Modele trójwymiarowe tarcz (rys. 1) składały się z ośmio węzłowych elementów typu solid. W kierunku osi „Z” po grubości modele składały się z 4 warstw elementów, a w kierunku promieniowym z 24 warstw. Stałe materiałowe określono dla temperatury 20°C na podstawie eksperymentów i dostępnej literatury [5] i wyniosły one: $E = 19,13 * 10^3$ MPa, $\alpha = 12 * 10^{-6}$ 1/K, $Re = 600$ MPa. Ze względu na kształt tarczy zastosowano globalny walcowy układ współrzędnych.



Rys. 1. Schemat dyskretyzacji dla modelu wycinka tarczy sprzęgła. Umieszczenie 1000 węzła modelu tarczy



Rys. 2. Schemat sposobu obciążenia modelu tarczy sprzęgłowej

Analiza stateczności tarcz była wykonana modulem statyki nieliniowej z wykorzystaniem pełnej metody Newtona Raphsona. Obciążenie realizowano w dwóch etapach (rys. 2). Każdy etap był realizowany w 10 krokach. Utratę stateczności przez tarczę określano na podstawie analizy ścieżki równowagi. W pierwszym etapie obciążenia temperatura w węzłach tarczy wzrastała liniowo do osiągnięcia maksymalnej wartości, przy zachowaniu określonego rozkładu, a w drugim etapie w ten sam sposób spadała do zera.

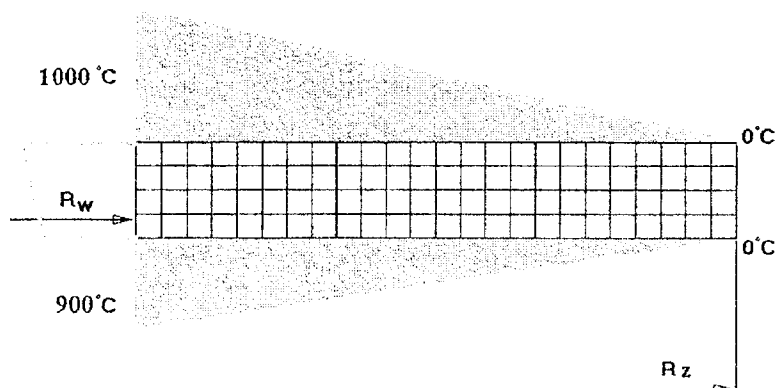
W celu zbadania wpływu rozkładu temperatury w węzłach modelu, na stateczność tarczy sprzęgłowej, przeanalizowano pięć wariantów obciążenia termicznego:

- W pierwszym wariantcie obciążenia (rys. 3), na powierzchni górnej pole temperatur zmieniało się w sposób liniowy od 0°C na promieniu zewnętrznym do 1000°C na promieniu wewnętrznym, a na powierzchni dolnej pole temperaturowe zmieniało się od 0°C na promieniu zewnętrznym do 900°C na promieniu wewnętrznym. Temperatura na grubości tarczy zmieniała się w sposób liniowy.
- W drugim wariantcie obciążenia, podobnie jak w wariantcie pierwszym, na górnej powierzchni tarczy (rys. 5) temperatura zmieniała się w sposób liniowy od 0°C na promieniu zewnętrznym do 1000°C na promieniu wewnętrznym. Na powierzchni dolnej temperatura była stała i wynosiła 0°C . Temperatura pomiędzy powierzchniami zmieniała się w sposób liniowy.
- W trzecim wariantcie obciążenia, (rys. 7) na powierzchni górnej temperatura zmieniała się w sposób liniowy od 700°C na promieniu zewnętrznym do 0°C na promieniu średnim i w pozostałej części tarczy wynosiła 0°C . Na powierzchni dolnej temperatura zmieniała się w sposób liniowy i wynosiło 500°C dla promienia wewnętrznego i spadała do 0°C na promieniu średnim. W pozostałej części dolnej powierzchni tarczy temperatura wynosiła 0°C . Po grubości tarczy temperatura zmieniała się liniowo.
- W czwartym wariantcie obciążenia, (rys. 9) tarcza została obciążona na obydwu powierzchniach liniowo zmienną temperaturą od 500°C (na promieniu zewnętrznym) do 1000°C (na promieniu wewnętrznym).

4. WYNIKI OBLICZEŃ

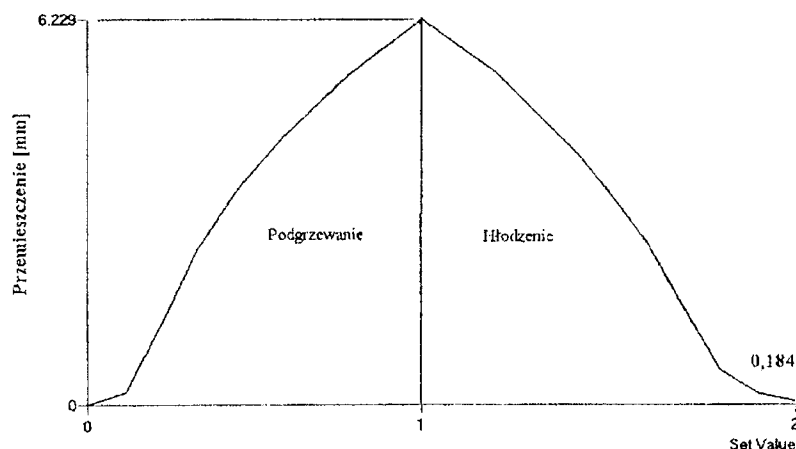
4.1. PIERWSZY WARIANT OBCIĄŻENIA

Jak już wspomniano proces obciążenia realizowano w dwóch etapach. W pierwszym etapie tarcza została obciążona w dziesięciu krokach liniowo zmiennym polem temperatur (rys. 3). Na powierzchni górnej pole temperatur zmieniało się w sposób liniowy od 0°C na promieniu zewnętrznym do 1000°C na promieniu wewnętrznym. Na powierzchni dolnej pole temperaturowe zmieniało się od 0°C na promieniu zewnętrznym do 900°C na promieniu wewnętrznym. Pole temperaturowe pomiędzy powierzchniami zmieniało się w sposób liniowy. Warto zaznaczyć iż podobne pole znajduje się w rzeczywistych tarczach sprzęgłowych. W drugim etapie obciążenia tarcza została schłodzona do temperatury 0°C .



Rys. 3. Schemat rozkładu temperatury w drugim wariancie obciążenia

Na podstawie przeprowadzonej nieliniowej analizy nie stwierdzono temperatury w której nastąpiła nagła utrata stateczności. Ze względu na zdefiniowane pole temperatur pierścien rozszerzał się bardziej po stronie górnej (tej na której zdefiniowano pole temperatury $0-1000^{\circ}\text{C}$) niż po stronie dolnej (tej na której zdefiniowano pole temperatury $0-900^{\circ}\text{C}$). Dlatego zmiana postaci pierścienia w stożek ścięty nastąpiła w sposób płynny. Sposób przemieszczenia węzła 1000 przedstawia rysunek 4.

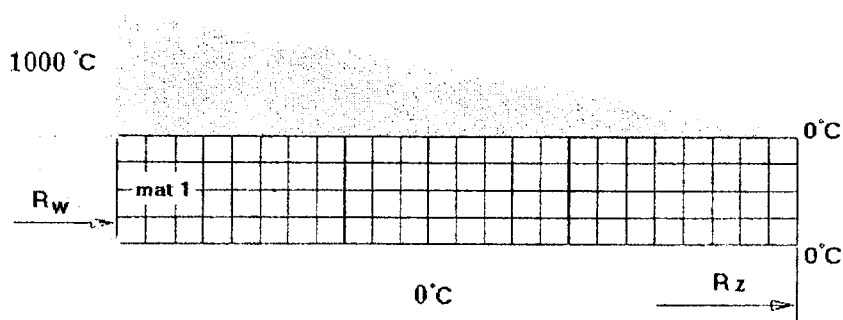


Rys. 4. Przesunięcie węzła 1000 w procesie obciążenia

W chwili zakończenia procesu podgrzewania (koniec etapu 1) naprężenia obwodowe osiągnęły wartość od -780 MPa do 783 MPa, zaś wyężenie wynosiło 775 MPa. Maksymalne przemieszczenie węzła 1000 wyniosło 6.229 mm (rys. 4).

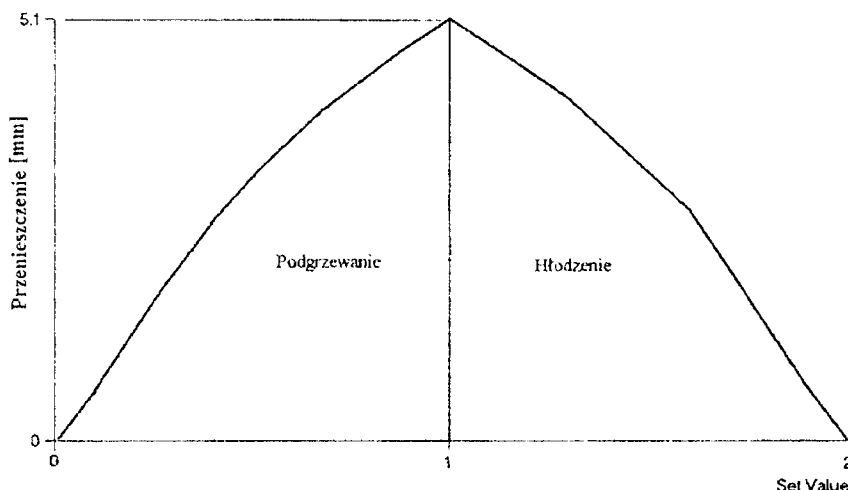
Po odciążeniu (koniec etapu 2) naprężenia zredukowane wynosiły 169 MPa. Ze względu na to iż wyniku obciążenia wartość naprężeń zredukowanych przekroczyła granicę plastyczności tarcza odkształciła się w sposób trwały. Model obciążony pierwszym wariantem obciążenia utracił stateczności w sposób trwały i maksymalne przemieszczenie trwałe węzła 1000 wyniosło 0.184 mm (rys. 4).

4.2. DRUGI WARIANT OBCIĄŻENIA



Rys. 5. Schemat rozkładu temperatury w trzecim wariantcie obciążenia

Na podstawie przeprowadzonej analizy podobnie jak w pierwszym wariantcie obciążenia stwierdzono że nie występuje temperatura przy której nastąpiła nagle utrata stateczności. Ze względu na zdefiniowane pole temperatur pierścien rozszerzał się bardziej po stronie górnej niż po stronie dolnej. Dlatego zmiana postaci pierścienia w stożek ścięty nastąpiła w sposób płynny. Proces ten opisuje zmiana pionowej składowej przemieszczenia węzła 1000 przedstawiona na rysunku 6.



Rys. 6. Przemieszczenie węzła 1000 w procesie obciążenia

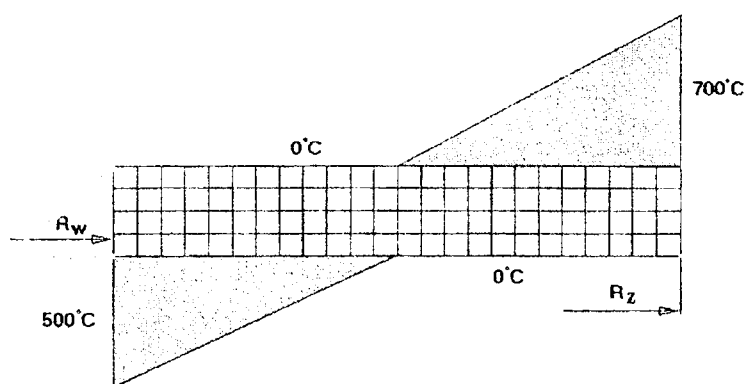
W chwili zakończenia procesu podgrzewania (koniec 1 etapu obciążenia) wartości naprężeń obwodowych wynosiły od -597 MPa do 577 MPa, a wartości naprężeń zredukowanych zwiększyły się do 597 MPa. Warto zaznaczyć iż wartość naprężeń zredukowanych nie przekroczyła granicy plastyczności. Maksymalne przemieszczenie węzła 1000 wyniosło 5.1 mm (rys. 6).

Po odciążeniu (koniec etapu 2) naprężenia zredukowane lokalnie wynosiły 300 MPa. Wartość naprężeń zredukowanych nie przekroczyła wartości granicy plastyczności

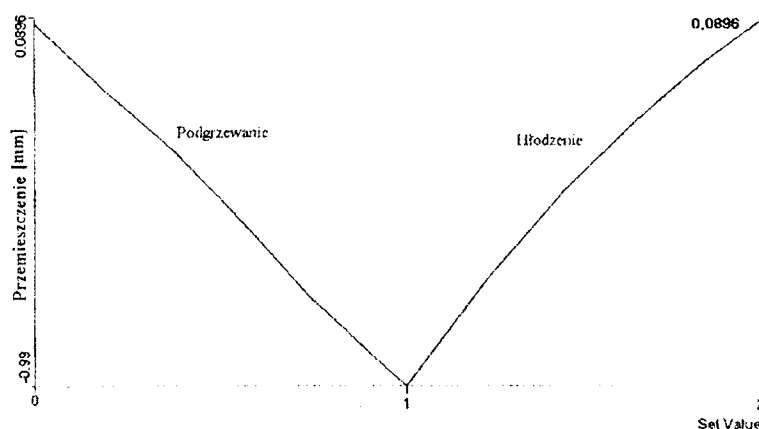
co przyczyniło się do nie wystąpienia trwałych odkształceń tarczy sprzęgłowej. Model obciążony pierwszym wariantem obciążenia nie utracił stateczności w sposób trwały.

4.3. TRZECI WARIANT OBCIĄŻENIA

Na podstawie przeprowadzonej analizy modelu trzeciego (rys. 7) podobnie jak w modelu pierwszym i drugim nie stwierdzono temperatury przy której następuje nagle utrata stateczności. Zmiana postaci pierścienia w stożek ścięty o tworzącej kształtem przypominającej literę „s” nastąpiła w sposób płynny. Sposób przemieszczenia wężla 1000 tarczy przedstawia rysunek 8.



Rys. 7. Schemat rozkładu temperatury w czwartym wariantcie obciążenia



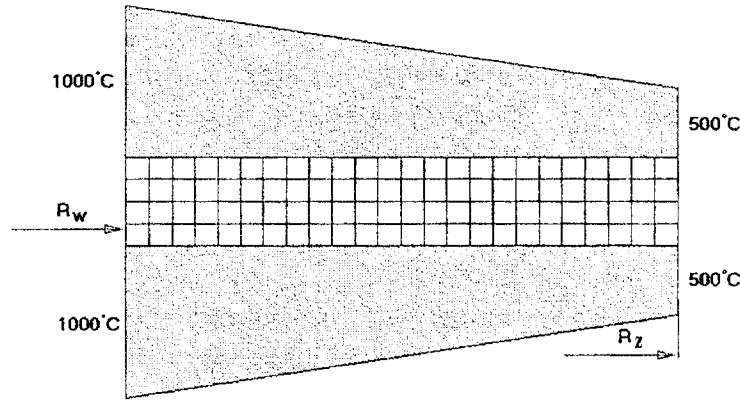
Rys. 8. Przemieszczenie wężla 1000 w procesie obciążenia

Dla trzeciego wariantu obciążenia w chwili zakończenia procesu obciążenia (koniec 1 etapu obciążenia) wartości naprężeń obwodowych osiągnęły wartość od -822 MPa do 422 MPa, a zredukowanych zwiększyły się do $818,4$ MPa. Warto zaznaczyć iż wartość naprężeń zredukowanych przekroczyła granicę plastyczności. Maksymalne przemieszczenie wężla 1000 wyniosło 1 mm (rys. 8). Po odciążeniu (koniec etapu 2) naprężenia zredukowane lokalnie wynosiły $361,3$ MPa. Wartość naprężeń zredukowanych po obciążeniu przekroczyła wartość granicy plastyczności co przyczyniło się do wystąpienia trwałych odkształceń tarczy sprzęgłowej (rys. 8).

Dla tarczy przemieszczenie trwałe wężla 1000 wyniosło $0,086$ mm (rys. 8). Warto zaznaczyć iż rozpatrując pod względem utraty stateczności taki przypadek jest niegroźny w porównaniu z innymi. Niemniej występowanie takiego typu przemieszczeń trwałych może spowodować uszkodzenie całego pakietu tarcz.

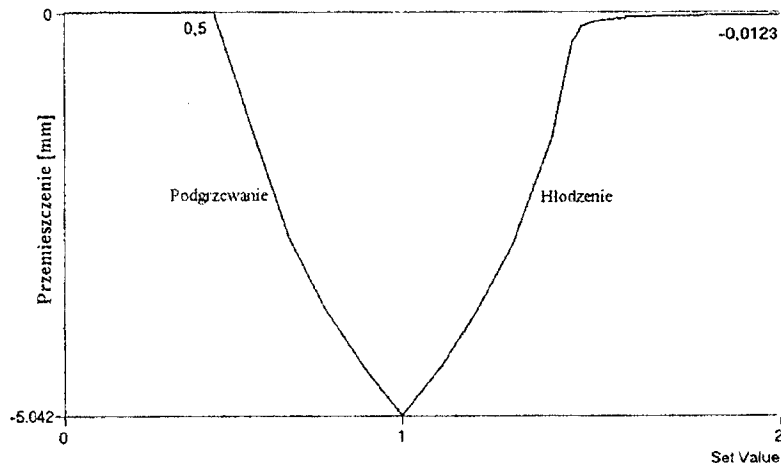
4.4. CZWARTY WARIANT OBCIĄŻENIA

Czwarty wariant obciążenia podobnie jak poprzednie został zrealizowany w sposób dwuetapowy. W pierwszym etapie (rys. 9) tarcza została obciążona liniowo zmiennym polem temperatur od 500°C na promieniu zewnętrznym do 1000°C na promieniu wewnętrznym. W drugim etapie tarcza została schłodzona do temperatury 0°C. W modelu tym jak w poprzednich posłużono się rzeczywistą charakterystyką stali z której została wykonana tarcza określoną w temperaturze pokojowej.



Rys. 9. Schemat rozkładu temperatury w piątym wariantcie obciążenia

Na podstawie przeprowadzonej analizy stwierdzono iż utrata stateczności nastąpiła dla pola temperatur liniowo zmiennego 500°C na promieniu wewnętrznym i 100°C dla promienia zewnętrznego (5 krok obciążenia). Sposób przemieszczenia węzła 1000 przedstawia rysunek 10.



Rys. 10. Przemieszczenia węzła 1000 w procesie obciążenia

W chwili przed wyboczeniem, w 5 kroku obciążenia, naprężenia zredukowane osiągnęły maksymalną wartość 293 MPa. W chwili zakończenia procesu podgrzewania (koniec etapu 1) wartości naprężeń zredukowanych zwiększyły się do 704,4 MPa. Warto zaznaczyć iż wartość naprężeń zredukowanych przekroczyła granicę plastyczności. Maksymalne przemieszczenie węzła 1000 wyniosło 5,04 mm (rys. 10). Po odciążeniu (koniec etapu 2) naprężenia zredukowane lokalnie wynosiły 53 MPa.

Model tarczy w czwartym wariantcie obciążenia utracił stateczność w sposób trwały, (rys. 10) a przemieszczenie trwałe węzła 1000 wyniosło 0.012 mm.

5. UWAGI KOŃCOWE

Tarcze sprzęgłowe czołgu T-72 są elementami o dużej średnicy i małej szerokości. Ich budowa sprawia że niejednorodne pole temperatury na powierzchni tarczy może doprowadzić do utraty stateczności.

Według badań literaturowych największa awaryjność istnieje w sprzęgłach S-2 i S-3 w których rozkład temperatur jest zbliżony do pierwszego wariantu obciążenia.

Rozkłady temperatur którymi zostały obciążone tarcze są zbliżony do rzeczywistych rozkładów nacisków występujących na powierzchniach tarcz ciernych.

Z uzyskanych wyników stwierdzono iż przy ciężkich warunkach eksploatacji czołgu istnieje duże prawdopodobieństwo utraty stateczności przez tarcze sprzęgłowe.

Zastosowanie trójwymiarowych modeli pozwala na dokładniejszy opis pól (szczególnie po grubości) temperatur działających na tarczę.

Wpływ zmiany granicy plastyczności materiału (zależnej od temperatury) jest znaczny na odkształcenia trwałe. Stwierdzono iż obniżenie granicy plastyczności powoduje zwiększenie odkształceń trwałych.

W dalszych pracach powinno się zastosować program który uwzględniałby zmianę charakterystyki materiałowej w zależności od temperatur w sposób płynny.

LITERATURA

- [1] Zagrodzki P., Wpływ grubości płytek na zjawiska cieplne w sprzęgle wielopłytkowym. TRIBOLOGIA 4, 1991
- [2] Wielciński P., Zagrodzki P., Rozkład nacisków normalnych na powierzchniach ciernych sprzęgła blokady przekładni hydrokinetycznej. Przegląd Mechaniczny 11-12/93
- [3] Zagrodzki P., Wpływ grubości płytek na zjawiska cieplne w sprzęgle wielotarczowym, Trybologia 4/1991
- [4] M. Dacko, W. Barnat Analiza stanu naprężeń w sprzęgle wielotarczowym. III Krajowa Konferencja Użytkowników Oprogramowania MSC Gdańsk 98.
- [5] Poradnik Mechanika WNT Warszawa 1988
- [6] Z. Osiński: Sprzęgła i hamulce. WN PWN Warszawa 1996

INFLUENCE OF HEIGHT OF TEMPERATURE ON FRICTION - SURFACES ON SEDATENESS OF BRAKE - DISK OF HIGH-SPEED CATERPILLAR VEHICLE

Object of analysis is ring disk of clutch of planetary gearbox. One considered disk without variable friction- layers, burdened with variables along ray with fields of temperatures Analysis of sedateness one passed using method of terminal states with regard nonlinear geometrical (large dislocations) and physical. To analysis one used programme MSC Nastran handicap Windows using three-dimensional models formed from block elements.

BIFURKACJE W ZAGADNIENIU VON KÁRMÁNA DLA PROSTOKĄTNEJ PŁYTY NA PODŁOŻU NIELINIOWO SPRĘŻYSTYM

J. DYMKOWSKA

Mathematical Institute Polish Academy of Sciences
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, POLAND

Faculty of Applied Physics and Mathematics, Technical University of Gdańsk
ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk, POLAND

A. BORISOVICH

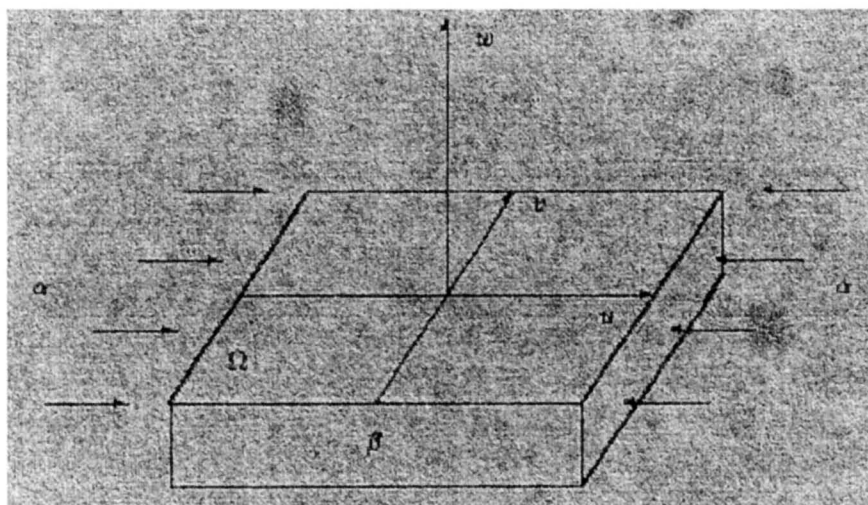
Institute of Mathematics University of Gdańsk
ul. Wita Stwosza 57, 80-952 Gdańsk, POLAND

CZ. SZYMCZAK

Faculty of Civil Engineering, Technical University of Gdańsk
ul. Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk, POLAND

W danej pracy badany jest model von Kármána dla prostokątnej płyty na podłożu nieliniowo sprężystym. Siła ściskająca działa w jednym kierunku i jest jednorodnie rozłożona wzdłuż brzegu, gdzie płyta jest swobodnie podparta. Model matematyczny jest sprowadzony do równania z operatorem typu Fredholma o indeksie 0 w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa. Na podstawie rozwiązania zagadnienia zlinearyzowanego zostały wyznaczone krytyczne wartości parametrów bifurkacji. Do badania pokrytycznego zachowania płyty została użyta redukcja skończenie wymiarowa typu Lyapunova - Schmidta w postaci wariacyjnej wersji twierdzenia Crandalla - Rabinovitza. Zostały opisane typy podłoża nieliniowego, dla których bifurkacja płyty ma charakter dokrytyczny (niestateczny) przy wzroście parametru obciążenia.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU (WSTĘP).



Praca ta jest poświęcona badaniu zachowania się małej deformacji cienkiej, sprężystej płyty o prostokątnym kształcie, spoczywającej na nieliniowo sprężystym podłożu [2,12] i poddanej działaniu siły ściskającej w jednym z kierunków. Zakładamy ponadto, że płyta jest swobodnie podparta wzdłuż swojego brzegu.

Rozważmy odpowiedni model matematyczny. Załóżmy, że płyta jest prostokątem $\overline{\Omega}$ umieszczonym w płaszczyźnie \mathbb{R}^2 zmiennych (u,v) , gdzie $\Omega = (-r,r) \times (-s,s)$ i $r,s > 0$. Literą α oznaczymy wartość ściskającej siły i załóżmy, że $\alpha \geq 0$. Symbolami β i $\gamma(\beta)$ oznaczymy parametry, charakteryzujące sprężystość podłoża, na którym płyta spoczywa. Zakładamy przy tym, że $\beta \geq 0$.

Literą w oznaczymy małą deformację (ugięcie) płyty. Stąd kształt płyty będziemy opisywać jako wykres funkcji $w = w(u,v)$ określonej w obszarze $\overline{\Omega}$. Jednocześnie przypomnijmy, że deformacja płyty powoduje pojawienie się w niej naprężeń wewnętrznych, które będziemy opisywać za pomocą funkcji naprężeń Airy'ego $\sigma = \sigma(u,v)$. Załóżmy, że funkcje $w(u,v)$ i $\sigma(u,v)$ mają w obszarze $\overline{\Omega}$ ciągle pochodne cząstkowe do rzędu czwartego włącznie, tzn. należą do klasy $C^4(\overline{\Omega})$. Wówczas funkcje $w(u,v)$ i $\sigma(u,v)$ mogą być wyznaczone jako rozwiązania odpowiedniego układu równań von Kármána (patrz [9,13,14])

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 w - [w, \sigma] + 2\alpha w_{uu} + 3\alpha w_u^2 w_{uu} + \beta w - \gamma(\beta) w^3 = 0 \\ \Delta^2 \sigma + \frac{1}{2}[w, w] = 0 \\ w = \Delta w = 0 \\ \sigma = \Delta \sigma = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (u, v) \in \Omega \\ (u, v) \in \partial\Omega \end{array} \quad (1)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \Delta w &= w_{uu} + w_{vv}, & \Delta \sigma &= \sigma_{uu} + \sigma_{vv} \\ \Delta^2 w &= w_{uuuu} + 2w_{uuvv} + w_{vvvv}, & \Delta^2 \sigma &= \sigma_{uuuu} + 2\sigma_{uuvv} + \sigma_{vvvv} \\ [w, w] &= 2(w_{uu} w_{vv} - w_{uv}^2), & [w, \sigma] &= w_{uu} \sigma_{vv} - 2w_{uv} \sigma_{uv} + w_{vv} \sigma_{uu} \end{aligned}$$

Naszym celem jest badanie bifurkacji zbioru rozwiązań zagadnienia (1) w małym otoczeniu rozwiązania trywialnego, tzn. rozwiązania postaci $w_0(u,v) \equiv 0$ i $\sigma_0(u,v) \equiv 0$, w zależności od parametrów α i β . Model (1) jest uogólnieniem znanego modelu E. Winklera [2,12] dla podłoża liniowo sprężystego, gdy $\gamma(\beta) \equiv 0$. Model E. Winklera jest znany w mechanice sprężystej i był badany przy różnych typach warunków brzegowych metodami numerycznymi i asymptotycznymi, patrz [2,12]. Ponadto w pracy [6] model ten został zbadany metodami teorii bifurkacji. Model płyty prostokątnej w teorii bifurkacji i teorii katastrof był szeroko badany tylko bez uwzględnienia sprężystego podłoża (na przykład prace [1,3,8,11,16,18,20]). Tak więc uogólniony model (1) jest badany metodami teorii bifurkacji po raz pierwszy.

2. SPROWADZENIE ZAGADNIENIA VON KÁRMÁNA DO RÓWNANIA Z OPERATOREM TYPU FREDHOLMA ORAZ BADANIE JEGO WŁASNOŚCI

Symbolem $X = W_{0,0}^{4,2}(\Omega) \times W_{0,0}^{4,2}(\Omega)$ oznaczmy przestrzeń Banacha par funkcji postaci $x = (w, \sigma)$, należących do przestrzeni Sobolewa $W^{4,2}(\Omega)$ i spełniających warunki brzegowe

$$\begin{cases} w = \Delta w = 0 \\ \sigma = \Delta \sigma = 0 \end{cases} \quad (u, v) \in \partial\Omega$$

Symbolem Y lub H oznaczmy przestrzeń par funkcji całkowalnych z drugą potęgą, tzn. $Y=H=L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Z symbolu Y będziemy korzystać, gdy rozważamy tę przestrzeń jako przestrzeń Banacha z odpowiednią normą, symbolu H zaś, gdy mówimy o przestrzeni Hilberta z iloczynem skalarnym zdefiniowanym wzorem

$$(h_1, h_2)_H = \frac{1}{4rs} \iint_{\Omega} (z_1(u, v)z_2(u, v) + \eta_1(u, v)\eta_2(u, v)) dudv$$

dla wszystkich $h_1, h_2 \in H$, gdzie $h_1 = (z_1, \eta_1)$, $h_2 = (z_2, \eta_2)$.

Wówczas można pokazać, że zagadnienie brzegowe (1) jest równoważne równaniu

$$F(x, p) = 0 \quad (2)$$

z nieliniowym operatorem $F : X \times R_+^2 \rightarrow Y$ określonym wzorem

$$\begin{aligned} F(x, p) &= (F_1(x, p), F_2(x, p)) \\ F_1(x, p) &= \Delta^2 w - [w, \sigma] + 2\alpha w_{uu} + 3\alpha w_u^2 w_{uu} + \beta w - \gamma(\beta)w^3 \\ F_2(x, p) &= -\Delta^2 \sigma - \frac{1}{2}[w, w] \end{aligned} \quad (3)$$

i zależnym od dwuwymiarowego parametru $p = (\alpha, \beta)$.

Zostało udowodnione ponadto, że tak określone odwzorowanie F należy do klasy gładkości C^∞ , a jego pochodna Frecheta względem x w każdym punkcie $(0, p)$ jest liniowym odwzorowaniem typu Fredholma o indeksie 0, tzn. $F'_x(0, p) \in \Phi_0$.

Zauważmy ponadto, że konieczne jest rozważanie odwzorowania F w odpowiednich przestrzeniach Sobolewa, gdyż tylko w tym przypadku odwzorowanie to posiada indeks 0 (Kondratiev [15]). Odwzorowanie F rozważane w odpowiednich przestrzeniach Höldera posiada indeks ujemny (Vołkov [21]).

Wracając do problemu deformacji płyty zauważmy, że całkowitą jej energię możemy wyrazić funkcjonalem postaci

$$E(x, p) = \frac{1}{8rs} \iint_{\Omega} \left(\Delta^2 w - \Delta^2 \sigma - [w, w] \sigma - 2\alpha w_u^2 + \frac{1}{2} \alpha w_u^4 + \beta w^2 - \frac{1}{2} \gamma(\beta) w^4 \right) dudv \quad (4)$$

przy czym operator F jest gradientem wariacyjnym funkcjonału E , tzn. $E'_x(x, p) h = (F(x, p), h)_H$.

3. WYZNACZENIE KRYTYCZNYCH WARTOŚCI PARAMETRÓW. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA ZLINEARYZOWANEGO.

Krytyczne wartości parametru $p = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^2$ zostały wyznaczone poprzez rozwiązanie zagadnienia zlinearyzowanego

$$F'_x(0, p) h = 0. \quad (5)$$

Symbolem $N(p)$ oznaczmy podprzestrzeń rozwiązań tego zagadnienia w przestrzeni Sobolewa, tzn. $N(p) = \text{Ker } F'_x(0, p)$.

Zbiór $N(p)$ punktów krytycznych został opisany geometrycznie: na płaszczyźnie \mathbb{R}_+^2 parametrów $\alpha, \beta \geq 0$ rozważmy rodzinę zależną od $l = 1, 2, \dots$ parabol π_l opisanych równaniami

$$\beta = \alpha^2 - 2b_l^2 \alpha, \quad b_l = \frac{\pi}{s} \cdot \frac{l}{2} \quad (6)$$

Następnie dla każdej paraboli π_l rozważmy rodzinę stycznych do niej półprostych $\tau_{k,l}$ określonych równaniami

$$\beta = 2a_k^2 \alpha - \lambda_{k,l}^2 \quad (7)$$

gdzie dla $k = 1, 2, \dots$ $a_k = \frac{\pi}{r} \cdot \frac{k}{2}$ a $\lambda_{k,l} = a_k^2 + b_l^2$.

Ponadto dla każdej pary liczb naturalnych (k, l) rozważmy funkcję $g_{k,l}(u, v)$ postaci

$$g_{k,l}(u, v) = U_k(u) \cdot V_l(v) \quad (8)$$

gdzie

$$U_k(u) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(a_k \cdot u) & k = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \sqrt{2} \cos(a_k \cdot u) & k = 2n - 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

i

$$V_l(v) = \begin{cases} \sqrt{2} \sin(b_l \cdot v) & l = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \sqrt{2} \cos(b_l \cdot v) & l = 2n - 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Zostało udowodnione, że jeżeli parametr $p \in \tau_{k,l}$ to zagadnienie (5) posiada rozwiązanie $e_{k,l} = (g_{k,l}, 0)$. Ponadto prawdziwe jest twierdzenie:

Twierdzenie 1

1. Jeżeli parametr p nie należy do żadnej z półprostych $\tau_{k,l}$ to zagadnienie (5) posiada tylko rozwiązanie zerowe, zatem $\dim N(p) = 0$ i wówczas bifurkacja w punkcie $(0,p)$ nie jest możliwa.
2. Jeżeli p należy tylko do jednej półprostej $\tau_{k,l}$ to $\dim N(p) = 1$ i podprzestrzeń rozwiązań $N(p)$ posiada element bazowy $e_{k,l}(u,v) = (g_{k,l}(u,v), 0)$, gdzie funkcja $g_{k,l}(u,v)$ w mechanice nazywa się postacią wybaczenia płyty.
3. Jeżeli parametr p należy jednocześnie do n półprostych $\tau_{k,l}$ to $\dim N(p) = n$, ponieważ funkcje $e_{k,l}(u,v)$ dla różnych wartości k,l są liniowo niezależne, a więc tworzą bazę przestrzeni $N(p)$.

4. BADANIE BIFURKACJI W PUNKTACH KRYTYCZNYCH

Na początek rozważmy przypadek, gdy (α_0, β_0) jest jednokrotnym punktem krytycznym, więc na mocy twierdzenia (1) należy tylko do jednej z półprostych $\tau_{k,l}$. Jako warunek dostateczny bifurkacji względem skalarnego parametru zostało wykorzystane twierdzenie Crandalla – Rabinovitza w wersji wariacyjnej (patrz [4,5,10,17]). Ze względu na wszystkie udowodnione wcześniej fakty, aby zastosować to twierdzenie wystarczy pokazać, że

$$E''''_{xx\alpha}(0, \alpha_0, \beta_0)e_{k,l}^2 \neq 0 \quad \text{lub} \quad E''''_{xx\beta}(0, \alpha_0, \beta_0)e_{k,l}^2 \neq 0$$

Po przeprowadzeniu pewnych obliczeń stwierdzamy, że w naszym zagadnieniu

$$E''''_{xx\alpha}(0, p_0)e_{k,l}^2 = \frac{-1}{2rs} \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial u} g_{k,l}(u,v) \right)^2 dudv < 0$$

oraz

$$E''''_{xx\beta}(0, p_0)e_{k,l}^2 = \frac{1}{4rs} \iint_{\Omega} g_{k,l}^2(u,v) dudv > 0$$

Stąd na mocy twierdzenia Crandalla - Rabinovitza jednokrotny punkt krytyczny $(\alpha_0, \beta_0) \in \tau_{k,l}$ jest punktem bifurkacji, w którym płyta w pierwszym przybliżeniu przyjmuje postać wybaczenia $\pm g_{k,l}(u,v)$.

Jeżeli (α_0, β_0) jest wielokrotnym punktem krytycznym, tzn. jest punktem przecięcia kilku półprostych

$$\tau_{k_1, l_1}, \dots, \tau_{k_n, l_n} \tag{9}$$

z rodziny (7) (patrz twierdzenie (1)), to jest on granicą ciągu jednokrotnych punktów krytycznych, leżących na jednej z półprostych (9). Wiemy już, że każdy jednokrotny punkt krytyczny, leżący na półprostej τ_{k_i, l_i} jest punktem bifurkacji (z postacią wybaczenia g_{k_i, l_i}), więc (α_0, β_0) też jest punktem bifurkacji.

Rozważany w danej pracy model von Kármána (1) nie daje odpowiedzi na pytanie, którą modę deformacji z rodziny $\pm g_{k_1, l_1}, \dots, \pm g_{k_n, l_n}$ wybierze konkretna

plyta w eksperymencie doświadczalnym. Zależy to wyłącznie od szczególnych własności fizycznych tej płyty oraz od innych czynników wpływających na przebieg eksperymentu nie uwzględnionych w modelu (1). Z punktu widzenia matematyki każda z $2n$ gałęzi nietrywialnych rozwiązań danego modelu ma równe szanse na realizację w eksperymencie.

5. WYZNACZENIE KIERUNKÓW GAŁĘZI BIFURKACJI W JEDNOKROTNYCH PUNKTACH KRYTYCZNYCH

Do wyznaczenia kierunków gałęzi rozwiązań zastosujemy schemat szczegółowego badania rozgałęzienia Lyapunowa – Schmidta i funkcji kluczowej (jak to zrobiono w [5,7,19]), tzn. skorzystamy z faktu, że problem bifurkacji zbioru rozwiązań równania z operatorem F jest równoważny problemowi (w przypadku jednokrotnego punktu krytycznego) $\phi(\xi, \lambda) = 0$, gdzie $\phi(\xi, \lambda) = \Phi'_\xi(\xi, \lambda)$ a funkcja kluczowa $\Phi : R_\varepsilon(0) \times R_\varepsilon(0) \rightarrow R$ jest zdefiniowana wzorem

$$\Phi(\xi, \lambda) = E(\hat{x}(\xi, \lambda), \lambda) + \frac{1}{2} [(\hat{x}(\xi, \lambda) - x_0, e)_H - \xi]^2$$

i spełnia warunek $\phi(0, \lambda) = 0$ czyli $\Phi'_\xi(0, \lambda) = 0$.

Przyjęty schemat badania prowadzi w efekcie do stwierdzenia:

Stwierdzenie 2

Niech $\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0, \lambda_0) \neq 0$, $\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0, \lambda_0) = 0$, $\Phi^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi}(0, \lambda_0) \neq 0$. Obliczmy stałą

$$C_3 = -6 \frac{\Phi'''_{\xi\xi\xi}(0, \lambda_0)}{\Phi^{(4)}_{\xi\xi\xi\xi}(0, \lambda_0)}.$$

(a) Jeżeli $C_3 < 0$, to bifurkacja w $(0, \lambda_0)$ ma schemat „3→1→1” i rodzina Γ_2 może być sparametryzowana w następujący sposób

$$\Gamma_2 : x_2^\pm(\lambda) = \pm \sqrt{|C_3|} (\lambda_0 - \lambda)^{\frac{1}{2}} e + o\left(|\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{2}}\right), \quad (10)$$

gdzie $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0]$.

(b) Jeżeli $C_3 > 0$, to bifurkacja w $(0, \lambda_0)$ ma schemat „1→1→3” i rodzina Γ_2 może być sparametryzowana w następujący sposób

$$\Gamma_2 : x_2^\pm(\lambda) = \pm \sqrt{C_3} (\lambda - \lambda_0)^{\frac{1}{2}} e + o\left(|\lambda - \lambda_0|^{\frac{1}{2}}\right), \quad (11)$$

gdzie $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$.

W obu przypadkach punkty krytyczne są punktami osobliwymi typu A_3 .

Rozważając zagadnienie bifurkacji płyty prostokątnej po pewnych technicznych obliczeniach stwierdzamy, że:

1. jeżeli $\gamma(\beta) < \frac{1}{2}a_k^2(\beta + \lambda_{k,l}^2)$, to wówczas $E_{xxxx}^{(4)}(0, p_0)e_{k,l}^2 > 0$ i tym samym $C_{3\alpha} > 0$ a $C_{3\beta} < 0$. Oznacza to, że ze względu na parametr α mamy do czynienia z bifurkacją pokrywczą (deformacja płyty następuje wskutek wzrostu parametru obciążenia α). Natomiast ze względu na parametr β obserwujemy bifurkację dokrywczą (zmiana kształtu płyty następuje wskutek zmniejszenia modułu sprężystości β).
2. jeżeli teraz $\gamma(\beta) > \frac{1}{2}a_k^2(\beta + \lambda_{k,l}^2)$ to $E_{xxxx}^{(4)}(0, p_0)e_{k,l}^2 < 0$ i tym samym $C_{3\alpha} < 0$ a $C_{3\beta} > 0$. Oznacza to, że w tym przypadku gałęzie bifurkacji mają przeciwne kierunki, tzn. ze względu na parametr α obserwujemy bifurkację dokrywczą a ze względu na parametr β obserwujemy bifurkację pokrywczą.

LITERATURA

- [1] M.S. Berger, On von Kármán equations and the bucling of a thin elastic plate, I. The clamped plate, Communications on Pure and Applied Mathematics 20, 1967, 687-719.
- [2] F. Bloom & D. Coffin, Handbook of Thing Plate Bucling and Postbucling, Chapman & Hall /CRC, New York, 2001.
- [3] I. Bock, On nonstationary von Kármán equations, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 76, 1996, 559-571.
- [4] A.Yu. Borisovich, Functional-topological properties of the Plateau operator and applications to the study of bifurcations in problems of geometry and hydrodynamics. Minimal surfaces, Adv. Soviet Math. 15, 1993, 287-330.
- [5] A.Yu. Borisovich, Some Scheme of applications of Crandall-Rabinowitz bifurcation theorem in variational problems of mechanics, Preprint 135, Uniwersytet Gdański, 2000.
- [6] A.Yu. Borisovich, J. Dymkowska & Cz. Szymczak, Bifurcations in von Kármán problem for the rectangular plate lying on Winkler type foundation, Preprint 148, Uniwersytet Gdański, 2002.
- [7] A.Yu. Borisovich, Yu. Morozov & Cz. Szymczak, Bifurcations of the forms of equilibrium of nonlinear elastic beam lying on the elastic base, Preprint 136, Uniwersytet Gdański, 2000.
- [8] P.G. Ciarlet & P. Rabier, Les Équations de von Kármán, Lecture Notes in Math. 826, Springer-Verlag, 1980.
- [9] Collected works of Theodore von Kármán, Butterworths Sci. Publications 4, London 1956.
- [10] M.G. Crandall & P.H. Rabinowitz, Bifurcation from simple eigenvalues, J. Funct. Anal. 8, 1971, 321-340.
- [11] E.J. Hölder & D. Schaffer, Boundary conditions and mode jumping in the von Kármán equations, SIAM J. Math. Anal. 3, 1984, 446-457.
- [12] Z. Kączkowski, Płyty; obliczenia statyczne, Warszawa, Arkady, 2000.
- [13] T. von Kármán, Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encyklopädie der mathematischen Wissenchaften, Bd. IV, v.4, 1910.

- [14] T. von Kármán, The Engineer Grapples with Nonlinear Problems, Bull. Am. Math. Soc. 46, 1940, 615-683.
- [15] V.A. Kondrat'ev, Boundary-value problems for elliptic equations in domain with conic or angular points, Trudy Mosk. Mat. Obsch. 16, 1967, 209-293; English Transl. in Trans. Moscow Math. Soc. 16, 1967.
- [16] E.M. Kramer, The von Kármán equations, the stress function and elastic ridges in high dimensions, J. Math. Phys. 2, 1997, 831-846.
- [17] L. Nirenberg, Topics in Nonlinear Functional analysis, Courant Inst. of Math. Sciences, 1974.
- [18] B. Rao, Marguerre- von Kármán equations and membrane model, Nonl. Anal. 8, 1995, 1131-1140.
- [19] C.A. Stuart, An introduction to bifurcation theory based on differential calculus, Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot-Watt Symposium 4, Res. Notes in Math. 39, 1979, 76-135.
- [20] K. Tsilika, Buckling of a von Kármán plate adhesively connected to a rigid support allowing for delamination: existence and multiplicity results, J. Global Optim. 17, 2000, 387-402.
- [21] E.A. Volkov, Solutions of boundary-value problems for the Poisson equation in a rectangle, Dokl. Akad. Nauk SSSR 147, 1962, 13-16.

BIFURCATIONS IN VON KÁRMÁN PROBLEM FOR RECTANGULAR PLATE LYING ON NONLINEAR ELASTIC FOUNDATION

In this work the von Kármán model for thin, elastic, rectangular plate on the nonlinear elastic foundation was studied. Compressed force acts in one direction evenly distributed edgewise, and the plate is simple-supported. Mathematical model is reduced to equation with Fredholm type operator of index 0 in the corresponding Sobolev spaces. On the basis of solution of linearized problem the critical values of bifurcation parameters were found. The finite-dimensional reduction of Lyapunov-Schmidt type and Crandall – Rabinovitz theorem in variational form were used to examine postcritical behaviour of the plate. The types of nonlinear foundation, for which the bifurcation of the plate has subcritical (unstable) character were described, and the compressed force was increasing.

DEVELOPMENT OF NUMERICAL AND EXPERIMENTAL METHODS OF CARRYING CAPACITY ESTIMATION OF SHELLS & COMPARISON OF THEIR RESULTS.

G.D. GAVRYLENKO

Institute of Mechanics, Ukrainian Academy of Sciences, Kiev,
Nesterova str. 3, 03057 Kiev, Ukraine

Suggested and realized new method of numerical estimation of carrying capacity of shell. Numerous results are presented and given comparison with experimental data.

A finite-difference method was used for analysis of critical loads of shells that have initial imperfections. The technique takes into account the discreteness in the rib arrangement in two directions and the nonlinear subcritical state of the shells. This method uses only two unknowns in each node of mesh and is more economical and the fastest among other methods where are used 5 or 6 unknowns in a node.

1. INTRODUCTION.

To develop the effective methods of calculation it is necessary to understand the buckling mechanism of real structures. Obviously experimental investigations should be put in the basis of such a theory.

These investigations have to give the understanding of the behavior of a shell at all stages of deformation right up to destruction. The experimental investigations are especially topical for the case of static compression of thin-walled cylinders.

This type of loading - as well known - is characterized by wide scatter of critical loads values obtained for unstiffened shells (US). For US it is possible to describe the buckling mechanism more precisely accounting for the effect of localization of the beginning of the wave-formation process. It is especially important to take into account the localized perturbations in the fields of initial geometrical imperfections in the case of compression of US.

All above-mentioned allows to decrease the difference between theoretical and experimental data and do it negligible. These effects are demonstrated by graphs and new applications of methods are suggested.

Newest theoretical results concerning the accurate prediction of critical buckling loads and a reliable estimation of their imperfection sensitivity is also provided by DISDECO [2].

2. PROCEDURE FOR DETERMINATION OF CRITICAL LOADS.

An elastic orthotropic thin-walled shell is considered. The shell is stiffened with discretely arranged longitudinal and transverse ribs, which in cylindrical shells are called stringers and frames respectively. A ribbed shell is a system consisting of a smooth

casing and discretely disposed ribs. In actual structures stiffening ribs are usually located on one side of the casing (either inside or outside), i.e., their center of gravity is located with an eccentricity relative to the median surface of the casing. The length of the shell is l , the radius of the median surface is r , and the thickness of the casing is t . In practice, casing is imperfect and has initial geometrical imperfections in the form of radial deflections. These imperfections are assumed to be given as double trigonometric Fourier series. It is assumed that the initial deflections are not accompanied by initial stresses.

The behavior of the casing in the subcritical state is described by nonlinear differential equations of Mushtari-Donnell-Vlasov type, presented in [1,3,4,5,7,8].

$$\begin{aligned} \nabla^4 \bar{\Phi} - \frac{1}{r} \bar{w}_{,xx} + \frac{1}{2} L(\bar{w}, \bar{w} + 2\bar{w}_H) &= 0, \\ \nabla^4 \bar{w} + \frac{1}{r} \bar{\Phi}_{,xx} - L(\bar{\Phi}, \bar{w} + \bar{w}_H) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

where:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \bar{\Phi} &= A_2 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^4} + (A_{12} + A_{21} + A_3) \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial x^2 \partial y^2} + A_1 \frac{\partial^4 \bar{\Phi}}{\partial y^4}, \\ \nabla^4 \bar{w} &= D_1 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^4} + (D_{12} + D_{21} + 4D_3) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial y^4}, \\ L(\bar{w}, \bar{w} + 2\bar{w}_H) &= \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\bar{w} + 2\bar{w}_H)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\bar{w} + 2\bar{w}_H)}{\partial x^2} + \\ &\quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (\bar{w} + 2\bar{w}_H)}{\partial x \partial y}, \end{aligned}$$

$$A_2 = \frac{1}{E_2 t}, \quad A_{21} = A_{12} = -\nu A_1, \quad A_1 = \frac{1}{E_1 t}, \quad A_3 = \frac{1}{Gt}, \quad D_i = \frac{E_i t^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}, \quad i = 1, 2,$$

$$D_{12} = \nu_2 D_1, \quad D_{21} = \nu_1 D_2, \quad D_3 = \frac{Gt^3}{12}, \quad (2)$$

E_1 and E_2 are module of elasticity, G is a shear modulus, $\bar{\Phi}$ is a function of forces, \bar{w} is a function of radial deflections, \bar{w}_H is a function of given initial imperfections, the operator $L(\bar{\Phi}, \bar{w} + \bar{w}_H)$ is similar to $L(\bar{w}, \bar{w} + 2\bar{w}_H)$ by construction.

The system of nonlinear equations (1) is solved using the procedure of successive approximations. To do this, the equations are linearized [6] using the representations

$$\bar{\Phi} = \Phi_0 + \Phi, \bar{w} = w_0 + w, \quad (3)$$

where Φ_0 and w_0 are adjusted quantities, and Φ and w are additions or increments. The system for the additions takes a dimensionless form (the bars with \bar{w} and \bar{q} are omitted)

$$\begin{aligned} & \nabla^4 \varphi - \frac{1}{2} w_{,\alpha\alpha} + \frac{1}{\kappa} L(w, w_0 + w_H) = - \\ & - \left[\nabla^4 \varphi_0 - \frac{1}{2} w_{0,\alpha\alpha} + \frac{1}{2\kappa} L(w_0, w_0 + 2w_H) \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \nabla^4 w + \frac{\kappa^2}{2} \varphi_{,\alpha\alpha} - \kappa L(w_0 + w_H, \varphi) - \kappa L(w, \varphi_0) = \\ & = \left[\nabla^4 w_0 + \frac{\kappa^2}{2} \varphi_{0,\alpha\alpha} - \kappa L(w_0 + w_H, \varphi_0) + \frac{\kappa^2}{2} q \right], \end{aligned} \quad (5)$$

where all $L(\dots)$ are, as earlier, similar to each other in construction,

$$\alpha = x/r, \beta = y/r, \bar{w} = w/\sqrt{D_1 A_2}, \bar{q} = qr^2 \sqrt{A_2}/2\sqrt{D_1}, \varphi = \Phi \kappa A_2 / 4r^2,$$

$$\kappa = 2r\sqrt{1/D_1 A_2},$$

$$\nabla^4 \varphi = \varphi_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} + 2s\varphi_{,\alpha\alpha\beta\beta} + d\varphi_{,\beta\beta\beta\beta},$$

$$\nabla^4 w = w_{,\alpha\alpha\alpha\alpha} + 2f_1 w_{,\alpha\alpha\beta\beta} + g w_{,\beta\beta\beta\beta}. \quad (6)$$

$$\text{Here, } d = \frac{E_2}{E_1}; \quad s = \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{1}{2GtA_1} - \nu_1 \right); \quad f_1 = \frac{D_{12} + D_{21} + 4D_3}{2D_1}; \quad g = D_2/D_1.$$

These equations are applicable only to smooth shells. They invite further generalization for analysis of ribbed shells [5,6]. Taking into account the forces of interaction between the shell and the ribs, we obtain expressions for jumps in the derivatives of the resolving functions. On further passage to finite differences, we obtain the algebraic system of equations.

The system of nonlinear equations is solved using the procedure of successive approximations. First of all two used functions may be represented as having two parts: one of them is fundamental solution and other is the incremental displacement about this fundamental state. Substituting them in nonlinear equations and neglecting second order values for incremental displacements the linearized system of equations may be

received. In order to solve these equations and to facilitate realizations on a PC, it is suggested the generalized notation. Here, the left sides of the equations form the linearized system of equations of neutral equilibrium, while the right sides constitute the system of nonlinear equations of the subcritical state. The equations are joined in pairs together with their boundary conditions into a single system of symbolic form:

$$L_k^{(1)} = -L_k + f_k \quad (k = 1, 2, 3);$$

$$L_i^{(1)} = -L_i + f_i \quad (i = 1, 2);$$

$$L_s^{(1)} = -L_s + f_s \quad (s=1, 2, 3). \quad (7)$$

Here, L represents differential operators: $L_k^{(1)}$ and $L_s^{(1)}$ are the boundary conditions (BC) of the linearized problem for the top and the bottom end of the shell; L_k and L_s are the BC of the subcritical state (SS) on the same end; $L_i^{(1)}$ and L_i are the linearized equations of equilibrium and the SS. Here, f_k and f_s are the BC of the SS for the top and the bottom end, f_i are the BC of equations of the SS. The system (9) is used for derivation of the solutions of the initial approximation, nonlinear equations of the SS and determination of the parameters of the critical load. They invite further generalization for analysis of ribbed shells [7]. Taking into account the forces of interaction between the shell and the ribs the expression for jumps in the derivations of the resolving functions may be obtained. This method uses only two unknowns in each node of mesh and is more economical and the most fast among other methods where are used 5 or 6 unknowns in node. It allows to prognosticate a carrying capacity of construction taking into account in complex cases the following main factors: laminated structure of material, imperfections of form, presence of discrete stiffened ribs of two directions, inelastic deformations.

3. COMPARISON OF THEORY AND EXPERIMENT

This approach was used for analyze of behavior of shells with artificial initial dents created on test specimens. Precritical state and critical state of such real elastic unstiffened shells under axial static compression was studied. The effects of localization of buckling modes have been studied. Features of prebuckling deformation and their influence on the buckling are studied too. Experimental estimations of applicability of current theories and methods for predicting the carrying capacity of real shells have been given.

The joint theoretical and experimental investigation of the buckling of imperfect cylindrical shells is fulfilled. The estimation of local critical load and buckling load is given both theoretically and experimentally for shell having dents in a middle of its length (Fig.1, Fig.2).

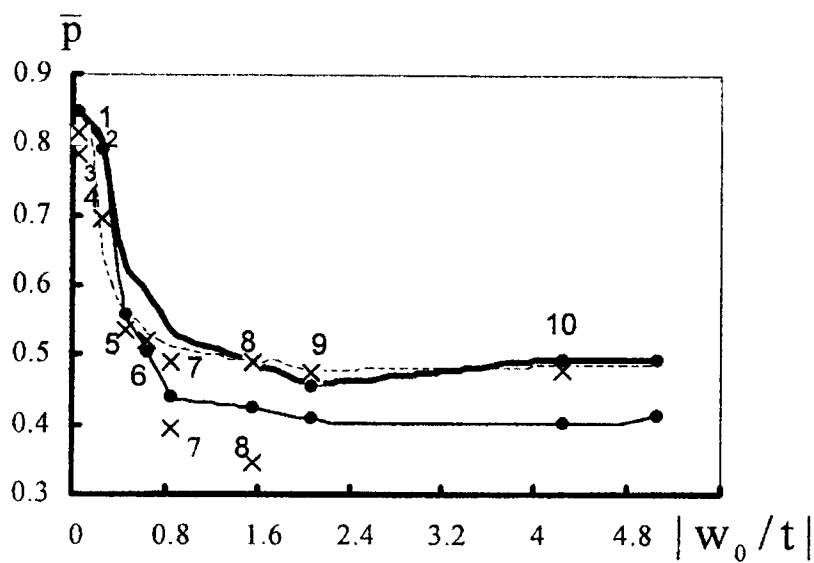


Fig. 1. Dependence $\bar{p}=f(w_0/t)$, where the thin line – theoretical dimensionless local critical loads; the thick line – critical loads of global stability loss; the dotted line – buckling load; numbers and crosses – experimental data

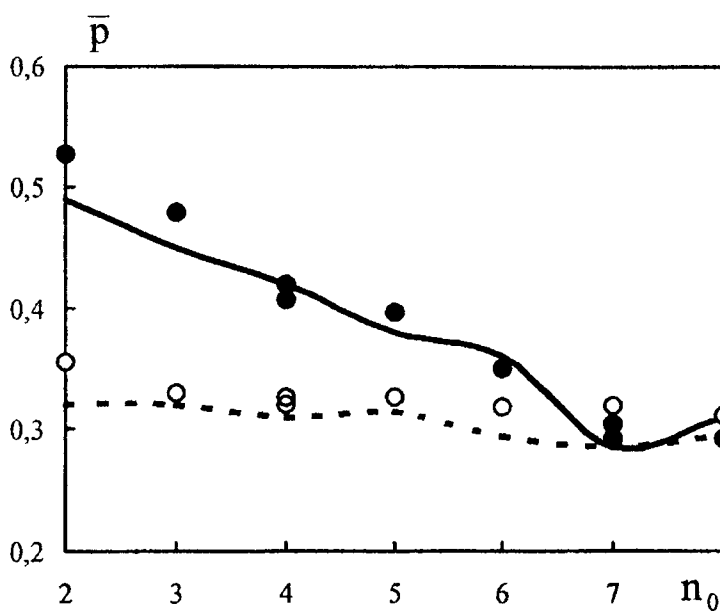


Fig. 2. Dependence $\bar{p}=f(n_0)$, where the dotted line – theoretical dimensionless local critical loads; the thick line – buckling load; white and black badges – experimental data.

In Fig.1 the dependence $\bar{p}=f(w_0/t)$ is illustrated, where $\bar{p}=N_{cp}/N_{cl}$ (N_{cr} and N_{cl} - real and classical value of critical load of smooth shell), w_0/t - maximum value of amplitude of a single local dent:

$$f_0 = -\frac{w_0}{t} \sin \frac{\pi x}{l_1} \sin \frac{\pi y}{l_2}, \quad \text{where } l_1 \text{ and } l_2 \text{ - are sizes of dent.} \quad (8)$$

In Fig.2 the dependence $\bar{p}=f(n_0)$ is represented, where n_0 - number of dents. These dents are periodical in circular direction and placed in the middle of a shell. Their form is represented by function (8). The mesh 143×76 was used in calculations for $1/2n_0$ part of shell.

The theoretical and experimental results are in good agreement in most of cases. This approach is extended on ribbed shells having different type of imperfections. Received results are generalized and represented in a graphic form.

4. CONCLUSIONS.

Suggested numerical method demands only two unknowns in each node and allows for analysis of different type of imperfections, including a single local dent. This approach takes into account a nonuniform and nonlinear precritical state of shells. The numerical results were compared with well known experimental data [9]. The theoretical and experimental results are in good agreement in most cases .

The approach suggested may be further elaborated.

REFERENCES

- [1] Arbocz J., Babcock C., The Effect of General Imperfections on the Buckling Cylindrical Shells, *J. Appl. Mech.*, Ser. E, 36, No. 1, 1969, pp.28-38.
- [2] Arbocz J., Starnes J., Nemeth, M., Buckling Predictions of Imperfection Sensitive Shells, *Euromech colloquium 424*, The Netherlands, 2001, pp. 11-14.
- [3] Donnell L. A New Theory for the Buckling of thin Cylinders under Axial Compression and Bending, *Trans, ASME*, 56, 1934, pp. 795-806.
- [4] Gavrylenko G., Numerical Algorithm of Stability Analysis of Constructively Orthotropic Shells under Arbitrary Boundary Conditions, in: *Fluid Mechanics and Theory of Elasticity* [in Russian], 14 ., 1972, pp. 131-138.
- [5] Gavrylenko G., *Stability of Ribbed Cylindrical Shells in Inhomogeneous Stress-Strain State* [in Russian], Nauk. Dumka, Kiev, 1989, 176p.
- [6] Gavrylenko G., *Stability of Ribbed Shells of Incomplete Form*, Inst. of Mathematics of NAS of Ukraine. 1999, 190 p.
- [7] Gavrylenko G., Croll J., Buckling Predictions of Imperfection Sensitive Shells, *Euromech Colloquium 424*, The Netherlands, 2001, p.34.
- [8] Kornishin M., *Nonlinear Problems of the Theory of Plates and Shallow Shells and Methods of Their Solution* [in Russian], Nauka, Moscow, 1964, 192p.
- [9] Krasovsky V., Quality of thin-walled cylinders and starting buckling mechanisms at axial compression, *Polish-Ukrainian Transactions*, vol.II, 2002, *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, 2002, pp.676-715.

A HYBRID WKBJ-VARIATIONAL TECHNIQUE WITH APPLICATION TO STABILITY AND DYNAMICS OF STRUCTURES

T.S. GERASIMOV, V.Z. GRISTCHAK

Department of Applied Mathematics, Zaporizhzhia State University
Zhukovskogo 66, 69063 Zaporizhzhia, Ukraine

In the paper a new asymptotic approach to the boundary value problems of inhomogeneous structures is presented and discussed. The technique implies the combined usage of phase integral (WKBJ) method and sufficient condition of existence an extremum of a functional, which realizes the boundary value problem. The approximate analytical solutions of the problems, obtained with the help of hybrid approach have a high level of accuracy.

1. INTRODUCTION

It is very rarely possible to integrate analytically and precisely the differential equations, which arise in mechanics of deformable solid (the stability and dynamics problems of inhomogeneous thin-walled structures). Hence there is a necessity to formulate an effective approximate methods and approaches.

Among the analytical approximate techniques the direct variational approaches (Euler, Rayleigh-Ritz, Kantorovich etc.) and non-variational (Boobnov-Galerkin, perturbation methods) are well known and the most developed. The first class of methods is based on minimization principle of system energy (Lagrange, Hamilton principles) and is used to be applied for problems, which are formulated in variational form. The perturbation methods are convenient to use for solution of the boundary value problems for differential equations, which contain a scalar parameter ε (small or large).

The problems of stability and dynamics of inhomogeneous thin-walled structures can be reduced namely to the latter ones. Usually, a scalar parameter ε is introduced into the equation of the problem naturally or artificially. It may represent, for instance, non-dimensional eigenfrequency, the ratio of the smallest to the largest of structure's linear dimensions. In the shell theory the small parameter may characterize the ratio of the thickness or normal displacement to the radius, the ratio of the stiffness coefficients of constructive-orthotropic shell, etc. It may also define the small divergence of structure's initial form from circular, cylindrical, etc. forms.

The perturbation methods have at least two drawbacks. The first, less significant, is that, only a few terms in a perturbation expansion can be computed because of the rapidly increasing amount of "labor" that is required to compute each additional term. And the second one, much more significant is that, in order to obtain approximation of acceptable accuracy, the expansion parameter ε must be restricted.

That is why the approaches, which allow expanding the range of usage of the classical asymptotic techniques, so called the *hybrid* approaches, have recently attracted great attention of investigators. They are based on the idea of using some numeric techniques or perturbation expansions in conjunction with Boobnov-Galerkin or variational techniques. Among the hybrid approaches the following ones are well-

known: Noor's reduced basis method [1-4], perturbation-Galerkin [5-8] and WKB-Galerkin methods [9].

In the paper we present and discuss a two-step *hybrid WKBJ-variational* technique for the boundary value problems of mechanics, which can be reduced to linear differential equations with variable coefficients and perturbation parameter near the highest derivatives. The technique implies the combined usage of WKBJ-method and sufficient condition of existence an extremum of a functional, which realizes an equation of boundary value problem.

Generally, at the first step, the WKBJ-method is used to determine the approximate solution of the boundary value problem, containing a perturbation parameter ε . The obtained general WKBJ-solution is valid only for special values of the parameter (usually for small ones). At the second step, a subset of coordinate functions of WKBJ-expansion, determined at step one, is used with new "amplitudes" in a WKBJ type expansion, named as hybrid. The unknown amplitudes of the latter "refined" solution can be determined in the following way: we substitute the general solution into the functional, which realizes an equation of boundary value problem; this functional then transforms into the function of finite number of variables (as a matter of fact, of the unknown amplitudes); and finally we investigate the obtained function on an extremum.

Proposed technique allows to determine approximate analytical solutions of the problems with a high level of accuracy (much more accurate than the WKBJ-solution on which they are based). Yielded solutions are valid on the wide interval of perturbation parameter.

2. DESCRIPTION OF THE HYBRID WKBJ-VARIATIONAL TECHNIQUE

To describe the hybrid technique in detail, let us consider the boundary value problem for linear differential equation of order n with variable coefficients, which contains a perturbation parameter ε near the highest derivatives:

$$L(x, \varepsilon, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1)$$

The function $y(x)$ is subjected to the boundary conditions of the simplest type

$$y(a) = A, \quad y'(b) = B. \quad (2)$$

At step one, for small values of ε we use the WKBJ-method to find an approximate solution for $y(x)$ in the form

$$y_{\text{WKBJ}} = \exp \int_a^x \varepsilon^{j-1} \psi_j dx \quad (3)$$

where $\{\psi_j\}$ are the unknown WKBJ-coordinate functions. These quantities can be determined in standard manner: we have to substitute the expansion (3) into equation (1), equate the coefficients of like powers of ε in the resulting equation, and solve a sequence of equations for each of the unknowns $\{\psi_j\}$.

As it was already mentioned, the WKBJ-method, being one of the perturbation techniques, suffers the same drawbacks. Thus, the terms $\{\psi_j\}$ of order $j > 1$ of WKBJ-expansion (3) can be computed only in number of cases. That is why, in applied

problems, we usually determine ψ_0 and ψ_1 , that provides an acceptable accuracy of general WKBJ-solution of equation (1) when the values ε are really small. The biggest drawback of approximate solution, obtained with the help of the WKBJ-method, still lies in restricted range of its application, caused by the ε smallness. It means that when ε ceases to be small the WKBJ-method yields the solution, which considerably differs from the numeric or exact solution of the problem (if it's available).

In the purpose to refine the latter one, at step two of the hybrid method, we use a subset of coordinate functions $\{\psi_j\}$ of WKBJ-expansion (3), determined at step one, in a WKBJ type expansion, named as hybrid:

$$\bar{y}_H = \exp \int_a^x \sum_{j=0}^N \delta_j \psi_j dx. \quad (4)$$

In formula (4) the $\{\delta_j\}$, $j=0, \dots, N$ represent new "amplitudes" of coordinate functions $\{\psi_j\}$. They should be such, that the general solution $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$, based on the expansion (4), "would correspond to the precise solution of the problem as much as possible". Let's formulate the principle an optimal determining of the $\{\delta_j\}$.

This principle is based on the idea to replace the initial boundary value problem (1), (2) by the variational problem an extremum of a functional, for which one equation (1) is an equation of the Euler or Euler-Poisson; to determine the function, which realizes an extremum of the functional; and by that to obtain the solution of the boundary value problem.

Let's assume that $V[y(x), \varepsilon]$ is the functional, for which the condition $\delta V[y(x), \varepsilon] = 0$ realizes equation (1) and different types of natural boundary conditions, including (2). In this case, instead of the problem (1), (2) there is the variational problem which consists in finding the function, delivering an extremum to functional $V[y(x), \varepsilon]$. The $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ is the general solution of equation (1), based on the hybrid expansion (3). If now to subject the $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ to appropriate boundary conditions (2), it will be the permissible function of the variational problem for any choice of the $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_N$.

Substituting of the $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N)$ into the functional $V[y(x), \varepsilon]$ transforms the latter one into the function of N variables

$$V[\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0, \dots, \delta_N), \varepsilon] = \varphi(\delta_0, \dots, \delta_N). \quad (5)$$

Then the sufficient condition of existence an extremum

$$\delta V[\bar{y}_H, \varepsilon] = 0 \quad (6)$$

transforms into the system of equation for each of the unknowns $\{\delta_j\}$, $j=0, \dots, N$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_0} \right|_{\delta_0 = \delta_0^*} = 0, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_1} \right|_{\delta_1 = \delta_1^*} = 0, \quad \dots \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \delta_N} \right|_{\delta_N = \delta_N^*} = 0. \quad (7)$$

The solution of the system (7) yields such the subset of the values $\delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*$, that function $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*)$ delivers the extremum to the functional $V[y(x), \varepsilon]$. Hence, this function $\bar{y}_H(x, \varepsilon, \delta_0^*, \delta_1^*, \dots, \delta_N^*)$ is the required hybrid solution of the boundary problem (1), (2).

3. AN EXAMPLE OF THE TECHNIQUE APPLICATION

In this section, as an example of the proposed WKBJ-variational technique application, we consider the problem of free transverse vibrations of a round plate with central hole and radially-variable thickness. Thus, the strain and the kinetic energies of a round plate of radius a and central hole of radius b as functions of the transverse displacement $W = W(r, \theta, t)$ are of the form

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} D(r) \left\{ (\nabla^2 W)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{\partial W}{r \partial r} + \frac{\partial^2 W}{r^2 \partial \theta^2} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} - \frac{\partial W}{r \partial \theta} \right)^2 \right] \right\} r dr d\theta$$

$$K = \frac{\rho}{2} \int_b^a \int_0^{2\pi} h(r) \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 r dr d\theta$$

where:

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2}$ - is the Laplace operator in polar coordinates,

$D(r) = \frac{Eh^3(r)}{12(1-\nu^2)}$ - is the bending stiffness, h_0 - is the nominal thickness,

$h(r) = h_0 \varphi(r)$ - is the variable thickness, assumed to vary along the coordinate r ,

$\varphi(r)$ - is the function of thickness variety (preliminary unknown),

E - is the Young's modulus, ν - is the Poisson ratio, ρ - is the material density.

The variational form of the plate's vibration problem, based on the Hamilton's principle, is the following

$$\delta \Phi [W(r, \theta, t)] = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - K) dt = 0 \quad (8)$$

We introduce the non-dimensional variables $\tilde{W} = W/a$, $x = r/a$, $\tau = t/T$, where T is the scale of time, defined by an equation $12\rho h_0^2(1-\nu^2)/ET^2 = 1$ and separate variables by writing $\tilde{W}(x, \theta, \tau) = U(x)e^{in\theta}e^{i\omega\tau}$, where ω is the natural non-dimensional frequency, n is the number of nodal diameters. This procedure yields formula (8) as

$$\delta \Phi [U(x)] = 0 \quad (9)$$

where:

$$\Phi[U(x)] = \frac{1}{2} \int_{b/a}^1 \left[\varepsilon^4 \varphi^3(ax) \left\{ \left(U'' + \frac{U'}{x} - \frac{n^2 U}{x^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[U'' \left(\frac{U'}{x} - \frac{n^2 U}{x^2} \right) + \frac{n^2}{x^2} \left(U' - \frac{U}{x} \right)^2 \right] \right\} + \omega^2 \varphi(ax) U^2 \right] x dx \quad (10)$$

Condition (9) brings us to the boundary value problem that is governed by the equation with variable coefficients and a small parameter $\varepsilon = h_0/a$

$$\varepsilon^4 \left\{ \alpha_1(x) U^{iv} + \alpha_2(x) U''' + \alpha_3(x) U'' + \alpha_4(x) U' \right\} - \left\{ \omega^2 \varphi(ax) - \varepsilon^4 \alpha_5(x) \right\} U = 0 \quad (11)$$

where:

$$\alpha_1(x) = \varphi^3(ax)$$

$$\alpha_2(x) = 2x^{-1} + [\varphi^3(ax)]'$$

$$\alpha_3(x) = -(2n^2 + 1)x^{-2} \varphi^3(ax) + (2 + \nu)x^{-1} [\varphi^3(ax)]' + [\varphi^3(ax)]''$$

$$\alpha_4(x) = (2n^2 + 1)x^{-3} \varphi^3(ax) - (2n^2 + 1)x^{-2} [\varphi^3(ax)]' + \nu x^{-1} [\varphi^3(ax)]''$$

$$\alpha_5(x) = (n^4 - 4n^2)x^{-4} \varphi^3(ax) + 3n^2 x^{-3} [\varphi^3(ax)]' - \nu n^2 x^{-2} [\varphi^3(ax)]''$$

and to the natural boundary conditions of clamped and supported edges of the plate

$$U(x) = 0, \quad U'(x) = 0, \quad \text{when } x = b/a \quad (12)$$

$$U(x) = 0, \quad U''(x) + \nu \left(\frac{U'(x)}{x} - \frac{n^2 U(x)}{x^2} \right) = 0, \quad \text{when } x = 1 \quad (13)$$

The hybrid technique proposed in section 2 is applied here to obtain approximate values of eigenfrequencies for the problem (11)-(13). Eigenfrequencies calculated by the hybrid WKBJ-variational technique as functions of parameter $\varepsilon = h_0/a$ are presented in table 1. The number of nodal diameters and nodal circles assumed to be $n = 0, m = 0, 1, 2, 3$. Function of plate's thickness variety is $\varphi = \exp[0.5(b - ax)]$.

Table 1. Eigenfrequencies of the problem obtained by the WKBJ, the hybrid WKBJ-variational and numerical techniques for some values of parameter $\varepsilon = h_0/a$.

ε	m	ω_{WKBJ}	ω_{Hybrid}	ω_{Numeric}
0.1	0	0.02498	0.02458	0.02461
	1	0.07789	0.08044	0.08057
	2	0.16104	0.16618	0.16629
	3	0.27939	0.28118	0.28152
0.5	0	0.62471	0.51713	0.51747
	1	1.94736	1.76665	1.76710
	2	4.02607	3.76506	3.76524
	3	6.85989	6.50400	6.50417
2	0	9.99532	7.02564	7.02592
	1	31.15774	26.64538	26.64572
	2	64.41710	58.43488	58.43507
	3	109.75825	102.15783	102.15821

It easy to see that the accuracy of the WKBJ solutions decreases when ε ceases to be small, whereas the hybrid solutions agree well with numerical results and are more accurate than the WKBJ-solutions, on which they are based.

In figure 1 the approximations to the mode shapes $U(x)$ obtained by the hybrid WKBJ-variational technique are plotted. Structure of the hybrid solution for $U(x)$ contains function of plate's thickness variety φ that let analyze how the latter one influences on the mode shapes of the plate's vibration. For the plotted mode shapes the following assumptions are made: the external plate's radius $a=10$, the radius of the central hole $b=2$, $\varepsilon=0.1$, Poisson ratio $\nu=1/3$, the number of nodal diameters and nodal circles are respectively $n=0, m=0$.

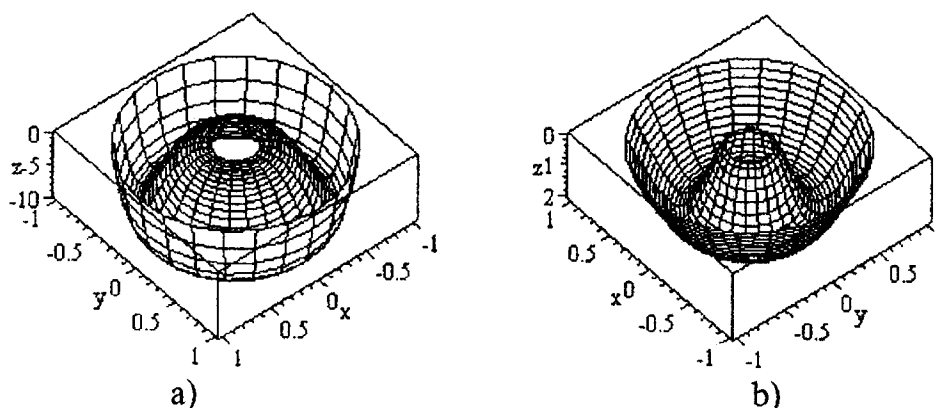


Fig.1. The first mode shapes $U(x)$ of the plate's vibrations, depending on the function of thickness variety φ : a) $\varphi = \exp[0.5(b - ax)]$; b) $\varphi = \exp[0.3(ax - a)]$

The eigenvalue problem above rarely has precise analytical solutions. In this section with the help of hybrid approach we constructed approximate analytical solutions for eigenfrequencies and eigenfunctions with high level of accuracy. Obtained solutions contain the function of plate's thickness variety and let analyze its influence on the forms and frequencies of the plate vibrations.

REFERENCES

- [1] Noor A., Peters J., Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures, Proc. of the AIAA-ASME-ASCE-AHS 20th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, St. Louis, 1979, pp. 116-126.
- [2] Noor A., Andersen C., Peters J., Reduced basis technique for collapse analysis of shells, AIAA J., 1981, №19, pp. 393-397.
- [3] Fink J., Rheinbolt W., On the error behavior of the reduced basis technique for nonlinear finite element approximations, ZAMM, 1983, № 63, pp. 21-28.
- [4] Noor A. Analytical technique for nonlinear analysis of structures, AIAA J., 1985, № 23,
- [5] Geer J., Andersen C., Investigating a hybrid perturbation-Galerkin technique using computer algebra, Rep. NASA, Hempton, Virginia, 1988, 25 p.
- [6] Geer J., Andersen C., A hybrid perturbation-Galerkin technique with applications to slender body theory, SIAM J. Appl. Math, 1989, № 2, pp. 344-361.
- [7] Geer J., Andersen C., A hybrid perturbation-Galerkin method for differential equations containing a parameter, Rep. NASA, Hempton, Virginia, 1989, 28 p.
- [8] Geer J., Andersen C., A hybrid perturbation-Galerkin technique for partial differential equations, Rep. NASA, Hempton, Virginia, 1990, 25 p.
- [9] Gristchak V., Dmitrijeva Ye., A Hybrid WKB-Galerkin Method and its Application, Technische Mechanik, 1995, № 15, pp. 281-294.

WPLYW DOBORU WARSTW NA STATECZNOŚĆ I NOŚNOŚĆ ORTOTROPOWYCH PŁYT PIĘCIOWARSTWOWYCH

R. GRĄDZKI

Zakład Podstawowych Problemów Techniki, Instytut Zarządzania Politechniki Łódzkiej,
ul. Piotrkowska 316, 90-924 Łódź

K. KOWAL-MICHALSKA

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej,
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy przedstawiono analizę wpływu parametrów geometrycznych i materiałowych na masę, stateczność i nośność płyt prostokątnych, zbudowanych z pięciu warstw o różnej grubości i wykonanych z różnych materiałów. Analiza nośności prowadzona jest w zakresie sprężysto-plastycznym, w oparciu o równania Prandtla-Reussa i kryterium plastyczności Tsai-Wu. Wyniki wstępnych obliczeń przedstawiono na wykresach.

1. WSTĘP

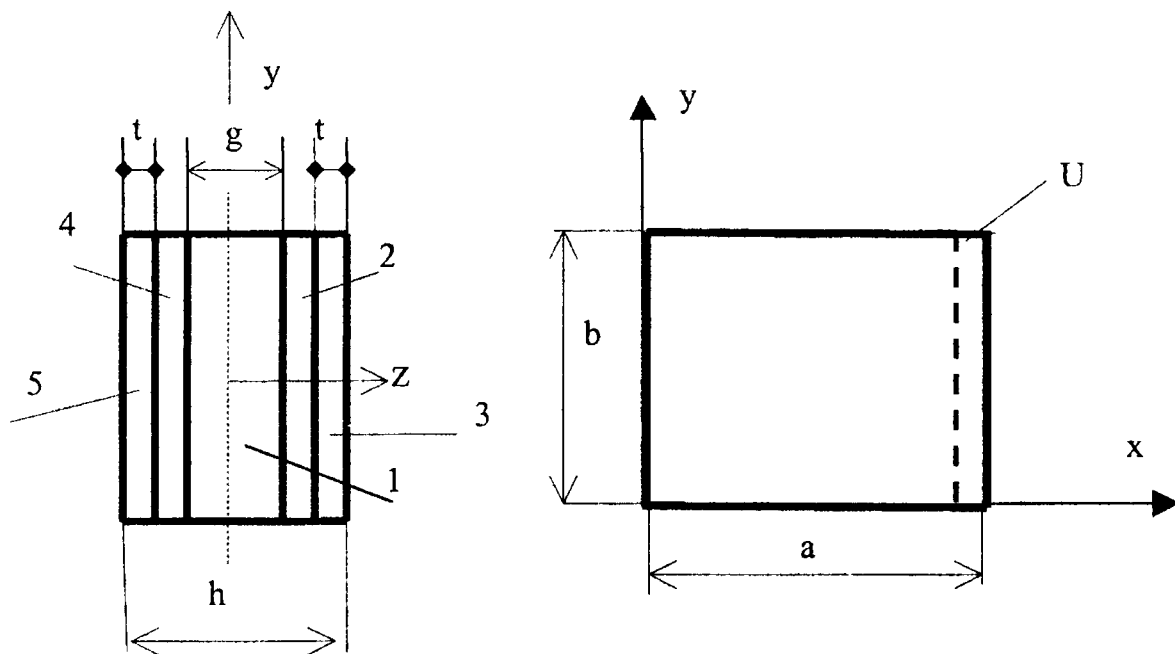
Wielowarstwowe płyty zwane też laminatami są postrzegane jako konstrukcje korzystne ze względu na możliwość kształtowania ich zgodnie z rosnącymi żądaniami dotyczącymi lekkości i wysokiej nośności. Płyty takie są szeroko stosowane nie tylko w lotnictwie, ale także w budownictwie i przemyśle motoryzacyjnym. Warstwy płyty są najczęściej wykonane z kompozytów, które w dalszych rozważaniach będziemy traktować jako materiał ortotropowy. Aby otrzymać pełną informację o pracy płyt, poddanych obciążeniom działającym w ich płaszczyźnie, należy w rozważaniach uwzględnić nie tylko stan krytyczny i zakrytyczny w zakresie sprężystym (w oparciu o nieliniową teorię płyt laminowanych) ale również zastosować odpowiednie kryterium uplastycznienia i dalej związku opisujące zależności fizyczne w obszarach sprężysto-plastycznych. Taka analiza możliwa jest jedynie na drodze numerycznej, gdyż związki naprężenie-odkształcenie (równania Prandtla-Reussa) mają charakter przyrostowy. Bez wątplenia metody czysto numeryczne (np. MES) są najbardziej ogólnym narzędziem i pakiety profesjonalne pozwalają na znalezienie odpowiedzi dla szerokiej gamy płyt wielowarstwowych, ale nie należy zapominać o długim czasie obliczeń i wysokich kosztach. Należy również pamiętać, że warunkiem uzyskania prawidłowych wyników jest zbudowanie odpowiedniego modelu, wybór odpowiedniego elementu, wprowadzenie adekwatnego kryterium plastyczności i prawidłowe przyjęcie warunków brzegowych. Metody analityczno-numeryczne, w których analityczne zależności w zakresie sprężystym są wykorzystywane do zbudowania iteracyjnej procedury numerycznej muszą z natury być mniej ogólne ale dają szybkie i wystarczająco dokładne wyniki, szczególnie jeśli zależy nam na wyznaczeniu maksymalnego obciążenia przenoszonego przez płytę

Przedmiotem badań są płyty prostokątne zbudowane z pięciu warstw ortotropowych, o głównych osiach ortotropii równoległych do brzegów płyty. Płyty poddane są jednokierunkowemu ścisnaniu, ale ponieważ nieobciążone brzegi muszą pozostać nieruchome w rzeczywistości mamy do czynienia z dwukierunkowym ścisnaniem. Dla konstruktorów interesujące może być określenie jak zmieniają się: masa, sztywność płytowa, naprężenie krytyczne i naprężenie graniczne (nośność) w zależności od przyjętych parametrów geometrycznych (grubości poszczególnych warstw) i materiałowych (różne materiały oraz różne ułożenie warstw).

2. POSTAWIENIE PROBLEMU

Rozpatrywane są płyty prostokątne poddane obciążeniu ścisnającemu w ten sposób, że badana jest odpowiedź płyty na przyrost przemieszczenia ΔU jej brzegów. Płyty są płaskie i wolne od naprężeń. Założono, że wszystkie brzegi płyty są przegubowo podparte i pozostają proste podczas obciążania. Brzegi nieobciążone pozostają nieruchome.

Płyty zbudowane są z 5-ciu warstw symetrycznie położonych względem powierzchni środkowej (rys.1). Jeśli własności wytrzymałościowe materiałów warstw są tego samego rzędu to przyjmuje się, że hipoteza Kirchhoffa pozostaje słuszna w całym przekroju poprzecznym.



Rys. 1. Geometria i obciążenie płyty

Własności materiałowe poszczególnych warstw są określone przez następujące stałe sprężyste: moduły Younga E_x^k, E_y^k ; liczby Poissona ν_{xy}^k, ν_{yx}^k ; i moduł sprężystości postaciowej G^k ($k=1,2,3$). Jak wiadomo, słuszna jest zależność $E_x^k / E_y^k = \nu_{xy}^k / \nu_{yx}^k$.

Przedwyboczeniowe wyrażenia dla pól przemieszczeń i naprężeń są następujące:

$$u^0 = U \frac{x}{a}; \quad v^0 = 0; \quad \sigma_x^0 = \text{const.}, \quad \sigma_y^0 = \text{const.}, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (1)$$

W zakresie sprężystym analiza stateczności prowadzona jest w oparciu o nieliniową teorię płyt laminowanych [4].

Po przyjęciu funkcji ugięcia w postaci:

$$w = f \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}; \quad \text{gdzie } f \text{ jest swobodnym parametrem,} \quad (2)$$

wyznaczono (w sposób dokładnie opisany we wcześniejszych publikacjach [2]) przemieszczenia powierzchni środkowej płyty:

$$u = u^0 + f^2 \left(C_1 \sin \frac{2\pi x}{a} + B_1 \sin \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad (3)$$

$$v = v^0 + f^2 \left(C_2 \sin \frac{2\pi y}{b} + B_2 \sin \frac{2\pi y}{b} \cos \frac{2\pi x}{a} \right). \quad (4)$$

Stałe C_1 , C_2 , B_1 , B_2 zależą od geometrycznych i materiałowych własności warstw:

$$C_1 = \frac{\pi}{16a} \left(\frac{A_{12}}{A_{11}} \lambda^2 - 1 \right); \quad C_2 = \frac{\pi \lambda}{16a} \left(\frac{A_{12}}{A_{22}} \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right);$$

$$B_1 = \frac{\hat{e}\hat{b} - \hat{c}\hat{d}}{\hat{a}\hat{d} - \hat{b}^2}, \quad B_2 = \frac{\hat{c}\hat{b} - \hat{e}\hat{a}}{\hat{a}\hat{d} - \hat{b}^2},$$

$$\hat{a} = \frac{1}{a^2} (A_{11} + A_{33} \lambda^2); \quad \hat{b} = (A_{12} + A_{33}) \frac{\lambda}{a^2}; \quad \hat{c} = \frac{-\pi}{16a^3} [-A_{11} + (A_{12} + 2A_{33}) \lambda^2];$$

$$\hat{d} = \frac{1}{a^2} (A_{22} \lambda^2 + A_{33}); \quad \hat{e} = \frac{-\pi \lambda}{16a^3} [-A_{22} \lambda^2 + (A_{12} + 2A_{33})]; \quad \lambda = a/b;$$

$$A_{11} = \sum_{k=1}^5 \frac{E_x^k}{1 - (v_{xy} v_{yx})^k} (z_k - z_{k-1}); \quad A_{22} = \sum_{k=1}^5 \frac{E_y^k}{1 - (v_{xy} v_{yx})^k} (z_k - z_{k-1});$$

$$A_{11} = \sum_{k=1}^5 \frac{v_{yx}^k E_y^k}{1 - (v_{xy} v_{yx})^k} (z_k - z_{k-1}) \quad A_{33} = \sum_{k=1}^5 G_{xy}^k (z_k - z_{k-1}).$$

Naprężenia krytyczne dla płyt prostokątnych zbudowanych z 5 warstw ortotropowych poddanych temu szczególnemu przypadkowi ściskania znaleziono w oparciu o rozwiązanie przedstawione w fundamentalnej pracy Timoszenko i Gere [6] dla płyty izotropowej.

Stosując znane nieliniowe związki geometryczne pomiędzy odkształceniami i przemieszczeniami oraz prawo Hooke'a dla materiału ortotropowego, możemy określić sprężyste pole naprężeń w każdym punkcie rozpatrywanej płyty.

Aby wyznaczyć wartość maksymalnego obciążenia przenoszonego przez płytę należy prowadzić analizę w obszarach sprężysto-plastycznych. W stanie plastycznym poczyniono następujące założenia:

- charakterystyki materiałowe warstw są znane w całym zakresie obciążenia ;
- materiały podlegają kryterium Tsai-Wu;
- wszystkie założenia nieliniowej teorii płyt pozostają nadal słuszne;
- postacie funkcji przemieszczeń są takie same ale amplituda „f” pozostaje parametrem swobodnym,
- zgodnie z teorią plastycznego płynięcia przyrosty naprężeń są związane z przyrostami odkształceń poprzez równania Prandtla-Reussa.

W tej pracy przyjęto, że wszystkie charakterystyki materiałowe warstw są liniowo sprężyste, bez wzmocnienia w zakresie plastycznym. W takim razie dla każdego z trzech rozważanych materiałów muszą być znane granice plastyczności w kierunkach głównych ortotropii (dla jednokierunkowego ściskania C_x^k, C_y^k oraz dla jednokierunkowego rozciągania T_x^k, T_y^k) i granica plastyczności wyznaczana w próbie czystego ścinania S.

W przypadku gdy granice plastyczności odpowiadające próbie jednokierunkowego ściskania i rozciągania nie są tożsame, Tsai i Wu [7] zaproponowali – dla płaskiego stanu naprężenia - kryterium w następującej postaci:

$$f = k_1 \sigma_x + k_2 \sigma_y + k_{11} \sigma_x^2 + k_{22} \sigma_y^2 - k_{12} \sigma_x \sigma_y + 3k_{33} \tau_{xy}^2 = 1; \quad (5)$$

gdzie parametry k_1, k_2 , oraz k_{11}, k_{22} i k_{33} zależą od granic plastyczności omówionych wcześniej, a parametr k_{12} może być wyznaczony na podstawie przybliżonych zależności, bądź na drodze doświadczalnej (patrz [7] i [5]).

W analizie stanu zakrytycznego w obszarze sprężysto-plastycznym równania Prandtla-Reussa [3] przyjęto w postaci:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_x &= \frac{E_x}{(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} [\Delta \varepsilon_x + \nu_{xy} \Delta \varepsilon_y - \Lambda (S_{xx} + \nu_{xy} S_{yy})], \\ \Delta \sigma_y &= \frac{E_y}{(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} [\Delta \varepsilon_y + \nu_{yx} \Delta \varepsilon_x - \Lambda (S_{yy} + \nu_{yx} S_{xx})], \\ \Delta \tau_{xy} &= G_{xy} (\Delta \gamma_{xy} - \Lambda S_{xy}), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} S_{xx} &= \frac{TC}{3} (k_1 + 2k_{11} \sigma_x - k_{12} \sigma_y), & S_{yy} &= \frac{TC}{3} (k_2 + 2k_{22} \sigma_y - k_{12} \sigma_x), \\ S_{xy} &= 2TCk_{33} \tau_{xy}. \end{aligned}$$

T i C oznaczają wartości granic plastyczności odpowiednio przy rozciąganiu i ściskaniu, określone dla charakterystyki materiałowej wybranej jako charakterystyka odniesienia (najczęściej charakterystyka w kierunku obciążenia) [5].

Dla materiału ortotropowego o charakterystykach liniowo sprężystych - plastycznych bez wzmocnienia, parametr Λ jest wyrażony jako:

$$\Lambda = \frac{(S_{xx} + \nu_{yx} \eta S_{yy}) \Delta \varepsilon_x + \eta (S_{yy} + \nu_{yx} S_{xx}) \Delta \varepsilon_y + G^* S_{xy} \Delta \gamma_{xy}}{S_{xx}^2 + 2\eta \nu_{yx} S_{yy} S_{xx} + \eta S_{yy}^2 + G^* S_{xy}^2}; \quad (7)$$

gdzie: $\eta = \frac{E_y}{E_x}$; $G^* = G_{xy} (1 - \nu_{yx} \nu_{xy}) / E_x$.

3. METODA ROZWIĄZANIA

Metoda rozwiązania jest kombinacją rozwiązań analitycznego i numerycznego. Była już wielokrotnie stosowana przez autorów w ich pracach np. [1], [2],[5]. Obecnie procedura obliczeń została tak zmodyfikowana aby można było badać płyty wielowarstwowe zbudowane z warstw ortotropowych.

Do zagadnienia stanu zakrytycznego w obszarze sprężysto-plastycznym stosowana jest metoda wariacyjna Rayleigha-Ritza z uwzględnieniem plastyczności. Badana jest odpowiedź płyty na przyrost skrócenia ΔU . Aby wyznaczyć przyrosty energii w obszarach plastycznych i sprężystych przeprowadzono dyskretyzację każdej warstwy na elementy prostopadłościenne. W kolejnym kroku obliczeń wyznaczany jest przyrost energii w poszczególnym elemencie 3-wymiarowym. Przyrosty te są sumowane dla pojedynczej warstwy, a następnie dla całej płyty. Po numerycznym przeprowadzeniu minimalizacji energii względem niezależnego parametru „f” funkcji ugięcia wyznaczane są (również na drodze numerycznej) naprężenia średnie ściskające płytę. Naprężenia te odpowiadają wprost obciążeniu przyłożonemu do płyty.

Należy zauważyć, że w każdym kroku obliczeń uwzględniono możliwość wystąpienia procesów aktywnych, neutralnych i biernych (związanych z odciążeniem). W procedurze obliczeń przewidziano redukcję naprężeń do powierzchni plastyczności.

4. WSTĘPNE WYNIKI OBLICZEŃ

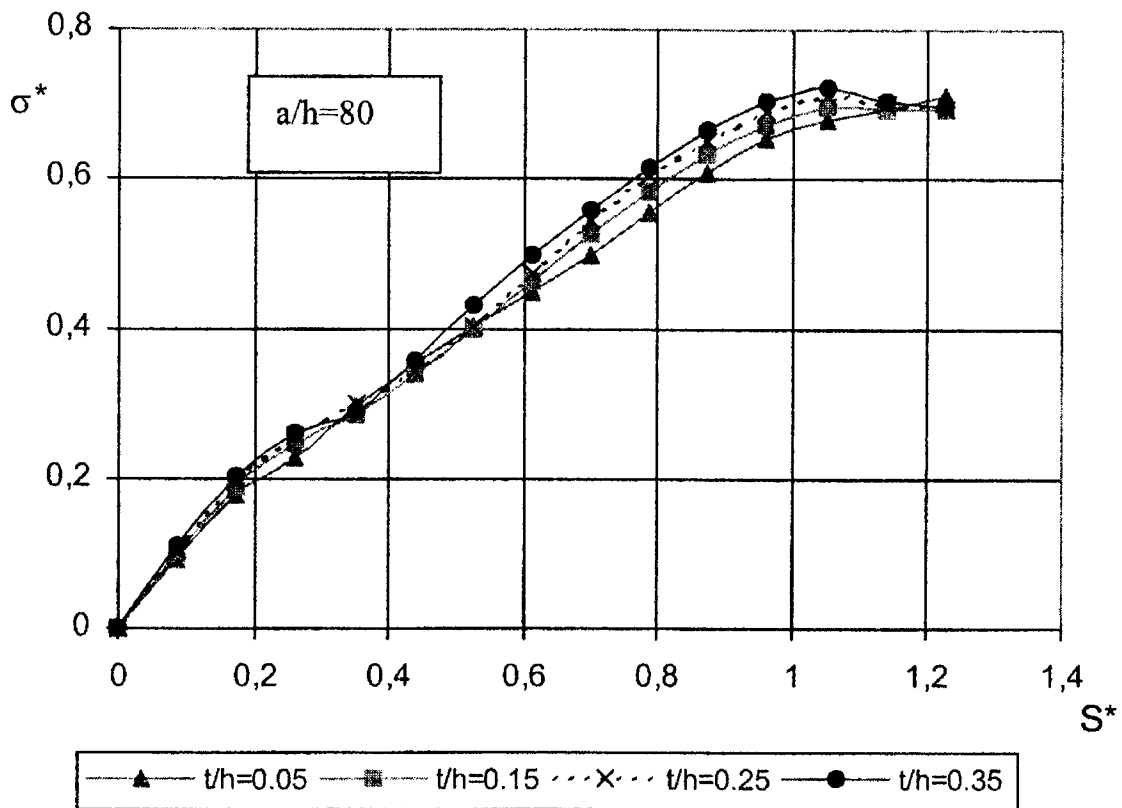
Pierwsze obliczenia przeprowadzono dla płyt wykonanych z warstw izotropowych o następujących własnościach materiałowych:

- warstwa stalowa: $E_s = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\nu_s = 0.3$; $T_s = C_s = 384$ MPa;
 $\rho_s = 7.95 \cdot 10^{-3}$ kg/m³
- warstwa kompozytowa: $E_k = 0.55 \cdot 10^5$ MPa; $\nu_k = 0.07$; $T_s = 384$ MPa;
 $C_s = 825$ MPa; $\rho_k = 1.45 \cdot 10^{-3}$ kg/m³
- warstwa aluminiowa: $E_{al} = 2 \cdot 10^5$ MPa; $\nu_{al} = 0.3$; $T_{al} = C_{al} = 160$ MPa;
 $\rho_{al} = 2.95 \cdot 10^{-3}$ kg/m³

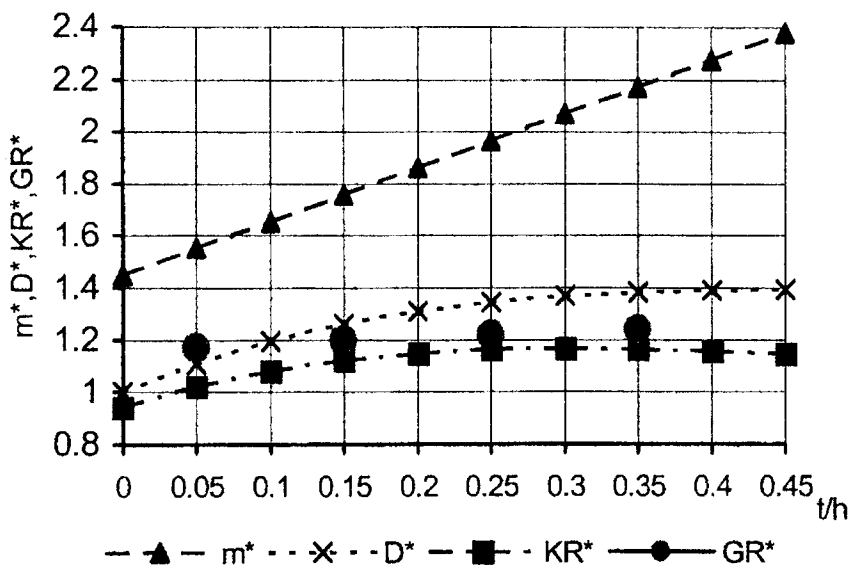
Przyjęto, że rozważane płyty (rys.1) są zbudowane w ten sposób iż warstwa środkowa ma ustaloną grubość $g = 0.1h$, zmienna jest grubość pozostałych warstw. Warstwy „3” i „5” oraz warstwa „1” są metalowe, zaś warstwy „2” i „4” kompozytowe.

Rozpatrzono dwa typy płyt kwadratowych, oznaczone jako: „S-A” (warstwy skrajne stalowe, warstwa środkowa aluminium) oraz „A-S” (odwrotny układ).

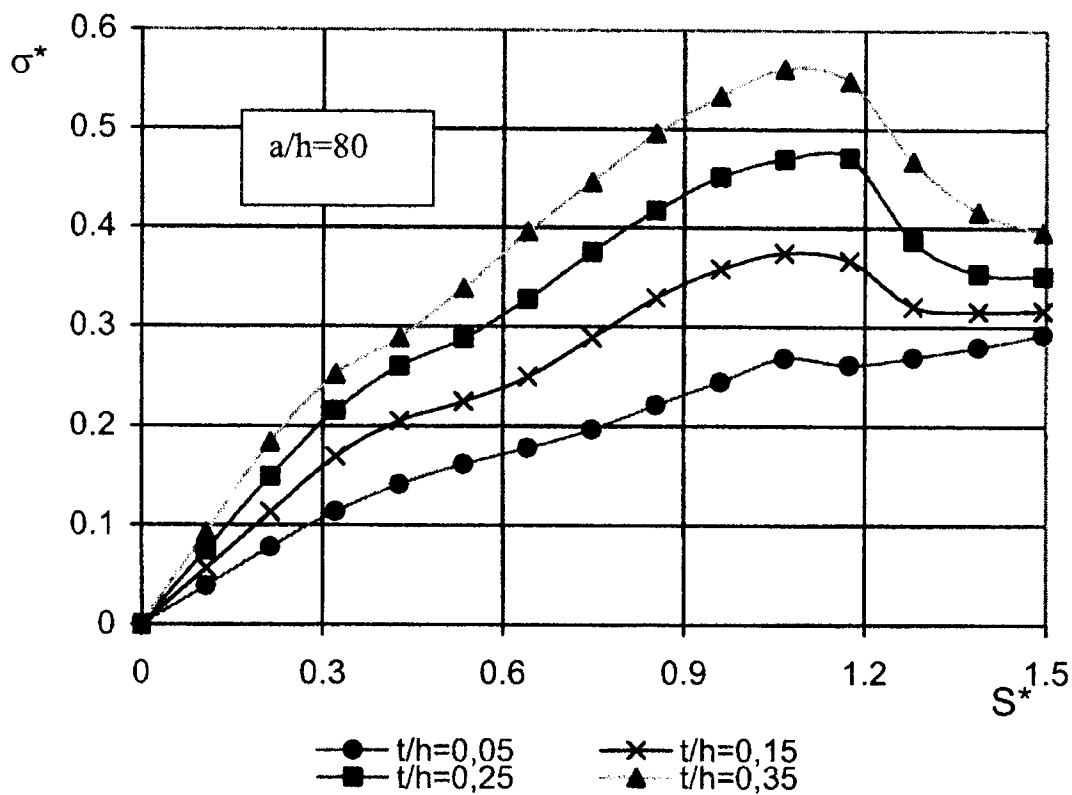
Na rysunkach 2 i 4 przedstawiono krzywe pracy płyt dla różnych grubości warstw i na ich podstawie, dla każdego rozpatrywanego przypadku, wyznaczono wartość maksymalnego obciążenia.



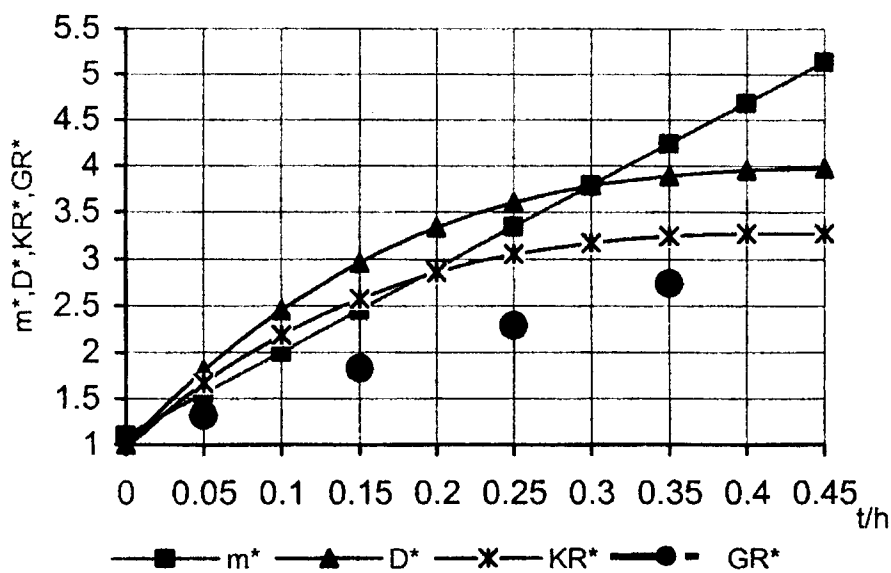
Rys. 2. Krzywe pracy dla płyt typu „A-S” ($\sigma^* = \sigma_{sr}/C_{al}$; $S^* = U \cdot E_{al}/a \cdot C_{al}$)



Rys. 3. Zmiana badanych bezwymiarowych wielkości w funkcji stosunku grubości t warstw zewnętrznych do grubości płyty h (płyta „A-S”)



Rys. 4. Krzywe pracy dla płyt typu „S-A” ($\sigma^* = \sigma_{sr}/C_S$; $S^* = U \cdot E_S/a \cdot C_S$)



Rys. 5. Zmiana badanych bezwymiarowych wielkości w funkcji stosunku grubości t warstw zewnętrznych do grubości płyty h (płyta „S-A”)

Zmianę badanych wielkości takich jak masa (m^*), sztywność płytowa w kierunku ściskania (D^*), naprężenia krytyczne (KR^*) oraz nośność (GR^*) przedstawiono na rys.3 i 5 w funkcji stosunku t/h (grubości warstw skrajnych do grubości całej płyty).

Wszystkie badane wielkości mają charakter bezwymiarowy - zostały odniesione do odpowiednich wielkości wyznaczonych dla jednowarstwowej płyty kompozytowej o grubości h .

Porównując wyniki dla płyt typu „A-S”(rys.3) i płyt oznaczonych jako „S-A” (rys.5) można łatwo zauważyć, że charakter zmian badanych wielkości wraz ze zmianą t/h jest diametralnie inny. W przypadku płyt o warstwach skrajnych wykonanych z aluminium zarówno sztywność jak i naprężenia krytyczne oraz naprężenie maksymalne (GR^*) zmieniają się nieznacznie (około 20%) a masa wzrasta o ponad 100%. Dla płyt o okładzinach wykonanych ze stali istnieje taki przedział t/h , dla którego przyrost masy jest zrekompensowany poprzez szybszy wzrost sztywności i naprężeń krytycznych. Nośność płyt również rośnie znacząco.

Wyniki obliczeń mające na celu analizę wpływu zmiany ułożenia głównych osi ortotropii w poszczególnych warstwach zostaną przedstawione podczas sympozjum.

LITERATURA

- [1] Grądzki R., Kowal-Michalska K., Post-buckling analysis of elasto-plastic plates basing on the Tsai-Wu criterion, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 4, 37, 1999
- [2] Grądzki R., Kowal-Michalska K., Ultimate load of laminated plates subjected to simultaneous compression and shear, *The Archive of Mechanical Engineering*, Vol.XLVIII, 3, 2001
- [3] Hill R., *The mathematical theory of plasticity*, Oxford, 1950
- [4] Jones R.M., *Mechanics of composite materials*, International Student Edition, McGraw-Hill, Tokyo, 1975
- [5] *Selected problems of instabilities in composite structures*, complete edition, edited by: Kowal-Michalska K., Kołakowski Z., Technical University of Lodz, A Series of Monographs, Łódź, 1999.
- [6] Timoshenko S., Gere J. *Theory of elastic stability*, Mc-Graw Hill Company, New York, 1961
- [7] Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials, *Journal of Composite Materials*, 5, 1971

INFLUENCE OF LAYERS ARRANGEMENT ON STABILITY AND ULTIMATE LOAD OF FIVE-LAYERED ORTHOTROPIC PLATES

In the paper the analysis of influence of material and geometrical parameters of layers on mass, stability and ultimate load of rectangular plates subjected to compression is carried out. The considered plates are built of orthotropic layers symmetrically arranged with respect to the mid-plane. The principal axes of orthotropy are parallel to the plate edges. The analysis is conducted in the elastic and elasto-plastic range, basing on Tsai-Wu Criterion and Prandtl-Reuss equations. The solution is reached in the analytical-numerical way by an iterative procedure. The results of preliminary calculations are shown in figures.

SOLUTION OF NON-LINEAR PROBLEMS OF STRUCTURES WITH TIME DEPENDENT PARAMETERS ON THE BASIS OF HYBRID ASYMPTOTIC METHOD

V.Z. GRISTCHAK, V.V. LYSENKO

Department of Applied Mathematics, Zaporizhzhja State University
Zhukovskogo 66, 69600 Zaporizhzhja, Ukraine

In this paper a special attention is paid to the solution of nonlinear dynamics problems of structures with time dependent parameters. On the basis of Galerkin procedure the problem is reduced to the solution of nonlinear differential equations with variable coefficients. An approximate analytical closed-form solution of the equations is obtained by proposed hybrid method basing on double asymptotic perturbation-Galerkin technique. Obtained solution is valid for the more wide parameters ranges in comparison with classical asymptotic solutions. Calculations using a hybrid approach are compared with direct numerical results.

1. INTRODUCTION

In this paper the application of the hybrid technique [1], [2] to the approached analytical solution of nonlinear differential equations of the second order with time-dependent parameters and some initial conditions is examined. To the solving of nonlinear equations, for example, process of the solving of a problem about fluctuations of a rectangular plate by a Bubnov-Galerkin method is reduced. Generally, hybrid technique is based on using classical asymptotic expansions with a combination of some criteria of definition of artificial unknown coefficients at functions of these expansions [3], [4], [5]. For example: the criterion of Galerkin's orthogonality, which requires orthogonality of disclosure to each function of asymptotic expansion; a variational Hamilton's principle, which requires a minimization of some functional; the method of least squares which requires minimization of a square of disclosure of the initial equation or its some modification; etc. However, not all criteria can with success be applied to the solving of time-dependent problems. For example, variational principles, which use the Euler's equation, because for time-dependent problems the initial conditions at some moment of time t_0 are known only. The criterion of Galerkin's orthogonality at the solution of equations with variable coefficients does not give the desirable results too. In this connection, in this paper as the criterion of definition of artificial unknown coefficients at functions of asymptotic expansions the method of least squares is used. Approached asymptotic solution of nonlinear equation is searched with the help of the method of double asymptotic expansion [6], then the solution is twice specified with the help of the described hybrid technique on the basis of the WKBJ-Galerkin method (internal asymptotic) [3], [3] and the perturbation-Galerkin method (external asymptotic) [5].

2. DESCRIPTION OF THE HYBRID TECHNIQUE

To describe the hybrid technique in detail, let us consider the time-dependent problem for nonlinear differential equation of second order with time-dependent coefficients, which contains perturbation parameters ω_0 (usually large) and α (usually small), and which is used in solving of a number of applied tasks:

$$f''(t) + \omega_0^2 \cdot \varphi(t)f(t) + \alpha \cdot (P(t)f^2(t) + Q(t)f^3(t)) = \gamma(t), \quad (1)$$

where:

f – unknown function;

t – variable, which characterizes the time;

$\varphi(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ – some continuously differentiable functions of time;

$\gamma(t)$ – function of external loading;

ω_0 , α – parameters of frequency of own fluctuations of linear system and degree of nonlinearity;

cross stroke – is the time derivative.

To the solving of the equations (1), for example, process of the solving of a problem about fluctuations of a rectangular plate with time-dependent parameters by the Bubnov-Galerkin method is reduced at research of the main form of fluctuations.

If the plate is compressed along one of the sides by static efforts and as external force a time-dependent distributed cross loading is enclosed to a plate, then in the equation (1)

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^4 m^4 \left[1 + \left(\frac{n\lambda}{m} \right)^2 \right]^2}{12\lambda^2(1-\mu^2)} \left(\frac{v h_0}{ab} \right)^2, \quad \alpha = \frac{h_0}{a},$$

where:

a , b – lengths of sides of a plate;

$h(t) = h_0 h^*(t)$ – thickness of a plate;

$E(t) = E_0 E^*(t)$ – modulus of elasticity of a material of a plate;

$v = \sqrt{E_0/\rho}$ – speed of longitudinal wave propagation in a material of a plate;

f – function of a flexure;

$$\lambda = \frac{a}{b};$$

$\varphi(t)$, $P(t)$, $Q(t)$, $\gamma(t)$ – are some functions of time, which depend on the characteristics of a plate and function of external loading.

Let's search for the analytical solution of the initial equation (1) on an interval of time $[t_0, T]$. The function f is subjected to some initial conditions. At step one, we use the perturbation method to find an approximate solution for f in the form

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j f_j(t), \quad (2)$$

where $f_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots$) – unknown functions of time. We have to substitute the expansion (2) into equation (1) and equate the coefficients of like powers of α in the resulting equation:

$$\begin{aligned} L_0 f_0(t) &= \gamma(t), \\ L_0 f_1(t) &= -\left(P(t)f_0^2(t) + Q(t)f_0^3(t)\right), \\ L_0 f_2(t) &= -\left(2P(t)f_0(t) + 3Q(t)f_0^2(t)\right)f_1(t), \\ &\dots, \end{aligned} \quad (3)$$

where $L_0 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2 \varphi(t)$ – is a linear differential operator.

At step two, we have to find the approximate solution of the linear homogeneous differential equation

$$L_0 f_{0_{Hom}}(t) = 0 \quad (4)$$

with the help of WKBJ method. Having made replacement $f_{0_{Hom}}(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \psi(\theta) d\theta\right)$, we shall receive the differential equation concerning unknown function of time $\psi(t)$:

$$\varepsilon^2 (\psi'(t) + \psi^2(t)) = -\varphi(t), \quad (5)$$

where:

$$\varepsilon = \frac{1}{\omega_0}.$$

According to a method WKBJ the approximate solution of the equation (5) we shall present as

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k-1} \psi_k(t), \quad (6)$$

where $\psi_k(t)$ – is unknown function of time ($k = 0, 1, \dots$). We have to substitute the expansion (6) into equation (5), equate the coefficients of like powers of ε in the resulting equation

$$\begin{aligned} \psi_0^2(t) &= -\varphi(t), \\ \psi_0'(t) + 2\psi_0(t)\psi_1(t) &= 0, \\ &\dots, \end{aligned}$$

and solve a sequence of equations for each of the unknowns $\psi_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$)

$$\begin{aligned}\psi_{0,1,2}(t) &= \pm i\sqrt{\varphi(t)}, \\ \psi_{1,1,2}(t) &= -\frac{\psi'_0(t)}{2\psi_0(t)} = -\frac{\varphi'(t)}{4g(t)} = -\frac{1}{4}(\ln \varphi(t))', \\ &\dots\end{aligned}$$

At step three of the hybrid method, we use a subset of functions $\psi_k(t)$ ($k = 0, 1, \dots$) of WKBJ-expansion (6), determined at step two, in a WKBJ type expansion, named as hybrid:

$$\psi_H(t) = \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \psi_k(t). \quad (7)$$

Here M – is the order of internal approach; λ_k ($k = 0, \dots, M-1$) represents new “amplitudes” of known functions $\psi_k(t)$ ($k = 0, \dots, M-1$). As a result of substitution of last expression (7) in the equation (5), we shall receive expression for disclosure

$$R_\psi(t, \lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) = \varepsilon^2 \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \psi'_k(t) + \varepsilon^2 \left(\sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \psi_k(t) \right)^2 + \varphi(t),$$

The principle of “optimal” determining of the λ_k ($k = 0, \dots, M-1$) is based on the method of the least squares:

$$V_\psi(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) = \int_{t_0}^T R_\psi^2(t, \lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) dt \rightarrow \min. \quad (8)$$

After definition of coefficients λ_k ($k = 0, \dots, M-1$), the hybrid solution of the linear homogeneous differential equation (4) is possible to write down as

$$\begin{aligned}f_{0_{Hom_H}}(t, \lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) &= \left(C_1(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \psi_{k_1}(\theta) d\theta \right) + \right. \\ &\left. C_2(\lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) \exp \left(\int_{t_0}^t \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \psi_{k_2}(\theta) d\theta \right) \right).\end{aligned} \quad (9)$$

Here C_1, C_2 – are unknown constants, which depends on coefficients λ_k ($k = 0, \dots, M-1$). For determining of these constants we have to use some initial conditions.

Let Wolter's operator with Green's function $h(t, \tau)$ corresponds to the inverse operator L_0^{-1} . The Green's function we shall find after solving a differential equation

$$L_0 h(t, \tau) = 0. \quad (10)$$

with initial conditions

$$h(\tau, \tau) = 0, \quad \left. \frac{\partial h(t, \tau)}{\partial t} \right|_{t=\tau} = 1. \quad (11)$$

Then it is possible to present the solution of the system (3) with the help of Green's functions method. Having applied procedure described in the second and third steps, for the solution of the equation (10) we shall receive expression similar (9), and, using initial conditions (11), we shall receive

$$h_H(t, \tau) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k (\psi_{k_1}(\tau) - \psi_{k_2}(\tau))} \left(\exp \left(\int_{\tau}^t \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \psi_{k_1}(\theta) d\theta \right) - \exp \left(\int_{\tau}^t \sum_{k=0}^{M-1} \lambda_k \psi_{k_2}(\theta) d\theta \right) \right).$$

Here coefficients λ_k ($k = 0, \dots, M-1$), as well as earlier, are determined from a expression (8).

Having Green's function $h(t, \tau)$, at last step four we use a subset of functions $f_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots$) of perturbation-expansion (2), in a perturbation type expansion, named as hybrid too:

$$f_H(t) = f_{0_H}(t, \lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) + \sum_{j=1}^{N-1} \delta_j f_{j_H}(t, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}). \quad (12)$$

Here the N – is the order of external approach; ξ_k ($k = 0, \dots, M-1$), δ_j ($j = 1, \dots, N-1$) represents unknown parameters;

$$\begin{aligned} f_{0_H}(t, \lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) &= f_{0_{Hom_H}}(t, \lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) + \int_{t_0}^t h_H(t, \tau) \gamma(\tau) d\tau \\ f_{1_H}(t, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) &= - \int_{t_0}^t h_H(t, \tau) \left(P(t) f_{0_H}^3(\tau, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) + Q(t) f_{0_H}^3(\tau, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) \right) d\tau, \\ f_{2_H}(t, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) &= - \int_{t_0}^t h_H(t, \tau) f_{1_H}(\tau, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) \times \\ &\quad \times \left(2Q(t) f_{0_H}(\tau, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) + 3Q(t) f_{0_H}^2(\tau, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) \right) d\tau, \\ &\dots \end{aligned}$$

As a result of substitution of last expression (12) in the equation (1), we shall receive expression for disclosure

$$R_f(t, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}) = L_0 f_H(t) + \alpha (P(t) f_H^2(t) + Q(t) f_H^3(t)) =$$

$$= L_0 f_{0_H}(t, \lambda_0, \dots, \lambda_{M-1}) + \sum_{j=1}^{N-1} \delta_j L_0 f_{j_H}(t, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}) + \alpha (P(t) f_H^2(t) + Q(t) f_H^3(t))$$

For “optimal” determining of the ξ_k ($k = 0, \dots, M-1$) and δ_j ($j = 0, \dots, N-1$) we shall use the method of the least squares:

$$V_f(\xi_0, \dots, \xi_{M-1}, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}) = \int_{t_0}^T R_f^2(t, \xi_0, \dots, \xi_{M-1}, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}) dt \rightarrow \min .$$

3. VISUALIZATION RESULTS

Let's define the asymptotic (on the base of the WKBJ method and perturbation method at $M = 2$ and $N = 2$), hybrid (at $M = 2$ and $N = 2$), numerical and linear solutions of the initial equation (1). The numerical realization is presented for the following parameters of the equation: $t_0 = 0$, $T = 40$ (i.e. $t \in [0, 40]$), $\varphi = \frac{t}{T} + \frac{1}{10}$, $\gamma = \frac{1}{2T}$, $\omega_0 = 1$.

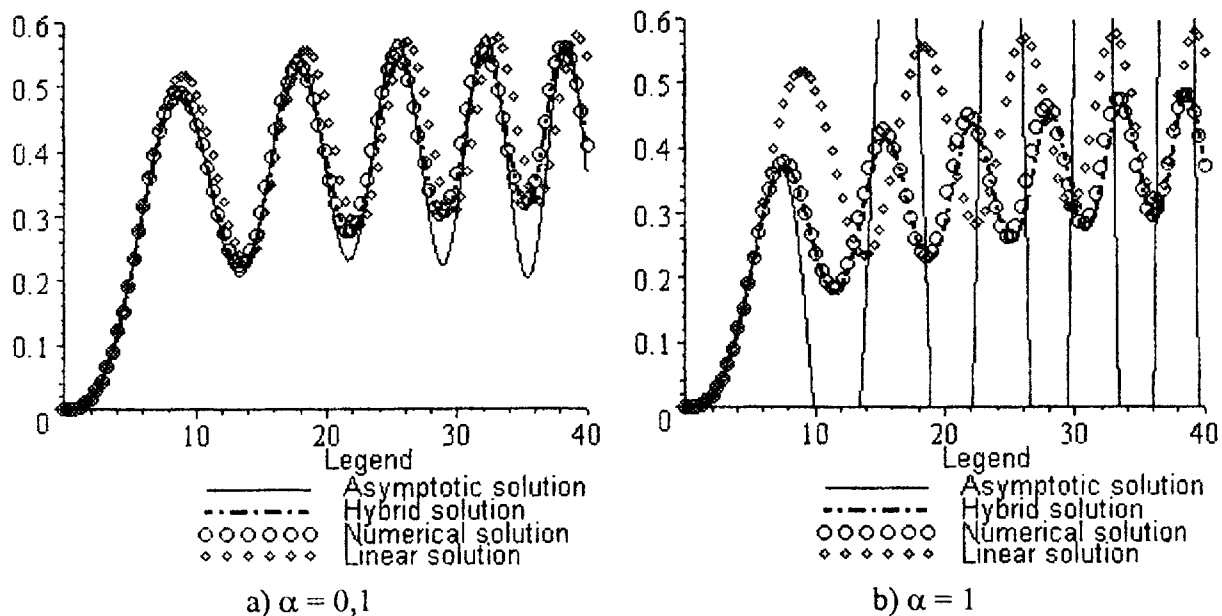


Fig 1. Comparison of hybrid (dash-dot line) solution of the equation (1) with asymptotic (solid line), numerical (circles) and linear (diamonds) solutions for different values of parameter α ; $P = 0$; $Q = 1$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$

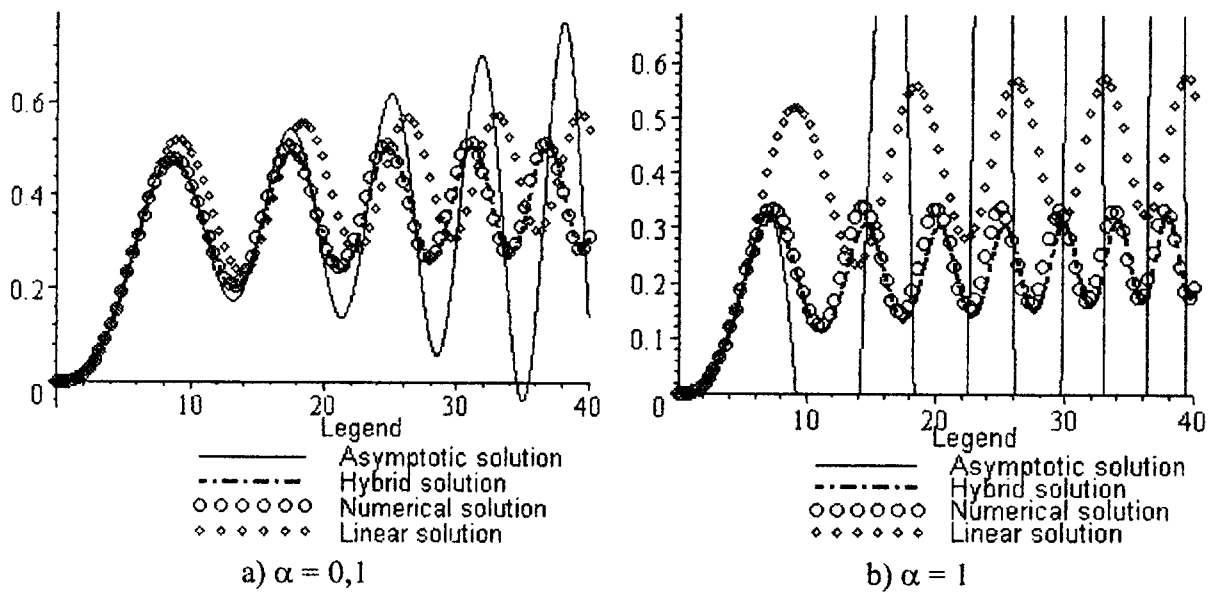


Fig 2. Comparison of hybrid (dash-dot line) solution of the equation (1) with asymptotic (solid line), numerical (circles) and linear (diamonds) solutions for different values of parameter α ; $P = 3Q$; $Q = t/T$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 0$

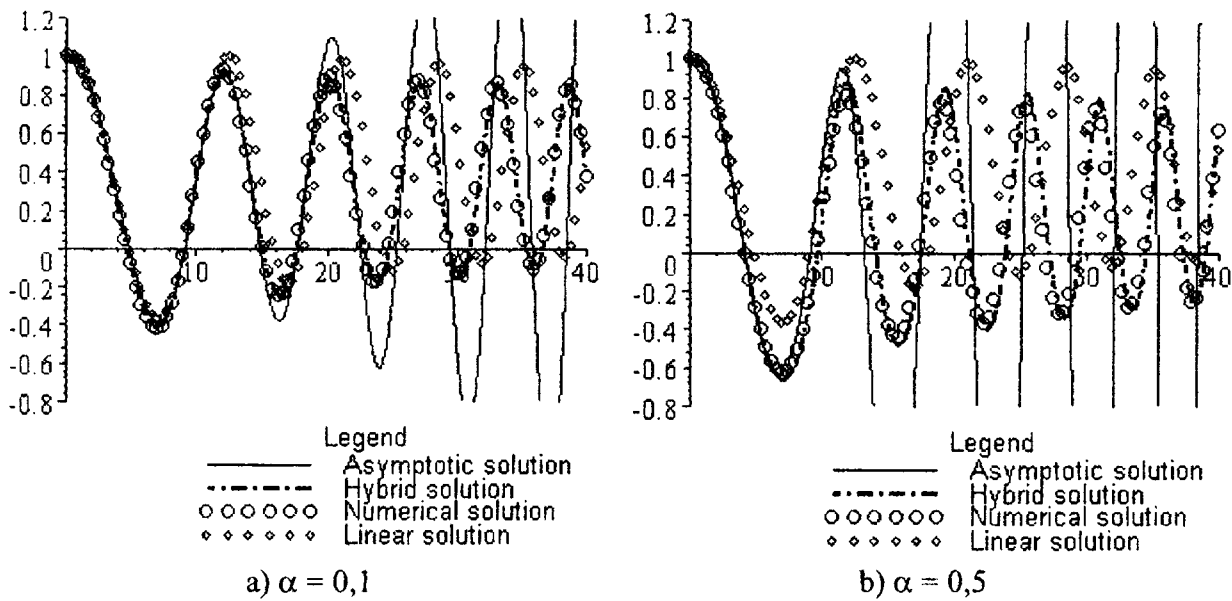


Fig 3. Comparison of hybrid (dash-dot line) solution of the equation (1) with asymptotic (solid line), numerical (circles) and linear (diamonds) solutions for different values of parameter α ; $P = 3Q$; $Q = t/T$; $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$

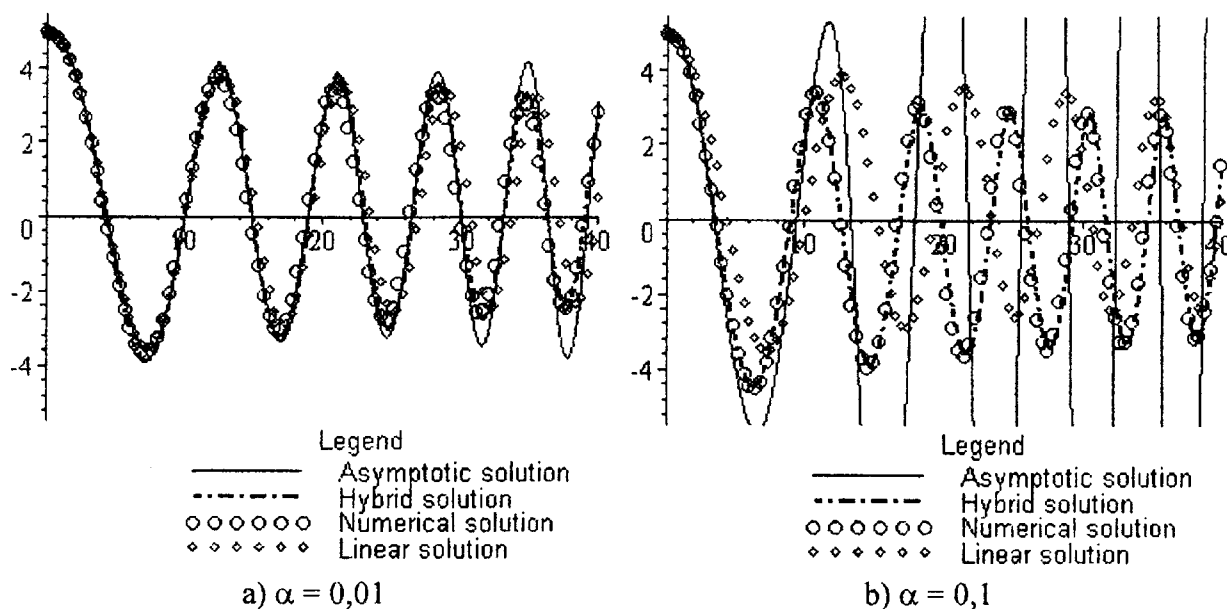


Fig 4. Comparison of hybrid (dash-dot line) solution of the equation (1) with asymptotic (solid line), numerical (circles) and linear (diamonds) solutions for different values of parameter α ; $P = 3Q$; $Q = t/T$; $f(0) = 5$; $f'(0) = 0$

For all the examples, it is shown that the results obtained by the hybrid technique using two terms of expansions are more accurate than the classical asymptotic solutions, on which they are based, and agrees well with numerical solutions for wider range of change of parameter of nonlinearity α

REFERENCES

- [1] Noor A.K., Peters J.M. Reduced basis technique for nonlinear analysis of structures // Proc. of the AIAA-ASME-ASCE-AHS 20th Structures, Structural Dynamics and Materials conference, St. Louis, USA, 1979. – P. 116 – 126.
- [2] Gerasimov T.S., Lysenko V.V. A hybrid approximate solution technique and modal expansion approach with application to forced vibrations of non-homogeneous shells and plates / The 7th Conference “Shells structures, theory and applications” (9-11 october 2002, Gdansk-Jurata, Poland) / Gdansk-Jurata (Poland) – 2002. – P. 85-86.
- [3] Gristchak, V.Z., Dmitrijeva, Ye.M. A hybrid WKB-Galerkin method and its application // Technishe Mechanik – 1995. – №3. – P. 281-294.
- [4] Gristchak, V.Z., Gerasimov T.S., Lysenko V.V. A Hybrid WKB-Galerkin Technique With Applications to Mechanics of Deformable Solid // Applied mechanics in the Americas, proceedings seventh pan American congress of applied mechanics, Pacam VII (2-4 january 2002, Temuco, Chile) / Temuco. – 2002. – vol 9. – P. 465-468.
- [5] Geer J.F., Andersen C.M. A hybrid perturbation-Galerkin technique for differential equations containing a parameter // Applied Mechanics Reviews. – 1989. – №42(11). – P. S69-S77.
- [6] Gristchak V.Z., Kabak V.N. Double Asymptotic Method for Nonlinear Forced Oscillations Problem of Mechanical Systems with Time Dependent Parameters // Technishe Mechanik. – 1996. – № 4. – P. 285-296.

STATECZNOŚĆ POCZĄTKOWA PŁYT CIENKICH W UJĘCIU METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

M. GUMINIAK, R. SYGULSKI

Instytut Konstrukcji Budowlanych, Politechnika Poznańska
Piotrowo 5, 60-965 Poznań

Analizowana jest stateczność początkowa płyt Kirchhoffa. W zaproponowanym podejściu nie wprowadza się sił Kirchhoffa w narożach płyty i zastępczej siły poprzecznej na brzegu płyty. W węźle elementu brzegowego występują dwie niezależne niewiadome. Uwzględnia się również występowanie podpór słupowych w obrębie płyty. Do zapisu całkowych równań brzegowych zastosowano podejście kolokacyjne z punktami kolokacji umieszczonymi na zewnątrz płyty. Pozwoliło to wyeliminować obliczanie całek osobliwych [1], [3]. Zastosowano elementy typu "constans".

1. SFORMUŁOWANIE CAŁKOWE PROBLEMU

Metoda elementów brzegowych ma częste zastosowanie w teorii płyt cienkich oraz płyt średniej grubości. Większość prac dotyczących jej zastosowania w tej dziedzinie opiera się na formułowaniu równań równowagi przy użyciu wielkości znanych z klasycznej teorii płyt, zastępczej siły poprzecznej na brzegu płyty i sił skupionych w narożach. Niniejsze opracowanie prezentuje nieco inne podejście, bez potrzeby posługiwania się wielkościami, które w klasycznej teorii służą do uzgodnienia liczby warunków brzegowych z rzędem równania różniczkowego płyty. Na brzegu płyty rozważa się trzy wielkości statyczne: siłę poprzeczną T_n , moment zginający M_n i moment skręcający M_{ns} oraz trzy wielkości geometryczne: ugięcie w , kąty obrotu φ_n i φ_s [3]. Spośród tych wielkości zgodnie z warunkami brzegowymi analizowanymi w rozdziale 2, tylko dwie należy traktować jako wielkości niewiadome. Brzegowe równania całkowe otrzymuje się wykorzystując twierdzenie o wzajemności prac Betti'ego. Rozważa się dwie płyty: nieskończoną, obciążoną jednostkową siłą skupioną oraz rzeczywistą (rys. 1). W rezultacie otrzymuje się równanie całkowe w postaci:

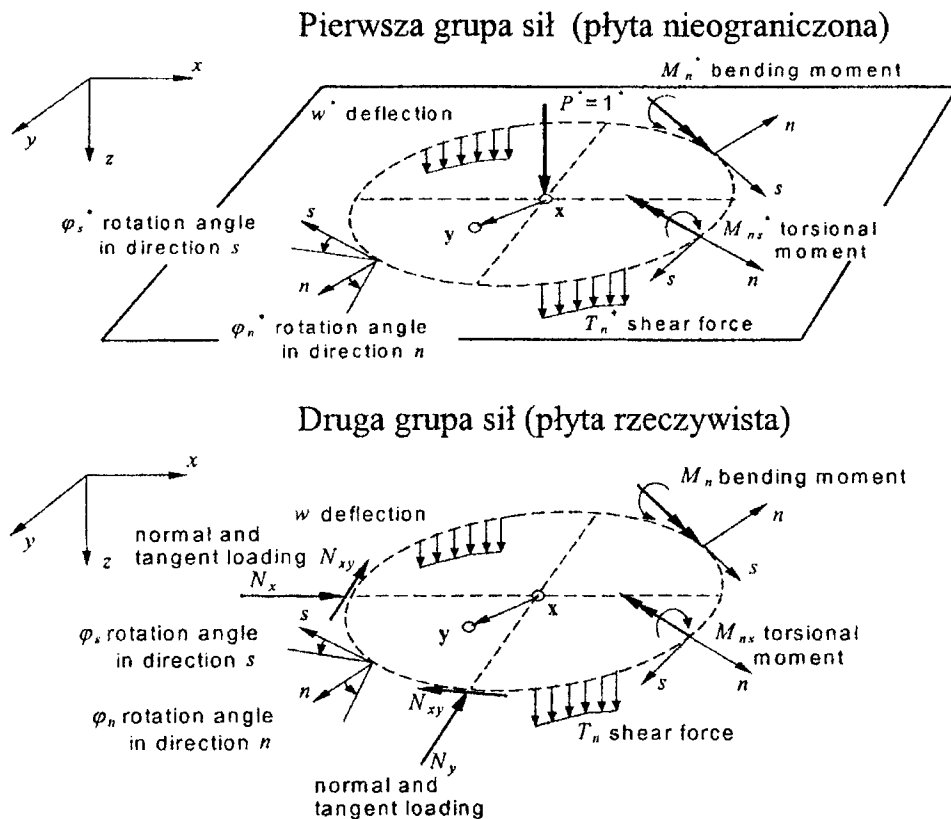
$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma} [T_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot w(\mathbf{y}) - M_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_n(\mathbf{y}) - M_{ns}^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \varphi_s(\mathbf{y})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) = \\ = \int_{\Gamma} [T_n(\mathbf{y}) \cdot w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_n(\mathbf{y}) \cdot \varphi_n^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) - M_{ns}(\mathbf{y}) \cdot \varphi_s^*(\mathbf{y}, \mathbf{x})] \cdot d\Gamma(\mathbf{y}) + \\ + \int_{\Omega} \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot d\Omega(\mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie rozwiązanie podstawowe równania biharmonicznego $\nabla^4 w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ dane

jest jako funkcja Greena $w^*(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \frac{1}{D} \frac{r^2}{8\pi} \ln(r)$ dla płyty cienkiej, izotropowej,

$r = |\mathbf{y} - \mathbf{x}|$, δ jest deltą Diraca oraz $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ jest sztywnością płyty.

Drugie równanie można otrzymać zastępując jednostkową siłą skupioną $P^* = 1^*$ jednostkowym momentem skupionym $M_n^* = 1^*$. Jest to równoważne zróżniczkowaniu pierwszego równania całkowego (1) względem współrzędnej n w punkcie x na brzegu płyty. Na każdym brzegu występują tylko dwie niezależne wielkości. Po dyskretyzacji brzegu płyty elementami typu "constans" $\varphi_s = \frac{\partial w}{\partial s}$ można obliczyć budując iloraz różnicowy przy użyciu trzech sąsiednich węzłów. Dyskusję warunków brzegowych przeprowadzono w pracy [3]. Do opisu krzywizny płyty wprowadzono wewnętrzne punkty kolokacji [2].



Rys. 1. Wielkości występujące w równaniach równowagi

2. BUDOWA UKŁADU RÓWNAŃ RÓWNOWAGI

2.1 SFORMUŁOWANIE PROBLEMU WŁASNEGO

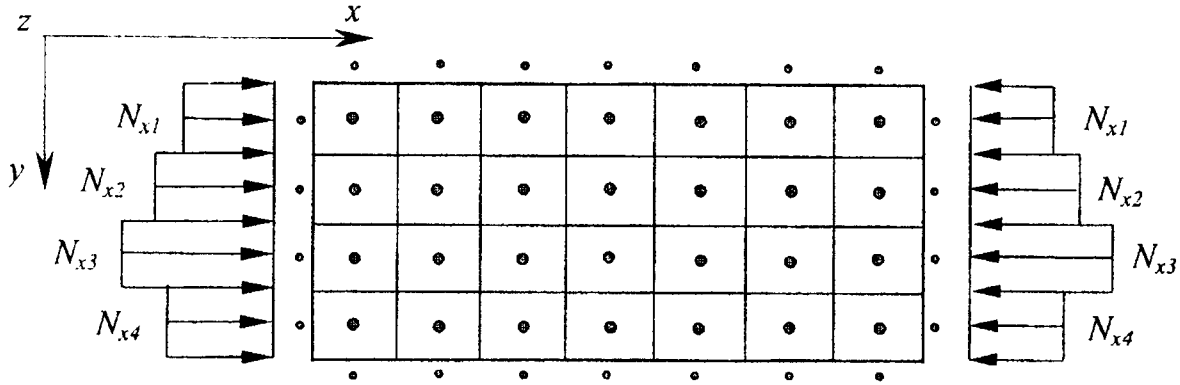
Po dyskretyzacji brzegu płyty przy zastosowaniu elementów brzegowych typu "constans" oraz powierzchni płyty przy zastosowaniu powierzchniowych elementów prostokątnych typu "constans" (rys. 2), układ równań równowagi można zapisać:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}_x & -\lambda \cdot \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 & -\lambda \cdot \mathbf{E} + \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X} \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

gdzie $\lambda = N_{kr}$, $\kappa = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ oraz \mathbf{I} jest macierzą jednostkową. Eliminacja wielkości brzegowych \mathbf{X} z równania (2) prowadzi do standardowego problemu własnego:

$$\{A - \bar{\lambda} \cdot I\} \kappa = 0, \quad (3)$$

gdzie $\bar{\lambda} = 1/\lambda$. Metoda elementów brzegowych umożliwia przeprowadzenie analizy problemu stateczności płyty przy założeniu dowolnego rozkładu obciążenia normalnego. Wprowadzając elementy typu "constans" zakłada się stały rozkład siły normalnej na długości elementu.



Rys. 2. Dyskretyzacja brzegu i powierzchni płyty przy zastosowaniu elementów brzegowych typu "constans" oraz rozkład obciążenia siłą normalną.

2.2 POSTACIE WYBOCZENIA

Po rozwiązaniu problemu własnego należy wewnątrz obszaru płyty obliczyć ugięcie dla znanych już wartości parametru $\lambda = N_{kr}$ oraz odpowiadającego im wektora κ . Równania równowagi buduje się w sposób podobny jak przy formułowaniu problemu własnego. Równanie (4) opisuje problem brzegowy przy znanych krzywiznach w punktach kolokacji wewnątrz obszaru płyty

$$G \cdot X - \lambda \cdot E_1 \cdot \kappa = 0, \quad (4)$$

a równanie (5) pozwala obliczyć ugięcie wewnątrz obszaru płyty

$$I \cdot w + E_2 \cdot X - \lambda \cdot E \cdot \kappa = 0. \quad (5)$$

Eliminacja wielkości brzegowych z równania (5) pozwala obliczyć elementy poszukiwanego wektora przemieszczenia

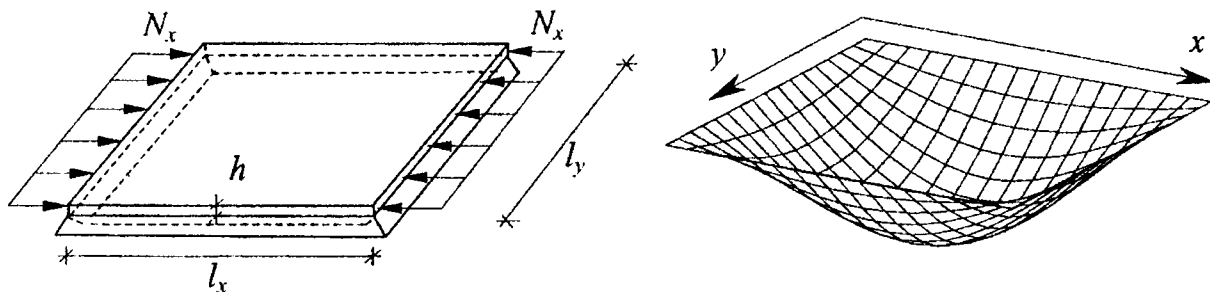
$$w = \lambda \left[E - E_2 \cdot G^{-1} \cdot E_1 \right] \kappa. \quad (6)$$

3. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

Rozważany jest problem stateczności płyty kwadratowej podpartej swobodnie na czterech krawędziach oraz płyty kwadratowej podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi.

Dla każdej z nich poszukuje się obciążenia krytycznego (Rys.3-8). Obliczenia przeprowadza się przyjmując moduł sprężystości płyty $E = 205 \text{ GPa}$, współczynnik Poissona $\nu = 0.3$. Liczba elementów brzegowych: 64, liczba wewnętrznych elementów powierzchniowych: 256, $l_x = l_y = 100 \text{ cm}$, $h = 1 \text{ cm}$.

3.1 PŁYTA PODPARTA SWOBODNIE NA CZTERECH KRAWĘDZIACH PODDANA STAŁEMU OBIĄŻENIU NORMALNEMU

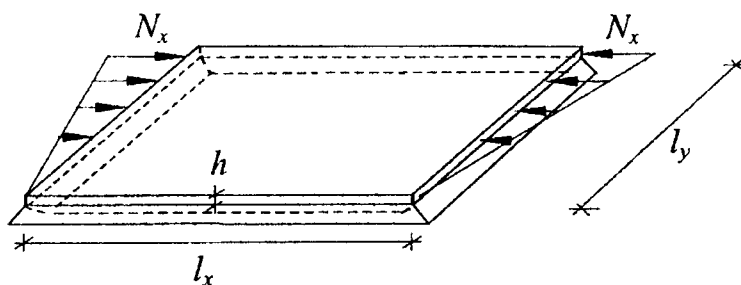


Rys. 3. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach, poddana stałemu obciążeniu normalnemu i jej pierwsza postać wyboczenia

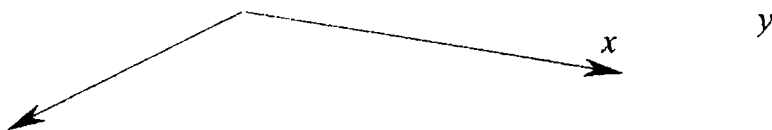
Tabela 1. Wartości sił krytycznych

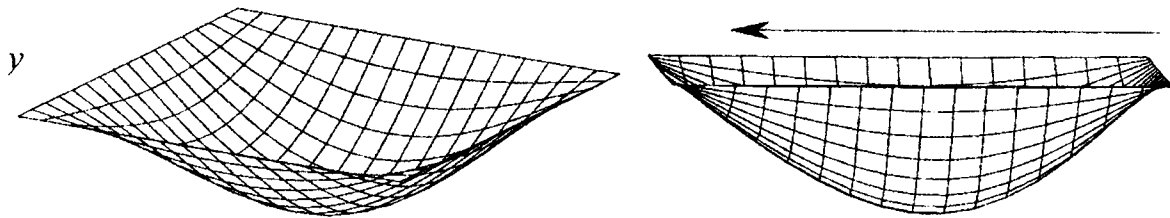
N_{kr} [kN/cm]	Rozwiązanie analityczne	Rozwiązanie MEB
1	7.411	7.438
2	11.580	11.675
3	20.587	20.912

3.2 PŁYTA PODPARTA SWOBODNIE NA CZTERECH KRAWĘDZIACH PODDANA LINIOWO ZMIENNEMU OBIĄŻENIU NORMALNEMU



Rys. 4. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu



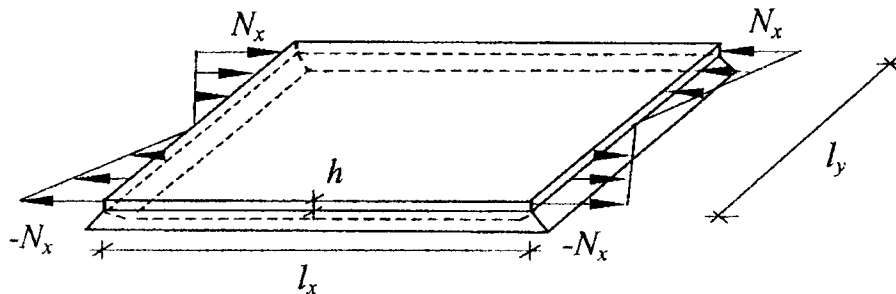


Rys. 5. Pierwsza postać wybożenia płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach poddanej liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

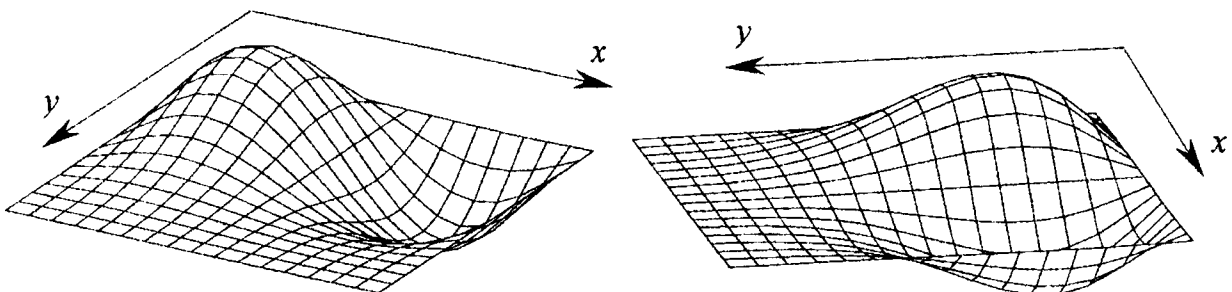
Tabela 2. Wartości sił krytycznych

N_{kr} [kN/cm]	Rozwiązanie MEB
1	14.529
2	21.728
3	36.491

3.3 PŁYTA PODPARTA SWOBODNIE NA CZTERECH KRAWĘDZIACH PODDANA LINIOWO ZMIENNYM OBCIĄŻENIOM NORMALNYM



Rys. 6. Płyta podparta swobodnie na czterech krawędziach poddana liniowo zmiennym obciążeniom normalnym

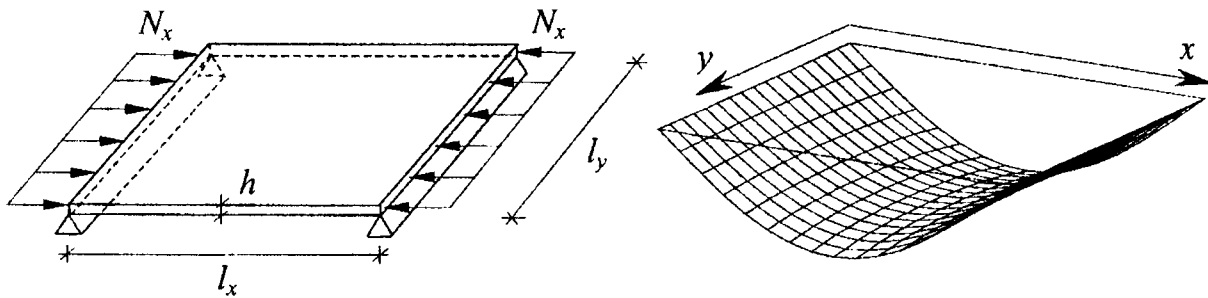


Rys. 7. Pierwsza postać wybożenia płyty podpartej swobodnie na czterech krawędziach poddanej liniowo zmiennym obciążeniom normalnym

Tabela 3. Wartości sił krytycznych

N_{kr} [kN/cm]	Rozwiązanie MEB
1	47.838
2	50.539
3	63.906

3.4 PŁYTA PODPARTA SWOBODNIE NA DWÓCH PRZECIWLEGŁYCH KRAWĘDZIACH Z DWOMA POZOSTAŁYMI KRAWĘDZIAMI SWOBODNYMI PODDANA STAŁEMU OBCIĄŻENIU NORMALNEMU

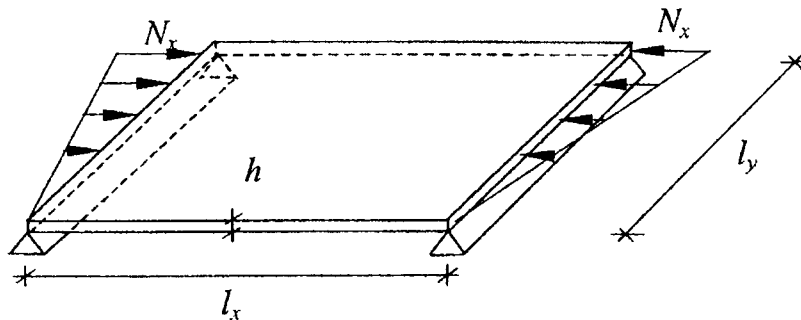


Rys. 8. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddana stałemu obciążeniu normalnemu i jej pierwsza postać wybożenia

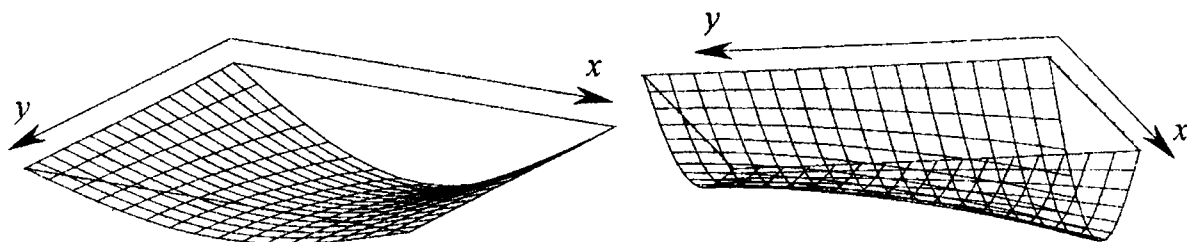
Tabela 4. Wartości sił krytycznych

N_{kr} [kN/cm]	Rozwiązanie MEB
1	1.765
2	4.819
3	7.168

3.5 PŁYTA PODPARTA SWOBODNIE NA DWÓCH PRZECIWLEGŁYCH KRAWĘDZIACH Z DWOMA POZOSTAŁYMI KRAWĘDZIAMI SWOBODNYMI PODDANA LINIOWO ZMIENNEMU OBCIĄŻENIU NORMALNEMU



Rys. 9. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddana liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

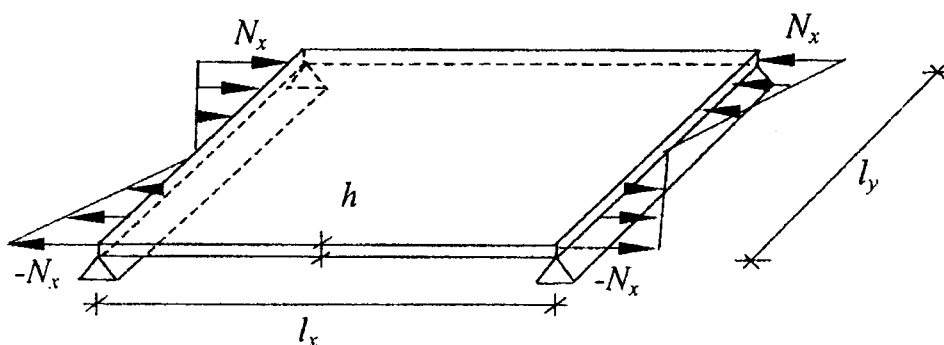


Rys. 10. Pierwsza postać wybożenia płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddanej liniowo zmiennemu obciążeniu normalnemu

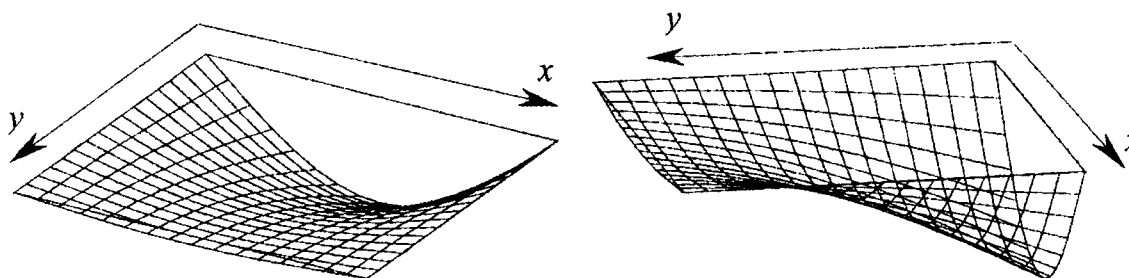
Tabela 5. Wartości sił krytycznych

N_{kr} [kN/cm]	Rozwiązanie MEB
1	3.028
2	10.238
3	15.290

3.6 PŁYTA PODPARTA SWOBODNIE NA DWÓCH PRZECIWLĘGLYCH KRAWĘDZIACH Z DWOMA POZOSTAŁYMI KRAWĘDZIAMI SWOBODNYMI PODDANA LINIOWO ZMIENNYM OBCIĄŻENIOM NORMALNYM



Rys. 11. Płyta podparta swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddana liniowo zmiennym obciążeniom normalnym



Rys. 12. Pierwsza postać wybożenia płyty podpartej swobodnie na dwóch przeciwległych krawędziach z dwoma pozostałymi krawędziami swobodnymi poddanej liniowo zmiennym obciążeniom normalnym

Tabela 6. Wartości sił krytycznych

N_{kr} [kN/cm]	Rozwiązanie MEB
1	4.754
2	12.875
3	25.166

4. WNIOSKI

W pracy zaprezentowano teorię stateczności początkowej w ujęciu metody elementów brzegowych. W prezentowanym sformułowaniu nie stosuje się zastępczych sił poprzecznych na brzegu płyty oraz sił skupionych w narożach płyty. Umieszczenie

punktów kolokacji na zewnątrz obszaru płyty eliminuje obliczanie całek osobliwych przy budowie brzegowych równań całkowych. Zastosowane podejście umożliwia przeprowadzenie analizy problemu stateczności początkowej dla różnych rozkładów obciążenia normalnego.

PODZIĘKOWANIE

Praca została wykonana w ramach grantu BW 11-300/03 finansowanego przez Komitet Badań Naukowych.

LITERATURA

- [1] Hartley, G., A., Development of plate bending elements for frame analysis, *Engineering Analysis with Boundary Element*, No. 17, 1996, pp. 93-104.
- [2] Shi, G., Flexural vibration and buckling analysis of orthotropic plates by the boundary element method, *Int. J. Solids Structures*, No. 12, Vol. 26, 1990, pp. 1351-1370.
- [3] Guminiak, M., Okupniak, B. and Sygulski, R., Analysis of plate bending by boundary element method, *ECCM-2001, 2nd European Conference on Computational Mechanics*, June 26-29, Cracow, Poland, Vol. 1, 2001, pp. 176-177.

INITIAL STABILITY OF KIRCHHOFF PLATES BY THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

The initial stability of a Kirchhoff plate is analysed. The proposed approach avoids the development of Kirchhoff forces at plate corners and an equivalent shear at a plate boundary. In the present formulation two degrees-of-freedom per boundary node are used. The case of column supports is considered, too. The boundary integral equations for a plate in bending are derived using the Betti's theorem. The collocation version of the boundary element method with a constant element is adopted. To avoid the calculation of singular integrals the source points are located slightly outside the plate boundary.

ANALIZA WRAŻLIWOŚCI SIŁ KRYTYCZNYCH PRĘTA CIENKOŚCIENNEGO PRZY ZMIANACH TEMPERATURY NA PODSTAWIE NORMY PN-90/B-03200

P. IWICKI

Katedra Mechaniki Budowli, Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Gdańskiej
G. Narutowicza 11/12, 80-952 GDAŃSK

Wyznaczono pierwszą wariację sił krytycznych cienkościennego pręta stalowego o przekroju bisymetrycznym otwartym przy wariacji temperatury przekroju poprzecznego. Analizę oparto na klasycznej teorii prętów cienkościennych [1]. Zmiany właściwości stali w zależności od temperatury przyjęto zgodnie z normą [2]. W przykładzie numerycznym wyznaczono aproksymację zmian siły krytycznej wybożenia skrętnego pręta o przekroju dwuteowym przy zmianach temperatury. Wyznaczono linię wpływową zmian siły krytycznej pręta w zależności od punktowych zmian temperatury.

1. WSTĘP

W obliczeniach konstrukcji narażonej na działanie wysokich temperatur poszukuje się temperatury krytycznej, to znaczy takiej, przy której warunek nośności przekroju poprzecznego pręta zostanie przekroczony oraz czasu krytycznego, w którym ogarnięta pożarem konstrukcja lub jej element ogrzeje się do temperatury krytycznej. Czas ten powinien być wystarczający do ewakuacji obiektu i definiuje tzw. odporność ogniowa obiektu lub danego elementu konstrukcyjnego [3]. Z analizy wrażliwości nośności osiowo ściskanego pręta podanej w [4] wynika, że względna wariacja współczynnika nośności pręta ρ dana jest wzorem:

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta N}{N} - \frac{\delta N_{Rc}}{N_{Rc}}(1 - \kappa) - \frac{\delta N_{cr}}{N_{cr}}\kappa \quad (1)$$

gdzie:

$$\kappa = \left(1 + \bar{\lambda}^{-2n}\right)^{-1},$$

$\bar{\lambda}$ - smukłość względna pręta,

n - uogólniony parametr imperfekcji,

N - siła normalna w danym przekroju poprzecznym,

N_{Rc} - nośność obliczeniową przekroju pręta,

N_{cr} - siła krytyczna pręta,

$\delta(\dots)$ - pierwsza wariacja (...).

Jak wynika ze wzoru (1) wariacja współczynnika nośności pręta zależy od wariacji siły normalnej w przekroju pręta, wariacji obliczeniowej nośności przekroju oraz wariacji siły krytycznej. Przedmiotem niniejszej pracy jest wyznaczenie pierwszej wariacji sił krytycznych pręta pod wpływem wariacji temperatury.

2. WŁAŚCIWOŚCI STALI W ZALEŻNOŚCI OD TEMPERATURY EKSPLOATACYJNEJ KONSTRUKCJI NA PODSTAWIE PN- 90/B-03200

Zgodnie z zaleceniami normy [2] przy obliczaniu konstrukcji stalowych eksploatowanych w temperaturze $70\text{ }^{\circ}\text{C} \leq T \leq 600\text{ }^{\circ}\text{C}$ należy przyjmować zredukowaną wytrzymałość obliczeniową f_{dT} , zredukowany początkowy współczynnik sprężystości E_T oraz zredukowany współczynnik niestateczności φ_T wg wzorów:

$$E_T = E(0.987 + 0.300 \times 10^{-3}T - 1.857 \times 10^{-6}T^2) \quad (2)$$

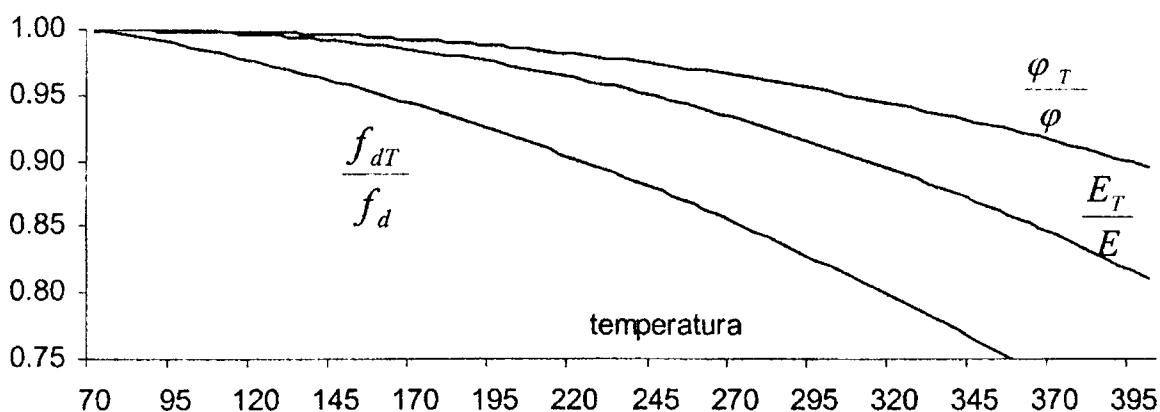
$$f_{dT} = f_d(1.022 - 0.197 \times 10^{-3}T - 1.59 \times 10^{-6}T^2) \quad (3)$$

$$\varphi_T = \left(1 + \left(\frac{1}{\varphi} - 1\right) \frac{E}{E_T}\right)^{-1} \quad (4)$$

gdzie:

E , f_d oraz φ - charakterystyki pręta w temperaturze pokojowej.

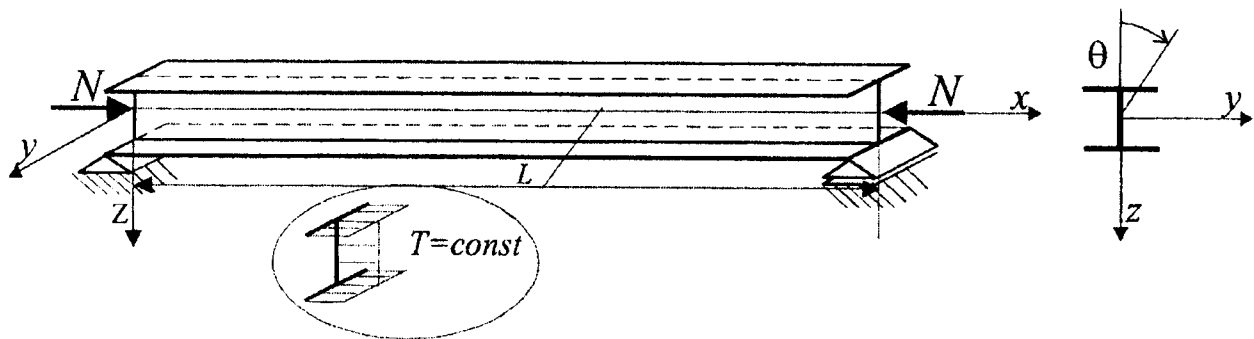
Na rys. 1. przedstawiono wykresy powyższych zależności odnosząc poszczególne wielkości do ich odpowiedników w temperaturze pokojowej. Ponieważ norma [2] nie precyzuje zależności współczynnika Poissona ν od temperatury przyjęto, że współczynnik ten nie zależy od zmian temperatury. Zależność modułu odkształcenia postaciowego G od temperatury można wyrazić wzorem analogicznym do (2).



Rys. 1. Wytrzymałość obliczeniowa stali f_{dT} , moduł Younga E_T oraz współczynnik niestateczności φ_T w podwyższonych temperaturach w stosunku do ich wartości przy temperaturze pokojowej wg normy PN_90/B_03200

3. PIERWSZA WARIACJA SIŁY KRYTYCZNEJ PRĘTA PRZY WARIACJI TEMPERATURY

Rozpatrzmy pręt osiowo ściskany siłą N poddany działaniu podwyższonej temperatury T . Załóżmy, że pręt jest idealnie prosty a temperatura w przekroju poprzecznym pręta jest stała (rys. 2).



Rys. 2. Pręt cienkościenny poddany działaniu podwyższonej temperatury

Obliczanie sił krytycznych pręta w podwyższonej temperaturze może być przeprowadzone wg klasycznych wzorów Eulera po odpowiedniej modyfikacji charakterystyk materiałowych pręta [2], [5], [6]. Dla pręta bisymetrycznego siła krytyczna może odpowiadać albo jednej z dwóch postaci wyboczenia giętnego względem osi symetrii przekroju albo sile krytycznej wyboczenia skrętnego. Jeżeli decydujący jest ostatni przypadek to wariację siły krytycznej δN_{cr}^s wyznaczamy w zależności od wariacji $\delta s(x)$ według wzoru [4]:

$$\delta N_{cr}^s = \frac{\int_0^l \left[(EJ_{\omega})_{,s} \Theta'^2 + (GJ_d)_{,s} \Theta'^2 - N_{cr}^s (r_0^2)_{,s} \Theta'^2 \right] \delta s dx}{\int_0^l r_0^2 \Theta'^2 dx} \quad (5)$$

gdzie:

EJ_{ω} - sztywnością skręcania skrępowanego pręta,

GJ_d - sztywność czystego skręcania,

r_0 - promieniem bezwładności przekroju pręta względem jego osi

$\Theta(x)$ - kąt skręcenia pręta odpowiadający postaci wyboczenia skrętnego,

$(...)'$ - pochodna (...) względem współrzędnej x .

$(...)'_{,s}$ - pochodną cząstkową (...) względem zmiennej projektowej s .

W podobny sposób określić można wariację siły krytycznej wyboczenia giętnego [4]:

$$\delta N_{cr}^g = \frac{\int_0^l \left[(EJ)_{,s} v'^2 - N_{cr}^g v'^2 \right] \delta s dx}{\int_0^l v'^2 dx} \quad (6)$$

gdzie:

EJ - sztywność giętna pręta,

v - przemieszczenie odpowiadające rozważanej postaci wyboczenia giętnego.

Uwzględniając zależność modułu Younga i modułu odkształcenia postaciowego od temperatury (2) możemy wyznaczyć pierwszą wariację sił krytycznych pręta przy wariacji temperatury:

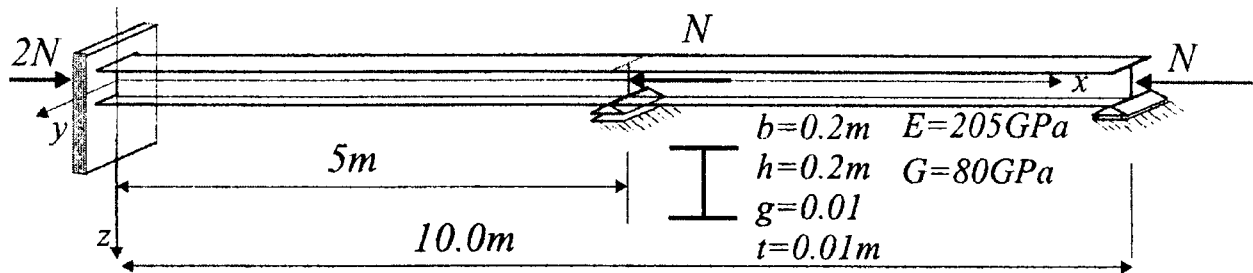
$$\delta N_{cr} = \frac{\int_0^l \left[(E)_{,T} J_{\omega} \Theta'^2 + (G)_{,T} J_d \Theta'^2 \right] \delta T dx}{\int_0^l r_0^2 \Theta'^2 dx} = \int_0^l \Lambda_{NcrT}(x) \delta T dx. \quad (7)$$

$$\delta N_{cr}^g = \frac{\int_0^l \left[(E)_{,T} J_v v'^2 \right] \delta T dx}{\int_0^l v'^2 dx} = \int_0^l \Lambda_{NcrT}(x) \delta T dx \quad (8)$$

Funkcja podcałkowa $\Lambda_{NcrT}(x)$ opisuje wpływ jednostkowych wariacji temperatury wzdłuż długości pręta na zmianę siły krytycznej.

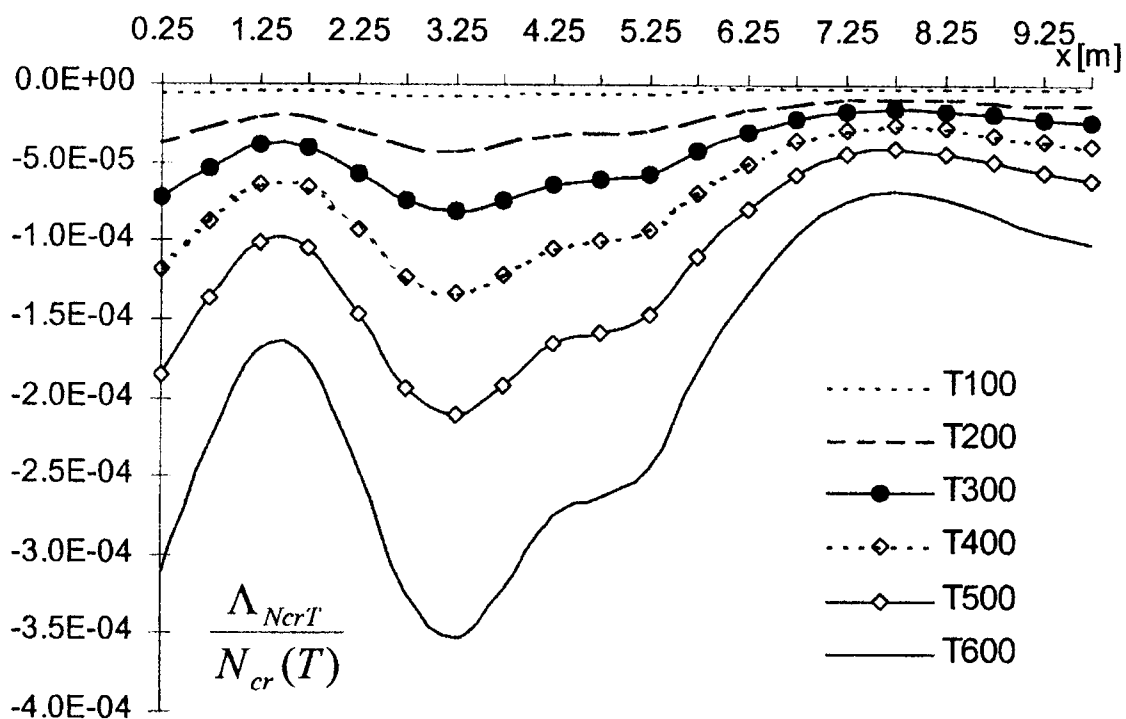
4. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Rozpatrzmy osiowo ściskany pręt o przekroju dwuteowym (rys.3).



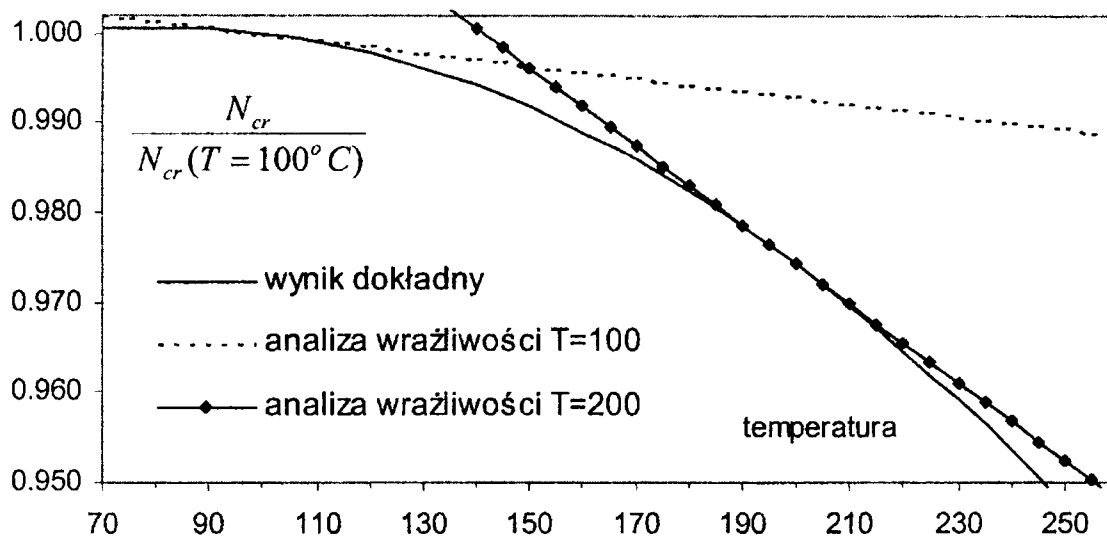
Rys. 3. Pręt o przekroju dwuteowym

Zakładając, że pręt znajduje się w danej początkowej temperaturze jednakowej dla całej jego długości wyznaczono względną funkcję podcałkową wrażliwości $\Lambda_{NcrT}(x)/N_{cr}(T)$, która przedstawia wpływ wariacji temperatury wzdłuż długości pręta na względną wariację siły krytycznej (rys.4). Maksymalne rzędne dla $3 < x < 5m$ wskazują miejsca największej wrażliwości siły krytycznej na wzrost temperatury. Dla większych temperatur bezwzględne wartości rzędnych funkcji podcałkowych są znacznie większe niż dla niższych temperatur. Na przykład przy temperaturze początkowej $400^\circ C$ rzędne funkcji podcałkowej są około 20 razy większe niż dla temperatury $100^\circ C$. Świadczy to o wzrastaniu niekorzystnego wpływu temperatury na siłę krytyczną. Kształt poszczególnych linii jest podobny, czyli wnioski z przebiegu funkcji podcałkowych wrażliwości dla danej temperatury początkowej są również ważne w innych temperaturach.



Rys. 4. Linie wpływu względnej wariacji siły krytycznej wyboczenia skrętnego pręta przy wariacji temperatury w przekroju pręta dla różnych temperatur początkowych

Zakładając, że wzdłuż długości całego pręta występuje jednakowa wariacja temperatury, po scałkowaniu funkcji podcałkowej wrażliwości można wyznaczyć liniową aproksymację zależności względnej siły krytycznej wyboczenia skrętnego pręta od temperatury (rys.5). Takie aproksymacje wyznaczono dla temperatury początkowej 100°C i 200 °C. Za wartość odniesienia w obu przypadkach przyjęto siłę krytyczną wyboczenia skrętnego pręta w temperaturze 100 °C, która wynosi $N_{cr} = 2150.8$ kN.



Rys. 5. Zależność względnej siły krytycznej wyboczenia skrętnego pręta od temperatury

5. WNIOSKI

Analiza wrażliwości pozwala na wyznaczenie przybliżonych zmian siły krytycznej wyboczenia pręta cienkościennego przy zmianach temperatury bez potrzeby powtarzania całej analizy stateczności dla zmienionych danych układu.

Funkcja podcałkowa wrażliwości zawiera informację o tych przekrojach pręta, w których zmiany temperatury mają największy wpływ na zmiany siły krytycznej. Może to być wykorzystywane przy projektowaniu odpowiedniej grubości izolacji termicznej lub przy projektowaniu różnych stref odporności ogniowej konstrukcji.

W analizowanym przykładzie numerycznym kształt funkcji wyznaczonej dla różnych temperatur był podobny a co za tym idzie wnioski wynikające z analizy tego wykresu dla jednej temperatury są prawdziwe dla szerszego zakresu temperatur.

LITERATURA

- [1] Vlasov V. Z., Thin-walled elastic beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Israel, 1961.
- [2] PN-90/B-03200 - Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- [3] Żmuda J., Podstawy projektowania konstrukcji metalowych, Arkady, Warszawa, 1999, s.118-124.
- [4] Szymczak C., Iwicki P., Analiza wrażliwości nośności osiowo ściskanych prętów na podstawie normy PN-90/B-03200, Inżynieria i Budownictwo, 8, 1996, s.452-455.
- [5] Milke J.A., Analytical methods to evaluate fire resistance of structural members, Journal of structural engineering, Vol.125, No.10, October, 1999, s.1179-1187.
- [6] Wee-Siang Toh, Kang-Hai Tan, Tat-Ching Fung, Rankine approach for steel columns in fire: numerical studies, Journal of Constructional Steel Research, 59 (2003) s.315–334.

SENSITIVITY ANALYSIS OF CRITICAL BUCKLING LOAD OF THIN-WALLED COLUMNS DUE TO TEMPERATURE CHANGE ACCORDING TO POLISH CODE PN-90/B-03200

The first order variation of critical load of thin-walled columns with bisymmetric open cross-section due to variations of the cross section temperature is derived. The considerations are based on the classical linear theory of thin-walled beams with non-deformable cross-section. Function describing steel properties in different temperatures is assumed according the Polish Code PN-90/B-03200. In the numerical example dealing with I-column the functions describing the influence of the temperature variation in the cross-section on the critical torsional load are found. The linear approximation of the exact relation of the critical torsional buckling load due to variation of the cross section temperature is determined.

ON A DYNAMICAL STABILITY OF THIN PERIODIC PLATES

J. JĘDRYSIAK

Department of Structural Mechanics, Technical University of Łódź
al. Politechniki 6, 93-590 Łódź, Poland

In this contribution a dynamical stability of thin periodic plates is considered. For this purpose *the tolerance averaging*, developed for periodic composites and structures in the book [8], is applied to the known Kirchhoff-type plate equation. This method leads to averaged models taking into account *the length-scale effect* on the overall plate behaviour. It was presented for thin periodic plates in [3]. Here, applications to a dynamical stability of those plates will be shown.

1. INTRODUCTION

The main object of this paper is a thin plate whose structure is periodic in planes parallel to the plate midplane. Plates of this kind are composed of many identical small elements, (Fig. 1), treated as thin plates with spans l_1 , l_2 , and called *periodicity cells*.

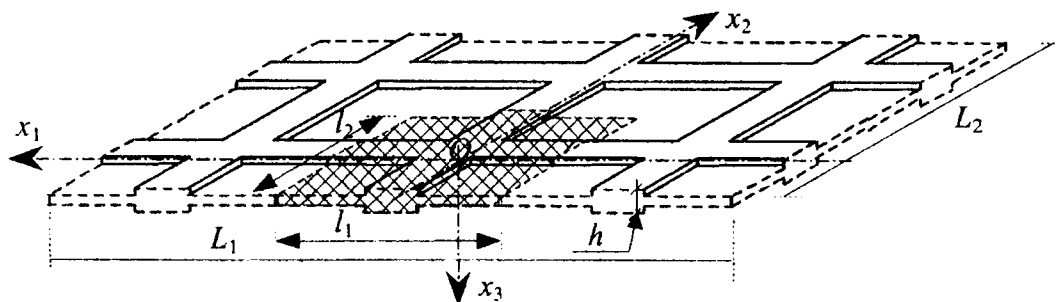


Fig 1. Fragment of thin plate with periodic structure

Analysis of the effect of the periodicity cell size, called *the length-scale effect*, on the overall plate behaviour is very interesting. But in general, the exact equations of the plate theory are too complicated to apply to investigations of engineering problems, because they comprise highly oscillating, non-continuous, periodic coefficients. Thus, many simplified models were proposed. In these averaged models periodic plates are represented by certain homogeneous plate structures with constant homogenised rigidities and averaged mass densities (cf. Caillerie [2], Kohn and Vogelius [5]). Unfortunately, in the most of averaged models the length-scale effect is neglected.

To investigate this effect on the overall plate behaviour the new model of periodic Kirchhoff-type plates was proposed by Jędrysiak [3], where the governing equations of *the length-scale models* were derived. These models are based on general formulations of the tolerance averaging method developed for periodic composites and structures by Woźniak and Wierzbicki in the book [8]. In the aforementioned papers it was presented that the length-scale effect plays a crucial role in dynamic processes and also in certain stationary problems, e. g. in a plate buckling. Similar problems of periodic wavy-plates were analysed by Michalak [6].

The main aim of the contribution is to show that the length-scale effect can not be neglected in a dynamic stability of thin periodic plates. In order to illustrate this thesis a periodic plate band with span L along x_1 -axis will be investigated. A similar problem

for periodic Reissner-type plates was presented by Baron [1].

2. FOUNDATIONS

2.1. PRELIMINARIES

Introduce the orthogonal Cartesian co-ordinate system in the physical space denoted by $Ox_1x_2x_3$. Let indices $\alpha, \beta, \dots (i, j, \dots)$ run over 1, 2 (1, 2, 3); A, B, \dots run over $1, \dots, N$. Summation convention holds for all aforementioned indices. Setting $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2)$ and $z \equiv x_3$ we assume that the region $\Omega \equiv \{(\mathbf{x}, z): -h(\mathbf{x})/2 < z < h(\mathbf{x})/2, \mathbf{x} \in \Pi\}$ is occupied by the undeformed plate, where Π is the midplane and $h(\mathbf{x})$ is the plate thickness at the point $\mathbf{x} \in \Pi$. Denote by $\Delta \equiv (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2)$ the periodicity cell on the $0x_1x_2$ plane, where l_1, l_2 are the cell length dimensions along x_1 -, x_2 -axis. Define by $l \equiv \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$ the parameter describing the size of the cell, which is assumed to be sufficiently small compared to the minimum characteristic length dimension of Π and sufficiently large compared to the maximum plate thickness ($h_{\max} \ll l \ll L_\Pi$). Thus, this parameter is called *the mesostructure parameter*. We shall assume that h is a Δ -periodic function in \mathbf{x} and all material and inertial properties of the plate, e. g. a mass density $\rho = \rho(\mathbf{x}, z)$ and elastic moduli $a_{ijkl} = a_{ijkl}(\mathbf{x}, z)$, are also Δ -periodic functions in \mathbf{x} and even functions in z , cf. [3]. Periodic plates with the structure will be called *mesoperiodic plates*. Moreover, let w be a plate deflection and p^-, p^+ be loadings in the z -axis direction on the upper and lower plate boundaries. The non-zero terms of the elastic moduli tensor are denoted by $a_{\alpha\beta\gamma\delta}, a_{\alpha\beta 333}, a_{33333}$; denote also $c_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv a_{\alpha\beta\gamma\delta} - a_{\alpha\beta 333} a_{\gamma\delta 333} (a_{33333})^{-1}$. The considerations are based on the well-known Kirchhoff plate theory assumptions. Introduce the following Δ -periodic functions of the mean plate properties - mass density, bending stiffnesses

$$\mu \equiv \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz, \quad d_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \int_{-h/2}^{h/2} z^2 c_{\alpha\beta\gamma\delta} dz.$$

The known modelling procedure of Kirchhoff plate theory for mesoperiodic plates leads to the well known fourth order differential equation with highly oscillating Δ -periodic coefficients, which takes the following form

$$(d_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\gamma\delta})_{,\alpha\beta} - N_{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} + \mu \ddot{w} = p, \quad (1)$$

where $p \equiv p^+ + p^-$; $N_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) are constant forces in the plate midplane.

2.2. INTRODUCTORY CONCEPTS

In order to take into account the length-scale effect we will adapt *the tolerance averaging method* developed by Woźniak and Wierzbicki [8] for periodic composites, to derive averaged governing equations of periodic plates. In the framework of the method we use some additional concepts as e. g. an averaging operator, a tolerance system, a slowly varying function, a periodic-like function and an oscillating function, which are detailly explained in the book [8].

Define by $\Delta(\mathbf{x}) = \Delta + \mathbf{x}$ a periodicity cell at $\mathbf{x} \in \Pi_\Delta$, $\Pi_\Delta = \{\mathbf{x}: \mathbf{x} \in \Pi, \Delta(\mathbf{x}) \subset \Pi\}$. In the analysis of periodic structures we use the known *averaging operator* (cf. [8, 3]):

$$\langle \varphi \rangle (\mathbf{x}) \equiv (l_1 l_2)^{-1} \int_{\Delta(\mathbf{x})} \varphi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Pi_{\Delta}, \quad (2)$$

for an arbitrary integrable function φ defined on Π . If φ is a periodic function in \mathbf{x} its averaged value obtained from (2) is constant. We shall tacitly assume that all functions under consideration satisfy required regularity conditions.

Now, some introductory concepts will be reminded. Denote by T a certain mapping (called a tolerance system), which assigns to every quantity under consideration what is called tolerance parameter (cf. [8]). The continuous function Ψ , defined on $\overline{\Pi}$, will be called a *slowly varying function*, if for every $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \overline{\Pi}$ such that $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \leq l$ it holds the following condition $\Psi(\mathbf{x}_1) \cong \Psi(\mathbf{x}_2)$. We shall write $\Psi \in SV(T)$ if Ψ and all its derivatives are slowly varying functions. Let for every $\mathbf{x} \in \overline{\Pi}$ a symbol $f_{\mathbf{x}}$ stand for a certain continuous Δ -periodic function. The continuous function f will be called a *periodic-like function* if for every $\mathbf{y} \in \overline{\Pi}$ such that $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq l$ it holds the condition $f(\mathbf{y}) \cong f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$. If derivatives of the function f hold similar conditions we will write $f \in PL(T)$. It can be shown ([8]) that averaging (2) of periodic-like function is a slowly varying function. A periodic-like function f will be called an *oscillating function* if it holds the condition $\langle \mu f \rangle (\mathbf{x}) \cong 0$ for every $\mathbf{x} \in \Pi_{\Delta}$, where μ is a positive value Δ -periodic function. The set of oscillating periodic-like functions with the weight μ is denoted by $PL^{\mu}(T)$.

The modelling procedure of the tolerance averaging is based on lemmas and assertions, which were formulated and proved in the book [8] using the above concepts.

2.3. MODELLING PROCEDURE

In the modelling procedure we formulate the additional assumption.

The Conformability Assumption (CA). It is assumed that the deflection $w(\cdot, t)$ of the plate midplane under consideration is periodic-like function, $w(\cdot, t) \in PL(T)$, i. e. the deflection is conformable to a periodic plate structure. This condition may be violated only near the boundary of a plate.

The modelling procedure of the tolerance averaging can be divided into four steps.

1° The averaging part of deflection is defined by setting $W \equiv \langle \mu \rangle^{-1} \langle \mu w \rangle$; where μ is the mass density of the plate. Because of $w \in PL(T)$ we have that $W \in SV(T)$. Thus, the decomposition is obtained $w = W + v$, where $v \in PL^{\mu}(T)$ is called *the deflection disturbance*, and holds the condition $\langle \mu v \rangle = 0$. The averaged part of deflection W will be called a *macrodeflection*.

2° We formulate *the periodic problem* (cf. [8, 3]) on $\Delta(\mathbf{x})$ for $v_{\mathbf{x}}$ being a Δ -periodic approximation of v on a cell $\Delta(\mathbf{x})$ at $\mathbf{x} \in \Pi_{\Delta}$. Function $v_{\mathbf{x}}$ holds the condition $\langle \mu v_{\mathbf{x}} \rangle = 0$.

3° It is formulated the Galerkin approximation of the above periodic problem by introducing the system of N linear-independent Δ -periodic functions g^A , $A=1, \dots, N$, such that $\langle \mu g^A \rangle = 0$, and by setting $v_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}, t) = g^A(\mathbf{y}) Q^A(\mathbf{x}, t)$, where $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Pi_{\Delta}$; $Q^A \in SV(T)$ are new kinematic unknowns. Functions g^A are called *mode-shape functions* and have to approximate the expected form of the oscillating part of free vibration modes of the Δ -periodic structure of the plate, cf. [8, 3]. Moreover, values of these functions are assumed to satisfy conditions $l^{-1} g^A(\cdot), g_{,\alpha}^A(\cdot), l g_{,\alpha\beta}^A(\cdot) \in O(l)$.

4° After some manipulations we arrive at the equation for the macrodeflection W and equations for kinematic unknowns Q^A .

These equations are derived without the assumption introduced in [3] that in terms $N_{\alpha\beta}w_{,\alpha\beta}$ the deflection w can be replaced by the macrodeflection W .

3. GOVERNING EQUATIONS

Applying the above procedure, under the following denotations:

$$D_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, \quad D_{\alpha\beta}^A \equiv \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^A \rangle, \quad D^{AB} \equiv \langle d_{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta}^A g_{,\gamma\delta}^B \rangle, \quad h_{\alpha\beta}^{AB} \equiv l^{-2} \langle g_{,\alpha}^A g_{,\beta}^B \rangle, \\ m \equiv \langle \mu \rangle, \quad m^{AB} \equiv l^{-4} \langle \mu g^A g^B \rangle, \quad P \equiv \langle p \rangle, \quad P^A \equiv l^{-2} \langle p g^A \rangle,$$

we arrive at *the length-scale model* equations:

$$(D_{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\gamma\delta} + D_{\alpha\beta}^B Q^B)_{,\alpha\beta} - N_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} + m \ddot{W} = P, \\ l^4 m^{AB} \ddot{Q}^B + D_{\alpha\beta}^A W_{,\alpha\beta} + D^{AB} Q^B + N_{\alpha\beta} l^2 h_{\alpha\beta}^{AB} Q^B = l^2 P^A, \quad (3)$$

where $N_{\alpha\beta}$ is in-plane stress tensor; some terms depend explicitly on the parameter l .

Equations (3) with averaged constant coefficients, make it possible to analyse the length-scale effect in dynamic processes and also in a stability of periodic plates. The basic unknowns $W, Q^A, A=1, \dots, N$, are slowly varying functions. For a rectangular plate with midplane $\Pi=(0, L_1) \times (0, L_2)$ two boundary conditions should be defined on the edges $x_1=0, L_1$ and $x_2=0, L_2$ only for *the macrodeflection* W . Hence, functions Q^A are called *internal variables*. To derive equations (3) we have previously to obtain the mode-shape functions $g^A, A=1, \dots, N$, for every periodic plate under consideration. In the most cases $N=1$ and $g=g^1$ is an approximate solution to the eigenvalue problem on the cell.

At the end of this section we show that a model without the length-scale effect is a special case of the length-scale model. Neglecting terms with the parameter l in (3) and substituting (3)₂ into (3)₁ we obtain

$$[D_{\alpha\beta\gamma\delta} - D_{\gamma\delta}^A D_{\alpha\beta}^B (D^{AB})^{-1}] W_{,\alpha\beta\gamma\delta} - N_{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} + m \ddot{W} = P. \quad (4)$$

The above equation describes the averaged model called *the homogenised model*.

4. ANALYSIS OF DYNAMIC STABILITY

Let us consider a simply supported plate band with span L along x_1 -axis. It is assumed that the plate is made of an isotropic piece-wise periodically homogeneous material along x_1 - and x_2 -axis and has the periodic thickness h along x_1 - and x_2 -axis. Moreover, assume that the plate mass density ρ and Poisson's ratio ν are constant, but Young's modulus E is periodically variable; loadings p are neglected and the plate band is compressed along x_1 - and x_2 -axis, hence $N_{12}=N_{21}=0$. Let us consider a case with only one mode-shape function g (i. e. $A=N=1$) as the approximate form of solution to the certain eigenvalue problem posed on the cell: $g=g^1=l^2[\cos(2\pi x_1/l_1)\cos(2\pi x_2/l_2)+c]$, where the constant c is derived from the condition $\langle \mu g \rangle = 0$. Moreover, for the assumed symmetric cell and symmetric form of mode-shape function, we have $D_{12}^1 = D_{21}^1 = 0$. Denote $Q=Q^1, x=x_1, h_1 \equiv h_{11}^1, h_2 \equiv h_{22}^1$ and $B = \langle E h^3 / 12(1-\nu^2) \rangle$, and also $N_1 \equiv -N_{11}, N_2 \equiv -N_{22}$. Assume that N_1 is time-dependent function and N_2 is independent of time.

For the plate band under consideration after some manipulations from equations

(3) we obtain the following equation for the macrodeflection W

$$l^4 m^{11} [m \ddot{W} + B \ddot{W}_{,1111} + (N_1 W_{,11})] + (D^{11} - N_1 l^2 h_1 - N_2 l^2 h_2) (m \dot{W} + N_1 W_{,11}) + [B(D^{11} - N_1 l^2 h_1 - N_2 l^2 h_2) - (D_{11}^1)^2] W_{,1111} = 0 \quad (5)$$

Solutions to (5) satisfying boundary conditions for the simply supported plate band on the edges $x=0, L$ we assume in the form

$$W(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin(\alpha_m x) T(t), \quad (6)$$

where $\alpha_m = m\pi/L$, $m=1, 2, \dots$. Because the wavelengths of W are sufficiently large compared to l and hence $\alpha_m l \ll 1$ and also $h/l \ll 1$, in the sequel we shall apply the simplified form of (5) in which terms $l^4 m^{11} B \ddot{W}_{,1111}$, $l^4 m^{11} (N_1 W_{,11})$ can be neglected as small compared to $(D^{11} - N_1 l^2 h_1 - N_2 l^2 h_2) m \dot{W}$. Introducing the following denotations

$$N_- \equiv \alpha_m^2 [B - (D_{11}^1)^2 (D^{11})^{-1}], \quad N_+ \equiv (D^{11} l^{-2} - N_2 h_2) h_1^{-1} + \alpha_m^2 (D_{11}^1)^2 (D^{11})^{-1}, \quad (7)$$

$$\omega_-^2 \equiv \alpha_m^4 [B - (D_{11}^1)^2 (D^{11})^{-1}] m^{-1}, \quad \omega_+^2 \equiv D^{11} l^{-4} (m^{11})^{-1}, \quad \tilde{N}_+ \equiv D^{11} l^{-2} h_1^{-1},$$

the frequency equation (5) within *the length-scale model* can be written as (8)

$$\ddot{T} + \omega_+^2 [1 - (N_1 + N_2 h_2 h_1^{-1}) \tilde{N}_+^{-1}] \ddot{T} + \omega_+^2 \omega_-^2 (1 - N_1 N_-^{-1}) (1 - N_1 N_+^{-1}) N_+ \tilde{N}_+^{-1} T = 0 \quad (8)$$

Assuming $N_1 = N_a + N_b \cos pt$, where p is a frequency of oscillations of force N_1 , introducing $z = pt$; denoting $T' = \partial T / \partial z$ and also

$$\begin{aligned} \eta_- &= \omega_-^2 p^{-2}, & \eta_+ &= \omega_+^2 p^{-2}, & \zeta &= N_+ \tilde{N}_+^{-1}, & \chi_- &= N_a N_-^{-1}, & \delta_- &= N_b N_-^{-1}, \\ \chi_+ &= N_a N_+^{-1}, & \delta_+ &= N_b N_+^{-1}, & \tilde{\chi}_+ &= N_a \tilde{N}_+^{-1}, & \tilde{\delta}_+ &= N_b \tilde{N}_+^{-1}, & \tilde{\chi} &= N_2 h_2 (\tilde{N}_+ h_1)^{-1}, \\ \xi &= \eta_+ (1 - \tilde{\chi}_+ - \tilde{\chi}), & \xi_- &= \eta_- (1 - \chi_-), & \xi_+ &= \eta_+ (1 - \chi_+), \\ \varphi &= \tilde{\delta}_+ (1 - \tilde{\chi}_+ - \tilde{\chi})^{-1}, & \varphi_- &= \delta_- (1 - \chi_-)^{-1}, & \varphi_+ &= \delta_+ (1 - \chi_+)^{-1}, \end{aligned} \quad (9)$$

we obtain from (8) the following equation

$$T'''' + \xi (1 - \varphi \cos z) T'' + \xi_- \xi_+ (1 - \varphi_- \cos z) (1 - \varphi_+ \cos z) \zeta T = 0. \quad (10)$$

Equation (10) is a starting point of analysis of dynamic stability of the plate band under consideration in the framework of the length-scale model.

Now, let us consider the above problem in the framework of *the homogenised model*. From equation (4) we arrive at

$$[B - (D_{11}^1)^2 (D^{11})^{-1}] W_{,1111} - N_{11} W_{,11} + m \dot{W} = 0.$$

Denoting $N_1 \equiv -N_{11}$ and assuming solutions to the above equation as (6), after some manipulations, we obtain the frequency equation for the macrodeflection W , which can be written in the form under denotations (7)

$$\ddot{T} + \omega_-^2(1 - N_1 N_-^{-1})T = 0. \quad (11)$$

Assuming $N_1 = N_a + N_b \cos pt$, introducing $z = pt$, using (9) equation (11) takes the form

$$T'' + \xi_- (1 - \varphi_- \cos z)T = 0. \quad (12)$$

It can be observed that the above equation (12) for *the homogenised model* of periodic plates has a form of the known Mathieu's equation, which describes dynamic stability or parametric vibrations of different structures (e. g. bars, plates, etc., cf. [7, 4]). Using this equation we can determine for parameters φ_- , ξ_- regions of parametric resonance [4] neglecting the effect of the cell size.

However, in the framework of the length-scale model we derive the fourth order equation (10) which can be treated as a certain generalization of the Mathieu's equation. This equation makes it possible to investigate the effect of the mesostructure parameter l on a shape of boundaries of regions of stable and unstable vibrations.

5. REMARKS

It is necessary to emphasized that the presented modelling approach, different from the known homogenisation methods for periodic plates, leads to the model, which makes it possible to investigate the length-scale effect on the overall behaviour of these plates (cf. [3]). The main advantage of this model is that analysed problems are described by relatively simple differential equations with constant coefficients. Thus, the length-scale model can be used to analyse many engineering problems.

Using this model we can investigate the length-scale effect on dynamic stability problems, parametric vibrations and boundaries of regions of stable and unstable vibrations for Kirchhoff-type plates with periodic structure.

REFERENCES

- [1] Baron E., Dynamika i stateczność średniej grubości płyt o strukturze periodycznej, in: Proceedings of IXTH Symposium „Stability of Structures”, Zakopane 2000, 7-14, (in Polish).
- [2] Caillerie D., Thin elastic and periodic plates, Math. Meth. in the Appl. Sci., 6, 1984, 159-191.
- [3] Jędrysiak J., Modele dyspersyjne cienkich płyt periodycznych. Teoria i zastosowania, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 872, series: Rozprawy naukowe z. 289, Łódź 2001, (in Polish).
- [4] Kaliski S. [ed.], Vibrations, PWN, Warsaw; ELSEVIER, Amsterdam 1992.
- [5] Kohn R.V., Vogelius M., A new model for thin plates with rapidly varying thickness, Int. J. Solids Structures, 20, 1984, 333-350.
- [6] Michałak B., Dynamika i stateczność płyt pofalowanych, Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej Nr 881, series: Rozprawy naukowe z. 295, Łódź 2001, (in Polish).
- [7] Timoshenko S., Gere J., Theory of elastic stability, McGraw-Hill, New York 1961.
- [8] Woźniak C., Wierzbicki E., Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2000.

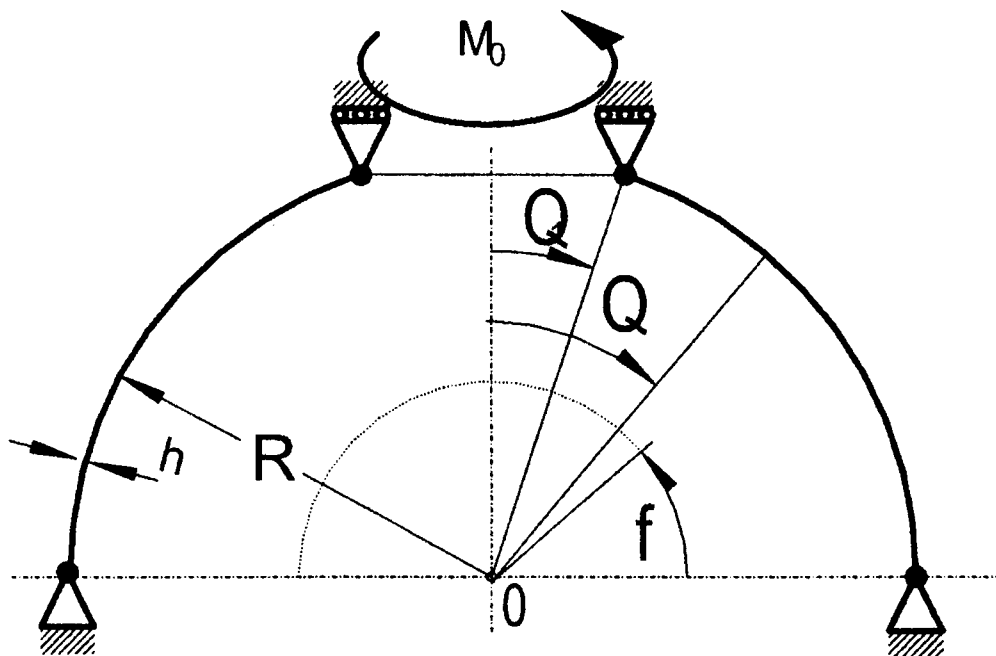
NIELINIOWE ZAGADNIENIE STATECZNOŚCI POWŁOKI PÓLKULISTEJ OBCIĄŻONEJ MOMENTEM OBROTOWYM

S. JONIAK

Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Poznańskiej
ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań

Cienkościenna powłoka półkulista jest podparta przegubowo na obu brzegach. Jeden z brzegów ma możliwość obrotu wokół osi powłoki; do tego brzegu przyłożony jest moment obrotowy. Rozpatruje się zagadnienie stateczności powłoki. Układ równań zagadnienia tworzą nieliniowe równanie równowagi oraz nieliniowe równanie nierozdzielności. Oba równania rozwiązuje się metodą Bubnowa-Galerkina, przyjmując uprzednio postać funkcji ugięcia i funkcji sił. Efektem rozwiązania jest równanie algebraiczne na bezwymiarowy parametr obciążenia, z którego wyznacza się parametr obciążenia krytycznego, odpowiadający minimalnej wartości bezwymiarowego parametru obciążenia ze względu na liczbę charakteryzującą postać utraty stateczności. Praca kończy się przykładem liczbowym i wnioskami.

1. WSTĘP



Rys. 1.

Cienkościenna powłoka półkulista, która jest przedmiotem analizy, jest pokazana na rysunku 1. Dolny jej brzeg jest nieruchomy i podparty przegubowo. Górny brzeg jest również podparty przegubowo, ale ma możliwość obrotu wokół pionowej osi powłoki. Do górnego brzegu przyłożony jest moment obrotowy. Rozpatrywane jest nieliniowe zagadnienie utraty stateczności powłoki. Do rozwiązania problemu wykorzystano

nieliniowe równania stateczności, podane w monografii [1]. Układ tych równań rozwiązywano metodą Bubnowa - Galerkina, zakładając najpierw postacie funkcji ugięcia po utracie stateczności i funkcji sił. Ostatecznym celem było wyznaczenie obciążenia krytycznego. Ze względu na złożoność problemu było to możliwe tylko w wyniku rozwiązania przykładu liczbowego.

2. RÓWNANIA ZAGADNIENIA STATECZNOŚCI

Układ równań stateczności ma następującą postać:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Psi = E h \left(\kappa_{12}^2 - \kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{11} k_{22} - \kappa_{22} k_{11} \right), \quad (1)$$

$$D \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \bar{S} \kappa_{12} + T_1 (k_{11} + \kappa_{11}) + 2 S \kappa_{12} + T_2 (k_{22} + \kappa_{22}) = 0, \quad (2)$$

gdzie: Ψ - funkcja sił,

w - funkcja ugięcia po utracie stateczności,

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right),$$

k_{ii} - główne krzywizny,

κ_{ii}, κ_{12} - zmiany krzywizn i skręcenie powierzchni,

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \text{ - sztywność zginania powłoki,}$$

\bar{S} - siła styczna stanu przedkrytycznego,

T_i, S - siły stanu krytycznego.

Zmiany krzywizn i skręcenie powierzchni powłoki kulistej są następującymi funkcjami ugięcia:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi \partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Siły stanu krytycznego zależą w następujący sposób od funkcji sił:

$$T_1 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right), \quad T_2 = \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}, \quad S = \frac{1}{R^2 \sin \theta} \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi \partial \theta} \right). \quad (4)$$

Siła styczna stanu przedkrytycznego ma postać:

$$\bar{S} = \frac{M_o}{2 \pi R^2 \sin^2 \theta}. \quad (5)$$

Zmiany krzywizn (3) i siły przekrojowe (4), (5) należy wprowadzić do równań (1) i (2). Otrzymujemy wtedy układ nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych ze względu na w i Ψ .

3. ROZWIĄZANIE RÓWNAŃ STATECZNOŚCI

Równania stateczności rozwiązywano metodą Bubnowa-Galerkina. Pociągało to za sobą konieczność przyjęcia postaci funkcji ugięcia i funkcji sił spełniających w miarę możliwości wszystkie warunki brzegowe zagadnienia. Na brzegach powłoki mamy następujące warunki brzegowe:

$$\theta = \theta_1; w=0, M_\theta = 0, S = \frac{M_o}{2\pi R^2 \sin^2 \theta_1}, T_1 = 0, \quad (6)$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}; w=0, M_\theta = 0, S = \frac{M_o}{2\pi R^2 \sin^2 \theta_1}, T_1 = 0. \quad (7)$$

Przyjęto funkcje sił i ugięcia o postaci:

$$\Psi = (b\varphi + c \sin m\varphi) \sin^2 \theta, \quad (8)$$

$$w = a \sin \left[\frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\pi - 2\theta_1} \right] \sin \left[\frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\pi - 2\theta_1} + m\varphi \right] \sin^2 \theta, \quad (9)$$

gdzie: a, b, c - stałe,

m - liczba całkowita.

Funkcja ugięcia (9) spełnia ściśle pierwsze z warunków (6) i (7), drugie natomiast w sensie całkowym. Funkcja sił spełnia trzecie warunki na obu brzegach z dokładnością do stałej, nie spełnia warunków na siłę T_1 .

Równanie nierozdzielności (1) rozwiązywano metodą Bubnowa-Galerkina. Funkcja podlegająca ortogonalizacji ma wtedy postać:

$$F(\theta, \varphi) = \nabla^2 \nabla^2 \Psi - E h \left(\kappa_{12}^2 - \kappa_{11} \kappa_{22} - \kappa_{11} k_{22} - \kappa_{22} k_{11} \right),$$

natomiast warunki ortogonalizacji

$$\int_A F(\theta, \varphi) f_i(\theta, \varphi) dA = 0, \quad (10)$$

gdzie: $f_i(\theta, \varphi)$ - czynniki ortogonalizujące, którymi są składniki funkcji Ψ ,

A - powierzchnia środkowa powłoki.

Warunki ortogonalizacji są następujące:

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi) \varphi \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 0, \quad (11)$$

$$\int_{\theta_1}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} F(\theta, \varphi) \sin(m\varphi) \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (12)$$

Wynikiem rozwinięcia warunków (11) i (12) są dwa równania algebraiczne, z których wyznacza się współczynniki funkcji sił Ψ . Przedstawiają je wyrażenia:

$$b = E h \left(H_1 a^2 + G_1 a R \right), \quad (13)$$

$$c = E h (H_2 a^2 + G_2 a R), \quad (14)$$

gdzie: H_i, G_i - stałe zawierające θ_i i liczbę m .

Rozwiązanie równania (1) ma ostatecznie postać:

$$\Psi = E h a^2 \left[\left(H_1 + G_1 \frac{R}{a} \right) \varphi + \left(H_2 + G_2 \frac{R}{a} \right) \sin m \varphi \right] \sin^2 \theta. \quad (15)$$

Zastosowanie metody Bubnowa-Galerkina do równania równowagi (2) wymaga oznaczenia jego lewej strony jako funkcji podlegającej ortogonalizacji i zapisania warunku ortogonalizacji. Funkcja podlegająca ortogonalizacji to:

$$G(\theta, \varphi) = D \nabla^2 \nabla^2 w + 2 \bar{S} \kappa_{12} + T_1 (k_{11} + \kappa_{11}) + 2 S \kappa_{12} + T_2 (k_{22} + \kappa_{22}),$$

warunek ortogonalizacji ma postać:

$$\int_A G(\theta, \varphi) g(\theta, \varphi) dA = 0,$$

przy czym $g(\theta, \varphi)$ jest czynnikiem ortogonalizującym odpowiadającym prawej stronie funkcji ugięcia (9). Ostatecznie warunek ortogonalizacji przedstawia się następująco:

$$\int_{\theta_1}^{\pi - \theta_1} \int_0^{2\pi} G(\theta, \varphi) \sin \left[\frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\pi - 2\theta_1} \right] \sin \left[\frac{2\pi(\theta - \theta_1)}{\pi - 2\theta_1} + m\varphi \right] \sin^3 \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (16)$$

Do rozwiązania warunków ortogonalizacyjnych (11), (12) i (16) wykorzystano program matematyczny Derive. Korzystano z zawartych w nim procedur różniczkowania i całkowania, a następnie procedur przekształcania wyrażeń algebraicznych. Ostatecznie rozwinięcie warunku (16) doprowadziło do równania algebraicznego na moment obrotowy M_o . Wynikiem rozwiązania tego równania jest wyrażenie na bezwymiarowy moment obrotowy o postaci:

$$\bar{M} = \frac{M_o}{E h^3} = C_1 \left(\frac{a}{h} \right)^2 + C_2 \left(\frac{R}{h} \right) \left(\frac{a}{h} \right) + C_3 \left(\frac{R}{h} \right)^2 + C_4, \quad (17)$$

gdzie: C_i - stałe zależne od kąta θ_1 , liczby Poissona ν i liczby m ; ich postać jest bardzo złożona i rozbudowana.

Bezwymiarowy moment obrotowy, zapisany równaniem (17), zależy od liczby m opisującej formę utraty stateczności. Z równania tego należy dojść do minimalnej wartości tego momentu w funkcji m . Minimalna wartość momentu obrotowego to jego wartość krytyczna \bar{M}_{kr} , natomiast liczba m wyznaczająca tę wartość to m_{kr} .

4. PRZYKŁAD LICZBOWY

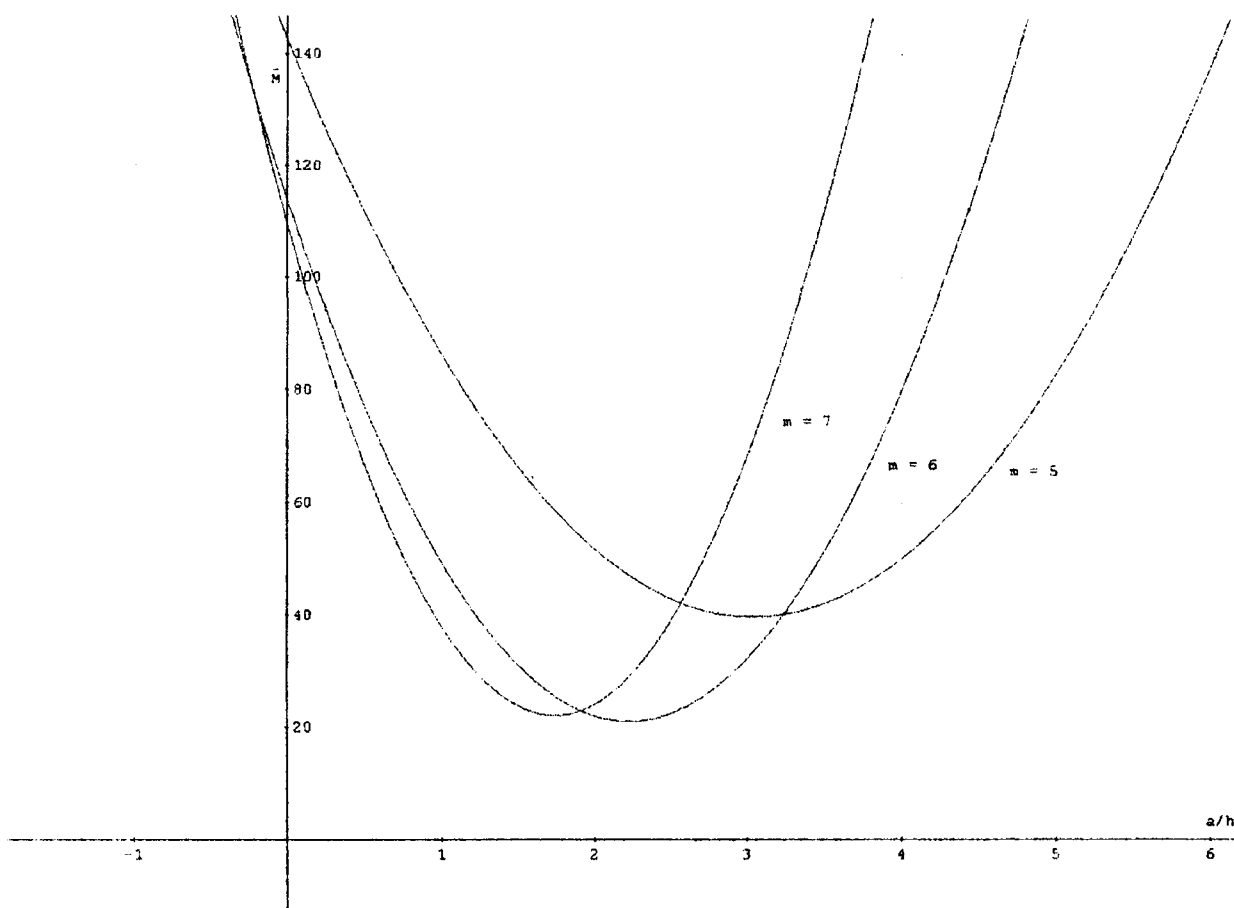
Poszukiwanie wartości obciążenia krytycznego jest możliwe tylko na drodze numerycznej. Należy w związku z tym obliczyć wartości stałych C_i dla zadanej wartości kąta θ_1 i szeregu wartości liczby m . Do obliczania wartości stałych

C_i wykorzystano program matematyczny Derive. W tabelicy 1 podano przykładowo wartości tych stałych dla $\theta_1 = \pi/6$.

Tabela 1. ($\theta_1 = \pi/6$)

m	C_1	C_2	C_3	C_4
4	5,89055	-0,531958	0,0215149	18,6474
5	11,1715	-0,678631	0,0114806	27,9992
6	18,7229	-0,834256	0,0073240	40,7401
7	28,9646	-1,00728	0,0052169	57,5178
8	42,3122	-1,20110	0,0039962	78,9904

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy we współrzędnych $\bar{M} - a/h$ dla $\theta_1 = \pi/6$, $R/h = 100$ i $\nu = 0,3$ oraz różnych wartości m . Jak widać minimalną wartość parametru \bar{M} wyznacza liczba $m = 6$.



Rys. 2.

W tabelicy 2 zamieszczono wartości bezwymiarowego naprężenia krytycznego powłok dla $\theta_1 = \pi/6$ i szeregu wartości ilorazu R/h . Należy zaznaczyć, że nie otrzymuje się rozwiązania problemu dla $\theta_1 = \pi/10$ i $\theta_1 = 3\pi/14$; wynika to zapewne z przyjętej postaci funkcji ugięcia i funkcji sił. Ograniczony jest również zakres wartości

ilorazu R/h , w którym otrzymuje się rozwiązania na moment krytyczny. Na przykład dla $\theta_1 = \pi/6$, powyżej $R/h = 120$ minimalne wartości bezwymiarowego momentu przyjmują wartości ujemne, a tym samym tracą sens fizyczny.

Tablica 2. ($\theta_1 = \pi/6$)

$\frac{R}{h}$	\bar{M}	m_{kr}
50	31,25	5
100	20,94	6
120	6,563	7

LITERATURA

- [1] Musztari G. M., Galimow K. Z., Nieliniejnaja teoria uprugich oboloczek. Tatknigizdat, Kazań 1957.
- [2] Łukasiewicz St., Obciążenia skupione w płytach, tarczach i powłokach, PWN, Warszawa 1976.
- [3] Joniak S., Dynamiczne zagadnienie stateczności powłoki kulistej obciążonej momentem obrotowym, Mat. III Konferencji Naukowo-Technicznej „Odporność udarowa konstrukcji”, Rynia 23-25.10.2002, s. 73-80.

NON-LINEAR STABILITY PROBLEM OF SEMI-SPHERICAL SHELL LOADED WITH TORQUE

A thin-walled semi-spherical shell is pivoted at both edges. One of the edges may rotate around the shell axis. Moreover, it is loaded with a torque. The problem of shell stability is considered. The system of equations characterizing the problem consists of a non-linear equation of equilibrium and non-linear compatibility equation. Both equations are solved with Bubnov-Galerkin method, assuming beforehand the form of deflection and force-functions. As a result of the solution an algebraic equation is obtained, with respect to a dimensionless load parameter. The critical load parameter corresponding to minimal critical load value is determined from this equation. The number m at which the load parameter has minimum value determines the mode of stability loss. The paper is supplied with a numerical example.

ANALIZA STATECZNOŚCI REGULARNEJ KONSTRUKCJI PRĘTOWEJ

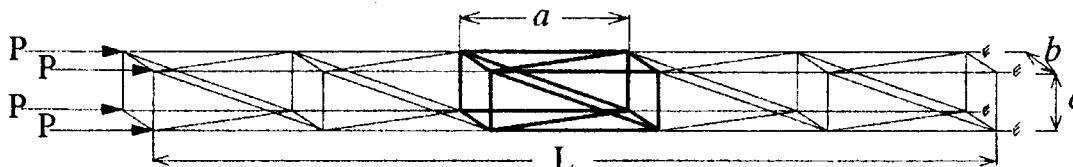
L. KIELSKI

Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Radomskiej
Malczewskiego 22, 26-600 Radom

Przedmiotem analizy jest regularny, prostopadłościenny maszt prętowy zbudowany z powtarzalnych elementów (segmentów), ściskany wzdłuż pasów siłami P . Maszt wykonany jest ze sprężystych prętów połączonych w sztywnych węzłach, tworzących powtarzalne prostopadłościenne segmenty. Liniową analizę stateczności przeprowadzono przy wykorzystaniu metody elementów skończonych. Analiza ma określić graniczną liczbę segmentów (odpowiadającą granicznej smukłości) oraz zbadać wpływ wysokości segmentu na obciążenie krytyczne. W pracy przedstawiono również metodę przybliżoną wyznaczania granicznej liczby segmentów dla takich konstrukcji.

1. WSTĘP

W analizie teoretycznej konstrukcji prętowych problematyka stateczności odgrywa niewątpliwie rolę wiodącą. Szybki rozwój teorii stateczności związany jest z rozwojem nowoczesnych metod obliczeniowych w tym metody elementów skończonych [2,4,5]. Regularność konstrukcji narzuca określoną metodę projektowania, ułatwia znacznie proces produkcji ze względu na unifikację elementów, usprawnia sam proces montażu i ma wpływ na zastosowane metody obliczeniowe [1,3]. Opracowanie bardziej ogólnych teorii, czy znajomość reguł wg., których możemy poprawnie projektować takie konstrukcje jest celem wielu badań, analiz i dociekań.



Rys. 1. Regularny prostopadłościenny maszt prętowy

W pracy analizowano maszt prętowy przedstawiony na (rys. 1), badano wpływ wysokości segmentu a na jego stateczność. Wyniki obliczeń przedstawiono w formie wykresów, obciążenie krytyczne w funkcji liczby segmentów $P_{KR} = P_{KR}(n)$ oraz długości rzeczywistej masty $P_{KR} = P_{KR}(L)$. Z pierwszego wykresu wyznaczono graniczną liczbę segmentów n_{GR} . Zaproponowano również przybliżoną metodę wyznaczania tego parametru.

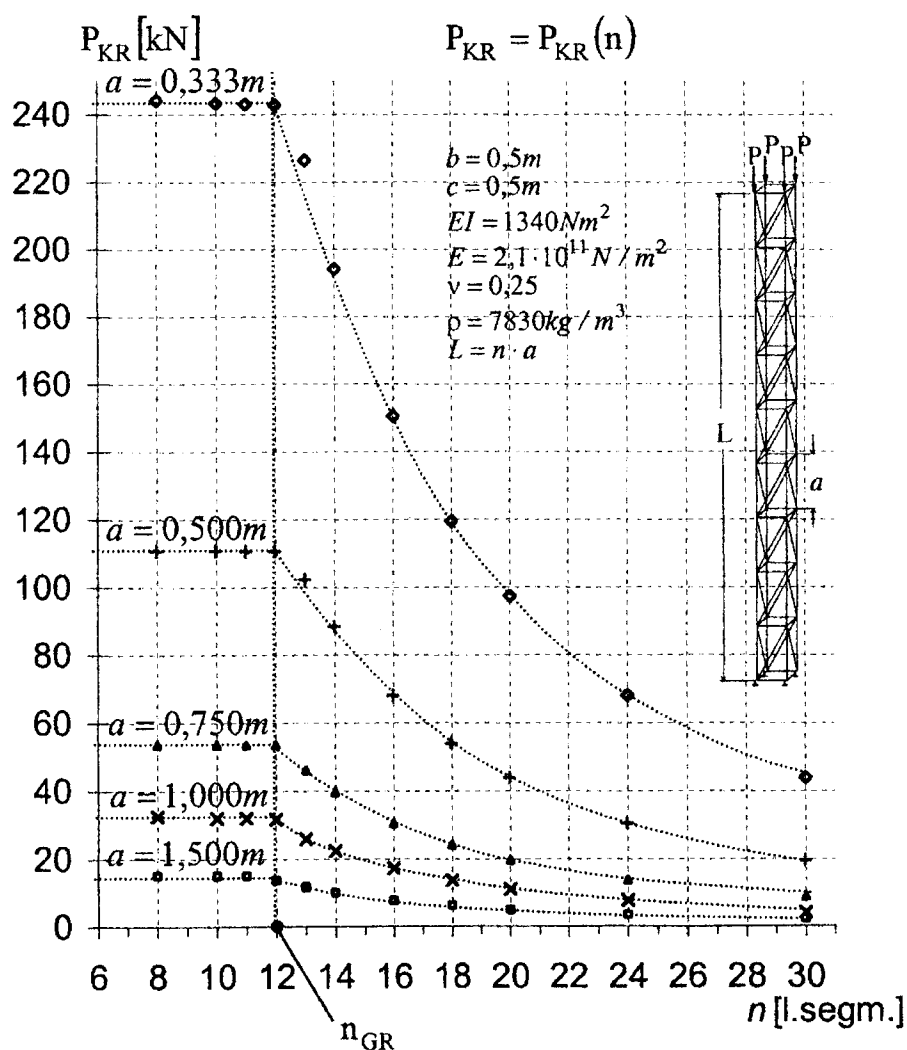
2. LINIOWA ANALIZA STATECZNOŚCI

Analizowana konstrukcja (maszt prętowy), przedstawiona na (rys. 1) zbudowana jest z powtarzalnych elementów (segmentów), wykonanych ze sprężystych prętów

połączonych w sztywnych węzłach. Konstrukcja obciążona jest siłami ściskającymi, działającymi wzdłuż pasów, przyłożonymi do węzłów brzegu swobodnego. Węzły brzegu przeciwnego utwierdzone są na sztywno. Liniową analizę stateczności przeprowadzono metodą elementów skończonych, wykorzystując energetyczną formę kryterium statycznego. Model obliczeniowy zbudowano z elementów belkowych. Wszystkie pręty badanej konstrukcji podzielono na cztery takie elementy. W wyniku obliczeń otrzymywano obciążenie krytyczne P_{KR} (bifurkacyjne) i odpowiadającą jej postać utraty stateczności. Z analizy wykresu $P_{KR} = P_{KR}(n)$ (gdzie n – jest liczbą segmentów) wyznaczono n_{GR} .

3. WYNIKI OBLICZEŃ

Analizę stateczności przeprowadzono dla konstrukcji prętowej przedstawionej na (rys. 1). Wszystkie pręty tworzące konstrukcję (maszt prętowy) mają jednakowy przekrój, rurowy ($d_z = 0,0215m$; $d_w = 0,017m$), moduł Younge'a $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa,



Rys. 2. Obciążenie krytyczne w funkcji liczby segmentów n

szttywność zginania $EJ=1340 Nm^2$, liczba Poissona $\nu = 0.25$, masa właściwa materiału prętów $\rho = 7830 kg / m^3$.

Parametry geometryczne segmentu to wymiary przekroju poprzecznego $b \times c$, które dla analizowanego masztu prętowego były stałe $b \times c = 0,5m \times 0,5m$, oraz wysokość segmentu „ a ”. Obciążenie masztu stanowią siły P przyłożone do węzłów brzegu swobodnego i ściskające ją wzdłuż pasów.

W wyniku obliczeń otrzymywano siłę P_{KR} , która jest obciążeniem krytycznym dla całego masztu oraz odpowiadającą jej postać wyboczenia. Wykonano obliczenia dla różnych wysokości segmentu $a=0,33m$; $0,50m$; $0,75m$; $1,0m$; i $1,50m$ oraz różnej liczby segmentów n . Wyniki obliczeń przedstawiono na (rys. 2). Otrzymano charakterystyczne wykresy, obciążenie krytyczne P_{KR} w funkcji liczby segmentów n (smukłości masztu prętowego).

Smukłość obliczanego masztu możemy wyznaczyć ze wzoru:

$$\lambda = \frac{l_w}{i} = \frac{\mu \cdot L}{i} = \frac{\mu \cdot n \cdot a}{i} = \frac{\mu \cdot a}{i} \cdot n \quad (1)$$

gdzie:

l_w - długość wyboczeniowa masztu $l_w = \mu \cdot L$

μ - współczynnik zależny od warunków brzegowych (zamocowania masztu)

L - długość rzeczywista masztu $L = n \cdot a$

n - liczba segmentów

a - wysokość segmentu

i - promień bezwładności $i = \sqrt{\frac{J_{min}}{8F}}$

J_{min} - minimalny moment bezwładności przekroju prętów słupa, przeciętych w połowie segmentu płaszczyzną prostopadłą do pasów,

F - pole przekroju pojedynczego pręta.

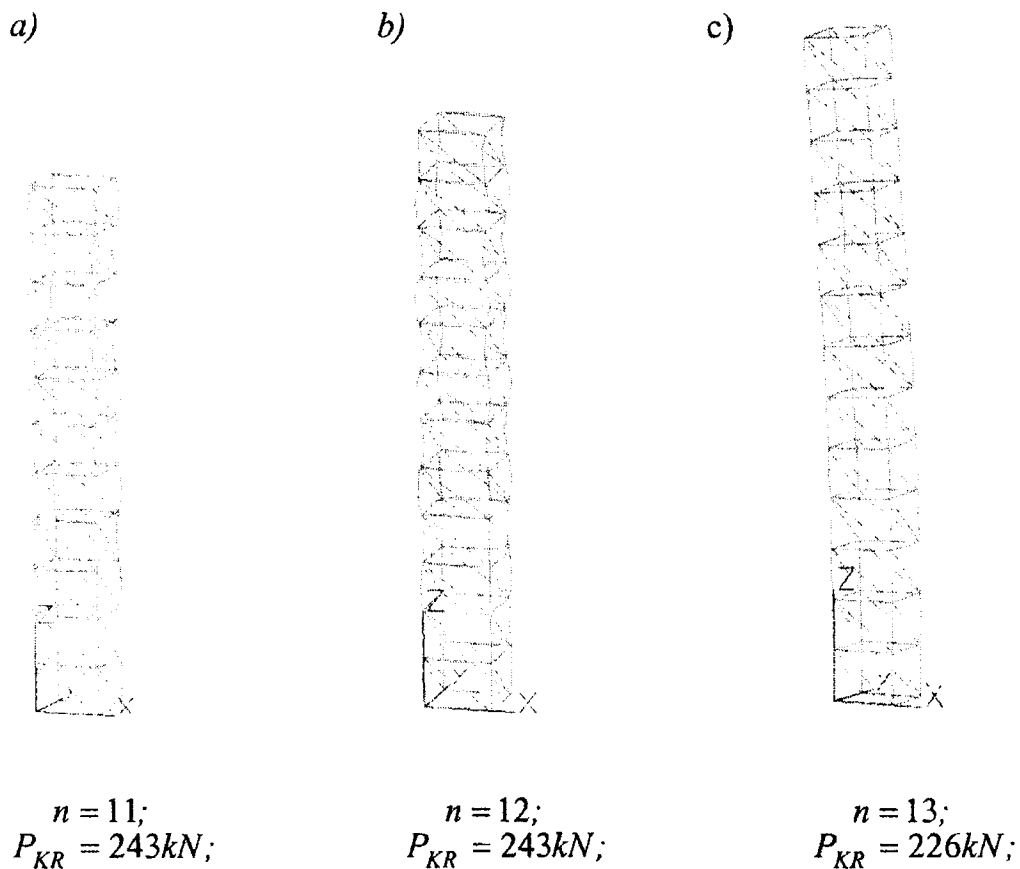
Smukłość graniczną możemy wyrazić poprzez graniczną liczbę segmentów lub długość graniczną

$$\lambda_{GR} = \frac{\mu \cdot L_{GR}}{i} = \frac{\mu \cdot n_{GR} \cdot a}{i} \Rightarrow n_{GR} = \frac{L_{GR}}{a} \quad (2)$$

Z analizy wykresów przedstawionych na (rys. 2) wynika, że maszt prętowy, którego liczba segmentów n jest mniejsza od granicznej $n < n_{GR}$, traci stateczność poprzez wyboczenie lokalne, jeżeli liczba segmentów n jest większa od granicznej $n > n_{GR}$, utrata stateczności następuje poprzez wyboczenie globalne. Z analizy tych wykresów wynika, że graniczna liczba segmentów n_{GR} (odpowiadająca granicznej

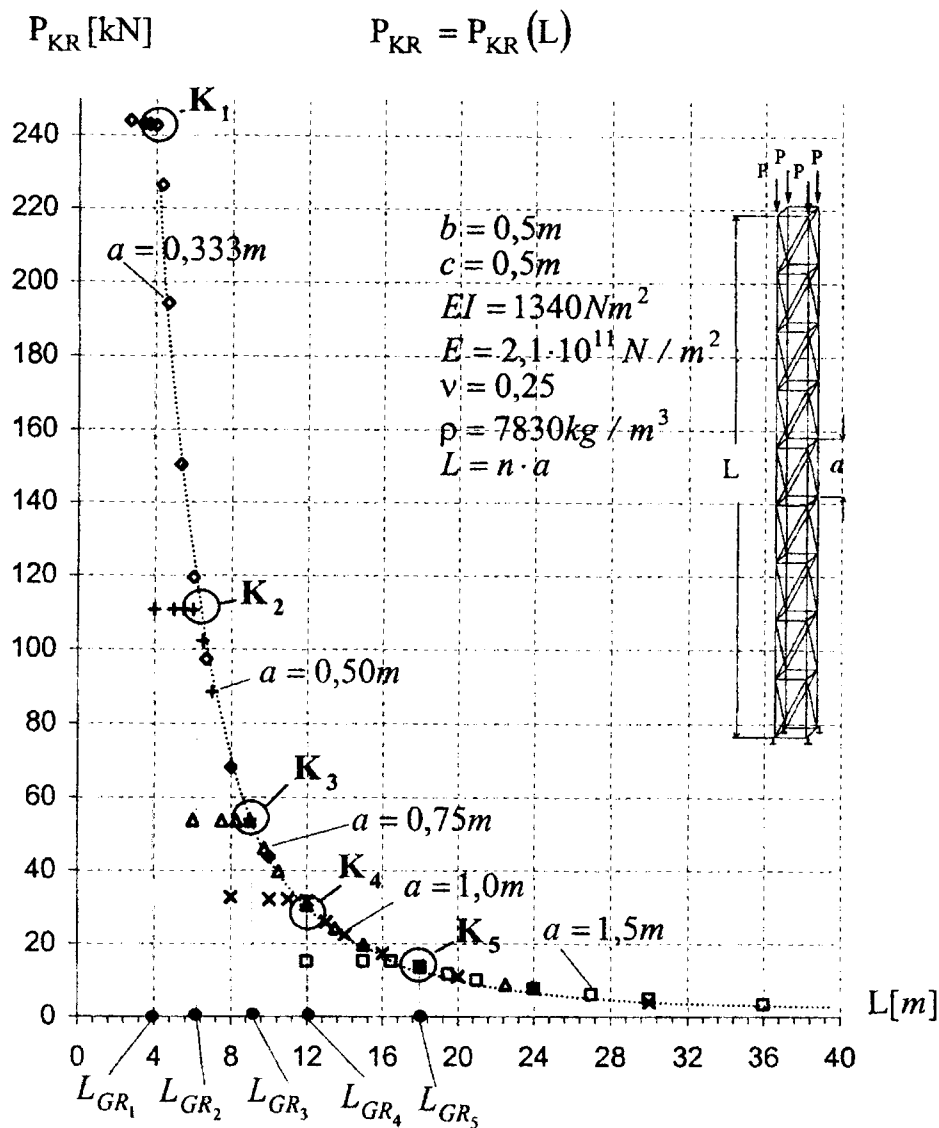
smukłości) badanego masztu prętowego wynosi 12. W wyniku obliczeń, otrzymywano oprócz wartości P_{KR} , również odpowiadające im postacie wyboczenia.

Na rys. 3 przedstawiono postacie wyboczenia masztu prętowego o liczbach segmentów bliskich stanowi granicznemu $n = n_{GR} - 1$; $n = n_{GR}$ i $n = n_{GR} + 1$ i odpowiednich wartościach sił krytycznych, oraz dla ustalonej wysokości segmentu $a = 0,333m$. Utrata stateczności masztu prętowego o liczbie segmentów $n = 11$ i $n = 12$ (rys. 3a,b) następuje poprzez wyboczenie lokalne (elementów pasa), a dla liczby segmentów $n = 13$ (rys. 3c) poprzez wyboczenie globalne (wyboczenie giętkie całego masztu).



Rys. 3. Wartości obciążenia krytycznego konstrukcji i odpowiadająca jej postać wyboczenia dla $a=0,333m$.

Z analizy otrzymanych wyników obliczeń wynika, że takie same postacie wyboczenia jak na (rys. 3) występują dla masztu o wysokościach segmentu $a = 0,5m$ i $a = 0,75m$, natomiast dla masztów o wysokościach segmentu $a = 1,0m$ i $a = 1,5m$ wyboczenie globalne występuje już przy liczbie segmentów $n = 12$. Dla przypadku pierwszego jest to wyboczenie lokalno - globalne (na postać wyboczenia giętkiego nakłada się wyboczenie lokalne pasów), natomiast dla przypadku $a = 1,5m$ otrzymano typowe wyboczenie giętkie.



Rys. 4. Obciążenie krytyczne w funkcji długości L konstrukcji.

Na rys. 4 przedstawiono zależność obciążenia krytycznego P_{KR} w funkcji długości rzeczywistej maszty L . Wykonano obliczenia dla ustalonej wartości parametru a . Dla każdej wartości parametru otrzymano charakterystyczny wykres, w którym prostoliniowa (pozioma) część przedstawia konstrukcje, które przy obciążeniu krytycznym podlegają utracie stateczności lokalnej oraz część „hiperboliczna” przedstawiająca konstrukcje, które przy obciążeniu krytycznym podlegają utracie stateczności globalnej. Zaletą wykresu w takim układzie współrzędnych jest to, że część „hiperboliczna” jest wspólna dla wszystkich przypadków tj. dla $a=0,333m$; $0,5m$; $0,75m$; $1,0m$; i $1,5m$. Część hiperboliczną wyznaczają punkty $K_1, K_2 \dots K_5$, tj. punkty odpowiadające stanom granicznym konstrukcji oraz wszystkie punkty, odpowiadające wyobceniom globalnym. Punkty $K_1, K_2 \dots K_5$ są punktami wynikającymi z przecięcia liniowej części wykresu z częścią „hiperboliczną”. Stan graniczny konstrukcji możemy określić w tym przypadku poprzez jej długość graniczną L_{GR} . Długości graniczne $L_{GR_1}, L_{GR_2}, \dots, L_{GR_5}$ określone są dla odpowiednich wartości parametru a , znając graniczną liczbę segmentów n_{GR} możemy je wyznaczyć ze wzoru (2).

4. PRZYBLIŻONA METODA WYZNACZENIA n_{GR}

Z analizy wykresu przedstawionego na (rys. 2) wynika, że graniczna liczba segmentów analizowanej konstrukcji $n_{GR} = 12$. Z analizy postaci wyboczenia obliczonych przykładów, że w stanie granicznym tj. dla masztu o $n = n_{GR}$ może wystąpić zarówno wyboczenie lokalne jak i globalne. Punkty $K_1, K_2 \dots K_5$ na wykresie (rys. 4), wyznaczające stany graniczne, odpowiadają przejściu konstrukcji z postaci lokalnej utraty stateczności do globalnej. Można wnioskować, że w punktach tych może wystąpić zarówno utrata stateczności lokalna jak i globalna (np. dla $a = 1,00m$). Utrata stateczności globalna następuje poprzez wyboczenie giętne całego masztu, natomiast lokalna poprzez wyboczenie (giętne) elementów pasa o długości a . Ponieważ w punktach $K_1, K_2 \dots K_5$ mogą wystąpić obydwie postacie utraty stateczności lokalna (poprzez wyboczenie giętne elementu pasa) i globalna (poprzez wyboczenie również giętne, ale całego masztu), zakładamy że w punktach tych smukłość masztu równa jest smukłości elementu pasa o długości a .

Smukłość masztu wyznaczamy ze wzoru

$$\lambda_m = \frac{l_w}{i_m} = \frac{\mu_m \cdot L}{i_m} = \frac{\mu_m \cdot n \cdot a}{i_m} \quad (3)$$

gdzie:

μ_m - współczynnik zależny od warunków brzegowych (utwierdzenia masztu)

i_m - promień bezwładności masztu

natomiast smukłość elementów pasa

$$\lambda_p = \frac{l_w}{i_p} = \frac{\mu_p a}{i_p} \quad (4)$$

gdzie:

μ_p - współczynnik zależny od warunków brzegowych (utwierdzenia elementu pasa o długości a)

i_p - promień bezwładności elementu pasa

Porównując smukłości, otrzymujemy

$$\lambda_p = \lambda_m \rightarrow n = n_{GR}$$
$$\frac{\mu_m n_{GR} a}{i_m} = \frac{\mu_p a}{i_p} \Rightarrow n_{GR} = \frac{\mu_p}{\mu_m} \cdot \frac{i_m}{i_p} \quad (5)$$

Wyznamy n_{GR} ze wzoru (6) dla obliczanych powyżej przykładów. Z warunków brzegowych wynika, że $\mu_m = 2$, natomiast pozostałe parametry wynoszą

$i_m = 0,2166\text{m}$ oraz $i_p = 0,00685\text{m}$. W wyrażeniu tym nie znamy współczynnika μ_p , czyli warunków brzegowych zamocowania elementu pasa o długości a . W pierwszym przybliżeniu możemy założyć, że współczynnik ten wynosi $\mu_p = 0,75$, tzn. zamocowanie elementu pasa o długości a , którego końce umieszczone są w sztywnych węzłach przyjmujemy jako zamocowanie pomiędzy zamocowaniem pręta sztywny-sztywny (dla którego $\mu_p = 0,5$) a zamocowaniem pręta przegubowy-przegubowy (dla którego $\mu_p = 1,0$). Graniczna liczba segmentów wynosi

$$n_{GR} = \frac{\mu_p}{\mu_m} \cdot \frac{i_m}{i_p} = \frac{0,75}{2,0} \cdot \frac{0,2166\text{m}}{0,00685\text{m}} = 11,86 \approx 12 \quad (6)$$

5. WNIOSKI

- 1) Z analizy wykresów przedstawionych na (rys. 2) wynika, że przy ustalonych parametrach b i c , w zakresie badanych wartości wysokości segmentu a , 0.33-1.5m zmiana wysokości segmentu nie ma wpływu na graniczną liczbę segmentów, smukłość graniczna przyjmuje wartość $n_{GR} = 12$.
- 2) Kolejny wniosek wynika bezpośrednio z wykresu przedstawionego na (rys. 4). Zaletą wykresu w układzie współrzędnych $P_{KR} = P_{KR}(L)$, jest to, że część „hiperboliczna” wykresu (odpowiadająca utracie stateczności globalnej) jest wspólna dla konstrukcji zbudowanych z segmentów o różnych wysokościach (parametry przekroju poprzecznego $b \times c$ są takie same). Wykres ten możemy otrzymać wyznaczając punkty odpowiadające stanom granicznym K_1, K_2, \dots, K_n , lub wyznaczając punkty dla konstrukcji o liczbie segmentów $n > n_{GR}$ i różnej wysokości segmentu a . Znajomość części hiperbolicznej tego wykresu w układzie współrzędnych $P_{KR} = P_{KR}(L)$, pozwala nam na pewną analizę stateczności np., wyznaczenie obciążenia krytycznego gdy znamy długość graniczną L_{GR} (lub wysokość segmentu a zgodnie ze wzorem 2), lub dla założonego obciążenia krytycznego możemy wyznaczyć długość graniczną lub wysokość segmentu. Informacja taka wydaje się bardzo cenna w fazie projektowania konstrukcji.
- 3) We wstępnej fazie projektowania masztu graniczną liczbę segmentów możemy wyznaczyć ze wzoru (5). Otrzymany wynik (6) jest zgodny z otrzymanym w wyniku analizy. Obliczono również maszt prętowy wykonany z identycznych prętów, dla następujących parametrów segmentu: $a = 0,5\text{m}$ $b = 0,5\text{m}$ i $c = 0,25\text{m}$. Z analizy stateczności otrzymano graniczną liczbę segmentów $n_{GR} = 6$. Obliczono graniczną liczbę segmentów ze wzoru (6), dla następujących danych: $i_m = 0,1085\text{m}$, $i_p = 0,00685\text{m}$, $\mu_m = 2$, $\mu_p = 0,75$.

$$n_{GR} = \frac{\mu_p}{\mu_m} \cdot \frac{i_m}{i_p} = \frac{0,75}{2,0} \cdot \frac{0,1085\text{m}}{0,00685\text{m}} = 5,93 \approx 6 \quad (7)$$

LITERATURA

- [1] Gutkowski W.: Regularne konstrukcje prętowe. PWN. Warszawa 1973.
- [2] Kleiber M. Wprowadzenie do metody elementów skończonych, PWN, Warszawa - Poznań, 1989.
- [3] Misiak J.: Stateczność konstrukcji prętowych. PWN. Warszawa 1990.
- [4] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa, 1990.
- [5] Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych, Arkady, Warszawa, 1972.

ANALYSIS OF STABILITY OF REGULAR ROD STRUCTURE

Regular rectangular lattice mast made of reproducible segments compressed by forces P along the strips is analysed in this paper. The lattice mast made of elastic rods, rigidly connected in the nodes which form reproducible rectangular segments. The method of finite elements was used to linear analysis of stability. The analysis is to determine a number of segments corresponding with the limiting slenderness ratio and the influence of the height of the segment on the critical loading. The approximate method to determine of limiting number of segments was presented.

STABILITY OF COMPOSITE PLATES UNDER VARYING AXIAL FORCES

S. KONIECZNY, SZ. LANGIER, R. MES

Department of Structural Mechanics, Technical University of Łódź, Poland

The aim of this contribution is to show how the known theories of elastic plates can be extended in order to describe property arbitrary inhomogeneous of the plates material for dynamics stability. Each layer being the composite components is taken to be inhomogeneous and anisotropic. The perfect contact between the components of the plate is assumed.

1. ANALYSIS

The analysis will be based on the assumption that the midplane of an undeformed plates coincides with the symmetry plane. Averaged equations of motion can be derived from the virtual work principle of three-dimensional elastodynamics. Applying the results of the papers [1] and [2], the governing equations take the following form:

$$\begin{aligned} (D_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta})(\zeta_{\beta,\alpha} + w_{,\alpha\beta}) + N_{\alpha\beta}(t) w_{,\alpha\beta} - m\ddot{w} &= 0 \\ D_{\alpha\beta\gamma\delta} \zeta_{\gamma,\delta\beta} - (D_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta})(\zeta_{\beta} + w_{,\beta}) - I\ddot{\zeta}_{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

where

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} a_{\alpha\beta\gamma\delta} z^2 dz & D_{\alpha\beta} &\equiv \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{\alpha 3\gamma 3} dz \\ E_{\alpha\gamma}^a &\equiv \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{\alpha 3\gamma 3} l_{a,3} dz, & F_{\alpha\gamma}^{ab} &\equiv \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} A_{\alpha 3\gamma 3} l_{a,3} l_{b,3} dz \end{aligned} \quad (2)$$

The coefficients $F_{\alpha\gamma}^{ab}$ is non-singular, denoting by $G_{\alpha\gamma}^{ab}$ the inverse mapping, we can written $K_{\alpha\beta}$ as

$$K_{\alpha\beta} = E_{\alpha\gamma}^a G_{\gamma\epsilon}^{ab} E_{\epsilon\beta}^b \quad (3)$$

Now we restrict ourselves to the analysis dynamics stability of a rectangular plates which are simply supported on its edges $x_1 = 0, x_1 = a, x_2 = 0, x_2 = b$.

We assume that a composite plates consisting of n ortotropic inhomogeneous layers. Material properties of this plate are assumed to be known being determined by

the components of the elasticity tensor field $a_{ijkl}(\cdot)$, which are piecewise constant functions, suffering jump discontinuities only across interfaces between material constituents. The uppers and the lowers layers have the same thickness and are made of the same material.

Let us seek the solution of the system of differential equations (1) in the form:

$$\begin{aligned} w &= W_{mn}(t)\sin(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2) \\ \mathcal{G}_1 &= A_{mn}(t)\cos(\lambda_m x_1)\sin(\mu_n x_2) \\ \mathcal{G}_2 &= B_{mn}(t)\sin(\lambda_m x_1)\cos(\mu_n x_2) \end{aligned} \quad (4)$$

where: $\lambda_m = \frac{m\pi}{a}$, $\mu_n = \frac{n\pi}{b}$

We see that solution (4) fulfils the boundary conditions, and is independent of the shape of the functions w_{mn} , \mathcal{G}_{1mn} , \mathcal{G}_{2mn} which are, so far, quite unknown. With the presuppositions (4) our problem is reduced to seeking the funktions w_{mn} , \mathcal{G}_{1mn} , \mathcal{G}_{2mn} , which are already only functions of the time t .

We now substitute the assumed solution (4) into the differential equations system (1). After rearrangement we obtain

$$\frac{d^2 W_{mn}(t)}{dt^2} + \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{P(t)}{N_{mn}^{11}} \right) W_{mn}(t) = 0 \quad (5)$$

where: ω_{mn}^2 is the angular natural frequency in *rad/sec* and N_{mn}^{11} is the critical load.

$$N_{mn}^{11} = -\frac{1}{\lambda_m^2} \left[D_{11}(1-\alpha_1)\lambda_m^2 + D_{22}(1-\alpha_2)\mu_n^2 + \frac{\alpha_{mn}}{\beta_{mn}} \right] \quad (6)$$

We now assume that $P(t)$ is cosinesoidal force

$$P(t) = S_a + S_b \cos \Theta t \quad (7)$$

This force consists of a stationary part S_a and a periodically varying part $S_b \cos \Theta t$, haveing amplitude S_b and radian frequency Θ . Substituting (7) into (5), we arrive at the following equation

$$\frac{d^2 W_{mn}}{dt^2} + \Omega_{mn} (1 - 2\nu_{mn} \cos \Theta t) W_{mn}(t) = 0 \quad (8)$$

where we have denoted

$$\Omega_{mn}^2 = \omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{S_a}{N_{mn}^{11}} \right) \quad (9)$$

$$\nu_{mn} = \frac{S_b}{2(N_{mn}^{11} - S_a)}$$

Equation (8) is known as the Mathieu equation.

In each particular case the quantities Ω_{mn} and ν_{mn} can be calculated by using Eq. (9). The character of the solution of Eq. (8) depends on the numerical values of Ω_{mn} and ν_{mn} . At certain of these quantities the solution gives a vibration which grows with time and thereby indicates an unstable condition. By introducing the following dimensionless values

$$k_1 \equiv \frac{D_1}{D_2}, \quad k_2 \equiv \frac{D_1}{D_3}, \quad k_3 \equiv \frac{\tilde{D}_{22}}{D_2}, \quad (10)$$

$$k_4 \equiv \frac{\tilde{D}_{11}}{D_1}, \quad c \equiv \frac{a}{b}, \quad h^* \equiv \frac{h}{a}$$

where

$$D_{11} = h\tilde{D}_{11}, \quad D_{22} = h\tilde{D}_{22}, \quad D_{1111} = D_1 h^3, \quad D_{2222} = D_{22} h^3$$

$$D_{1122} = D_{2211} = D_2 \nu_1, \quad D_{1212} = D_3 h^3.$$

Therefore the critical load can be written

$$N_{mn}^{11} = N_{mn}^{11} (1 + d) \quad (11)$$

where

$$d = -\frac{\alpha_1 k_1 (m\pi)^2 + c^2 \alpha_2 (n\pi)^2}{k_1 (m\pi)^2 + c^2 (n\pi)^2} + \frac{1}{(h^*)^2} \cdot \frac{1}{k_1 (m\pi)^2 + c^2 (n\pi)^2} \cdot k_3 \frac{a_{mn}}{b_{mn}},$$

$$a_{mn} = 2(1 + \nu_1)(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) c^2 (m\pi)^2 (n\pi)^2 +$$

$$-k_1 (1 - \alpha_1)^2 (m\pi)^2 \left[\frac{k_1}{k_2} (m\pi)^2 + c^2 (n\pi)^2 + k_3 \left(\frac{1}{h^*} \right)^2 (1 - \alpha_2) \right] +$$

$$-(1 - \alpha_2)^2 c^2 (n\pi)^2 \left[(m\pi)^2 + \frac{c^2}{k_2} (n\pi)^2 + k_3 \left(\frac{1}{h^*} \right)^2 (1 - \alpha_1) \right] \quad (12)$$

$$b_{mn} = \left[(m\pi)^2 + \frac{c^2}{k_2} (n\pi)^2 + k_3 \left(\frac{1}{h^*} \right)^2 (1 - \alpha_1) \right] \cdot \left[\frac{k_1}{k_2} (m\pi)^2 + \right.$$

$$\left. + c^2 (n\pi)^2 + k_3 \left(\frac{1}{h^*} \right)^2 (1 - \alpha_2) \right] - \frac{1}{k_1} \left(\nu_1 + \frac{k_1}{k_2} \right)^2 (m\pi)^2 (n\pi)^2$$

If $S_a = 0$ this the first two areas indicate regions of stability are given in the form.

$$\frac{\Theta_{mn}}{2\Omega_{mn}} = \sqrt{1 \pm \frac{S_b}{2 \cdot N_{mn}^{11}} \cdot \frac{1}{1+d}}, \quad \frac{S_b}{2 \cdot N_{mn}^{11}} \leq \frac{1+d}{2} \quad (13)$$

$$\frac{\Theta_{mn}}{2\Omega_{mn}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{3} \left(\frac{S_b}{2 \cdot N_{mn}^{11}} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+d} \right)^2}$$

The influence of ratio α_1, α_2 upon areas indicate regions of stability are shown in Fig 1.

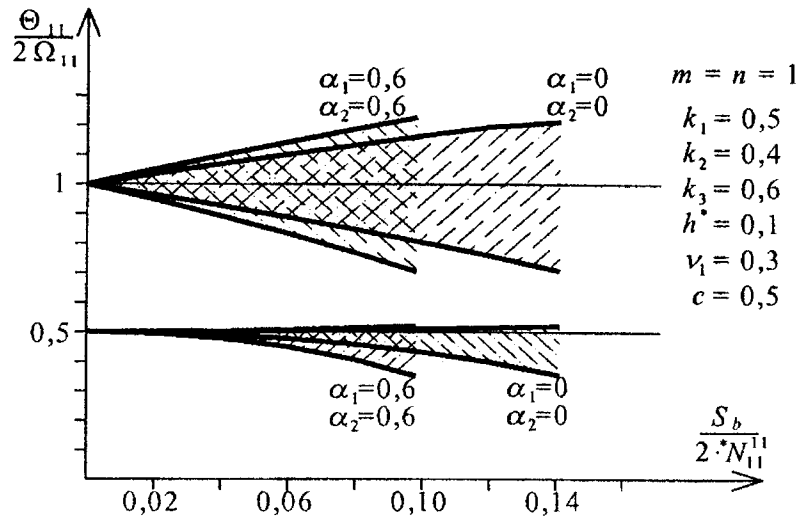


Fig. 1. The shaded areas indicate regions of stability.

Values of $\frac{\Theta_{11}}{2\Omega_{11}}, \frac{S_b}{2 \cdot N_{11}^{11}}$ given by coordinates of points in the unshaded areas represent an unstable condition.

2. FINAL CONCLUSIONS

In this paper, we have outlined a procedure leading from the equations of the linear elasticity for inhomogeneous plate-like bodies to the equations of the 2D-theories proposed for inhomogeneous plates. Every such procedure takes into account an arbitrary but fixed well-known plate kinematics constraints supplemented by an extra term which describe the effect of material inhomogeneity on plate stiffness. If the parameters α_1 and α_2 are different from zero then the areas that indicate regions of stability are greater than for $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

REFERENCES

- [1] Konieczny S., Langier Sz., Mes R., Dynamics and stability of multilayered composite plates. *Studia Geotechnica et Mechanica*, Vol. XXIII, No. 1 – 2, 2001, pp. 59 – 67.
- [2] Konieczny S., Langier Sz., Mes R., Yevtushenko A., Dynamic analysis of inhomogeneous multilayered plates. *Proceedings ICCE/9 San Diego, California 2002*, pp. 759 – 760.

NUMERYCZNA ANALIZA ZNISZCZENIA ABSORBERA ENERGII ZBUDOWANEGO Z RUR CIENKOŚCIENNYCH PODDANYCH ZGNIOTOWI

M. KOTELKO, S.LIPA

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy przedstawiono zagadnienie nośności w fazie zniszczenia absorbera energii zbudowanego z rur cienkościennych poddanych bocznemu (promieniowemu) zgniotowi. Omówiono metody analizy fazy zniszczenia absorberów energii. Przedstawiono model obliczeniowy metody elementów skończonych (MES) oraz wyniki obliczeń numerycznych MES. Przeprowadzono analizę wpływu liczby elementów rurowych i ich wymiarów oraz sformułowano wstępne wnioski dotyczące tego wpływu na nośność w fazie zniszczenia i ilość energii dysypowanej przez absorber. Wyniki obliczeń MES przedstawiono w postaci wykresów obciążenia w funkcji odkształcenia absorbera oraz map odkształceń i naprężeń.

1. WPROWADZENIE

Wraz ze wzrostem wymagań dotyczących bezpieczeństwa pojazdów, szczególnie samochodów osobowych, zaistniała potrzeba projektowania urządzeń, których zadaniem jest kontrolowane wyhamowanie, a w rezultacie, zatrzymanie poruszającej się masy. Jednym z możliwych rozwiązań konstrukcyjnych takiego urządzenia jest konstrukcja cienkościenna, która pochłania energię kinetyczną układu dynamicznego poprzez konwersję jej na energię odkształcenia plastycznego. Konstrukcję taką nazywamy absorberem energii.

W latach 60-tych XX-go wieku zalecenia normatywne w przemyśle samochodowym dotyczące bezpieczeństwa spowodowały rozwój nowej gałęzi w dziedzinie analizy inżynierskiej, zwanej „*impact crashworthiness*” zajmującej się takimi właśnie elementami konstrukcyjnymi, a szerzej – zachowaniem się układu dynamicznego przy zetknięciu z przeszkodą. W chwili obecnej stosuje się różne typy cienkościennych absorberów energii [1], zbudowane z różnych elementów odkształcalnych, pochłaniających energię uderzenia. Należą do nich bębny stalowe, rury (słupy) o przekroju kołowym lub pryzmatycznym poddane osiowemu ściskaniu, elementy sandwiczowe typu ulowego, ściskane stożki cienkościenne (*frusta*) ściskane profile cienkościenne typu omega i wiele innych.

Odrębnym typem absorberów energii są rury lub pierścienie cienkościenne, poddane bocznemu (promieniowemu) zgniotowi. Obciążone promieniowo układy rur cylindrycznych są stosowane między innymi jako amortyzatory przy zderzeniu pojazdu z przeszkodą [2]. W niektórych rozwiązaniach są one zbudowane w postaci układu rur na przemian metalowych i niemetalowych.

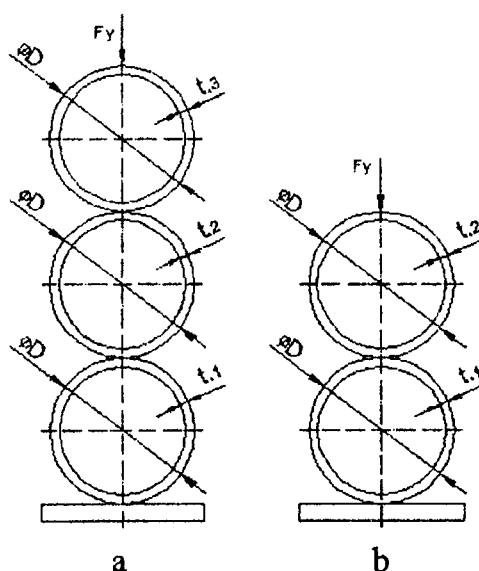
Zgniot pojedynczych rur metalowych o przekroju kołowym pomiędzy dwiema sztywnymi płytami badali De Runtz i Hodge [3]. Przeprowadzili badania doświadczalne oraz bardzo przybliżoną analizę teoretyczną zagadnienia. Zgniotowi i analizie fazy

zniszczenia rur cienkościennych o przekroju eliptycznym wzmocnionych cięgnami średnicowymi i obciążonych promieniowo za pomocą dwu sztywnych płyt poświęcona jest praca Wu i Carney'a [2]. Przeprowadzili oni analizę nośności w fazie zniszczenia takich rur stosując metodę kinematyczną i wykorzystując jednocześnie założenia teorii sztywno-plastycznej [4], oraz jednocześnie szacując nośność w fazie zniszczenia „od dołu” za pomocą metody statycznej. Praca zawiera także wyniki obliczeń MES za pomocą pakietu ABAQUS i wyniki analizy wpływu różnych parametrów geometrycznych absorbera na jego nośność w fazie zniszczenia i ilość pochłanianej energii. W publikacji [5] ci sami autorzy porównali otrzymane wyniki obliczeń teoretycznych z wynikami eksperymentu. Stwierdzili, że obciążenia rury o przekroju eliptycznym wzdłuż wielkiej osi elipsy zwiększa ilość energii absorbowanej. Zbadali także wpływ cięgien średnicowych na wielkość energii dysypowanej oraz nośność w fazie zniszczenia.

2. CEL I PRZEDMIOT PRACY

W dotychczasowych pracach dotyczących absorberów pierścieniowych lub rurowych poddanych zgniotowi w kierunku promieniowym nie rozważano takich, które zbudowane byłyby z więcej niż jednego elementu odkształcalnego. Ponieważ większa liczba takich elementów powoduje wzrost energii dysypowanej i nośności w fazie zniszczenia oraz wydłuża czas reakcji absorbera w warunkach kolizji, w niniejszej pracy rozpatrzono absorbery typu rurowego poddane zgniotowi w kierunku promieniowym, zbudowane z dwu lub trzech elementów rurowych.

Przedmiotem pracy był zatem absorber wieloczłonowy, zbudowany z elementów rurowych poddanych bocznemu (promieniowemu) zgniotowi (Rys.1).



Rys. 1. Schemat absorbera: a) z trzema elementami rurowymi, b) – z dwoma elementami rurowymi

Celem pracy była analiza parametryczna i zbadanie wpływu liczby elementów rurowych oraz ich geometrii i konfiguracji na nośność w fazie zniszczenia i ilość energii pochłanianej przez absorber. Dokonano tego za pomocą obliczeń teoretycznych metodą elementów skończonych (MES). Praca ma charakter wstępnej analizy zagadnienia.

Przewiduje się weryfikację doświadczalną otrzymanych wyników numerycznych oraz opracowanie rozwiązania metodą analityczną, która byłaby przydatna dla konstruktora we wstępnej fazie projektowania absorbera, pozwoliłaby bowiem na opracowanie stosunkowo prostych algorytmów obliczania nośności w fazie zniszczenia.

Przeanalizowano trzy różne przypadki absorbera zbudowanego z trzech elementów rurowych (Rys.1) o różnych grubościach ścianek oraz jeden absorber składający się z dwu elementów. Grubości ścianek i konfigurację wszystkich rozpatrzonych absorberów zestawiono w Tablicy 1.

Tablica 1. Wymiary absorberów

Symbol absorbera	Liczba elementów rurowych	t_1 mm	t_2 mm	t_3 mm	D mm
AB3-1	3	5.5	5.5	5.5	44.25
AB3-2	3	4	3	2	42
AB3-3	3	2	3	4	42
AB2	2	5.5	5.5	-	44.25

Długość wszystkich elementów rurowych wynosiła $l = 150$ mm. Każdy z absorberów zbudowany był z elementów rurowych o jednakowych średnicach zewnętrznych.

3. METODY ANALIZY FAZY ZNISZCZENIA ABSORBERÓW ENERGII

W większości przypadków cienkościennych absorberów energii proces zniszczenia inicjowany jest sprężystym lub sprężysto-plastycznym wyboczeniem jednej lub kilku ścianek, po którym następuje propagacja obszarów uplastycznionych zlokalizowanych w tzw. *załomach plastycznych*, w wyniku czego tworzą się lokalne przeguby plastyczne, będące węzłami plastycznego mechanizmu zniszczenia [4,8]. Wielkość energii dysypowanej w procesie deformacji tego mechanizmu jest miarą efektywności absorbera. Drugim czynnikiem wpływającym na efektywność absorbera jest jego nośność we wstępnej fazie zniszczenia. Jeżeli jest ona za wysoka, to może spowodować zbyt wysokie prędkości w fazie uderzenia. Z drugiej strony, jeżeli nośność ta jest zbyt niska, powoduje to zmniejszenie energii dysypowanej.

Uwagi powyższe dotyczą również absorbera zbudowanego z cienkościennych elementów rurowych poddanych bocznemu zgniotowi, jednakże charakter ich zniszczenia jest nieco inny. W przypadku pojedynczego, nie wzmocnionego walca, po osiągnięciu siły zgniotu odpowiadającej uplastycznieniu w strefie przyłożenia siły następuje propagacja obszarów uplastycznionych, aż do utworzenia się czterech przegubów plastycznych rozmieszczonych równomiernie co 90° [2].

Analizę pracy absorbera w fazie zniszczenia, w szczególności oszacowanie jego nośności w tej fazie można przeprowadzić stosując *oszacowanie dolne* nośności (poprzez implementację metody statycznej) lub *oszacowanie górne* – stosując metodę kinematyczną. W pierwszym przypadku należy spełnić warunek uplastycznienia i warunek równowagi, stosując np. metodę statycznie dopuszczalnych pól naprężeń [6,7]. Należy w tym miejscu zaznaczyć, iż dla wielocłonowego absorbera będącego przedmiotem rozważań konieczna jest także analiza możliwych ścieżek równowagi, a w szczególności wyznaczenie ścieżek pokrytycznych przy ewentualnej utracie stateczności

globalnej lub lokalnej układu. W drugim przypadku należy rozważyć kinematycznie dopuszczalny mechanizm plastyczny [4]. Nośność w fazie zniszczenia jest wówczas określana z zasady mocy przygotowanych o następującej postaci:

$$P \cdot \dot{\delta} = \int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^P(\beta, \chi) dV \quad (1)$$

gdzie, $\dot{\delta}$ - prędkość płynięcia (δ - przemieszczenie uogólnione), P - siła uogólniona, β - wektor parametrów kinematycznych mechanizmu, χ - wektor parametrów geometrycznych mechanizmu, $\dot{\epsilon}_{ij}^P$ - tensor prędkości odkształcenia plastycznego.

Pierwszym krokiem w rozwiązaniu zagadnienia nośności w fazie zniszczenia absorbera jest określenie geometrii plastycznego mechanizmu, a zatem sformułowanie wektorów χ i β w równaniu (1). Powinny one być określone na drodze teoretycznej identyfikacji pola przemieszczeń lub prędkości za pomocą MES oraz zweryfikowane badaniami doświadczalnymi. Niniejsza praca dotyczy pierwszej części tak sformułowanego problemu.

4. MODEL OBLICZENIOWY ABSORBERA I WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH.

Absorber będący przedmiotem rozważań zamodelowano jako zagadnienie płaskie, wykorzystując symetrię układu. Założono, że elementy rurowe obciążone są jak na Rys.1. Obliczenia przeprowadzono za pomocą programu ANSYS. Do budowy modelu MES użyto elementów skończonych typu PLANE183 i PLANE42. Rozwiązano zagadnienie nieliniowe, a zatem do obliczeń przyjęto model materiału biliniowego ze wzmocnieniem liniowym po uplastycznieniu o następujących parametrach:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} ; \nu = 0.3 ; \sigma_{pl} = 250 \text{ MPa} ; E_t = 2500 \text{ MPa}$$

gdzie: σ_{pl} - granica plastyczności, E_t – moduł styczny.

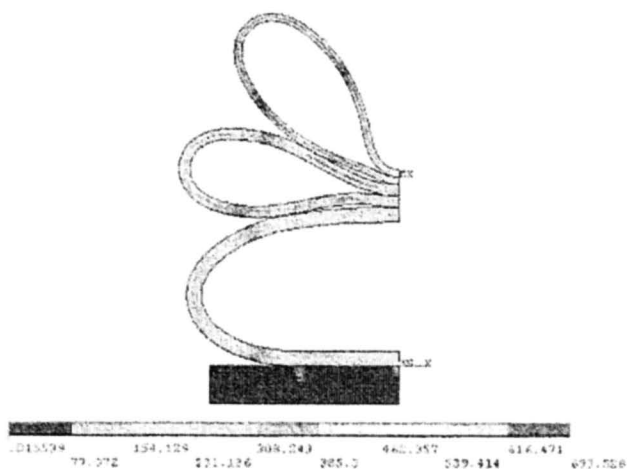
W obliczeniach nie narzucono wartości granicznej wytrzymałości doraźnej materiału na rozciąganie lub ściskanie. Zatem mapy przedstawione na Rys. 2 mają charakter identyfikacyjny, zaś wykresy na Rys. 3 i 4 mają sens fizyczny tylko do pewnych (nie sprecyzowanych w obliczeniach) wartości siły obciążającej.

Na Rys. 2 pokazano postaci odkształcenia i mapy naprężeń zredukowanych obliczanych wg hipotezy Hubera - Misesa dla absorberów trój-członowych o różnych grubościach ścian poszczególnych członów walcowych. Jak widać, odkształcenia najbardziej obciążonych członów są bardzo duże i sięgają 95 % średnic początkowych, aczkolwiek należy podkreślić, że w rzeczywistym absorberze (zależnie od wytrzymałości doraźnej materiału i ewentualnych naprężeń resztkowych) zniszczenie skrajnych włókien ściany walca może nastąpić przed osiągnięciem tak dużej deformacji.

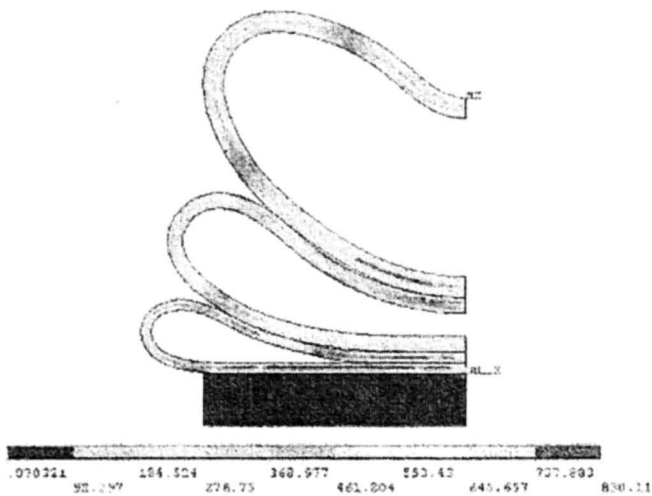
Z otrzymanych postaci odkształcenia można wnioskować, że w najbardziej obciążonych elementach rurowych powstaje cztero-przegubowy mechanizm plastyczny, nie jest to wszakże mechanizm tzw. *prawdziwy*, ale w odniesieniu do całego absorbera – *quasimechanizm* [4].



rys.2-a



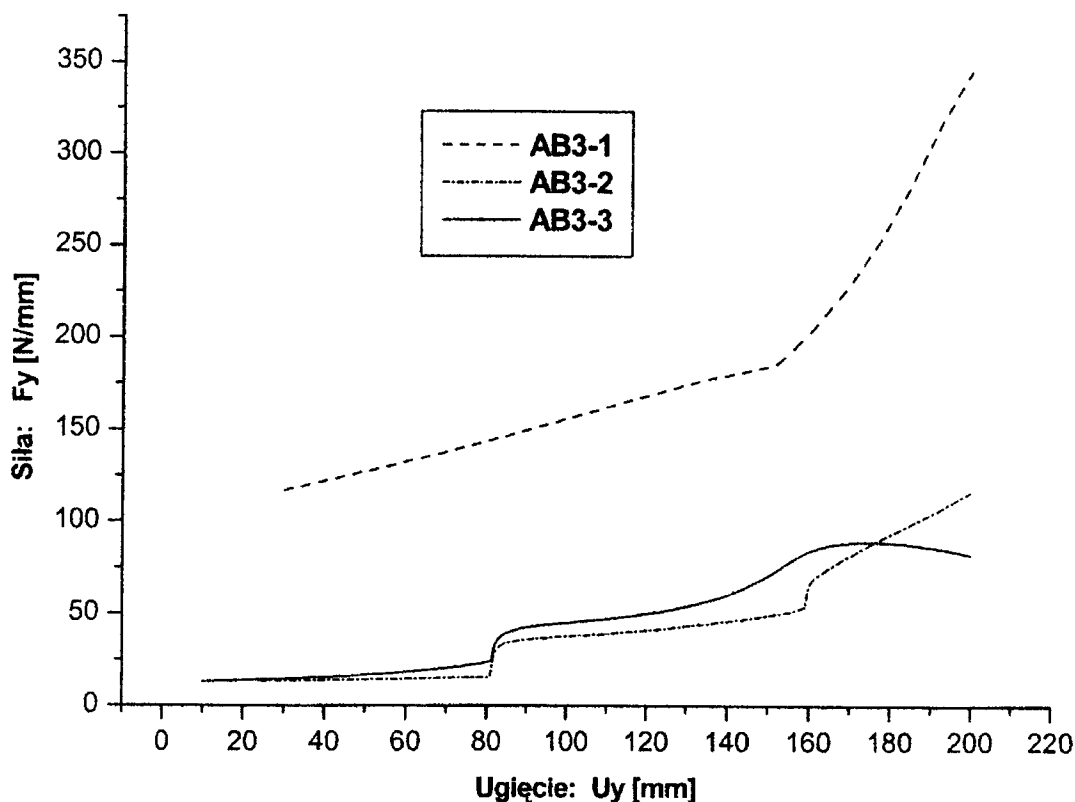
rys.2-b



rys.2-c

Rys. 2. Postaci odkształceń absorberów trój-członowych
a) AB3 – 1 , b) AB3-2 , c) AB3-3

Na Rys. 3 przedstawiono odpowiednie wykresy pracy trój-członowych absorberów, tj. wykresy siły zgniotu w funkcji ugięcia. Ze względów wspomnianych we wstępie absorber typu AB3 – 1 charakteryzuje się zbyt wysoką nośnością w fazie zniszczenia, natomiast absorber typu AB3 – 3 wydaje się być efektywny zarówno z punktu widzenia nośności przy zniszczeniu, jak i ilości energii dysypowanej.



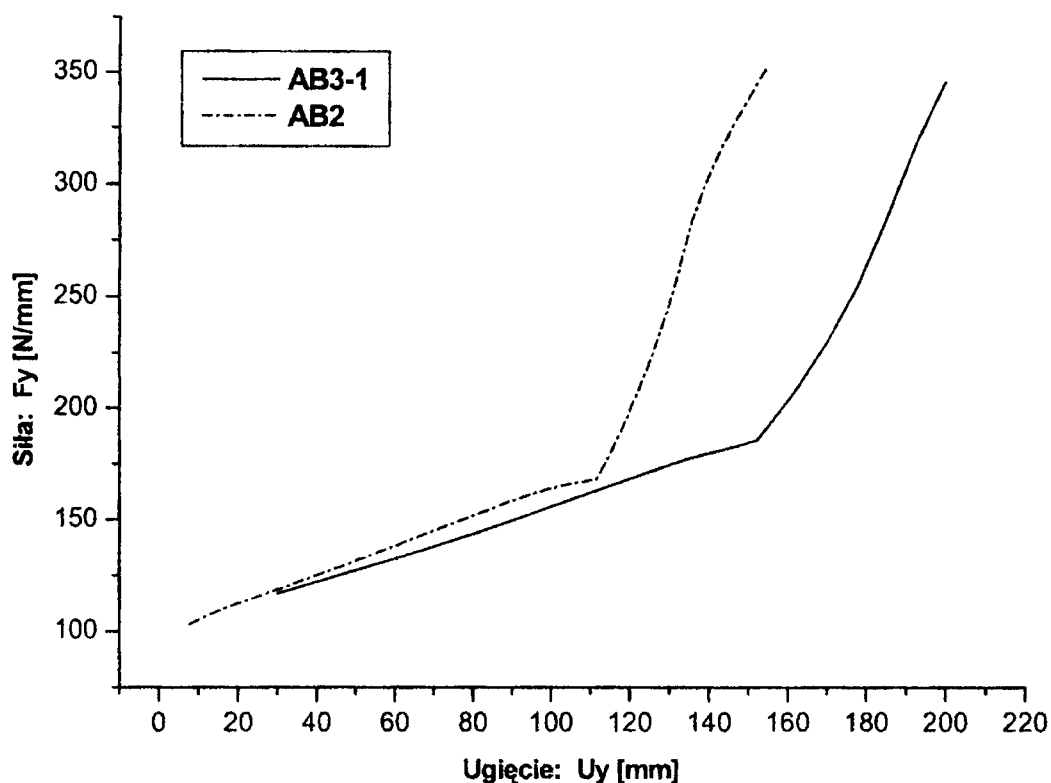
Rys. 3. Wykresy pracy absorberów trój-członowych o różnych grubościach ścian elementów rurowych

Interesujące jest zestawienie wykresów pracy (siła – ugięcie) absorbera dwu- i trój-członowego o jednakowych grubościach ścian elementów rurowych. Gradient wzrostu siły zgniotu jest prawie taki sam dla obu absorberów, z przesuniętym jedynie punktem „przejęcia” deformacji plastycznej z elementu skrajnego na następny.

5. UWAGI KOŃCOWE

Otrzymane wyniki obliczeń MES są zbieżne z tymi, jakie uzyskali De Runtz i Hodge za pomocą metody analitycznej [3], a następnie Wu i Carey [2] metodą zarówno analityczną, jak i numeryczną dla absorbera jednoczłonowego. Wyniki te potwierdzają także celowość stosowania absorberów wieloczłonowych, ze względu na wielkość energii dysypowanej w procesie zniszczenia i stanowią materiał wyjściowy do opracowania teoretycznego modelu plastycznego mechanizmu, tj. kinematycznie dopuszczalnego pola przemieszczeń w metodzie kinematycznej, dla absorberów wieloczłonowych.

Wykresy pracy absorberów (zależność siła zgniotu – ugięcie) wskazują na konieczność uwzględnienia wzmocnienia materiału po uplastycznieniu, nawet przy założonym w obliczeniach numerycznych stosunkowo niskim module stycznym.



Rys. 4. Zestawienie wykresów pracy absorbera dwu- i trój-członowego o jednakowej grubości ścian elementów rurowych.

LITERATURA

- [1] Alghamdi A.A.A., Collapsible impact energy absorbers: an overview, *Thin-walled Struct.*, v.39, pp. 189-213, Elsevier 2001
- [2] Wu L., Carney J.F., Initial collapse of braced elliptical tubes under lateral compression, *Int. J. Mech.Sci.*, v. 39, No 9, pp.1023-1036, 1997
- [3] De Runtz J.A., Hodge P.G., Crushing of a tube between rigid plates, *J. of Appl. Mech.*, pp. 391-395, September 1963,
- [4] Kotelko M., Mechanizmy zniszczenia zginanych dźwigarów cienkościennych o ścianach izo- i ortotropowych, *Z. N. Politechniki Łódzkiej* Nr 844, *Rozprawy Nauk.* Nr 273, Łódź 2000.
- [5] Wu L, Carney III JF. Experimental analysis of collapse behaviour of braced elliptical tubes under lateral compression. *Int. J Mech. Sci.* 1998;40(8):761–77.
- [6] Szczepiński W., Szlagowski J., *Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń*, PWN, Warszawa-Poznań 1985
- [7] Gill. S. S., Large deflection rigid-plastic analysis of a built-in semicircular arch. *Int. J. Mech. Engng Ed.*, 1976, 4, pp. 339-355.
- [8] Abramowicz W., Thin-walled structures as impact energy absorbers. *Thin-walled Struct.*, v.41, No 2-3, Elsevier February 2003, pp.91-109

NUMERICAL COLLAPSE ANALYSIS OF TUBULAR MULTI-MEMBER ENERGY ABSORBERS UNDER LATERAL COMPRESSION

In the paper the problem of collapse and energy dissipation of tubular multimember energy absorber subject to lateral compression is presented. Methods of analysis of collapse and initial collapse loads of the absorber are discussed. A numerical Finite Element (FE) model of the considered absorber and results of numerical calculations are presented. An analysis of the influence of the number of tubular members and also dimensions and lay-out of members upon the collapse load and an amount of the dissipated energy of plastic deformation is conducted. Results of numerical calculations are presented in the form of load-deformation diagrams and deformation patterns.

BADANIA NUMERYCZNE NOŚNOŚCI GRANICZNEJ MOSTU PŁYWAJĄCEGO

W. KRASOŃ, M. WIECZOREK

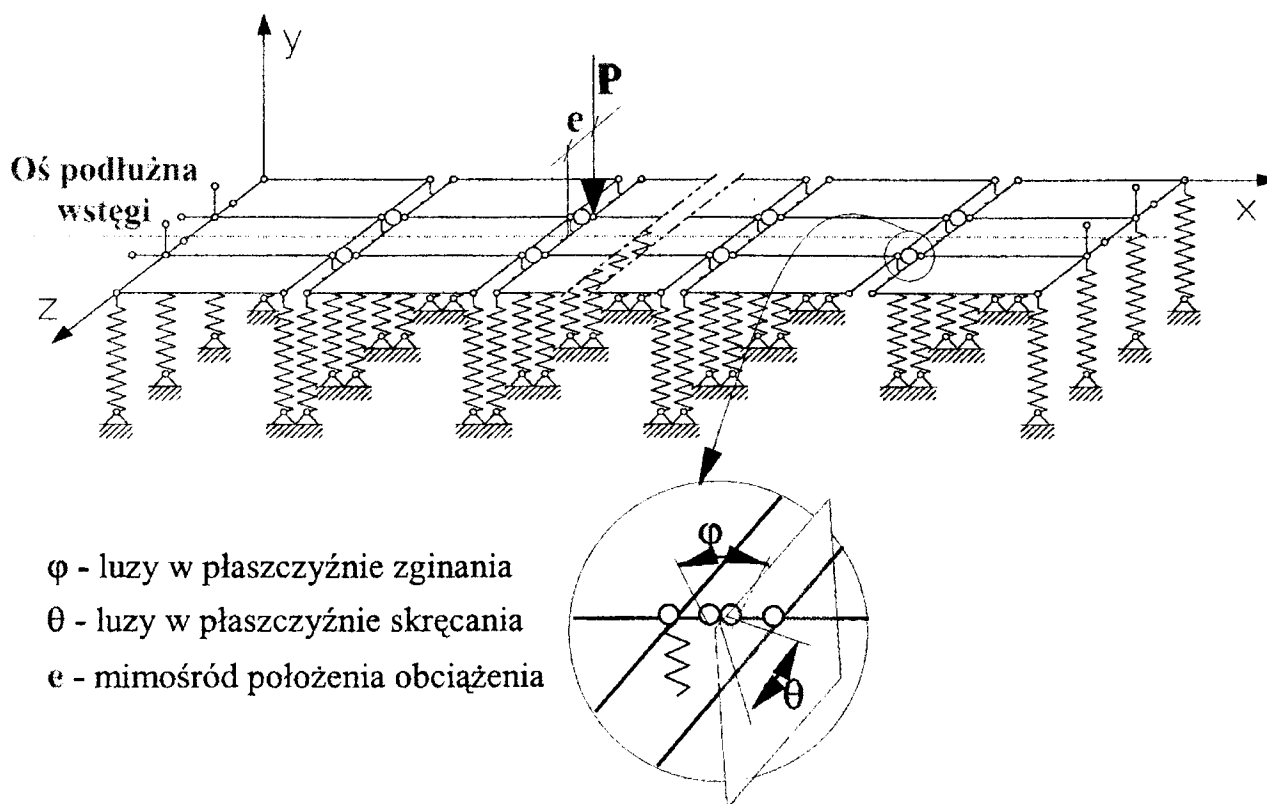
Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej Wojskowej Akademii Technicznej, ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

W referacie przedstawiono numeryczną analizę mostu pływającego typu pojedyncza wstęga. Badany most zestawiono z pontonów parku pływającego PP-64 z luzami wstępnymi w płaszczyźnie zginania i skręcania. Symulowano stan jednoczesnego zginania i skręcania wywołany obciążeniem zewnętrznym działającym na mimośrodku e względem osi podłużnej mostu. Z warunku dopuszczalnego zanurzenia pontonów, wyznaczono maksymalne wartości mimośrodów e dla podstawowych obciążeń normowych obowiązujących w NATO.

1. WSTĘP

Mosty pływające są interesującymi obiektami inżynierskimi ze względu na ich cechy konstrukcyjne i własności eksploatacyjne. Mosty takie mogą być zestawiane z identycznych, pojedynczych pontonów pływających we wstęgi pływające o różnych układach konstrukcyjnych (wstęgi pojedyncze, podwójne oraz mieszane) i dowolnej długości. Te cechy konstrukcyjne mostów pływających decydują o możliwości ich łatwego i szybkiego przystosowania do różnych warunków terenowych przeprawy wodnej, jak też przewidywanych obciążeń eksploatacyjnych. Mosty te ze względu na ich dużą mobilność wykorzystywane są chętnie przez wojsko, jako sprzęt przeprawowy. Ich potencjalne wykorzystanie w aspekcie możliwej współpracy wojskowej w ramach Paktu NATO, rodzi pytania, jakie kryteria konstrukcyjne i eksploatacyjne, należy spełnić, aby mosty pływające budowane na bazie Parku Pływającego PP-64 zapewniały bezpieczeństwo przeprawy sprzętu pozostającego na wyposażeniu wojsk NATO. W opracowaniu dokonano przeglądu norm, dotyczących organizowania przepraw z uwzględnieniem wymagań NATO, w zakresie niezbędnym do wykonania numerycznych badań nośności granicznej mostu pływającego, poddanego podstawowym obciążeniom przewidywanym przez Wojskową Klasyfikację Obciążeń MLC [1]. Prezentowane rozważania dotyczą mostu pływającego typu pojedyncza wstęga, zestawionego z identycznych pontonów Parku Pływającego PP-64, pozostającego na wyposażeniu Sił Zbrojnych RP. Symulowano stan jednoczesnego zginania i skręcania wstęgi wskutek przemieszczenia osi przeprowianego pojazdu względem osi podłużnej mostu. Stan jednoczesnego zginania i skręcania mostu pływającego jest naturalnym stanem wytrzymałościowym takiej konstrukcji, występującym w większości przypadków eksploatowanych mostów pływających. Jest wywoływany obciążeniem zewnętrznym, działającym na mimośrodku względem osi podłużnej mostu. Jednoczesne zginanie i skręcanie mostu występuje więc, gdy przeprowiany obiekt nie porusza się idealnie wzdłuż jego osi podłużnej. Z punktu widzenia bezpieczeństwa pracy wstęgi, rozważany przypadek jest najbardziej niekorzystny. Działanie dodatkowego momentu skręcającego w płaszczyźnie poprzecznej wstęgi, powoduje jednostronne pogłębienie zanurzeń pontonów oraz zwiększenie sił wewnętrznych [2].

W zaczepach połączeń pomiędzy poszczególnymi pontonami wstęgi, występują podwójne luzy wstępne. Oprócz luzów φ w płaszczyźnie zginania wstęgi, wprowadzane są jednocześnie luzy w płaszczyznach prostopadłych do osi podłużnej mostu (rys. 1). Umożliwiają one swobodny obrót pomiędzy sąsiednimi pontonami wstęgi w granicach luzu wstępnego θ .



Rys. 1. Schemat modelu dyskretnego wstęgi w analizie jednoczesnego zginania i skręcania z luzami podwójnymi

W stanie nieobciążonym występują znaczne luzy montażowe zarówno w płaszczyźnie zginania, jak też w płaszczyźnie skręcania wstęgi. Ich jednoczesne działanie zwiększa zanurzenia mostu. Dlatego celem badań prezentowanych w opracowaniu jest ustalenie dopuszczalnych wartości mimośrodu e , zapewniających bezpieczeństwo przeprowadzanego pojazdu. Ze względu na koszt badań eksperymentalnych oraz brak możliwości ich zrealizowania w zakresach eksploatacyjnie niedopuszczalnych (np. nadmiernych zanurzeń i przechyleń mostu) zastosowano symulacje numeryczne. Realizowano je metodą elementów skończonych implementowaną w autorskiej wersji oprogramowania, specjalizowanego do analiz konstrukcji z wieżami jednostronnymi i luzami montażowymi [3, 4].

2. KRYTERIUM BEZPIECZEŃSTWA PRZEPRAWY

Podstawowym dokumentem dotyczącym problematyki obciążeń konstrukcji mostów wojskowych i określającym zasady doboru obciążeń mostów, w tym również konstrukcji pływających zarówno na etapie projektowania, jak i eksploatacji jest STANAG 2021 pt. „Wojskowe obliczenia klasyfikacji mostów, promów, tratw i pojazdów”. Z punktu widzenia norm STANAG 2021 (Edition 6) następujące

parametry są istotne dla wojskowej klasyfikacji obciążeń mostów pływających i są zawarte w MLC (Military Load Classification):

a) Obciążenia od pojazdów

Hipotetyczne pojazdy (tzn. ich wymiary, masę, rodzaje obciążeń, itp.) przyjęto zgodnie z MLC [1]. Klasyfikacja pojazdów według MLC obejmuje 32 klasy standardowe, odpowiadające ciężarom hipotetycznych pojazdów gąsienicowych. 32 standardowe pojazdy hipotetyczne określone w każdej klasie, a wśród nich 16 pojazdów kołowych i 16 pojazdów gąsienicowych, dla których ściśle zdefiniowane są ich charakterystyki. Modele obciążeń pojazdów wojskowych określone przez normy STANAG 2021 są bardzo zbliżone do charakteru oddziaływań pojazdów, uwzględniają specyfikę obciążenia kołowego i gąsienicowego. Podstawowe obciążenie obowiązujące obecnie w NATO odpowiada klasie MLC 50 i 70, jako obciążenie gąsienicowe i klasie MLC 100 w przypadku obciążenia kołowego, odwzorowującego ciągnik z czołgiem na przyczepie. W dalszych rozważaniach wybrano podstawowe pojazdy hipotetyczne wg MLC50, 70 i 100. Stanowią one obciążenie dla rozważanego mostu typu pojedyncza wstęga. Ciężary tych pojazdów wynoszą odpowiednio: 500kN, 700kN i 1000kN.

b) Obciążenia dopuszczalne i przedziały bezpieczeństwa

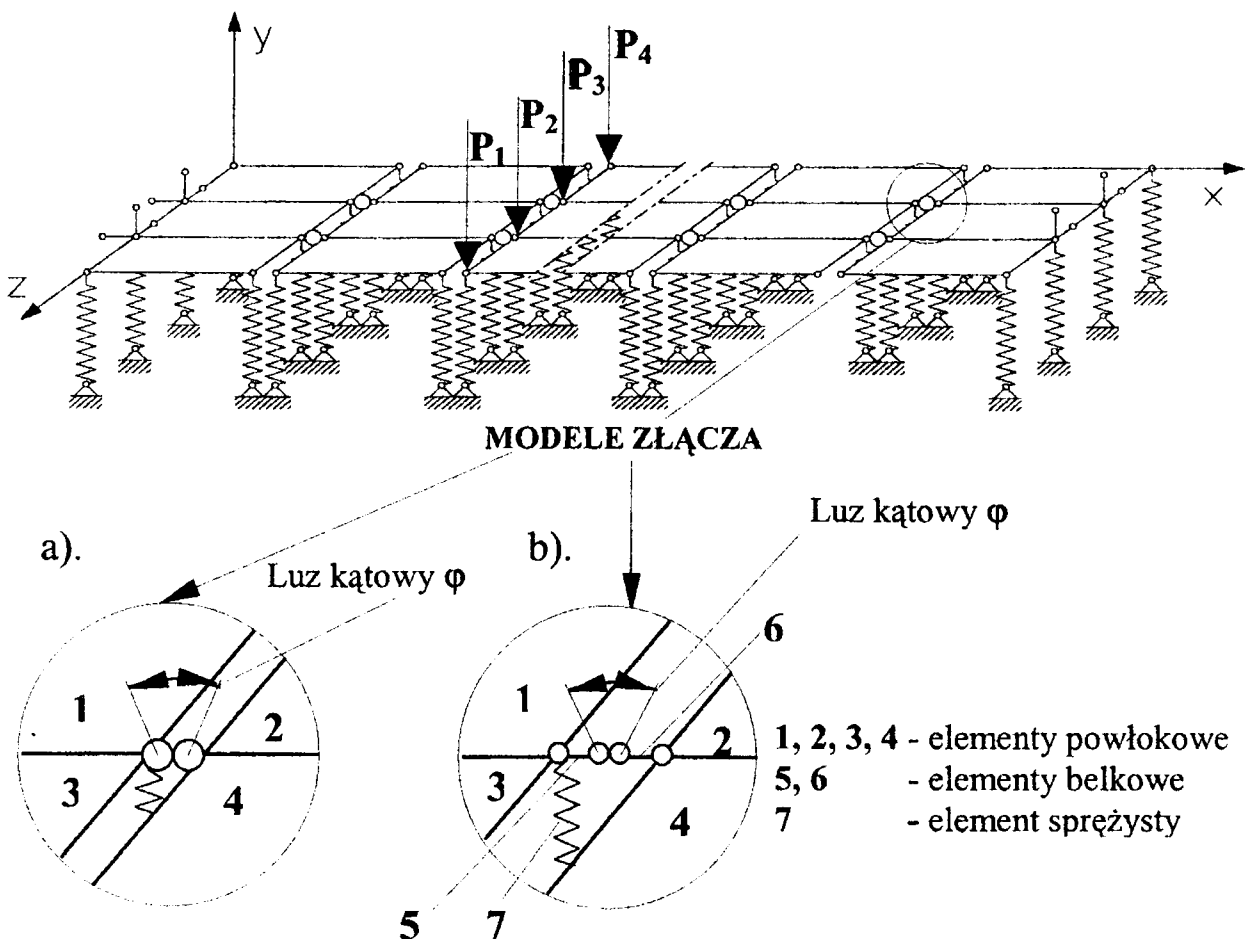
W przypadku mostów pływających zarówno kryteria wytrzymałościowe, jak i hydrostatyczne/hydrodynamiczne mogą decydować o dopuszczalnych obciążeniach MLC. Dlatego konstrukcje pływające muszą być sprawdzane z uwzględnieniem obu tych kryteriów. Z wytrzymałościowego punktu widzenia konstrukcje takie muszą zapewniać bezpieczne przeniesienie sił zewnętrznych pochodzących od przepływających pojazdów. Ponadto uwzględnić należy oddziaływanie wody (kryterium hydrostatyczne) oraz zapewnić stabilność i pływalność konstrukcji (kryterium hydrodynamiczne). Mniejsza wartość obciążeń dopuszczalnych określona według takich kryteriów przyjmowana jest jako bezpieczne dopuszczalne obciążenie MLC. Hipotetyczne pojazdy opisane w punkcie a) służą do zdefiniowania masy i geometrii przepływającego obiektu. W tabelicy 1 przedstawiono minimalną dopuszczalną wysokość wolnej (nie zanurzonej) burty dla różnych elementów mostu pływającego, jeśli pojazd umieszczony jest w najbardziej krytycznym mimośrodowym położeniu względem osi podłużnej mostu. Minimalna wysokość wolnej burty pontonu pływającego w normalnych warunkach (Tabela 1) przyjmowana jest jako kryterium przy ustalaniu zapasu bezpieczeństwa i stabilności pracy wstęgi. Szczególną uwagę należy także zwracać na zachowanie dopuszczalnego nachylenia bocznego mostu lub tratwy podczas normalnej eksploatacji.

Tabela 1. Minimalna wysokość wolnej burty - normalne warunki zastosowania mostu: typowe obciążenie, prędkość prądu wody 2.5 m/s, głębokość wody >2.5m

ELEMENT PŁYWAJĄCY	DZIÓB I RUFA [mm]	BURTY [mm]
Pływak pneumatyczny (elastyczny)	100	0
Ponton sztywny otwarty	225	125
Składany ponton sztywny zamknięty	150	100
Ponton sztywny zamknięty	50	0

3. MODEL DYSKRETNY

W analizie numerycznej jednoczesnego zginania i skręcania mostu pływającego, wykorzystuje się dyskretny model powłokowy przedstawiony na rys. 2.

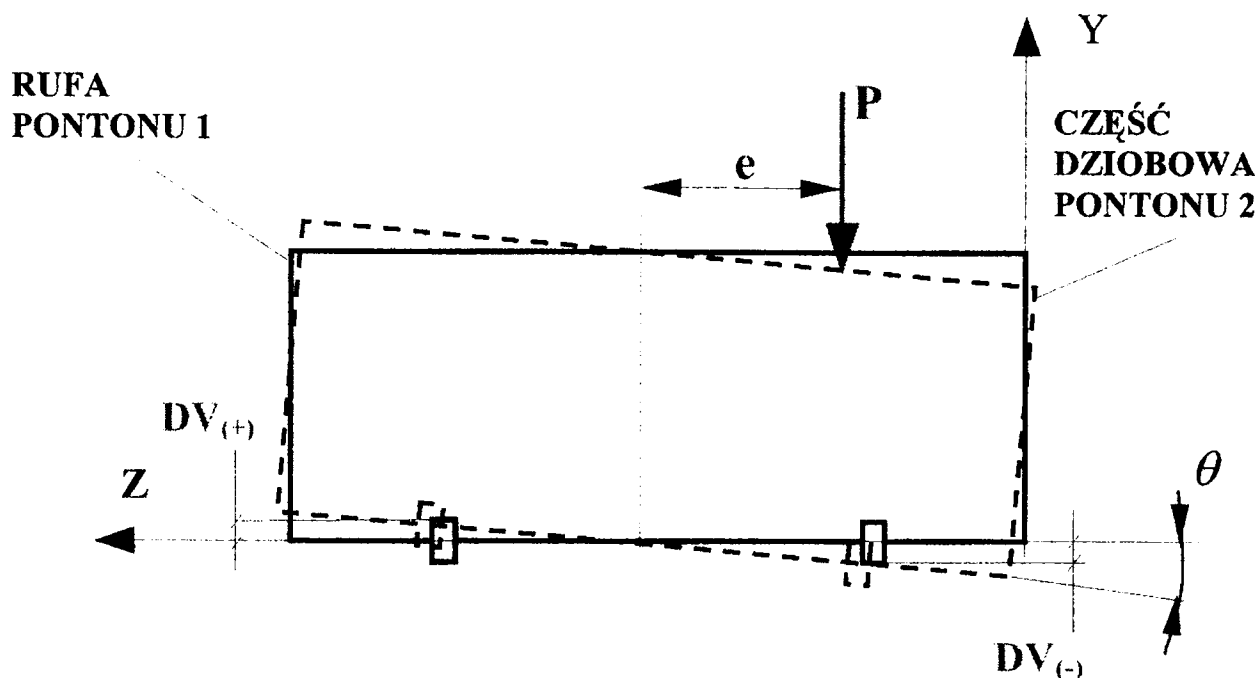


Rys. 2 Schemat dwuwymiarowego modelu dyskretnego mostu pływającego, obciążenia zredukowanego i zastosowane modele złącza

W proponowanym modelu powłokowym, pojedynczy ponton modelowano trzema czterowęzłowymi elementami powłokowymi (rys.2). Położenie krawędzi wewnętrznych elementów powłok składających się na model pojedynczego pontonu, odpowiada położeniu dwóch wewnętrznych, poprzecznych grodzi, stanowiących główne elementy nośne w strukturze pojedynczego pontonu. Usztywniają one pontony i służą do łączenia poszczególnych pontonów we wstęgę. Zastępczą grubość elementów powłokowych określono z definicji sztywności zginania powłoki. Zakłada się, że jest ona równa rzeczywistej sztywności na zginanie pojedynczego pontonu. W węzłach elementów powłokowych dołączono elementy sprężyste reprezentujące oddziaływanie wody (rys. 2a). Połączenia pomiędzy poszczególnymi pontonami modelowano wykorzystując koncepcję „węzła złożonego”(rys. 2a). W każdym z nich wprowadzono węzeł niezależny i węzeł zależny o identycznych współrzędnych. Stopnie swobody węzła zależnego definiowano w taki sposób, aby zapewnić ciągłość trzech translacyjnych i dwóch rotacyjnych składowych przemieszczeń oraz niezależność obrotu przekrojów przywęzłowych na kierunku definiowanych więzów jednostronnych, zastępujących w modelu dyskretnym luzy montażowe. W modelu tym wprowadzono 38 takich złącz. Wprowadzone więzy zewnętrzne zapewniały swobodne przemieszczanie

elementów skończonych w kierunku osi Y i jednocześnie uniemożliwiały ruch węzłów w początkowym przekroju mostu w kierunku osi X, Y, Z oraz ruch węzłów leżących w końcowym przekroju mostu w kierunku osi Y, Z (rys. 2). Tak zbudowany model składa się z 320 węzłów, 60 elementów powłokowych i 160 elementów sprężystych.

W każdym węźle złożonym tego modelu definiuje się podwójne luzy wstępne. Umożliwiają one jednocześnie swobodne przemieszczenia sąsiednich pontonów, w zakresie luzów definiowanych w płaszczyźnie zginania oraz luzów definiowanych w płaszczyznach poprzecznych wstęgi, wywołujących swobodne obroty pontonów względem siebie (rys. 3.).



Rys. 3. Schemat wzajemnych przemieszczeń dwóch pontonów w płaszczyźnie poprzecznej wstęgi

Możliwość obrotów pontonów w płaszczyznach poprzecznych w granicach luzów θ , zapewniono, wprowadzając w każdym węźle złożonym więzy jednostronne na kierunku osi Y oraz definiując składowe translacyjne luzów $DV_{(+)}$, $DV_{(-)}$ (rys. 3). Indeksy (+) i (-) informują o zwrotach luzów względem osi Y modelu. Luzy φ (rys. 2) zdefiniowano, jako pojedyncze więzy jednostronne, odpowiadające rotacyjnym składowym przemieszczeń na kierunku osi globalnej Z.

4. ANALIZA NUMERYCZNA

W każdym wariantcie wykonanych obliczeń zmieniano wartości sił obciążających most oraz wartość mimośrodowo e (rys. 1), na którym zostały one przyłożone względem osi podłużnej mostu. Wartość mimośrodowo obciążenia e zmieniano w zakresie 0 – 1.2m.

Obciążenie wstęgi przedstawione na rys. 1 zredukowano do zestawu 4 sił skupionych $P_1 - P_4$ (rys. 2). Taki zastępczy układ sił stanowi model obciążenia zastosowany w analizach dyskretnych. Suma zestawu sił $P_1 - P_4$ odpowiada ciężarowi hipotetycznego pojazdu przeprawianego po moście, działającego mimośrodowo, w odległości e od osi podłużnej mostu. Wartości zestawów sił stanowiących obciążenie

w poszczególnych wariantach analizy przedstawiono w Tabelach 2 –4. Odpowiadają one pojazdowi hipotetycznemu, wskazywanym przez klasyfikację MLC [1], jako podstawowe obciążenia mostów pływających. Wartości zestawów sił zamieszczonych w poszczególnych Tabelach 2 – 4 reprezentują odpowiednio ciężary $Q=500\text{kN}$, $Q=700\text{kN}$ i $Q=1000\text{kN}$ normowych pojazdów hipotetycznych zgodnych z MLC.

Tabela 2. Obciążenie $Q=500\text{kN}$ zredukowane w poszczególnych wariantach

Obciążenie zredukowane	Q=500kN					
	e=0.2m	e=0.4m	e=0.6m	e=0.8m	e=1.0m	e=1.2m
P_1 [N]	111547.82	98095.66	84643.47	71191.31	57739.13	44286.97
P_2 [N]	119145.61	113291.23	107436.84	101582.46	95728.07	89873.69
P_3 [N]	130854.39	136708.77	142563.16	148417.54	154271.93	160126.31
P_4 [N]	138452.18	151904.34	165356.53	178808.69	192260.87	205713.03

Tabela 3. Obciążenie $Q=700\text{kN}$ zredukowane w poszczególnych wariantach

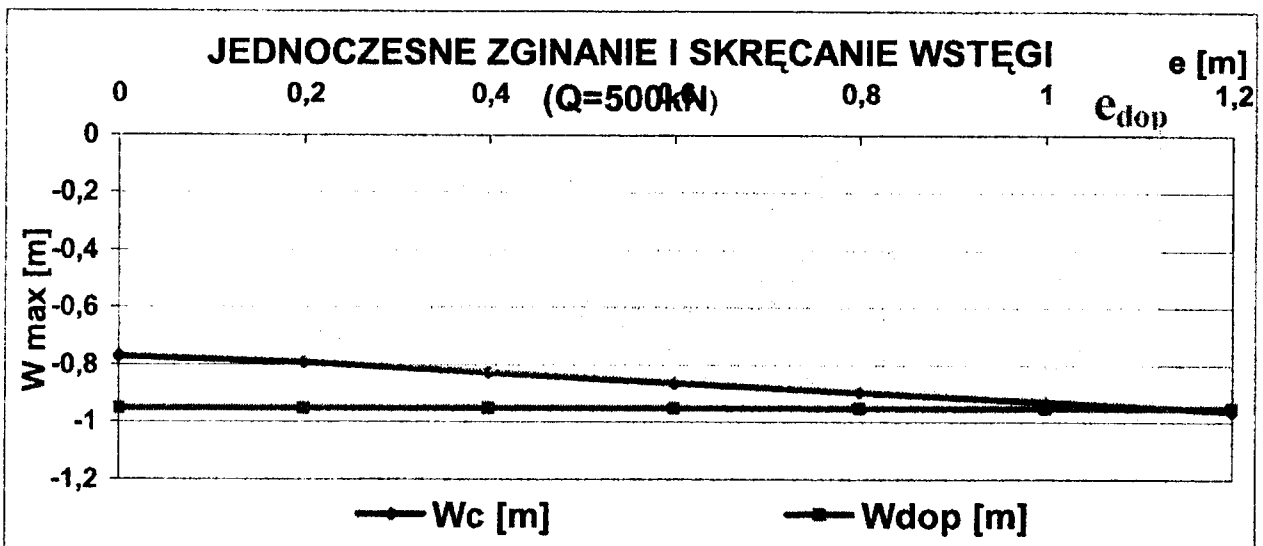
Obciążenie zredukowane	Q=700kN				
	e=0.2m	e=0.4m	e=0.6m	e=0.8m	e=1.0m
P_1 [N]	156166.96	137333.91	118500.87	99667.83	80834.80
P_2 [N]	166803.86	158607.72	150411.58	142215.44	134019.19
P_3 [N]	183196.14	191392.28	199588.42	207784.56	215980.71
P_4 [N]	193833.04	212666.09	231499.13	250332.17	269165.20

Tabela 4. Obciążenie $Q=1000\text{kN}$ zredukowane w poszczególnych wariantach

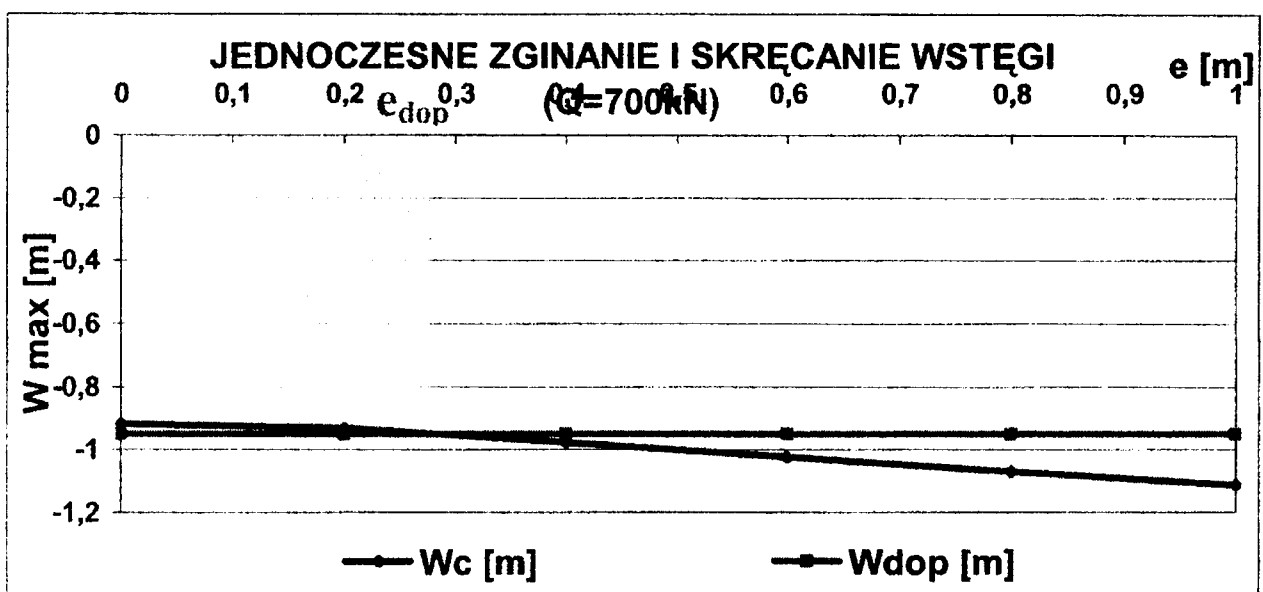
Obciążenie zredukowane	Q=1000kN				
	e=0.2m	e=0.4m	e=0.6m	e=0.8m	e=1.0m
P_1 [N]	223095.66	196191.31	169286.97	142382.63	115478.29
P_2 [N]	238291.23	226582.46	214873.69	203164.92	191456.15
P_3 [N]	261708.77	273417.54	285126.31	296835.08	308543.85
P_4 [N]	176904.34	303808.69	330713.03	357617.37	384521.71

W obliczeniach założono, że w złączach pomiędzy poszczególnymi pontonami wstęgi występują luzy montażowe uznane za optymalne z punktu widzenia ich wpływu na eksploatacyjne parametry pracy mostu. W modelu dyskretnym luzy te reprezentują kątowe więzy jednostronne i luzy $\phi=0.01333314\text{rad}$ definiowane w płaszczyźnie zginania mostu (rys. 1) oraz więzy jednostronne i luzy na kierunkach liniowych stopni swobody (rys. 3) $DV=\pm 0.005\text{m}$, definiowane w płaszczyźnie skręcania mostu [2].

Wartości dopuszczalnych mimośrodków e obliczono wykorzystując MES i model dyskretny mostu opisany w punkcie 3. W każdym wariantcie obliczeń, badano wpływ wielkości mimośrodu e na zanurzenia wstęgi. Wartości maksymalnych zanurzeń części dziobowych pontonów, wywołanych statycznym obciążeniem wstęgi ciężarami pojazdów hipotetycznych: $Q = 500\text{ kN}$, $Q = 700\text{ kN}$ i $Q = 1000\text{ kN}$ zamieszczono odpowiednio na rysunkach 4 – 6.

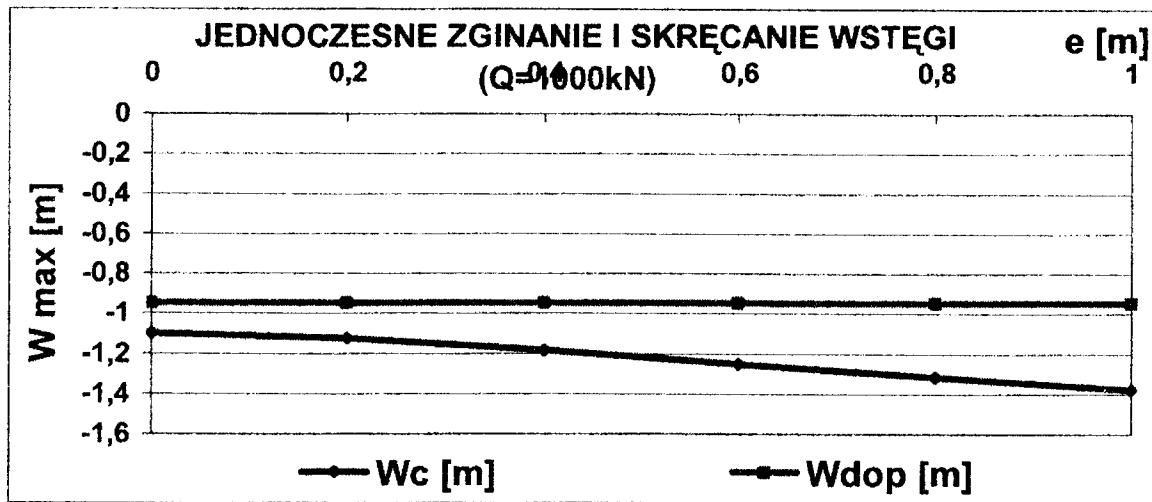


Rys. 4. Obszar zanurzeń bezpiecznych i dopuszczalny mimośród obciążenia dla $Q=500\text{kN}$



Rys. 5. Obszar zanurzeń bezpiecznych i dopuszczalny mimośród obciążenia dla $Q=700\text{kN}$

Na wykresach tych, linią opisaną indeksem W_{dop} zaznaczono maksymalne zanurzenia części dziobowych lub rufowych pontonów we wstędze. Odpowiadają one granicznej wartości zanurzenia pontonów. Na podstawie kryterium bezpieczeństwa omówionego w punkcie 2, odniesionego do sztywnych pontonów zamkniętych (Tabela 1), dla parku PP-64 wyznaczono $W_{\text{dop}} = -0.95\text{m}$.



Rys. 6. Obszar zanurzeń bezpiecznych i dopuszczalny mimośród obciążenia $Q=1000kN$

Mając zestawy krzywych odpowiadających maksymalnym całkowitym zanurzeniom W_c oraz linie reprezentujące maksymalne zanurzenia dopuszczalne W_{dop} wyznaczano dopuszczalne wartości mimośródów e_{dop} , opisujących graniczne przemieszczenia obciążenia zewnętrznego na wstędze względem jej osi podłużnej. W przypadku obciążenia wstęgi pojedynczej pojazdem o ciężarze $Q=500kN$ mimośród $e_{dop} \leq 1.13m$ (rys. 4), zaś dla $Q=700kN$ parametr $e_{dop} \leq 0.28m$ (rys. 4). Wstęga pojedyncza obciążona największą siłą $Q=1000kN$ nie spełnia kryterium bezpieczeństwa zanurzeń pontonu $W_c > W_{dop}$ (rys. 6), zatem nie może być dopuszczona do eksploatacji w takiej konfiguracji konstrukcyjnej.

LITERATURA

- [1] STANAG 2021 (Edition 6).
- [2] Bursztynowski Z., Mosty składane - podstawy obliczeń, PWN, Warszawa 1985.
- [3] Krasoń W., Wieczorek M., „Forming of the safe constructional features of floating bridges”, ‘ASEM-2002’, Busan Korea Płd 2002.
- [4] Wieczorek M., Krasoń W., „Zastosowanie metodyki MES z więzami jednostronnymi w analizie wytrzymałości mostów składanych”, Problems of Mechanical Engineering and Robotics, Monografie AGH, nr 6, Kraków 2002.

NUMERICAL INVESTIGATION OF THE LOAD CAPACITY OF FLOATING BRIDGE

Numerical analysis of the floating single-ribbon type bridge was presented in the paper. The examined bridge was set with pontoons of the PP-64 Floating Park. Initial clearances occur between pontoons at the bending plate and the torsion plate of the bridge. The simultaneous bending and torsion state was simulated. This state was caused by the external load operative at the eccentric e in relation to the longitudinal axis of the bridge. Maximal values of the basic standard loads obligatory in NATO were calculated from the permissible condition of the pontoons' submersions.

“STATIC RESONANCE” PHENOMENA IN THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELLS

V.L. KRASOVSKY, M.A. VARIANICHKO, D.V. NAGORNY
Prydneprovsky State Academy of Civil Engineering and Architecture,
Dnepropetrovsk, Ukraine

The results of experimental investigation (using qualitative small-sized steel samples) of influence of periodic non-homogeneity in a circumference direction onto deformation and buckling of longitudinally compressed elastic circle cylindrical shells are discussed. This non-homogeneity was caused by three different factors: by loading scheme (1), by initial imperfections of the mode of smooth cylinders (2) and by variability of the sign of an eccentricity of ribs of stringer modules (3). The conclusion is drawn about existence of “static resonance” phenomena for shells at presence of periodic non-homogeneity of different nature. The essence of such resonance can be explained as a development, at static loading of the thin-wall cylinder of large bending deformations in case of variability of non-homogeneity, which is close to variability of the first mode of eigen lateral oscillations of a structure.

1. INTRODUCTION

The eigenfrequencies and modes of oscillations are the integral characteristics of the system and are referred to the fundamental concepts of the dynamics of structures. From these two characteristics the eigenfrequency plays the leading role, since this characteristic is directly connected with mechanical resonance phenomena. The resonance itself is a drastic increase of amplitude of forced oscillations of the system when the frequency of external disturbance verges towards one of its eigenfrequencies. The resonance is exceptionally important dynamic effect. As for strength, it represents negative effect, leading to the deterioration of behaviour of a structure or, eventually, to its destruction. In techniques there is also a number of examples, when the resonance is used as a positive effect.

Unlike the frequency, the modes of eigen oscillations in dynamics of structures play the subordinate role. R.E.D.Bishop writes about it: «.. why to define the eigen modes of oscillations? The answer can be given this way: both calculations (the calculation of eigenfrequencies and eigen modes) are carried on simultaneously, and partly because the intensity of resonance oscillations depends on location of a generator of oscillations with respect to the eigen mode of oscillations » [1]. At the same time eigen mode reflects the important peculiarity of the system, connected with its stiffness. So, the maximum of amplitude of oscillations, corresponding to the eigen modes, indicates low stiffness of the system when it is deformed by these modes. It induces on thought, that the intensity of static deformations, which take place according to the modes of eigen oscillations of a structure, should be higher, than for all others cases. In the present paper three examples confirming this thought are given. All experiments were performed on qualitative small - sized steel

samples made using the same technology.

2. NON-UNIFORM COMPRESSION OF SMOOTH SHELLS

In papers [2] one learnt the double-sided (on both edges of a shell) piece-wise-uniform kinematic (the equal displacements were applied) longitudinal compression on segments along the guiding circle. The compression is uniformly distributed along the perimeter. The dimensions of the loaded and unloaded segments were taken equal, and their allocation on the edges was accepted symmetric with respect to the cross-section of the cylinder. The number of segments of the loading (p), corresponding to the variability of the load in circumference direction, varied in a wide range: $(p) = 2-48$. The samples with internal diameter $2R = 143 \text{ mm}$ and the following relative geometrical characteristics were tested: $L/R = 0.3-3.5$; $R/h = 150, 260, 300$ (L, h are the length and thickness of the shell).

At prebuckling stage under uniform axisymmetric compression of shells the bending deformations were observed, which were caused by Poisson's effect together with the initial deflection development. The loss of stability occurred as a continuous process with one, snap creating 2-4 belts of rhomb shaped dimples surrounding 3/4 of the perimeter of the shell. The values of critical load (N^{cr}) did not depend on L/R and for samples with $R/h = 150, 260, 300$ respectively the values compounded 0.60-0.68, 0.73-0.77 and 0.79-0.81 from N^c , where N^c is the classical value of critical load at homogeneous compression $N^c = 2\pi E h^2 / [3(1-\nu^2)]^2$ (E, ν are Young's modulus and Poisson's coefficient).

At non-uniform compression, alongside with a non-homogeneity of membrane stresses field, even at insignificant value of N , the essential periodic in a circumferential direction bending deformation were observed. The character and intensity of these deformations were determined by changing the loading p and the geometry of a shell. The prebuckling radial displacements (w) appeared to be periodic and high stable. The basic types of prebuckling deformation (modes of generating and guiding lines) in some cross-sections are given in Fig. 1, *a* ($L/R = 2$; $R/h = 300$). Here, also beneath them, (Fig.1, *b*) the dependencies of amplitude of displacements W (parameter $\bar{W} = W/h$) on the relative load $\bar{N} = N/N^c$ are shown. On these schemes the positive directions of displacements (to the center of curvature) are indicated by arrows. On the graphs the curves of the amplitude changes of positive and negative displacements are aligned and are indicated the same way as corresponding modes. As one can see from the figures for all types of prebuckling deformation (excluding the case $p = 2$) the variability of displacements in a circumference direction corresponds with variability of the loading p . In the loaded zones the displacements develop inside the shell and in the unloaded zones— outside the shell. At $5 < p < 18$ these displacements can be well described by dependence $w = W \cos(py/R)$. The most intensive bending takes place at $p = 6$. The maximum curvature of generating line in this case is observed in a middle part of the shell. The increase of p leads to the movements

of a zone with maximum curvature to the edges. At $p > 24$ the non-uniformity of the loading does not cause any peculiarities to the prebuckling behaviour of the shells. In case of small variability of the loading (at $p < 5$) the bend of generating line occurs along the whole length of a shell, however its intensity is much lower, than at $p = 6$. Note that at $p = 2$ the harmonics with a number of waves $n = 6$ was the basic components of the prebuckling bend in a circumference direction.

The load-bearing capacity for non-uniformly compressed shells was reached because of the loss of stability in elastic stage of deformation. The values of N^{cr} , as well as prebuckling deformations, were determined varying the load p . The peculiarities of the waveform at buckling are determined by the type of prebuckling deformation. At $p > 24$ the loss of stability occurred the same as at uniform compression. In the same way the shells in the loaded zones at $p < 4$ buckled. In case $p = 5, 6$ the buckling mode was similar to mode of the first tone of lateral oscillations of a shell: the half-wave of dimples, spread along the whole length of the cylinder. When shells with localized prebuckling displacements (average variability of the loading $8 < p < 18$) buckled, the postbuckling dimples also removed to the edge of the cylinder.

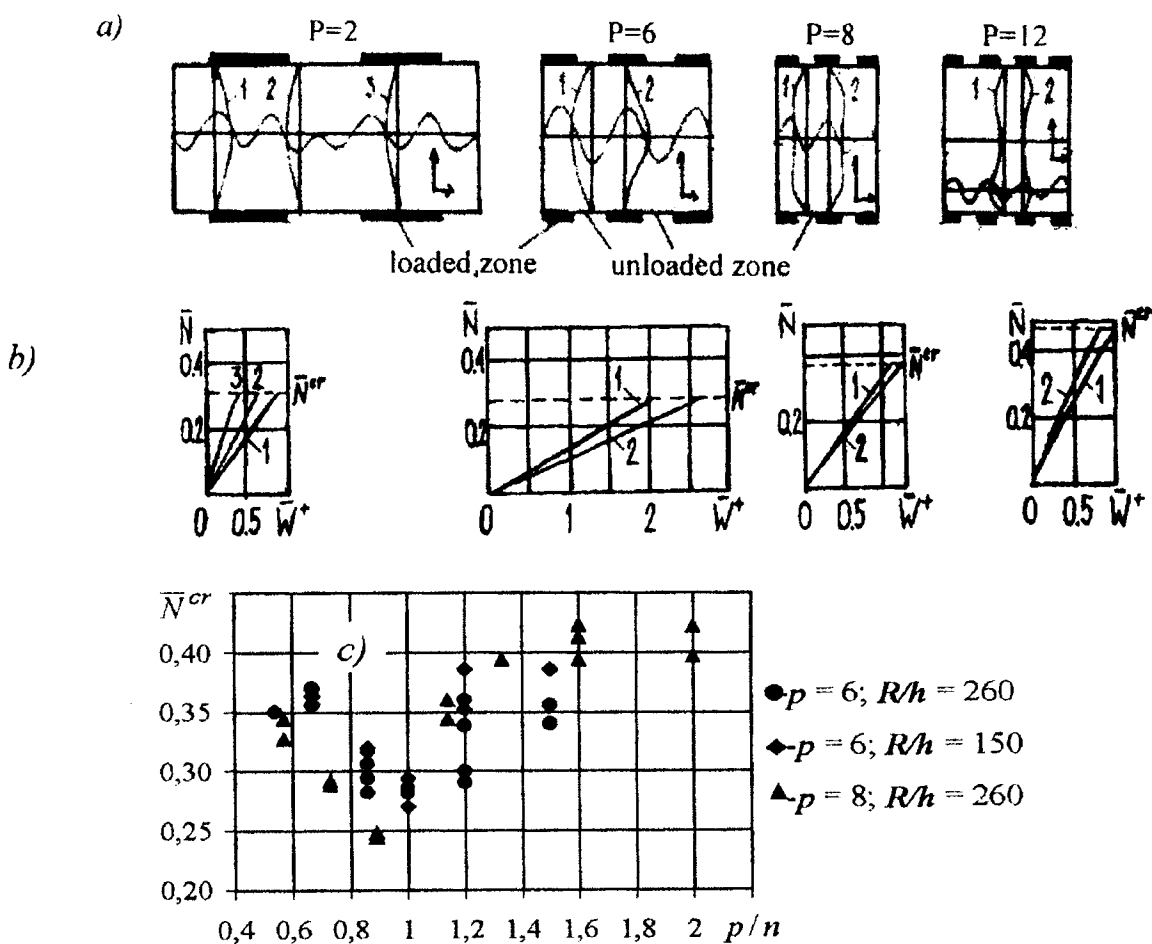


Fig. 1. Test results at non-uniform compression of shells

Similar results were obtained on the samples with other geometrical characteristics. The most considerable decrease of the critical stresses and loads at the most essential prebuckling deformations is observed. The deformations are characterized by the bending of generating lines on all length of the shell, and by the waveformation, similar mode of the first tone of lateral oscillations of a shell (n – the number of waves in circumference direction). The analysis of results obtained on samples of the different geometry, showed that they can be generalized if the variability of the loading in circumference direction is connected with variability of the mode the first tone of oscillations n of a shell. According to it the "resonance" variability of the loading, at which one the minimum critical stresses and loads is realized, can be evaluated as $p^*=n$. The generalized dependence \bar{N}^{cr} on p/n for cylinders of various geometry is presented in Fig. 1, c.

3. SMOOTH SHELLS WITH IMPERFECTIONS

The experiments [3] were performed on samples with the following geometry: $L/R = 2$, $R/h = 360$. The initial imperfections of a middle surface, in a form of local flat dimples with depth $W_0 = (1.5-2.0) h$, were made on shells artificially – by indenting of the spherical segment in the cylinder from its external surface (since the natural sag was negligible, it was suppressed by the artificial sag). These dimples were applied in the middle (by length) cross-section, uniformly along the circumference. The number of dimples (n^0) varied from 2 up to 17. It should be noted that n^0 can be considered as variability of periodic imperfections in a circumference direction.

The samples without artificial dimples lost their stability with one snap at average values of $N^{cr} = 0.61 N^c$. Two-tree belts of rhombus shaped dimples, surrounding of 3/4 shell surface, emerged. The variability of the postbuckling mode - $n^{cr} = 9-10$ (the calculated number of waves corresponding to N^c is $n^c = 17$).

The local buckling preceded to the global loss of stability of shells with artificial imperfections in all cases. The relative loads of transfer to the postbuckling configurations, depending on n^0 , are represented in Fig. 2. The light circles correspond to the loads of local buckling, the light quadrates ones to bifurcation modification of the local postbuckling configuration, and the dark circles correspond to the general loss of stability.

The transfer to the local postbuckling modes was realized by sequential process of transformation of initial dimples into the postbuckling ones. The first postbuckling dimples practically for all cases were created by "snap-free" scheme during sequential increase of the largest initial dimples. The further process of accumulation of dimples occurred both as snaps and as snap-free scheme. At the snaps the load insignificantly reduced. As a result, the bearing capacity of the shells at $n^0 = 7-8$ and ≥ 12 was determined by the loads of local buckling. At $n^0 = 2-6, 9, 10$ the dimensions of dimples of the local postbuckling modes were approximately equal and less than the dimensions of dimples of the overall postbuckling configuration. In a case $n^0 = 7, 8$ the postbuckling dimples in a circumference direction were essentially larger than the considered ones, and in a longitudinal direction

spread along length of the shell, similarly to the postbuckling mode at external pressure. The accumulation and the increase of dimensions of dimples of the local postbuckling mode at $n^0 = 12$ lead to the general buckling, that in all cases occurred with sharp snap, creating two belts of the rhomb shaped dimples ($n^{cr} = 8, 9$). At $n^0 \geq 12$ the bifurcation modification of the local mode preceded to the overall loss of stability: instead of emerging of 10-11 small dimples 5-6 large dimples emerged (similar to the dimples of the local mode at $n^0 = 7-8$). Note that the depth of these dimples considerably exceeded amplitude of the general buckling mode

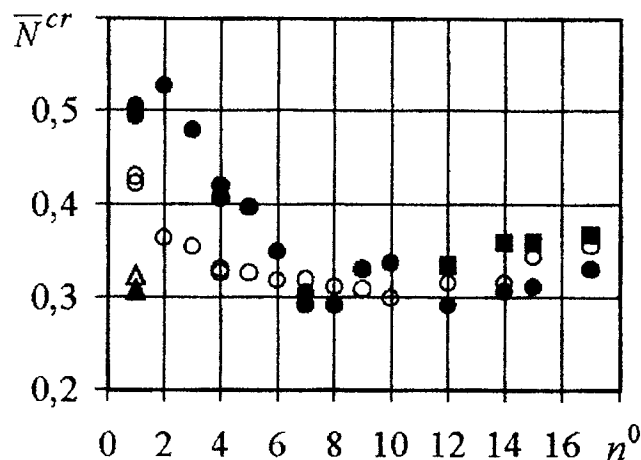


Fig. 2. Test results for imperfect shells

The analysis of dependence " $\bar{N}^{cr} - n^0$ " shows, that there is a selectivity of longitudinally compressed of the shell to the variability of the considered imperfections n^0 . As it can be seen from Fig. 2 the highest influence of imperfections on N^{cr} appears at $n^0 = 7-8$. This variability of imperfections corresponds to the variability of the mode of the first tone of lateral oscillations of shell of buckling of the cylinder at external radial pressure, the designed value by which one compounds $n = 7$. In this case the buckling occurred with creation of the large dimples, similar to the mode of lateral oscillations. It should be noted that the presence of the essentially localized in a longitudinal direction of the initial dimple on a shell leads to the local postbuckling mode. The initial dimple was close to axisymmetric and differs by significant amplitude ($W_0 \geq 0.6 h$). The light triangle corresponds to load of transfer to the local postbuckling mode, the dark triangle – to the general postbuckling mode.

4. STRINGER SHELL WITH AN ECCENTRIC VERSATILE REINFORCEMENT

The series of 9 high-quality shells of equal geometry were tested. Each shell was equipped with 36 stringers, equidistant from each other: two samples with one-sided external and internal ribs and 7 samples - with versatile allocation of ribs periodically

located in a circumference direction. The dimensions of panels with external and internal equipment were equal. The stiffeners allocation is shown in the table, where k_+ , k_- are the numbers of panels on a sample with internal and external allocation of ribs respectively; t - number of ribs placed on each panel (see also schemes in a Fig. 3, *a-f*). It should be noted that the sign of an eccentricity of ribs in a circumference direction periodically varied for shells with a versatile reinforcement with frequency $k = k_+$. For sample № 7 due to unequal number of panels with an external and internal reinforcement the periodicity of alternation of the ribs was not served. The panels with external ribs in this case were placed adjacent. The geometry of shells: $2R = 172 \text{ mm}$; $L = 86 \text{ mm}$ ($L/R = 1$); $h = 0.185 \text{ mm}$ ($R/h = 465$). The stringers of V-profile with dimensions of cross-sections ($3.2 \times 3.9 \times 0.345$) mm were connected to the skin along the wide side of angle profile. The load was applied to the shells only via the skin.

Table 1.

№ of sample	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k_+ / k_-	1/0	0/1	18/18	9/9	9/9	6/6	4/5	3/3	2/2
t	36	36	1	2	2	3	4	6	9
N^m, kN	36.5	32.3	22.3	12.1	13.3	22.0	21.9	22.4	22.2
N^{cr}, kN	41.4	59.1	31.9	24.6	26.2	40.8	30.1	46.7	31.9
N^*, kN	45.9	59.1	51.7	47.7	48.9	48.1	52.2	54.5	54.4

The local buckling of the skin between the ribs foreran to the overall loss of stability of shells. Such local buckling occurred with creation of large dimples with one half-wave along the length. The levels of the loads, for which the intensive local waveformation (N^m) started, are presented in the Table 1. The slight overall (surrounding the ribs) prebuckling bend, developing toward the ribs for shells with a one-side reinforcement was observed. The collapse character of the samples with external and internal ribs was essentially different. For the external allocation of ribs the overall loss of stability was accompanied with a sharp snap and the decrease of the load ($n^{cr} = 8$). The shells with internal ribs buckled "softly" at the increase of the load ($n^{cr} = 10$), and the ultimate load (N^*) appeared to be higher than the bifurcation (N^{cr}) on 11 %. The values of N^{cr} and N^* are given in the table. The value N^* of the shells with external reinforcement is almost 30 % higher than the value the internal location of the ribs.

For all samples with versatile allocation of ribs there are both local and general bending deformations. The intensity and kind of prebuckling deformations were determined by variability of the sign of an eccentricity of the ribs. In all cases the bend in longitudinal direction occurred with one half-wave. The modes of prebuckling deflections in a circumference direction are presented in Fig. 3, *a-e*. For $k > 4$ (Fig. 3, *a-d*) the variability of bending deformation coincided with variability of the sign of an eccentricity of the ribs. The panels with internal ribs had deflections directed inside the shell, with external edges –

outside, were developed. At small k the variability of bending deformations was higher than the variability of the sign of an eccentricity of reinforcement, and the intensity of the bend was reduced. In Fig. 3, *a-d* the dependencies of amplitude of relative deflection \bar{W} on the load N (the displacements, stipulated by local buckling of the skin, were disregarded) are represented.

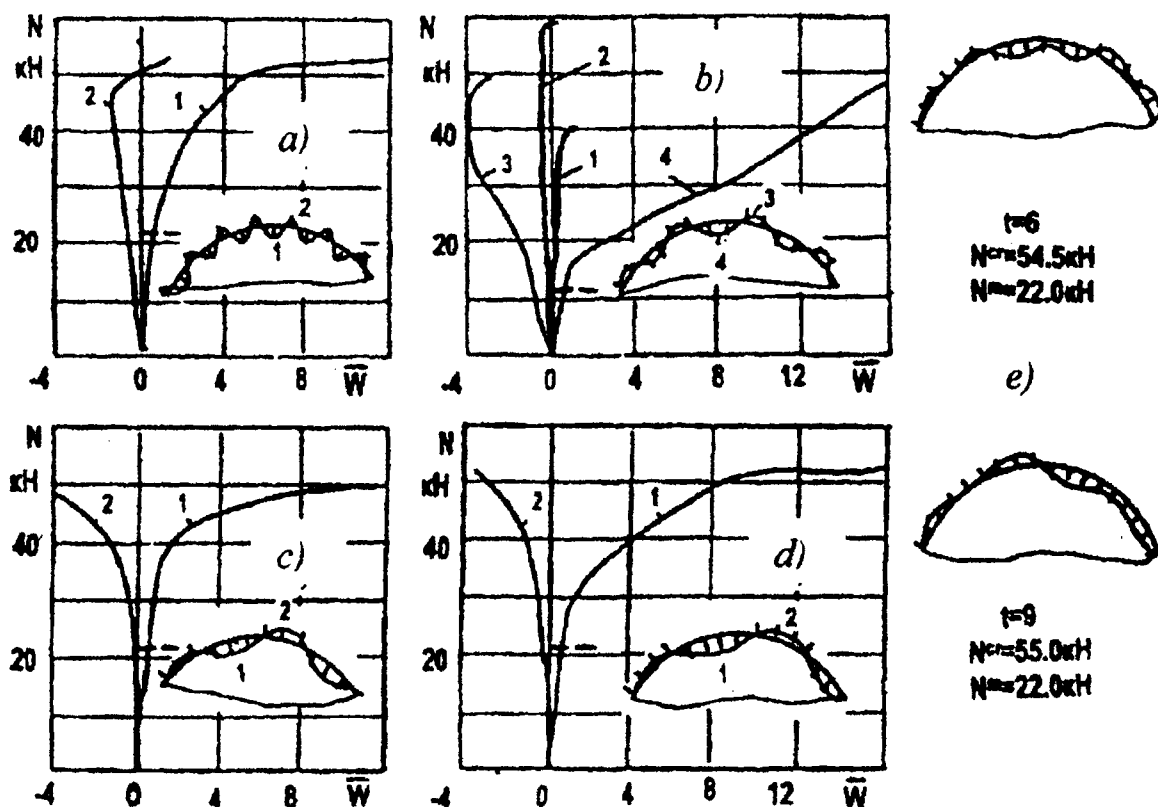


Fig. 3. Test results for reinforced shells

The development of essential overall deformations lead to the sharp reduction of N^m (see Table 1, and also graphics in Fig. 3, *a-d*, where the level of N^m is marked by two horizontal strokes). The local waveformation occurred periodically non-uniformly, mostly, at the most deformed segments of a shell with internal reinforcement. The character of the general prebuckling displacements is essentially nonlinear. The most intensive change of deformations is observed at $k = 9$. The essential increase of deflections in this case happened from the beginning of the loading (see Fig. 3, *b*, here for comparison the dependencies for the shells with one-sided external (1) and internal (2) reinforcement are presented).

The collapse of the shells with versatile ribs occurred during the process of their sequential loading. At first, the dimples were created "softly" without reduction of the load in zones with internal ribs. The corresponding load in the table is marked as N^{cr} . Further

loading was accompanied with increase of N and intensive growth of the postbuckling dimples. The limit of local-bearing bearing capacity was reached in all cases with a destruction of external ribs. Such destruction was followed by sharp increase of intensity of buckling due to appearance of zones with plastic deformations. It should be noted that the ultimate loads (N^*) are insignificantly dependent on k and close to bifurcation forces. The bifurcation forces are defined from the linear calculation taking into account the reduction of the skin for centrally supported compartments. At the same time the value of N^{cr} sharply responds to change k and achieves of minimum value (twice less of N^*) at the most intensive buckling. The value of k is close to variability of general mode of the first tone of lateral oscillations of a shell ($n = 11$).

5. CONCLUSIONS

The behavior of longitudinally compressed circle cylindrical shells, at presence of periodic in circumference direction non-homogeneity is studied in this paper. The non-homogeneity has both internal (technological and constructive) and external (with respect to the structure - the non-uniformity of loading) nature. The studies led to the following conclusions. Periodic non-homogeneity results in the beginning and development of periodic bending nonlinear deformations in the loaded shell. The intensity of these deformations is defined by character and value of non-homogeneity, by their variability in a circumference direction, and by geometrical and stiffness parameters of a cylinder. The most intensive deformations are developed at the non-homogeneities, the variability of which is close to the variability of the mode of the first tone of eigen lateral oscillations of a shell. In this case the bend (momentarity of deformation), together with non-homogeneity, essentially influence on the loads, character and modes of buckling of a cylinder, resulting in the reduction of critical stresses. The phenomena of increase of static lateral deformations of a shell, at the variability of non-homogeneity close to the variability to the first mode of eigen oscillations, can be called a "static" resonance. It is possible to suppose that the effect of a static resonance is inherent, to some extent, to all two-dimensional thin-walled structures. It is obvious, that the presence of such negative effect, as a static resonance, should be taken into account at the design of structures.

LITERATURE

- [1] Бишоп Р. Колебания. М.: Наука, 1979. -160 с.
- [2] Красовский В.Л. Деформирование и выпучивание тонкостенных цилиндров при продольном неоднородном сжатии //Theoretical Foundations in Civil Engineering. -Warsaw: WPU. -1995. -P.87-96.
- [3] Красовский В.Л. Влияние периодических в окружном направлении несовершенств на устойчивость продольно сжатых цилиндрических оболочек //Вісник акад.: Наук. та інформ. бюл./ПДАБтаА. -Дн-ськ. -1999. -№ 8. -С.26-32.
- [4] Бинкевич Е.В., Костырко В.В., Красовский В.Л. Устойчивость продольно сжатых стрингерных отсеков при разностороннем расположении подкреплений //Динамика и прочность тяжелых машин. -1982. -№ 6. -С.135-140.

STATECZNOŚĆ I NOŚNOŚĆ GRANICZNA CIENKOŚCIENNYCH SŁUPÓW WIELOOBWODOWYCH PODDANYCH RÓWNOMIERNEMU ŚCISKANIU

M. KRÓLAK

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej,
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

R. GRĄDZKI

Zakład Podstawowych Problemów Techniki, Instytut Zarządzania Politechniki Łódzkiej,
ul. Piotrkowska 266, 90-924 Łódź

W pracy przeprowadzono analizę stateczności lokalnej i globalnej (eulerowskiej) oraz nośności granicznej równomiernie ściskanych izotropowych słupów o przekrojach kwadratowych wieloobwodowych (wielokomorowych) o stałym polu powierzchni przekroju poprzecznego. Wyniki analizy (wpływ ilości komór na stateczność i nośność) przedstawiono w postaci wykresów. Wykazano duży wzrost odporności słupów o dużej liczbie komór na wyboczenia lokalne.

1. WPROWADZENIE

Utrata stateczności (wyboczenie globalne, lokalne lub interakcyjne) cienkościennych elementów nośnych konstrukcji, o takim samym polu powierzchni przekroju poprzecznego, zależy od wielu czynników takich jak: rodzaj obciążenia, własności materiałowe, warunki brzegowe, wymiary geometryczne oraz kształt przekroju poprzecznego.

Szczególnie niebezpiecznym przypadkiem obciążenia ze względu na utratę stateczności jest osiowe lub mimośrodowe ściskanie.

Na globalną utratę stateczności najbardziej narażone są długie pręty cienkościenne o małych wymiarach gabarytowych przekroju poprzecznego (pręty smukłe), poddane ścisłkaniu.

Wiadomo również, że konstrukcje cienkościenne o profilu otwartym są bardziej podatne na utratę stateczności (różne postacie wyboczenia) niż konstrukcje o profilu zamkniętym.

Ponieważ obciążenie, przy którym występuje wyboczenie globalne jest dla konstrukcji na ogół obciążeniem niszczącym, należy tak dobrać wymiary konstrukcji, aby wyboczenie globalne nie wystąpiło lub wartości naprężeń krytycznych wyboczenia globalnego były co najmniej kilka lub nawet kilkanaście razy większe od naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego.

Trzeba pamiętać, że nawet niezbyt bliskie sobie wartości naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego i globalnego mogą spowodować wyboczenie interakcyjne przy znacznie niższych wartościach obciążenia konstrukcji cienkościennej.

W konstrukcjach cienkościennych o przekrojach jednoobwodowych zamkniętych większe gabaryty przekroju poprzecznego, przy tym samym polu powierzchni przekroju, to mniejsza grubość ścianek i większa ich szerokość, a to oznacza wzrost naprężeń

wyboczenia globalnego i często znaczny spadek naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego.

W niniejszej pracy wykazano, że niską odporność na wyboczenie lokalne cienkościennych słupów o profilu jednoobwodowym można w istotnym stopniu podwyższyć poprzez zastosowanie przekroju wieloobwodowego (wielokomorowego) o takim samym polu powierzchni przekroju poprzecznego (takim samym ciężarze).

W procesie projektowania trzeba pamiętać, że zastosowanie przekroju wieloobwodowego o takich samych gabarytach i polu powierzchni, co słupa jednoobwodowego obniża nieco naprężenie krytyczne wyboczenia globalnego.

Tematyka stateczności, stanów zakrytycznych i nośności pryzmatycznych belek – słupów o przekrojach poprzecznych wieloobwodowych praktycznie nie była dotychczas rozpatrywana. Jedynie w pracach K. Heung – Soo [1] oraz W.Chena i T. Wierzbickiego [2], dotyczących absorpcji energii przez profile wielokomorowe (multi – cell), podano wykresy sił niszczących dla badanych tam profili w funkcji przemieszczeń, z których można odczytać nośność badanych profili.

Aktualny poziom technologii umożliwia wykonanie słupów o przekrojach wieloobwodowych, zarówno z metali jak i z materiałów kompozytowych, co skłoniło autorów tej pracy do zajęcia się zagadnieniami stateczności i nośności takich słupów.

Brak publikacji z tej tematyki wydaje się zaskakujący przy bardzo bogatej literaturze dotyczącej stateczności, stanów zakrytycznych i nośności cienkościennych konstrukcji o przekrojach jednoobwodowych (gładkich i uźebrowanych).

W dalszej części pracy zostanie przeprowadzona analiza stateczności lokalnej i globalnej oraz nośności najprostszego przypadku słupa wieloobwodowego o przekroju kwadratowym poddanego równomiernemu ściskaniu.

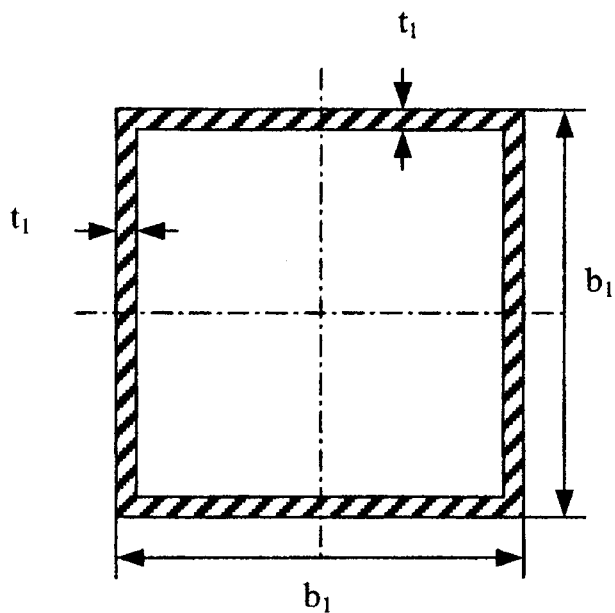
2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Rozpatrzmy cienkościenny jednoobwodowy słup pryzmatyczny o przekroju kwadratowym $b_1 \times b_1$ i o grubości ścian t_1 (rys.1), ściskany równomiernie naprężeniami σ wywołanymi przez siłę ściskającą P . Na rys.2 pokazano przekroje słupów wieloobwodowych złożone z n^2 kwadratowych komór o wymiarach $b_n \times b_n$, których gabaryty i pola powierzchni przekroju są takie same jak słupa jednoobwodowego. Przyjęto, że grubość wszystkich ścianek słupa wieloobwodowego t_n są takie same.

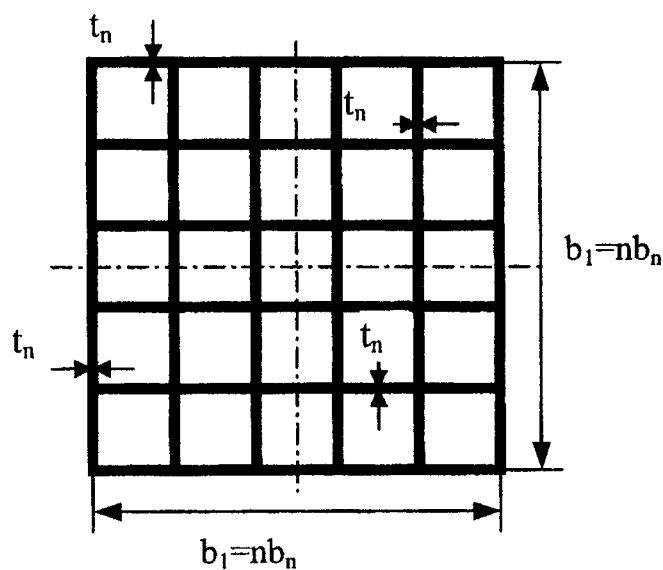
Z warunku równości pól powierzchni i długości wszystkich rozpatrywanych słupów (jednakowych ich ciężarów) wynika, że:

- naprężenia w stanie przedwyboczeniowym we wszystkich słupach są takie same i wynoszą $\sigma = P/F$
- grubość ścian t_n w słupach o n^2 komorach określone są wzorem

$$t_n = \frac{2}{n+1} t_1 \quad (1)$$



Rys. 1. Przekrój poprzeczny jednoobwodowy



Rys. 2. Przekrój poprzeczny wieloobwodowy

3. LOKALNA UTRATA STATECZNOŚCI

Przy dużej długości l słupów, w porównaniu z wymiarami b_n , naprężenia krytyczne wyboczenia lokalnego analizowanych słupów określone są wzorami (jak dla ściskanych jednokierunkowo przegubowo podpartych pasm płytowych):

$$\sigma_{k_{rn}}^{(lok)} = 4\pi^2 \frac{D_n}{b_n^2 t_n} = \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t_n}{b_n}\right)^2 \quad (2)$$

gdzie E i ν są stałymi materiałowymi (moduł Younga i liczba Poissona). Po wykorzystaniu zależności (1) oraz $b_n = b_1/n$ otrzymano

$$\sigma_{km}^{(lok)} = \left(\frac{2n}{n+1} \right)^2 \frac{\pi^2 E}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{t_1}{b_1} \right)^2 = \alpha_n \sigma_{kr1}^{(lok)} \quad (3)$$

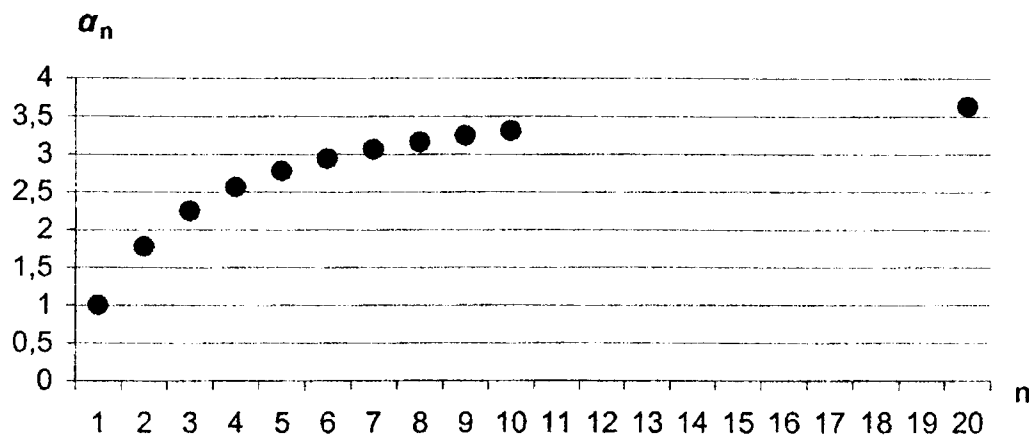
gdzie

$$\alpha_n = \left(\frac{2n}{n+1} \right)^2 \quad (4)$$

Wartość współczynnika α_n dla $n=1,2,\dots,\infty$ zestawiono w tabeli 1 i przedstawiono na wykresie (rys. 3).

Tabela 1

α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8	α_9	α_{10}	α_{20}	α_∞
1,0	1,778	2,250	2,560	2,778	2,939	3,060	3,160	3,240	3,306	3,628	4,000



Rys. 3 Wykres współczynnika stateczności lokalnej α_n w funkcji n

4. GLOBALNA (EULEROWSKA) UTRATA STATECZNOŚCI

Napężenie krytyczne sprężystego wyboczenia globalnego wynika ze wzoru Eulera

$$\sigma_{km}^{(gl)} = \frac{\pi^2 EI_n}{Fl_w^2} = \frac{\pi^2 Ei_n^2}{l_w^2} = \frac{\pi^2 E}{s_n^2} \quad (5)$$

gdzie:

$$s_n^2 = \frac{l_w^2}{i_n^2} = \frac{l_w^2 F}{I_n} ; \quad I_n = \frac{2}{3} b_1^3 t_1 \left[\frac{6}{n+1} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{n} \right)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{(n+1)^2} \left(\frac{t_1}{b_1} \right)^2 \right] \quad (6)$$

Po pominięciu ostatniego członu we wzorze (6), jako wielkości małej wyższego rzędu otrzymano:

$$I_n \cong \frac{2}{3} b_1^3 t_1 \left[\frac{6}{n+1} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{n} \right)^2 + \frac{1}{4} \right], \quad (7)$$

gdzie: $k = \frac{n-1}{2}$ dla n nieparzystych, $k = \frac{1}{2}n$ dla n parzystych.

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$\beta_n = \frac{6}{n+1} \sum_{i=0}^k \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{n} \right)^2 + \frac{1}{4},$$

$$\sigma_{kr1}^{(gl)} = \frac{\pi^2 E}{6 \left(\frac{l_w}{b_1} \right)^2}; \quad (8)$$

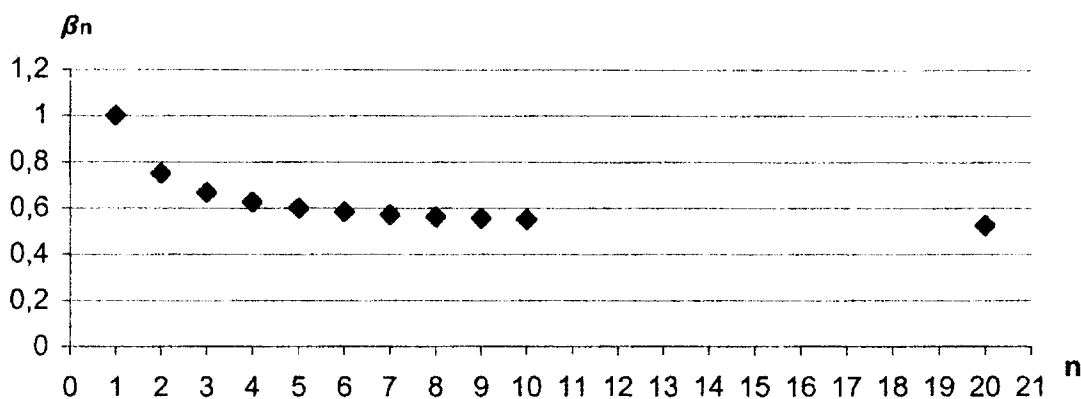
otrzymano

$$\sigma_{krn}^{(gl)} = \beta_n \sigma_{kr1}^{(gl)} \quad (9)$$

Wartości współczynnika β_n dla $n=1,2,\dots,\infty$ podano w tablicy 2 i przedstawiono na wykresie (rys.4).

Tabela 2

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	β_{20}	β_∞
1,000	0,750	0,667	0,625	0,600	0,583	0,571	0,562	0,555	0,550	0,525	0,500



Rys. 4 Wykres współczynnika stateczności globalnej β_n w funkcji n

5. NOŚNOŚĆ GRANICZNA

Założmy, że wymiary rozpatrywanych słupów zostały tak dobrane, aby ich wyboczenie globalne nie wystąpiło lub naprężenie krytyczne wyboczenia globalnego było co najmniej kilkanaście razy większe od naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego. Przy takim stosunku $\sigma_{kr}^{(gl)} / \sigma_{kr}^{(lok)}$ nie powinno wystąpić wyboczenie interakcyjne. Aby ocenić wpływ ilości komórek n^2 na stateczność lokalną i nośność ściskanych słupów kwadratowych o stałym polu powierzchni przekroju poprzecznego, przeprowadzono obliczenia numeryczne słupów o następujących danych: $E=2,05 \cdot 10^5$ MPa; $\nu=0,3$; $R_e=300$ MPa; $t_1/b_1=0,01$; $l \gg b_1$.

Stosunki grubości ścian do ich szerokości w słupach wieloobwodowych wyznaczono ze wzoru:

$$\frac{t_n}{b_n} = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{t_1}{b_1} \quad (10)$$

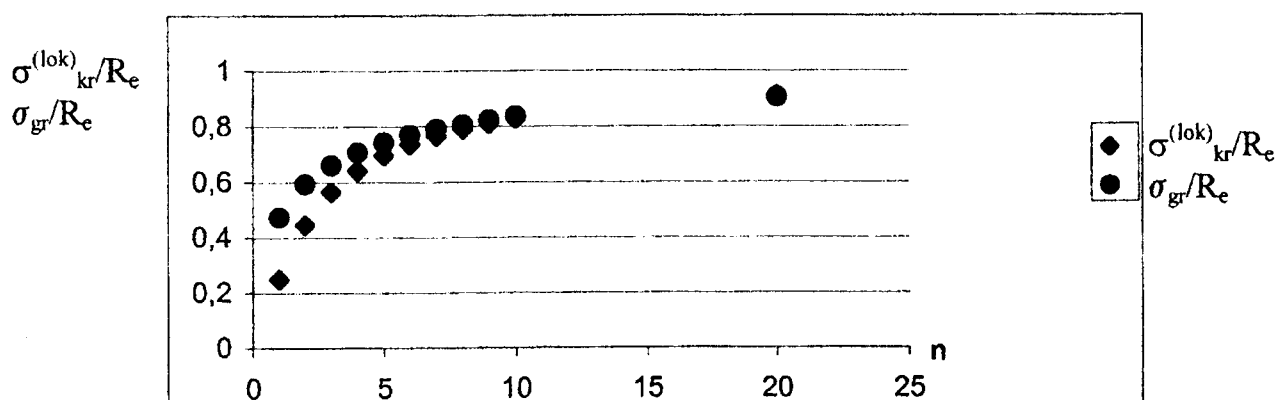
Obliczenia przeprowadzono programem komputerowym opracowanym przez K. Kowal-Michalską i R. Grądzkiego [3]. Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 3 i pokazano w postaci wykresów na rys. 5.

Charakterystykę pracy słupa jednoobwodowego $\left(\frac{t_1}{b_1} = 0,01\right)$ i słupa o bardzo dużej liczbie komór $\left(\frac{t_\infty}{b_\infty} = 0,02\right)$, przedstawiono na rys. 5. Przez S oznaczono względne skrócenie słupa o długości równej jednej półfali ($S=u/b_1$). Bezwymiarowe naprężenie graniczne $\sigma^* = \frac{\sigma_{gr}}{Re}$ przedstawiono w funkcji $S^*=S/Se$ gdzie $Se=Re/E$.

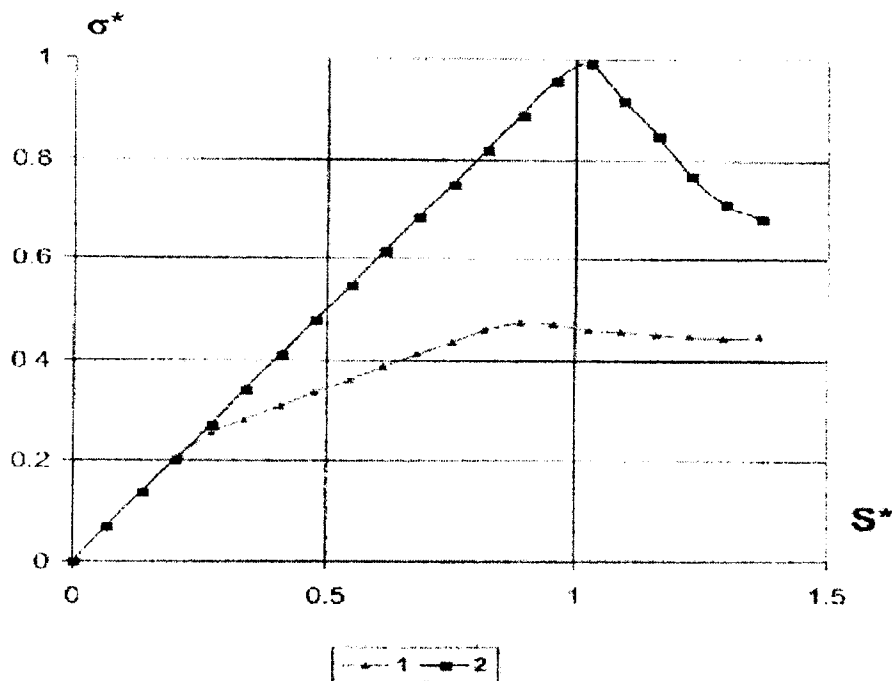
Tabela 3

n	1	2	3	4	5	6	7
t_n/b_n	0.0100	0.0133	0.0150	0.0160	0.0167	0.0175	0.0177
$\sigma_{kr}^{(lok)}/Re$	0.25	0.444	0.563	0.640	0.695	0.735	0.765
σ_{gr}/Re	0.473	0.593	0.660	0.706	0.742	0.768	0.790

n	8	9	10	20	∞
t_n/b_n	0.0178	0.0180	0.0181	0.0190	0.0200
$\sigma_{kr}^{(lok)}/Re$	0.790	0.810	0.827	0.907	1.000
σ_{gr}/Re	0.805	0.822	0.836	0.903	0.985



Rys. 5 Stateczność lokalna i nośność graniczna cienkościennych słupów wieloobwodowych.



Rys. 6. Charakterystyka pracy słupów jedno i wieloobwodowego o takich samych polach powierzchni przekroju poprzecznego 1 – $b/t=100$, 2 – $b/t=50$.

6. WNIOSKI

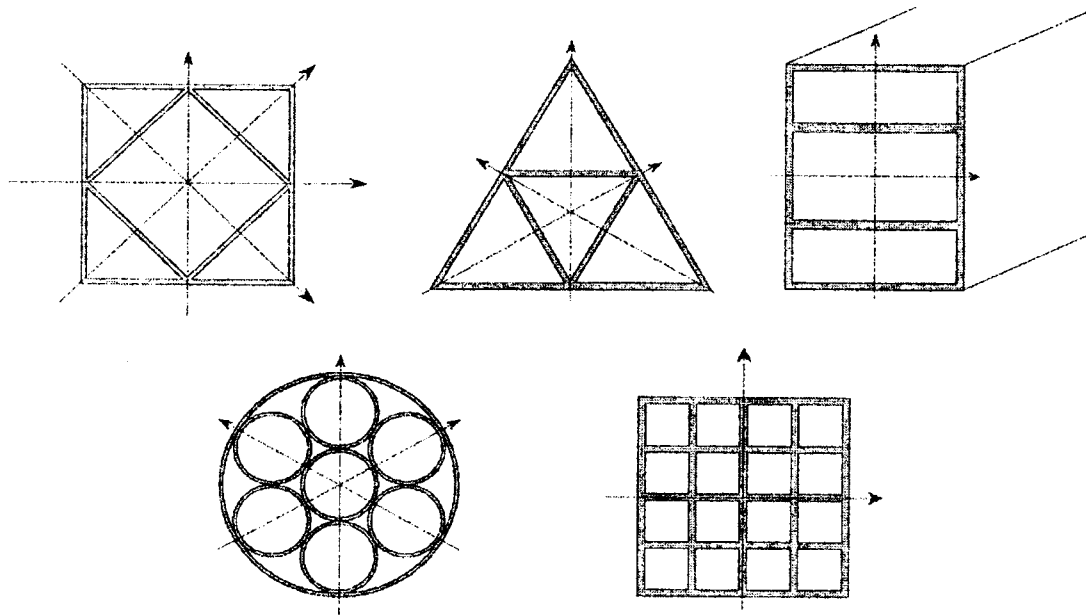
Niniejsza praca jest pierwszym etapem analizy stateczności i nośności granicznej cienkościennych słupów o przekroju poprzecznym wieloobwodowym. Przeanalizowano w niej stateczność lokalną i globalną oraz nośność graniczną idealnych (bez imperfekcji) równomiernie ściskanych izotropowych słupów cienkościennych o przekrojach kwadratowych (rys. 1 i 2) o takich samych polach powierzchni przekroju poprzecznego.

Na podstawie przeprowadzonej analizy wykazano, że:

- naprężenie krytyczne wyboczenia lokalnego $\sigma_{kr}^{(lok)}$ cienkościennego słupa o przekroju jednoobwodowym (skrzynkowym) jest cztery razy mniejsze niż słupa z dużą liczbą kwadratowych komór;
- naprężenie krytyczne wyboczenia globalnego słupa jednoobwodowego jest dwa razy wyższe niż słupa z dużą liczbą komór;
- nośność graniczna słupa stalowego wieloobwodowego z dużą liczbą komór, wykonanego ze stali o granicy plastyczności $R_e=300\text{MPa}$ jest około dwa razy większa niż słupa jednoobwodowego o $t_1/b_1=0,01$.

Przeprowadzona analiza wykazuje, że stosowanie słupów wieloobwodowych może w istotnym stopniu zmniejszyć ciężar konstrukcji (zużycie materiałów), zwłaszcza w słupach, w których wyboczenie globalne nie występuje (np. w słupach krótkich).

W dalszych etapach pracy przewiduje się analizę stateczności i nośności słupów wieloobwodowych o różnych kształtach przekroju poprzecznego (rys. 7), wykonanych z materiałów izotropowych i ortotropowych (kompozytowych). Obliczenia numeryczne, w przypadku złożonych kształtów przekroju poprzecznego i różnych grubości ścian, prowadzone będą metodą elementów skończonych.



Rys.7. Różne kształty przekroju poprzecznego słupów wieloobwodowych.

Niektóre otrzymane wyniki obliczeń numerycznych weryfikowane będą modelowymi badaniami doświadczalnymi. W analizie uwzględniony zostanie wpływ imperfekcji lokalnych ścian oraz imperfekcje globalne osi słupów na ich stateczność i nośność.

LITERATURA

- [1] Heung-Soo Kim: New extruded multi-cell aluminium profile for maximum crash energy absorption and weight efficiency. *Thin-Walled Structures* 2002, 20, 311-327.
- [2] Chen W., Wierzbicki T.: Relative merits of single cell, multi-cell and foam-filled thin-walled structures in energy absorption. *Thin-Walled Structures* 2001, 39, 287-306.
- [3] Grądzki R., Kowal-Michalska K., Ultimate load of laminated plates subjected to simultaneous compression and shear, *The Archive of Mechanical Engineering*, Vol.XLVIII, 3, 2001

STABILITY AND ULTIMATE LOAD OF MULTI-CELL THIN-WALLED COLUMNS SUBJECTED TO UNIFORM COMPRESSION (CONSISTING OF SQUARE MODULI)

In the paper the analysis of local and global stability and ultimate load of uniformly compressed multi-cell isotropic columns is carried out. The columns considered are of constant cross-section with square shape of the cells. The results of the analysis including the influence of the number of cells on the stability and the ultimate load are presented in the figures. The significant increase of the resistance to local buckling has been noticed for columns with higher number of cells.

NOŚNOŚĆ CIENKOŚCIENNYCH KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH

T. KUBIAK, Z. KOŁAKOWSKI

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy zaprezentowano podstawowe idee w podejściu do stateczności, stanów pokrytycznych i nośności cienkościennych belek – słupów z kompozytów warstwowych o przekrojach otwartych i zamkniętych. Przedstawiono oszacowanie nośności takich konstrukcji na podstawie liniowej modalnej analizy stanów krytycznych. Porównano ją z wynikami otrzymanymi przy wykorzystaniu profesjonalnego pakietu metody elementów skończonych ANSYS 5.7.

1. WSTĘP

Nowoczesne materiały kompozytowe już od chwili ich pojawienia się w latach sześćdziesiątych zapowiadały trwałą i niezawodną ich przyszłość. Impulsem rozwoju były nowe technologie produkcji, rozwój teoretycznych podstaw anizotropowych warstwowych konstrukcji kompozytowych oraz rozwój nowych technologii informatycznych. To określa pozycję kompozytów w nowych zastosowaniach techniki.

Większość materiałów kompozytowych zbudowana jest z włókien syntetycznych lub organicznych o wysokiej wytrzymałości. Zadaniem matrycy jest zachowanie geometrii włókien i zapobieganie ich uszkodzeniom. Tworzywa wzmocnione włóknem węglowym mają bardzo wysoki moduł sprężystości, bardzo wysoką wytrzymałość, mały współczynnik rozszerzalności liniowej, a ponadto są kilka razy lżejsze od stali.

Dalszy postęp w stosowaniu kompozytów wymusza głębsze zrozumienie zjawisk zachodzących podczas i po utracie stateczności konieczne do właściwego projektowania nowych konstrukcji ze względu na wzrastające parametry i wymagania użytkownika.

2. WYBOCZENIE SPRĘŻONE

W liniowej teorii stateczności energia potencjalna układu jest formą kwadratową przemieszczeń uogólnionych, zaś w nieliniowej teorii zawiera także człony trzeciego i czwartego stopnia względem przemieszczeń. W ogólnym przypadku nie można rozdzielić członów odpowiadających poszczególnym postaciom wyboczenia w wyrażeniu na energię. Składniki zawierające mieszane iloczyny tych przemieszczeń odpowiadają za interakcję postaci wyboczenia. Rola tych członów jest bardzo istotna dla wartości obciążeń bliskich wartościom krytycznym tych postaci.

W najnowszej literaturze dotyczącej stateczności konstrukcji cienkościennych oprócz tradycyjnie rozpatrywanych globalnych postaci wyboczenia (takich jak: giętne, skrętne, giętno-skrętne, zwichrzenie) i lokalnych postaci wyboczenia, rozpatruje się wyboczenie dystorsyjne oraz wyboczenie mieszane będące dowolną kombinacją wcześniej wymienionych postaci. Najczęściej przyjmuje się, że wyboczenie globalne jest wyboczeniem powodującym zniszczenie konstrukcji cienkościennej, a odpowiadające jemu obciążenie obciążeniem granicznym lub nośnością graniczną.

Niektóre konstrukcje cienkościennie zbudowane z elementów płytowych mogą pracować po lokalnej utracie stateczności. Na skutek lokalnego wyboczenia następuje zmniejszenie wzdłużnej sztywności konstrukcji. Wzajemne oddziaływanie różnych postaci utraty stateczności, dla konstrukcji rzeczywistych obciążonych niedokładnościami wstępnymi, jest często decydującym czynnikiem określającym ich nośność graniczną.

Kiedy minimalnej wartości krytycznej odpowiada pojedyncza postać i w pobliżu nie ma innych bliskich wartości własnych, takie wyboczenie nazywa się jednomodalne lub niezależne. Jeżeli natomiast wartości krytyczne (własne) są identyczne lub bliskie sobie, pokrytyczne zachowanie się można rozpatrywać jako wzajemne oddziaływanie postaci wyboczenia tzw. wyboczenie sprzężone lub interakcję postaci wyboczenia. Nieuwzględnienie interakcyjnego wyboczenia może prowadzić do błędnej oceny nośności granicznej konstrukcji. Szczególnie jest to widoczne w konstrukcjach bliskich optymalnym, w których obciążenia krytyczne dla różnych postaci są prawie jednakowe.

Gdy lokalna i globalna postać wyboczenia zachodzą równocześnie, to wyboczenie jest niestateczne i bardzo czułe na imperfekcje. Gdy zaś globalne wyboczenie zachodzi najpierw, a lokalne wyboczenie jest konsekwencją pierwszego, to zjawisko wyboczenia dąży do niestatecznego.

Najbardziej znane podejście dzięki ogólności i zastosowaniu do nieliniowej teorii stateczności konstrukcji cienkościennych przedstawił Koiter [3], zaś Budiansky i Hutchinson [1] nadali tej teorii wygodną do zastosowania formę. Teoria ta wykorzystuje metodę zakłóceń do analizy stanów równowagi. Wyrażenie na energię rozwija się w szereg potęgowy względem amplitud liniowych postaci wyboczenia w pobliżu punktów bifurkacji. Metoda to prowadzi do iteracyjnej metody określania współczynników tego rozkładu, przy czym w każdym przybliżeniu rozwiązuje się liniowe zagadnienie brzegowe [5].

W ogólnej asymptotycznej teorii rozróżnia się proste (jednomodalne) i sprzężone wyboczenie. Określenie współczynników dla pierwszego nieliniowego rzędu przybliżenia wymaga jedynie znajomości pól przemieszczeń i naprężeń pierwszego rzędu, które wyznaczane są na podstawie wartości obciążeń krytycznych (własnych) i odpowiadających im zagadnieniom własnym.

W zagadnieniach liniowych najbardziej niebezpieczne postacie wyboczenia określa się wielkościami obciążeń krytycznych, zaś w nieliniowych należy uwzględnić wielkości współczynników w ramach pierwszego rzędu przybliżenia określających wrażliwość na imperfekcje.

Wyznaczenie współczynników drugiego rzędu nieliniowego przybliżenia wymaga określenia pól przemieszczeń i naprężeń drugiego rzędu, które są poprawkami do pól pierwszego rzędu. Teoria sprzężonego wyboczenia umożliwia pełną analizę pobifurkacyjnych ścieżek równowagi wraz z punktami osobliwymi (tzn. punktów wtórnej bifurkacji lub punktów granicznych). Wyjaśnia też zaobserwowane w badaniach doświadczalnych postacie wyboczenia i znaczne w wielu przypadkach rozbieżności pomiędzy uzyskanymi metodą teoretyczną i eksperymentalną wartościami nośności granicznej konstrukcji.

2.1. SŁUPY Z BLISKIMI SOBIE WARTOŚCI OBCIĄŻEŃ KRYTYCZNYCH

W omawianym przypadku uwzględnienie w analizie członów do trzeciego stopnia w wyrażeniu na energię potencjalną układu poprawnie opisuje pracę konstrukcji i

pozwała wyznaczyć nośność (obciążenie graniczne). Pozwala to ograniczyć rozwiązanie do pierwszego asymptotycznego przybliżenia oraz uniknąć rozwiązywania złożonych zagadnień określenia pól drugiego rzędu oraz dużych problemów typu merytorycznego i numerycznego.

W przypadku konstrukcji cienkościennych z jedną osią symetrii przekroju poprzecznego (np. cienkościenny ceownik) ważnym uproszczeniem jest możliwość rozpatrywania wzajemnego oddziaływania globalnej postaci z każdą z lokalnych postaci wyboczenia i wybranie w ten sposób najbardziej niebezpiecznej postaci lokalnej. W przypadku konstrukcji kompozytowej wykonanej z materiału o wysokiej granicy plastyczności określenie nośności granicznej często wymaga uwzględnienia wzajemnego oddziaływania postaci wyboczenia (interakcji postaci). Metody obliczeń normatywnych stosowane do materiałów z niską granicą plastyczności mogą okazać się niedostatecznymi przy przejściu do materiałów z wysoką granicą plastyczności, albowiem nie zawsze wygaszą efekty sprzężonego wyboczenia.

W konstrukcjach z dwoma osiami symetrii przekroju poprzecznego (kwadrat, dwuteownik) wszystkie człony w trzeciej potędze w energii potencjalnej są równe zero. Dlatego też przy uwzględnieniu tylko jednej globalnej i jednej najbardziej niebezpiecznej postaci lokalnej należy uwzględnić człony w czwartej potędze w wyrażeniu na energię potencjalną układu związane z mieszanymi polami drugiego rzędu. Wyznaczenie mieszanej postaci drugiego rzędu jest nie tylko bardzo złożone, ale także nie w pełni poprawne z powodu złego uwarunkowania zagadnienia. Trudności tych można uniknąć uwzględniając w analizie, oprócz najbardziej niebezpiecznej podstawowej postaci lokalnej, wtórną postać lokalną mającą taką samą długość wyboczenia, ale inny charakter symetrii. Nałożenie dwóch postaci prowadzi do niesymetrycznego sumowania lokalnych ugięć, a w wyrażeniu na energię potencjalną pojawia się człon w trzeciej potędze opisujący wyboczenie sprzężone trzech postaci. Przy uwzględnieniu w analizie teoretycznej podstawowej i wtórnej postaci lokalnej wyboczenie może być opisane w ramach pierwszego rzędu asymptotycznego przybliżenia. Wtórna lokalna postać jest praktycznie identyczna jak mieszana postać drugiego rzędu, a dodatkowe lokalne zginanie cienkościennego słupa wywołane globalnym zginaniem ma postać podobną do wtórnej lokalnej postaci.

Ogólnie sprzężone wyboczenie w przypadku słupów z dwoma osiami symetrii przekroju poprzecznego jest mniej niebezpieczne niż słupów z jedną osią symetrii.

2.2. WYBOCZENIE GLOBALNE POPRZEDZONE LOKALNYM

Szeroko stosowane są konstrukcje, dla których lokalne wyboczenie poprzedza globalne tzn. wartość obciążenia krytycznego lokalnej postaci wyboczenia jest niższa niż wartość krytyczna obciążenia globalnego. Konstrukcje takie mogą przenieść obciążenie znacznie przewyższające obciążenie odpowiadające krytycznej wartości wyboczenia lokalnego. Analiza takich konstrukcji nie może być otrzymana w ramach pierwszego nieliniowego przybliżenia. Konieczne jest zatem uwzględnienie w analizie członów czwartego stopnia w energii potencjalnej konstrukcji. W ogólnym przypadku do analizy stateczności przy uwzględnieniu drugiego nieliniowego przybliżenia należy rozwiązać zagadnienie dla lokalnych, globalnych i mieszanych postaci drugiego rzędu. Jednakże w przypadku gdy lokalne wyboczenie poprzedza globalne główną rolę odgrywają lokalne postacie drugiego rzędu. Globalne postacie drugiego rzędu dla belkowego modelu słupa są równe zero, a w przypadku dokładnego rozwiązania są

mało istotne. Pominięcie mieszanych postaci drugiego rzędu jest możliwe dzięki uwzględnieniu już odpowiednich członów w ramach pierwszego rzędu przybliżenia.

Wyznaczenie nieliniowych współczynników pokrytycznych oraz współczynników redukcji sztywności wzdłużnej w ramach nieliniowego drugiego rzędu przybliżenia pozwala opisać pełne zachowanie się konstrukcji cienkościennej w zakresie sprężystym oraz uwzględnić także globalne dokrytyczne zginanie.

Należy zwrócić uwagę na imperfekcje konstrukcji cienkościennych, a szczególnie lokalne. W celu prawidłowej oceny nośności należy określić pola przemieszczeń i sił zadanych w obliczeniach teoretycznych i rzeczywiste niedokładności.

3. WYBOCZENIE JEDNOMODALNE

W przypadku, gdy wyboczenie możemy rozpatrywać jako nie sprzężone (jednomodalne) tzn. gdy wartości krytyczne wyboczenia lokalnego są znacznie niższe niż wyboczenia globalnego, to najbardziej niebezpiecznymi lokalnymi postaciami wyboczenia w zależności od tego, czy rozpatrywana konstrukcja:

- ma grodzie lub przepony poprzeczne – są: lokalna postać wyboczenia odpowiadająca najniższej wartości obciążenia krytycznego mająca jedną półfalę „ $m=1$ ” postaci wyboczenia w kierunku wzdłużnym oraz postać mająca „ $3m=3$ ” półfale wyboczenia;
- nie ma wzmocnień poprzecznych – są: identycznie jak wyżej lokalne postacie oraz postacie wyboczenia dla $(m \pm 2)$, $(m \pm 4)$.

4. STATECZNOŚĆ I NOŚNOŚĆ W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

Do analizy stateczności i pracy konstrukcji po jej utracie użyto pakietu ANSYS. Oprogramowanie pozwala analizować problem stateczności na dwa sposoby:

- liniowa analiza stateczności (zagadnienie wartości własnych), która pozwala wyznaczyć obciążenia krytyczne (punkty bifurkacji) i odpowiadające im postacie wyboczenia,
- nieliniowa analiza stateczności pozwalająca analizować pokrytyczne zachowanie się konstrukcji.

Przeanalizowane przykładowe konstrukcje cienkościenne zdyskretyzowano używając ośmiowęzłowego, wielowarstwowego elementu powłokowego o sześciu stopniach swobody w każdym węźle [2]. Użyty element pozwala zamodelować cienkościenną konstrukcję wielowarstwową o różnych grubościach i różnych własnościach materiałowych warstw.

W celu analizy pokrytycznego zachowania się konstrukcji należy najpierw, korzystając z liniowej analizy stateczności, wyznaczyć postacie wyboczenia i odpowiadające im wartości obciążeń krytycznych zarówno dla postaci lokalnych, jak i globalnych. Następnie przeprowadza się nieliniową analizę stateczności na modelu, w którym przyjęto wstępne imperfekcje kształtu odpowiadające najniższym postaciom wyboczenia. Dla postaci lokalnych przyjmuje się imperfekcje kształtu w granicach 0.1 do 0.02 grubości ścian analizowanej konstrukcji cienkościennej, natomiast dla postaci globalnych od 0.005 do 0.01 długości dźwigara lub belki-słupa. W przypadku nieliniowej analizy wyboczenia interakcyjnego zakłada się imperfekcje kształtu odpowiadające różnym postaciom wyboczenia. Dużym problemem jest ustalenie wielkości imperfekcji dla różnych postaci w taki sposób, aby zależność pomiędzy

imperfekcjami odzwierciedlała wpływ jednej postaci wyboczenia na drugą. Większą wartość imperfekcji należy przyjąć dla postaci, która ma większy wpływ na utratę stateczności, w czym bardzo pomocna jest modalna analiza liniowa.

Bardzo dużą rolę w otrzymaniu poprawnych wyników jest prawidłowe (najbardziej zbliżone do rzeczywistości) zamodelowanie warunków brzegowych. Szczególnie trudne jest modelowanie warunków brzegowych odpowiadających warunkom przyjętym w innych metodach obliczeniowych. Bardzo często wykorzystuje się metodę elementów skończonych jako eksperyment numeryczny dla potwierdzenia wyników otrzymanych na drodze analitycznej lub analityczno - numerycznej. Takie podejście wydaje się nieprawidłowe, ponieważ tworzony jest jak gdyby model modelu. Powinno się raczej porównywać wyniki eksperymentalne z wynikami obliczeniowymi lub wyniki różnych metod obliczeniowych modelujących konkretny obiekt rzeczywisty.

5. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Poniżej przedstawiono porównanie wyników stateczności oraz pokrytycznego zachowania się konstrukcji cienkościennych uzyskanych na drodze analityczno - numerycznej oraz przy wykorzystaniu metody elementów skończonych. Wyniki przedstawiono dla wielowarstwowych kompozytowych konstrukcji cienkościennych, w których każda z warstw o grubości $h_{\text{warst}}=0.125$ mm ma następujące własności mechaniczne: $E_1 = 140$ GPa, $E_2 = 10.3$ GPa, $\nu_{12} = 0.021$, $G = 5.15$ GPa.

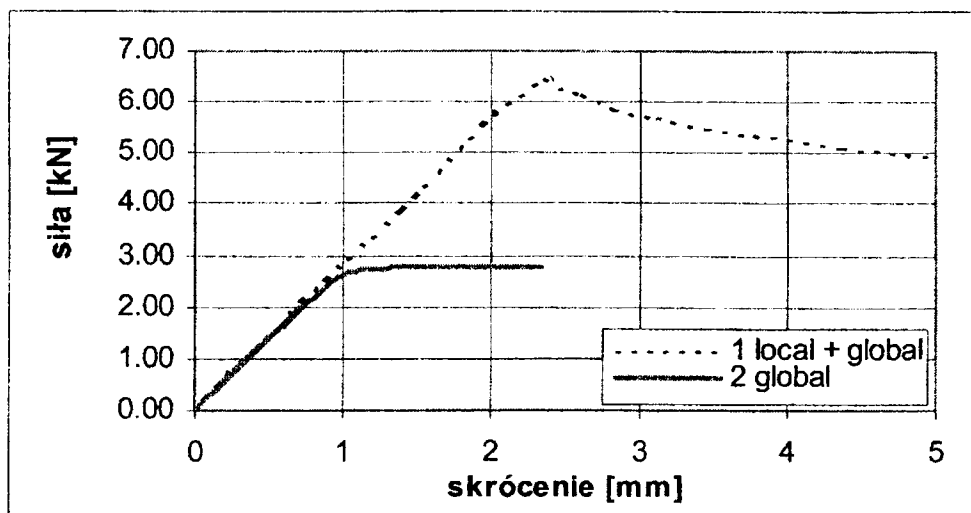
Najpierw rozpatrzono ściskany słup o przekroju ceowym wykonany z ośmiowarstwowego kompozytu o następujących wymiarach geometrycznych: szerokość średnika $b_1 = 50$ mm, szerokość półki $b_2 = 25$ mm, długość $L = 650$ mm, grubość $h = 8 h_{\text{warst}} = 1.0$ mm

Na rys. 1 przedstawiono wyniki MES otrzymane dla ceownika o następującym ułożeniu warstw [45/-45/45/-45/-45/45/-45/45]. Z analizy analityczno-numerycznej [6] otrzymano następujące wartości obciążenia krytycznego: $P_{\text{gl}}=2.77$ kN dla globalnej postaci giętej oraz $P_{\text{lok}}=6.91$ kN dla postaci lokalnej.

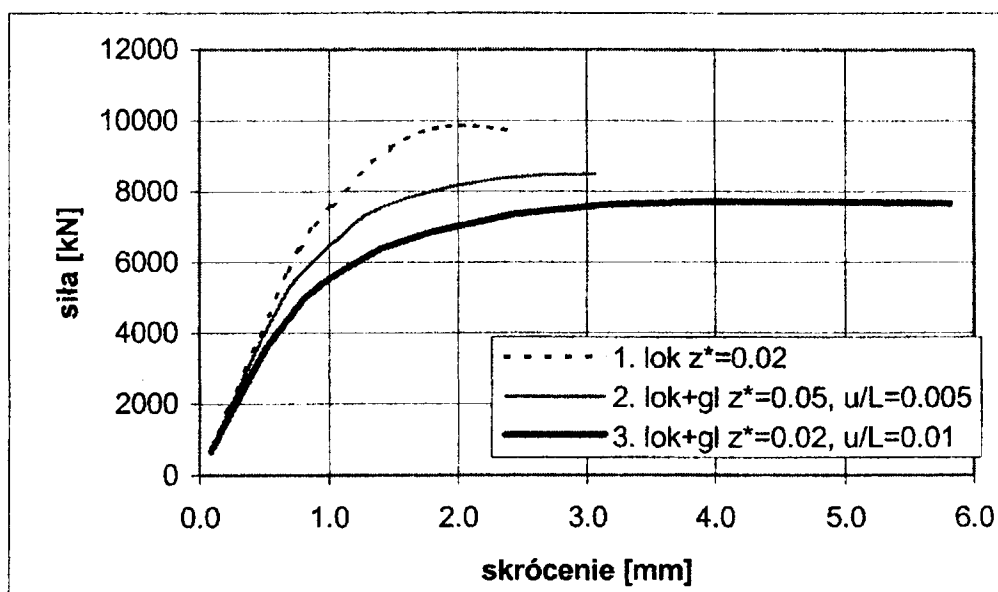
Krytyczne obciążenie globalne jest obciążeniem niszczącym, jak to łatwo zauważyć z przebiegu krzywej 2 na rys. 1 we współrzędnych siła ściskająca w funkcji skrócenia konstrukcji. Dla porównania na tym rysunku przedstawiono pierwotne „nieprawidłowe” zamodelowanie zachowania się ściskanego ceownika (krzywa 1) dla przyjętej imperfekcji odpowiadającej wyboczeniu lokalnemu i globalnemu. Zbyt mała wartość ugięcia wstępnego odpowiadającego wyboczeniu globalnemu spowodowała, że podczas obliczeń MES postać globalna nie miała wpływu, a jedynie o wyboczeniu zdecydowała postać lokalna, co potwierdza maksymalna wartość siły (krzywa 1). Osiągnięcie obciążenia ściskającego równego praktycznie lokalnemu obciążeniu krytycznemu spowodowało „uwidocznienie się” globalnej postaci wyboczenia, której odpowiada opadający fragment krzywej 1.

Na rys. 2 przedstawiono wyniki otrzymane na drodze MES dla ściskanego ceownika o następującym ułożeniu warstw [45/-45/90/0]_S. Z modalnej analizy teoretycznej otrzymano następujące wartości obciążeń krytycznych: $P_{\text{gl}}=8.08$ kN dla postaci globalnej giętej i $P_{\text{lok}}=6.74$ kN dla postaci lokalnej.

I w tym przypadku analiza modalna „podpowiada poprawne” zamodelowanie wielkości imperfekcji globalnych dla ceownika (krzywa 3). Praca konstrukcji w stanie zakrytycznym przedstawiona krzywymi 1 i 2 dotyczy przypadków dla zbyt małych wartości imperfekcji globalnych.



Rys. 1. Zależność siła ściskająca w funkcji skrócenia dla ściskanego ceownika o ułożeniu warstw 45/-45/45/-45/-45/45



Rys. 2. Zależność siła ściskająca w funkcji skrócenia dla ściskanego ceownika o ułożeniu warstw [45/-45/90/0]_s

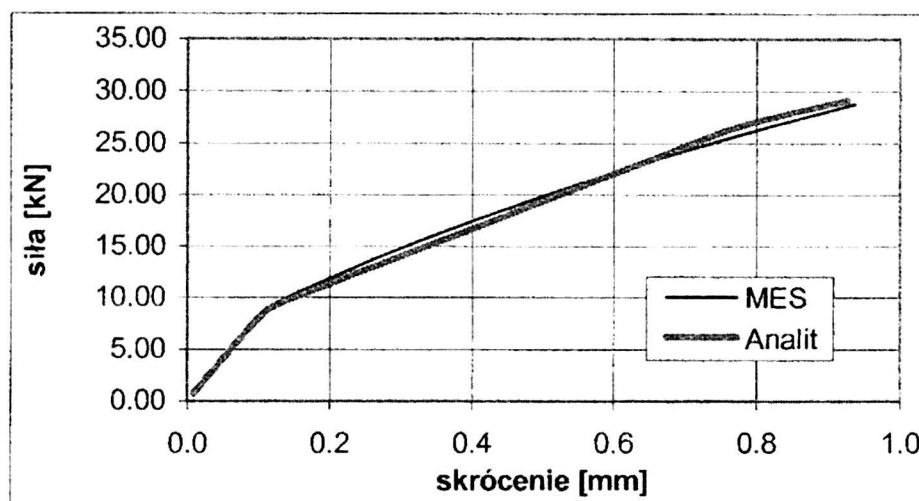
To krótkie porównanie pozwala stwierdzić oczywisty fakt, że obliczanie konstrukcji metodą elementów skończonych nie gwarantuje zawsze poprawnych wyników. Metoda ta jest bardzo czuła na zamodelowane warunki brzegowe, przyjęte elementy skończone, siatkę podziału itd.

W dalszej części pracy przedstawiono wyniki dla cienkościennego kompozytowego dźwigara skrzynkowego o przekroju kwadratowym i następujących wymiarach geometrycznych: szerokości płyt $b = 100$ mm, długości $L = 700$ mm, grubości $h = 10 h_{\text{warst}} = 1.25$ mm.

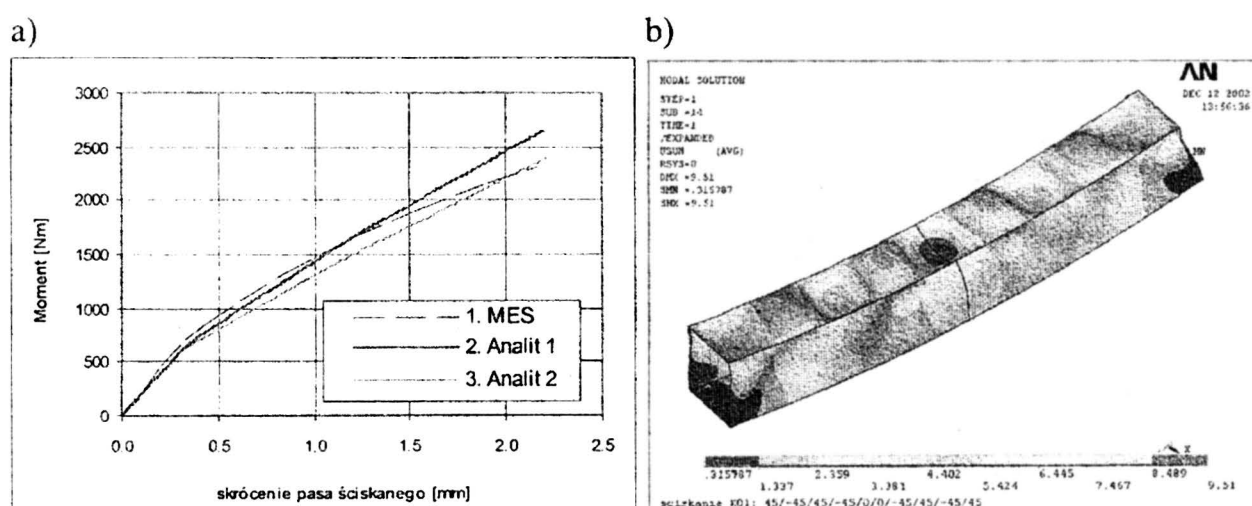
Każda ze ścian dźwigara zbudowana jest z dziesięciowarstwowego kompozytu. Ze względu na przyjętą długość możemy mówić o wyboczeniu jednomodalnym (niesprężonym).

Na rys. 3 przedstawiono wyniki dla kompozytu o ułożeniu warstw [15/-15/15/-15/15]_s. Teoretyczna lokalna wartości obciążenia krytycznego wynosi $P_{\text{lok}} = 9.06$ kN

(rys. 3). Zakres zakrytyczny w metodzie analityczno-numerycznej [4,6] modelowano dwoma lokalnymi postaciami wybożenia tzw. pierwotną i drugą lokalną o trzy razy większej liczbie półfal w kierunku wzdłużnym. W całym analizowanym zakresie silnie nadkrytycznym osiągnięto bardzo dobrą zgodność wyników.



Rys. 3. Zależność siła ściskająca w funkcji skrócenia dla ściskanego dźwigara o ułożeniu warstw $[15/-15/15/-15/15]_s$



Rys. 4. Zależność moment gący w funkcji skrócenia (a) i odkształcenie zginanego dźwigara (b) o ułożeniu warstw $[45/-45/45/-45/0]_s$

W przypadku obciążenia analizowanego dźwigara momentem gącym mamy do czynienia z przekrojem mającym pojedynczą oś symetrii. Dźwigar nie jest wzmocnionym przeponami poprzecznymi. Obliczenia przeprowadzono dla następującego ułożenia dziesięciu warstw $[45/-45/45/-45/0]_s$. Teoretyczna wartość krytyczna momentu zginającego wynosi $M_{lok}=725$ Nm. Na rys. 4a przedstawiono wyniki otrzymane z MES - krzywa 1, zaś przybliżoną metodą analityczno-numeryczną [4,6] -krzywe 2 i 3. Krzywą 2 otrzymano dla lokalnej pierwotnej postaci wybożenia (o liczbie półfal $m=9$ w kierunku wzdłużnym) oraz dla lokalnych postaci o liczbie półfal „ $3m=27$ ” oraz „ $m=2=7$ ”, zaś krzywą 3 otrzymano przy uwzględnieniu jeszcze jednej lokalnej postaci „ $m=4=5$ ”. I w tym przypadku osiągnięto dobrą zgodność wyników oboma metodami (do kilkunastu procent) dla stanów silnie zakrytycznych. Na rysunku

4b przedstawiono postać odkształcenia zginanego dźwigara. Postać ta nie jest identyczna dla każdej z półfal odkształcenia dźwigara, co tłumaczy fakt uwzględnienia w ocenie nośności dźwigara postaci lokalnych dla $m < 9$.

Przedstawione porównanie wyników przeprowadzono dla stanów sprężystych pomijając ewentualny fakt zniszczenia poszczególnych warstw. Przyjęcie jednego z kryteriów zniszczenia umożliwi prawidłową ocenę nośności granicznej konstrukcji [7].

6. WNIOSKI

W pracy zarysowano główne problemy w obliczaniu nośności konstrukcji kompozytowych, przedstawiono porównanie wyników obliczeń otrzymanych metodą elementów skończonych oraz przybliżoną metodą bazującą na liniowej analizie obciążeń krytycznych [4]. Osiągnięto dobrą zgodność obliczeń obiema metodami (do kilkunastu procent). Zwrócono uwagę na korzyści wynikające z wykorzystania modalnej analizy stateczności konstrukcji kompozytowych [6].

LITERATURA

- [1] Budiansky B., Hutchinson J. W. Dynamic buckling of imperfection-sensitive structures. In: Applied Mechanics (Proc. of the XI Int. Cong. App. Mech., Munich, 1964), H. Goertler (Ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1964, pp.636-651.
- [2] Element References for ANSYS rev. 5.7, Ansys Inc., Houston, USA.
- [3] Koiter, W. T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures. WTHD Report 590, Delft, 1976, p.41.
- [4] Kołakowski Z. A semi-analytical method of interactive buckling of thin-walled elastic structures in the second order approximation; Int. J. Solids Structures, Vol.33, No.25., 1996, pp.3779-3790.
- [5] Królak M., Kołakowski Z., Kotelko M. Modal coupled instabilities of thin-walled composite plate and shell structures, Proceedings of the Third International Conference on Thin-Walled Structures, Elsevier, 2001, pp.293-300.
- [6] Królak, M. (Ed.). Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich. PWN, Warszawa-Łódź, 1990, str.553.
- [7] Kubiak T., Kowal-Michalska K. Zastosowanie programu ANSYS do wyznaczania nośności cienkościennych wielowarstwowych konstrukcji ortotropowych. „Programy MES w Komputerowym Wspomaganiu Analizy, Projektowania i Wytwarzania”, Warszawa - Rynia, 2001, str. 149-158.
- [8] Structural Analysis Guide for ANSYS rev. 5.7, Ansys Inc., Houston, USA.

CARRYING CAPACITY OF THIN-WALLED COMPOSITE STRUCTURES

In this paper the basic ideas on buckling, postbuckling behaviour and carrying capacity of thin-walled composite beam-columns with open and closed cross-section have been presented. Carrying capacity estimation based on linear modal analysis for critical state have been carried out. The results of calculations obtained using analytical – numerical method and finite element method (ANSYS 5.7) have been compared.

ANALIZA STATECZNOŚCI CIENKOŚCIENNYCH DŹWIGARÓW SKRZYNKOWYCH OBCIĄŻONYCH CIEPLNIE

T. KUBIAK

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

T. NIEZGODZIŃSKI

Katedra Mechaniki Ogólnej Politechniki Łódzkiej
ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy zaprezentowano rozważania dotyczące słuszności przyjmowania założenia prostych brzegów podczas analizy stateczności płyt obciążonych termicznie. Przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych (MES) dla dźwigarów oraz płyt jako model blach środknika pomiędzy żebrami i przeponami, obciążonych termicznie – napawanie nakładek w procesie prostowania technologicznego [1]. Analizę MES przeprowadzono przy pomocy profesjonalnego pakietu ANSYS.

1. WPROWADZENIE

W teorii stateczności płyt przyjmuje się zwykle założenie, że brzegi płyty są proste przed, po i w czasie wyboczenia. W blachownicach wyodrębnia się płyty elementarne pomiędzy żebrami i przeponami, a te umieszcza się w konstrukcji dla przejęcia sił poprzecznych oraz dla spełnienia założeń o prostym brzegu płyty.

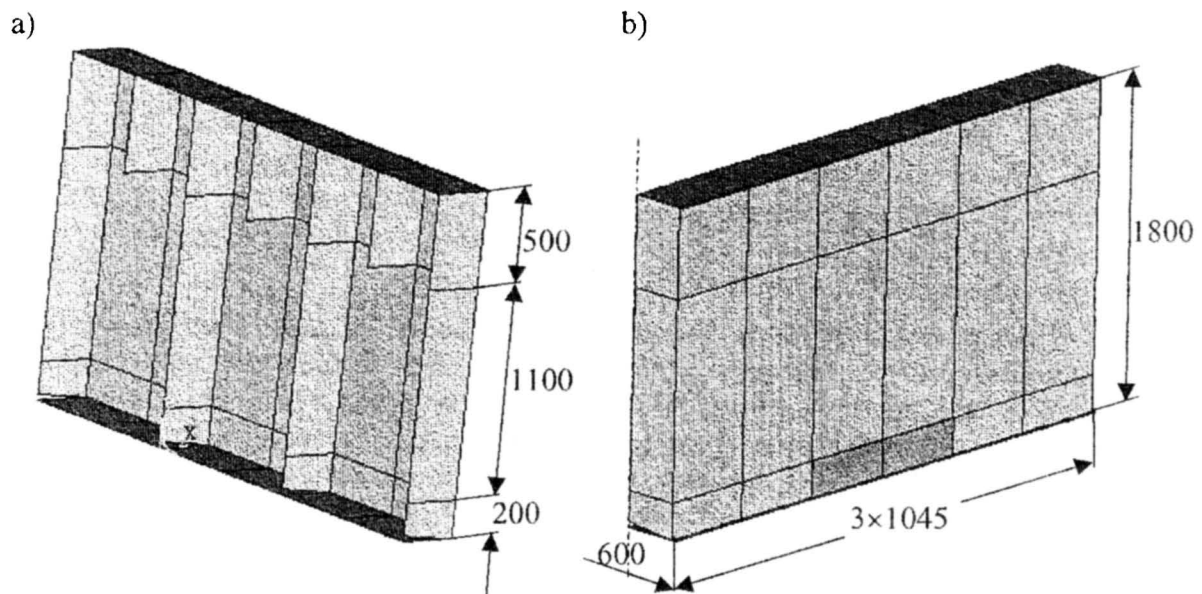
Niniejsza praca ma na celu sprawdzenie słuszności takiego założenia, w przypadku, gdy obciążeniem jest przyrost temperatury skokowo zmienny wzdłuż szerokości płyty lub wysokości środknika dźwigara. W wielu pracach dotyczących stateczności konstrukcji cienkościennych obciążonych cieplnie [2,3,4] w przypadku, gdy temperatura jest stała lub zmienna liniowo wzdłuż szerokości płyty, mówi się, że obciążenie termiczne można zastąpić odpowiednio dobraną siłą i momentem gnącym (zginanie tarczowe) i w ten sposób modelować obciążenie termiczne obciążeniem mechanicznym. W pracy [5] zauważono, że stateczność płyty podpartej przegubowo nieprzesuwnie na wszystkich brzegach i obciążonej przyrostem temperatury stałym na powierzchni i zmiennym liniowo po grubości płyty można analizować przyjmując model płyty poddanej dwuosowemu ściskaniu z ugięciem wstępnym – większy gradient temperatury odpowiada większej wartości ugięcia wstępnego.

Wątpliwości dotyczące założenia prostoliniowości brzegów płyty oraz możliwości modelowania obciążenia termicznego (skokowo zmiennego wzdłuż szerokości płyty i stałego wzdłuż jej długości) jako obciążenia mechanicznego (siła powodująca mimośrodowe ściskanie) sposobem znanym z literatury [6] pojawiły się podczas analizy stateczności dźwigarów sprężanych technologicznie [1].

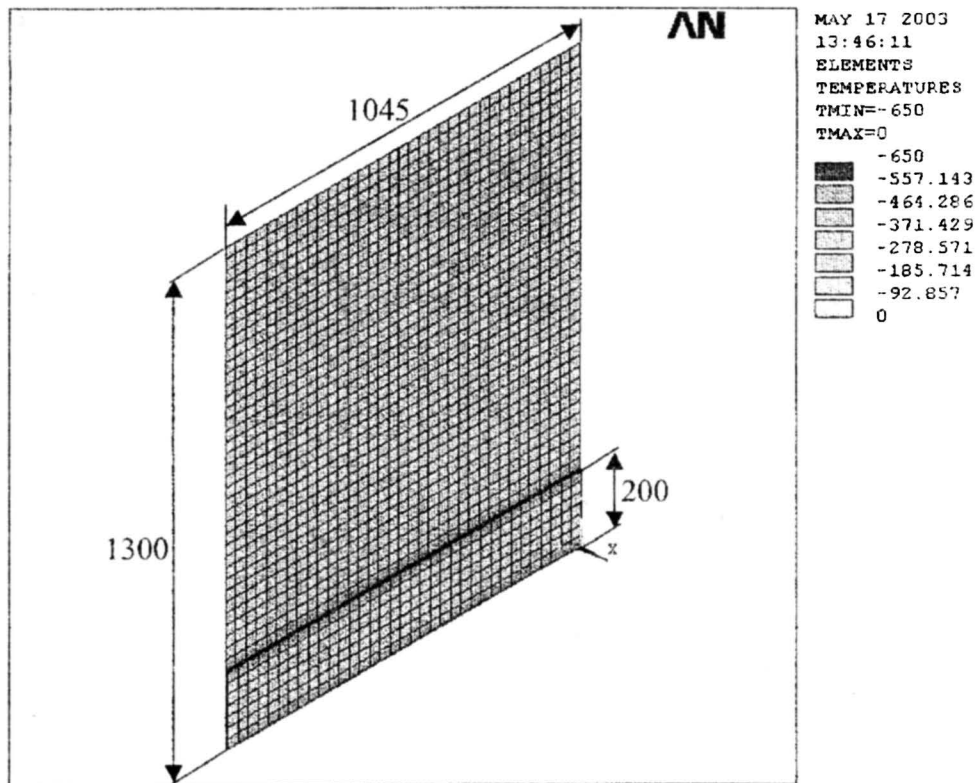
2. ZAŁOŻENIA

Obliczenia dotyczące pól naprężeń i odkształceń w stanie dokrytycznym oraz wartości krytycznych przeprowadzono dla dźwigarów skrzynkowych (rys.1) poddanych

obciążeniom cieplnym jakie mają miejsce podczas prostowania technologicznego [1] – napawanie nakładek dolnych bocznych o szerokości 200 mm i grubości 8mm spoiną $\Delta 5$. Przeprowadzono również analizę stateczności płyty (rys. 2) o wymiarach blachy środkowej zawartej pomiędzy przeponami i żebrami. Płytę obciążono w analogiczny sposób jak środnik w dźwigarze.



Rys. 1. Model geometryczny analizowanego dźwigara w widoku od wewnątrz (a) i z zewnątrz (b)



Rys. 2. Model dyskretny płyty z nakładką z mapą rozkładu temperatur

Obliczenia przeprowadzono wykorzystując program metody elementów skończonych ANSYS 6.1. Dyskretyzacji analizowanych konstrukcji dokonano

używając elementu powłokowego czterowęzłowego o sześciu stopniach swobody w każdym węźle. Model spoin przyjęto identycznie jak we wcześniejszych pracach [7,8], natomiast sposób obciążenia odpowiada zmianie temperatury od temperatury spawania do temperatury otoczenia ($\Delta T = -650K$). Taka zmiana temperatury wywołuje skurcz generujący siłę ściskającą działającą wzdłuż spoiny.

Do obliczeń przyjęto następujące dane materiałowe:

- moduł Younga $E=2 \cdot 10^5$ MPa,
- liczba Poissona $\nu = 0.3$,
- współczynnik rozszerzalności cieplnej $\alpha = 1.2 \cdot 10^{-5} K^{-1}$

3. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych dla płyt o różnych warunkach brzegowych oraz dla dźwigara skrzynkowego składającego się z trzech segmentów o wymiarach tak dobranych, że wielkość największej płyty zawartej pomiędzy żebrami i przeponami jest identyczna jak analizowana płyta. Ze względu na sposób obciążenia trudno mówić o sile, momencie czy temperaturze krytycznej powodującej wyboczenia, tak więc jako wielkość charakteryzującą stateczność przyjęto współczynnik obciążenia krytycznego f :

$$f = \frac{\sigma_{kr}}{\sigma}$$

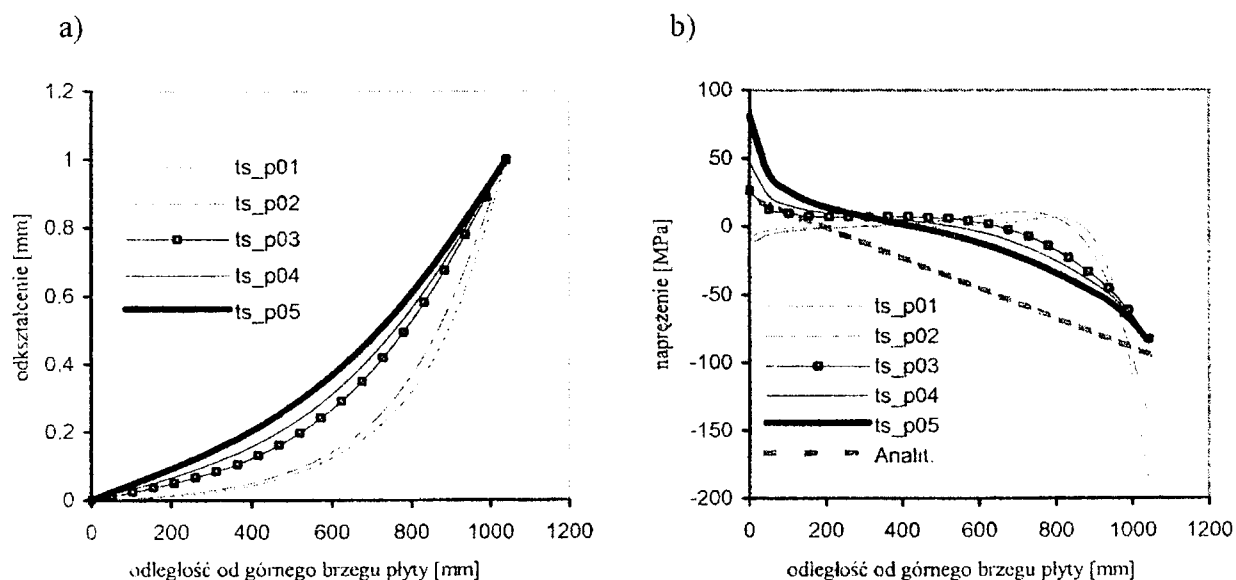
Dla współczynnika $f = 1$ zadane obciążenie jest obciążeniem krytycznym, dla $f > 1$ obciążenie jest mniejsze od krytycznego (konstrukcja nie traci stateczności) oraz dla $f < 1$ – obciążenie zadane jest większe od krytycznego (następuje utrata stateczności)

W tabeli 1 zestawiono wartości współczynnika obciążenia krytycznego dla płyt obciążonych termicznie posiadających różne warunki brzegowe oraz posiadające różne wzmocnienia brzegowe (żebro) zapewniające prostoliniowość brzegów poprzecznych. Żebro wzmocniające o przekroju prostokątnym ma wymiar „a” w płaszczyźnie płyty oraz „h” w kierunku prostopadłym.

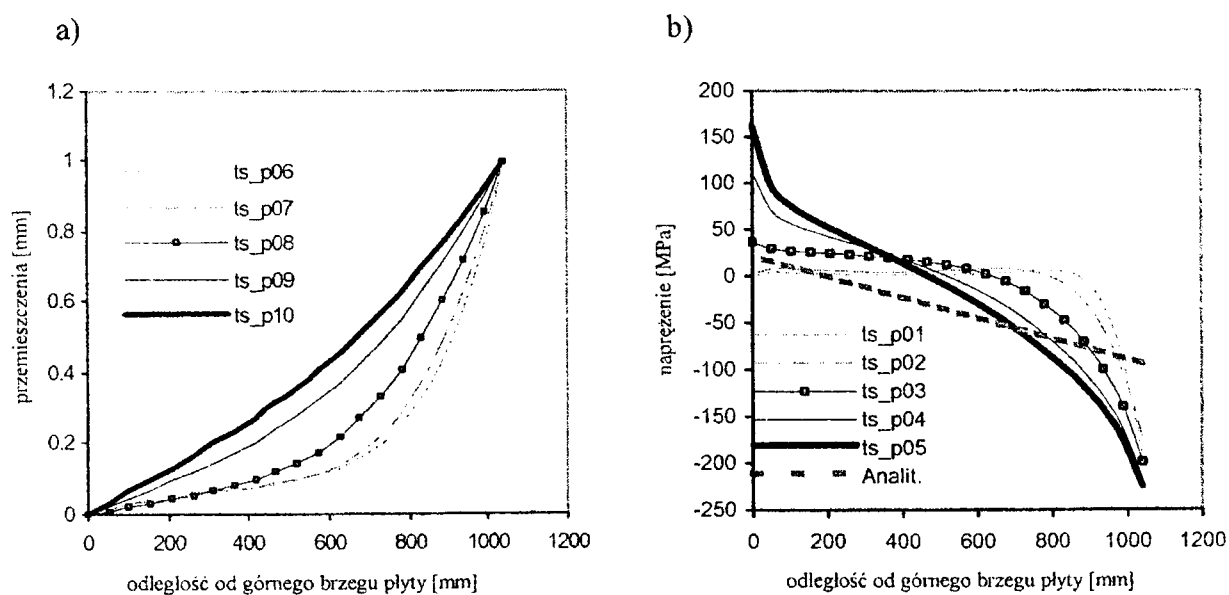
Tabela 1. Zestawienie wyników obliczeń stateczności płyt

ozn.	wymiary żebra wzmocniającego brzeg poprzeczny $a \times h$ [mm]	podparcie brzegów wzdłużnych	Współczynnik obciążenia krytycznego f	postać wyboczenia – ilość półfal m
p01	60 × 60	przegub. nieprzesuwne	1.929	2
p02	80 × 80	przegub. nieprzesuwne	1.858	2
p03	150 × 150	przegub. nieprzesuwne	1.655	2
p04	200 × 100	przegub. nieprzesuwne	1.584	2
p05	300 × 50	przegub. nieprzesuwne	1.509	2
p06	60 × 60	przegubowe przesuwne	1.187	1
p07	100 × 60	przegubowe przesuwne	1.207	1
p08	200 × 60	przegubowe przesuwne	1.174	1
p09	300 × 60	przegubowe przesuwne	1.052	1
p10	400 × 50	przegubowe przesuwne	0.98	1

Rysunki 3a oraz 4a przedstawiają odkształcenia poprzecznych brzegów płyty dla różnych usztywnień brzegowych. Jak widać z rysunków dla żadnego z analizowanych przypadków brzeg nie pozostaje prostoliniowy. Najbliższy prostoliniowości jest przypadek gdy brzegi wzdłużne podparte są przegubowo przesuwnie i żebro usztywniające ma wymiary $a \times h = 400 \times 50$ mm, natomiast największe odchylenie od prostoliniowości jest w przypadkach gdy żebro usztywniające ma wymiary $a \times h$ mniejsze od 100×100 mm. Ten ostatni przypadek ma miejsce, gdy brzeg jest stosunkowo wiotki.



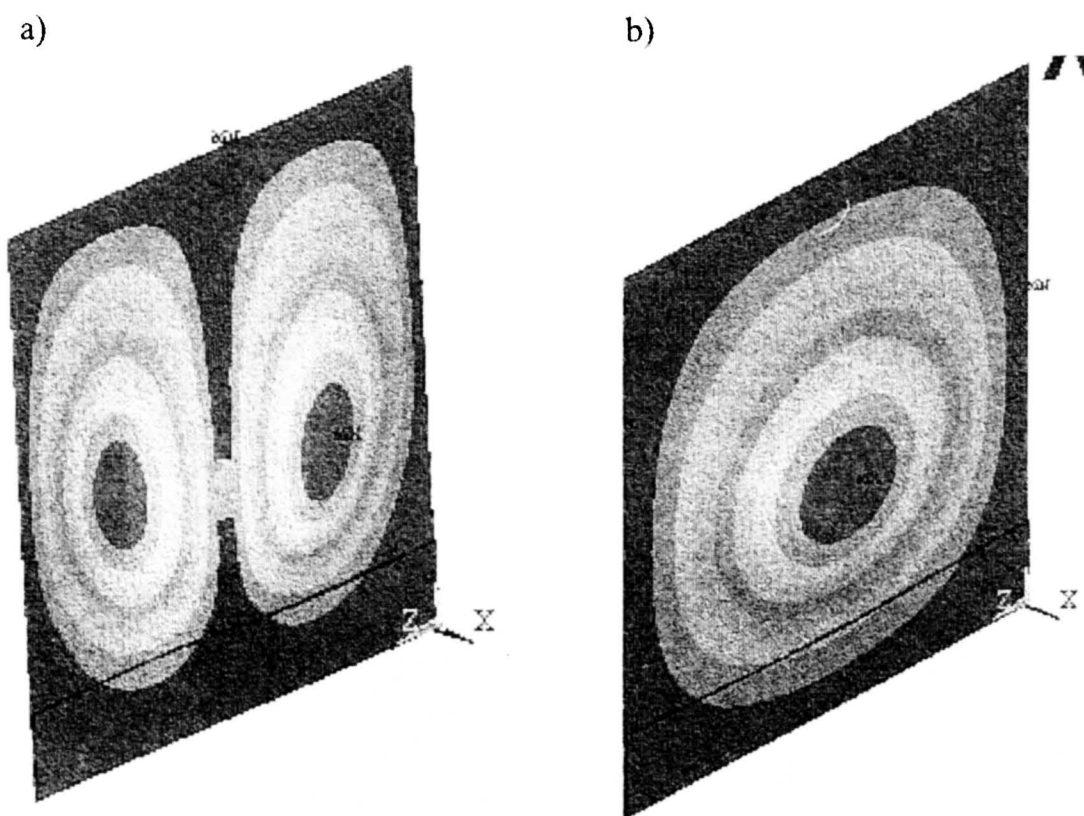
Rys. 3. Rozkład przemieszczeń (a) i naprężeń (b) wzdłuż poprzecznego brzegu płyt podpartych przegubowo nieprzesuwnie na wzdłużnych brzegach z różnymi wzmocnieniami poprzecznymi brzegów poprzecznych.



Rys. 4. Rozkład przemieszczeń (a) i naprężeń (b) wzdłuż poprzecznego brzegu płyt podpartych przegubowo przesuwnie na wzdłużnych brzegach z różnymi wzmocnieniami poprzecznymi brzegów poprzecznych.

Rysunki 3b i 4b przedstawiają rozkład naprężeń wzdłuż brzegu poprzecznego płyty oraz rozwiązanie teoretyczne przy założeniu prostoliniowości brzegów. Najbliższe rozwiązaniu teoretycznemu są przypadki z największym usztywnieniem brzegowym. W przypadku stosunkowo wiotkiego usztywnienia brzegu poprzecznego płyty naprężenia w pewnej odległości od miejsca przyłożenia obciążenia są bliskie zeru, a obciążenia przenosi tylko część płyty w pobliżu spoiny.

Rysunek 5 przedstawia postacie wybočenja dla płyty podpartej przegubowo nieprzesuwnie na wzdłużnych brzegach i z żebrem usztywniającym o wymiarach $a \times h = 80 \times 80$ mm na brzegach poprzecznych (rys. 5a) oraz dla płyty podpartej przegubowo przesuwnie na wzdłużnych brzegach i z żebrem o wymiarach $a \times h = 100 \times 60$ mm usztywniającym brzegi poprzeczne (rys. 5b). Oba te rysunki przedstawiają inną postać wybočenja – różnica ta wynika z różnych warunków brzegowych na wzdłużnych brzegach.



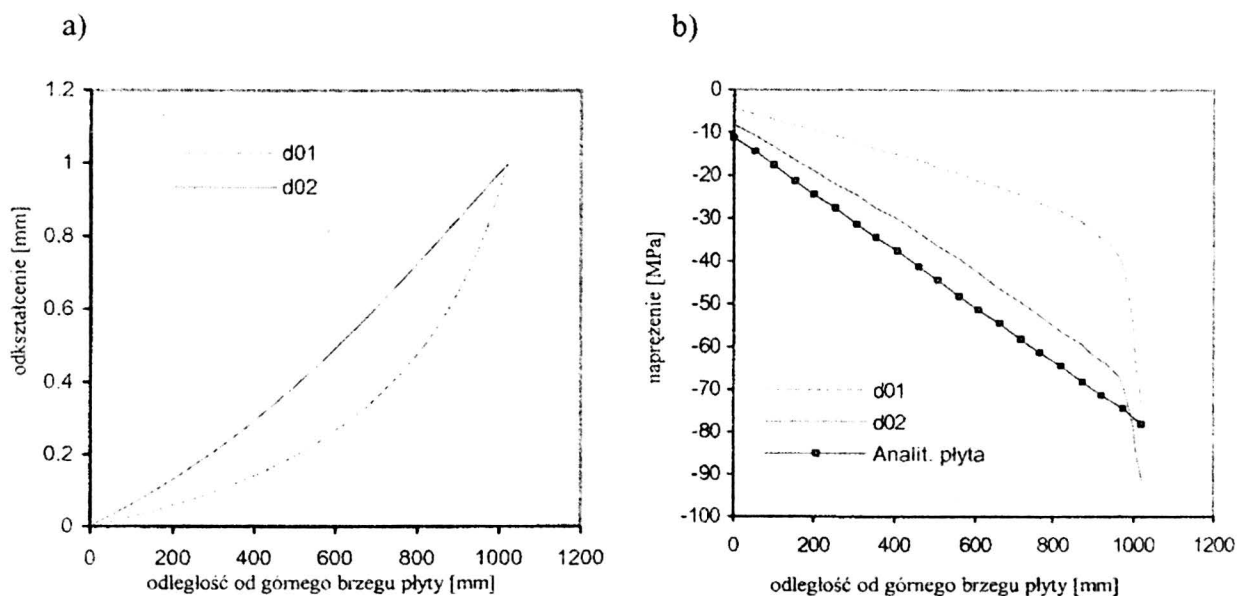
Rys. 5. Postacie wybočenja dla przypadków p02 (a) i p07(b)

Obliczenia stateczności dźwigara skrzynkowego przeprowadzono dla dwu sposobów obciążenia, wynikającego z długości napawanych nakładek. Napawanie nakładek dolnych bocznych na środkowym segmencie dźwigara oznaczono jako d01, oznaczenie d02 odpowiada obciążeniu termicznemu dla przypadku napawania nakładek dolnych bocznych wzdłuż całej długości dźwigara.

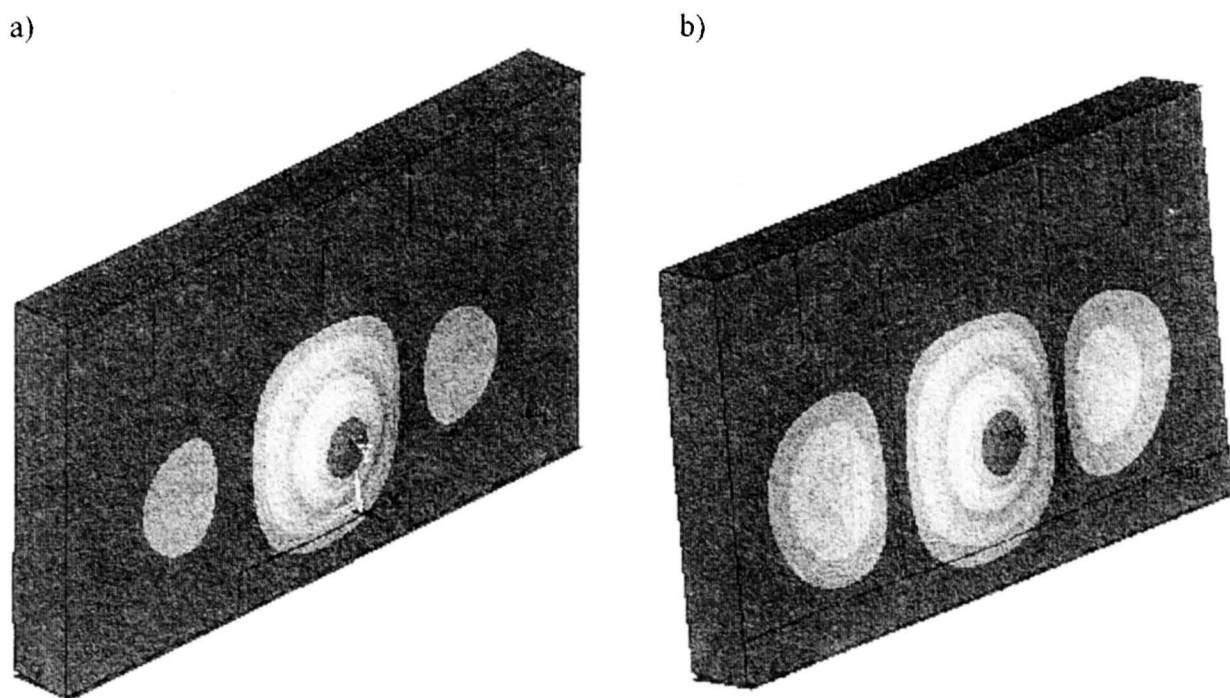
Dla obu przypadków obciążenia wyznaczono współczynnik obciążenia krytycznego i otrzymano następujące wyniki:

- dla przypadku d01 (nakładka napawana tylko na segment środkowy) współczynnik obciążenia krytycznego wyniósł $f = 1.14$ co oznacza, że w tym wypadku nie dojdzie do wybočenja ponieważ położenie spoiny o długości równej długości jednego segmentu dźwigara wygeneruje zbyt małą siłę sprężającą;

- dla przypadku d02, gdzie spoina jest trzykrotnie dłuższa (nakładka spawana wzdłuż całego dźwigara) i generuje siłę większą od krytycznej co prowadzi do utraty stateczności – współczynnik obciążenia krytycznego dla przypadku d02 wyniósł $f = 0.76$.



Rys. 6. Rozkład odkształceń (a) i naprężeń (b) wzdłuż blachy środnika z środkowego segmentu zawartej pomiędzy przeponami i żebrami



Rys.7. Postacie wybożenia dla przypadków d01 (a) i d02 (b)

Rysunek 6 przedstawia rozkłady naprężeń i odkształceń wzdłuż linii będącej brzegiem fragmentu środnika ograniczonego przeponami oraz żebrami. Na wykres rozkładu naprężeń (rys. 6b) naniesiono prostą obrazującą rozkład naprężeń wyznaczony analitycznie w przypadku mimośrodowego ściskania płyty siłą pochodzącą od skurczu

spoin. Rozkłady odkształceń brzegów blachy środknika dla przypadku oznaczonego d02 jest zbliżony do prostoliniowego (zgodnie z założeniem w teorii stateczności płyt); również obciążenia nie są idealnie prostoliniowe, natomiast przypadek obciążenia oznaczony d01 daje rozkład odkształceń krzywoliniowy. Również rozkład naprężeń dla przypadku d02 jest bliższy rozkładowi wyznaczonemu dla blachy środknika z środkowego segmentu na drodze analitycznej.

Na rysunku 7a przedstawiono postać wyboczenia w przypadku napawania nakładki tylko na długości jednego środkowego segmentu środknika dźwigara. W rzeczywistości nie nastąpi wyboczenie ponieważ siła sprężająca generowana w spoinie jest mniejsza od wartości krytycznej. Rysunek 7b przedstawia postać wyboczenia dźwigara skrzynkowego z napawaną nakładką na całej długości.

4. WNIOSKI

Przeprowadzona analiza stateczności płyt wykazała, że nie w każdym przypadku poprzeczne brzegi płyty pozostają prostoliniowe jak to przyjmuje się w teorii stateczności. Wprowadzenie odpowiednich usztywnień brzegowych pozwala zapewnić, że brzegi płyty po obciążeniu są prawie prostoliniowe – dla takiego przypadku wynik rozwiązania staje się zgodny z wynikiem otrzymanym na drodze analitycznej dla przypadku ściskania mimośrodowego siłą wygenerowaną na skutek przyrostu temperatury.

Dla konstrukcji cienkościennych bardziej skomplikowanych niż płyty, np. dźwigary, przyjmuje się, że o stateczności decyduje największa płyta środknika zawarta pomiędzy przeponami i żebrami. Z przeprowadzonych obliczeń numerycznych MES stanów dokrytycznych wynika, że nie we wszystkich przypadkach brzegi płyty ograniczonej przeponami i żebrami pozostają proste.

Obserwując zachowanie się konstrukcji cienkościennych analizowanych w niniejszej pracy można stwierdzić, że zapewnienie prostoliniowości brzegów płyt czy też blach środkników poszczególnych segmentów dźwigara daje niższe wartości krytyczne, powodujących utratę stateczności. W związku z powyższym założenie o prostoliniowości brzegów płyt analizowanych ze względu na stateczność wydaje się słuszne. Pewną wadą takiego założenia jest jednak fakt, że dla niektórych rodzajów obciążenia (przykład d01) konstrukcja nie będzie zaprojektowana optymalnie.

LITERATURA

- [1] Blum A.: Diagnostyka i regeneracja wytrzymałościowa skrzynkowych mostów suwnicowych. Wydawnictwo Instytutu Technologii Eksploatacji, Radom 2002
- [2] Timoshenko S.P., Gere J.M.: Teoria stateczności sprężystej. Arkady, Warszawa, 1963
- [3] Niezgodziński T., Kubiak T.: Problem stateczności blach środkników w sprężanych dźwigarach suwnic. Materiały IX Sympozjum Stateczności Konstrukcji, Zakopane 2000
- [4] Singha M.K., Ramachandra L.S., Bandyopadhyay J.N.: Thermal postbuckling analysis of laminated composite plates, Composite Structures 54 (2001)
- [5] Shukla K.K., Nath Y.: Analytical solution for buckling and post-buckling of angle-ply laminated plates under thermomechanical loading. Int. J. of Non-Linear Mechanics 36 (2001)

- [6] Dzik S., Obrzud K., Wolny S.: Wpływ sprężania na stan naprężenia i odkształcenia skrzynkowego dźwigara suwnicy. Zeszyty Naukowe AGH, Mechanika, T.13, Z. 4, Kraków 1994
- [7] Kubiak T., Niezgodziński T.: Numeryczny model efektu spawania nakładek w dźwigarach skrzynkowych Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej Politechniki Śląskiej 9/1999
- [8] Blum A., Kubiak T., Niezgodziński T., Orłoś Z., Woliński J.: Numerical and experimental investigations of web sheets imperfection changes in the process of technological prestressing of girders, The Archive of Mechanical Engineering Vol XLVII, No 4, 2000
- [9] Structural Analysis Guide for ANSYS rev. 6.1, Ansys Inc., Houston, USA.

STABILITY OF THIN-WALLED GIRDERS SUBJECTED TO THERMAL LOAD

In this paper the correctness of straight edge foundation in stability analysis of thin-walled structures has been considered. Results of numerical calculation for plate and girders subjected to thermal load have been presented. The applied thermal load was the same as in technological pre-stressing process [1] which consists in welding metal straps to the box-girder, parallel to the beam axis. To perform the computation of the stress distribution of webs, the finite element method (ANSYS software package) is applied.

BEHAVIOUR OF STAINLESS STEEL COLUMNS UNDER COMBINED BENDING AND AXIAL COMPRESSION LOADING

M. MACDONALD

Glasgow Caledonian University, Scotland

J. RHODES

Department of Mechanical Engineering, University of Strathclyde, Scotland

M. KOTELKO

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

The behaviour and load capacity of Type 304 stainless steel columns of lipped channel cross-section, subjected to pure compression loading was presented by Macdonald, Rhodes and Kotelko in 2000 [1]. This paper describes the results obtained from an investigation into the behaviour and load capacity of eccentrically loaded Type 304 stainless steel columns of the same lipped channel cross-section. The test results obtained are compared with those obtained from Eurocode 3, Part 1.4 and, the applicability of the Polish carbon steel code PN-90/B-03200 is investigated. Finally, all test and code results are compared to those obtained from finite element analysis. Conclusions are drawn on the basis of the comparisons.

1. INTRODUCTION

The mechanical properties of stainless steels are significantly different from those of carbon steel. Stainless steels display a pronounced response to cold working resulting in anisotropic, non-linear stress-strain behaviour and low proportional limits. The material properties of various stainless steels have been thoroughly investigated since the 1960s by a number of investigators, mainly in the USA. It has been generally concluded that the non-linear stress-strain behaviour of stainless steels can be best described by the Ramberg-Osgood model [2], and Hill's [3] modified form of the Ramberg-Osgood equation is used in the ASCE design specification in the USA [4].

In Europe, Eurocode 3: Part 1.4 [5] has been recently developed and is still under examination. The simpler Eurocode analysis has been found to give reasonable estimates of concentrically loaded column strength without taking account of the non-linearity of the stress-strain curve as was reported in [1].

In Poland no design code exists for the design of cold formed stainless steel members, however, for this investigation the carbon steel code PN-90/B-03200 [6] will be investigated for its applicability to stainless steel members.

The work reported in this paper focuses on eccentric loading of short-to-medium length columns of lipped channel cross-section. The cross-section dimensions and the column length are varied to examine the effects on the buckling load capacity of the columns. Also, two different stress-strain curves are studied.

2. LOAD CAPACITY OF STAINLESS STEEL LIPPED CHANNEL COLUMNS SUBJECTED TO COMBINED BENDING AND AXIAL COMPRESSION LOADING

In the formation of a profiled section, cold working occurs in localised areas, with material at bend regions being strain hardened. Therefore the properties of the material vary throughout the cross-section and at formed bends, higher yield and tensile strengths exist, leading to complex stress-strain relationships for a cold formed stainless steel members. The level of increase of both yield and tensile strength is dependent on the ratio of corner radius to material thickness (r/t). The cold formed lipped channels under investigation are of stainless steel, of cross-sections with small web, flange and lip dimensions and are considered to be fully effective. The four formed corners will have an effect on the stress-strain response of the material obtained from a full section test, which could then be compared to that obtained for virgin material from a standard tensile test. Also, most commercially available finite element programs allow for a non-linear analysis and hence the inclusion of the actual stress-strain data obtained from tensile testing and from existing theories.

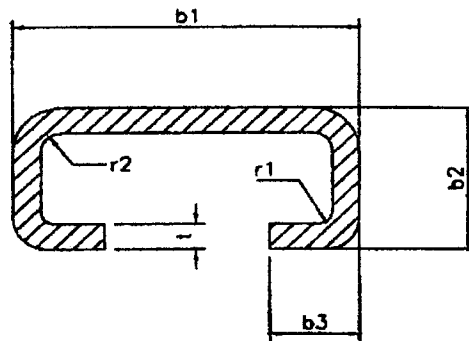


Fig.1. Typical lipped channel section

Eurocode 3, Part 1.4 [5]

This design code provides a bending and compression interaction formula to calculate the maximum compression load P applied at a fixed position of eccentricity e for a fully effective member cross-section and is given by equation (1).

$$\frac{P}{\chi_f \left(\frac{A}{\gamma_{M1}} \right)} + \frac{\kappa P e}{\left(\frac{M_n}{\gamma_{M1}} \right)} \leq 1 \quad (1)$$

The Eurocode interaction formula as modified by Macdonald [7] as given by equation (2).

$$\frac{P}{\chi_f \left(\frac{A}{\gamma_{M1}} \right)} + \frac{\kappa P e}{\left(\frac{M_{exp}}{\gamma_{M1}} \right)} \leq 1 \quad (2)$$

In equation (2), M_{exp} is the cross-section true moment capacity obtained from bending tests and the 0.2% proof stress is taken from the full section tensile test results, and all other terms in both equations are defined in [7].

Polish Code PN-90/B-03200, Section 4 [6]

The formula provided by the Polish design code for structural steel members (there is no specific code for stainless steel structures) subject to simultaneous action of compression and bending is basically similar to (1) and for one-plane bending takes form

$$\frac{N}{\phi N_{Rc}} + \frac{\beta M_{max}}{\phi_L M_R} \leq 1 \quad (3)$$

where $N=P$, ϕ is the global buckling reduction factor corresponding to χ in (1), N_{Rc} is the stub column load-capacity and M_R is the bending moment capacity of the member's cross-section. The coefficient ϕ_L counts for the reduction of the bending moment capacity due to lateral buckling and for the case under investigation equals to 1. Thus, using the notation applied in (1) the design formula (3) takes form

$$\frac{P}{\phi A f_d} + \frac{\beta P e}{M_R} \leq 1 \quad (3a)$$

where $M_R = Z f_d$ and f_d is the material design strength. It should be underlined here that the Polish code recommends to take the design strength less than the material yield stress with the reduction factor depending on a type of the material ($f_d < f_y$).

3. FINITE ELEMENT ANALYSIS

Using the ANSYS finite element package, a full non-linear analysis was performed using shell elements (SHELL181) which are four-noded elements with six degrees of freedom at each node, i.e. translations in x, y and z directions, and rotations about x, y and z axes.

The non-linear material properties of the stainless steel were defined in using the initial elastic modulus, Poisson's ratio and stress-strain data obtained from: (i) coupon tensile tests on material cut from section webs; (ii) full-section tensile tests.

For a non-linear buckling analysis to be accurate, it was necessary to set an initial imperfection in the column being modelled. This was achieved by modelling a mid-span deflection which produced a very large radius of curvature for the lipped channel columns which would approximate any actual imperfections.

A parametric model was constructed by defining positions of keypoints to allow for easy alterations to the model for the two different column lipped channel section thicknesses and for the variation in column length. A half-model of a column was modelled using appropriate symmetry commands that helped to reduce the considerable computer processing time. The boundary conditions were applied and the results are

shown in Table 3.

4. EXPERIMENTAL INVESTIGATIONS

4.1 TENSILE TESTS

Figure 1 shows a typical cross-section of the cold formed stainless steel lipped channel member under investigation. The member is commercially available and was supplied in two different sizes of cross-section and all the specimens were accurately measured at a number of points, with the values averaged to obtain the finished dimensions as detailed in Table 1. All calculations were based on mid-line dimensions. In order to determine the material properties of the sections, tensile tests to failure were set-up and the measured load and elongation were normalised to give a stress-strain relationship. Due to the anisotropy of stainless steel, a full analysis of the material properties would require tensile tests in the longitudinal and transverse directions, as well as compression tests in the same directions. However, compression tests were not carried out as there would be difficulty in establishing the true material properties of the material due to likely buckling effects. Also, transverse direction tensile tests could not be carried out because of the limitations in the geometry of the sections. Hence tensile testing was limited to the longitudinal direction.

Coupons were cut from the webs of the columns, and full sections were tested (to include the effects of cold forming) to obtain the 0.2% proof stress and the modulus of elasticity.

4.2 COMPRESSION TESTS

In the experimental investigation a series of compression tests to failure were made on stainless steel columns of the lipped channel cross-section as described above. The compression loading was applied at a fixed eccentricity position. The specimen parameters investigated were as follows:

- 1) Column lengths varied from 222 mm to 1222 mm in increments of 100 mm. (The slenderness ratios varied from 42 to 234 for the THN sections and from 38 to 207 for the THK sections.
- 2) Two thicknesses of lipped channel section, of small cross-section, were examined. The channels of 2.43 mm thickness were denoted 'THN' while those of 3.05 mm thickness were denoted 'THK'.
- 3) Thirty-three tests to failure (2 sets of THN columns and 1 set of THK columns) were carried out with the loading applied 8 mm eccentric to the centroid of the cross-section.

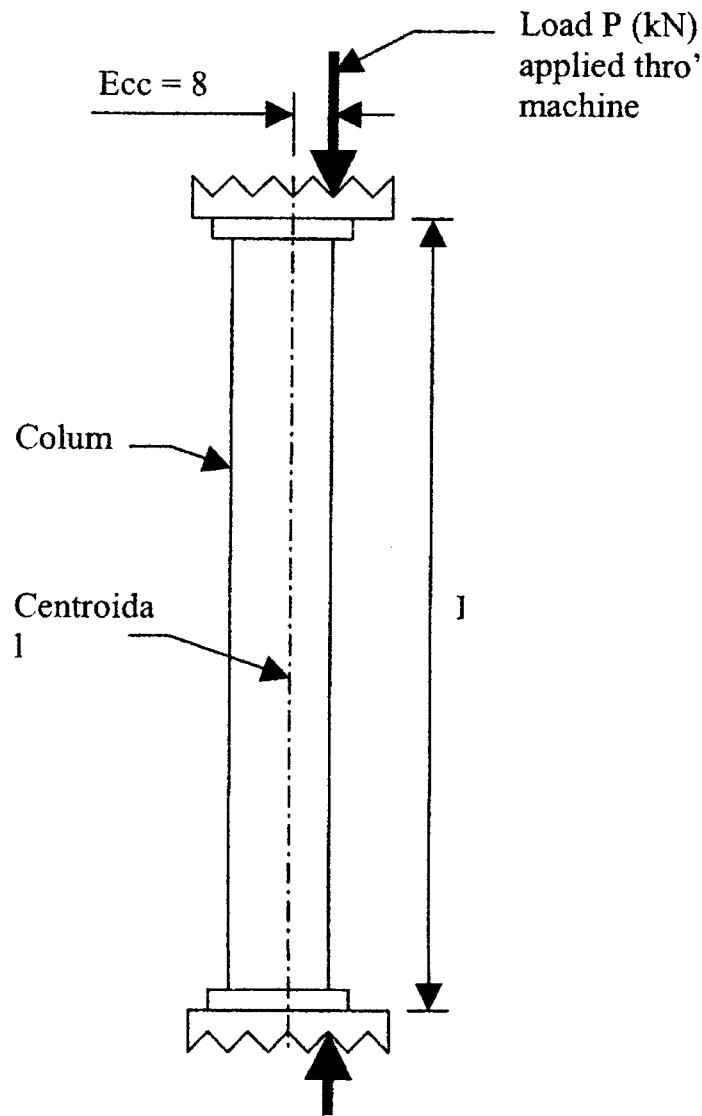


Fig. 2. Schematic Diagram of Eccentrically Loaded Column Test

Table 1. Average Dimensions of Lipped Channel Cross-Sections

Section Ref:	Web, b_1 , (mm)	Flange, b_2 , (mm)	Lip b_3 , (mm)	Thickness t , (mm)	Radius, r_1 , (mm)	Radius, r_2 , (mm)
THN (T)	28.00	14.88	7.45	2.43	1.10	1.10
THK (W)	38.00	17.19	9.99	3.05	0.735	2.255

Each length of column tested was cut to the specified length and then milled flat at each end to avoid any possible gripping problems. The end grips were designed such that they would hold the ends of the column and allow the loading to be applied at the required eccentricity through knife edges. The specimens were tested using a Tinius Olsen electro-mechanical testing machine, with the column vertical displacement and mid-span horizontal deflection measured during the tests using displacement transducers. Figure 2 shows a schematic diagram of the column test configuration.

Table 2. Tensile Test Results: Virgin and Full Section (FS) Mechanical Properties

Material Ref:	Thickness t (mm)	Av. Virgin 0.2% P.S. (N/mm ²)	Av. Virgin UTS (N/mm ²)	Av. FS 0.2% P.S. (N/mm ²)	Av. FS UTS (N/mm ²)
THN (T)	2.43	480	553	520	689
THK (W)	3.05	460	541	540	744

5. RESULTS

All results obtained from tensile tests to establish virgin material and full cross-section mechanical properties are detailed in [6] and are shown in Table 2.

The results obtained for the load capacity of eccentrically loaded lipped channel section columns are shown in Table 3. Also shown are the predictions obtained from Eurocode 1.4 based on virgin and full section material properties using equation (1), the modification to the Eurocode 1.4 interaction formulae given by equation (2), the Polish code given by equation (3) and from finite element analysis.

In the calculations conducted due to the Polish code the following design strengths were taken into account:

- for THN $f_d = \frac{\sigma_{ult}(virgin)}{1.25} = 442 \text{ MPa}$,
- for THK $f_d = \frac{\sigma_{ult}(virgin)}{1.25} = \frac{R_{0.2}(F.S.)}{1.25} = 432 \text{ MPa}$

Figures 3 and 4 show the graphs of Load Capacity v. Column Length for eccentrically loaded THN and THK section columns respectively, showing curves for the test results, Eurocode 1.4, modified Eurocode 1.4 and the Polish code. Figures 5 and 6 show the curves obtained from the tests compared to the finite element predictions.

6. OBSERVATIONS

Figures 3 and 4 show the results obtained for the load capacity of eccentrically loaded THN and THK stainless steel lipped channel section columns from tests, design codes (using virgin material properties and full section properties) and from modifications to the design codes as described by equations (1) and (2). All design code predictions show conservatism in prediction of load capacity for the shorter range of columns with improvements gained when full section properties are used and further improvements are gained in using the modified forms. The best correlation obtained was for THN section columns where the modified design codes predicted accurate load capacities for all column lengths. For the THK section columns, the modified design codes provided accurate predictions of load capacity for all but the shortest columns.

Figures 5 and 6 show the results obtained for the load capacity of eccentrically loaded THN and THK stainless steel lipped channel section columns from tests and from finite element analysis using the various stress-strain curves described earlier. The predictions of the finite element analysis show an excellent correlation to the test results and a real

improvement on the predictions of the design codes. For the THK section columns shown in Figure 6, the stress-strain curve obtained from the full section tensile test and incorporated into the non-linear finite element analysis shows a curve that is almost identical to the test curve. However, for both graphs, any differences between finite element predictions and test results are very slight and occur mainly for very short length columns. The Polish code displays also some conservatism for shorter columns and a good agreement with both experimental and FE results for long, slender columns. The results obtained from the Polish code are situated between results of Eurocode 1.4 and modified design code.

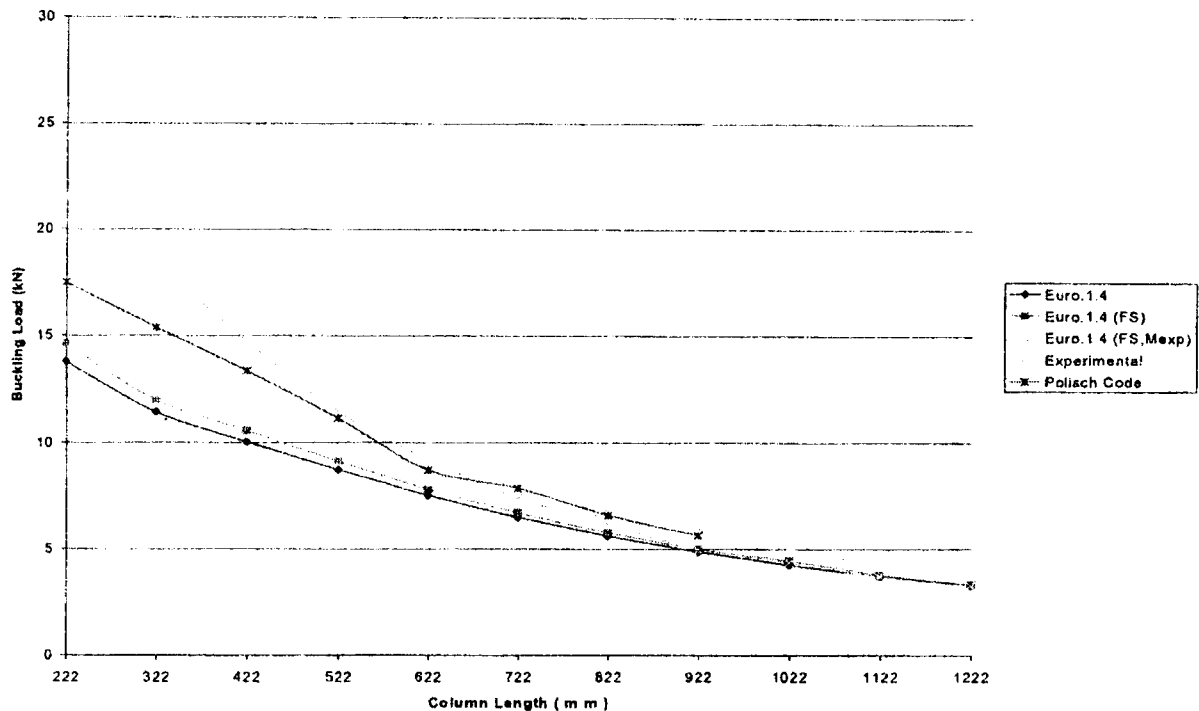


Fig. 3. Graph of Load Capacity v. Column Length: –THN Sections (Test/Design Codes)

7. CONCLUSIONS

This paper has shown that the interaction formula provided by Eurocode 1.4 [equation (1)] shows a high level of conservatism for the shorter length columns using virgin and full section material properties. The modified form of the interaction formula [equation (2)] shows an improved correlation to the test results but it is still conservative. The same concerns the Polish code, but for shorter columns it is less conservative than the Eurocode 1.4, although it overestimates the moment capacity in a significant way. It has also been shown in this paper that finite element analysis can be used with a high level of confidence in predicting the load capacity of eccentrically loaded cold formed stainless steel, short-to-medium length columns of lipped channel section. This has been shown to be true for stress-strain curves obtained from virgin material and full section tensile tests.

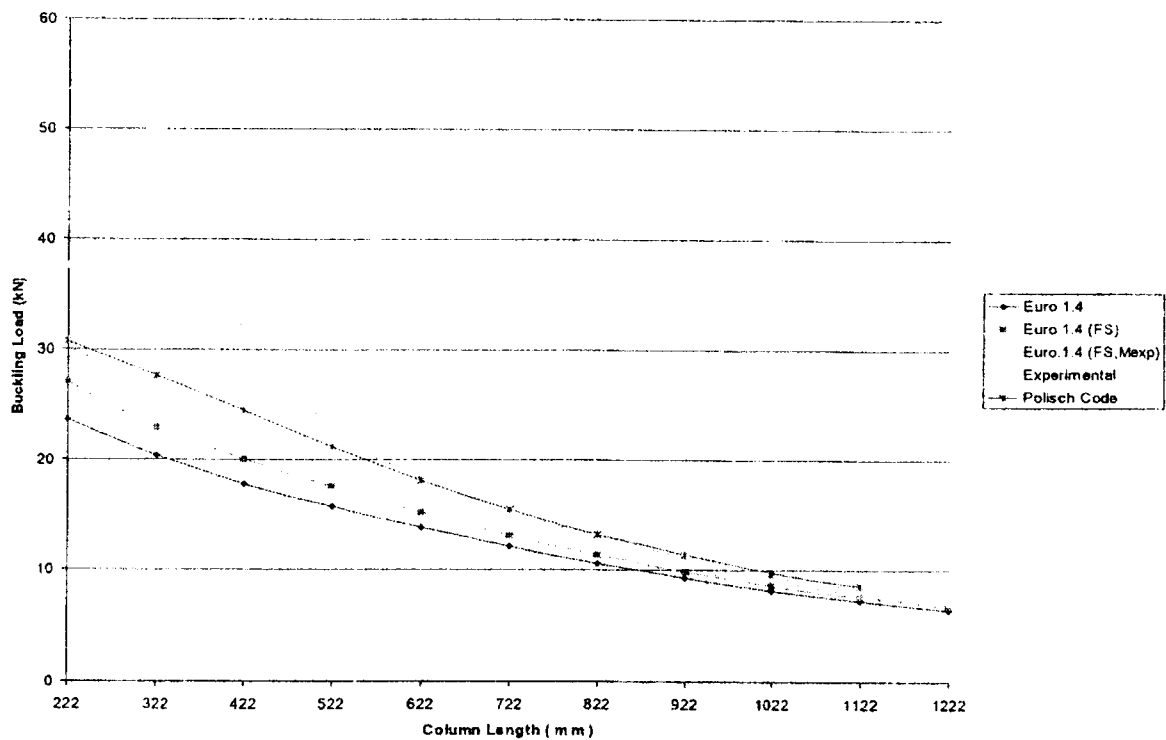


Fig 4. Graph of Load Capacity v. Column Length: –THK Sections (Test/Design Codes)

REFERENCES

- [1] Macdonald, M, Rhodes, J. and Kotelko, M: Stability of Stainless Steel Lipped Channel Columns Subjected to Compression. *Proc. 9th Stability of Structures Symposium, Zakopane, Poland. September 2000.*
- [2] Ramberg, W. and Osgood, W.R: Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Technical Note No.902. February 1943.
- [3] Hill, H.N: Determination of Stress-Strain Relations from 'Offset' Yield Strength Values. National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Technical Note No.927. February 1944.
- [4] ANSI/ASCE-8-90: Specification for the Design of Cold-Formed Stainless Steel Structural Members. 1991.
- [5] ENV 1993-1-3, Eurocode 3: Design of Steel Structures; Part 1.4: General Rules - Supplementary Rules for Stainless Steel. July 1996.
- [6] PN-90/B-03200: Konstrukcje stalowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. 1990
- [7] Macdonald, M.: The effects of Cold Forming on Material Properties and Post-Yield Behaviour of Structural Sections. PhD Thesis, Glasgow Caledonian University, Glasgow, Scotland, January 20002
- [8] Rhodes J. Macdonald M., Kotelko M., McNiff W.: Buckling of Cold Formed Stainless Steel Columns under Concentric and Eccentric Loading, *Proc. Of 3rd International Conference on Thin-Walled Structures, Kraków, Poland, June 2001*

WYBOCZENIE SPRĘŻYSTE BELKI POROWATEJ

K. MAGNUCKI, P. STASIEWICZ

Instytut Mechaniki Stosowanej, Politechnika Poznańska
ul. Piotrowo3, 60-965 Poznań

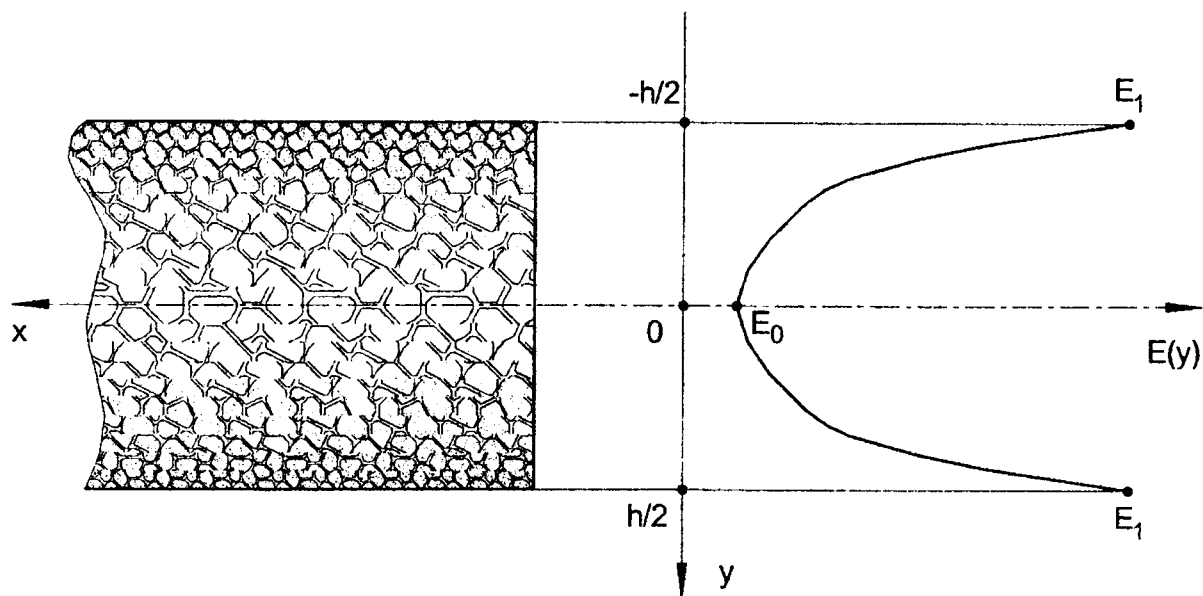
Przedmiotem pracy jest prosta belka o przekroju prostokątnym, podparta przegubowo na obu końcach, obciążona wzdłużną siłą ściskającą. Belka wykonana jest z materiału izotropowego porowatego. Właściwości tego materiału są zmienne na wysokości belki. Na osi belki moduł sprężystości jest najmniejszy, natomiast na powierzchniach górnej i dolnej największy. Z zasady stacjonarności całkowitej energii potencjalnej wyznaczono układ równań różniczkowych stateczności belki. Układ ten rozwiązano analitycznie i zapisano w postaci zamkniętej wyrażenie na obciążenie krytyczne ściskanej belki. Wyniki tego rozwiązania zweryfikowano dla przykładowej belki za pomocą metody elementów skończonych (System COSMOS/M).

1. STAN PRZEMIESZCZEŃ POROWATEJ BELKI

Opisy matematyczne konstrukcji kompozytowych zawierają z konieczności wiele założeń upraszczających. Librescu i Hause [1] dokonali przeglądu modeli konstrukcji sandwiczowych oraz problemy stateczności tych konstrukcji. Vinson [2] omówił konstrukcje sandwiczowe wykonane z materiałów izotropowych i kompozytowych. Kołakowski i Kowal-Michalska [3] zaprezentowali niektóre problemy stateczności cienkościennych konstrukcji kompozytowych. W pracach tych [1-3] opisy przemieszczeń (odkształceń) w przekrojach poprzecznych bazują na liniowej hipotezie Eulera-Bernoulli'ego. Efekt ścinania od sił poprzecznych jest tu pomijany. Odrębną grupę stanowią konstrukcje trójwarstwowe, w których efekt ścinania jest uwzględniany. Lok i Cheng [4] scharakteryzowali właściwości tych konstrukcji ze szczególnym zwróceniem uwagi na warstwę środkową, która podlega przede wszystkim ścinaniu. Magnucki i Ostwald [5] zaprezentowali problemy stateczności i optymalnego kształtowania konstrukcji trójwarstwowych. Przemieszczenia w przekrojach poprzecznych tych konstrukcji [4, 5] opisane są za pomocą hipotezy linii łamanej. Romanow [6] przyjął hiperboliczną hipotezę rozkładu naprężeń normalnych w przekroju poprzecznym ścianki trójwarstwowej. W pracach [4-6] efekt ścinania jest uwzględniany. Wielgosz i Thomas [7] omówili wyniki rozwiązania analitycznego z uwzględnieniem ścinania i badań eksperymentalnych dotyczące zginania paneli. Bart-Smith, Hutchinson i Evans [9] przedstawili problem zginania konstrukcji sandwiczowej, której warstwa środkowa jest wykonana z metalu komórkowego.

Przedmiotem pracy jest izotropowa porowata belka o przekroju prostokątnym podparta przegubowo na obu końcach i obciążona wzdłużną siłą ściskającą. Właściwości mechaniczne materiału zmieniają się na wysokości belki. Najmniejszą wartość moduł Younga przyjmuje w osi belki a największą na powierzchniach górnej i dolnej. Teorie belek Eulera-Bernoulli'ego lub Timoshenko w tym przypadku nie opisują poprawnie stanu przemieszczenia w przekroju poprzecznym. Wang, Reddy, i Lee [10] omówili szczegółowo wpływ odkształcenia postaciowego warstw środkowych na ugięcie belek i płyt dla różnych przypadków obciążeń.

Belka porowata (Rys.1) jest uogólnieniem belki sandwiczowej. Powierzchnie zewnętrzne (górną i dolną) są gładkie bez porów, materiał jest ciągły. Porowatość materiału występuje wewnątrz belki i zmienia się na głębokości-wysokości osiągając największą wartość w osi. Wprowadzono prostokątny układ współrzędnych, oś x jest wzdłuż osi belki, natomiast oś y wzdłuż głębokości belki.



Rys. 1. Schemat porowatej belki

Moduły sprężystości zdefiniowano w następujący sposób:

$$E(y) = E_1 [1 - e_0 \cos(\pi\eta)], \quad G(y) = G_1 [1 - e_0 \cos(\pi\eta)], \quad (1)$$

gdzie:

$$e_0 = 1 - \frac{E_0}{E_1} \text{ - współczynnik porowatości belki,}$$

$$E_0, E_1 \text{ - wartości modułu Younga dla } y = 0 \text{ i } y = \pm \frac{h}{2},$$

$$G_0, G_1 \text{ - wartości modułu Kirchhoffa dla } y = 0 \text{ i } y = \pm \frac{h}{2},$$

$$G_j = \frac{E_j}{2(1+\nu)} \text{ - związek między modułami sprężystości dla } j = 0, 1.$$

ν - liczba Poissona – stała dla belki,

$$\eta = \frac{y}{h} \text{ - współrzędna bezwymiarowa,} \quad h \text{ - wysokość – głębokość belki.}$$

Pole przemieszczeń (model geometryczny) w przekroju poprzecznym belki pokazano na Rys.2. Poprzeczny przekrój płaski-prosta po odkształceniu tworzy powierzchnię-krzywą, która pod kątem prostym przecina górną i dolną powierzchnię belki. Ten model geometryczny jest analogiczny do hipotezy linii łamanej stosowanej w konstrukcjach trójwarstwowych.

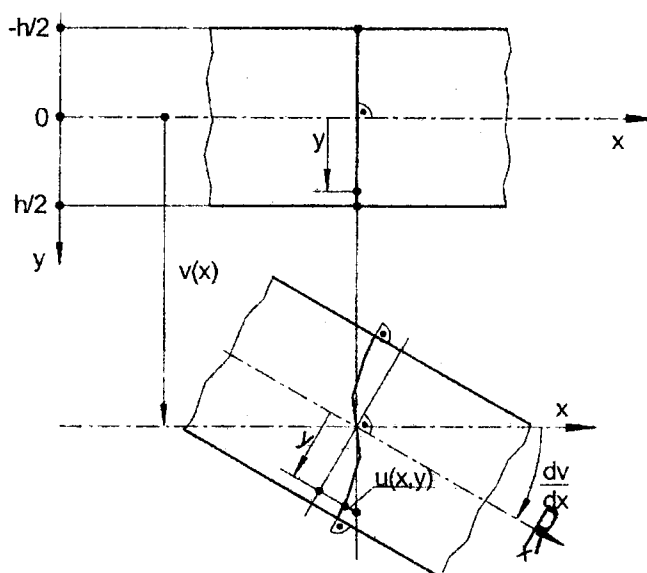
Pole przemieszczeń w dowolnym przekroju poprzecznym zdefiniowano w następujący sposób:

$$u(x, y) = -h \left\{ \eta \frac{dv}{dx} - \frac{1}{\pi} \left[\psi_1(x) \sin(\pi\eta) + \psi_2(x) \sin(2\pi\eta) \cos^2(\pi\eta) \right] \right\},$$

$$v(x, y) = v(x, 0) = v(x),$$
(2)

gdzie:

$u(x, y)$ - przemieszczenie wzdłużne zgodne z osią x ,
 $v(x)$ - ugięcie, przemieszczenie poprzeczne zgodne z osią y ,
 $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ - bezwymiarowe funkcje przemieszczeń.



Rys. 2. Model geometryczny hipotezy linii krzywej

Związki geometryczne -składowe stanu odkształcenia:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -h \left\{ \eta \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{1}{\pi} \left[\frac{d\psi_1}{dx} \sin(\pi\eta) + \frac{d\psi_2}{dx} \sin(2\pi\eta) \cos^2(\pi\eta) \right] \right\},$$
(3)

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dv}{dx} = \psi_1(x) \cos(\pi\eta) + \psi_2(x) [\cos(2\pi\eta) + \cos(4\pi\eta)],$$

gdzie: ε_x , γ_{xy} - odkształcenie normalne wzdłuż osi, kąt odkształcenia postaciowego.

Związki fizyczne – prawo Hooke'a

$$\sigma_x = E(y) \cdot \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G(y) \cdot \gamma_{xy}.$$
(4)

Występujące tu moduły sprężystości (1) są zmienne i zależą od współrzędnej y .

2. RÓWNANIA STATECZNOŚCI BELKI

Pole przemieszczeń postawionego problemu zawiera trzy nieznanne funkcje $v(x)$, $\psi_1(x)$ oraz $\psi_2(x)$. Niezbędne są więc trzy równania, które wyznaczono na podstawie zasady stacjonarności całkowitej energii potencjalnej ściskanej belki

$$\delta(U_\varepsilon - W) = 0, \quad (5)$$

gdzie:

$$U_\varepsilon = \frac{ht}{2} \int_0^L \int_{-1/2}^{1/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dx d\eta - \text{energia odkształcenia sprężystego},$$

$$W = \frac{F}{2} \int_0^L \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx - \text{praca obciążenia – siły ściskającej belkę},$$

L - długość belki, t - szerokość przekroju prostokątnego belki.

Układ trzech równań stateczności porowatej belki ściskanej zapisano w następującej postaci:

$$E_1 h^3 t \left(C_1 \frac{d^2 v}{dx^2} - C_2 \frac{d\psi_1}{dx} - C_3 \frac{d\psi_2}{dx} \right) + F \cdot v(x) = 0,$$

$$C_2 \frac{d^3 v}{dx^3} - C_4 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} - C_5 \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{1}{h^2} (C_7 \psi_1 + C_8 \psi_2) = 0, \quad (6)$$

$$C_3 \frac{d^3 v}{dx^3} - C_5 \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} - C_6 \frac{d^2 \psi_2}{dx^2} + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{1}{h^2} (C_8 \psi_1 + C_9 \psi_2) = 0,$$

gdzie:

$$C_1 = \frac{1}{12} - \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^3} e_0, \quad C_2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} e_0 \right), \quad C_3 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{3}{16} - \frac{32}{75\pi} e_0 \right),$$

$$C_4 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3\pi} e_0 \right), \quad C_5 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{8}{15\pi} - \frac{1}{8} e_0 \right), \quad C_6 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{5}{32} - \frac{128}{315\pi} e_0 \right),$$

$$C_7 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi} e_0, \quad C_8 = \frac{8}{15\pi} - \frac{1}{4} e_0, \quad C_9 = 1 - \frac{832}{315\pi} e_0,$$

Otrzymano ponadto odpowiednie warunki brzegowe (dla $x = 0$ oraz $x = L$):

$$[v'' \delta(v') - v''' \delta v]_0^L = 0, \quad [\psi'_k \delta(v') - \psi''_k \delta v]_0^L = 0, \quad (v'' \delta \psi_k)_0^L = 0, \quad (\psi'_k \delta \psi_k)_0^L = 0,$$

$k = 1, 2$.

Przyjmując związek liniowy między funkcjami przemieszczeń

$$\psi_2(x) = -C_{10}\psi_1(x), \quad \text{gdzie} \quad C_{10} = \frac{C_2C_8 - C_3C_7}{C_2C_9 - C_3C_8}, \quad (7)$$

układ równań (6) można sprowadzić do jednego równania

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \left(\frac{k_1}{h}\right)^2 \frac{d^2 v}{dx^2} - \left(\frac{k_2}{h}\right)^4 v(x) = 0, \quad (8)$$

gdzie:

$$k_1^2 = \frac{C_1C_{13} \cdot f - \alpha_1}{\alpha_2}, \quad k_2^4 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} f, \quad \alpha_1 = \frac{C_1C_{11}}{2(1+\nu)}, \quad \alpha_2 = C_1C_{13} - C_2C_{12},$$

$$C_{11} = C_7 - C_8C_{10}, \quad C_{12} = C_2 - C_3C_{10}, \quad C_{13} = C_4 - C_5C_{10},$$

$$f = \frac{F}{E_1C_1ht} \text{ - bezwymiarowa siła ściskająca belkę.}$$

Całką równania (8) jest ugięcie belki

$$v(x) = A_1 \sin(\lambda_1 x) + A_2 \cos(\lambda_1 x) + A_3 \sinh(\lambda_2 x) + A_4 \cosh(\lambda_2 x) \quad (9)$$

gdzie:

$$A_j \text{ - stałe, dla } j = 1, 2, 3, 4;$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2h}} \sqrt{k_1^2 + \sqrt{k_1^4 + 4k_2^4}}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2h}} \sqrt{-k_1^2 + \sqrt{k_1^4 + 4k_2^4}}.$$

Przegubowe podparcie belki na obu końcach pozwala zapisać warunek $A_1 \sin(\lambda_1 L) = 0$, z którego wynika, że $\lambda_1 L = \pi$. Po rozwinięciu tego wyrażenia zapisano wzdłużną siłę krytyczną w postaci

$$F_{KR} = \frac{\pi^2 E_1 h^3 t}{L^2} C_1 \left[1 - \pi^2 \left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{C_2 C_{12}}{B_0} \right], \quad (10)$$

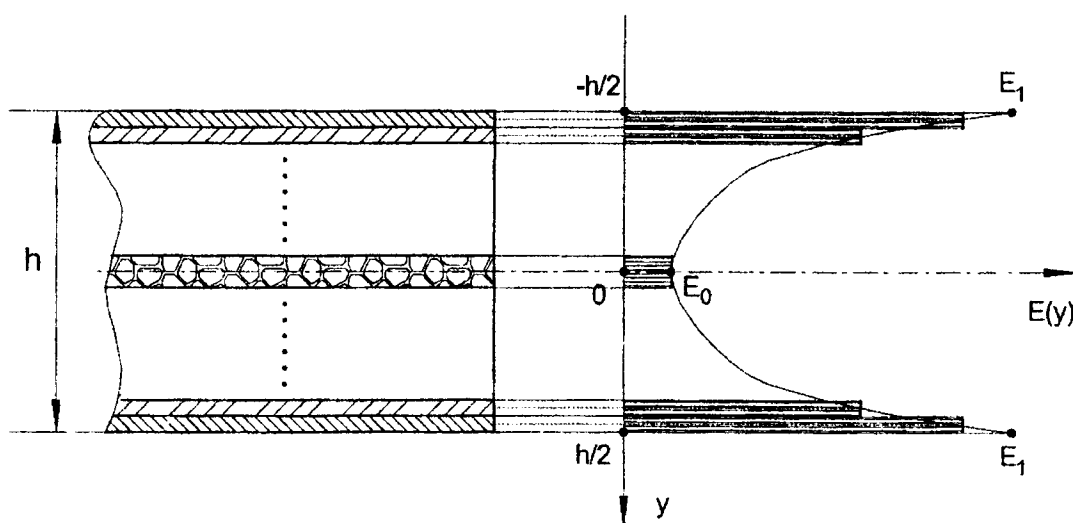
gdzie:

$$B_0 = C_1 \left[\frac{C_{11}}{2(1+\nu)} + \pi^2 \left(\frac{h}{L}\right)^2 C_{13} \right].$$

W szczególnym przypadku, gdy belka wykonana jest z materiału izotropowego nieporowatego - stałe sprężystości nie zależą od współrzędnej y ($e_0 = 0$, $C_1 = 1/12$) i pomija się wpływ siły poprzecznej na wartość obciążenia krytycznego, wówczas otrzymuje się klasyczną siłę Eulera. Wyrażenie (10) uwzględnia, oprócz zmiany właściwości sprężystych, także wpływ odkształcenia postaciowego na siłę krytyczną.

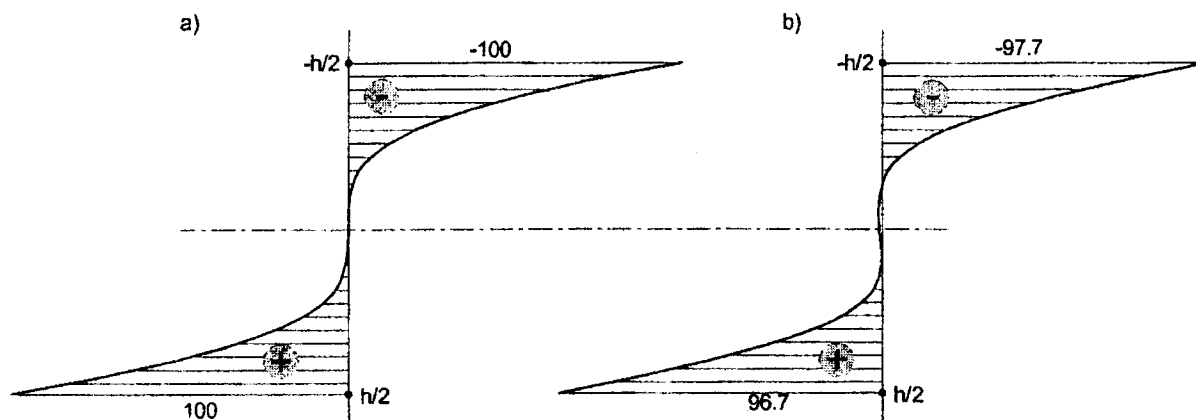
3. ANALIZA NUMERYCZNA

Przyjęto rodzinę belek o stałej wysokości $h = 100\text{mm}$ i szerokości $t = 1\text{mm}$. Długości belek $L = 2000\text{mm}$, 2500mm i 5000mm . Stałe materiałowe: $E_1 = 2.05 \cdot 10^5\text{MPa}$, $e_0 = 0.99$, $\nu = 0.3$. Analiza numeryczna została zrealizowana za pomocą metody elementów skończonych – system COSMOS/M. Ze względu na symetrię układu zamodelowano połowę belki z odpowiednimi warunkami brzegowymi na jednym końcu dla $x = 0$ (zerowe przemieszczenia w kierunku osi y) oraz w przekroju środkowym dla $x = L/2$ (zerowe przemieszczenia wzdłuż osi x). Wyboczenie belki analizowane jest jedynie w płaszczyźnie xy . Zmienne właściwości materiałowe na wysokości przekroju dyskretyzowano za pomocą 20 warstw o stałych właściwościach. Poszczególne warstwy charakteryzują moduły sprężystości przyjmowane zgodnie z (1) dla punktów leżących pośrodku każdej z warstw (Rys. 3).



Rys. 3. Dyskretyzacja właściwości materiałowych

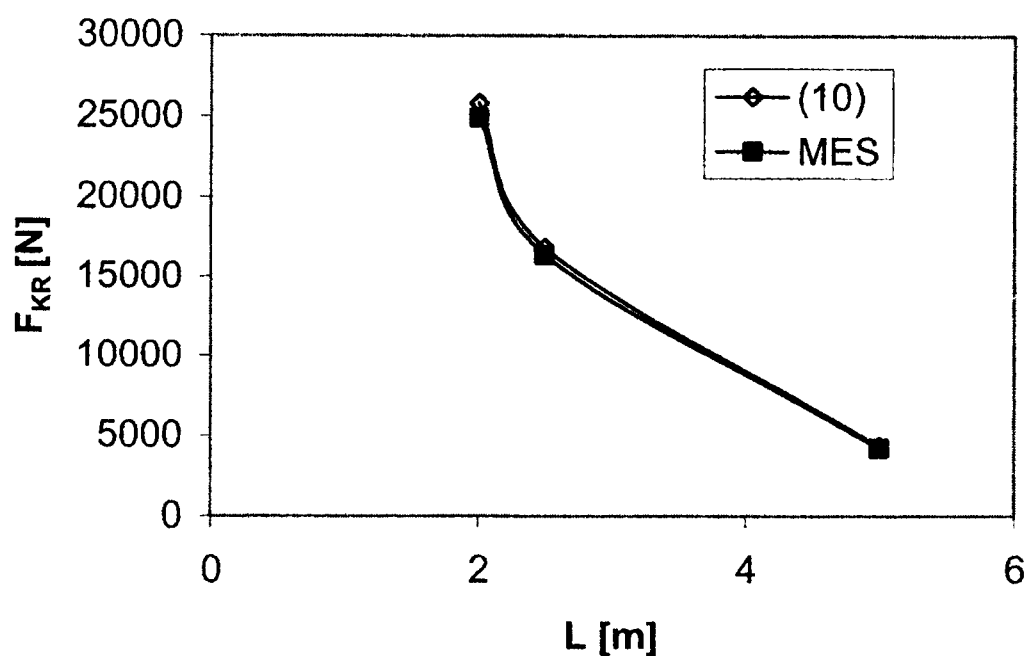
Analiza numeryczna MES została zrealizowana w dwu etapach: w pierwszej kolejności wykonano analizę statyczną, a następnie wyznaczono obciążenia krytyczne. Dla potrzeb analizy wytrzymałości belka poddana jest działaniu obciążenia poprzecznego o stałej intensywności rozłożonego na całej długości.



Rys. 4. Naprężenia normalne w przekroju poprzecznym: a) teoria, b) MES

Na rysunku 4. zaprezentowano przykładowy rozkład naprężeń normalnych punktów leżących w środkowym przekroju poprzecznym belki. Rozkład teoretyczny (rys. 5a) został wyznaczony z prawa Hooke'a (4) na podstawie założonych postaci modułów sprężystości (1) oraz przyjętej hipotezy linii krzywej w opisie przemieszczeń (2). Rozkłady naprężeń uzyskane analitycznie i numerycznie MES są bardzo zbliżone, co może potwierdzać słuszność przyjętej hipotezy linii krzywej.

W celu wyznaczenia obciążeń krytycznych MES zastosowano algorytm Subspace Iteration. W tym przypadku jedyne obciążenie stanowiły wzdłużne siły ściskające działające na końcu belki. Ponadto dla analizowanych belek obliczono analitycznie obciążenia krytyczne korzystając z równania (10). Wyniki zaprezentowano na rys. 5.



Rys. 5. Siła krytyczna jako funkcja długości belki

Spośród analizowanych przypadków największa różnica pomiędzy siłą krytyczną wyznaczoną analitycznie a siłą krytyczną uzyskaną numerycznie MES dotyczyła belki o długości 5 m i nie przekraczała 4%.

LITERATURA

- [1] Librescu L, Hause T. Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey. *Composites Structures*, 2000, s.1-17.
- [2] Vinson JR. *The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials*. Technomic Publishing Company, Inc. Lancaster – Basel 1999.
- [3] Kołakowski Z, Kowal-Michalska K (ed.). *Selected problems of instabilities in composite structures*. Publishers of Technical University of Lodz, Łódź 1999.
- [4] Lok T-S, Cheng Q-H. Elastic stiffness properties and behavior of truss-core sandwich panel. *Journal of Structural Engineering*, 5, 2000, s.552-559.
- [5] Magnucki K, Ostwald M (red.). *Stateczność i optymalizacja konstrukcji trójwarstwowych*, Wyd. Instytutu Technologii Eksploatacji w Radomiu, Poznań-Zielona Góra 2001.

- [6] Romanów F. Wytrzymałość konstrukcji warstwowych, Wyd. Wyższej Szkoły Inżynierskiej, Zielona Góra 1995.
- [7] Wielgosz C, Thomas J-C. Deflections of inflatable fabric panels at high pressure. *Thin-Walled Structures*, 40, 2002, s.523-536.
- [8] Hutchinson JR. Shear coefficients for Timoshenko beam theory. *Journal of Applied Mechanics*. 68, 2001, s.87-92.
- [9] Bart-Smith H, Hutchinson JW, Evans AG. Measurement and analysis of the structural performance of cellular metal sandwich construction. *International Journal of Mechanical Sciences*, 43, 2001, s.1945-1963.
- [10] Wang CM, Reddy JN, Lee KH. *Shear deformable beams and plates*. Elsevier Science: Amsterdam-Lausanne-New York-Oxford-Singapore-Tokyo 2000.

ELASTIC BUCKLING OF A POROUS BEAM

The topic of the paper is a straight beam of rectangular cross-section, pivoted at both ends, loaded with a lengthwise compressive force. The beam is made of an isotropic porous material. Properties of the material vary along the height of the beam. Modulus of elasticity of the beam is minimal in the beam axis, taking maximal values at the top and bottom surfaces. The principle of conservation of total potential energy enables formulating the system of differential equations of beam stability. The system was solved analytically and, afterwards, an expression for critical load of the compressed beam was written in a closed form. Results of the solution were verified for an exemplary beam by means of Finite Element Method (The COSMOS/M System).

INTERACTION OF GLOBAL AND LOCAL MODES AT FREE OSCILLATIONS OF COMPRESSED THIN-WALLED BEAMS

A.I. MANEVICH

Department of Computational Mechanics and Strength of Structures, Dniepropetrovsk National University, Naukova str. 13, 49050 Dniepropetrovsk, Ukraine

Z. KOŁAKOWSKI

Department of Strength of Materials and Structures, Technical University of Łódź, ul. Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź, Poland

The influence of a compressive force on free nonlinear oscillation of thin-walled members is studied. The case of internal autoparametric resonance is considered when the ratio of natural frequencies of global and local modes is close to 2:1. It is shown that in a vicinity of this resonance the oscillations become amplitude-frequency modulated due to the energy exchange between linear modes. Two coupled stationary oscillation modes exist (which can be regarded as synchronized vibrations in overall and local mode). A bifurcational value of the energy is established after exceeding of which the uncoupled oscillation in overall mode becomes unstable, and stationary modes can be only coupled.

1. INTRODUCTION

Dynamic behavior of thin-walled members under action of a compressive force was studied in a few works from various points of view. In [1] the response of a thin-walled column to the suddenly applied end compression was studied, with particular attention to a decrease in the load carrying capacity due to the sudden application of the load. The equations of motion included cubic nonlinearities, and modulated synchronized oscillations in global and local modes with a single frequency were observed at not very large loads. In [2] the influence of in-plane forces on natural frequencies and natural modes of thin-walled members was studied, in the framework of the linear theory.

In this report we focus our attention on another aspect of the problem. Application of the axial force changes the ratio of natural frequencies for various modes - overall and local. Usually the ratio ω_1/ω_2 (ω_1 and ω_2 are the natural frequencies for global and local mode, respectively) is less than unity when the force is absent. If the critical stress σ_2 for local mode is below than the critical stress for global mode σ_1 , then at gradually increasing compressive stress σ the frequencies ratio ω_1/ω_2 rises and tends to infinity when σ approaches to σ_2 . So this ratio equals to 2:1 for a certain σ (and close to this value in some interval of σ). If the equations of motion include quadratic nonlinearities (f.e., in the case of thin-walled beams with one axis of symmetry) then the internal autoparametric resonance occurs leading to specific features in the dynamic behavior.

In this paper free nonlinear oscillations of thin-walled beams under compression are studied with account of interaction of global and local modes in the case of autoparametric resonance. Note that in paper [3] an autoparametric resonance in thin-walled open-cross section beams has been studied which is caused by the interaction of another modes— global flexural and flexural-torsional modes.

2. GOVERNING EQUATIONS

Let us obtain the equations of motion of a compressed beam assuming that the natural modes of vibration coincide with the buckling modes (it is the case, in particular, for simply supported beams). Let λ is a load factor, U_j ($j=1-N$) are the linear buckling modes with critical load factor values λ_j close to the minimal critical value λ_{\min} . We assume the following expansion for the dynamic displacements field (Koiter's type expansion for the buckling problem):

$$U \equiv (u, v, w) = \lambda U_0 + \zeta_j(t) U_j + \zeta_j(t) \zeta_k(t) U_{jk} + \dots \quad (1)$$

where ζ_j is the amplitude of j^{th} mode (normalized, in given case, by the condition of equality of the maximal deflection to wall thickness t), U_{jk} are the second order displacement fields; summation is supposed on repeated indexes. Then, similarly to the Koiter's theory for the buckling problem, the potential energy can be written in the form

$$P = \frac{1}{2} c_0 \lambda^2 + \frac{1}{2} \sum_s c_s \zeta_s^2(t) \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_s}\right) + c_{jkl} \zeta_j(t) \zeta_k(t) \zeta_l(t) + \dots \quad (2)$$

where coefficients c_0, c_j, c_{jkl} are determined with known formulae [4,5].

The kinetic energy with account of expansion (1) and conditions of orthogonality for U_j and U_{jk} is as follows:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_z \int_A (u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) dA dz = \frac{1}{2} \sum_s m_s \zeta_{s,t}^2 \quad (3)$$

where A is the cross-section area, z is the longitudinal coordinate, ρ is the density,

$$m_j = \rho \int_z \int_A (u_j^2 + v_j^2 + w_j^2) dA dz \quad (4)$$

Then the Lagrange's equations are as follows:

$$m_j \zeta_{j,tt} + c_j \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \zeta_j + c_{klj} \zeta_k \zeta_l = 0 \quad (j=1, \dots, N) \quad (5)$$

In the case of two interactive modes – global ($j=1$) and local ($j=2$) the equations of motion with account of symmetry and periodicity conditions for the local modes take the form (all terms in the potential energy (2) depending on odd degrees of the local mode amplitude ζ_2 should vanish):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_{01}^2} \zeta_{1,tt} + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \zeta_1 - b_{111} \zeta_1^2 - b_{221} \zeta_2^2 &= 0 \\ \frac{1}{\omega_{02}^2} \zeta_{2,tt} + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) \zeta_2 - 2b_{122} \zeta_1 \zeta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$\omega_{0j}^2 = \frac{c_j}{m_j}, \quad b_{klj} = -\frac{c_{klj}}{c_j} \quad (7)$$

Denoting

$$\omega_j^2 = \omega_{0j}^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right) \quad (8)$$

and introducing nondimensional time $\tau = \omega_2 t$, rewrite equations (6) in the nondimensional form

$$\begin{aligned} \zeta_{1,\tau\tau} + \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \zeta_1 - d_{111} \zeta_1^2 - d_{221} \zeta_2^2 &= 0 \\ \zeta_{2,\tau\tau} + \zeta_2 - 2d_{122} \zeta_1 \zeta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

where

$$d_{klj} = \frac{b_{klj} \omega_{0j}^2}{\omega_{02}^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right)} \quad (10)$$

3. SOLUTION BY THE MULTIPLE SCALES METHOD

We consider the case when the frequencies ratio is close to 2:1:

$$\omega_1 = 2 \omega_2 - \varepsilon \delta \quad (11)$$

where δ is a the detuning parameter, ε is a small parameter. The set of equations (9) is solved by the multiple scale method [6]. Introducing «slow» and «fast» times $T_n = \varepsilon^n \tau$ ($n = 0, 1, \dots$), we seek the solution in the form of asymptotic series

$$\zeta_1 = \varepsilon \zeta_{11} + \varepsilon^2 \zeta_{12} + \dots, \quad \zeta_2 = \varepsilon \zeta_{21} + \varepsilon^2 \zeta_{22} + \dots \quad (12)$$

The standard procedure of the method gives the following first and second order sets of equations:

$$\mathcal{E}^1: \quad D_0^2 \zeta_{11} + 4 \zeta_{11} = 0, \quad D_0^2 \zeta_{21} + \zeta_{21} = 0 \quad (13)$$

$$\mathcal{E}^2: \quad D_0^2 \zeta_{12} + 4 \zeta_{12} = -2 D_0 D_1 \zeta_{11} + d_{111} \zeta_{11}^2 + d_{221} \zeta_{21}^2 + \delta^* \zeta_{11} \quad (14)$$

$$D_0^2 \zeta_{22} + \zeta_{22} = -2 D_0 D_1 \zeta_{21} + 2 d_{122} \zeta_{11} \zeta_{21}$$

where $D_n = \partial(\dots)/\partial T_n$, $\delta^* = 4\delta/\omega_2$. Solution of Eqns (13) can be written as

$$\zeta_{11} = \frac{1}{2} \left(A_1(T_1) e^{i2T_0} + \bar{A}_1(T_1) e^{-i2T_0} \right),$$

$$\zeta_{21} = \frac{1}{2} \left(A_2(T_1) e^{iT_0} + \bar{A}_2(T_1) e^{-iT_0} \right) \quad (15)$$

Substituting (15) into the right hand sides of (14), one obtains from the condition of absence of secular terms following two complex equations:

$$8i \frac{dA_1}{dT_1} - d_{221} A_2^2 - 2\delta^* A_1 = 0, \quad 2i \frac{dA_2}{dT_1} - d_{122} A_1 \bar{A}_2 = 0 \quad (16)$$

Passing to polar coordinates $A_s = a_s e^{i\theta_s}$ ($s=1, 2$) we obtain four ordinary differential equations with respect to amplitudes a_j and phases θ_j ($j=1,2$):

$$8a_1' = d_{221} a_2^2 \sin \gamma, \quad 2a_2' = -d_{122} a_1 a_2 \sin \gamma \quad (17)$$

$$8a_1 \theta_1' = -d_{221} a_2^2 \cos \gamma - 2\delta^* a_1, \quad 2a_2 \theta_2' = -d_{122} a_1 a_2 \cos \gamma$$

where $\gamma = 2\theta_2 - \theta_1$ and $(\dots)' = d(\dots)/dT_1$. We see that only coefficients d_{122} d_{221} (and since only coefficients $c_{122} = c_{212} = c_{221}$ in the potential energy (2)) influence the nonlinear mode interaction in the quadratic system considered. From first two Eqns (17) we get the energy integral (e is a constant proportional to the energy of oscillation):

$$4a_1^2 + \nu a_2^2 = e \quad (\nu = d_{221}/d_{122}) \quad (18)$$

From the last two Eqns (17) one has the following equation for γ' :

$$8a_1 \gamma' = -d_{122} (8a_1^2 - \nu a_2^2) \cos \gamma + 2\delta^* a_1 \quad (19)$$

Let us introduce the new variable ξ changing in the interval (0,1):

$$\xi = \frac{2a_1}{\sqrt{e}} \quad (a_1^2 = \frac{\xi^2 e}{4}, \quad a_2^2 = \frac{e}{\nu}(1 - \xi^2)) \quad (20)$$

Then from (17)–(19) we have following set of two Eqns in ξ, γ :

$$\begin{aligned} 4 \frac{d\xi}{dT_1} &= d_{122} \sqrt{e} (1 - \xi^2) \sin \gamma \\ 4 \xi \frac{d\gamma}{dT_1} &= d_{122} \sqrt{e} \left[(1 - 3\xi^2) \cos \gamma + 2 \frac{\xi}{\psi} \right] \end{aligned} \quad (21)$$

where

$$\psi = 2 d_{122} \sqrt{e} / \delta^* \quad (22)$$

The set of equations (21) has the integral («integral of amplitude-frequency modulation»)

$$\psi \xi (1 - \xi^2) \cos \gamma + \xi^2 = C \quad (23)$$

This integral enables us to describe nonstationary oscillations with exchange of energy between the linear modes (15). The integral curves (23) constitute an «amplitude–frequency portrait» (AFP) in the plane ξ, γ . Due to periodicity it is sufficient to construct this AFP in the rectangle $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \gamma \leq \pi$. The AFP depends on the single parameter ψ (22). In Fig. 1 there are presented AFP for three values of parameter ψ (for $\gamma > \pi$ these portraits should be continued symmetrically).

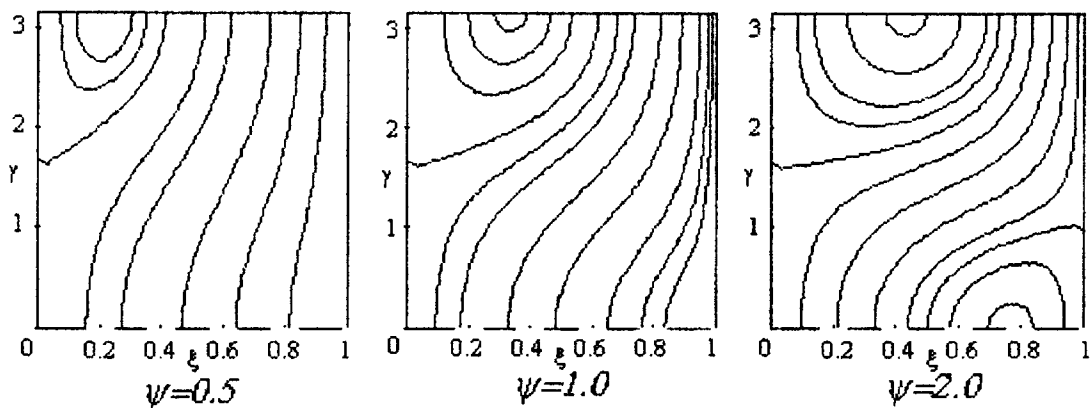


Fig. 1. Amplitude frequency portraits for three values of parameter ψ (22).

As parameter ξ^2 characterizes the ratio of energy oscillation in the first (global) mode to the total energy, these curves visually show magnitude of energy exchange between global and local modes. The energy exchange depends on the nondimensional parameter ψ , which is determined by the energy, detuning parameter δ^* and coefficient

d_{122} . The AFP presented show that the energy exchange rises with increasing ψ , i.e. with increasing energy, and that it depends on the phase difference γ between the linear modes.

4. STATIONARY COUPLED OSCILLATIONS. BIFURCATIONAL VALUE OF THE ENERGY

Stationary points on the amplitude–frequency portraits (Fig.1) correspond to stationary oscillations, i.e. to synchronized dynamic regimes. These points are determined by condition of vanishing the right hand sides in Eqns (21):

$$(1 - \xi^2) \sin \gamma = 0, \quad \psi (1 - 3\xi^2) \cos \gamma + 2\xi = 0 \quad (24)$$

It follows from the first equation that either $\xi = 1$ or $\gamma = n\pi$. The point $\xi = 1, \gamma = (-1)^k \arccos(1/\psi) + k\pi, k = 0, 1, \dots$ correspond to uncoupled oscillation in the first (overall) mode. Another roots of (24) are

$$\begin{aligned} \gamma = 0, \quad \xi = \xi_1 &= \frac{1}{3\psi} \left(1 \pm \sqrt{1 + 3\psi^2} \right) \\ \gamma = \pi, \quad \xi = \xi_2 &= \frac{1}{3\psi} \left(-1 \pm \sqrt{1 + 3\psi^2} \right) \end{aligned} \quad (25)$$

These are coupled stationary oscillations which can be «in phase» ($\gamma = 0$) or «antiphase» ($\gamma = \pi$). Values ξ should lie in the interval (0,1). It is easily seen that only for one sign (before the radicals in (25)) values ξ_1 and ξ_2 are positive (if $\psi > 0$ – for «+», if $\psi < 0$ – for «-»). It is also easily seen that it is sufficient to consider only the case $\psi > 0$, because at change of the ψ sign the root ξ_1 commutes with ξ_2 . If $\psi > 0$ then the root $\xi_2 < 1$ for any ψ , and therefore this stationary point exists at any energy of oscillation. But the root $\xi_1 < 1$ only for $\psi > 1$. The value $\psi = 1$ determines a bifurcational value of the energy e_* . From (22) we have for this value:

$$e_* = \left(\frac{\delta^*}{2d_{122}} \right)^2 = \left(\frac{2\delta}{\omega_2 d_{122}} \right)^2 \quad (26)$$

It can be proved with the use of integral (23) that stationary coupled modes (25) are stable. When $e < e_*$ only one coupled stationary mode exists (see the first graph in Fig. 1). It is seen from this graph (and can be easily proved) that uncoupled linear

oscillation in local mode ($\xi = 0$) is unstable – any perturbation results in excitation of the global mode, and the periodical exchange of energy between two modes takes place. When $e = e^*$ the second stationary point appears (point $\gamma = 0, \xi = 1$ at the second graph in Fig.1), and at $e > e^*$ two coupled stationary modes exist (the third graph in Fig.1). Simultaneously the uncoupled global mode becomes unstable – any oscillation in this mode is accompanied by oscillation in the local mode.

Thus the autoparametric resonance yields to following consequences at free oscillations: a) the linear local mode becomes unstable (it exchanges the energy with the global mode); b) when energy of oscillations is small there exist single coupled stationary mode (with prevailing deflection in local mode); c) there exist a bifurcational value of the energy e^* , corresponding to appearance of another coupled stationary mode (with prevailing deflection in global mode), and simultaneously the linear overall mode becomes unstable (so at large amplitudes both linear modes – global and local – are unstable, and both coupled modes are stable).

5. NUMERICAL EXPERIMENT

In the numerical experiment we considered a beam of channel cross section with parameters: length $L = 400$ mm, web width $b_1 = 50$ mm, flange width $b_2 = 25$ mm, thickness $t = 1$ mm, Young's modulus $E = 2 \cdot 10^5$ MPa. As a load factor λ the nondimensional stress $\sigma^* = \sigma \cdot 10^3 / E$ was assumed. The critical stresses for global and local modes and postcritical coefficients were calculated by the general program [5] and are as follows: $\sigma_1^* = 3.563$, $\sigma_2^* = 1.0507$ (for number of halfwaves $m = 6$), $b_{111} = 0.00457$, $b_{221} = 0.3358$, $b_{122} = 0.1103$. The natural frequencies (without compressive force) are: $\omega_{01} = 2422$ (rad/s), $\omega_{02} = 7900$ (rad/s). Here only some results of the numerical experiment are presented.

There were assumed various values of compressive stresses. For two values – $\sigma^* = 1.0$ and 1.03 the natural frequencies, their ratio, detuning parameter δ^* and bifurcational value of energy are:

	ω_1	ω_2	ω_1/ω_2	δ^*	e^*
$\sigma^* = 1.00$	2054.2	1735.4	1.1837	0.6082	0.3232
$\sigma^* = 1.03$	2042.1	1108.8	1.8416	2.5988	0.0029

In the second case ($\sigma^* = 1.03$) the ratio ω_1/ω_2 is close to 2:1. In Fig. 2 a, b results of integration of set (9) for this case at energy $e = 0.02$ are presented (the global and local oscillation, respectively). Initially the global mode was excited, with very small perturbation in local mode ($\xi = 0.99999$). Energy is periodically transferred from the global mode to local mode and inversely; oscillations are synchronized with frequencies ratio 2:1. For comparison in Fig. 3 results are given for $\sigma^* = 1.00$ (with

more pronounced initial excitation of the local mode). Oscillations are not synchronized, energy exchange is not periodical.

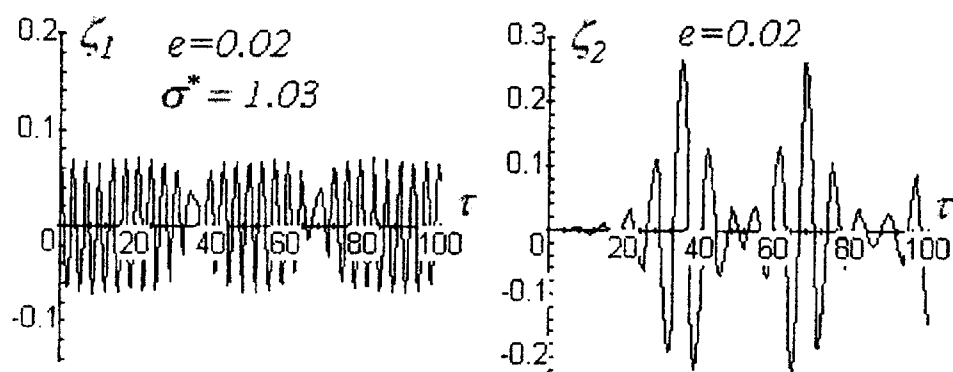


Fig. 2 Nonstationary oscillation with periodical energy exchange between modes.

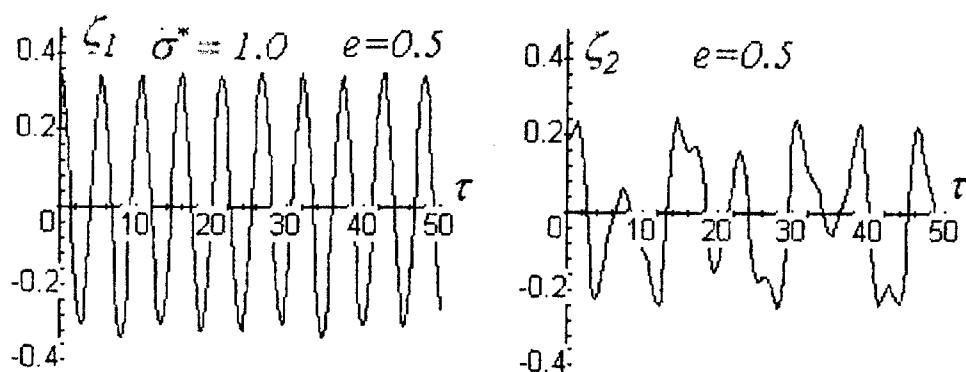


Fig. 3 Global and local oscillations far from autoparametrical resonance.

REFERENCES

- [1] Sridharan S., Benito R. Columns: Static and Dynamic Interactive Buckling. *J. of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 110, No. 1, 1984, pp. 49–65.
- [2] Ohga M., Nishimoto K., Shigematsu T., Hara T. Natural Frequencies and Modes Shapes of Thin-Walled Members under In-plane Forces. In: *Thin-Walled Structures. Research and Development. 2-nd Intern. Confer. on Thin-Walled Structures*, Singapur, 1998, pp. 501–508.
- [3] Manevich A., Kołakowski Z. Nonlinear interaction of flexural and flexural-torsional vibrations in thin-walled beams with one axis of symmetry. *Ref. VII Sympozjum Stateczności Konstrukcji*, Poland, Bielsko-Biała, 1994, p.89-94.
- [4] Budiansky B. Theory of buckling and post-buckling behaviour of elastic structures. In: *Advances in Applied Mechanics*. 14, Acad. Press, 1974, p.1-65.
- [5] Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich. *Praca zbiorowa pod redakcją M. Królaka*. PWN, Warszawa - Łódź, 1990, p. 247-358.
- [6] Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear Oscillations*. New York, Wiley, 1979, 704 p.
- [7] Маневич А.И., Маневич Э.Л. Внутренние резонансы при свободных колебаниях систем с несколькими степенями свободы, имеющих квадратичные нелинейности. *Проблемы нелинейной механики и физики материалов*. Днепропетровск, 1999, с.124–138.

WPLYW MODUŁU SPRĘŻYSTOŚCI POSTACIOWEJ NA STATECZNOŚĆ PŁYT TRÓJWARSTWOWYCH

R. MANIA

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy podano wyniki analizy stateczności globalnej płyt trójwarstwowych w kształcie trapezu równoramiennego swobodnie podpartych na całym obwodzie, poddanych osiowemu ścisnaniu. Omówiono szczególny wpływ materiału rdzenia – jego modułu odkształcenia postaciowego – na wybór modelu płyty dla rozwiązania zagadnienia stateczności oraz na poziom obciążenia krytycznego płyty. Zamieszczono i omówiono wyniki rozwiązania analitycznego i rozwiązania numerycznego metodą elementów skończonych.

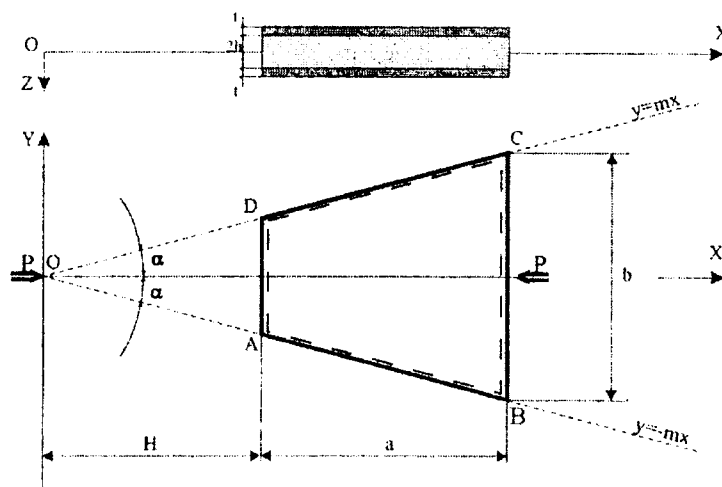
1. WPROWADZENIE

W ostatnich latach obserwujemy szybko rosnący obszar stosowania kompozytów laminowanych w konstrukcjach inżynierskich. Wprowadzane są różnego rodzaju połączenia materiałowe optymalizujące cechy wytrzymałościowe i lekkość elementów składowych. Pewną grupę kompozytów laminowanych stanowią płyty trójwarstwowe (sandwich). Dwie zewnętrzne warstwy nazywane okładzinami traktowane jako cienkie płyty, oddzielone są przez względnie grubą środkową warstwę pełniącą rolę rdzenia. Zazwyczaj okładziny wykonane są z materiałów o wysokiej wytrzymałości (np. stal, aluminium, kompozyty wzmocnione włóknami), natomiast stosowane warstwy rdzenia odznaczają się większą różnorodnością co do formy i kształtu. Ograniczając uwagę do cienkich płyt warstwowych, z uwagi na parametry materiałowe rdzeni i ich udział w przenoszonych przez płytę obciążeniach, rozróżnia się rdzenie miękkie i twarde. Podczas pracy konstrukcji trójwarstwowych typowym obciążeniem jest ściskanie mogące doprowadzić do wyboczenia. Przedstawiona analiza dotyczy przypadku wyboczenie globalnego płyty.

W literaturze zdecydowana większość prac skoncentrowana jest na analizie stateczności laminowanych płyt prostokątnych [3], [6], [7]. Znakomicie mniej publikacji dotyczy płyt o kształcie trapezu [1], [2]. W przypadku trójwarstwowych płyt trapezowych na poziom obciążenia krytycznego oprócz warunków brzegowych, parametrów geometrycznych takich jak proporcje wymiarów liniowych i proporcje grubości warstw oraz własności materiałów warstw, ma wpływ dodatkowy czynnik mający - kąt nachylenia bocznych krawędzi trapezu. Przedmiotem pracy są płyty (rys. 1), dla których kąt ten zmieniał się w przedziale $0-15^\circ$. Badano wpływ tego parametru jak i modułu odkształcenia postaciowego rdzenia (G_r , G_{xy} odpowiednio) na stateczność płyt trójwarstwowych w kształcie trapezu równoramiennego [5].

2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Przedmiotem analizy były cienkie płyty trójwarstwowe w kształcie trapezu równoramiennego o symetrycznej budowie względem warstwy środkowej. Przyjęto, że warstwy zewnętrzne (okładziny) wykonane są z jednakowego, izotropowego materiału zaś rdzeń może być wykonany z piankowego tworzywa sztucznego (poliuretan) o stałej bądź zmiennej charakterystyce materiałowej, albo z materiału charakteryzującego się ogólną ortotropią.



Rys. 1. Trójwarstwowa płyta trapezowa o symetrycznej budowie poddana osiowemu ścisnaniu

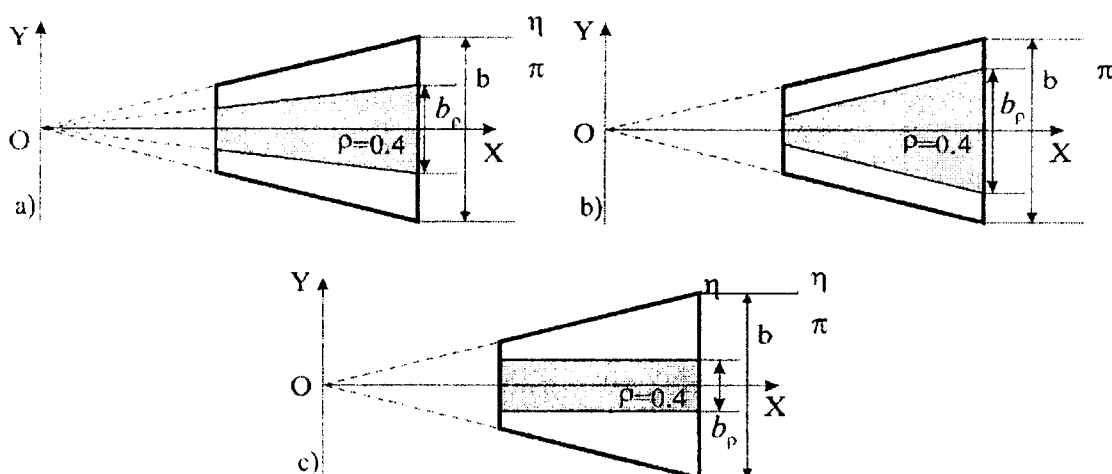
W przypadku płyt trójwarstwowych, dla których konstrukcja rdzenia (np. rdzenie ulowe, strukturalne) bądź jego własności materiałowe (tworzywa piankowe) spełniają niżej podane zależności, analizę stateczności przeprowadzono na podstawie teorii pierwszego rzędu Reissnera-Mindlina [7]. Teoria ta dotyczy tak zwanych rdzeni miękkich i nazywana bywa hipotezą linii łamanej. Przyjmuje się wówczas, że obciążenie normalne w płaszczyźnie równoległej do powierzchni płyty przenoszą jedynie okładziny, zaś rdzeń uczestniczy tylko w przeniesieniu poprzecznego ścinania. W praktyce ma to miejsce, gdy $E_r h / E_f t < 0,1$ - stosunek modułu sprężystości E_f okładzin do modułu sprężystości E_r rdzenia jest duży, zaś stosunek grubości t okładziny do grubości $2h$ rdzenia jest mały. Właściwości rdzenia definiuje współczynnik podatności k określony zależnością:

$$k = \frac{\pi^2 E_f t h}{(1 - \nu^2) G_r b^2}, \quad (1)$$

który w prezentowanej pracy nie jest wielkością stałą lecz może być funkcją dwóch współrzędnych x oraz y , tj. $k = k(x, y)$, w szczególności tylko jednej współrzędnej, tj. $k = k(x)$ albo $k = k(y)$. Współczynnik ten nie zależy natomiast od współrzędnej z . Jak wynika z postaci wzoru (1), definiującego współczynnik k , zmienność tego współczynnika może powodować zarówno zmieniająca się wartość $E_f t$ - sztywności okładziny, G_r modułu Kirchhoffa materiału rdzenia, jak również zmienna geometria płyty, w tym grubość rdzenia. Praktycznie najbardziej interesujący jest przypadek, gdy

plyta charakteryzuje się zmienną wartością G_r modułu sprężystości postaciowej materiału rdzenia. Wynika to z możliwości racjonalnego modelowania zmian własności mechanicznych rdzenia płyty, w szczególności jego modułu sprężystości postaciowej G_r , będącego w przypadku tworzyw porowatych funkcją gęstości tworzywa [6]. W analizie przyjęto, że w środkowej części rdzenia utworzone zostaje pasmo o zwiększonej q -razy w stosunku do pozostałej części sztywności ↔ gęstości, usytuowane symetrycznie względem osi symetrii trapezu. Rozważono trzy warianty kształtu środkowego pasma rdzenia, a mianowicie:

- w kształcie trapezu o bocznych krawędziach, zbiegających się w wierzchołku O klina (rys. 2a),
- w kształcie trapezu o bocznych krawędziach, równoległych do odpowiednich krawędzi płyty trapezowej (rys. 2b),
- w kształcie prostokąta (rys. 2c).



Rys. 2. Kształt pasma wzmocnienia w trójwarstwowej płycie trapezowej

We wszystkich wariantach szerokość pasma środkowego, przy dłuższej podstawie trapezu wynosiła $b_p = \rho b$. Wartość ρ może zmieniać się, w ogólnym przypadku, w przedziale $\langle 0, 1 \rangle$. Aby pasmo to rozciągało się między podstawami trapezu na całej jego wysokości, w wariantcie (b) przedział ten ograniczono od dołu, zaś w wariantcie (c) od góry. Wartości graniczne przedziału określoności parametru ρ zależą od kształtu danej płyty.

W przypadku płyt trójwarstwowych, dla których stałe materiałowe okładzin i rdzenia (moduły Younga) są tego samego rzędu, mówimy o płycie z rdzeniem twardym. Założenie powyższe implikuje przyjęcie dla całego przekroju poprzecznego płyty hipotezy Kirchhoffa-Love'a, nazywanej hipotezą prostej normalnej [3], [7]. W płycie z rdzeniem twardym wszystkie warstwy uczestniczą w przeniesieniu obciążeń normalnych w płaszczyźnie równoległej do powierzchni płyty. Analizowano rdzenie charakteryzujące się ogólną ortotropią materiałową.

Zagadnienie stateczności obydwu wymienionych wyżej rodzajów płyt trójwarstwowych rozwiązano analitycznie z zastosowaniem metody ortogonalizacyjnej Galerkinia w połączeniu z zaproponowaną metodą transformacji układu współrzędnych. Dodatkowo, metodą wartości własnych określono wielkość obciążeń krytycznych (punkty bifurkacji) analizowanych płyt z zastosowaniem metody elementów skończonych w komercyjnym programie ANSYS.

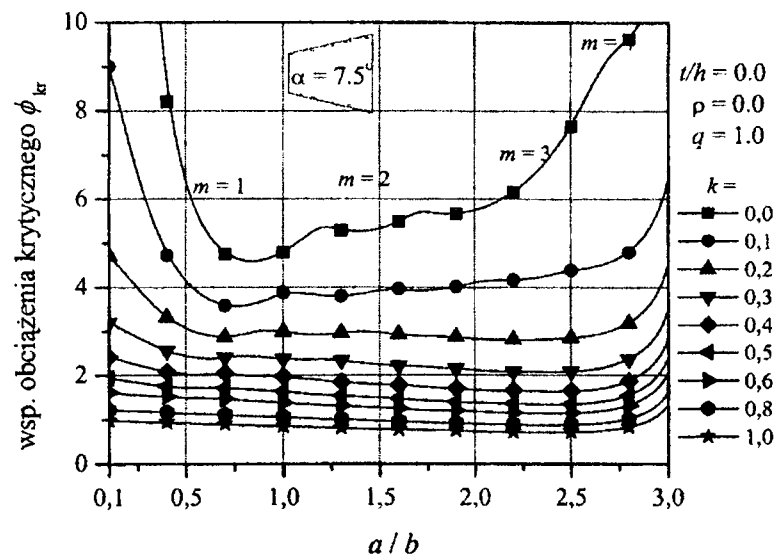
3. PRZYKŁADOWE WYNIKI OBLICZEŃ

Zagadnienie zostało rozwiązane dla płyt swobodnie podpartych na całym obwodzie. W rozwiązaniu analitycznym obliczono wartości krytyczne współczynnika obciążenia ϕ określonego zależnościami:

$$(a) \quad \phi = \frac{Pb(1-\nu^2)}{2\pi^2 E_f t \left(h + \frac{t}{2}\right)^2} \quad (b) \quad \phi = \frac{Pb}{\pi^2 E_2 t^3} \quad (2)$$

Wyrażenie (2.a) dotyczy płyty z miękkim rdzeniem, natomiast (2.b) płyty z twardym rdzeniem. W wyrażeniu tym E_2 jest modułem Younga materiału rdzenia w jednym z kierunków ortotropii. P jest wartością siły ściskającej płytę.

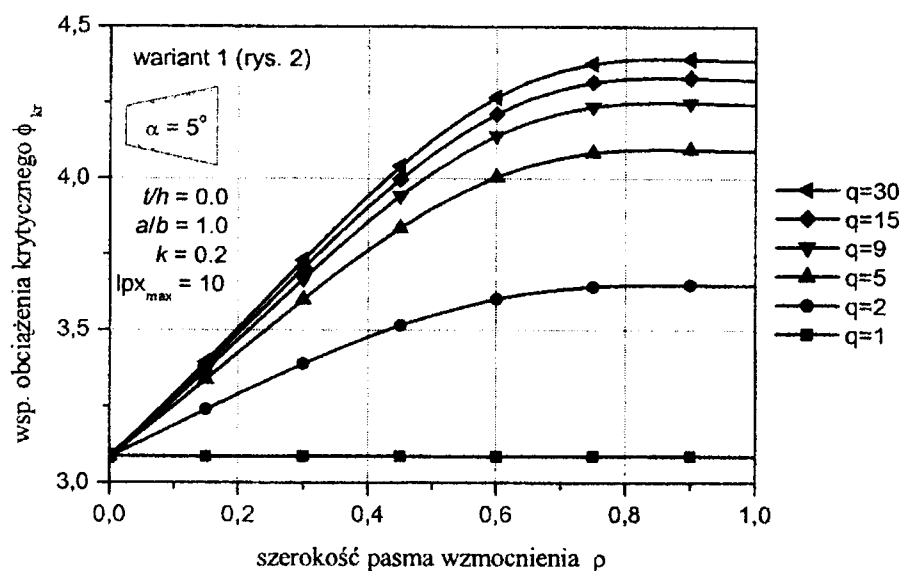
Rysunek 3 pokazuje charakterystyczne krzywe wyboczenia, będące przykładowymi wynikami obliczeń współczynnika obciążenia krytycznego trapezowych płyt trójwarstwowych z miękkim rdzeniem o stałej charakterystyce ($q=1$ i $\rho=0$). Jak wynika z definicji (1), przy ustalonych wartościach wymiarów płyty i niezmiennym materiale okładzin, współczynnik k charakteryzuje wpływ modułu G_r materiału rdzenia na obciążenie krytyczne. Krótkie płyty o wartości ilorazu $a/b < 1,5$ i kącie nachylenia bocznych krawędzi $\alpha < 5^\circ$ wybaczą się podobnie do płyt prostokątnych, tj. mniejszym wartościom modułu G_r (większe wartości współczynnika k) odpowiada obniżenie wartości obciążenia krytycznego oraz zanika zależność tego obciążenia od liczby półfal powierzchni wyboczenia. Zróżnicowane natomiast jest zachowanie sztywniejszych płyt trapezowych, tj. charakteryzujących się współczynnikiem podatności k mniejszym od 0.2-0.3, w stosunku do płyt podatnych, dla których współczynnik $k > 0.3$.



Rys. 3. Wartość obciążenia krytycznego w funkcji współczynnika k podatności płyty, płyta trapezowa o kącie $\alpha = 7,5^\circ$, rdzeń o stałej sztywności

W przypadku pierwszej grupy płyt ze wzrostem wartości kąta α nachylenia ramion trapezu oraz wzrostem liczby półfal powierzchni wyboczenia w kierunku ściskania,

rosną wartości współczynnika φ_{kr} . Wzrostowi wartości kąta α oraz współczynnika k podatności płyty towarzyszy skrócenie długości półfali wyboczenia w kierunku ściskania. Skrócenie długości półfali wyboczenia ma miejsce również dla płyt mniej sztywnych, gdy $k > 0.3$, ale przy mniejszym gradiencie zmian długości półfali (rys. 3).



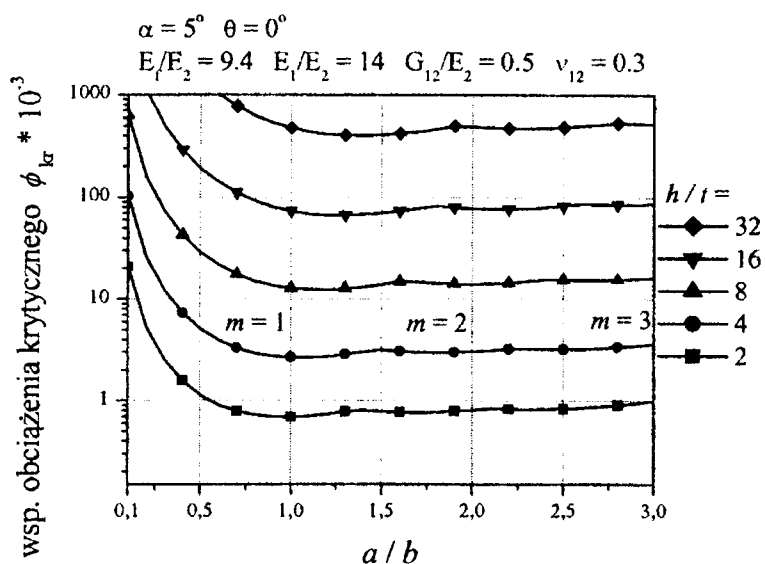
Rys. 4. Wartość obciążenia krytycznego dla różnych wartości współczynnika wzmocnienia q , płyta trapezowa z rdzeniem o zmiennej charakterystyce wg wariantu 1 (rys 2a), kącie nachylenia $\alpha = 5^\circ$, współczynnika podatności $k = 0.2$ oraz wartości ilorazu $a/b = 1.0$

Odwróceniu ulega natomiast tendencja zmian współczynnika φ_{kr} , a mianowicie wzrostowi wartości współczynnika k oraz długości płyty, towarzyszy obniżenie wartości współczynnika φ_{kr} . Dla a/b bliskiego pewnej wielkości granicznej związanej ze zbliżaniem się kształtu płyty do kształtu trójkąta, występuje ponowny wzrost wartości obciążenia krytycznego (rys. 3).

Wpływ wzmocnienia rdzenia pasmem o kształcie pokazanym na rysunku 2 prezentuje przykładowo rysunek 4. Wartość współczynnika wzmocnienia q zmieniano w granicach od 1 do 30, prowadząc obliczenia dla każdego z trzech przyjętych wariantów kształtu środkowego pasma rdzenia (rys. 2). Wpływ samego kształtu tego pasma na skuteczność wzmocnienia jest niewielki. Przyrost szerokości pasma środkowego szczególnie efektywnie wpływa na wzrost obciążenia krytycznego do szerokości względnej $\rho = 0,6 \div 0,8$, zaś powyżej tego zakresu możliwe jest nawet lekkie obniżenie wartości obciążenia krytycznego, szczególnie dla płyt trapezowych o podatnych rdzeniach i kącie α nachylenia bocznych krawędzi większym od 10° .

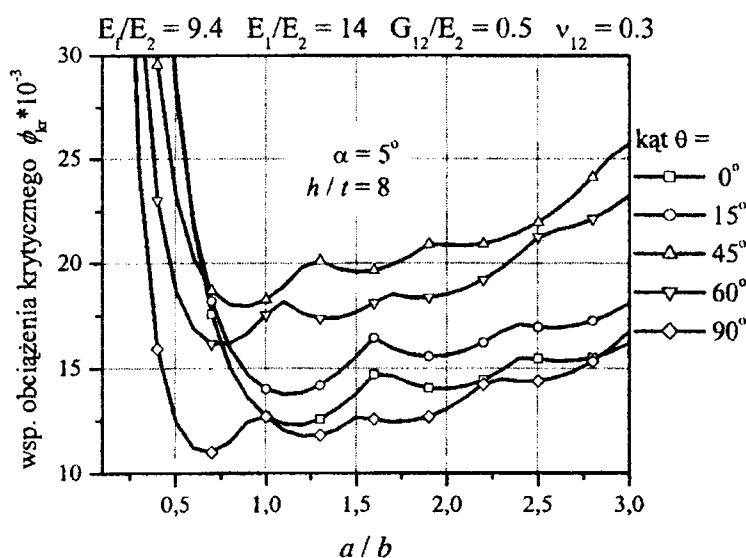
Z kolei krzywe na rysunkach 5 i 6 pokazują obliczone wartości krytyczne współczynnika obciążenia (2.b) uzyskane dla trapezowej płyty trójwarstwowej z twardym rdzeniem ortotropowym. Wykresy mają charakter bezwymiarowy, a w legendzie wykresu podano sposób zastosowanej normalizacji stałych materiałowych, w tym i modułu G_{xy} rdzenia. Szczególnie ciekawym wydaje się rysunek 6 pokazujący wpływ kąta laminacji na obciążenie krytyczne przy ustalonych pozostałych parametrach płyty trójwarstwowej, co w przypadku prostokątnych płyt wielowarstwowych analizował Loughlan [4]. Ekstremum obciążenia krytycznego dla płyt krótszych ($a/b < 1$)

występuje dla kątów θ mniejszych od 45° , a dla płyt dłuższych ($a/b > 1$) dla kątów θ większych od kąta 45° . Proporcje między grubościami warstw płyty określonymi wartością ilorazu h/t , nie mają wpływu na zmianę tej właściwości. Przy zbliżaniu się kształtu płyty do kształtu trójkąta widoczny jest wzrost wartości obciążenia krytycznego, zwłaszcza dla płyt trapezowych o kątach nachylenia krawędzi $\alpha > 10^\circ$.



Rys. 5. Wykres zależności $\phi_{kr} = \phi_{kr}(a/b)$ dla kolejnych wartości ilorazu h/t , płyta trapezowa z twardym rdzeniem ortotropowym, kąt nachylenia $\alpha = 5^\circ$

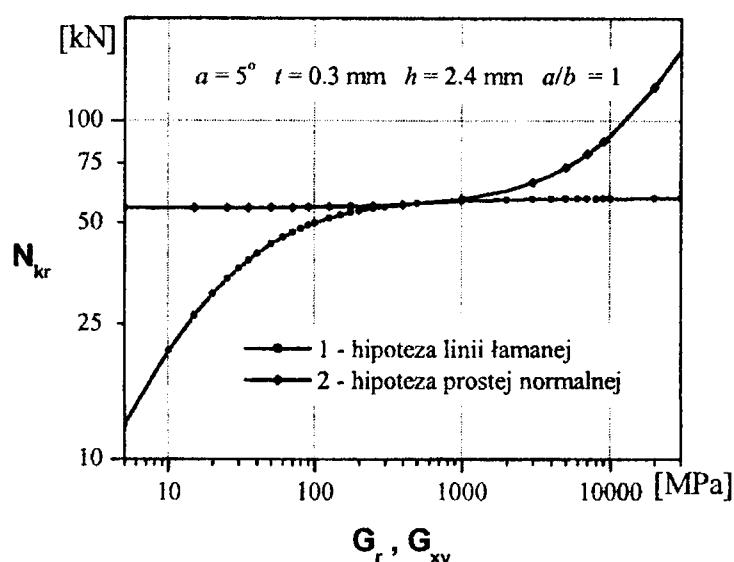
W obliczeniach prowadzonych metodą elementów skończonych w pakiecie ANSYS, pierwotnie płyty trójwarstwowe z miękkim rdzeniem modelowano wielowarstwowymi elementami powłokowymi. Mimo, iż elementy te miały opcję „sandwich logic” [8], przewidzianą do analizy płyt tego typu, to w dalszej analizie właściwszym okazało się modelowanie rdzenia elementami bryłowymi, zaś okładzin



Rys. 6. Wykres zależności $\phi_{kr} = \phi_{kr}(a/b)$ dla wartości ilorazu $h/t = 8$, kąta $\alpha = 5^\circ$, dla kilku wartości kąta laminacji θ

elementami powłokowymi. Podejście takie pozwalało na szerszy zakres zmian parametrów materiałowych płyty, zwłaszcza rdzenia, a tym lepsze spełnienie założeń hipotezy linii łamanej [5]. Płyty z rdzeniem twardym modelowane były wielowarstwowymi elementami powłokowymi z możliwością zmiany kąta laminacji warstwy rdzenia.

Przyjmując konkretne stałe materiałowe okładzin i rdzenia, jednakowe dla rozwiązania zrealizowanego na podstawie hipotezy linii łamanej oraz rozwiązania bazującego na hipotezie prostej normalnej, przy ustalonej geometrii płyty, przeprowadzono obliczenia siły krytycznej w funkcji modułu odkształcenia postaciowego – odpowiednio G_r dla rdzenia miękkiego oraz G_{xy} dla twardego rdzenia ortotropowego. Wyniki tych obliczeń obrazuje wykres na rysunku 7. Z przebiegu krzywych (linie 1 i 2) określających wielkość obciążenia krytycznego, widoczne są granice stosowania konkretnej hipotezy, a także obszar wspólny, w którym obserwuje się zbieżność obydwu rozwiązań.



Rys. 7. Wartość siły krytycznej dla trójwarstwowej płyty trapezowej obliczona przy zastosowaniu hipotezy linii łamanej – linia 1 oraz hipotezy prostej normalnej – linia 2.

4. UWAGI KOŃCOWE

W pracy zaprezentowano wpływ modułu odkształcenia postaciowego materiału rdzenia na wielkość obciążenia krytycznego trójwarstwowych płyt o kształcie trapezu równoramiennego poddanych jednokierunkowemu ścisnaniu. Zagadnienie stateczności płyt z rdzeniem miękkim rozwiązano w oparciu o teorię Reissnera-Mindlina, zaś w przypadku płyt z rdzeniem twardym wykorzystano założenia teorii cienkich płyt laminowanych i hipotezę Kirchhoffa-Love'a. Wyniki numeryczne uzyskano stosując metodę ortogonalizacyjną Galerkiną w połączeniu z metodą transformacji układu współrzędnych. Przeprowadzono weryfikację rozwiązania analitycznego metodą elementów skończonych.

Modelowanie własności mechanicznych rdzenia płyt trójwarstwowych przez zmianę jego gęstości w przypadku rdzeni piankowych, a tym samym zmianę jego modułu odkształcenia postaciowego, ma istotny wpływ na poziom obciążenia

krytycznego oraz postać wyboczenia. W przypadku rdzeni twardych analogiczny wpływ na stateczność płyty trójwarstwowej uzyskuje się - przy ustalonej wartości modułu Kirchhoffa - przez zmianę ułożenia kierunków ortotropii względem krawędzi płyty oraz zmianę względnej proporcji grubości warstw.

Kryterium decydującym o wyborze metody obliczania płyty wielowarstwowej, jest wzajemna proporcja własności materiałowych okładzin oraz rdzenia. Dla szczególnych własności materiałowych warstw składowych płyty, istnieje obszar, w którym wyniki analizy na podstawie hipotezy „linii łamanej” i hipotezy „prostej normalnej” są zbieżne.

LITERATURA

- [1] Babu C.S., Kant T., Two shear deformable finite element models for buckling analysis of skew fibre-reinforced composite and sandwich panels, *Composite Structures*, 46, 1999.
- [2] H.-T. Hu, W.-L. Tzeng, Buckling analysis of skew laminated plates subjected to uniaxial inplane loads, *Thin-Walled Structures*, 38, 2000, s. 53-77.
- [3] Kołakowski Z., Kowal-Michalska K. (Ed), Selected problems of instabilities in composite structures, A Series of Monographs, Tech. University of Lodz, 1999.
- [4] Loughlan J., The effect of membrane-flexural coupling on the compressive stability of anti-symmetric angle-ply laminated plates, III International Conference on Thin-Walled Structures, Elsevier, 2001, s.507-514.
- [5] Mania R., Analiza wpływu własności materiałowych rdzenia na stateczność trapezowej płyty trójwarstwowej, Politechnika Łódzka, Rozprawa doktorska, 2002.
- [6] Romanów F., Wytrzymałość konstrukcji warstwowych, Wyd. WSI w Zielonej Górze, 1995.
- [7] Vinson J.R., The behavior of sandwich structures of isotropic and composite materials, Technomic Pub. Co., Lancaster, 1999.
- [8] Ansys 5.7.1 HTML Online Documentation, SAS IP, Inc., 2001.

THE INFLUENCE OF A SHEAR MODULUS OF ELASTICITY ON THE SANDWICH PLATE BUCKLING

This work gives the solution for the stability of a simple supported axially loaded trapezoidal sandwich plate. The characteristic influence of a shear modulus of elasticity of the core, as well as the model selection on the buckling load was studied. The results for analytical and FEM solutions are given.

WYZNACZENIE CZASU KRYTYCZNEGO W PROBLEMIE STATECZNOŚCI LEPKOSPREŻYSTEJ KRATOWNICY MISESA

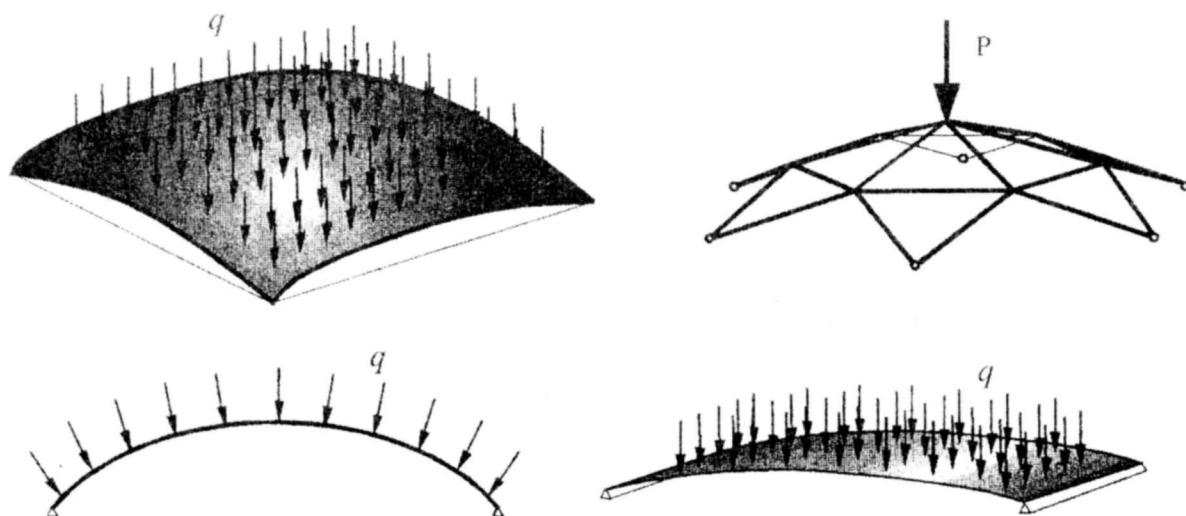
J. MARCINOWSKI, T. SOCHA

Instytut Budownictwa, Uniwersytet Zielongórski
ul. prof. Z. Szafrana 2, 65-516 Zielona Góra

W referacie przedstawiono analityczne rozwiązanie problemu stateczności kraty Misesa wykonanej z materiału liniowo sprężystego. Następnie rozważono problem stateczności tej kratownicy przy założeniu, że pręty wykonano z materiału opisanego sześcioparametrowym modelem reologicznym. Wyprowadzono nieliniowe równanie, którego rozwiązanie pozwala ustalić czas krytyczny, będący przedmiotem dociekań. Równanie to rozwiązywano numerycznie. Parametry reologiczne materiału, z którego wykonano pręty kratownicy Misesa zidentyfikowano w próbie zgięciowej.

1. WPROWADZENIE

W analizie stateczności elementów konstrukcji pomija się najczęściej reologiczne własności materiału. W przypadku wielu materiałów jest to uzasadnione niezależnością parametrów materiałowych od czasu. Metale i ich stopy w temperaturze pokojowej nie wykazują własności reologicznych. Pełzanie w tych warunkach jest wręcz niemierzalne. W praktyce inżynierskiej pojawiają się materiały, których własności reologiczne nie mogą być pominięte w analizie statycznej czy w szczególności w analizie stateczności.



Rys. 1. Mało wyniosłe kratownice, łuki i powłoki

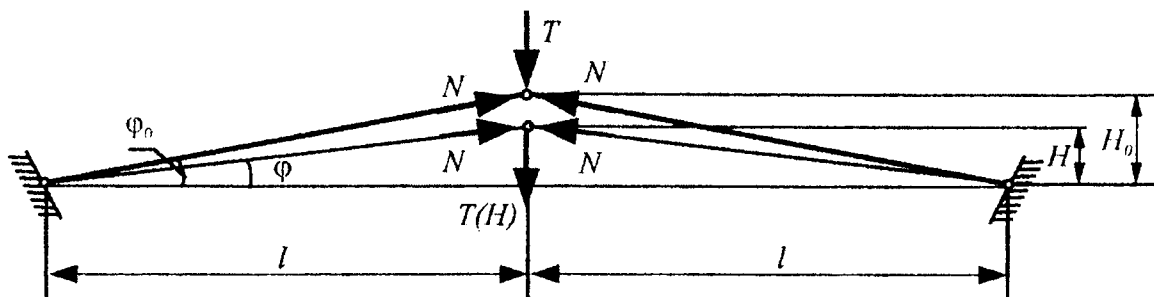
Do takich materiałów należą np. tworzywa sztuczne z grupy polimerów. Pełzanie elementów konstrukcyjnych z takich materiałów jest na tyle duże, że musi być uwzględnione w obliczeniach konstrukcji. Ma to szczególnie duże znaczenie w analizie stateczności mało wyniosłych kratownic, łuków i powłok poddanych działaniu obciążenia poprzecznego. Przykłady takich konstrukcji pokazano na rys. 1. W konstrukcjach tych obciążenie krytyczne zależy od wyniosłości w trzeciej potęgze.

Pełzanie powoduje spadek wyniosłości i znaczne obniżenie wartości obciążenia krytycznego. Utrata stateczności staje się tylko kwestią czasu. Jeżeli przezornie obniżyć wartość obciążenia q czy P , to pojawia się problem czasu krytycznego dla ustalonego poziomu obciążenia. W pracy rozwiązano problem wyznaczenia czasu krytycznego dla kratownicy Misesa.

2. KRATOWNICA MISESA – ROZWIĄZANIE SPRĘŻYSTE

Rozpatrzmy deformacje kratownicy dwuprętowej pokazanej na rys. 2. Skrócenie prętów na skutek liniowej deformacji osiowej można określić z zależności

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\frac{l}{\cos \varphi_0} - \frac{l}{\cos \varphi}}{\frac{l}{\cos \varphi_0}} = \frac{\sqrt{l^2 + H_0^2} - \sqrt{l^2 + H^2}}{\sqrt{l^2 + H_0^2}} = 1 - \sqrt{\frac{l^2 + H^2}{l^2 + H_0^2}}. \quad (1)$$



Rys. 2. Kratownica Misesa

Jeśli założyć, że wyniosłość kratownicy jest mała, to powyższa zależność przyjmie uproszczoną postać:

$$\varepsilon = \frac{H_0^2 - H^2}{2l^2}. \quad (1a)$$

Z warunków równowagi dla dowolnego $H(t)$ otrzymujemy

$$T(H) = 2N \sin \varphi = 2N \frac{H}{\sqrt{l^2 + H^2}}, \quad (2)$$

lub

$$T(H) = 2N \frac{H}{l}, \quad (2a)$$

przy założeniu małej wyniosłości.

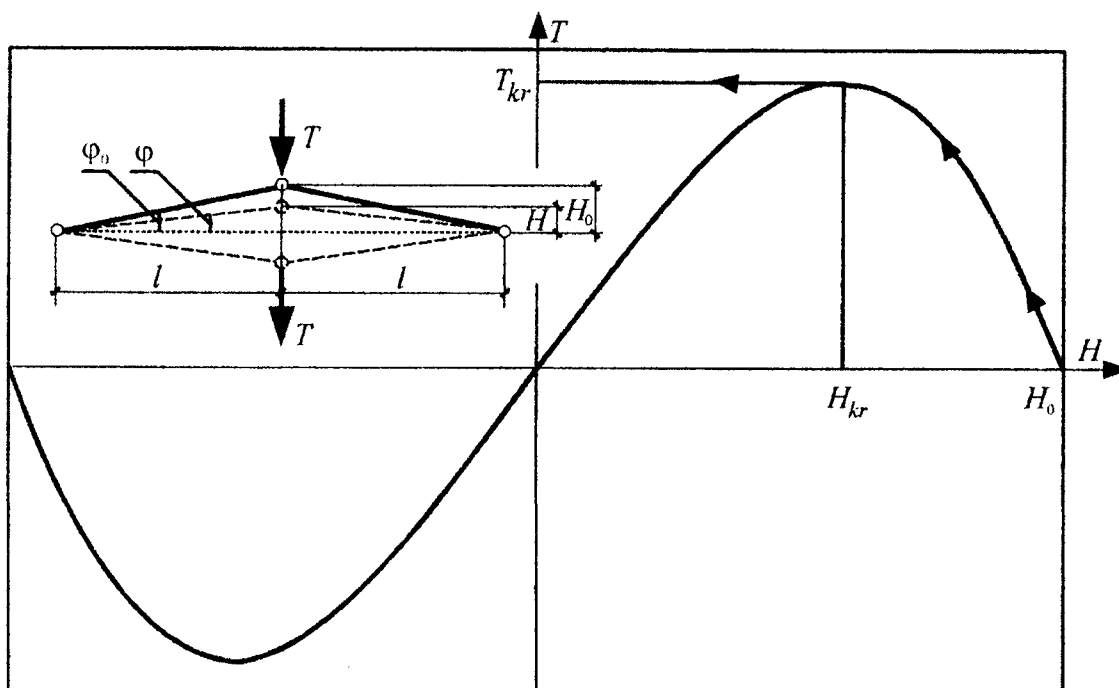
Siłę osiową N w prętach kratownicy możemy wyznaczyć na podstawie określonych odkształceń

$$N = EA\varepsilon = EA \left(1 - \sqrt{\frac{l^2 + H^2}{l^2 + H_o^2}} \right). \quad (3)$$

Z równania (2) otrzymujemy

$$T(H) = 2EA \left(1 - \sqrt{\frac{l^2 + H^2}{l^2 + H_o^2}} \right) \frac{H}{\sqrt{l^2 + H^2}}. \quad (4)$$

Zależność tę przedstawia poniższy wykres (rys. 3).



Rys. 3. Kratownica Misesa. Rozwiązanie sprężyste

Siłę krytyczną odpowiadającą punktowi granicznemu otrzymamy z warunku ekstremum

$$\frac{dT}{dH} = 0 \Rightarrow H_{kr} = \sqrt{(H_o^2 l^4 + l^6)^{1/3} - l^2} \quad (5)$$

oraz

$$T_{kr} = 2EA \sqrt{(H_o^2 l^4 + l^6)^{1/3} - l^2} \left(1 - \sqrt{\frac{(H_o^2 l^4 + l^6)^{1/3}}{H_o^2 + l^2}} \right) \frac{1}{(H_o^2 l^4 + l^6)^{1/6}} \quad (6)$$

Rozwiązanie to przyjmuje dużo prostszą postać jeśli w wyprowadzeniu założyć, że wyniosłość kratownicy jest mała. Wtedy

$$T_k = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{H_o^3}{l^3} E A, \quad H_k = \frac{H_o}{\sqrt{3}}, \quad T(H) = H E A \frac{H_o^2 - H^2}{l^3} \quad (7)$$

Rozwiązanie w tej postaci podaje Kliusznikow [1].

3. KRATOWNICA MISESA Z SZEŚCIOPARAMETROWEGO MATERIAŁU REOLOGICZNEGO

Prawo konstytutywne dla proponowanego materiału ma postać następującą

$$p_0 \sigma + p_1 \dot{\sigma} + p_2 \ddot{\sigma} + p_3 \dddot{\sigma} = q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + q_3 \dddot{\varepsilon}, \quad (8)$$

gdzie: $p_0, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3$ – siedem parametrów reologicznych modelu, w tym sześć niezależnych. Parametry te są kombinacjami modułów Younga E_k elementów Hooke'a i modułów lepkości η_k elementów Newtona składających się na dany model reologiczny. Zaś symbol $(\dot{\quad}) = \frac{d(\quad)}{dt}$ oznacza pochodną po czasie.

Równanie (8) możemy przemnożyć przez przekrój pręta A . Otrzymamy

$$p_0 N + p_1 \dot{N} + p_2 \ddot{N} + p_3 \dddot{N} = A(q_1 \dot{\varepsilon} + q_2 \ddot{\varepsilon} + q_3 \dddot{\varepsilon}). \quad (9)$$

Z rozważań geometrycznych otrzymaliśmy zależność (1a), z której otrzymujemy

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{H \dot{H}}{l^2}, \quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{1}{l^2} (\dot{H} \dot{H} + H \ddot{H}), \quad \dddot{\varepsilon} = -\frac{1}{l^2} (3\dot{H} \ddot{H} + H \dddot{H}). \quad (10)$$

Z zależności (2a) otrzymujemy

$$N = \frac{T_0 l}{2H}, \quad \dot{N} = -\frac{T_0 l}{2} \frac{\dot{H}}{H^2}, \quad (11)$$

$$\ddot{N} = \frac{T_0 l}{2} \frac{2H \ddot{H} - \dot{H}^2}{H^4}, \quad \dddot{N} = \frac{T_0 l}{2} \frac{-6\dot{H}^3 H^4 + 6\ddot{H} \dot{H} H^5 - \ddot{H} H^6}{H^8},$$

gdzie:

T_0 – ustalone obciążenie kratownicy.

Po podstawieniu zależności (10) i (11) do (9) otrzymujemy ostatecznie

$$-q_1 H \dot{H} - q_2 (\dot{H}^2 + H \ddot{H}) - q_3 (3\dot{H} \ddot{H} + H \dddot{H}) =$$

$$a \left(p_0 \frac{1}{H} - p_1 \frac{\dot{H}}{H^2} + p_2 \frac{2H \dot{H}^2 - \ddot{H} H^2}{H^4} + p_3 \frac{6\ddot{H} \dot{H} H^5 - 6\dot{H}^3 H^4 - \ddot{H} H^6}{H^8} \right), \quad (12)$$

gdzie:

$$a = \frac{\alpha}{3\sqrt{3}} H_0^3 E_1, \quad \alpha = \frac{T_0}{T_{kr}^D}, \quad T_{kr}^D = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{H_0^3 E_1 A}{l^3}. \quad (13)$$

T_{kr}^D jest doraźną siłą krytyczną, siłą, która spowoduje przenicowanie kratownicy natychmiast po przyłożeniu. Ustalone obciążenie kratownicy w warunkach pełzania T_0 przyjmuje się oczywiście mniejsze od T_{kr}^D (współczynnik $\alpha < 1.0$).

Równanie (12) należy uzupełnić warunkami początkowymi

$$H(0) = H_p, \quad \dot{H}(0) = \dot{H}_p, \quad \ddot{H}(0) = \ddot{H}_p. \quad (14)$$

H_p jest chwilowym ugięciem sprężystym dla kratownicy z materiału Hooke'a z doraźnym modułem sprężystości E_1 . Wartość H_p wyznaczmy porównując

$$T_0 = \alpha T_{kr}^D = \alpha \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{H_0^3 E_1 A}{l^3} \text{ z siłą wynikającą z zależności (7) dla modułu } E_1.$$

Otrzymamy

$$\alpha \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{H_0^3 E_1 A}{l^3} = H E_1 A \frac{H_0^2 - H^2}{l^3} \quad (15)$$

i ostatecznie równanie trzeciego stopnia na poszukiwane H_p dla ustalonego α

$$\left(\frac{H}{H_0} \right)^3 - \frac{H}{H_0} + \frac{2\alpha}{3\sqrt{3}} = 0. \quad (16)$$

Początkowe wartości prędkości i przyspieszenia przyjęto $\dot{H}(0) = 0$, $\ddot{H}(0) = 0$, zakładając, że obciążenie będzie przykładane w sposób quasi-statyczny.

Równanie (12) jest nieliniowym równaniem różniczkowym trzeciego rzędu. Rozwiązywano je numerycznie za pomocą procedury *DSolve* pakietu *Mathematica*TM [3] dla ustalonej wartości parametru $\alpha < 1.0$. W wyniku rozwiązania otrzymywano

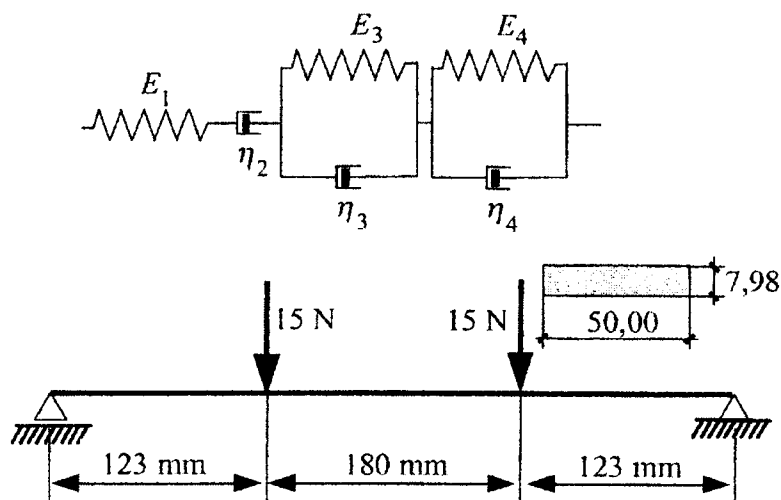
funkcję $H(t)$. Gdy $H(t)$ osiągało wartość krytyczną równą $\frac{H_0}{\sqrt{3}}$, algorytm rozwiązania

numerycznego wykazywał osobliwość ze względu na brak kolejnego $H(t)$ w bezpośrednim sąsiedztwie bieżącego punktu rozwiązania. Kolejne $H(t)$ dla ustalonego α znajduje się w odległości rzędu $2H_0$ w konfiguracji przenicowanej. Ta szczególna wartość t jest poszukiwanym czasem krytycznym.

4. IDENTYFIKACJA PARAMETRÓW REOLOGICZNYCH

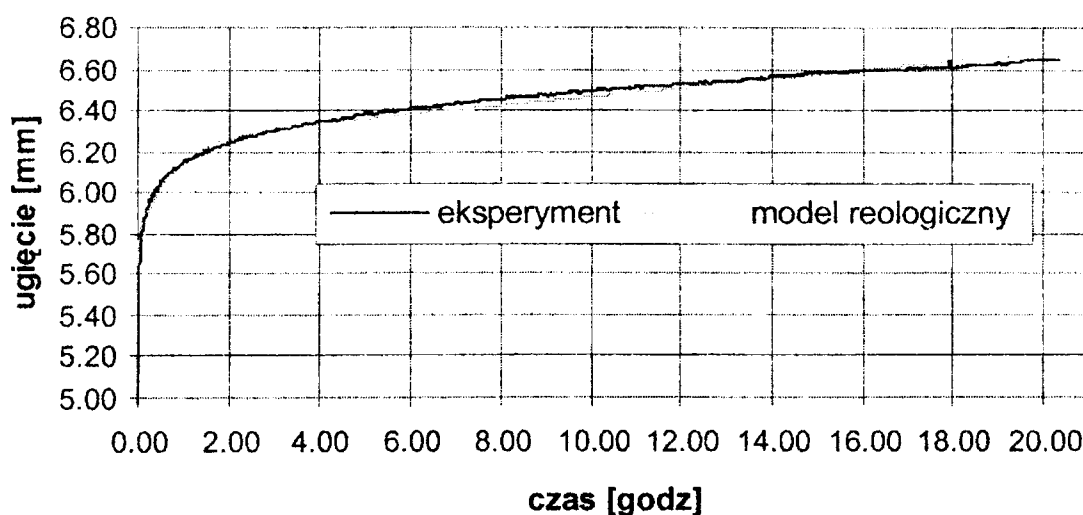
Do opisu własności reologicznych materiału, z którego wykonano pręty kratownicy Misesa przyjęto model sześcioparametrowy powstały z szeregowego połączenia modelu Burgersa i modelu Kelvina-Voigta. Prawo konstytutywne tego

modelu opisane jest związkiem (8). W równaniu tym występują parametry p_i i q_i , będące kombinacjami modułów Younga E_k elementów Hooke'a i modułów lepkości η_k elementów Newtona składających się na dany model reologiczny.



Rys. 4. Zgięciowa próba pełzania

W celu wyznaczenia wartości liczbowych parametrów tego modelu wykonano próbę pełzania przy zginaniu. Elementem doświadczalnym była jednoprzęsłowa belka o schemacie statycznym i wymiarach jak na rys. 4. Belka została obciążona dwiema siłami skupionymi o wartości 15 N każda. Czas działania obciążenia wynosił 1 dobę. W trakcie eksperymentu, wykonywano pomiary ugięcia belki w środku rozpiętości (strefa czystego zginania) przy pomocy indukcyjnego przetwornika przemieszczenia. Wyniki badań w postaci doświadczalnej funkcji ugięcia w czasie zaprezentowano na rys. 5.



Rys. 5. Wyniki identyfikacji parametrów reologicznych

Teoretyczną funkcję ugięcia można wyrazić związkiem (19) wyprowadzonym w [2]:

$$w(x,t,\mathbf{K}) = w^e(x)E_0 J(t,\mathbf{K}), \quad (17)$$

gdzie:

$w^e(x)$ – ugięcie sprężyste belki,
 E_0 – moduł sprężystości natychmiastowej,
 $J(t, K)$ – funkcja pełzania charakteryzująca dany ośrodek,
 K – wektor parametrów E_k i η_k .

W przypadku modelu sześcioparametrowego funkcja pełzania określona jest zależnością

$$J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{t}{\eta_2} + \frac{1}{E_3} \left[1 - e^{-\frac{E_3 t}{\eta_3}} \right] + \frac{1}{E_4} \left[1 - e^{-\frac{E_4 t}{\eta_4}} \right]. \quad (18)$$

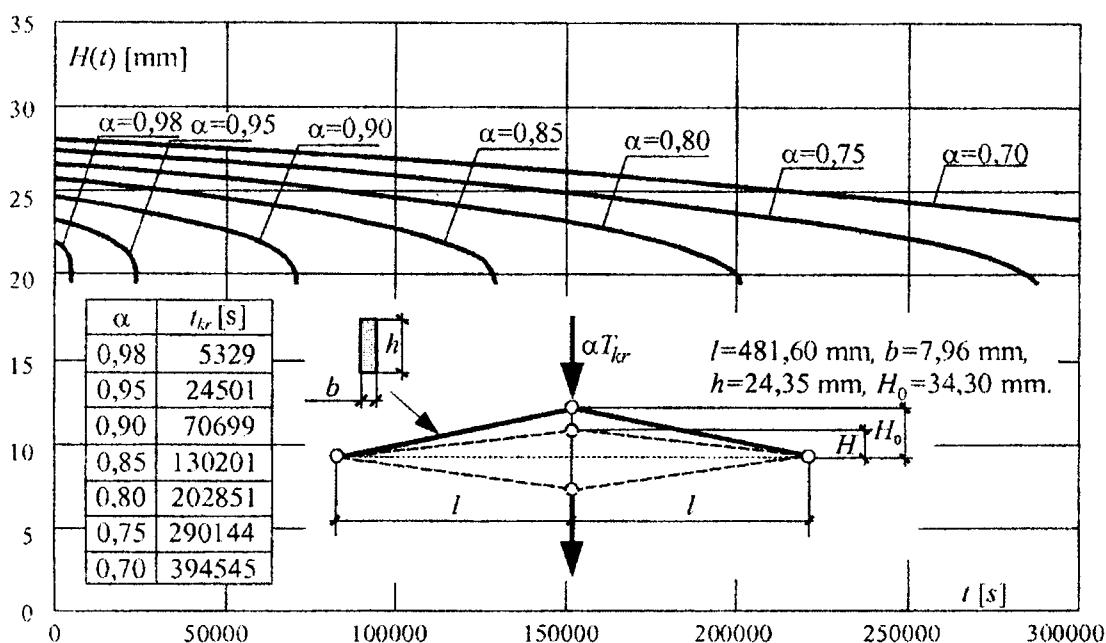
W wyniku przeprowadzonej zgięciowej próby pełzania i zastosowaniu metody najmniejszych otrzymano następujące parametry reologiczne:

$$E_1 = 3205,1 \text{ MPa}, \quad E_3 = 25010,0 \text{ MPa}, \quad E_4 = 36140,9 \text{ MPa},$$

$$\eta_2 = 2715696370 \text{ MPa s}, \quad \eta_3 = 112516,35 \text{ MPa s}, \quad \eta_4 = 101552552,76 \text{ MPa s}.$$

5. PRZYKŁAD NUMERYCZNY

Jako przykład praktycznego wykorzystania równania różniczkowego (12), rozwiązano problem stateczności w czasie kratownicy Misesa o wymiarach pokazanych na rys. 6.



Rys. 6. Stateczność lepkosprężystej kratownicy Misesa

Parametrami reologicznymi materiału prętów kratownicy były parametry wyznaczone w P. 4. Obliczenia przeprowadzono z pomocą pakietu *Mathematica*TM [3] (procedura *DSolve*). Wyniki obliczeń przedstawiono na rys. 6. W tabelicy podano czasy

krytyczne dla analizowanych wartości poziomu obciążenia

$$T_0 = \alpha T_{kr}^D = \alpha \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{H_0^3 E_1 A}{l^3} = \alpha 86,39 \text{ N}, \text{ przy czym } H_{kr} = \frac{H_0}{\sqrt{3}} = 19.80 \text{ mm}.$$

6. UWAGI KOŃCOWE

W pracy wyprowadzono równanie różniczkowe opisujące duże deformacje kratownicy Misesa wykonanej z sześcioparametrowego materiału reologicznego. Postać tego równania jest zbyt skomplikowana by próbować rozwiązać je analitycznie. Do rozwiązania wykorzystano procedurę numeryczną *DSolve* pakietu *Mathematica*TM [3]. W rezultacie rozwiązania dla różnych parametrów α otrzymano wykresy $H(t)$, z których łatwo można odczytać czas krytyczny, czas jaki upłynie od chwili przyłożenia obciążenia do momentu utraty stateczności kratownicy w przeskoku.

LITERATURA

- [1] Kliusznikow W. D., Lekcji po ustojczivosti dieformirujemych sistem, Izd. Moskowskowo Uniwersitieta, 1986.
- [2] Findley W. N., Lai J. S., Onaran K. Creep and relaxation of nonlinear viscoelastic materials, North Holland Publishing Company 1976.
- [3] Wolfram S., *Mathematica*TM. A system for doing mathematics by computer, Addison-Wesley Publ. Comp., Inc., 1988

DETERMINATION OF CRITICAL TIME IN STABILITY PROBLEM OF VISCOELASTIC MISES TRUSS

A nonlinear equilibrium equation of Mises truss was derived in the paper. It was differential equation due to the fact that material from which the rods were made was viscoelastic. The six parameter reological model was used for this material. These parameters were identified in bending creep experiment. The identified parameters were used in numerical example inserted in the paper. In this example the critical times for various levels of load were calculated. The differential equation was solved by means of numerical procedure *DSolve* from the *Mathematica*TM packet.

A 2D-MODEL FOR THE STABILITY OF ELASTIC PLATES WITH A PERIODIC STRUCTURE

K. MAZUR-ŚNIADY

Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław, Poland

CZ. WOŹNIAK

Instytut Matematyki i Informatyki Politechniki Częstochowskiej
Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa, Poland

The subject of the analysis are thin elastic plates having a periodic nonhomogeneous structure along the midplane and subjected to the initial prestressing. A fragment of this plate is shown in Fig 1. Our aim is to formulate an effective 2D-model of the plate under consideration, i.e., a model which is represented by equations with constant coefficients. Moreover, the obtained model has to describe the effect of the period lengths on the dynamic plate stability.

1. INTRODUCTION

So far, in the recent literature two general approaches to the formulation of effective 2D-models of thin elastic plates with a periodic structure along the midplane have been proposed. The first approach is based on the multi-scale asymptotic expansions and leads from the 3D-model of the elastic solid to the plate homogenized 2D-equation. The obtained equation, from the formal viewpoint is similar to the well known Kirchhoff equation of a homogeneous plate, [2, 4]. In this way also a homogenized 2D-model of a prestressed periodic plate has been obtained in [5].

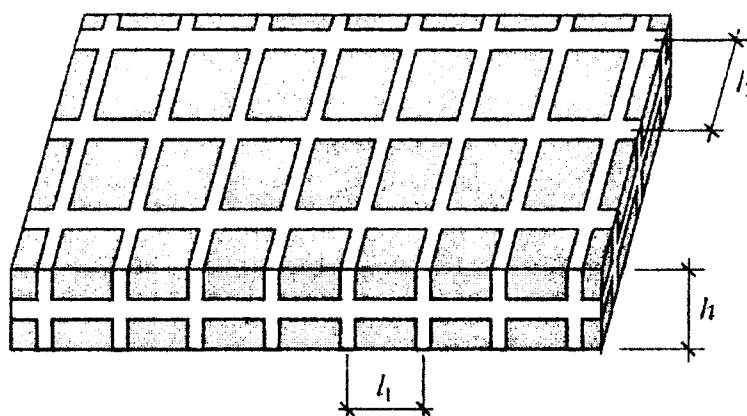


Fig. 1. A fragment of the plate with a periodic structure

The second approach applies the tolerance averaging technique, [7], to the 2D-model equation of a periodic plate and results in deriving an effective 2D-model of this plate, i.e., a model governed by equations with constant coefficients. The above procedure has a physical sense provided that the period lengths are large when compared to the plate

thickness, [1, 3]. If the period lengths are of an order of the plate thickness then we have to apply the tolerance averaging technique to the 3D-model elasticity problem, [8].

The aim of this contribution is to derive an effective 2D-model of the periodically nonhomogeneous elastic plate subjected to initial stresses. Models of this kind can be a basis for the formulation and analysis of stability problems. Considerations will be carried out under assumption that the plate inhomogeneity period lengths are of an order of the plate thickness in contrast to the approach applied in [1, 3] and in the related papers. At the same time our aim is to propose a model which describes the effect of the period lengths on the plate dynamic behaviour in contrast to the homogenized model of a prestressed plate derived in [5].

In order to solve the aforementioned modelling problem we shall apply the tolerance averaging technique to 3D-model equations of the elasticity theory for periodically nonhomogeneous solids subjected to initial stresses, [6]. Thus, the results obtained in this note constitute a certain generalization of results given in [8], where the initial stresses have not been taken in account. For the detailed discussion of the tolerance averaging the reader is referred to [7]; some information on this subject can be also found in [6] (this issue).

2. MODELLING APPROACH

Let Ox_1x_2z be an orthogonal Cartesian coordinate system in the physical space and $\Omega = \Pi \times (-h/2, h/2)$ be a region occupied by the plate in the initial state; hence Π is a region on the $z = 0$ plane representing the plate midplane and h is the plate thickness. The plate is assumed to be loaded only on boundaries $\partial\Pi \times (-h/2, h/2)$ and to have a periodic nonhomogeneous structure with periods l_1, l_2 along the Ox_1 - and Ox_2 -axis, respectively, which are very small when compared to the length dimensions of Π . Hence, setting $\Delta = (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2)$, we shall treat $V = \Delta \times (-h/2, h/2)$ as the plate representative element. Denoting $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \Delta$ and $\Pi_0 = \{\mathbf{x} \in \Pi : \Delta(\mathbf{x}) \subset \Pi\}$, for an arbitrary integrable function g defined in Ω we shall introduce its averaging defined in Π_0 by means of

$$\langle g \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{l_1 l_2 h} \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Delta(\mathbf{x})} g(\mathbf{y}, z) dy dz, \quad \mathbf{x} \in \Pi_0, \quad \mathbf{y} = (y_1, y_2). \quad (1)$$

Subsequently, our attention will be confined to the transverse bending of thin elastic plate having midplane as the symmetry plane. Moreover, the planes $z = \text{const.}$, $z \in (-h/2, h/2)$, are assumed to be elastic symmetry plane at every material point of the plate. In order to obtain the second order plate theory we shall neglect the effect of initial stress on the plate deformations.

The governing equations of the 3D-model of the prestressed periodic plate will be assumed in the form derived in [6], which is given by the equations of motion in $\Omega = \Pi \times (-h/2, h/2)$

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{T} : (\nabla \otimes \nabla) \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2)$$

and the stress jump conditions on the interfaces between different plate constituents

$$\left[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{T} \right] \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3)$$

where \mathbf{u} is a displacement field, \mathbf{T} is the initial stress field and where the elasticity tensor \mathbf{C} and the mass density ρ are Δ -periodic functions of \mathbf{x} and even functions of z . All particulars related to Eqs (2), (3) can be found in this volume, [6].

The tolerance averaging procedure, [7], leading from (2), (3) to a certain effective 2-D model of the plate, can be divided into the five steps.

- a. We define $\mathbf{w} = \langle \mathbf{u} \rangle$ as the averaged (macroscopic) part of the displacement field \mathbf{u} . It is assumed that $\mathbf{u}(\cdot, z, t) \in PL_\Delta(T)$ what implies $\mathbf{w}(\cdot, z, t) \in SV_\Delta(T)$ (the conformability assumption, [6, 7]). Hence the field defined by $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ satisfies conditions $\langle \mathbf{v} \rangle \cong 0$ and represents the fluctuation part of the displacement field which is an odd functions of argument z .
- b. On the averaged part of displacement we impose the Kirchhoff constraints setting $\mathbf{w} = (-z\bar{\nabla}w, w)$, where $\bar{\nabla} = (\partial_1, \partial_2)$ and $w = w(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \Pi$ is the midplane deflection. We also assume that displacements \mathbf{w} are combined with the plane stress assumption. Bearing in mind that the period lengths are of an order of the plate thickness we shall neglect displacement fluctuations in the direction normal to the midplane.
- c. From the conformability assumption we obtain $\mathbf{v}(\cdot, z, t) \in PL_\Delta(T)$, $\mathbf{T}(\cdot, z, t) \in PL_\Delta(T)$. We also assume that \mathbf{T} is an even function of z . Denoting by \mathbf{v}_x and \mathbf{T}_x Δ -periodic approximations of \mathbf{v} and \mathbf{T} , respectively, and restricting the domain of definition of Eqs (2) and (3) to a cell $\Delta(\mathbf{x}) \times (-h/2, h/2)$, $\mathbf{x} \in \Pi_0$, by means of $\mathbf{w}(\cdot, z, t) \in SL_\Delta(T)$ and using the tolerance approximation, we shall formulate the periodic cell problem for \mathbf{v}_x given by the variational condition

$$\begin{aligned} \langle \rho \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_x \rangle(\mathbf{x}, t) + \langle \nabla \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{v}_x \rangle(\mathbf{x}, t) + \langle \mathbf{T} : \left[\nabla \tilde{\mathbf{v}} \cdot (\nabla \mathbf{v}_x)^T \right] \rangle(\mathbf{x}, t) = \\ = \left(\langle \bar{\nabla} \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{C} z \rangle + \langle (\nabla \tilde{\mathbf{v}})^T \cdot \mathbf{T} z \rangle \right) : (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) w(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (4)$$

which has to hold for every Δ -periodic test function $\tilde{\mathbf{v}}$ which is an odd function of argument z and satisfies condition $\langle \rho \tilde{\mathbf{v}} \rangle = 0$.

- d. We look for an approximate solution to (4) using Galerkin approximation in the form (summation convention over $A=1, \dots, N$ holds)

$$\mathbf{v}_x(\mathbf{y}, z, t) = \mathbf{h}^A(\mathbf{y}, z) \upsilon^A(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Pi_0, z \in (-h/2, h/2) \quad (5)$$

where \mathbf{h}^A are postulated a priori Δ -periodic functions of \mathbf{x} and odd functions of z , such that $\langle \mathbf{h}^A \rangle = 0$; functions υ^A represent new unknown scalar fields. In general, functions \mathbf{h}^A have to approximate the local mode shape functions which describe the

form of free periodic vibrations of an arbitrary periodic cell $\Delta(\mathbf{x}) \times (-h/2, h/2)$; we have to assume that vectors \mathbf{h}^A are parallel to the midplane. Unknowns v^A are called fluctuation variables; it can be shown that $v^A(\cdot, t) \in SV_\Delta(T)$, [7].

- e. Substituting the right-hand side of (5) into (4) and assuming $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{h}^A$ we obtain a system of N equations for the fluctuation variables v^A , $A=1, \dots, N$. Combining Eqs (2), (3) and averaging the obtained result over $\Delta(\mathbf{x}) \times (-h/2, h/2)$, $\mathbf{x} \in \Pi_0$, after taking into account results specified above and using tolerance averaging approximations we arrive at the equation for the midplane deflection w . The aforementioned equations are coupled and their form will be given in the subsequent section.

3. MODEL EQUATIONS

Let us assume that for a periodic structure under considerations a system of the shape functions \mathbf{h}^A , $A=1, \dots, N$, has been specified. Then, after rather lengthy manipulations outlined at the end of the previous section, we obtain the following system of equations for the midplane deflections w and the fluctuation variables v^A

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) : \mathbf{M} - \left(\langle \rho \rangle - \langle \rho z^2 \rangle \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \right) \ddot{w} + \left(\langle \mathbf{T} \rangle - \langle \mathbf{T} z^2 \rangle \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \right) : (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) w - \\ & \underline{\langle \rho z \mathbf{h}^A \rangle} \cdot \bar{\nabla} \ddot{v}^A + \underline{\langle z \mathbf{T} : (\nabla \otimes \nabla \mathbf{h}^A) \rangle} \cdot \bar{\nabla} v^A = 0, \\ & \langle \rho \mathbf{h}^A \cdot \mathbf{h}^B \rangle \ddot{v}^B + \langle \nabla \mathbf{h}^A : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{h}^B \rangle v^B + \left\langle \mathbf{T} : \left[\nabla \mathbf{h}^A \cdot (\nabla \mathbf{h}^B)^T \right] \right\rangle v^B - \\ & \underline{\langle \bar{\nabla} \mathbf{h}^A : \mathbf{C} z \rangle} : (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) w + \underline{\langle \rho z \mathbf{h}^A \rangle} \cdot \bar{\nabla} \ddot{w} - \underline{\langle z \mathbf{T} : (\nabla \otimes \nabla \mathbf{h}^A) \rangle} \cdot \bar{\nabla} w = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

where

$$\mathbf{M} = - \langle z^2 \bar{\mathbf{C}} \rangle : (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) w + \langle z \mathbf{C} : \nabla \mathbf{h}^A \rangle v^A \quad (7)$$

and $\bar{\mathbf{C}}$ is the plane stress elasticity tensor given by $\bar{C}_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} - C_{\alpha\beta 33} C_{\gamma\delta 33} (C_{3333})^{-1}$, where the Greek subscripts run over 1, 2. The unknowns $w(\cdot, t)$, $v^A(\cdot, t)$ are defined on Π_0 ; at the same time all coefficients in Eqs (6), (7) are constant. It follows that the above equations represent a certain effective 2D-model of the prestressed plate. For a homogeneous plate $\mathbf{C} = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$ and under assumption $\mathbf{T} = \text{const.}$ all underlined coefficients in (6), (7) are equal to zero. In this case we obtain the separate equation for the plate deflection w and a system of independent equations for the fluctuation variables v^A . Under homogeneous initial conditions for v^A all fluctuation variables are identically equal to zero.

It has to be emphasized that Eqs (6), (7) have been derived under assumption that fields $w(\cdot, t)$, $v^A(\cdot, t)$ together with their derivatives are slowly-varying functions. Hence, solutions to these equations have a physical sense only if conditions

$$w(\cdot, t) \in SV_A(T), \quad v^A(\cdot, t) \in SV_A(T) \quad (8)$$

hold for every time t and can be violated only near the boundaries $\partial\Pi \times (-h/2, h/2)$ of the plate, [7]. The above conditions can be verified only after obtaining the solution to the problem under consideration and can be interpreted as a certain a posteriori estimation of the physical reliability of the derived results.

The most important consequence of conditions (8) is that they make it possible to obtain a simplified form of the model equations (6). To this end denote by L a mean length of a deformation pattern described by fields $w(\cdot, t)$, $v^A(\cdot, t)$. By means of (8) we conclude that $l \ll L$ and hence $h \ll L$ because l and h are quantities of the same order. Bearing in mind that ratio $\varepsilon = h/L$ is small respect to 1 we shall neglect in (6) terms depending on ε compared with similar terms independent of ε . Hence the final form of the 2D-model equations derived in this contribution will be given by

$$\begin{aligned} & (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) : \mathbf{M} - \langle \rho \rangle \ddot{w} + \langle \mathbf{T} \rangle : (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) w = 0 \\ & \langle \rho \mathbf{h}^A \cdot \mathbf{h}^B \rangle \ddot{v}^B + \langle \nabla \mathbf{h}^A : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{h}^B \rangle v^B + \left\langle \mathbf{T} : \left[\nabla \mathbf{h}^A \cdot (\nabla \mathbf{h}^B)^T \right] \right\rangle v^B - \\ & - \langle \nabla \mathbf{h}^A : \mathbf{C} z \rangle : (\bar{\nabla} \otimes \bar{\nabla}) w = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

where \mathbf{M} is given by formula (7). More detailed discussion of the above equations will be presented separately.

4. CONCLUSIONS

In order to apply Eqs (7), (9) to the investigation of special stability problems we have to determine the initial stress tensor \mathbf{T} . It has to be remembered that the aforementioned considerations have been restricted to the case in which $\mathbf{T}(\cdot, z, t)$ is a periodic-like field which is caused by a distribution of the known initial strain or by the tractions applied to the plate boundary, [6]. Hence, in order to find the prestressing \mathbf{T} , which is an even function of z , we have to solve a separate problem for a periodic nonhomogeneous plate. This problem will be discussed in a separate paper.

Six characteristic features of the obtained model have to be mentioned:

- a. The equations for the fluctuation variables are second order ordinary differential equations involving only time derivatives. Hence, the fluctuation variables do not enter boundary conditions.
- b. The values of coefficients in equations (7), (9) depending on \mathbf{h}^A (but not on the derivatives of \mathbf{h}^A) are of an order of the period lengths; hence the proposed model describes the effect of the periodicity cell size on the solid behavior. Let us observe that this effect takes place only in dynamic problems.

- c. For quasi-stationary problems equations (9)₂ for the fluctuation variables v^A , $A=1, \dots, N$, constitute a system of linear algebraic equations. Hence v^A can be eliminated from Eqs (7), (9) and the proposed model is represented by the equation for the averaged midplane deflection w .
- d. The main drawback of the proposed model lies in finding the mode-shape functions h^A which is rather a difficult task being related to a certain periodic 3D-problem. In most cases these functions have to be approximated by using numerical calculations or some extra heuristic assumption.
- e. The final result of this contribution, given by Eqs (7), (9), can be applied to plates for which the inhomogeneity periods l_1, l_2 are quantities of an order of the plate thickness. If periods l_1, l_2 are large when compared to the plate thickness h then the approach given in [1, 3] and in a series of related papers can be used to the formulation of the effective 2D-theories of periodic plates. On the other hand, if periods l_1, l_2 are small when compared to h then we can apply the well known 2D-modelling procedures directly to the averaged equations of uniperiodic solids which have been derived in [6]. Let us recall the two-scale asymptotic expansion method, applied in [2, 4], also leads to the aforementioned three kinds of effective 2D-models of periodic elastic thin plates.
- f. In this contribution on the averaged part w of displacements there were imposed the Kirchhoff-type constraints. It can be seen that in the second step on the modeling procedure (specified in Sect. 3) we can also introduce any other 2D-approximation of the 3D-field w obtaining, instead of (7), (9), any other type of the 2D-model, e.g. related to a medium thickness plate.

Some applications of the obtained model equations to the special stability and vibration problems will be given in a forthcoming paper.

REFERENCES

- [1] Baron E., On the modelling of medium thickness plates with an uniperiodic structure, *J. Theor. Appl. Mech.*, 40 (2002), 7-22
- [2] Caillerie D., Thin elastic and periodic plates, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 6 (1984), 159-191
- [3] Jędrzyak J., On the stability of thin periodic plates, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 19 (2000), 487-502
- [4] Kohn R.V., Vogelius M., A new model for thin plates with rapidly varying thickness, *Int. J. Solids Structures*, 20 (1984), 333-350
- [5] Kolpakov A.G., Homogenized model for plate periodic structure with initial stresses, *Int. J. Engng. Sci.*, 38 (2000), 2079-2094
- [6] Wierzbicki E., Woźniak Cz., On the modelling of stability problems for mikroperiodic solids and structures, this issue
- [7] Woźniak Cz., Wierzbicki E., Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, *Wyd. Polit. Częstochowskiej, Częstochowa 2000*
- [8] Woźniak Cz., Wierzbicki E., On dynamics of plates with a periodic structure, *Proc. Euromech 444, Bremen 2002 (in the course of publication)*

STATECZNOŚĆ PŁYT KOMPOZYTOWYCH Z NIEJEDNORODNYM ROZKŁADEM SKŁADNIKÓW

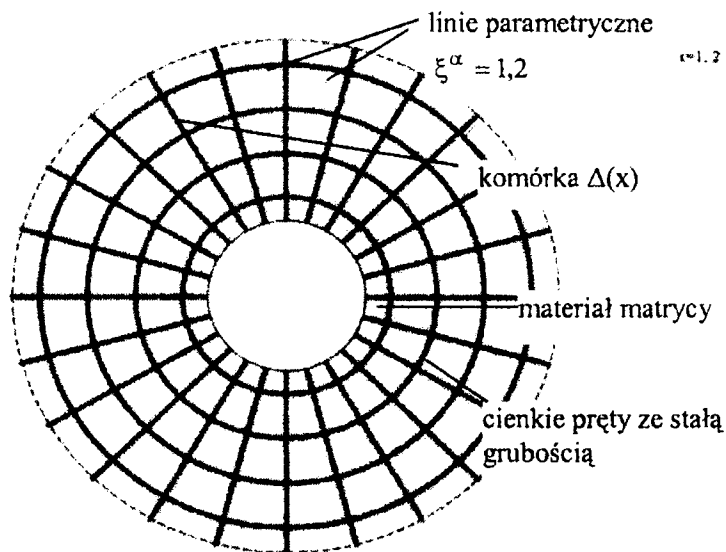
B. MICHALAK

Katedra Mechaniki Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Al. Politechniki 6, 93-590 Łódź

Celem pracy jest sformułowanie i zbadanie uśrednionego modelu opisującego stateczność płyty kompozytowej z niejednorodnym rozkładem składników. Rozpatrywana płyta ma określoną budowę, która nie jest periodyczna ale która w małym obszarze rozpatrywanej płyty może być w przybliżeniu traktowana jako periodyczna. Sformułowanie przybliżonego modelu matematycznego bazuje na koncepcji *uśredniania tolerancyjnego* przedstawionej w pracy Woźniaka i Wierzbickiego [1], gdzie ciało tego rodzaju nazwane jest ciałem heteroperiodycznym.

1. BEZPOŚREDNI OPIS ANALIZOWANEJ PŁYTY

Przedmiotem analizy jest kolista płyta kompozytowa zbudowana z dwóch rodzajów sprężystych prętów których osie przecinają się pod kątem prostym. Obszar pomiędzy prętami wypełnia jednorodny sprężysty materiał matrycy (Rys. 1).



Rys. 1. Schemat płyty

Celem pracy będzie uzyskanie i zbadanie uśrednionego modelu opisującego stateczność tego rodzaju płyt, które nazywać będziemy płytami heteroperiodycznymi. W celu otrzymania równań modelu uśrednionego zastosujemy formalnie technikę uśredniania tolerancyjnego dla ciał periodycznych przedstawioną w pracy [1], gdyż będzie ona odniesiona do pewnego małego obszaru płyty w którym z pewną tolerancją płyta może być traktowana jako periodyczna.

W pracy indeksy α, β przebiegają ciąg 1, 2, a kreska pionowa oznacza pochodną kowariantną w biegunowym układzie współrzędnych ξ^α .

Punktem wyjścia do otrzymania modelu uśrednionego będą znane równania nieliniowej teorii II rzędu płyt cienkich [3]

(i) równania równowagi

$$n^{\alpha\beta}{}_{|\alpha} + p^\beta = 0, \quad m^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} + (n^{\alpha\beta} w_{|\beta} \lambda_\alpha + p = 0 \quad (1)$$

(ii) związki konstytutywne

$$n^{\alpha\beta} = D H^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad m^{\alpha\beta} = B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad (2)$$

gdzie: $H^{\alpha\beta\gamma\delta} = [g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + \nu(\varepsilon^{\alpha\gamma} \varepsilon^{\beta\delta} + \varepsilon^{\alpha\delta} \varepsilon^{\beta\gamma})] / 2,$

$$D \equiv E\delta / (1 - \nu^2), \quad B \equiv E\delta^3 / 12(1 - \nu^2)$$

(iii) relacje odkształcenia przemieszczenia

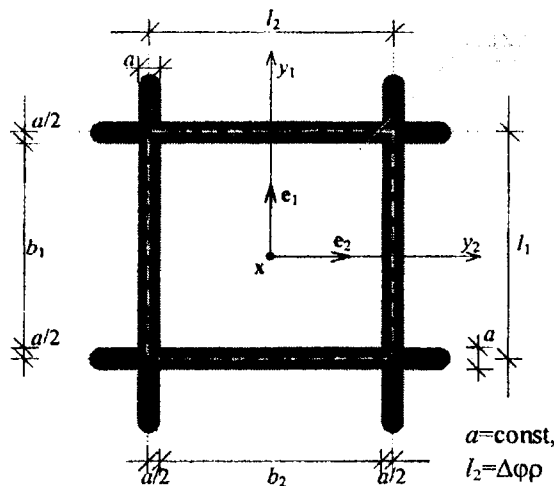
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = u_{\alpha|\beta}, \quad \kappa_{\alpha\beta} = -w_{|\alpha\beta}. \quad (3)$$

Przyjmijmy, że obciążenie zewnętrzne działające na płytę $p^\beta = p = 0$. Obliczając pochodne iloczynów występujących w (1.2) i uwzględniając rów. (1.1) otrzymujemy

$$m^{\alpha\beta}{}_{|\alpha\beta} + n^{\alpha\beta} w_{|\alpha\beta} = 0. \quad (4)$$

2. PROCEDURA MODELOWANIA

Podstawowym założeniem przyjętym w trakcie modelowania będzie przyjęcie, że każda komórka $\Delta(x)$ z Rys.1 może być traktowana z pewną tolerancją jako nierozróżnialna z komórką prostokątną pokazaną na Rys.2.



Rys. 2. Komórka prostokątna

Założenia o dostosowaniu CA. Przyjmijmy, że przemieszczenia powierzchni środkowej płyty są opisane funkcją o charakterze periodycznym w ramach pewnego systemu tolerancji $T(\cdot)$

$$w(\xi^\alpha, t) \in PL(T) \quad (5)$$

gdzie $T = (F(\Omega), \varepsilon(\cdot), l(\cdot))$ jest przyjętym systemem tolerancji. Stąd istnieje następująca dekompozycja funkcji przemieszczeń

$$w(\xi^\alpha, t) = w^0(\xi^\alpha, t) + \tilde{w}(\xi^\alpha, t) \quad (6)$$

gdzie funkcja $w^0(\cdot) \in SV_{\Delta(x)}(T)$ opisuje uśrednione przemieszczenia, natomiast funkcja $\tilde{w}(\cdot) \in PL^\mu(T)$, $\langle \tilde{w} \rangle(\cdot) = 0$ opisuje lokalne oscylacje przemieszczeń wywołane niejednorodną budową płyty. Funkcja $\tilde{w}(\cdot)$ może być aproksymowana w każdej komórce $\Delta(x)$ funkcją Δ -periodyczną $w_x(\mathbf{y}, t)$, $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$.

3. RÓWNANIA OPISUJĄCE MODEL UŚREDNIONY

Podstawiając do rów. (4) związki konstytutywne (2) oraz traktując siły $n^{\alpha\beta}$ jako znane funkcje wolnozmiennne $n^{\alpha\beta}(\cdot) \in SV_{\Delta(x)}(T)$ i korzystając z zasad uśredniania tolerancyjnego podanych w [1] otrzymujemy następujące uśrednione równanie równowagi

$$\begin{aligned} & [\langle BH^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle(\xi^\tau) w^0_{|\gamma\delta}(\xi^\tau, t)]_{|\alpha\beta} + [\langle BH^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle(\xi^\tau) \tilde{w}_{|\gamma\delta}(\xi^\tau, t)]_{|\alpha\beta} - \\ & - n^{\alpha\beta}(\xi^\tau) w^0_{|\alpha\beta}(\xi^\tau, t) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

W powyższym przyjęto, że w iloczynie $n^{\alpha\beta} (w^0_{|\alpha\beta} + \tilde{w}_{|\alpha\beta}) - \tilde{w}_{|\alpha\beta} \ll w^0_{|\alpha\beta}$.

Mnożąc rów. (4) przez dowolną Δ_x -periodyczną funkcję testową $\delta w^* \in H^1_{per}(\Delta_x)$ taką że $\langle \delta w^* \rangle = 0$ otrzymujemy następujący warunek wariacyjny dla Δ_x -periodycznej nieznannej funkcji $\tilde{w}_x(\xi^\alpha, t)$

$$\begin{aligned} & \langle \delta w^*_{|\alpha\beta} BH^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{w}_{x|\gamma\delta} \rangle(\xi^\tau, t) - \langle \delta w^*_{|\alpha\beta} \tilde{w}_x \rangle(\xi^\tau, t) n^{\alpha\beta}(\xi^\tau) = \\ & = \langle \delta w^*_{|\alpha\beta} BH^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle(\xi^\tau) w^0_{|\gamma\delta}(\xi^\tau, t) \end{aligned} \quad (8)$$

który musi być spełniony dla każdej funkcji testowej δw^* .

Zakładając chwilowo, że funkcja $w^0(\cdot)$ jest ustalona możemy z rów.(8) otrzymać zagadnienie na komórce Δ_x którego przybliżone rozwiązanie przyjmujemy w postaci

$$\tilde{w}_x(\xi^\tau, t) \cong h^\alpha(\mathbf{y}) V_\alpha(\xi^\tau, t), \quad (9)$$

gdzie $h^\alpha(\cdot) \in C^2_{per}(\Delta_x)$ są przyjętymi dla każdego rozważanego problemu Δ_x -periodycznymi funkcjami kształtu takimi że, $\langle h^\alpha(\cdot) \rangle = 0$, poza tym spełniającymi warunek $h^\alpha_{|\gamma\delta}(\mathbf{y}) \in O(1)$. Nieznane zmienne wewnętrzne $V_\alpha(\xi^\tau, t)$ są funkcjami wolno zmiennymi $V_\alpha(\cdot) \in SV_{\Delta_x}(T)$.

Wynika stąd, że pole przemieszczeń $w(\xi^\tau, t)$ może być przyjęte w przybliżonej postaci

$$w(\xi^\tau, t) \cong w^0(\xi^\tau, t) + h^\alpha(y) V_\alpha(\xi^\tau, t), \quad (10)$$

gdzie $w^0(\cdot) \in SV_{\Delta x}(T)$ i $V_\alpha(\cdot) \in SV_{\Delta x}(T)$ są podstawowymi niewiadomymi.

Wykorzystując zasady uśredniania tolerancyjnego [1] dla przyjętej funkcji przemieszczenia (10), otrzymujemy z rów. (7) i (8) następujące równania opisujące stateczność płyty heteroperiodycznej

$$[\langle B H^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle (\xi^\tau) w^0_{|\gamma\delta}(\xi^\tau, t)]_{|\alpha\beta} + [\langle B H^{\alpha\beta\gamma\delta} h^\mu_{|\gamma\delta} \rangle (\xi^\tau) V_\mu(\xi^\tau, t)]_{|\alpha\beta} - n^{\alpha\beta}(\xi^\tau) w^0_{|\alpha\beta}(\xi^\tau, t) = 0, \quad (11)$$

$$\langle B H^{\alpha\beta\gamma\delta} h^\mu_{|\alpha\beta} \rangle (\xi^\tau) w^0_{|\gamma\delta}(\xi^\tau, t) + \langle B H^{\alpha\beta\gamma\delta} h^\mu_{|\alpha\beta} h^\lambda_{|\gamma\delta} \rangle (\xi^\tau) V_\lambda(\xi^\tau, t) = 0.$$

Współczynniki w powyższych równaniach w przeciwieństwie do równań opisujących płytę periodyczną nie są wielkościami stałymi lecz funkcjami wolnozmiennymi wywołanymi przez heteroperiodyczną niejednorodność płyty kompozytowej.

Należy zauważyć, że wyniki pracy nie mogą być otrzymane przy użyciu metod homogenizacji asymptotycznej dla ciał periodycznych z pewną parametryzacją krzywoliniową [2]. Otrzymane ogólne wyniki zostaną zilustrowane wybranymi przykładami.

LITERATURA

- [1] Woźniak C., Wierzbicki E., *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids*, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2000.
- [2] Lewiński T., Telega J. J., *Plates, laminates and shells*, World Scientific, Singapore, 1999.
- [3] *Mechanika Techniczna, Mechanika sprężystych płyt i powłok*, pod red. Cz. Woźniaka, PWN, Warszawa 2001.

STABILITY OF COMPOSITE PLATES WITH NON-UNIFORM DISTRIBUTION OF CONSTITUENTS

This contribution deals with stability of certain composite plates with a deterministic material structure, which is not periodic, but in small regions of a plate can be approximately regarded as periodic. The formulation of approximate mathematical models of these plates, based on the concept of what is called a *tolerance averaging*, was discussed in [1] where the solids of this kind were referred to as the heteroperiodic solids. In this contribution a certain approximate solutions to the periodic cell problems for the composite plates under consideration are proposed. These solutions are based on same heuristic assumptions and lead to the system of equations with functional but slowly-varying coefficients. It has to be mentioned that the results obtained in this contribution cannot be derived by using the homogenization method related to solids which are periodic with respect to a certain curvilinear parameterisation, [2]. The obtained general results will be illustrated by an example of the selected stability problems.

ANALIZA STATECZNOŚCI DŹWIGARA PRĘTOWEGO

J. MISIAK, S. STACHURA
Wyższa Szkoła Ekologii i Zarządzania
Wawelska 14, 02-061 Warszawa

Wykonano analizę stateczności początkowej i zlinearyzowanej dźwigara kratowego z uwzględnieniem wpływu stężeń na wartość mnożnika pierwszej siły krytycznej. Wyznaczono najbardziej korzystny dobór stężeń, przy których siła krytyczna jest największa - patrz tab.1. Wyniki otrzymane ze stateczności początkowej i zlinearyzowanej znacznie różnią się między sobą. W przypadku tego dźwigara właściwą jest analiza stateczności zlinearyzowanej.

1. WPOWADZENIE

Istnieje bardzo duża klasa konstrukcji, dla których (z racji przyłożonych obciążeń) utrata ich zdolności do przejmowania wzrastających obciążeń następuje na skutek zjawiska utraty stateczności. W zależności od rodzaju obciążenia układu rozróżniamy stateczność statyczną i dynamiczną [2,3].

W ogólnym przypadku badania problemów stateczności konstrukcji prowadzą do zagadnień nieliniowych, które mogą być zbadane za pomocą iteracyjnej lub przyrostowej analizy dużych przemieszczeń. Istnieje jednak szeroka klasa zagadnień w których przemieszczenia przed utratą stateczności są małe i wówczas równania równowagi w zakresie przedkrytycznym można zapisać dla konfiguracji początkowej [1]. W takich przypadkach utrata stateczności oznacza nagłe przejście konstrukcji do sąsiedniej konfiguracji równowagi. Jeśli zachowanie się konstrukcji przed utratą stateczności jest liniowe (małe przemieszczenia) i są one ortogonalne do postaci wyboczenia, to formułujemy problem stateczności początkowej, natomiast gdy występują przemieszczenia zgodne z postacią wyboczenia, wówczas ich wpływ należy uwzględnić formułując zagadnienie stateczności zlinearyzowanej. W przypadku, gdy duże przemieszczenia powstają jeszcze przed stanem krytycznym, rozpatrujemy problem nieliniowy zachowania się konstrukcji w zakresie przedkrytycznym.

W niniejszej pracy rozpatrywana jest stateczność początkowa i zlinearyzowana dźwigara kratowego.

2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI

Do analizy dźwigara zastosowano metodę elementów skończonych, użyto dwuwęzłowego elementu prętowego (rys.1), przyjmując w węzłach po 6 stopni swobody. Wektor uogólnionych przemieszczeń węzłowych jest następujący:

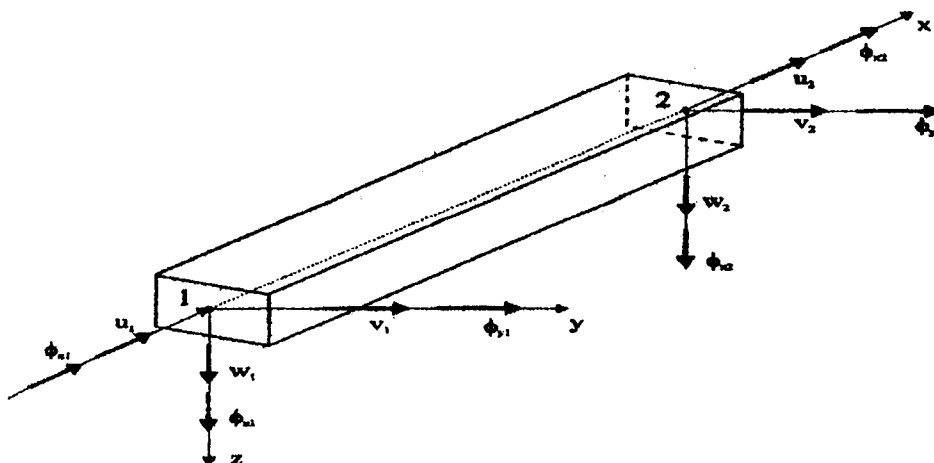
$$\mathbf{q}^T = [u_1, v_1, w_1, \phi_{x1}, \phi_{y1}, \phi_{z1}, u_2, v_2, w_2, \phi_{x2}, \phi_{y2}, \phi_{z2}] \quad (1)$$

Wykorzystując założenie płaskich przekrojów, wektor przemieszczeń u elementu określimy za pomocą funkcji

$$u = [N_1^u, N_2^u, N_3^u, 0, N_5^u, N_6^u, N_7^u, N_8^u, N_9^u, 0, N_{11}^u, N_{12}^u] q = [N]_u q \quad (2)$$

gdzie: $N_1^u = 1 - \xi$, $N_2^u = 6(\xi - \xi^2)\eta$, $N_3^u = 6(\xi - \xi^2)\zeta$, $N_5^u = (1 - 4\xi + 3\xi^2)L\zeta$,
 $N_6^u = (-1 + 4\xi - 3\xi^2)L\eta$, $N_7^u = \xi$, $N_8^u = 6(-\xi + \xi^2)\eta$, $N_9^u = 6(\xi - \xi^2)\zeta$,
 $N_{11}^u = (-2\xi + 3\xi^2)L\zeta$, $N_{12}^u = (2 - 3\xi^2)L\eta$, gdzie: $\xi = \frac{x}{L}$, $\zeta = \frac{y}{L}$, $\eta = \frac{z}{L}$

są funkcjami kształtu, opisującymi przemieszczenie wzdłużne dowolnego punktu belki w funkcji przemieszczeń węzłowych wzdłużnych i poprzecznych oraz kątów ugięć.



Rys.1. Element prętowy

Natomiast pole przemieszczeń poprzecznych punktów leżących na osi obojętnej elementu belkowego przyjęto w postaci

$$v = [0, N_2, 0, 0, 0, N_6, 0, N_8, 0, 0, 0, N_{12}] q = [N]_v q \quad (3a)$$

$$w = [0, 0, N_3, 0, N_5, 0, 0, 0, N_9, 0, N_{11}, 0] q = [N]_w q \quad (3b)$$

gdzie: $N_2 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $N_3 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$, $N_5 = (-\xi + 2\xi^2 - 3\xi^3)L$,

$N_6 = (\xi - 2\xi^2 + 3\xi^3)L$, $N_8 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $N_9 = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $N_{11} = (\xi^2 - \xi^3)$, $N_{12} = (-\xi^2 + \xi^3)$

są funkcjami kształtu opisującymi przemieszczenie poprzeczne w funkcji przemieszczeń węzłowych poprzecznych oraz kątów ugięć.

Funkcja kształtu kątów skręcenia przekrojów poprzecznych jest w postaci

$$\phi = [0, 0, 0, N_4^s, 0, 0, 0, 0, 0, N_{10}^s, 0, 0] q = [N]_\phi q \quad (4)$$

gdzie: $N_4^s = 1 - \xi$, $N_{10}^s = \xi$

Całkowite odkształcenie dowolnego włókna składa się z [5] odkształcenia liniowego ε_l oraz nieliniowego ε_n , a więc $\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_n$, natomiast

$$\varepsilon_l^T = \{\varepsilon'_x, \gamma'_{xy}, \gamma'_{xz}\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\}, \quad \varepsilon_n^T = \{\varepsilon''_x, 0, 0\} = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], 0, 0 \right\} \quad (5)$$

w wyrażeniu na część nieliniową odkształcenia podłużnego ε''_x pomija się kwadrat pochodnej składowej przemieszczenia u względem współrzędnej x . W zapisie macierzowym liniowa część odkształcenia (5) ma postać

$$\varepsilon_l = L_1 u = L_1 H_z N q = B_0 q \quad (6)$$

gdzie L_1 jest operatorem różniczkowym. Po uwzględnieniu macierzy własności sprężystych D , otrzymamy macierz sztywności liniowej postaci

$$K^e = \int_{V_e} B_0^T D B_0 dV \quad (7)$$

Macierz sztywności początkowych przemieszczeń wyznaczamy z części nieliniowej odkształcenia podłużnego ε_n (5), które można przedstawić jako

$$\varepsilon_n = B_1(q) q \quad (8)$$

Macierz początkowych przemieszczeń liniową względem przemieszczeń $K_l(q)$ dla sformułowania nieprzyrostowego wyznaczono z zależności

$$K_l(q) = \int_{V_e} B_0 D B_1 dV \quad (9)$$

Macierz początkowych naprężeń można wyznaczyć z [4]

$$k_\sigma^v = P_0 \int_0^l [N']_v^T [N']_v dx, \quad k_\sigma^w = P_0 \int_0^l [N']_w^T [N']_w dx, \quad K_\sigma^e(\sigma) = k_\sigma^v + k_\sigma^w \quad (10)$$

gdzie: P_0 - jest siłą podłużną w pręcie.

Problemy stateczności zlinearyzowanej oraz początkowej opisane są równaniami zagadnienia własnego postaci

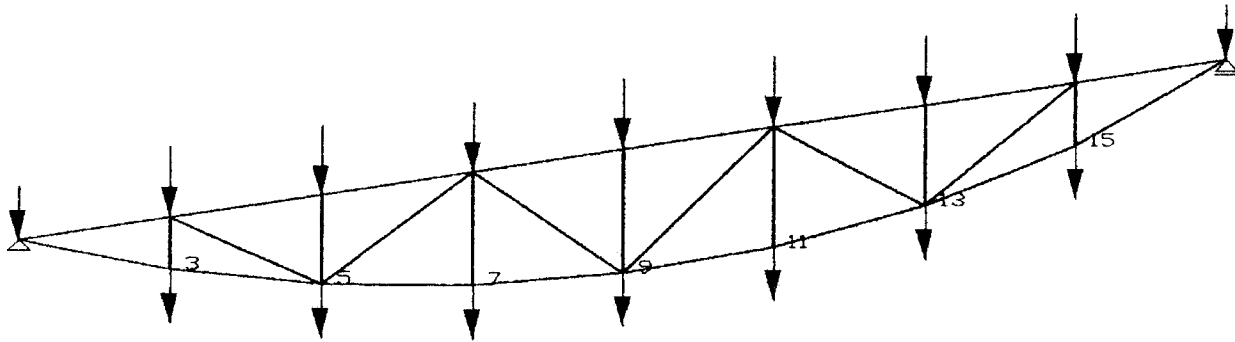
$$[K + K_\sigma(\sigma) + K_l(q)] v = 0 \quad (11)$$

$$[K_e + K_\sigma(\sigma)] v = 0 \quad (12)$$

3. WYNIKI I WNIOSKI Z OBLICZEŃ DŹWIGARA

Wykonano analizę stateczności dźwigara (rys.2) przekrycia dachu jednospadowego. Rozpiętość dźwigara wynosi 7,4 m, kąt pochylenia $14^{\circ}19'$, wykonany z rury kwadratowej 60x60x4 mm.

Obciążenie dźwigara stanowi: ciężar szkła i uszczelek przekrycia dachu, płatwie i wymiany dachowe, obciążenie śniegiem i bryłami lodu oraz instalacje techniczne. Do obliczeń przyjęto obciążenie pasa górnego o wartości 4,43 kN (połowa wartości na węzłach skrajnych), natomiast obciążenie pasa dolnego wynosi 0,78 kN. Wymienione obciążenia przyjęto jako obciążenie porównawcze P_o .



Rys.2. Dźwigar prętowy przekrycia dachowego

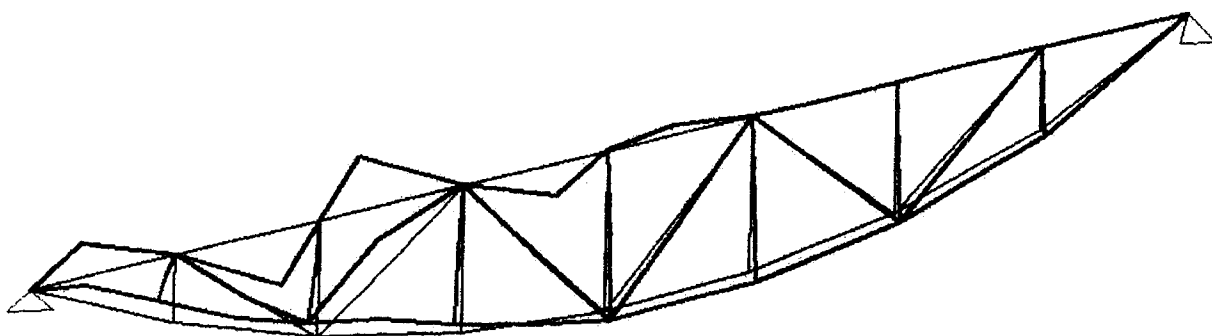
Dla węzłów pasa górnego odebrano możliwość przemieszczeń prostopadłych do płaszczyzny dźwigara. Natomiast, dla węzłów pasa dolnego wykonano badanie wpływu stężeń (brak przemieszczeń prostopadłych) na wartość mnożnika siły krytycznej. Wyniki analiz stateczności początkowej i zlinearyzowanej autorskimi programami [4] przedstawiono w tab.1.

W przypadku analiz stateczności początkowej, widocznym jest niewielki wpływ stężeń na wartość mnożnika λ_1^p , bowiem utrata stateczności dźwigara ma charakter miejscowy, dotyczy to głównie pasa górnego (rys. 5, 7, 9, 13). Globalna utrata stateczności dźwigara występuje przy braku stężeń (rys.3).

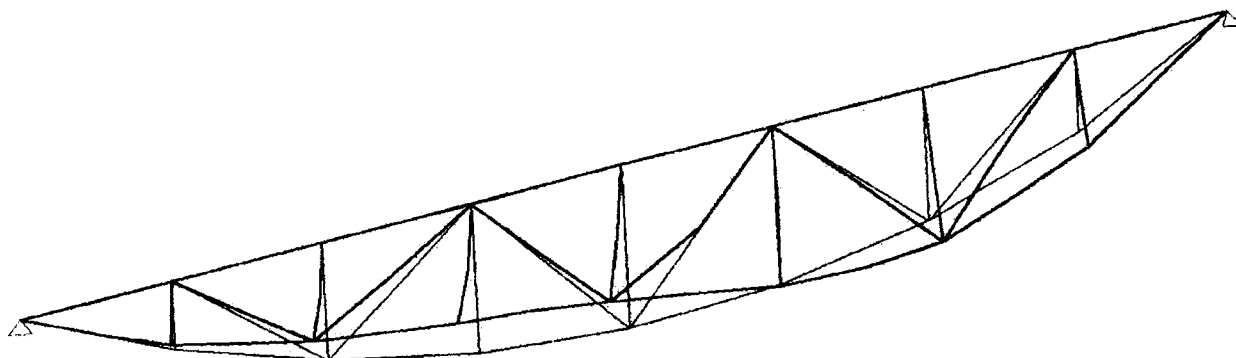
Tabela 1. Wartości mnożnika obciążenia krytycznego $P_{kr} = \lambda_1 P_o$

stateczność	stężenia w węzłach pas dolnego					
	brak	3,15	3,5,13,15	3,5,7,11,13,15	3,5,7,9,11,13,15	5,9,15
początkowa	42,7	39,91	39,96	39,97	39,98	39,85
zlinearyzowana	0,90	0,81	0,74	1,94	2,08	2,46

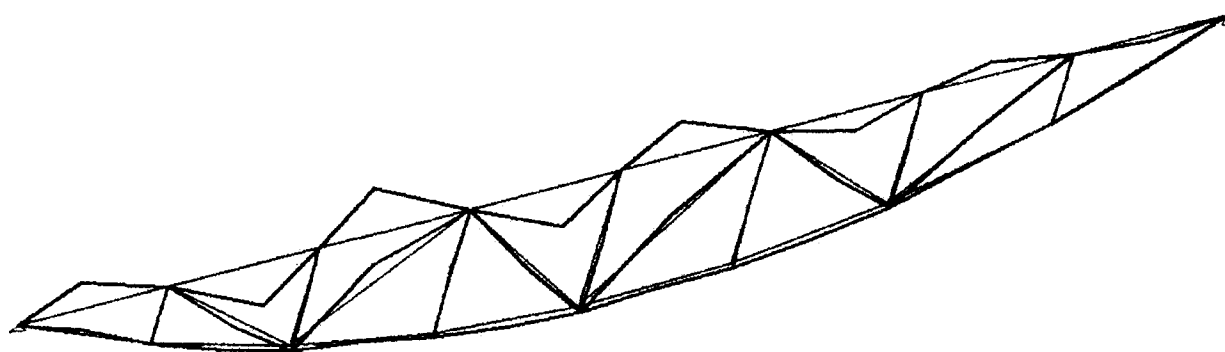
Natomiast analiza stateczności zlinearyzowanej wykazuje, że przy wprowadzaniu stężeń (rys.6, 8,) następuje spadek wartości mnożnika λ_1^z w porównaniu do przypadku braku stężeń (rys.4) – miejscowa utrata stateczności pasa dolnego. Przy dalszym wprowadzaniu stężeń (rys. 10, 12), wzrasta wartość mnożnika, gdyż następuje również deformacja wykratowania kratownicy wraz z deformacją pasów górnego i dolnego (rys. 10, 12).



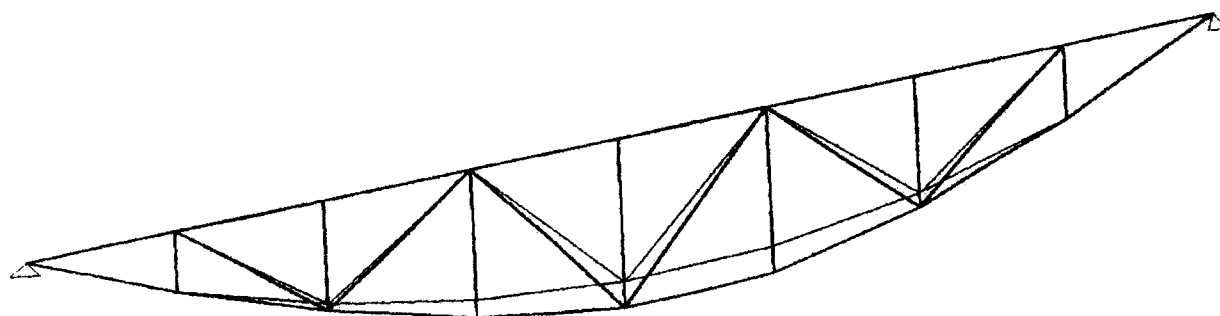
Rys.3. Stateczność początkowa $\lambda_1^p = 42,7$ brak stężeń pasa dolnego



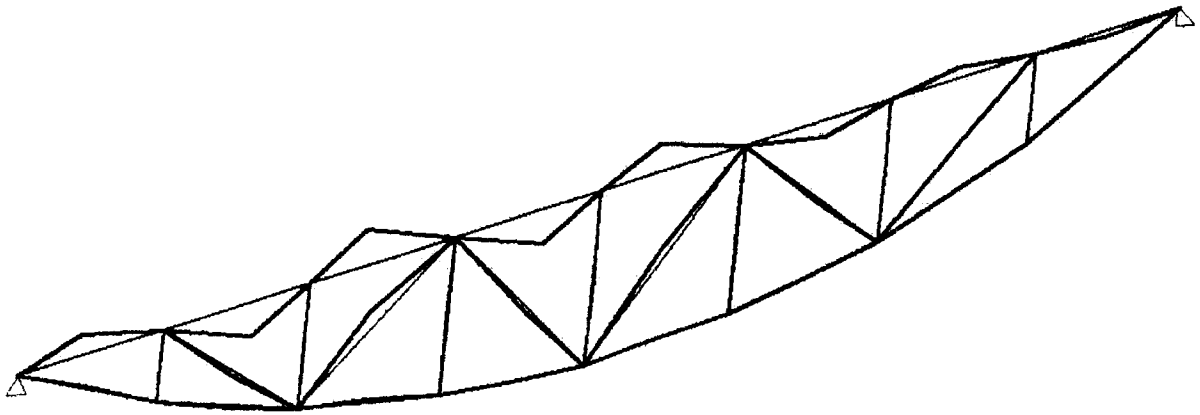
Rys.4. Stateczność zlinearyzowana $\lambda_1^l = 0,9$ brak stężeń pasa dolnego



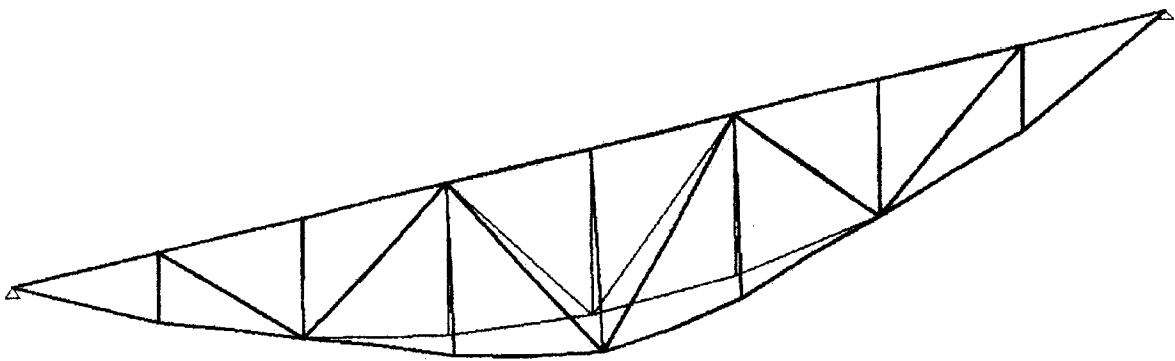
Rys.5. Stateczność początkowa $\lambda_1^p = 39,91$ stężenia w węzłach 3, 15



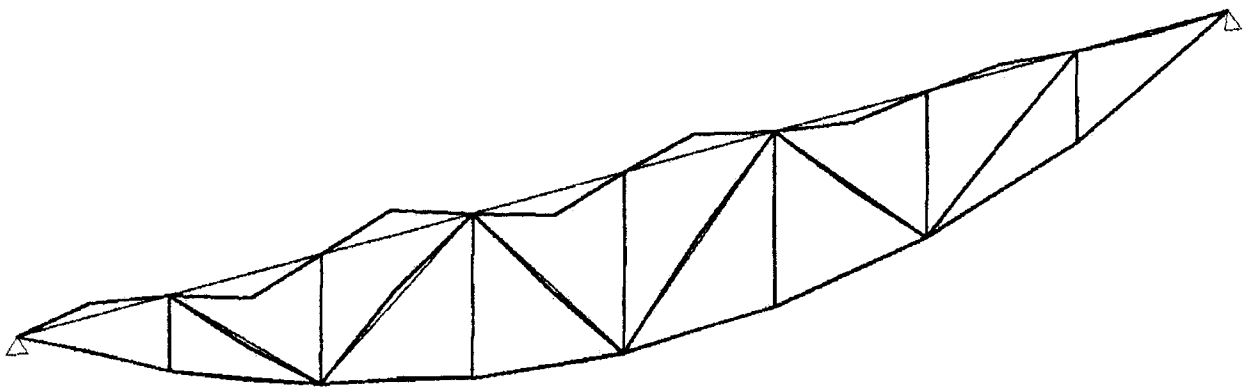
Rys.6. Stateczność zlinearyzowana $\lambda_1^l = 0,81$ stężenia w węzłach 3, 15



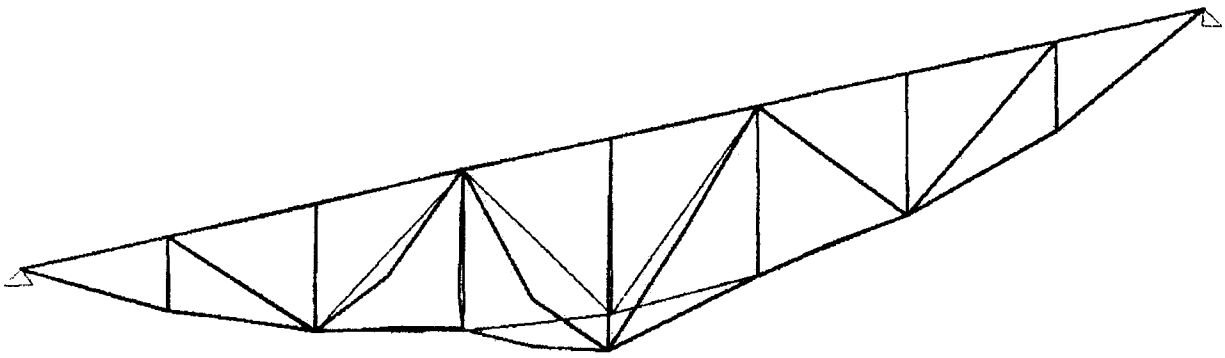
Rys.7. Stateczność początkowa $\lambda_1^p = 39,96$ stężenia w węzłach 3, 5, 13, 15



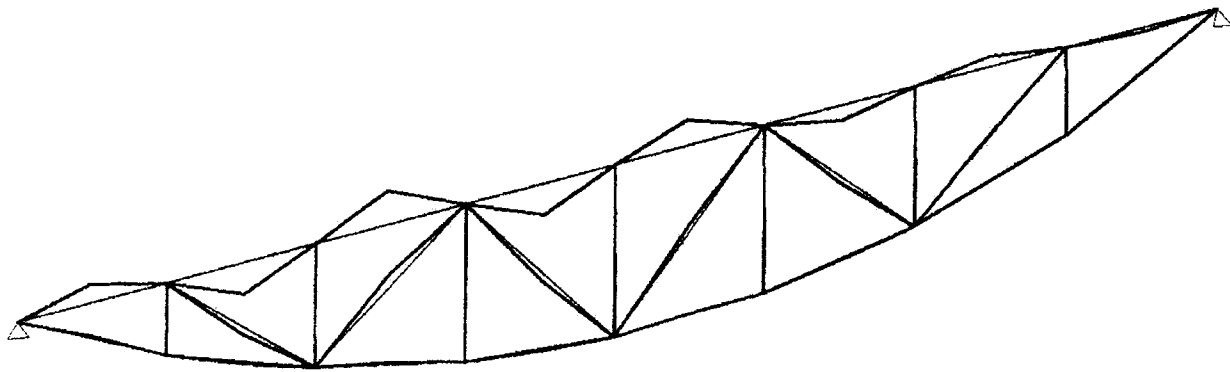
Rys.8. Stateczność zlinearyzowana $\lambda_1^{zl} = 0,73$ stężenia w węzłach 3, 5, 13, 15



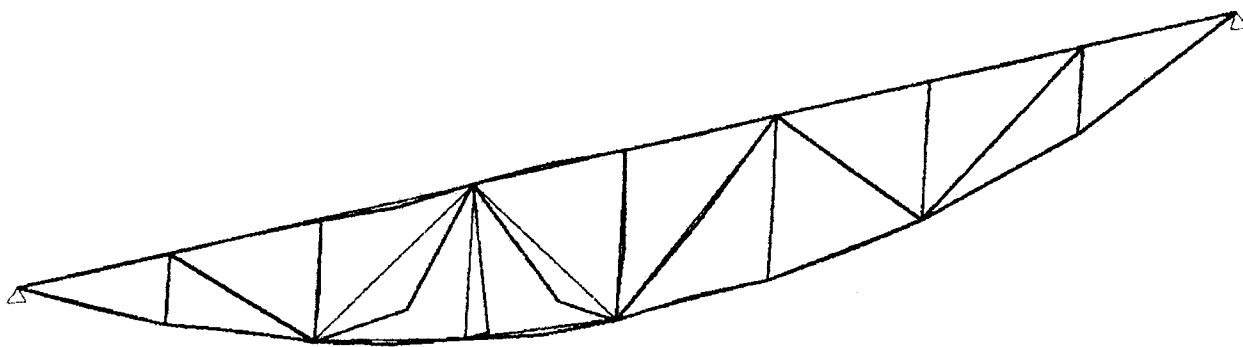
Rys.9. Stateczność początkowa $\lambda_1^p = 39,97$ stężenia w węzłach 3, 5, 7, 11, 13, 15



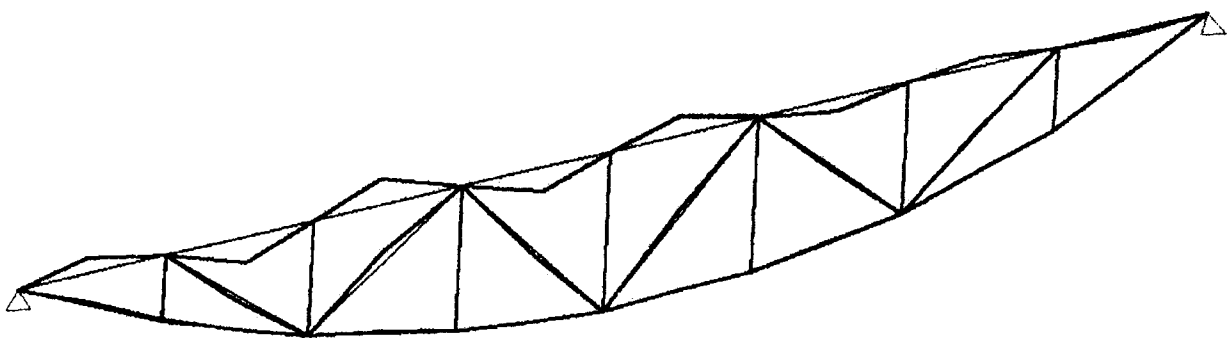
Rys.10. Stateczność zlinearyzowana $\lambda_1^{zl} = 1,94$ stężenia w węzłach 3, 5, 7, 11, 13, 15



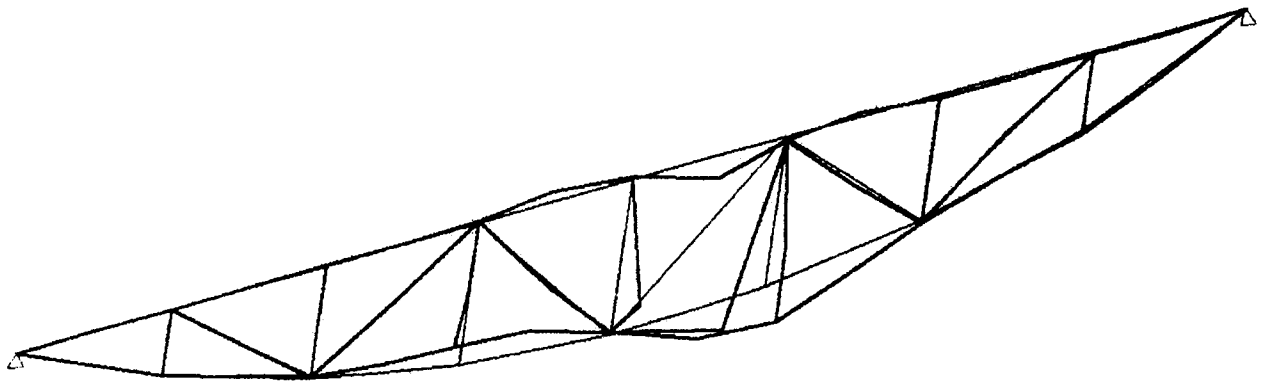
Rys.11. Stateczność początkowa $\lambda_1^p = 39,98$ stężenia w węzłach 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15



Rys.12. Stateczność zlinearyzowana $\lambda_1^{zl} = 2,08$ stężenia w węzłach 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15



Rys.13. Stateczność początkowa $\lambda_1^p = 39,98$ stężenia w węzłach 5, 9, 13



Rys.14. Stateczność zlinearyzowana $\lambda_1^{zl} = 2,46$ stężenia w węzłach 5, 9, 13

Z przeprowadzonych dalszych analiz z zastosowaniem różnych przypadków umiejscowienia stężeń przeciwdziałających wyjściu z płaszczyzny dźwigara wynika, że najkorzystniej jest zastosować stężenia w węzłach pasa dolnego (rys.14). Wówczas mnożnik $\lambda_1^{zl} = 2,46$ i utrata stateczności występuje zarówno w płaszczyźnie jak i poprzez wyjście z płaszczyzny dźwigara tak, że zmiana geometrii zachodzi dla całej objętości dźwigara.

LITERATURA

- [1] Misiak J., Stateczność konstrukcji prętowych, PWN, Warszawa 1990.
- [2] Misiak J., Stachura S., Analysis of dynamic stability of flat lattice girders using harmonic balance method, Archiwum Budowy Maszyn, Vol. XL, 1993, 1.
- [3] Misiak J., Stachura S., Stateczność dynamiczna powłoki walcowej, IX Sympozjum stateczności konstrukcji, Zakopane 2000, s.197-202.
- [4] Stachura S., Nieliniowa analiza stateczności statycznej i dynamicznej układów prętowych i powłokowych, spr. z pracy 2015/08/P, Pol. Radomska, 2002.
- [5] Wieczorek M., Numeryczna analiza konstrukcji podatnych na wyboczenie, WAT, Dodatek do biuletynu nr 11(411), Warszawa 1986.

STABILITY ANALYSIS OF TRUSS GIRDER

An analysis of initial and linearized stability of truss girder with taking into consideration influence of braces on the value of factor of the first critical force is presented. A most correctly selection of braces, in which the first critical force has maximum value is predicted. Results given by initial and linearized stability are different. In the case of analyzed truss girder more proper is the way of linearized stability.

BUCKLING ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGN OF AXIALLY COMPRESSED COMPOSITE PLATES IN A FUZZY ENVIROMENT

A. MUC

Institut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Krakowska,
Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland

The variability of mechanical properties commonly encountered in composite structures should be taken into account in the mechanical analysis. The present paper discusses such a possibility using the fuzzy set approach. This method is successfully implemented in the buckling problem of multilayered composite plates. The attention is also focused on the formulation of optimization problems. The stacking sequence optimization problem for plates is also solved herein.

1. INTRODUCTION

Referring to composite materials, the origin and source of imprecision (or uncertainty) lies mainly in the lack of information dealing with their microstructure, mechanical properties, behavior and the number of factors responsible for gradual degradation of their properties and final failure. Commonly, the theoretical (deterministic) analysis of composites is based on homogenization theories that may include an increasing number of different parameters. However, it is unknown in advance what number of parameters is sufficient to describe satisfactorily the problem considered. On the other hand, the material parameters are evaluated in the experimental way being the source of randomness in the traditional (deterministic) analysis or impreciseness or vagueness in the fuzzy set approach. The imprecise, vague, qualitative, linguistic or incomplete information may be present in geometry, material properties, degradation of properties, applied loads or boundary conditions.

It is important to emphasize that the combined use of sophisticated measurement techniques, computational simulations and a numerical identification tool for the model parameters may result in a powerful method for material characterization of mechanical properties and damage analysis. However, in such an analysis the knowledge of a great number of various factors is required and the validity of a pure deterministic modeling is always not complete due to the scatter of experimental data. Thus, many engineering problems connected with the use of composite materials are (or may be) too complex and ill defined to be modeled by conventional deterministic procedures. On the other hand, the use of statistical analysis is also limited to: (1) the number of experimental data (the extension of random fields of variables), (2) the definition of covariance matrices since the majority of random variables are correlated in an arbitrary manner, and (3) computational efforts in the analysis of multidimensional statistical (stochastic) problems.

If the system parameters are described in imprecise or linguistic terms the fuzzy theory can be implemented to predict the structural response in the sense of evaluation of its upper and lower bounds, respectively. A broad description of the possible implementation of the fuzzy set theory into the mechanics of composite materials is

discussed by Muc, Kędziora [1]. In the present paper we intend to enrich the possible applicability of the fuzzy set theory into stacking sequence optimization of multilayered composite plates subjected to buckling constraints not discussed in the mentioned above reference.

2. FUNDAMENTAL DEFINITIONS IN THE FUZZY SET THEORY

The general concept of the fuzzy set theory is based on the definition of the membership functions denoted by μ . A fuzzy set μ of X is a function that maps the space X into the unit interval, i. e.:

$$\mu : X \rightarrow [0, 1] \quad (1)$$

The value $\mu(x)$ denotes the membership function of x to the fuzzy set μ . Fig. 1 shows (subjectively defined) a membership function of the fuzzy set μ

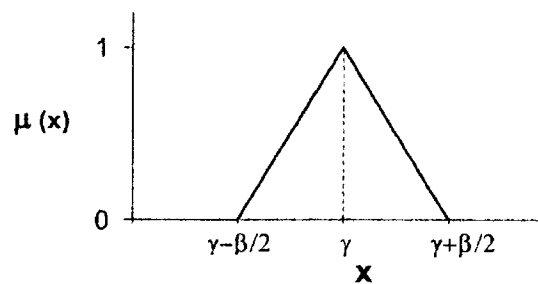


Fig.1. The form of the triangular membership functions

It should be pointed out that there is no unique fuzzy set representation by a membership function. Taking into account the possible applicability of fuzzy set concept the so-called horizontal representation of fuzzy sets is introduced by using their alpha cuts (α -cuts) instead of the membership functions $\mu(x)$, called vertical representation. Let $\mu \in F(x)$ and $\alpha \in [0, 1]$. The set

$$[\mu]_{\alpha} = \{ x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha \} \quad (2)$$

is called an α -cut of the membership function $\mu(x)$. Let μ be the triangular function on \mathbb{R} given in Fig. 1. The α -cuts of μ are in this case defined as follows:

$$[\mu]_{\alpha} = \begin{cases} [a + \alpha \cdot (m - a), b - \alpha \cdot (b - m)] & \text{if } 0 < \alpha \leq 1 \\ \mathbb{R} & \text{if } \alpha = 0 \end{cases} \quad (3)$$

The variability (understood as the fuzziness) of material and geometrical parameters is taken to be equal to $\pm 10\%$. The nominal (average) values correspond to $\alpha=1$ (see Fig.2) whereas the parameters of the triangular membership function given by Eq (2) are following :

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad a = 0.9 \cdot m \quad b = 1.1 \cdot m \quad (4)$$

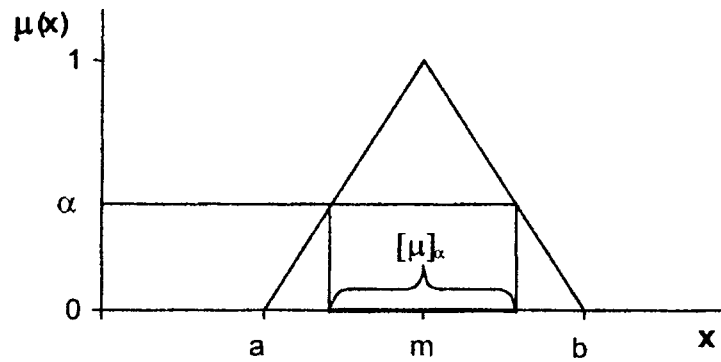


Fig. 2. Definition of the α -cuts

3. OPTIMIZATION IN A FUZZY SET ENVIROMENT

In general, the problem of the optimum design of structures (or materials what becomes also an objective in the composite materials area) depends on the definition of: (i) an objective function (functional), (ii) a set of inequality (or equality) constraints, (iii) design variables, and (iv) optimization algorithm. It is obvious that the first three factors may be classified into three different groups, i.e. deterministic (crisp), probabilistic (random) or fuzzy. The optimum design based on the deterministic or probabilistic approaches are rather well developed and known both from the theoretical, mathematical background as well as from numerical point of view. The optimum design in a fuzzy environment is a new approach although some attempts have been made in this area starting from the pioneering works of Zimmermann [2], Rao [3,4], Verdegay [5], Yazenin [6], Yeh & Hsu [7]. An application of fuzzy sets to optimization problems of structures made of composite materials have been given by Morton & Weber [8], Adali [9]. For a fuzzy optimization problem the fuzzy objective function and constraints are characterized by their membership functions.

The fuzzy feasible region A is defined by considering all the constraints, i.e.:

$$A = \bigcap_{j=1}^m G_j \quad (5)$$

and the membership degree of any design variables s to a fuzzy feasible region A is given by the following condition :

$$\mu_A(s) = \text{Min}_j \{ \mu_{g_j}(s) \} \quad (6)$$

that means the minimum degree of satisfaction of the design variables s to all the constraints. A design variables can be considered as feasible if the objective function defines a non-empty fuzzy set $D \subset A$ being the intersection of the membership functions of the objective and the constraints, such that:

$$D = \{\mu_f(s)\} \cap \left\{ \bigcap_{j=1}^m \mu_{g_j}(s) \right\} \quad (7)$$

From the fuzzy set the optimum solution \bar{s} is selected as the design for which the membership is a maximum (see Fig.3), i.e.:

$$\mu_D(\bar{s}) = \text{Max} \mu_D(s) = \text{Max} [\text{Min}(\mu_f(s), \mu_{g_1}(s), \dots, \mu_{g_m}(s))] \quad (8)$$

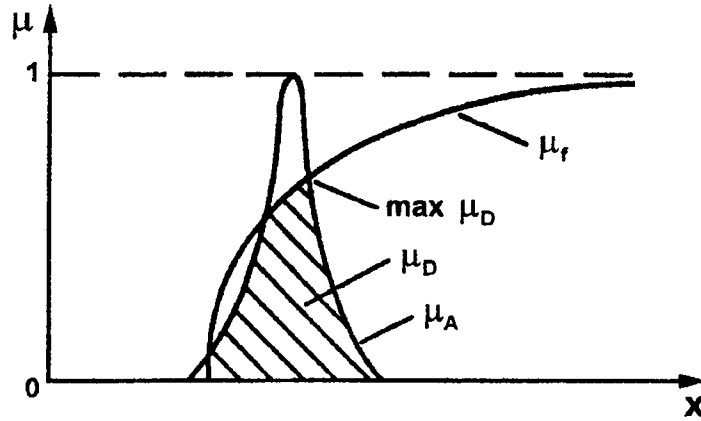


Fig. 3. Optimal fuzzy decision-making

Thus, using the fuzzy formulation the initial minimum problem is formulated as a MinMax problem. The latter problem is reformulated to the following maximum problem introducing an additional objective λ :

$$\text{Find Max } \lambda \quad (9)$$

subject to the constraints:

$$\lambda \leq \mu_f(s), \quad \lambda \leq \mu_{g_j}, j = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

4. BUCKLING OF MULTILAYERED COMPOSITE PLATES

Let us consider a rectangular multilayered composite plate subjected to compression – see Fig. 4. Following the considerations presented by Muc [10] the buckling parameter λ_b is expressed as a function of fibre orientations of each individual plies θ as well as of geometrical ratios and material properties:

$$\lambda_b = \frac{(m/\pi a)^2}{P_x(1+k\beta_m^2)} T_{33}, \quad (11)$$

where:

$$T_{33} = D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})\beta_m^2 + D_{22}\beta_m^4, \quad \beta_m = (na)/(mb), \quad k = P_y/P_x$$

and D_{ij} denote the 2-D terms of the stiffness matrix for composite multilayered structures – they are functions of fibre orientations.

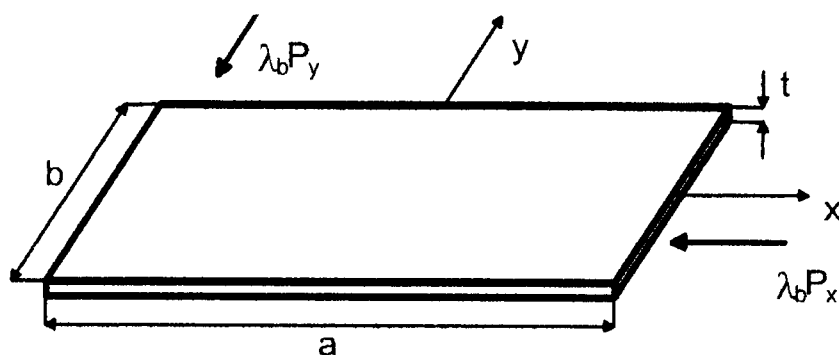


Fig.4. Geometry and loading of compressed rectangular plate

In the classical (deterministic) optimization problems we are looking for the maximal values of the buckling parameter λ_b treating fibre orientations of each individual plies as design variables. The optimal fibre orientations can be found in an analytical way – see Muc [10]. Now, let us consider that material properties of each individual ply (Young's E_1 , E_2 and Kirchhoff's G_{12} moduli) are not strictly determined but they are represented as fuzzy numbers. Their fuzzy representation is described by the triangular membership functions – Figs 1,2. The fuzziness is expressed in the form given by eq (4). The nominal values of material properties are following: $E_1 = 200$ [GPa], $E_2 = 20$ [GPa] and $G_{12} = 10$ [GPa].

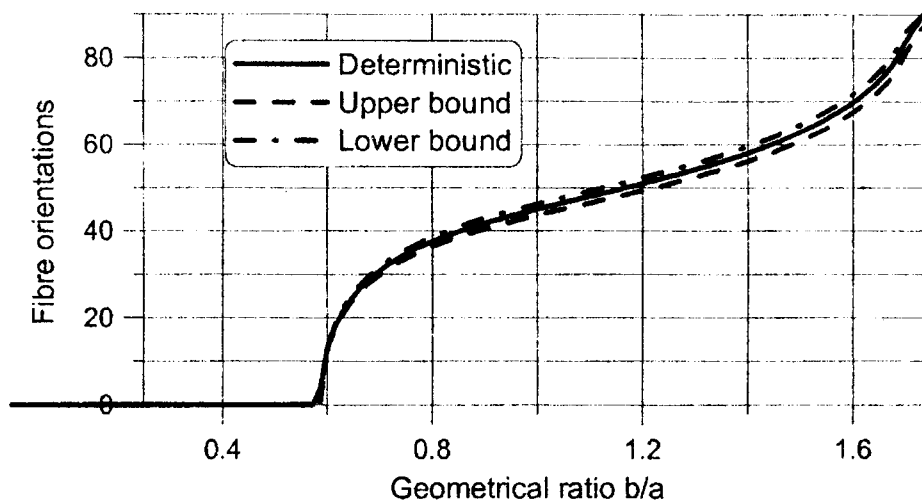


Fig.5. Optimal fibre orientations

Applying the formulation presented in the previous section the optimization problem is now expressed in the form given by Eqs (9), (10), however, there is no additional constraints determined by relations (5), (6). Using the α -cut formulation the lower and upper bounds of optimal fiber orientations can be found in a numerical way only. The results are plotted in Fig. 5. It is worth to note that both upper and lower bounds do not correspond to the upper and lower bounds of the mechanical properties but they are combinations of them. In addition, they cannot be expressed in a pure analytical way similarly as in Ref. [10]. They are also not symmetric with respect to the deterministic curve corresponding to α equal to 1 – see Fig. 2. As it may be observed the fuzziness in

material properties affects optimal fibre orientations values and in this sense optimal buckling loads. Therefore, in our opinion for composite structures it would be useful to determine not only the deterministic values of optimal solutions but also to describe the ranges of their variations in the sense of the fuzzy set approach.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work is funded by the State Committee for Scientific Research (KBN) under Grant No. PB-0829/T07/2002/23.

REFERENCES

- [1] A.Muc, P. Kędziora (2003), Application of Fuzzy Set Theory in Mechanics of Composite Materials, rozdział książki *Soft Computing in Textile Sciences* (L.M.Sztandera, Ch.Pastore red.), Physica-Verlag, Heidelberg, New York , pp.16-50.
- [2] Zimmermann H.J. (1976), Description and optimization of fuzzy systems, *International Journal of General Systems*, 2, no. 4, pp. 209-215.
- [3] Verdegay J.L. (1982), Fuzzy mathematical programming, *Fuzzy Information and Design Process* (Edts M. M. Gupta and E. Sanchez), North-Holland, Amsterdam.
- [4] Yazenin A.V. (1987), Fuzzy & stochastic programming, *Fuzzy Sets Syst.*,22.
- [5] Yeh Y.C. and Hsu D.S. (1988), Structural optimization with uncertainty factors, *Twelfth National Conf. Theoret. Appl. Mech.*, Taipei, Taiwan, R.O.C., pp. 565-571.
- [6] Morton S.K. and Webber J.P.H. (1990), Uncertainty reasoning applied to the assessment of composite materials for structural design, *Eng. Optimiz.*, 16, pp. 43-77
- [7] Adali S. (1991), Fuzzy optimization of laminated cylindrical pressure vessels, *Composite Structures*, Elsevier Applied Science, Londyn, pp. 249-260.
- [8] Rao S.S. (1987), Multi-objective optimization of fuzzy structural systems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 1157-1171.
- [9] Rao S.S. (1992), Fuzzy goal programming approach for structural optimization, *AIAA Journal*, 30, pp. 1425-1432.
- [10] Muc A. (1988), Optimal fibre orientations for simply -supported plates under compression, *Composite Structures*, 9, pp.161-172.

WYBOCZENIE I OPTYMALIZACJA ŚCISKANYCH PŁYT KOMPOZYTOWYCH W UJĘCIU TEORII ZBIORÓW ROZMYTYCH

W analizie struktur kompozytowych konieczne jest uwzględnienie rozrzutu własności mechanicznych. W niniejszej przedstawiamy możliwości takiej analizy w ujęciu teorii zbiorów rozmytych. Metoda ta została zastosowana do opisu zjawiska wyboczenia wielowarstwowych płyt kompozytowych. Ponadto podano także sformułowanie problemu optymalizacji oraz rozwiązano przykład numeryczny dotyczący optymalizacji orientacji włókien.

NON-LINEAR APPROACH IN DESIGN OF COMPOSITE STRUCTURES

A. MUC, T. FUGIEL

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn, Politechnika Krakowska,
Warszawska 24, 31-155 Kraków,

Usually the design of composite structures is limited to the linear elastic analysis only. In the present paper the effects of both physical and geometrical non-linearities are taken into account. Their influence on the limit states of composite structures is discussed. The numerical examples deal with the behaviour of composite pressure vessels components, such as a cylindrical shell and the reinforcement of the junction of shells. The optimisation method of the reinforcement thickness is also formulated and solved herein.

1. INTRODUCTION

It is well-known that the polymeric matrix of fibre reinforced plastics (FRP) exhibits a non-linear behaviour understood in the sense of a physical non-linearity on the σ - ϵ diagram. This effect may be additionally enhanced by fibre orientations especially for fibres oriented at 45° where a typical plastic hardening is observed. However, in the majority of research works as well as in design codes it is a common practice to employ the geometrically and physically linear plate/shell theory in the analysis of composite structures. It may lead to the incorrect evaluation of failure (damage) index particularly for structural elements where a stress concentration occurs, e.g. holes, junctions of plates, shells and their reinforcement. In addition, in the case of reinforcements as a delamination failure becomes a dominant failure mode for composite structures possible stress relaxation due to the physical non-linearity may change completely design results.

In the present paper we extend previous studies and examine the effects of physical and geometrical non-linearities on failure modes of composite structures focusing our attention on the following problems:

- buckling analysis of compressed cylindrical shells taking into account large deflection, first order transverse shear deformation theory and physical non-linearities,
- stress concentration and FPF studies at the junction of two cylindrical shells to model and analyse the stress concentration effects caused by nozzles placed in the cylindrical part of composite pressure vessels,
- optimal design of the junction reinforcement thickness in order to reduce and equalize stress concentration factors around the nozzles, i.e. in the perpendicular and transverse directions,

In all presented above problems it is assumed that the physical non-linearity is a result of fibre orientations and according to experimental investigations the highest effects of non-linearities is observed for fibres oriented at 45° . The numerical studies are conducted with the use of the FE package where a laminate is built of a finite set of 2-D FE in the thickness (z) direction. Each 2-D FE corresponds to the assumed fibre orientations – groups of layers having the identical fibre orientations are described with the use of one 2-D FE along the thickness direction. The physical, non-linear law (in the form of plas-

tic deformations) is created independently for each individual 2-D FE corresponding to the prescribed fibre orientation. In each of FE the initiation of non-linear deformations is described with the use of one parametrical plastic flow potential in the form proposed by Sun and Chen [1]. The form of physical relations used in the FE modelling of non-linear (plastic) behaviour of individual plies in the laminate is broadly discussed by Muc and Fugiel [2]. However, in the latter work the analysed problems deal with the elastic-plastic contact between composite pressure vessel body and the rigid foundation.

2. PHYSICAL NON-LINERARITIES

A great number of composite materials demonstrates physical non-linearities on the $\sigma - \epsilon$ curves. Their origin is obvious – arising of the microcraks inside the matrix without any visible macrocraks. It leads directly to the stiffness degradation and results in the decrease of the appropriate value of the stiffness matrix. Those effects are directly connected with the fibre orientations

The character of the $\sigma - \epsilon$ plot imposes automatically that it is necessary to implement herein the plastic flow theory used in the physical description of isotropic materials. The analysis in this area of composite mechanics begins in 1973 from the work of Hahn, Tsai [3]. They have introduced a quadratic term of the stress component σ_6 to describe physical non-linearities. Further works in this area have been made by Dvorak & Bahei-El-Dina [4]. Sun i Chen [1] have proposed the use of one parametrical plastic flow potential in the following form:

$$f=(\sigma_2^2+2a_6\sigma_6^2)/2 \quad (1)$$

Owen, Li [5] have applied the plastic potential similar to the Huber-Mises-Hencky yield condition which has six parameters of anisotropy:

$$f=a_1(\sigma_1-\sigma_2)^2+a_2(\sigma_2-\sigma_3)^2+a_3(\sigma_3-\sigma_1)^2+3(a_4\sigma_4^2+a_5\sigma_5^2+a_6\sigma_6^2) \quad (2)$$

The anisotropy parameters $a_1 \dots a_6$ are taken from experimental data.

In flow theory the material behaviour is described by three conditions: the initial yielding condition (described above), the flow rule and the hardening rule. Let the total strain component is the sum of the elastic strain and the plastic one:

$$\{d\epsilon\}=\{d\epsilon^{el}\}+\{d\epsilon^P\}=[S]\{d\sigma\}+\{d\epsilon^P\} \quad (3)$$

The elastic strain increment is given from the Hook law, whereas the plastic one $\{d\epsilon^P\}$ is derived from the flow rule:

$$\{d\epsilon^P\}=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\{\sigma\}} \quad (4)$$

and $d\lambda$ is a proportionality constant. After some manipulations that parameter may be expressed as follows:

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [C]}{\frac{4}{3}fH_p + \left(\frac{\partial}{\partial\{\sigma\}}\right)^T [C] \left(\frac{\partial}{\partial\{\sigma\}}\right)} \{d\varepsilon\} \quad (5)$$

H_p is a plastic modulus. Using the above relations, one can obtain finally the incremental elastic-plastic flow rule that has the similar manner as for isotropic materials, i.e. :

$$\{d\sigma\} = [C] (\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^p\}) = [C] \left(1 - \frac{\partial}{\partial\{\sigma\}} \frac{d\lambda}{d\{\varepsilon\}} \right) d\{\varepsilon\} = [C^{ep}] d\{\varepsilon\} \quad (6)$$

3. NON-LINEAR BUCKLING ANALYSIS

Considering buckling mode of failure of compressed laminated cylindrical shells the large deformation analysis is conducted (geometrical non-linearities) including also physical non-linearities in the form discussed above. The results exhibit the reduction of buckling loads comparing with the linear elastic approach only. Those effects are strongly dependent on fibre orientations in individual plies. The analysis is conducted for compressed cylindrical shells made of FRP having the following stacking sequence $[0_6, \pm 45_3]_S$.

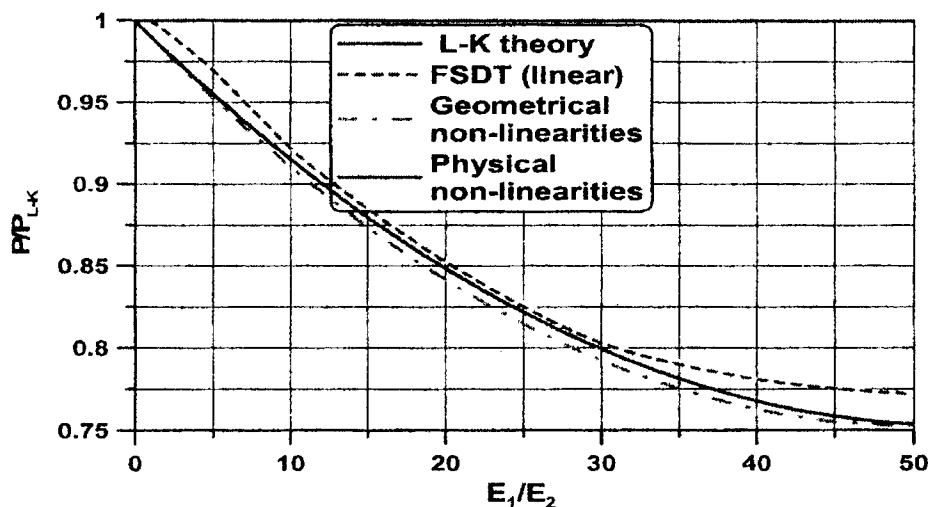


Fig.1. Buckling loads for different variants of theoretical formulations ($L/R = 5$, $R/t = 10$, $G_{12}/E_2 = 0.5$, $\nu_{12} = 0.25$)

Figure 1 summarizes the results of various numerical studies. All results are compared to the value of buckling loads obtained for the classical Love-Kirchhoff relations in order to observe the influence of kinematical assumptions on results. In general numerical studies have been conducted for three different cases:

- classical elastic shell analysis using 2-D first order transverse shear theory relations (FSDT),
- geometrically non-linear elastic shell analysis using 2-D first order transverse shear theory relations (FSDT),
- physically non-linear analysis shell analysis using 2-D first order transverse shear theory relations, however the physical non-linearities in the form given by the

relations (1), (3), (6) independently for each of individual plies in the laminate if the plasticity condition in the form (1) is fulfilled.

The plots presented in Fig.1 demonstrate directly the influence of material properties (understood in the sense of the degree of orthotropy E_1/E_2) on the values of the buckling loads. As it is obvious the Love-Kirchhof shell theory gives the wrong approximation of buckling loads. The geometrical non-linearities reduce values of buckling loads comparing with the linear elastic FSDT buckling analysis, however the difference is strongly dependant on the mechanical properties. As it is expected physical non-linearities play the most important role for plies oriented at 45. The plastic effects reduce again buckling loads obtained for the linearised FSDT. Thus, the both effects of geometrical and physical non-linearities result in the reduction of buckling loads. However, the results are strongly dependent on ply orientations, geometrical properties of shells since the above-mentioned factors have an effect on the buckling mode.

4. FORMULATION OF THE OPTIMISATION PROBLEM

Shape optimisation of the shell reinforcement is connected with searching for the maximal critical loads that can be carried out by laminated structures or it is introduced in order to equalize the stress (strain) failure criteria (in the sense of required yield condition or FPF criteria) around the boundaries or for the whole axisymmetric structure. If we intend to equalize the values of the objective functional U (stress/strain criterion) along the curve C then the optimisation problem differs qualitatively (the *MinMax* problem) from the typical formulations leading to the limitation of the functional value, i.e.: $Max U(s) \leq U_{admis}$, where U_{admis} denotes the admissible, prescribed *a priori* value of the functional. For the *MinMax* problems using the finite element method of solution it is almost impossible to satisfy such a condition in an exact manner since it is very difficult to obtain the identical value of the functional U at each nodal point. Figure 2 demonstrates the possible variations of the objective functional U for the initial and the final (optimal) shapes (see Muc *et al.* [6]). Therefore, it is assumed that the solution is optimal as the following condition is satisfied:

$$U_l \leq U_k(s) \leq U_u, k=1,2,\dots,K \quad (7)$$

where:

$$U_l=(1-\alpha)U_{aver}, \quad U_u=(1+\alpha)U_{aver}, \quad U_{aver}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^K U_k(s) \quad (8)$$

α is a parameter defining the range of acceptance of the optimal solutions. In general, it is assumed that its value should be less or equal to 0.01 or 0.05. $U_k(s)$ denotes the value of the objective functional evaluated at the nodal point k along the plate/shell meridian or boundary. Thus, in the shape optimisation problems the optimal values are reached with the prescribed values of acceptance α varying from 1% to 5%.

In the material optimisation problems we are looking for the minimal weight (volume) of the structure assuming in advance that the optimal structure satisfies all constraint conditions in the form of required failure, stress, strain or deformation criteria.

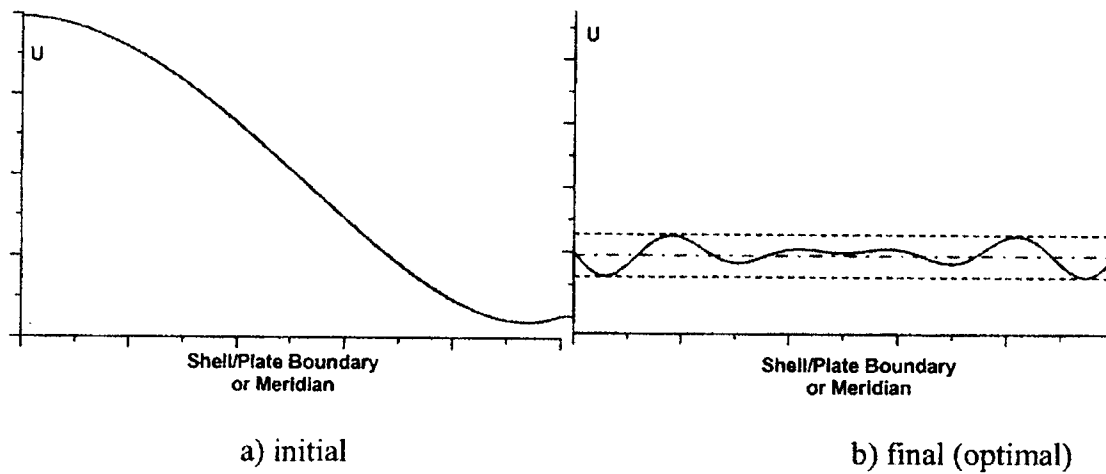


Fig. 2. Variations of the objective functional U along the curve C

5. OPTIMISATION OF A JUNCTION OF CYLINDRICAL SHELLS – PHYSICAL NON-LINEARITIES

To illustrate the proposed method of the spline discretisation conjugated with GA to the shape design let us consider the optimal design of reinforcements of the junction of two cylindrical shells. It is assumed that the shell thickness t is equal to 9.5 mm, and their outside radii $R = 305$ mm and $r = 160$ mm, respectively. The geometry of the junction is presented in Fig. 3 for a transverse and longitudinal cross-sections. Similarly as previously the cylindrical shells is made of plies having the following stacking sequence $[0_6, \pm 45_3]_S$, whereas its material properties are given in the caption for Fig. 1, and the ratio E_1/E_2 is equal to 20.

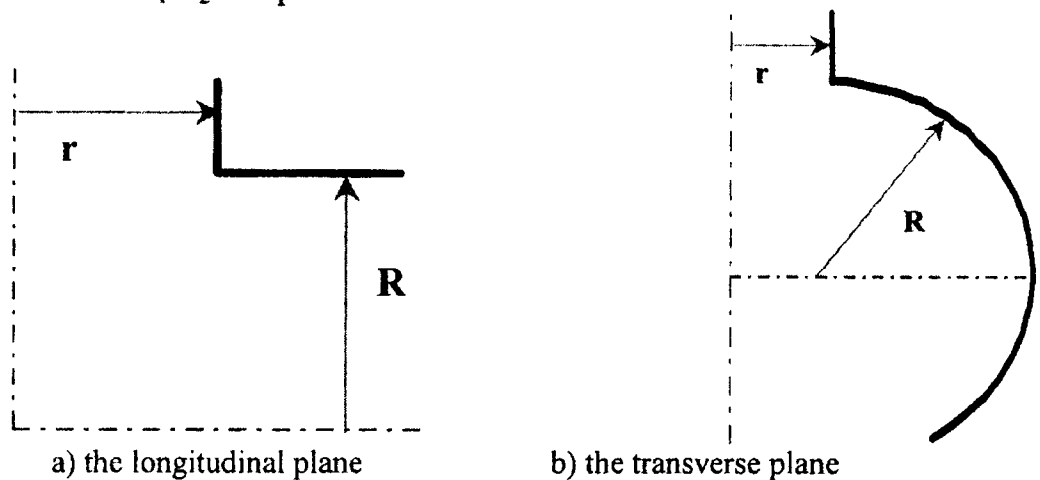


Fig. 3. Cross-sections of the junction

The dimensionless stress distributions are demonstrated in Figs 4, 5 and they show evidently the necessity of the junction shape optimization understood in the sense of adding an additional material called as reinforcement. Figs 4a, 5a present the stress distributions taking into account elastic deformations only, whereas Figs 4b, 5b exhibit the influence of plastic (non-linear deformations) of plies oriented at 45° . As it may be seen physical non-linearities result in the drastic reduction of the maximal stresses at the junction.

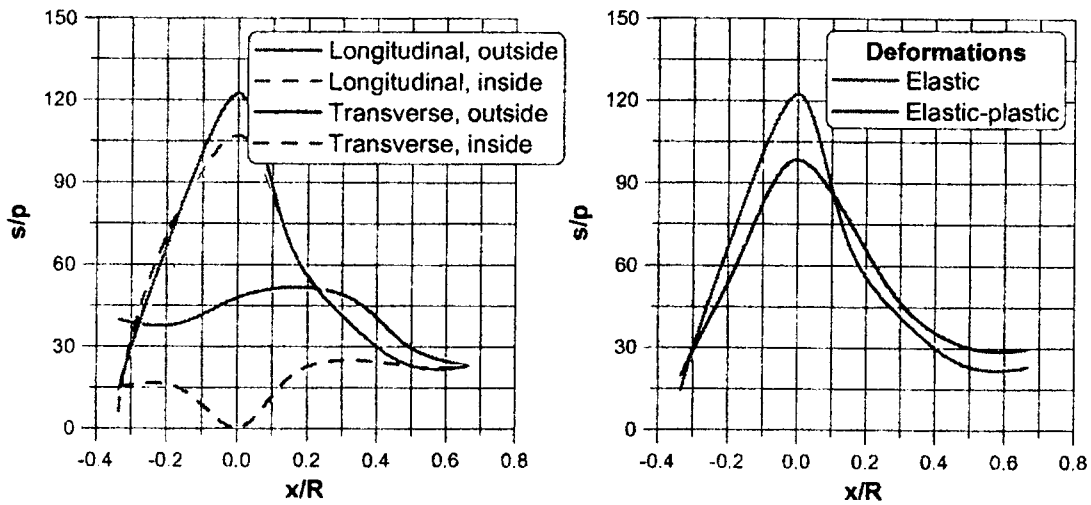


Fig. 4. Stress distributions in a direction parallel to the transverse and longitudinal planes

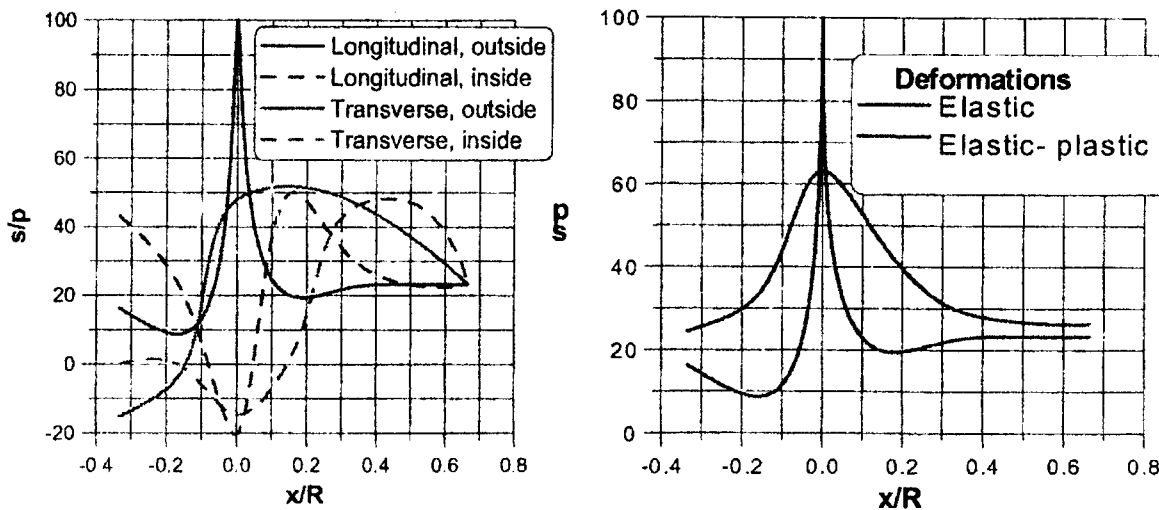


Fig. 5. Stress distributions in a direction normal to the transverse and longitudinal planes

The optimisation problem has been solved for the functional U in the form of the dimensionless stresses measured along the dimensionless distance x/R . X equal to zero corresponds to the junction, and the sign “+” describes the distance measured along the cylinder having the greater radius R , and “-” the cylinder with the radius r . In fact, two independent optimisation problems have been solved: the first corresponds to the elastic deformations analysis only, whereas the second takes into account physical non-linearities in the form discussed in the section 2. Optimal design of the thickness reinforcement at the junction of two cylindrical shells (one of them represents a nozzle in a pressure vessel body) is conducted with the use of the Bezier spline functions. The broad discussion of the the optimization method as well as of the used genetic optimization algorithms is presented by Muc and Gurba [7]. The objective of the optimization is following: to equalize the stress concentration factors around the nozzles including elastic and elastic-plastic deformation effects – it is formulated as the MinMax problem – see section 3. The results of the optimisation are plotted in Figs 6 and 7, independently in the transverse and longitudinal directions since the stress distributions are completely different. The above-mentioned figures exhibit also differences between optimal reinforcements in the linear (elastic) and non-linear (elastic-plastic) cases.

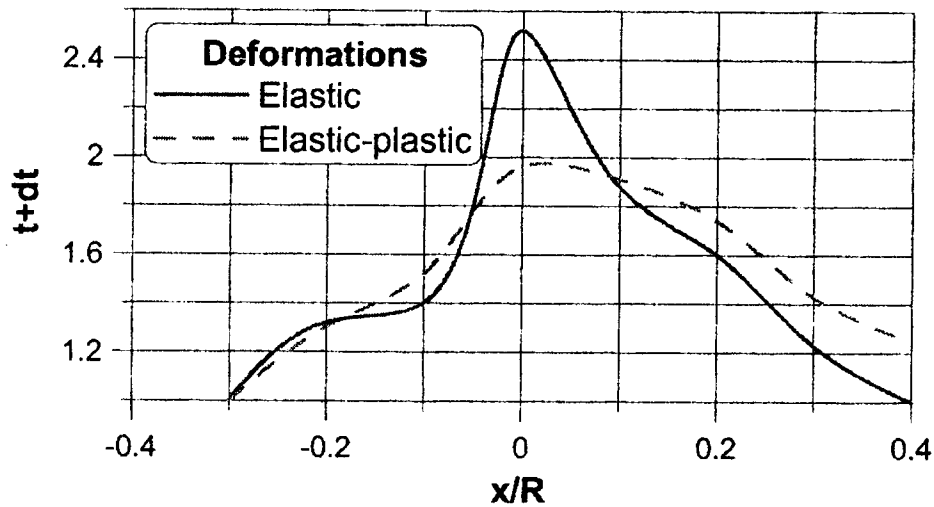


Fig. 6. Distributions of the thickness reinforcement in the transverse direction

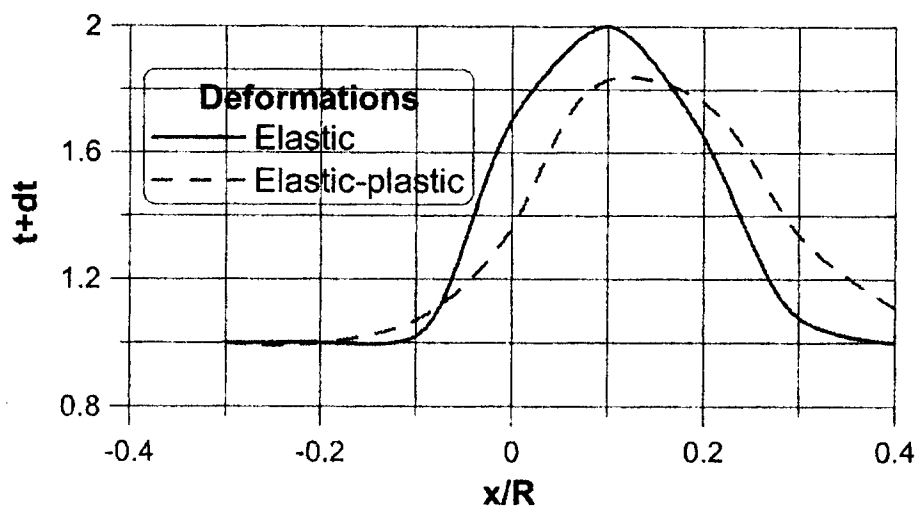


Fig. 7. Distributions of the thickness reinforcement in the longitudinal direction

As it may be seen physical non-linearities change completely the optimal reinforcement distributions since the stress distributions for elastic and elastic-plastic cases are completely different. However, on the other hand the results obtained with the use of non-linear, elastic-plastic analysis demonstrate evidently the necessity of taking physical non-linearities into account in the design procedures of composite pressure vessels.

6. CONCLUSIONS

The necessity of taking into account of both geometrical and physical non-linearities in the design of pressure vessels made of fibre reinforced plastics is pointed out in the present paper. Studying the presented above approaches, methods and results the following conclusions can be drawn:

- In the design of pressure vessels and pipings made of fibre reinforced plastics it is necessary to conduct FE analysis and in addition to take into account directional dependence of the material properties

- The linear predictions of buckling pressures for pressure vessel components available in the design codes do not reflect satisfactorily directional dependence of buckling pressures since geometrical and physical non-linearities should be considered
- Taking into account nonlinear physical relations one may reduce significantly stress concentrations arising at the junction of cylindrical shells
- The reinforcement of the junction of cylinders may be implemented into optimisation analysis and the thickness of the reinforcement may be better predicted
- In view of optimization analysis a multicriterion objective functional should be formulated in order to take into account various failure criteria, e.g. delaminations

In summary, the present study shows evidently that the use of present design codes result in the wrong prediction of the pressure vessel components thicknesses due to the incorrect application of experimental data demonstrating the existence of both physical and geometrical non-linearities. In our opinion, the proper conjunction of numerical analysis with the experimental data may result in the further weight savings of pressure vessels and in this way a better optimisation of such structures.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work is funded by the State Committee for Scientific Research (KBN) under Grant No. PB-0829/T07/2002/23.

REFERENCES

- [1] Sun C.T., Chen J.K., "A simple flow rule for characterizing nonlinear behavior of fiber composites", *Journal of Composite Materials*, Vol. 36, 1989
- [2] Muc A., Fugiel T., "Influence of physical and geometrical nonlinearities on failure analysis of composite pressure vessels", *Proc. ICCM/13*, Beijing, 2001.
- [3] Tsai, S.W., Hahn, H.T., *Introduction to Composite Materials*, Technomic, 1980.
- [4] Dvorak, G.J. and Bahei-El-Din, Y.A., "Plasticity analysis of fibrous composites", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 49, 1982
- [5] Owen, D.R.J. and Li, Z. H., "Elastic-plastic dynamic analysis of anisotropic laminated plates", *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. 70, 1988
- [6] Muc A. *et al.*, "Discrete Optimization of Two-Dimensional Laminated Composite Plate and Shell Structures", *Proc. Sixth Int. Conf. Computational Structures Technology*, B.H.V. Topping and Z. Bittnar, (Editors), Civil-Comp Press, Stirling, UK, paper 137, 2002.
- [7] Muc, A., Gurba, W., "Genetic algorithms and finite element analysis in optimization of composite structures", *Comp. Structures*, Vol. 54, 2001, pp. 275-281.

EFEKTY NIELINIOWE W PROJEKTOWANIU STRUKTUR KOMPOZYTOWYCH

Zazwyczaj projektowanie struktur kompozytowych ogranicza się do analizy sprężystej w zakresie geometrycznie liniowym. W niniejszej pracy uwzględniono wpływ efektów geometrycznie i fizycznie nieliniowych na nośność konstrukcji. Przeprowadzone badania dotyczą analizy elementów konstrukcji ciśnieniowych zbiorników kompozytowych, tzn. powłoki cylindrycznej oraz wzmocnienia króćców. Sformułowano i rozwiązano także zagadnienia optymalizacji grubości wzmocnienia króćców.

NIESTATECZNOŚĆ I EFEKTY DRUGIEGO RZĘDU MASZTÓW STALOWYCH

J. MURZEWSKI

Instytut Materiałów i Konstrukcji Budowlanych Politechniki Krakowskiej,
ul. Warszawska 24, L-13, 31-155 Kraków

Przechylony słup wahadłowy wprowadza się jako model obliczeniowy masztu według teorii II rzędu w miejsce modelu pionowej belki ciąglej na nieliniowo sprężystych podporach. Efektami nieliniowymi bardzo ważnymi są teraz: przechył trzonu i poluzowanie odciagu zawietrznego. Równowagę masztu sprawdza się dodając do działania wiatru składowe siły grawitacyjnych prostopadłe do przechylonego trzonu. Trzon masztu stabilizują oddziaływania odciągów. Amplifikacja momentów zginających pozwala zaniechać sprawdzenia przęsła trzonu na wyboczenie. Stopnie swobody w równaniach równowagi masztów wieloprzęsłowych pozwalają na optymalizację naciągów wstępnych.

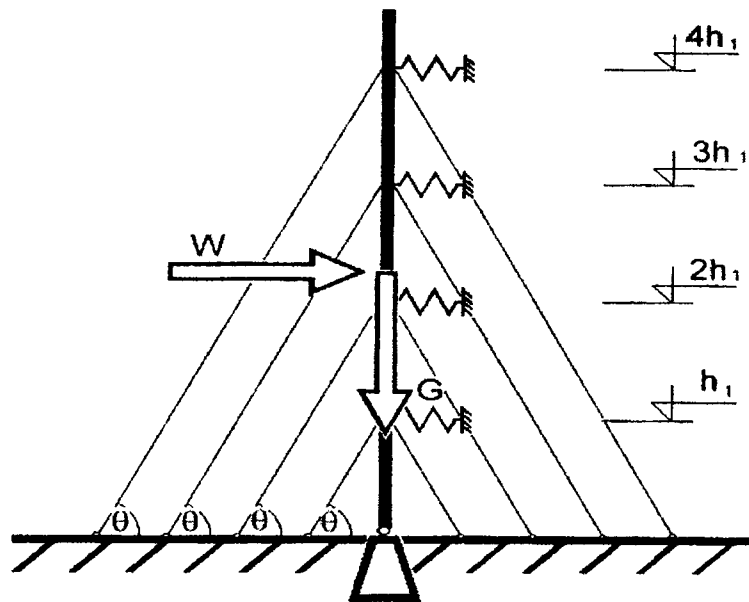
1. MODELE OBLICZENIOWE MASZTU

Stosowanym dotychczas modelem obliczeniowym masztu wieloprzęsłowego ([1], [6] itd.) była pionowa belka ciąglej na nieliniowo sprężystych podporach (rys.1). Nieliniowe zachowanie wynikało stąd, że wydłużenia cięciwy odciągów po stronie nawietrznej zachodzą na skutek zmniejszającego się zwisu odciągów, a skrócenia cięciwy odciągów po stronie zawietrznej dają zwiększenie zwisu. Odciągami są wykonane z wiotkich lin i nie przenoszą momentów zginających od działania wiatru i ciężaru własnego, a więc zachowanie równowagi wymaga, żeby siły rozciągające wzdłuż cięciwy odciagu, mnożone przez zwis, dawały równoważący moment. Odkształcenia sprężyste odciągów bywały pomijane. Obliczenia masztu, a ściślej jego trzonu, według modelu belki ciąglej, polegały na rozwiązaniu równań równowagi w stanie nieodkształconym. Są to więc obliczenia teorii I rzędu. Sprawdzano przy tym możliwość wyboczenia przęsła pionowego trzonu. Długość wyboczeniową ustalano w sposób klasyczny tzn. przy założeniu stanu bezgiętnego, doskonale sprężystego. Współczynniki wyboczeniowe ϕ uwzględniały jednak wyboczenie sprężysto-plastyczne. W podstawowej normie obliczeń statycznych i projektowania konstrukcji stalowych PN-90/B-03200 są nazwane współczynnikami niestateczności ogólnej.

W polskiej normie projektowania stalowych wież i masztów PN-B-03204:2002, zastępującej poprzednią wersję PN-79/B-03204, zaleca się teorię II rzędu dla projektowania masztów normalnej i wysokiej klasy niezawodności. Teoria drugiego rzędu według ogólnego zrozumienia wymaga, żeby równania równowagi układać w stanie odkształconym konstrukcji. Zalecenie teorii II-go rzędu wprowadzono wzorem projektu normy „europejskiej” prENV 1993-3-1:1997. W eurokodzie tym nie ma jednak wskázówek, jakie odkształcenia należy brać w rachubę. W normie polskiej natomiast wskazano, że oprócz zwisu odciągów należy uwzględniać:

- a) przechył masztu ϕ ,
- b) ugięcia trzonu $u(z)$,
- c) skrócenia przęsła $\Delta(z)$.

Przez przechył ϕ rozumie się kąt obrotu osi trzonu. Oś trzonu łączy podstawę (zwykle przegubową) z węzłem trzonu na najwyższym poziomie przyłączenia odciągów. Węzły pośrednie odkształconego trzonu mogą odchyłać się od osi trzonu.

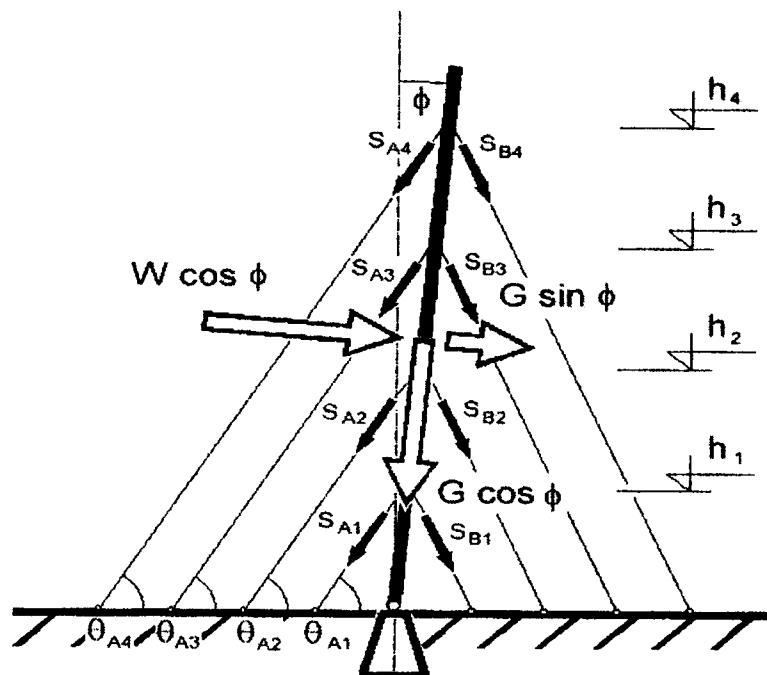


Rys. 1. Model obliczeniowy masztu wielopręsłowego według teorii I rzędu

W normie PN-90/B-03200 stosuje się nazwę „teoria II rzędu” do obliczeń ram wielokondygnacyjnych z uwzględnieniem tylko przechyłu ϕ (pozycja (a) w powyższym wyliczeniu), a ściślej – z uwzględnieniem poziomych sił zastępczych w obliczeniach I rzędu, tzn. w obliczeniach ramy nieodkształconej. Dla rozróżnienia można by stosować nazwę „ogólna” teoria II rzędu, gdy uwzględnia się co najmniej trzy rodzaje odkształcenia a), b), c), „szczególną” zaś teorią II rzędu, gdy uwzględnia się tylko warunek a). W referacie [4] określono 14 efektów II rzędu i podzielono je na ważne i mniej ważne. Teorię uwzględniającą te efekty proponowano [4] nazwać „ściśłą” teorią II rzędu. Nazwa „ogólna” lub „pełna” teoria II rzędu być może jest lepsza. Tabela 1 podaje zestawienie efektów II rzędu skorygowane na podstawie późniejszych badań [5]

Ogólna teoria II rzędu wymaga nowego modelu obliczeniowego masztu (rys.2). Jest nim przechylony słup znajdujący się w równowadze pod działaniem obciążeń zewnętrznych i oddziaływań odciągów. Obliczenia stateczności ogólnej w sensie wyboczenia przęsła są zbędne. Od stateczności ogólnej w sensie wyboczenia, kojarzonej z bifurkacją postaci równowagi, należy odróżnić stateczność położenia, czyli odporność na wywrócenie masztu wraz z fundamentem lub poślizg po podłożu. Przy sprawdzaniu stateczności położenia obowiązują inne zasady stosowania częściowych współczynników bezpieczeństwa. Współczynniki zwiększające stosuje się do sił czynnych (destabilizujących), a współczynniki zmniejszające stosuje się do sił biernych (stabilizujących).

Niestateczność miejscowa wpływa niekorzystnie na nośność globalną masztu. Przez niestateczność miejscową rozumie się wyboczenie pojedynczego pręta trzonu kratowego lub wybrzuszenie powłoki trzonu rurowego lecz bez wyboczenia wręg [2]. Nośność miejscową redukuje się stosując normowe współczynniki wyboczeniowe do prętów, względnie współczynniki niestateczności miejscowej powłoki.



Rys. 2. Model obliczeniowy masztu wieloprzęsłowego według teorii II rzędu

Sprawą zaskakującą, wynikającą z ostatnich prac [5], jest to, że poprzednio najważniejszy i jedyny efekt nieliniowy – zwis odciągów okazuje się mniej ważnym efektem w obliczeniach II rzędu.

Tabela 1. Efekty II rzędu w obliczeniach masztów wieloprzęsłowych

Efekty ważne	Efekty mniej ważne
Wydłużenia cięciwy odciągów nawietrznych od przechyłu ϕ kompensują odkształcenia sprężyste	Zmniejszający się zwis odciągu nawietrznego daje nieliniowe oddziaływanie na trzon
Odciąg zawietrzny „kładzie się na ziemi” i jego oddziaływanie na trzon ulega redukcji	Przechył ϕ trzonu wpływa na wielkość ciśnienia wiatru na odciągi i trzon masztu
Działają składowe obciążeń grawitacyjnych prostopadłe do osi trzonu	Zmniejszają się obciążenia grawitacyjne trzonu działające wzdłuż przechylonej osi
Dopełnia się moment $M(z)$ zginający trzonu wskutek działania siły $N(z)$ na ramieniu $u(z)$	Koryguje się siły wewnętrzne $N(z)$, $V(z)$ na skutek kąta ugięcia du/dz trzonu masztu
Cięciwa przęsła trzonu jest krótsza niż zakrzywiona linia ugięcia przęsła	Skrócenia sprężyste G_s/EA_s długości przęsła trzonu można kompensować przy wykonaniu
Kierunki sił rozciągających na końcach odciągów muszą być zgodne z kątami zwisu	Wydłużenie odciągów należy określać od stanu nienaprężonego, a nie od stanu montażowego
Imperfekcje (wygięcia przęsła lub wstępny przechył) wpływają na siły wewnętrzne trzonu	Podatność połączeń kołnierzowych na śruby zwykle zmniejsza sztywność EI_s trzonu

2. STATYKA ODCIĄGÓW MASZTU

Maszt utrzymywany jest w równowadze siłami przekazywanymi przez odciagi sprężyste przy rozciąganiu lecz wiotkie ze względu na zginanie i ściskanie. W ogólnej teorii drugiego rzędu w równaniach równowagi uwzględnia się:

- pionowe i poziome przemieszczenia punktu przyłączenia odciagu do trzonu i mimośród e_0 punktu przyłączenia względem osi trzonu przechylonej o kąt ϕ ,
- wytrzymałość obliczeniową R_g/γ_R odciagu nawietrznego w stanie granicznym nośności i reakcję poziomą u dołu odciagu zawietrznego przy granicznym przechyle,
- zasadę zachowania masy, a co za tym idzie – niezmienny ciężar G_g , niezależny od kąta przechyłu ϕ mimo zmian długości odciagu przechylonego masztu,
- ciśnienie wiatru W_g na cięciwę odciagu o długości L i nachyleniu θ , zmienionych na skutek przechyłu ϕ w stosunku do wartości L_0 i θ_0 w stanie montażowym.

Kąty zwisu odciagu φ_a i φ_b u dołu i u góry odciagu powinny pokrywać się z kierunkami sił rozciągających S_a i S_b na końcach odciagu. Wynika to z założenia wiotkości odciagu. Daje to dwa warunki brzegowe. Tradycyjnie stosowana parabola 2-go stopnia [1], [6] itd. nie spełnia warunków brzegowych. Jeśli dodać trzeci warunek – równowagi momentów w środkowym punkcie wiotkiego odciagu nawietrznego, to trzeba zastosować parabolę 4-go stopnia jako linię zwisu [5]. Wystarcza to w stanie granicznym, gdy zwisy są znikome, a w stanie montażowym są także nieduże.

$$v(\zeta) = \varphi_0 \zeta - (4\varphi_0 - \varphi_1 - 16v_0)\zeta^2 + (5\varphi_0 - 3\varphi_1 - 32v_0)\zeta^3 - (2\varphi_0 - 2\varphi_1 - 16v_0)\zeta^4 \quad (1)$$

gdzie:

$v_0 = (W_g \sin \theta + G_g \cos \theta) / 8S_g$ - bezwymiarowa strzałka zwisu odciagu,

$\varphi(0) = \left. \frac{dv(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} = \varphi_a$, $\varphi(1) = \left. \frac{dv(\zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} = -\varphi_b$ - kąty zwisu u dołu i u góry odciagu,

$$\varphi_a = \frac{(1 - \zeta_W) \cdot W_g \sin \theta + (1 - \zeta_G) \cdot G_g \cos \theta}{S_g + (1 - \zeta_G) \cdot G_g \sin \theta}, \quad \varphi_b = -\frac{\zeta_W \cdot W_g \sin \theta + \zeta_G \cdot G_g \cos \theta}{S_g - \zeta_G \cdot G_g \sin \theta},$$

ζ_W, ζ_G - bezwymiarowe współrzędne wypadkowych wiatru W_g i ciężaru odciagu G_g ,

S_g - siła rozciągająca w środku długości odciagu (indeks g jak guy = odciąg).

Siłę rozciągającą S_g w odciagu nawietrznym zaleca się obliczać [5], przyjmując długość L_0 liny prostej nienaprężonej jako wartość początkową, a nie długość l_0 cięciwy w stanie montażowym. Daje to większą dokładność;

$$S_g = EA_g \cdot \left(\frac{\kappa \cdot l_g}{L_g} - 1 - \epsilon T \right), \quad (2)$$

gdzie:

$$\kappa = \int_0^l \sqrt{1 + \varphi(\zeta)^2} d\zeta - \text{stosunek długości linii zwisu do długości cięciwy},$$

$$\varphi(\zeta) = \frac{dv(\zeta)}{d\zeta} - \text{kąty zwisu zależne od zmiennej bezwymiarowej } \zeta \text{ wzdłuż cięciwy.}$$

3. STATYKA TRZONU MASZTU

Przy przechyle trzonu ϕ pojawiają się składowe obciążeń grawitacyjnych $G_s \sin(\phi)$ prostopadłe do przechylonej osi trzonu (Rys.2), ważne dla statyki masztu. Moment od obciążenia wiatrem $W_s \cos \phi$ oraz siłami $G_s \sin \phi$ (indeks s jak shaft = trzon) musi się równać momentowi stabilizującemu od sił S_{b_i} przekazywanych na trzon z odcigów

$$\Sigma M_0 = \sum_{i=1}^n S_{b_i} h_i \cos(\theta_i + \varphi_{b_i}) - \int_0^{h_{\max}} w(z) \cdot z dz \cdot \cos \phi - G_s \zeta_s h_{\max} \sin \phi = 0, \quad (3)$$

gdzie:

$i = 1, 2, \dots, n$ - indeksy poziomów przyłączenia odcigów,

$w(z)$ [kN/m] - ciśnienie wiatru zależne od wysokości z nad terenem,

ζ_s - bezwymiarowa wysokość działania wypadkowej ciężaru trzonu,

h_{\max} [m] - długość całkowita trzonu skróconego sprężycie i od zmian temperatury.

Dla uproszczenia zapisu (3) założono, że podstawa masztu znajduje się na poziomie terenu i nie uwidoczniono działania momentów skupionych w węzłach trzonu wynikających z mimośrodowo przyłączenia odcigów.

Efekty ciśnienia wiatru ciągłego $w(z)$ uzupełnia się efektem miarodajnym obciążeń odcinkowych ΔS określonym w PN-B-03204, Zał.A. Siłę ΔS stosuje się zamiast współczynnika porywów wiatru β określonego w normie PN-77/B-02011, p 5.2.

Globalna suma sił zewnętrznych jest zbilansowana oddziaływaniami, poziomym i pionowym, u przegubowej podstawy trzonu. Wymaganie dawniejszych źródeł [1], [6] itd., żeby reakcje w węzłach powyżej podstawy, traktowanych jako podpory hipotetycznej belki ciągłej, równały się siłom zewnętrznym przypadającym na ten węzeł jest niewystarczające. Są to założenia ułatwiające rozwiązanie, niejednoznaczne co do określenia siły zewnętrznej przypadającej na węzeł i niekoniecznie spełniające warunek równowagi globalnej. Siły prostopadłe do trzonu w węzłach masztu są bilansowane skokami siły poprzecznej ΔV_i .

Wymagania użyteczności masztów polegają m.in. na tym, że przemieszczenie wierzchołka masztu nie powinno przekraczać 1/100 wysokości, a przemieszczenia węzłów masztu nie powinny być większe niż 1/100 odległości masztu od podstawy. W stanach granicznych nośności przemieszczenia mogą być większe o 30...40 %, ze względu na zastosowanie współczynników obciążenia. Przechyliły się na tyle małe, że w obliczeniach wstępnych można dopuścić linearyzację funkcji trygonometrycznych:

$$\sin \phi \approx \phi, \quad \cos \phi \approx 1. \quad (4)$$

4. AMPLIFIKOWANE MOMENTY ZASTĘPCZE

Moment zastępczy M_{eff} w przekroju trzonu kratowego uwzględnia interakcję momentu zginającego M z siłą podłużną N . W trzonach powłokowych zachodzi ponadto interakcja z siłą poprzeczną V [2]. Moment M_{eff} nie może co najwyżej osiągnąć obliczeniową nośność przekroju trzonu M_R na czyste zginanie. Równanie interakcji dla trzonu kratowego jest liniowe

$$M_{\text{eff}} = M + r_N \cdot N \leq M_R \quad (5)$$

gdzie:

$r_N = M_R / N_R$, - rdzeń przekroju;

np. dla trójkątnego przekroju i kierunku wiatru wzdłuż przekątnej $r_N = b\sqrt{3}/6$.

Moment zginający trzon masztu, M_o , obliczony względem przechylonej osi masztu dopełnia się (amplifikuje) dodając moment sił podłużnych ściskających N_o na ramieniu równym ugięciu trzonu $u(z)$. Korektę siły podłużnej N i poprzecznej V na skutek przechyłu pomijamy tu jako mniej ważną.

$$M(z) \approx |M_o| + N_o \cdot u(z) \quad (6)$$

Amplifikowany moment II rzędu osiąga nośność M_R przekroju poprzecznego trzonu w stanie granicznym nośności, jeśli wcześniej nie nastąpi przekroczenie wytrzymałości obliczeniowej odciągu. Przy odpowiedniej regulacji naciągów wstępnych może zostać osiągnięta nośność graniczna M_R jednocześnie w dwóch lub trzech przekrojach poprzecznych. Zachodzi wtedy niestateczność ogólna masztu w sensie ruchliwości trzonu. Stan ten mógłby być osiągnięty bez regulacji naciągów wstępnych dzięki plastycznym własnościom stali i redystrybucji momentów zastępczych. Jednak norma PN-B/03204:2002, p.4.3.1, nakazując obliczenia w stanie sprężystym, nie dopuszcza plastycznej redystrybucji momentów w masztach. W wyjątkowych sytuacjach obliczeniowych można by jednak uwzględnić redystrybucję momentów według zasad analizy plastycznej.

Jeśli uwzględnia się amplifikowane momenty zastępcze przy nieliniowych skróceniach przęsła na skutek różnicy między długością linii ugięcia i długością cięciwy przęsła, to nie trzeba sprawdzać masztu na utratę stateczności ogólnej w sensie wyboczenia przęsła. Dotychczas określano długość wyboczeniową przęsła arbitralnie (PN-79/B-03204, p.4.5.1) albo na podstawie analizy bifurkacji czyli stanu rozdzielenia równowagi trzonu wieloprzęsłowego [1] przy daleko idących uproszczeniach: że nie ma sił wywołujących zginanie i że trzon pozostaje doskonale sprężysty do końca. W teorii II rzędu nie są potrzebne fikcyjne założenia. Ponadto ściśle rzecz biorąc siła krytyczna w sensie eulerowskim nie istnieje dla układu niekonserwatywnego i nie może być asymptotą nośności trzonu dla nieograniczonych ugięć przy mimośrodowym ściskaniu. Przypadek jest niekonserwatywny [3] dlatego, że siły przekazywane z odciągów zmieniają swój kierunek w chwili wyboczenia, jeśli wyodrębnimy trzon dla celów sprawdzenia stateczności.

Według teorii II rzędu amplifikowane ugięcia sprężyste rosną nieliniowo. Ugięcia przęsła u_{max} wg PN-B-03204:2002, p.5.1.3 są ograniczone w stanie granicznym użyteczności do $1/250$ rozpiętości przęsła. W punkcie 4.3.5 norma postanawia, żeby w analizie masztów uwzględniać imperfekcje trzonu. Wpływ ten można uwzględnić bezpośrednio, stosując w modelu obliczeniowym zastępczą imperfekcję geometryczną

w postaci naprzemiennego wygięcia przesł o strzałce $u_0 = h_1/250$ większej od tolerowanej wartości $h_1/750$ (PN-B-03204:2002, tab.3). Oczywiście od obliczonego ugięcia przesła u_{max} odejmuje się ugięcie wstępne u_0 i dopiero różnicę porównuje się z wartością graniczną u_{lim} . Zamiast wygięcia wstępnego trzonu u_0 można by przyjąć jako imperfekcję zastępczą, wstępny przechył ϕ_0 o wartości większej od tolerowanego odchylenia od pionu, $\phi_0 > h/1000$, albo nierówne naciągi wstępne odciałów po obu stronach masztu.

Maszty zakwalifikowane do niskiej klasy niezawodności można projektować według teorii I rzędu wg PN-B-03204:2002, p.4.3.4 i sprawdzać przesła na wyboczenie. Imperfekcję trzonu uwzględnia się wtedy pośrednio, a mianowicie stosując formułę współczynnika wyboczeniowego $\varphi(\lambda)$ zawierającą odpowiedni parametr imperfekcji. Norma PN/90/B-03200, tab.11 wprowadza uogólniony parametr imperfekcji n , interpretowany [2] jako odwrotność weibullowskiego współczynnika zmienności losowej siły krytycznej.

5. OPTIMALIZACJA NACIĄGÓW WSTĘPNYCH

Gdy sprawdza się niezawodność konstrukcji już zwymiarowanego masztu jedno-przesłowego, to nie ma żadnych stopni swobody w obliczeniach. Równanie równowagi momentów (3) wystarcza do obliczenia sił przekazywanych z odciałów na trzon masztu. Nie ma także żadnych stopni swobody w obliczeniach masztu wieloprzesłowego, gdy z góry ustalone zostały siły naciągu wstępnego S_{oi} . Naciągi wstępne zaleca się przyjmować w granicach od 8 % do 15 % wytrzymałości liny S_R (PN-B-03204:2002, p.5.2.2). Według normy amerykańskiej ANSI/EIA/TIA-222-E zachowanie dolnej granicy zapobiega niestateczności dynamicznej j lin na wietrze (trzepotaniu, galopowaniu), a zachowanie górnej granicy zapobiega drganiom eolskim. Jeśli jednak pozostawi się wielkości naciągów wstępnych do wyboru projektanta, to ma on $n-1$ stopni swobody w obliczeniach. Ma wtedy możliwość optymalizacji naciągów wstępnych. Funkcją celu może być np. osiągnięcie stanu granicznego we więcej niż jednym przekroju poprzecznym trzonu. Funkcją celu Wasiutyńskiego, proponowaną dla masztów w referacie [5] jest minimum energii sprężystej układu. Wzór na energię sprężystą z pracy [5] skorygowany, ale nadal uproszczony, bo z pominięciem sił podłużnych trzonu $N(z)$ i oddziaływań odciałów zawietrznych, jest następujący

$$\Phi_A = \sum_i^n \left\{ \int_{h_i}^{h_{max}} \left[\sum_{j=1}^n \eta_{ij} S_{bj} \cos(\theta_j + \varphi_{b_i}) \cdot (h_j - z) - M_W(z) - M_G(z) \right]^2 dz \right\} \quad (7)$$

gdzie:

$\eta_{ij} = 1$ gdy $i < j$, $\eta_{ij} = 0$ gdy $i \geq j$ – funkcja Heavyside'a,

$$M_W(z) = \int_z^{h_{max}} w_s(z) \sin \theta_i \cdot (h_{max} - z) dz, \quad M_G(z) \approx g_s \phi \cdot \frac{(h_{max} - z)^2}{2}$$

Warunek konieczny dla minimum Φ_A , przy zastosowaniu mnożnika Lagrange'a λ dla warunku pobocznego (3), wraz z tym warunkiem daje układ $n+1$ równań liniowych, wystarczających do wyznaczenia sił S_{bi} przekazywanych przez odciały na trzon i wyrugowania mnożnika λ ,

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial S_{b_i}} + \lambda \cdot \frac{\partial \Sigma M_0}{\partial S_{b_i}} = 0, \quad \Sigma M_0 = 0, \quad i=1, 2 \dots n. \quad (8)$$

6. UWAGI KOŃCOWE

Według ogólnej teorii II rzędu spełniać trzeba równania równowagi m.in. w miejscu połączenia odciągów z trzonem. Daje to różnice w stosunku do wartości obliczanych według teorii I rzędu i paraboli 2-go stopnia jako linii zwisu odciągów. W stanie granicznym nośności zachodzi zwykle prawie całkowite poluzowanie naprężeń w odciągach zawietrznych, co w obliczeniach I-go rzędu podobno nigdy się nie zdarzało. Wyboczenia przęsł masztu nie trzeba już sprawdzać.

Postulat obliczeń statycznych według ogólnej teorii II rzędu podany jest hasłowo w Eurokodzie prENV 1993-3-1:1997, dokładniej zaś określony jest w normie polskiej PN-B-03204:2002. Przedstawione zasady obliczeń określają nową statykę masztów, niestosowaną i na razie niedocenianą przez specjalistów. Sformułowanie nowych algorytmów i przygotowanie procedur obliczeń komputerowych jest wyzwaniem nie do końca jeszcze spełnionym.

LITERATURA

- [1] Grochowski I., Maszty radiowe i telewizyjne, Poradnik Projektanta Konstrukcji Metalowych, Tom 2, Arkady, Warszawa 1982.
- [2] Murzewski J., Stateczność ogólna i miejscowa masztu powłokowego, IX Sympozjum Stateczności Konstrukcji - Zakopane, Łódź 2000, str.211-218.
- [3] Murzewski J., Coupled instability of guyed masts, 3-rd Intern. Conference on Coupled Instabilities in Metal Structures-Lisbon 2000, Imperial College, s.419-426.
- [4] Murzewski J., Projektowanie masztów wieloprzęsłowych według ścisłej teorii drugiego rzędu, X Konf. „Konstrukcje Metalowe”, Gdańsk 2001, t.3, s.63-70.
- [5] Murzewski J., Wpływ zwisu odciągów na zachowanie masztów (przygotowane do druku).
- [6] Strieleckij N.S. et al., Miałliczeskije konstrukcii, 3., Wyd., Strojizdat, Moskwa 1961, (tłum. polskie 1-go wyd.: Arkady, Warszawa 1957).

INSTABILITY AND SECOND ORDER EFFECTS OF STEEL MASTS

An out-of plumb hinged column is introduced as design model for the II order theory of a multi-span guyed mast instead of the vertical continuous beam on nonlinearly elastic supports. Very important second-order effects are now: sway of the mast and loosening of its leeward guys. Equilibrium of the mast is verified when wind action is supplemented by gravity load components perpendicular to inclined axis of the mast. The shaft is stabilized by forces induced from the guys. Amplified bending moments allow to abandon buckling verification of the mast. Freedom degrees inherent to global equilibrium equations of multi-span masts give opportunity for optimisation of prestretching forces of the guys.

A NONASYMPTOTIC MODEL FOR THE STABILITY ANALYSIS OF STIFFENED PLATES

W. NAGÓRKO

Department of Civil Engineering and Geodesy, Warsaw Agricultural University,
ul. Nowoursynowska 159, 02-787 Warszawa, Poland

CZ. WOŹNIAK

Institute of Mathematics and Informatics, Technological University of Częstochowa,
ul. Dąbrowskiego 73, 42-200 Częstochowa, Poland

The subject of considerations is a thin elastic plate reinforced by a large number of periodically spaced elastic stiffeners. An example of this structure is indicated in Figure 1. The purpose of this contribution is to propose a certain averaged 2D – model of the stiffened plate under consideration. This purpose can be attained by applying the known asymptotic homogenization approach, [1, 2]. However, the homogenized 2D – models, represented by the Kirchhoff's plate equations with constant (effective) coefficients, cannot be applied to the analysis of problems in which the effect of a period length on the dynamic plate behaviour plays an important role. In order to remove this drawback, in this contribution we apply an alternative nonasymptotic approach to the modelling of periodic plates which is based on the tolerance averaging technique. All details concerning this technique as well as the full list of references can be found in [3]. The main attention is given to the formulation of 2D – models for the stability analysis of stiffened plates.

1. SETTING OF THE MODELLING PROBLEM

It is assumed that the plate under consideration is thin and can be described in the framework of the Kirchhoff's plate theory. Moreover, torsional rigidity of stiffeners is neglected and their deflection is assumed to be governed by the Euler – Bernoulli beam theory equation. We shall also neglect the rotational inertia effect on a dynamic plate behaviour. All considerations will be carried out in the framework of the linearized theory.

By $\Pi = (0, L_1) \times (0, L_2)$ we denote a region on the Ox_1x_2 -plane occupied by the plate midplane in its undeformed configuration. The axes of undeformed stiffeners are situated on the parametric lines $x_1 = nl$, and $x_1 = nl + l/2$ where $n = 1, 2, \dots, M$, $L_1 = (M + 1)l$ and Π is the symmetry plane of the structure, cf. Figure 1. The number M of stiffeners is assumed to be large, and conditions $l \ll L_1$ and $a_1, a_2 \ll l$, where a_1, a_2 and l are shown in Figure 1, have to be satisfied in every problem under consideration. It is assumed that both the plate and stiffeners are homogeneous and isotropic with constant bending stiffnesses D_0 and B_1, B_2 , respectively. At the same time ρ_0 and ρ_1, ρ_2 stand for the constant mass densities of the plate and stiffeners, respectively. The plate is subjected exclusively to the in – plane initial stresses N_{11} ,

N_{22} , N_{12} , where N_{22} also represents an initial stress in stiffeners. The mutual interactions between the plate and two families of stiffeners are assumed to be realised by a system of transversal internal forces $r_1 = r_1(nl, x_2, t)$, $r_2 = r_2(nl + \frac{l}{2}, x_2, t)$, $n \in \{1, 2, \dots, M\}$, $x_2 \in (0, L_2)$.

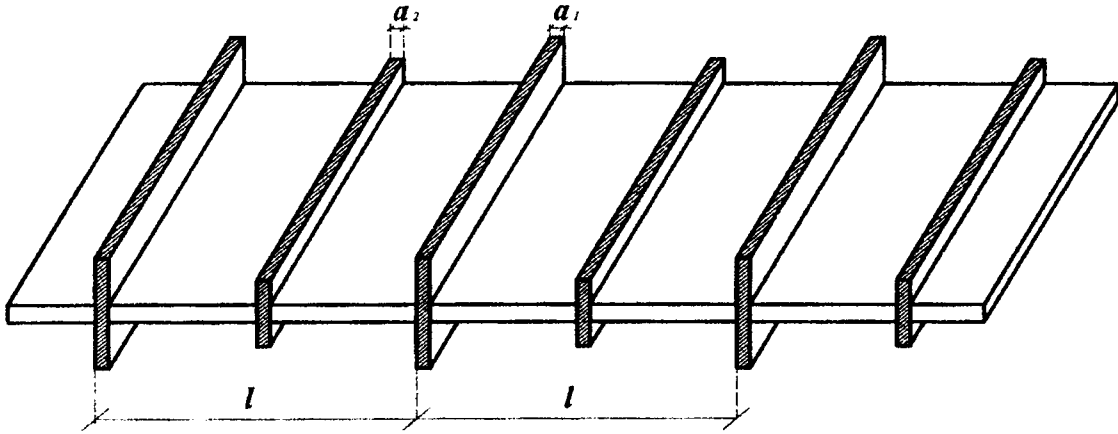


Figure 1. A fragment of the plate with two families of periodically spaced stiffeners

Let $w = w(x_1, x_2, t)$, $(x_1, x_2) \in \Pi$, be the deflection of the plate midplane at time t which for $x_1 = nl$, and $x_1 = nl + l/2$, $n \in \{1, 2, \dots, M\}$, coincides with the deflection of the stiffener axes. Under aforementioned denotations the well known equation of the Euler – Bernoulli beam theory yields

$$B_1 w_{,2222}(nl, x_2, t) + \rho_1 \ddot{w}(nl, x_2, t) + r_1(nl, x_2, t) = 0$$

$$B_2 w_{,2222}(nl + \frac{l}{2}, x_2, t) + \rho_2 \ddot{w}(nl + \frac{l}{2}, x_2, t) + r_2(nl + \frac{l}{2}, x_2, t) = 0$$

where $x_2 \in (0, L_2)$ and $n \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Let us denote $x_1^\alpha = \begin{cases} nl, & \text{if } \alpha = 1, \\ nl + \frac{l}{2}, & \text{if } \alpha = 2, \end{cases} n = 1, \dots, M$, $B_\alpha(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_1 \neq x_1^\alpha, \\ B_\alpha, & \text{if } x_1 = x_1^\alpha, \end{cases}$

$$R_\alpha(x_1, x_2, t) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_1 \neq x_1^\alpha, \\ r_\alpha(x_1, x_2, t), & \text{if } x_1 = x_1^\alpha, \end{cases} \quad x_2 \in (0, L_2)$$

Introducing the Dirac distributions $\delta_\alpha(x_1) = \begin{cases} 0, & \text{if } x_1 \neq x_1^\alpha, \\ \infty, & \text{if } x_1 = x_1^\alpha \end{cases}$ and setting

$\tilde{f}_\alpha(x_1) = f(x_1)\delta_\alpha(x_1)$, $\alpha = 1, 2$, $x_1 \in (0, L_1)$, for an arbitrary integrable function $f(\cdot)$ (which can also depend on x_2 and t), the above equations take the form

$$\tilde{B}_\alpha(x_1)w_{,2222}(x_1, x_2, t) + \tilde{\rho}_\alpha(x_1)\ddot{w}(x_1, x_2, t) + \tilde{R}_\alpha(x_1, x_2, t) = 0 \quad (1)$$

Eq. (1) holds for every $(x_1, x_2) \in \Pi$, every $n \in \{1, 2, \dots, M\}$ and every time t .

At the same time the Kirchhoff's plate equation related to the deflection of stiffeners takes the well known form

$$\begin{aligned} D_0[w_{,1111}(x_1, x_2, t) + 2w_{,1122}(x_1, x_2, t) + w_{,2222}(x_1, x_2, t)] + N_{11}w_{,11}(x_1, x_2, t) + \\ + 2N_{12}w_{,12}(x_1, x_2, t) + N_{22}w_{,22}(x_1, x_2, t) + \rho_0\ddot{w}(x_1, x_2, t) = \\ = \tilde{R}_1(x_1, x_2, t) + \tilde{R}_2(x_1, x_2, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Introducing functions $D(x_1) = D_0 + \tilde{B}_1(x_1) + \tilde{B}_2(x_1)$, $\rho(x_1) = \rho_0 + \tilde{\rho}_1(x_1) + \tilde{\rho}_2(x_1)$, and eliminating from (1), (2) interactions \tilde{R}_α , we arrive at the equation

$$\begin{aligned} D_0w_{,1111}(x_1, x_2, t) + 2D_0w_{,1122}(x_1, x_2, t) + D(x_1)w_{,2222}(x_1, x_2, t) + N_{11}w_{,11}(x_1, x_2, t) \\ + 2N_{12}w_{,12}(x_1, x_2, t) + N_{22}w_{,22}(x_1, x_2, t) + \rho(x_1)\ddot{w}(x_1, x_2, t) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

which is assumed to hold for every $(x_1, x_2) \in \Pi$ and every time t . Equation (3) describes the behaviour of the periodically stiffened plate under consideration provided that the torsional rigidity of stiffeners and rotational inertia effect can be neglected. The characteristic feature of Eq. (3) is the highly oscillating non-continuous form of the functional coefficients $D(x_1), \rho(x_1)$ which for $l/L_1 \ll 1$ (i.e. for a large number N of stiffeners) makes finding solutions to BVP for this equation very complicated. Thus, the problem arises how to obtain an approximate model of the stiffened plate under consideration in which instead of Eq. (3) we shall deal with a certain system of equations with constant coefficients. In order to solve this modelling problem we shall apply to Eq. (3) the tolerance averaging technique, [3].

At the end of this section we have to emphasize that Eq. (3) as well as all subsequent plate equations can be generalized to the case in which we deal with more than two families of stiffeners; also the passage to plates with one family of stiffeners is obvious.

2. MODELLING APPROACH

Taking into account the concepts introduced in [3], by $SV(T)$, $PL(T)$ we denote

the classes of slowly-varying and periodic-like functions respectively, in a certain tolerance system T . By $\langle f \rangle(x)$ we denote a mean value of a function $f(x)$, $x \in (0, L_1)$ over a cell $\Delta(x) = (x - \frac{l}{2}, x + \frac{l}{2})$, $x \in L_\Delta = (\frac{l}{2}, L_1 - \frac{l}{2})$.

The basic heuristic assumption is that the plate deflection can be decomposed to the form

$$w(\cdot, x_2, t) = w^0(\cdot, x_2, t) + u(\cdot, x_2, t) \quad (4)$$

where $\langle u \rangle = 0$ and where $w^0(\cdot, x_2, t) \in SV(T)$ and $u(\cdot, x_2, t) \in PL(T)$ are referred to as the averaged and fluctuation part of the plate deflection $w(\cdot, x_2, t)$, respectively.

Let us restrict the domain $\langle 0, L_1 \rangle$ of a function $w(\cdot, x_2, t)$ in (3) to $\Delta(x)$ for some $x \in L_\Delta$. The tolerance averaging approach to Eq. (3) will be realised in four steps.

¹ We formulate the variational equation for the periodic approximation $u_x(\cdot, x_2, t)$, $x \in L_\Delta$, of fluctuations $u(\cdot, x_2, t)$ in $\Delta(x)$. To this end we substitute $w(\cdot, x_2, t) \cong w^0(\cdot, x_2, t) + u_x(\cdot, x_2, t)$ into (3) and multiply both sides of (3) by an l -periodic test function $v(x)$ satisfying condition $\langle v \rangle = 0$. Averaging the resulting equation over $\Delta(x)$, after simple manipulations we get

$$\begin{aligned} & D_0 \langle u_{x,11} v_{,11} \rangle(x_1, x_2, t) + 2D_0 \langle u_{x,22} v_{,11} \rangle(x_1, x_2, t) + \langle Du_{x,2222} v \rangle(x_1, x_2, t) + \\ & + N_{11} \langle u_{x,11} v \rangle(x_1, x_2, t) + 2N_{12} \langle u_{x,12} v \rangle(x_1, x_2, t) + N_{22} \langle u_{x,22} v \rangle(x_1, x_2, t) + \\ & + \langle Dv \rangle(x_1, x_2, t) w^0_{,2222}(x_1, x_2, t) + \\ & + \langle \rho v \rangle(x_1, x_2, t) \ddot{w}^0(x_1, x_2, t) + \langle \rho \ddot{u}_x v \rangle(x_1, x_2, t) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

for every $x \in L_\Delta$, $x_2 \in \langle 0, L_2 \rangle$ and every time t .

² We look for the approximate solution $u_x(y, x_2, t)$, $y \in \Delta(x)$ to (5) in the form (here and in the subsequent analysis superscripts A, B run over $1, \dots, N$ and the summation convention holds)

$$u_x(y, x_2, t) = h^A(y) w^A(x, x_2, t), \quad (6)$$

where $w^A(\cdot, x_2, t)$ are new unknown functions which will be referred to as fluctuation variables and $h^A(y)$ are periodic mode-shape functions representing the periodic free vibrations modes of the stiffened plate under consideration. Substituting the right-hand

side of (6) into (5) and setting $\nu = h^B$ we arrive at the system of N differential equations for N fluctuation variables w^A :

$$\begin{aligned}
 & D_0 \langle h^A,_{11} h^B,_{11} \rangle w^B(x_1, x_2, t) - 2D_0 \langle h^A,_{,1} h^B,_{,1} \rangle w^B,_{22}(x_1, x_2, t) + \\
 & \langle Dh^A h^B \rangle w^B,_{2222}(x_1, x_2, t) - N_{11} \langle h^A,_{,1} h^B,_{,1} \rangle w^B(x_1, x_2, t) + \quad (7) \\
 & + 2N_{12} \langle h^A h^B,_{,1} \rangle w^B,_{,2}(x_1, x_2, t) + N_{22} \langle h^A h^B \rangle w^B,_{22}(x_1, x_2, t) + \\
 & + \langle \rho h^A \rangle \ddot{w}^0(x_1, x_2, t) + \langle \rho h^A h^B \rangle \ddot{w}^B(x_1, x_2, t) + \langle Dh^A \rangle w^0,_{2222}(x_1, x_2, t) = 0
 \end{aligned}$$

3⁰ From the decomposition (4) and (7), by means of the approximation (6), we conclude that $w^A(\cdot, x_2, t) \in SV(T)$ and we arrive at the following approximation formula for the plate deflection

$$w(x_1, x_2, t) \cong w^0(x_1, x_2, t) + h^A(x_1)w^A(x_1, x_2, t) \quad (8)$$

4⁰ We substitute the right-hand sides of (8) into (3) and average this result over $\Delta(x)$. After simple manipulations we obtain

$$\begin{aligned}
 & D_0 w^0,_{1111}(x_1, x_2, t) + 2D_0 w^0,_{1122}(x_1, x_2, t) + \langle D \rangle w^0,_{2222}(x_1, x_2, t) + \\
 & + \langle Dh^A \rangle w^A,_{2222}(x_1, x_2, t) + N_{11} w^0,_{11}(x_1, x_2, t) + 2N_{12} w^0,_{12}(x_1, x_2, t) + \quad (9) \\
 & + N_{22} w^0,_{22}(x_1, x_2, t) + \langle \rho \rangle \ddot{w}^0(x_1, x_2, t) + \langle \rho h^A \rangle \ddot{w}^A(x_1, x_2, t) = 0
 \end{aligned}$$

It can be seen that the above modelling approach leads from equation (3) for the total plate deflection $w(\cdot)$, which has highly oscillating coefficients, to the system of equations (7), (9) for the averaged deflection $w^0(\cdot)$ and N fluctuation variables $w^A(\cdot)$. Equations (7), (9) have constant coefficients and hence constitute the proper mathematical tool for the analysis of special problems. It has to be emphasized that solutions to the boundary – value problems for the above equations have a physical sense only if $w^0(\cdot, x_2, t)$, $w^A(\cdot, x_2, t)$ are slowly varying functions, i.e., if conditions

$$w^0(\cdot, x_2, t) \in SV(T) \quad W^A(\cdot, x_2, t) \in SV(T) \quad (10)$$

hold for every $x_2 \in (0, L_2)$ and every time t .

Summarizing the obtained results we can state that the derived nonasymptotic model of a stiffened plate under consideration is governed by the system of equations (7), (9)

for the basis unknown $w^0(\cdot)$ and $w^A(\cdot)$, by the physical reliability conditions (10) and by the approximation formula (8) for the total plate deflections. It can be observed that the constant coefficients in (7), (9) which depend on $h^A(\cdot)$ describe the effect of the microstructure size l on the averaged behaviour of the stiffened plate. It follows that the derived nonasymptotic model, in contrast to the homogenized asymptotic model, [2], can be used to the analysis of phenomena related to the existence of what can be called the microstructure length-scale effect. A simple example is the occurrence of higher order free vibration frequencies caused by a periodic structure of the stiffened plate.

3. CONCLUDING REMARKS

In this contribution it was shown that the behaviour of thin elastic plates reinforced by a system of periodically spaced parallel stiffeners can be investigated on the basis of the averaged equations (equations with constant coefficients) derived by the tolerance averaging of the "exact" plate equation (equation with functional highly oscillating non-continuous coefficients). The general form (7), (9) of the obtained averaging plate equations depends on the form of the postulated *a priori* periodic mode-shape functions h^A which have to be derived as solution to the periodic eigenvalue problem describing free periodic vibrations of the stiffened plate. It can be shown that in contrast to the known homogenized (asymptotic) model of a stiffened plate, the proposed nonasymptotic model describes the effect of the period length on the overall behaviour of the plate. Moreover, using the derived model equations and bearing in mind formula (8), we can satisfy the boundary conditions for $x_1 = 0$ and $x_2 = L_2$ not only for the averaged plate deflections but also for displacement fluctuations. At the same time the applied nonasymptotic modelling approach makes it possible to determine *a posteriori* an accuracy of the obtained solutions to special problem by means of conditions (10). Examples of applications of the model equations (7), (9) to the selected stability problems for periodically stiffened plates will be given during the lecture on the forthcoming symposium.

REFERENCES

- [1] Kohn R. V., Vogelius M., A new model for thin plates with rapidly varying thickness, *Int. J. Solids Structures*, 20 (1984), pp. 333-350.
- [2] Kolpakov A. G., Homogenized model for the plate periodic structure with initial stresses, *Int. J. Engng. Sci.* 38 (2000), pp. 333-350.
- [3] Woźniak Cz., Wierzbicki E., *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids*, Wyd. Politechniki Częstochowskiej, 2000, Częstochowa.

ZAGADNIENIE UTRATY STATECZNOŚCI POWŁOK DWUWARSTWOWYCH

P.PACZOS, J.ZIELNICA

Instytut Mechaniki Stosowanej Politechniki Poznańskiej

Piotrowo 3, 60-965 Poznań

Tematem pracy jest wyprowadzenie równań stateczności, rozwiązania ich w sposób analityczno-numeryczny oraz zbadanie wpływu siły wzdłużnej i ciśnienia poprzecznego na wartość obciążeń krytycznych dla powłoki dwuwarstwowej. Z uwagi na skomplikowaną budowę równań podstawowych i znaczne trudności matematyczne w analizie stateczności sprężystej wykorzystano związki fizyczne zgodne z uogólnionym prawem Hooke'a, a w analizie sprężysto – plastycznej wykorzystano przyrostową teorię plastycznego płynięcia Prandtla – Reussa.

1. WPROWADZENIE

1.1. WSTĘP

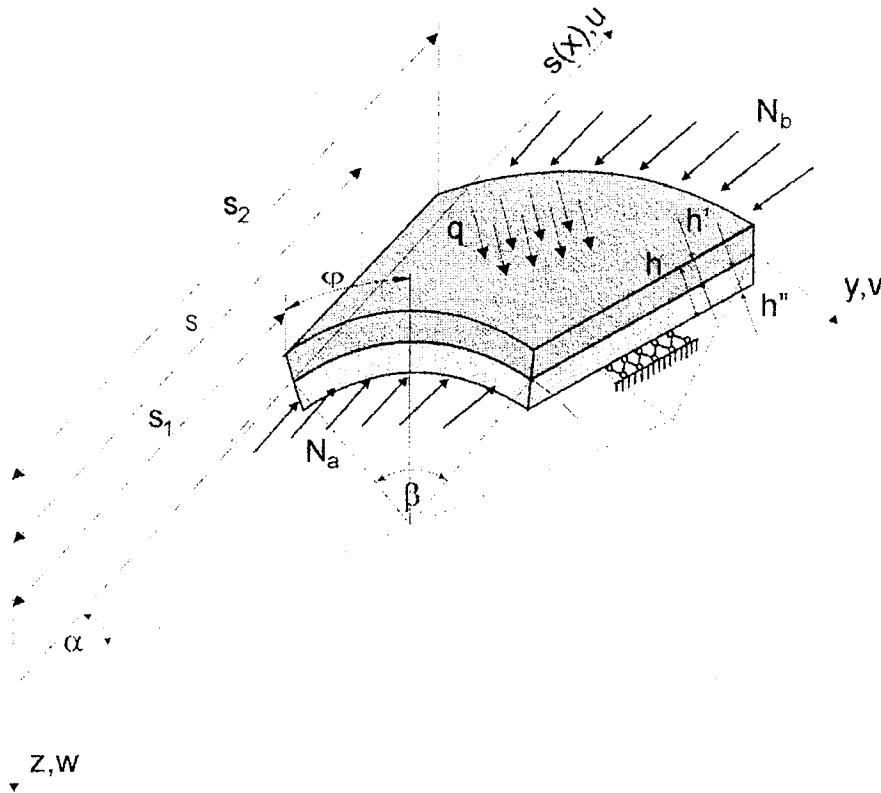
Zagadnienia stateczności i wytrzymałości warstwowych konstrukcji powłokowych stanowią obszerny przedmiot badań teoretycznych i doświadczalnych szczególnie w ostatnich latach. Z prac tematycznie związanych z przedstawionym problemem można wymienić [1,2]. Konstrukcje cienkościenne w tym także powłoki dwuwarstwowe charakteryzują się możliwością przenoszenia stosunkowo dużych obciążeń, posiadają własności termoizolacyjne, są to konstrukcje lekkie, itp. Wykorzystując opis energetyczny i zasadę prac przygotowanych otrzymano równanie określające zachowanie się powłoki w stanie odkształconym [3]. Po wprowadzeniu i dobraniu postaci funkcji aproksymujących oraz zastosowaniu metody energetycznej Ritza, otrzymano w rozważanym przypadku układ trzech nieliniowych równań algebraicznych. Rozwiązując ten układ uzyskano poszukiwane rozwiązanie w postaci równania stateczności dla powłoki dwuwarstwowej. Równanie to jest ważne zarówno dla stanów sprężystych, sprężysto-plastycznych jak i plastycznych. W celu wyznaczenia wartości liczbowych opracowano specjalną numeryczną procedurę iteracyjną napisaną w języku FORTRAN 90. Pomimo złożonego problemu i pracochłonnych obliczeń, dzięki opracowanej metodzie uzyskane wyniki są zwarte i łatwe do wykorzystania w praktyce inżynierskiej.

1.2. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

W pracy przyjmuje się następujące założenia:

- Rozważamy otwartą powłokę dwuwarstwową w kształcie wycinka stożka, swobodnie podpartą na brzegach i poddaną działaniu sił podłużnych i poprzecznych (rys.1).
- Obowiązują hipotezy Kirchhoffa-Love'a.

- Powierzchnię połączenia obydwu warstw przyjęto jako powierzchnię podstawową powłoki.
- Obydwie warstwy wykonane są z materiału izotropowego, ściśliwego w zakresie sprężystym.
- Przyjmujemy dowolną, liniową lub nieliniową, charakterystykę wzmocnienia materiału, różną dla obu warstw.
- Przyjmujemy związki fizyczne teorii plastycznego płynięcia Prandtla-Reussa.
- Rozważamy aktywny proces obciążenia materiału zgodny z koncepcją Shanley'a.



Rys. 1. Rozważana dwuwarstwowa powłoka stożkowa

Siły wewnętrzne membranowego podstawowego stanu naprężeń w powłoce określają zależności

$$\begin{aligned}
 N_S = h\sigma_S &= \frac{1}{2}qstg\alpha \left[\left(\frac{s_1}{s} \right)^2 - 1 \right] - N_a \frac{s_1}{s}, \quad \text{gdzie } h = h' + h'' \\
 N_\varphi &= h\sigma_\varphi = -qstg\alpha \\
 T_S &= T_\varphi = 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Wprowadzamy parametr κ równy stosunkowi obciążenia podłużnego do poprzecznego.

$$\kappa = \frac{N_a}{qs_1} \tag{2}$$

2. OPIS MATEMATYCZNY

Opierając się na zasadzie prac przygotowanych, która jest szczegółowo opisana w pracy [3] otrzymujemy równanie określające zachowanie się powłoki w stanie odkształconym:

$$\delta U_p = \delta(W + L_z) = 0 \quad (3)$$

gdzie odpowiednio W jest energią zgromadzoną w powłoce w stanie odkształconym i wyrażoną przez składowe stanu odkształcenia, L_z jest pracą sił zewnętrznych. Równanie (3) jest poprawne zarówno dla stanów przedkrytycznych, jak i pozakrytycznych. Po dokonaniu całkowania po całej powierzchni powłoki i uwzględnieniu pracy sił zewnętrznych

$$L = -q \sin \alpha \iint_A w s d s d \varphi - \frac{1}{2} N_a s_1 \sin \alpha \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 d s d \varphi \quad (5)$$

otrzymujemy wyrażenie określające energię potencjalną powłoki:

$$U_p = W + L_z = \frac{1}{2} \int_{s_1=0}^{s_2} \int_0^\beta s \cdot \sin \alpha \left[C_{11} \varepsilon_1^2 + 2C_{12} \varepsilon_1 \varepsilon_2 + C_{22} \varepsilon_2^2 + C_{33} \gamma_{12}^2 - \right. \\ \left. - C_{44} \kappa_1^2 - 2C_{45} \kappa_1 \kappa_2 - C_{55} \kappa_2^2 + 2C_{66} \delta \kappa_{12}^2 \right] d s d \varphi - \\ - q \sin \alpha \int_{s_1=0}^{s_2} \int_0^\beta w \cdot s \cdot d s d \varphi - \frac{1}{2} N_a s_1 \sin \alpha \int_{s_1=0}^{s_2} \int_0^\beta \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 d s d \varphi \quad (6)$$

gdzie C_{11}, C_{12}, \dots oznaczają współczynniki lokalnej macierzy sztywności w stanie sprężysto-plastycznym.

Po wprowadzeniu funkcji aproksymujących (bazowych) i dokonaniu wielu żmudnych przekształceń, zgodnych z przyjętą metodą do rozwiązania metodą Ritz otrzymujemy nieliniowy i niejednorodny względem parametrów swobodnych funkcji aproksymujących układ równań algebraicznych. Równania te opisują aktualny krytyczny układ obciążeń powłoki w stanie sprężysto-plastycznym:

$$\begin{aligned} (a_{11} + N_a \tilde{a}_{11}) A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3 &= b_{11} A_1^2 + b_{12} A_1^3 + b_{13} A_1 A_2 + b_{14} A_1 A_3 + q b_{15} \\ a_{21} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3 &= b_{21} A_1^2 \\ a_{31} A_1 + a_{32} A_2 + a_{33} A_3 &= b_{31} A_1^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Układ równań (7) rozwiązany ze względu na współczynnik A_1 przyjmuje ostateczną postać:

$$q = \frac{\tilde{e}_1 A_1 + \tilde{e}_2 A_1^2 + \tilde{e}_3 A_1^3}{\tilde{e}_4 \kappa A_1 + \tilde{e}_5} \quad (8)$$

oraz

$$N_a = \kappa q s_1 \quad (9)$$

Współczynniki a_{ij}, b_{ij} w równaniu (7) uzależnione są od parametrów fizycznych (ν, E, E_b, R_e) i geometrycznych ($L, r_s, t, c, \alpha, \beta$) powłoki oraz od liczby półfal (m, n) powierzchni zdeformowanej wskutek utraty stateczności.

3. ALGORYTM ROZWIĄZANIA NUMERYCZNEGO

Ponieważ w równaniu stateczności (8) współczynniki \tilde{e}_i są zmienne i zależą od obciążenia zewnętrznego, wymiarów geometrycznych oraz własności fizycznych powłoki to obliczenia numeryczne będą prowadzone iteracyjnie za pomocą specjalnie opracowanego algorytmu analizy sprężysto-plastycznej. W procedurze przewiduje się

badanie warunku uplastycznienia na każdym kroku przyrostu obciążenia zewnętrznego, co umożliwi analizę powłok znajdujących się w różnych stanach uplastycznienia lub nawet powłok sprężystych.

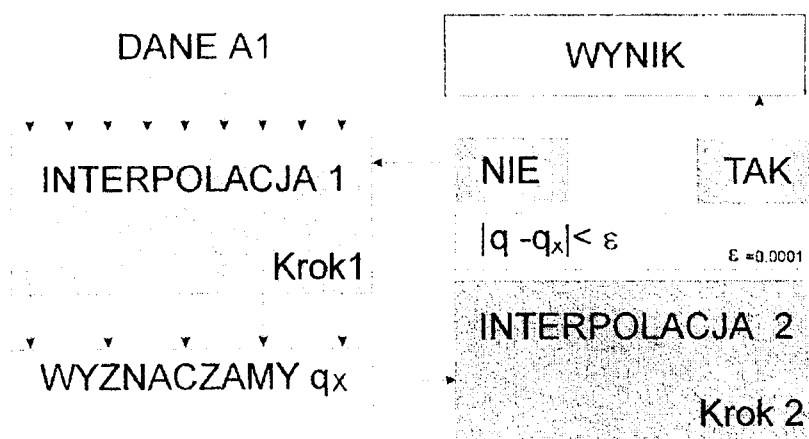
Równanie sprężysto–plastycznej stateczności powłoki (8) jest funkcją uwikłaną, gdzie elementy macierzy sztywności oraz funkcje podcałkowe zależą od obciążenia q , dlatego funkcji $q = f(\hat{w})$ nie można obliczyć bezpośrednio.

Tok postępowania zmierzający do określenia górnego (q^+, N_a^+) i dolnego (q^-, N_a^-) obciążenia krytycznego jest następujący:

- Przyjmujemy dane geometryczne i materiałowe powłoki.
- Zakładamy określoną wartość współczynnika κ .
- Obieramy szereg wartości dla parametrów m i n określających liczbę półfal wzdłuż tworzącej i po obwodzie powłoki, oraz dla ustalonych m i n przyjmujemy, zaczynając od zera, szereg narastających wartości parametru A_1 .
- Dla każdego A_1 obliczamy odpowiadające ugięcia maksymalne w_g oraz obciążenia q (8) i N_a (9).
- W układzie współrzędnych (q, \tilde{w}) lub (N_a, \tilde{w}) otrzymujemy dwuparametrową rodzinę krzywych $q(\tilde{w}, m, n)$ lub $N_a(\tilde{w}, m, n)$.
- Wybierając z rodziny krzywych punkty o najmniejszych wartościach q lub N_a , przy danych wartościach zmiennej \tilde{w} znajdujemy krzywą będącą poszukiwanym rozwiązaniem.

Obciążenia krytycznego nie można wyznaczyć w sposób bezpośredni, gdyż występuje w równaniu stateczności w sposób uwikłany. Dlatego obliczenia przeprowadzono według specjalnej procedury iteracyjnej w segmentach *interpolacja*.

W segmencie *interpolacja 1* w każdym kolejnym kroku obliczeniowym ścieżki równowagi dla danego A_1 wyznacza się pewną wartość początkową obciążenia q_x (bazując na wartości szacunkowej w pierwszym kroku, w segmencie *interpolacja 2* w następnym). W segmencie *interpolacja 2* jako drugie przybliżenie przyjmowany jest wynik pierwszej szacunkowej iteracji, natomiast kolejne obciążenia początkowe określone są na podstawie metody siecznych. Jako q przyjmowana jest wartość, dla której błąd jest mniejszy od $\varepsilon=0.0001$ nie spełnienie tego warunku powoduje powrót do segmentu *interpolacja 1*.



Rys. 2. Schemat blokowy segmentów *interpolacja 1* i *interpolacja 2*

4. PRZYKŁADY LICZBOWE

4.1. PODSTAWOWE DANE

Obliczenia przeprowadzono dla wycinka dwuwarstwowej powłoki stożkowej poddanego działaniu sił podłużnych i poprzecznych.

Za dane podstawowe w obliczeniach numerycznych przyjęto:

$L = 1,0 \text{ m}$	$r_s = 1,4 \text{ m}$	$w_u = 2$
$tt = 0,005 \text{ m}$	$cc = 0,001 \text{ m}$	$\kappa = 900$
$\alpha = 45^\circ$	$\beta = 35^\circ$	$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$
$E_1 = 71\,900 \text{ MPa}$	$R_{e1} = 70 \text{ MPa}$	$E_{t1} = 10\,000 \text{ MPa}$
$E_2 = 209\,000 \text{ MPa}$	$R_{e2} = 80 \text{ MPa}$	$E_{t2} = 9\,800 \text{ MPa}$
$m = 1$	$n = 1$	

gdzie:

L - długość tworzącej powłoki

r_s - średni promień powłoki

w_u - stosunek maksymalnego ugięcia powłoki do jej całkowitej grubości

tt - grubość warstwy zewnętrznej

cc - grubość warstwy wewnętrznej

κ - stosunek obciążenia podłużnego N_a do poprzecznego q

α - kąt wierzchołkowy powłoki

β - kąt rozwartości powłoki

m - maksymalna liczba półfal w kierunku tworzącej

n - maksymalna liczba półfal na obwodzie powłoki

Dla warstwy ZEWNĘTRZNEJ:

ν_1 - współczynnik Poissona materiału warstwy zewnętrznej

E_1 - moduł Younga materiału - warstwy zewnętrznej

E_{t1} - moduł wzmocnienia liniowego materiału warstwy zewnętrznej

R_{e1} - granica plastyczności warstwy zewnętrznej

Dla warstwy WEWNĘTRZNEJ:

ν_2 - współczynnik Poissona materiału warstwy wewnętrznej

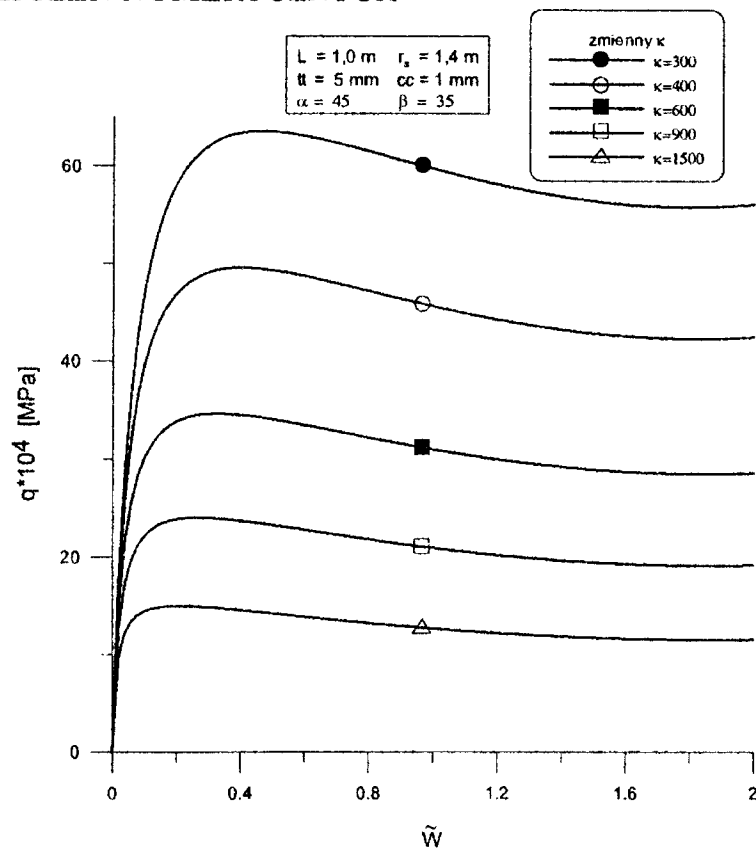
E_2 - moduł Younga materiału - warstwy wewnętrznej

E_{t2} - moduł wzmocnienia liniowego materiału warstwy wewnętrznej

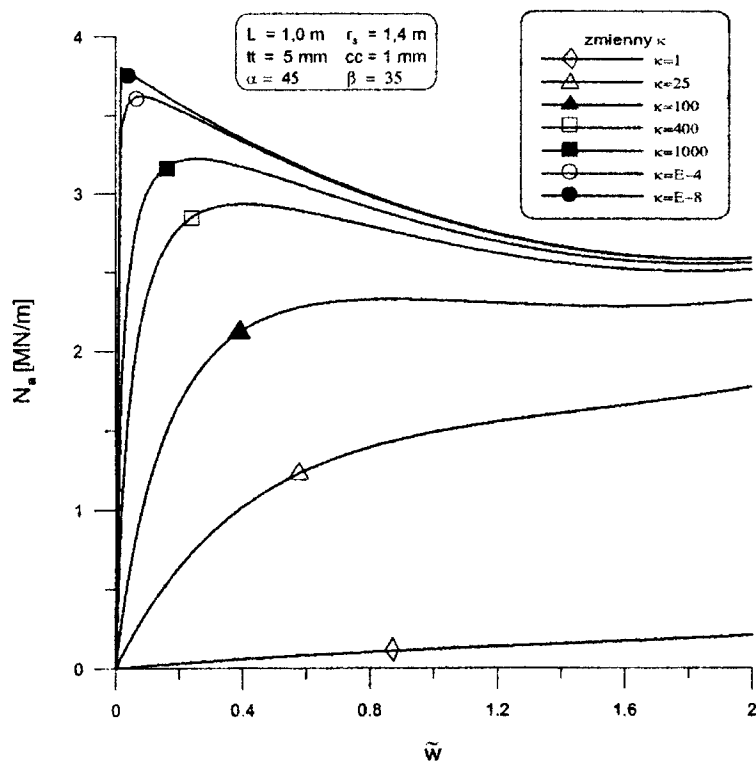
R_{e2} - granica plastyczności warstwy wewnętrznej

W analizie wyników obliczeń główny nacisk został położony na badanie zależności obciążenia zewnętrznego od ugięcia powłoki. Stosunek w_u maksymalnego ugięcia powłoki do jej całkowitej grubości założono równy 2, co mieści się w dopuszczalnym przez przyjętą teorię zakresie. Dla analizowanego parametru rodzina krzywych $q(\hat{w})$ przedstawiona zostanie na jednym wykresie.

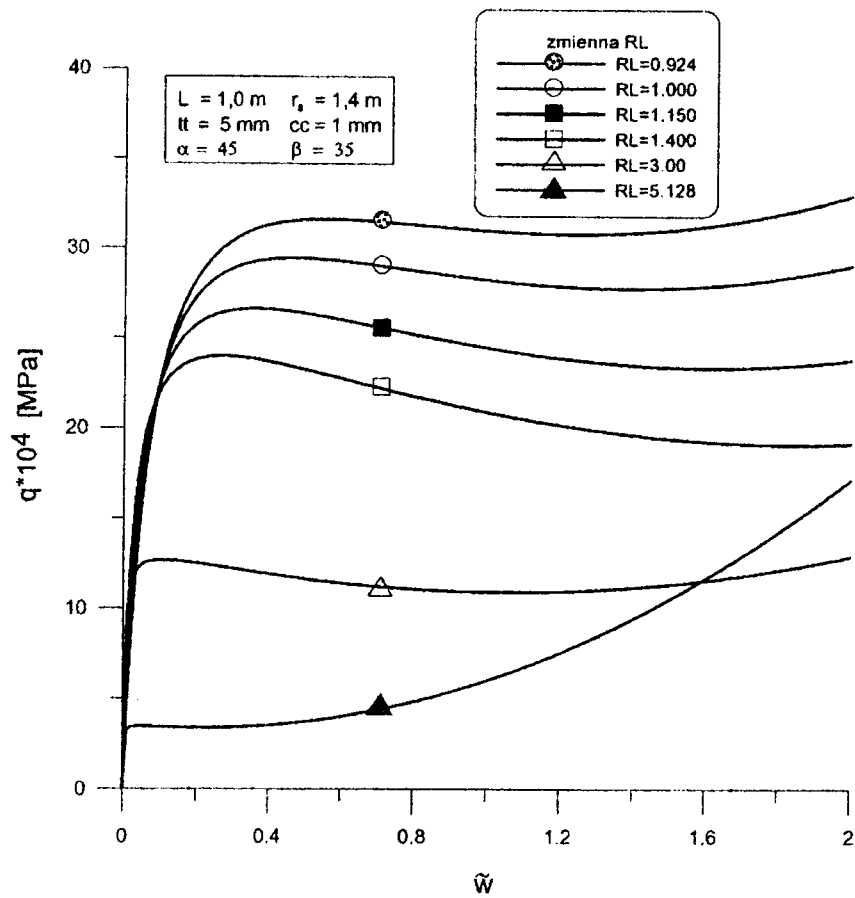
4.2. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH



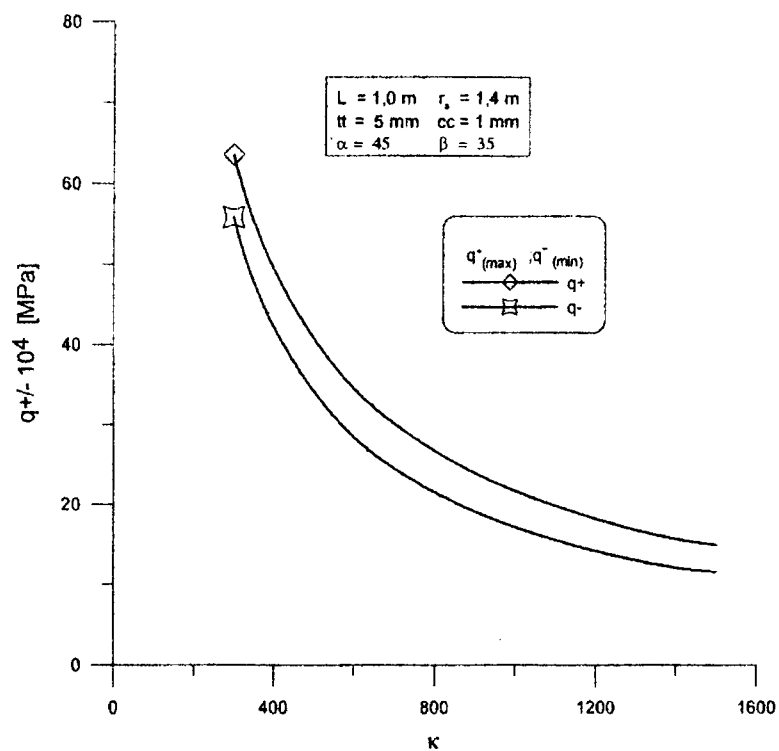
Rys. 3. Ścieżki zakrytycznej równowagi - zależność ciśnienia q od ugięcia \tilde{w}



Rys. 4. Podłużna siła ściskająca N_a jako funkcja ugięcia \tilde{w}



Rys. 5. Ścieżki zakrytycznej równowagi - zależność ciśnienia q od ugięcia \tilde{w} przy zmiennym stosunku RL promienia średniego r_s do długości tworzącej L



Rys. 6. Krzywe graniczne dolnego i górnego obciążenia krytycznego

5. WNIOSKI

Parametr κ odpowiadający stosunkowi obciążenia podłużnego N_a do porzecznego q wywiera zasadniczy wpływ na postać utraty stateczności powłoki.

- Dla małych wartości κ , gdzie przeważa obciążenie poprzeczne lub obydwa rodzaje obciążeń są w przybliżeniu równe, krzywe $q(\hat{w})$ wykazują jedynie przegięcie.
- Powyżej pewnej wartości współczynnika $\kappa \approx 10$, dla której $q^+ \approx q^-$ pojawia się obszar niestateczny, który przy dalszym wzroście κ wyraźnie się rozszerza, a jego początek występuje przy coraz mniejszych ugięciach (rys. 3).
- Obciążenia krytyczne $q^{+/-}$ maleją a różnica pomiędzy q^+ i q^- zwiększa się nieliniowo – osiągając maksymalną wartość dla $\kappa \approx 300$, a następnie maleje.
- Krytyczne siły wzdluzne $N_a^{+/-}$ rosną w miarę wzrostu wartości współczynnika κ . Ze wzrostem κ w przedziale od 400 do 10^8 obciążenie q^+ maleje o kilka rzędów wielkości, zaś siła wzdluzna N_a^+ wzrasta tylko nieznacznie od 3.0 do 3.75 MPa.
- Powyżej pewnej wartości $\kappa = 10^5$ ścieżki równowagi nie odbiegają istotnie od krzywej granicznej, odpowiadającej przypadkowi działania na powłokę jedynie siły wzdluznej ($\kappa = \infty$). Wynika stąd, iż w przypadku powłoki, na którą działa duża siła podłużna, zmiany obciążenia poprzecznego nie mają większego wpływu na wartość obciążenia krytycznego (rys. 4).
- Utrata stateczności powłoki może nastąpić w określonym przedziale wartości stosunku RL promienia średniego r_s do długości tworzącej L . Wewnątrz tego przedziału obciążenia krytyczne $q^{+/-}$ maleją ze wzrostem RL . Stąd wynika, że powłoki duże łatwiej ulegają wyboczeniu niż małe (rys. 5).
- Charakterystyczną cechą rodzin krzywych $q(\hat{w})$ jest występowanie dwóch krzywych granicznych: dolnej i górnej, charakteryzujących się jednym wspólnym punktem przegięcia (rys. 6).

LITERATURA

- [1] Awrejcewicz J., Andrianov I., Płyty i powłoki w przyrodzie, mechanice i biomechanice, Fundacja "Książka Naukowo-Techniczna", Warszawa 2001.
- [2] Bushnell D., Plastic buckling of various shells, Trans. ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 105, 5, pp. 51-72, 1982.
- [3] Paczos P., Zielnica J., Stateczność sprężysto-plastycznych otwartych dwuwarstwowych powłok stożkowych, Zeszyty Naukowe Katedry Mechaniki Stosowanej, Politechnika Śląska, Gliwice 2002
- [4] Zielnica J., Stateczność powłok sprężysto-plastycznych, Wyd.1. Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 2001.

THE PROBLEM OF STABILITY LOSS OF BILAYERED CONICAL SHELLS

The subject of this elaboration is to derive the basic equations of stability of bilayered open elastic-plastic conical shells and approximate solution of these equations, both theoretically and by numerical procedures. Kirchhoff-Love hypotheses hold for the layers; we use constitutive relations in the form of generalized Hooke's law for elastic stability analysis, and Prandtl-Reuss incremental plasticity theory is used for elastic-plastic stability analysis. Stability equations are derived using the virtual work principle and Ritz method is applied to solve the problem equations.

KRYTYCZNE OBCIĄŻENIA STATYCZNE TRÓJWARSTWOWYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH

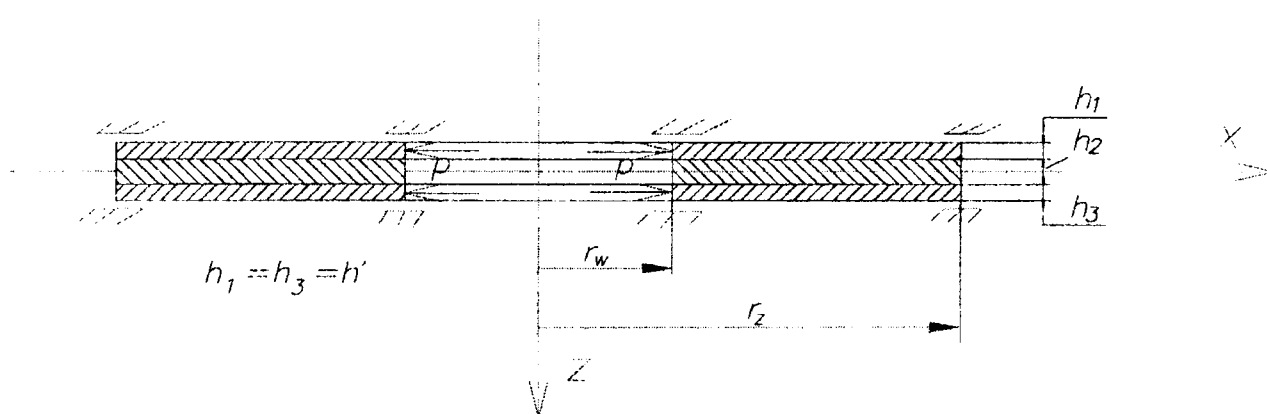
D. PAWLUS

Katedra Podstaw Budowy Maszyn, Akademia Techniczno-Humanistyczna
ul. Willowa 2, 43-309 Bielsko-Biała

W pracy przedstawiono wyniki obliczeń krytycznych obciążeń statycznych pierścieniowych płyt trójwarstwowych obciążonych na brzegu wewnętrznym. Analizie poddano płytę dwustronnie utwierdzoną, osiowosymetryczną z symetrycznym układem warstw poprzecznych. Okładziny są stalowymi, cienkimi warstwami. Rdzeń jest miękką, piankową warstwą środkową. Obliczenia prowadzono metodą elementów skończonych w systemie ABAQUS. Wyniki porównano z wartościami obciążeń krytycznych uzyskanymi poprzez rozwiązanie metodą różnic skończonych układu równań różniczkowych płyt, opisanych w pracy: „Stateczność dynamiczna warstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym” stanowiącej referat X Sympozjum.

1. WPROWADZENIE

Przedmiotem rozważań jest trójwarstwowa, dwustronnie utwierdzona płyta pierścieniowa o symetrycznym układzie warstw poprzecznych. Zewnętrzne warstwy płyty są stalowymi, cienkimi okładzinami o tej samej grubości h' . Warstwa środkowa jest miękkim, piankowym odpowiednio grubszym rdzeniem h_2 . Równomierne obciążenie brzegu płyty działa w płaszczyźnie zewnętrznych warstwy - rysunek 1.



Rys. 1. Trójwarstwowa, płyta pierścieniowa

Płyta traci stateczność statyczną dla określonych wartości krytycznych obciążeń p_{kr} i określonej postaci deformacji. Istotna jest wartość minimalnego ściskającego obciążenia krytycznego. Przy obciążeniu płyty na brzegu wewnętrznym wartość minimalna p_{kr} odpowiada osiowosymetrycznej postaci utraty jej stateczności. Przypadek tego obciążenia płyt o różnych wartościach grubości zarówno rdzenia, jak i okładzin

oraz o zmiennych wartościach stałych sprężystych materiału rdzenia stanowi przedmiot analizy. Obliczenia prowadzono wykorzystując metodę elementów skończonych w systemie ABAQUS wersji 6.3 [1] w Akademickim Centrum Komputerowym CYFRONET w Krakowie (KBNC3840\CD\034\1996). Uzyskane wyniki ciśnień krytycznych porównano z wynikami tychże obciążeń otrzymanymi poprzez numeryczne rozwiązanie ugięć trójwarstwowej, osiowosymetrycznej płyty pierścieniowej obciążonej w swej płaszczyźnie. Opis zagadnienia i sposób rozwiązania, w którym wykorzystano metodę różnic skończonych przedstawiono w pracy „Stateczność dynamiczna warstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym”, która stanowi referat X Sympozjum oraz w artykule [3].

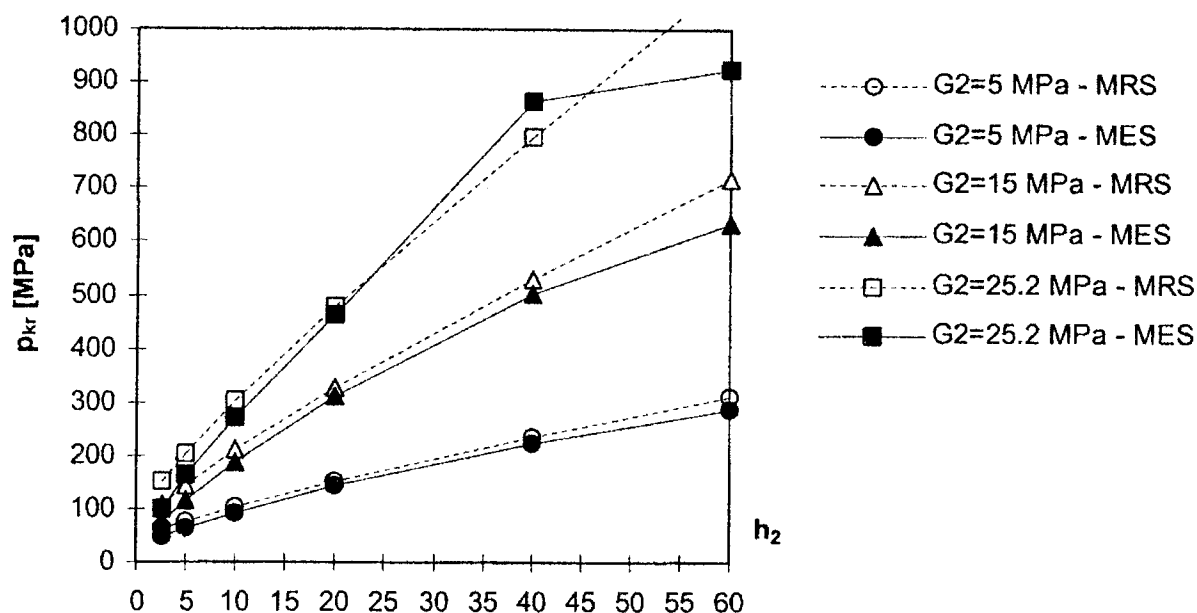
2. BUDOWA MODELU

Obliczenia metodą elementów skończonych prowadzono dla pierścieniowego wycinka (1/8 część) płyty formując odpowiednie warunki symetrii. Okładziny płyty zbudowano z elementów 3D powłokowych 9-węzłowych. Siatkę rdzenia zbudowano z 27 węzłowych 3D elementów bryłowych. Siatki elementów warstw zewnętrznych płyty i jej rdzenia związano powierzchniowymi oddziaływaniami kontaktowymi wykorzystując parametr TIED opcji CONTACT PAIR systemu. Zewnętrznemu i wewnętrznemu brzegowi płyty narzucono warunki podparcia wraz z ograniczeniem możliwości promieniowego przemieszczenia względnego zewnętrznych warstw płyty w jej utwierdzonych brzegach. W rozwiązaniu klasycznego zagadnienia wartości własnych wykorzystano procedurę BUCKLE systemu.

3. ANALIZA WYNIKÓW OBLICZEŃ

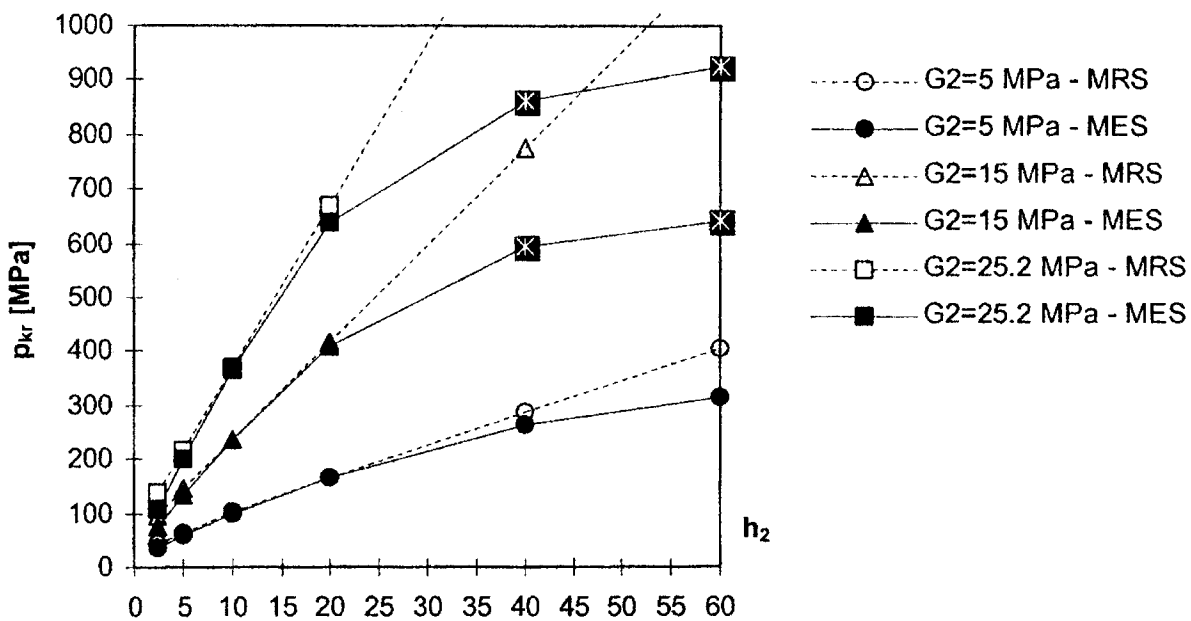
Obliczenia numeryczne prowadzono dla płyty o wymiarach geometrycznych: $r_w = 0.2$ m, $r_z = 0.5$ m. Grubości warstw wynoszą: okładzin - $h = 0.5, 1$ mm; rdzenia - $h_2 = 2.5, 5, 10, 20, 40, 60$ mm. Materiałem okładzin jest stal: $E = 2.1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0.3$. Materiałem rdzenia jest pianka poliuretanowa o wartościach modułu Kirchhoffa G_2 równych: $G_2 = 5, 15$ MPa [5] i wartościach modułu Younga równych odpowiednio: $E_2 = 11.7$ MPa, 35.1 MPa, i liczby Poissona $\nu = 0.0$ oraz polichlorek winylu o wartościach: $G_2 = 25.2$ MPa, $E_2 = 58.9$ MPa, $\nu_2 = 0.17$ [4].

Rysunki 2 i 3 przedstawiają rozkład wartości krytycznych obciążeń płyt p_{kr} w zależności od grubości h_2 rdzenia otrzymane metodą elementów skończonych-MES wraz z wynikami otrzymanymi metodą różnic skończonych - MRS. Uzyskane wyniki wskazują oczywisty wzrost wartości obciążeń krytycznych zarówno wraz z grubością rdzenia płyt, jak i wartością modułu Kirchhoffa jego materiału. Jakościowa ocena wyników uzyskanych metodami MES i MRS wskazuje dobrą zgodność wartości obciążeń krytycznych dla grubości rdzenia rzędu: $h_2 = 10, 20$ mm. W przypadku grubszych okładzin płyt ($h' = 1$ mm) dobra zgodności wartości wyników występuje również dla płyt z grubszym rdzeniem ($h_2 = 40$ mm), natomiast w przypadku płyt z cieńszymi okładzinami ($h' = 0.5$ mm) porównywalne wartości obciążeń krytycznych otrzymano również dla płyt z rdzeniem o grubości: $h_2 = 5$ mm.



Rys. 2. Wartości obciążeń krytycznych płyty o grubości okładzin $h'=1$ mm

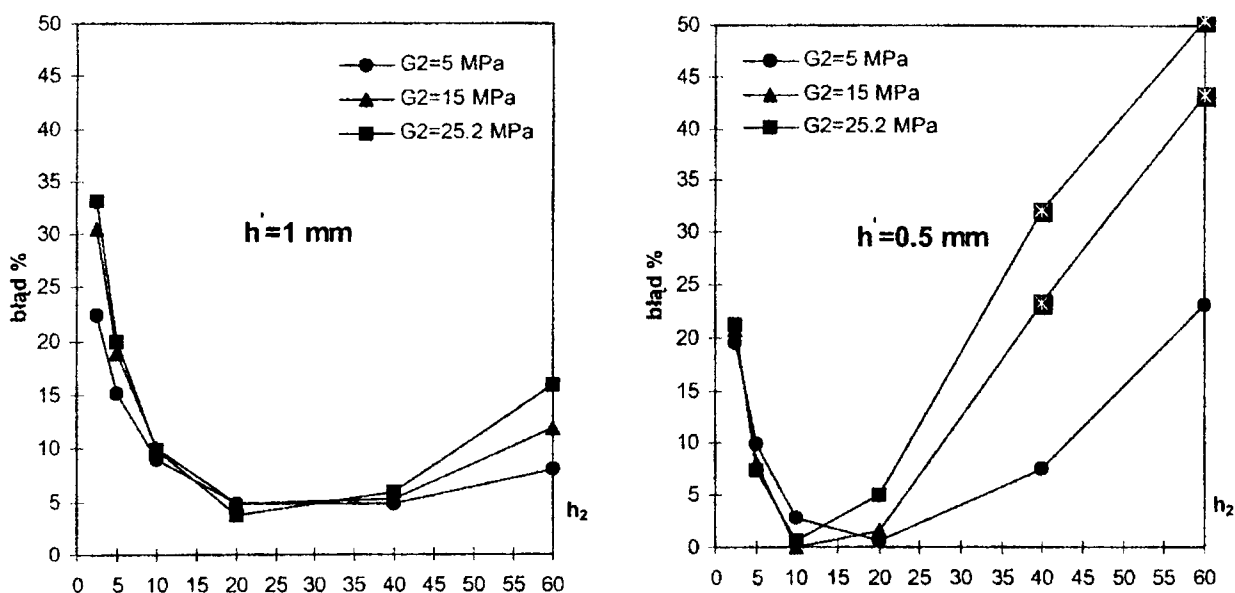
Wyznaczone wartości błędu procentowego są w zakresie 10%. Dla płyt o grubościach rdzenia: $h_2=10$ i 20 mm błąd jest w zakresie 5%. Wartości błędu obciążeń krytycznych przedstawiają wykresy na rysunku 4. Błąd rzędu 20% i wartości większej obserwowalnej jest dla płyt z cienkim rdzeniem - $h_2=2.5$ mm oraz dla przypadków płyt z okładzinami o grubości $h'=0.5$ mm, rdzeniem o module: $G_2=15, 25.2$ MPa i grubości $h_2=40$ mm oraz rdzeniem o grubości 60 mm.



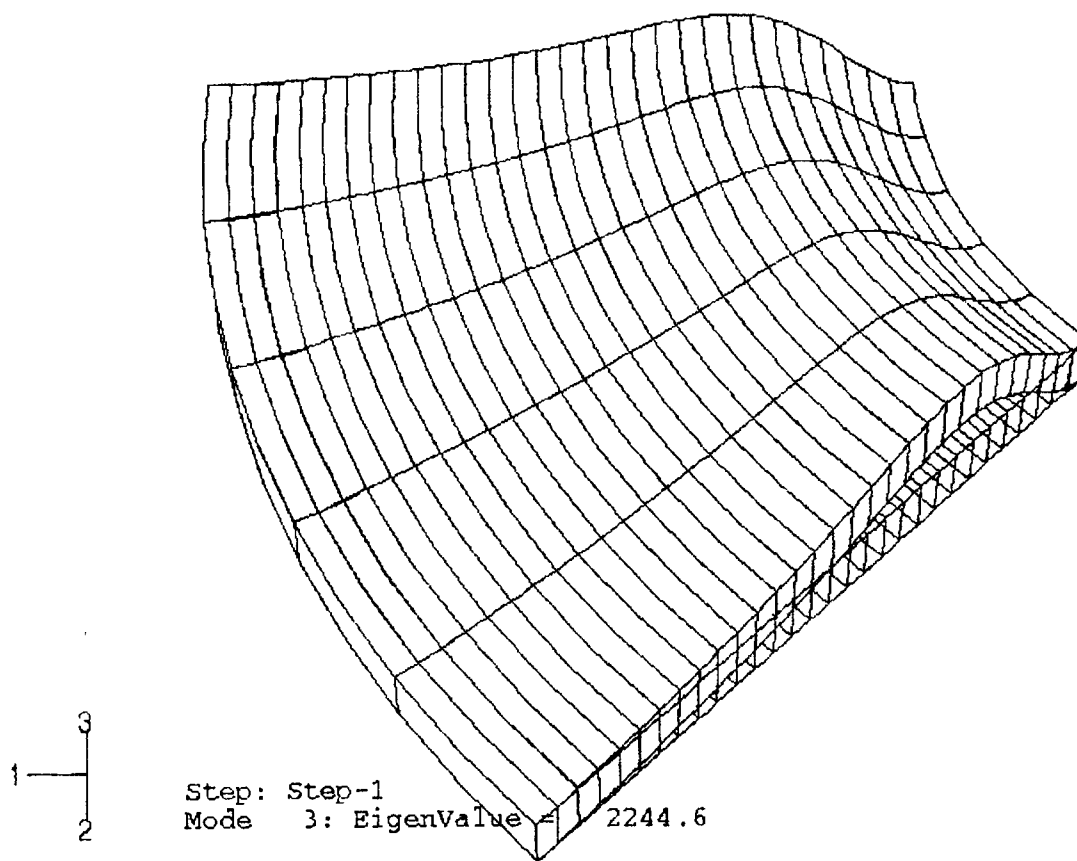
Rys. 3. Wartości obciążeń krytycznych płyty o grubości okładzin $h'=0.5$ mm

W czterech przypadkach płyt o grubościach: $h'=0.5$ mm, $h_2=40$ i 60 mm (wyróżnionych na wykresach „krzyżykami”) zaobserwowano zmianę postaci deformacji

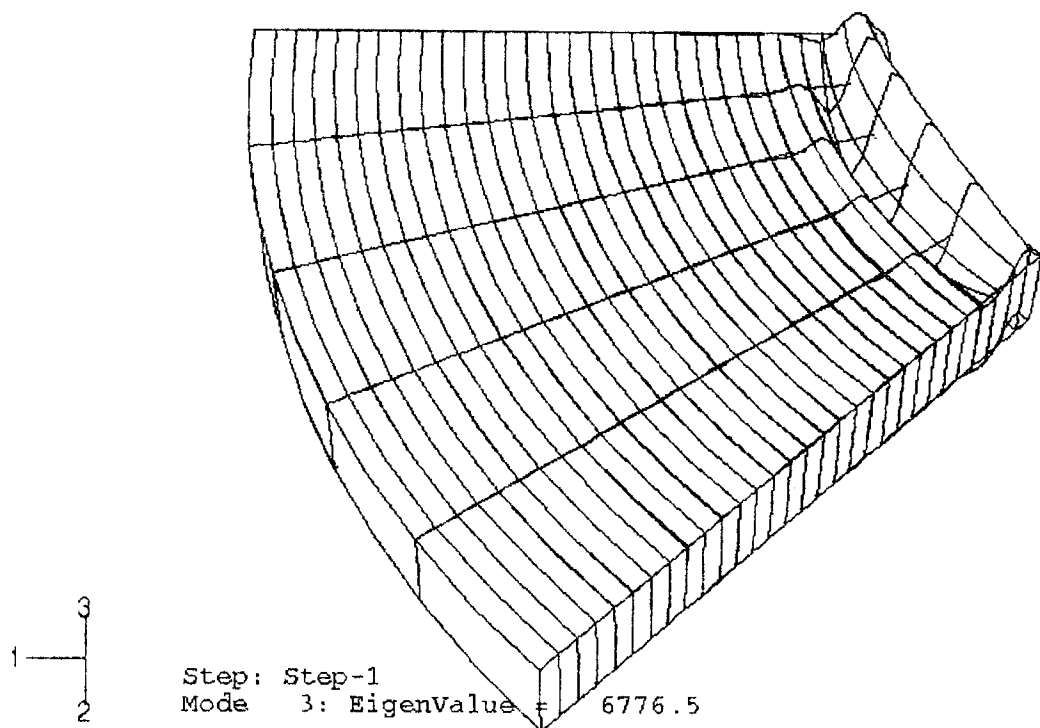
plyty tracącej stateczność z typowej osiowosymetrycznej przedstawionej na rysunku 5 na postać płyty znacznie odkształconej w obszarze bliskim obciążonemu brzegowi płyty - rysunek 6. Linia wartości obciążeń krytycznych wyznaczonych metodą elementów skończonych silnie odchyła się od linii narastających wraz z grubością rdzenia wartości obciążeń krytycznych otrzymanych metoda różnic skończonych - rysunek 3.



Rys. 4. Błąd wartości obciążeń p_{kr} wyznaczonych metodami: MES i MRS



Rys. 5. Osiowosymetryczna postać utraty stateczności płyty



Rys. 6. Postać utraty stateczności płyty dla $h_2=40$ i 60 mm, $G_2=15$ i 25.2 MPa

4. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiona w pracy próba porównania wyników obciążeń krytycznych uzyskanych metodą elementów skończonych z otrzymanymi metodą różnic skończonych jako rozwiązanie zagadnienia opisanego w pracy "Stateczność dynamiczna warstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym" wskazuje wpływ sposobu rozwiązania zagadnienia na wynik obliczeń. Wyniki obciążeń krytycznych uzyskane metodą różnic skończonych otrzymano rozwiązując zagadnienie cienkich płyt warstwowych z wykorzystaniem hipotezy linii łamanej. Dla płyt z odpowiednio grubszym rdzeniem i cienkimi okładzinami uzyskane wyniki obciążeń krytycznych wydają się zawyżone. Potwierdzeniem spostrzeżeń są uwagi zawarte w pracy [4]. W zakresie „średnich” grubości rdzenia płyt wyniki wyznaczone proponowanym rozwiązaniem metodą różnic skończonych wydają się właściwe.

W ilościowej ocenie wartości obciążeń krytycznych, obliczając błąd wartości obciążeń krytycznych uzyskanych metodami: MES i MRS znaczenie ma budowa modelu obliczeniowego rdzenia płyty: rodzaj elementów w metodzie elementów skończonych - w rozwiązaniu wykorzystano elementy bryłowe typu SOLID [2]; opis cech fizycznych materiału rdzenia uwzględniając rodzaj obciążeń, którym jest poddany. W rozwiązaniu przyjętym w pracy: „Stateczność dynamiczna warstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym” rdzeń poddany jest naprężeniom stycznym; jedyną stałą materiałową jest moduł Kirchhoffa G_2 materiału rdzenia. W przypadku obliczeń metodą elementów skończonych zostały również uwzględnione stałe: E_2 , ν_2 materiału rdzenia, których wzrost w pewnym stopniu zwiększa wartość obciążeń krytycznych. Na przykład przyjęcie zalecanej przez PN-

84/B-03230 wartości liczby Poissona równej: $\nu=0.3$ dla miękkich pianek poliuretanowych zmienia wyniki obciążeń p_{kr} następująco-tabela 1:

Tabela1. Wybrane wartości obciążeń krytycznych płyt dla wartości liczb Poissona $\nu_2=0$ i $\nu_2=0.3$

h_2 [mm]	p_{kr} [MPa]			
	$G_2 = 5\text{MPa}$		$G_2 = 15\text{MPa}$	
	$\nu_2 = 0$	$\nu_2 = 0.3$	$\nu_2 = 0$	$\nu_2 = 0.3$
2.5	47.91	47.91	76.10	76.10
20	142.97	143.27	310.41	311.64
60	287.15	292.22	632.70	652.74

LITERATURA

- [1] Hibbitt, Karlsson & Sorensen, Inc, ABAQUS/Standard. User's Manual, version 6.1, 2000.
- [2] Kluesener M.F., Drake M.L., Mathematical Modeling. Damped Structure Design Using Finite Element Analysis, Shock and Vibration Bulletin, Vol. 52, 1982, pp.1-12.
- [3] Pawlus D., Obliczenia statycznych obciążeń krytycznych trójwarstwowych, osiowosymetrycznych płyt pierścieniowych, Czasopismo Techniczne z.6-M/2002, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków 2002, s.71-86.
- [4] Romanów F., Wytrzymałość konstrukcji warstwowych, WSI w Zielonej Górze, Zielona Góra 1995.
- [5] Romanów F., Stricker L., Teisseyre J., Stateczność konstrukcji przekładkowych, Wrocław 1972.

CRITICAL STATIC STRESS OF THREE-LAYERED ANNULAR PLATES

The results of critical, static loads of three-layered annular plates are presented in this paper. The numerical calculations were carried out in ABAQUS system using Finite Element Method. Analysed plate is loaded in its surface on inner perimeter. The plate edges are clamped. The cross-section is symmetric. Outer layers are made of steel; the core is made of „soft” material, like polyurethans foam or polyvinyl chloride. The results obtained using finite element method have been compared with the results of plate critical stress obtained solving the eigenproblem with using the finite difference method. It was described in the paper of X Symposium: „Dynamic stability of three-layered annular plate with elastic or viscoelastic core”.

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA WARSTWOWYCH PŁYT PIERŚCIENIOWYCH Z RDZENIEM SPRĘŻYSTYM I LEPKOSPĘŻYSTYM

D. PAWLUS

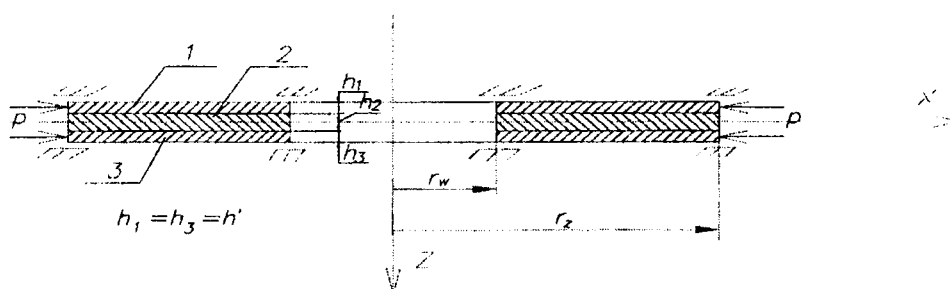
Katedra Podstaw Budowy Maszyn Akademii Techniczno-Humanistycznej
ul. Willowa 2, 43-309 Bielsko-Biała

W pracy przedstawiono rozwiązanie zagadnienia ugięć trójwarstwowych, pierścieniowych płyt z rdzeniem sprężystym lub liniowo lepkospężystym. Płyty obciążone w swej płaszczyźnie zmiennym w czasie ciśnieniem tracą stateczność dynamiczną. Rozwiązanie dotyczy przypadku osiowosymetrycznej postaci utraty stateczności. Wyprowadzony układ równań różniczkowych (16,17,18) rozwiązano z wykorzystaniem metody różnic skończonych. Wyniki obliczeń numerycznych przedstawiają charakterystyki maksymalnych ugięć płyt w czasie ich obciążania. Wyróżniono punkt utraty stateczności płyt wyznaczonej na podstawie kryterium podanego w pracy Volmira [6].

1. WPROWADZENIE

Liczne rozwiązania zagadnień stateczności dynamicznej płyt pierścieniowych, przedstawione min. w pracach [4,1], dotyczą jednorodnych płyt sprężystych bądź liniowo lepkospężystych. Przedstawiony w wymienionych pracach sposób rozwiązania zagadnienia z wykorzystaniem metody różnic skończonych wykorzystany został w niniejszej pracy w odniesieniu do trójwarstwowych płyt pierścieniowych z rdzeniem sprężystym lub liniowo lepkospężystym. W opisie struktury warstwowej płyty wykorzystano teorię klasyczną przedstawioną, min. w pracy [5].

Analizowana osiowosymetryczna, trójwarstwowa płyta pierścieniowa poddana jest obciążeniom w jej płaszczyźnie - Rys. 1.



Rys. 1. Schemat płyty

Zewnętrzne cienkie warstwy płyty mają jednakową grubość i jednakowy sprężysty materiał. Środkową odpowiednio grubszą warstwą płyty jest miękki piankowy rdzeń. Własności fizyczne materiału rdzenia płyty opisano wykorzystując prawo Hooke'a dla

materiału sprężystego i liniowo lepkosprężyste modele ciał reologicznych: Maxwella, Kelvina-Voigta i model standardowy uwzględniając obok sprężystych również lepkie własności materiału. Obliczeniom poddano przypadek płyty dwustronnie utwierdzonej, obciążonej ciśnieniem zmiennym w czasie określonym zależnością:

$$p = st \quad (1)$$

gdzie:

p - ciśnienie obciążonego brzegu płyty, s - prędkość narastającego obciążenia,

t - czas

Zewnętrzne ciśnienie obciąża okładziny płyty, natomiast jej rdzeń poddany jest jedynie naprężeniom stycznym.

2. RÓWNANIA RÓWNOWAGI DYNAMICZNEJ

Równania równowagi dynamicznej wyprowadzono uwzględniając układ sił i momentów obciążających poszczególne warstwy pierścieniowego wycinka osiowosymetrycznej płyty:

$$\text{warstwa 1} \quad \frac{M_{\eta} - M_{01}}{r} + M_{\eta r} - Q_{\eta} + \frac{h_1}{2} \tau_{\eta} = 0 \quad (2)$$

$$(r \cdot N_{\eta} \cdot w_r)_r + (r \cdot Q_{\eta})_r + r \cdot \tau_{\eta} \cdot w_r = r \cdot h_1 \cdot \mu_1 \cdot w_{tt} \quad (3)$$

$$\text{warstwa 2} \quad -Q_{\eta} + \frac{h_2}{2} \tau_{\eta} + \frac{h_2}{2} \tau_{\eta 3} = 0 \quad (4)$$

$$(r \cdot Q_{\eta})_r - r \cdot \tau_{\eta} \cdot w_r + r \cdot \tau_{\eta 3} \cdot w_r = r \cdot h_2 \cdot \mu_2 \cdot w_{tt} \quad (5)$$

$$\text{warstwa 3} \quad \frac{M_{\eta 3} - M_{03}}{r} + M_{\eta 3 r} - Q_{\eta 3} + \frac{h_3}{2} \tau_{\eta 3} = 0 \quad (6)$$

$$(r \cdot N_{\eta 3} \cdot w_r)_r + (r \cdot Q_{\eta 3})_r - r \cdot \tau_{\eta 3} \cdot w_r = r \cdot h_3 \cdot \mu_3 \cdot w_{tt} \quad (7)$$

gdzie:

$M_{\eta(3)}, M_{01(3)}$ - jednostkowe momenty promieniowe i obwodowe okładzin płyty,

$N_{\eta(3)}, N_{01(3)}$ - jednostkowe siły normalne promieniowe i obwodowe okładzin,

$Q_{\eta(2,3)}$ - jednostkowe siły tnące,

$\tau_{\eta(3)}$ - naprężenia styczne oddziaływań okładziny górnej 1 i dolnej 3 z rdzeniem,

μ_1, μ_3, μ_2 - gęstości materiałów odpowiednio warstw zewnętrznych i rdzenia,

w - ugięcie całkowite płyty,

r - promień płyty

3. ZWIĄZKI GEOMETRYCZNE I FIZYCZNE

Deformacja poprzecznej struktury płyty odpowiada klasycznej linii łamanej przemieszczeń punktów warstw płyty. Deformację środkowej warstwy płyty opisano kątem β (8) w wyprowadzeniu którego uwzględniono ugięcie wstępne w_0 płyty oraz

jednakowe wartości zarówno ugięcia wstępnego, jak i dodatkowego w_d dla każdej z warstw płyty:

$$\beta = \frac{u_1 - u_3 - h' w_{d'r}}{h_2} + w_{o'r} \quad (8)$$

gdzie:

u_1, u_3 - promieniowe przemieszczenia punktów płaszczyzny środkowej zewnętrznych warstw płyty

Deformację zewnętrznych warstw płyty określają nieliniowe równania płyt Kármána.

Związki fizyczne okładzin płyty określają zależności prawa Hooke'a dla płaskiego stanu naprężeń. Wartości modułu Younga i liczby Poissona są jednakowe: $E=E_1=E_3$, $\nu=\nu_1=\nu_3$. Fizyczne cechy materiału rdzenia płyty poddanego naprężeniom stycznym określa zależność:

$$\tau_{rz_2} = \tilde{G}_2 \cdot \gamma_{rz_2} \quad (9)$$

gdzie:

γ_{rz_2} - kąt odkształcenia postaciowego rdzenia płyty

W opisie sprężystych własności materiału rdzenia wielkość \tilde{G}_2 odpowiada modułowi Kirchhoffa G_2 . W przypadku opisu własności liniowo lepkosprężystych materiału rdzenia wielkość \tilde{G}_2 wyrażono ilorazem liniowych operatorów różniczkowych Q i P [3]:

$$\tilde{G}_2 = \frac{Q}{P} \quad (10)$$

$$Q = q_1 + q_2 \frac{\partial}{\partial t} \quad P = p_1 + p_2 \frac{\partial}{\partial t} \quad (11)$$

Wielkości q_1 , q_2 , p_1 , p_2 wyrażone są następującymi zależnościami:

$$q_1=0 \quad q_2 = \eta \quad p_1=1 \quad p_2 = \frac{\eta}{G} \quad \text{- model Maxwella}$$

$$q_1=G \quad q_2 = \eta \quad p_1=1 \quad p_2 = 0 \quad \text{- model Kelvina-Voigta} \quad (12)$$

$$q_1 = \frac{G_1 G}{G_1 + G} \quad q_2 = \frac{\eta G}{G_1 + G} \quad p_1=1 \quad p_2 = \frac{\eta}{G_1 + G} \quad \text{- model standardowy}$$

gdzie:

G, G_1 - stałe sprężyste, η - stała lepkości

4. UKŁAD RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH

Na podstawie związków sił i momentów przekrojowych z naprężeniami dla zewnętrznych warstw płyty wyznaczono zależności określające siły i momenty przekrojowe. Siłę poprzeczną Q_{r_2} , równą $Q_{r_2} = \tau_{rz_2} h_2$ wyznaczono na podstawie równań (8,9):

$$Q_{r2} = \tilde{G}_2(\delta + H' w_{d,r}) \quad (13)$$

gdzie:

$$\delta = u_3 - u_1; \quad H' = h' + h_2$$

Z równań (2,6) wyznaczono jednostkowe siły tnące $Q_{r1,3}$, które po uwzględnieniu równania (4) oraz zależności określających momenty przekrojowe wraz z równaniem (13) określają wypadkową siłę poprzeczną Q_r równą sumie sił $Q_{r1(2,3)}$.

Dodając stronami równania (3,5,7) wyprowadzono równanie:

$$(r \cdot N_r \cdot w_r)_r + (r \cdot Q_r)_r = w_{d,u} M \cdot r \quad (14)$$

gdzie:

$$M = 2h' \mu + h_2 \mu_2$$

Wyrażając promieniową i obwodową siłę błonową N_r, N_θ funkcją naprężeń Φ :

$$N_r = 2h' \frac{1}{r} \Phi_r \quad N_\theta = 2h' \Phi_{,rr} \quad (15)$$

oraz podstawiając wyrażenie określające siłę poprzeczną Q_r i uwzględniając zależności (10,11) przekształcono równanie (14) do następującej postaci:

$$\begin{aligned} Pk_1 w_{d,rrr} + P \frac{2k_1}{r} w_{d,rr} - P \frac{k_1}{r^2} w_{d,r} + P \frac{k_1}{r^3} w_{d,r} - Q \frac{H^2}{h_2} w_{d,rr} - Q \frac{1}{r} \frac{H^2}{h_2} w_{d,r} \\ - Q \frac{1}{r} \frac{H'}{h_2} \delta - Q \frac{H'}{h_2} \delta_r = P \frac{2h'}{r} (w_r \Phi_{,rr} + \Phi_r w_{,rr}) - P w_{d,u} M \end{aligned} \quad (16)$$

gdzie:

$k_1 = 2D$, D - sztywność płytowa warstw zewnętrznych płyty

Wielkość δ w równaniu (16) wyznaczono odejmując stronami równania równowagi rzutów w kierunku osi x sił obciążających zewnętrzne warstwy płyty. Różnicę sił poprzecznych Q_{r1} , Q_{r3} wyznaczono ustalając dla rdzenia płyty równanie równowagi rzutów sił w kierunku osi x oraz wykorzystując równania (2) i (6). Wykorzystując zależności określające siły przekrojowe, równania (4,8,13) oraz pomijając wyrażenia nieliniowe, których udział jest nieznaczący, wyprowadzono dodatkowe równanie różniczkowe:

$$Q \frac{2}{h_2} H' w_{d,r} = P \frac{Eh'}{1-\nu^2} \left(\delta_{,rr} + \frac{1}{r} \delta_r - \frac{1}{r^2} \delta \right) - Q \frac{2}{h_2} \delta \quad (17)$$

Wykorzystując zależności określające siły przekrojowe oraz równania (15) wyprowadzono równanie nierozdzielności odkształceń, które po zróżniczkowaniu ma następującą postać:

$$r \Phi_{,rrr} + \Phi_{,rr} - \frac{1}{r} \Phi_{,r} + E w_r w_{,rr} = 0 \quad (18)$$

Równania (16,17,18) stanowią podstawowy układ równań różniczkowych analizowanej płyty umożliwiając wyznaczenie ugięć płyty w czasie jej obciążania.

5. WARUNKI POCZĄTKOWE I BRZEGOWE

Stan początkowy płyty określają zależności:

$$w_d|_{t=0} = 0 \quad w_{d,t}|_{t=0} = 0 \quad (19)$$

Warunki brzegowe wynikające z utwierdzenia obu brzegów płyty są następujące:

$$w|_{r=r_z(r_w)} = 0 \quad w_{,r}|_{r=r_z(r_w)} = 0 \quad \delta|_{r=r_z(r_w)} = 0 \quad \delta_{,r}|_{r=r_z(r_w)} = 0 \quad (20)$$

Warunki brzegu obciążonego określają równania:

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=r_z} &= -p(t) \cdot d_1 & \sigma_r|_{r=r_w} &= -p(t) \cdot d_2 \\ \sigma_{r,t}|_{r=r_z} &= -s \cdot d_1 & \sigma_{r,t}|_{r=r_w} &= -s \cdot d_2 \end{aligned} \quad (21)$$

gdzie:

d_1, d_2 - wielkości o wartości 0 lub 1 określające obciążenie zewnętrznego lub wewnętrznego brzegu płyty

6. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA

Nieliniowy, skomplikowany układ równań różniczkowych (16,17,18) rozwiązano wykorzystując metodę różnic skończonych. W rozwiązaniu przyjęto podaną w pracy [4] postać ugięcia wstępnego oraz wielkości bezwymiarowe; np.:

$$t^* = t \cdot K7 \quad \zeta_1 = \frac{w_d}{h} \quad \rho = \frac{r}{r_z} \quad \text{i parametry: } K8_v = Mr_z h_2 \quad K5 = \frac{h'}{h} \quad K7 = \frac{s}{p_{kr}}$$

gdzie:

p_{kr} - statyczne, krytyczne naprężenie płyty, $h=h_1+h_2+h_3$

Przybliżając pochodne względem ρ w punktach dyskretyzacji przez różnice centralne określono następujący układ równań różniczkowych umożliwiając numeryczne rozwiązanie zagadnienia:

$$P_v U + Q_v + PT_v \dot{U} + QT_v - \frac{p_1 K7^2 K8_v b^4}{K5} \ddot{U} = \frac{p_2 b^4 K7^3 K8_v}{K5} \ddot{U} \quad (22)$$

$$FF \dot{Y} = UW \quad (23)$$

$$ZT_v \dot{D} = Z_v D + VT_v \dot{U} + V_v U \quad (24)$$

gdzie:

P_v, PT_v - macierze elementów określonych parametrami geometrycznymi i materiałowymi, wielkością b długości przedziału w metodzie różnic skończonych oraz parametrem $K7$,

$\mathbf{Q}_v, \mathbf{QT}_v$ - wektory składników wyrażonych geometrycznymi i materiałowymi parametrami płyty, wyrażeniami stanu naprężeń, ugięcia początkowego, wielkościami δ i b oraz parametrem $K7$,
 $\mathbf{U}, \dot{\mathbf{Y}}$ - wektory wyrażone odpowiednio przez ugięcia dodatkowe płyty oraz pochodne funkcji naprężeń;
 \mathbf{FF} - macierz elementów określonych przez wielkości $a_i = b/\rho_i$,
 $\mathbf{U\dot{W}}$ - wektor wyrażen określonych wielkościami ugięć, ich pochodnych i ugięć początkowych oraz wielkościami a_i i b ,
 $\mathbf{Z}_v, \mathbf{V}_v, \mathbf{ZT}_v, \mathbf{VT}_v$ - macierze elementów określonych parametrami geometrycznymi i materiałowymi, wielkością b oraz parametrem $K7$,
 \mathbf{D} - wektor wyrażony parametrem δ

W przypadku, gdy rdzeń jest z materiału sprężystego postać równań (22,23,24) układu po uwzględnieniu parametrów materiałowych: $p_1=1, q_1=G_2, q_2=p_2=0$ pozbawiona jest wyrażen stanowiących odpowiednie macierze i wektory: $\mathbf{PT}_v, \mathbf{QT}_v, \mathbf{ZT}_v, \mathbf{VT}_v$ oraz pochodnych w wektorach $\dot{\mathbf{Y}}$ i $\mathbf{U\dot{W}}$ równania (23).

Układ równań różniczkowych (22,23,24) rozwiązano wykorzystując metodę Rungego-Kutty dla stanu początkowego płyty.

7. KRYTYCZNE OBCIĄŻENIE STATYCZNE

Wartość krytycznego obciążenia statycznego p_{kr} wyznaczono dla sprężystego materiału rdzenia pomijając w równaniu (16) człon bezwładnościowy oraz ugięcie wstępne. Stan naprężeń płyty spełnia stan tarczowy.

Wyznaczając wektor \mathbf{D} z równania (24), odpowiednio przekształconego dla sprężystego materiału rdzenia płyty i wykorzystując zmodyfikowaną postać równania (16) rozwiązano zagadnienie wartości własnych:

$$\det\left(\left(\mathbf{MAP} + \mathbf{MACD} \cdot \mathbf{Z}_v^{-1} \mathbf{V}_v\right) - p^* \mathbf{MAC}\right) = 0 \quad (25)$$

gdzie:

$\mathbf{MAP}, \mathbf{MACD}, \mathbf{MAC}$ - macierze elementów określonych geometrycznymi i materiałowymi parametrami płyty oraz wartością długości przedziału b ,

p^* - bezwymiarowa wartość naprężenia, $p^* = \frac{P}{E}$

Minimalna wartość p^* jest krytycznym obciążeniem statycznym p_{kr}^* trójwarstwowej płyty pierścieniowej z rdzeniem sprężystym.

8. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Przykładowe obliczenia numeryczne przeprowadzono dla płyty obciążonej na brzegu wewnętrznym ciśnieniem zmiennym w czasie określonym zależnością (1). W każdym z analizowanych przypadków prędkość s narastającego obciążenia jest stała i wynosi: $s=K7 \cdot p_{kr}$. Wartość $K7$ wynosi: $K7=20$. Wartość p_{kr} równa: $p_{kr}=144.3$ MPa odpowiada wartości statycznego naprężenia krytycznego wyznaczonego dla płyty, której

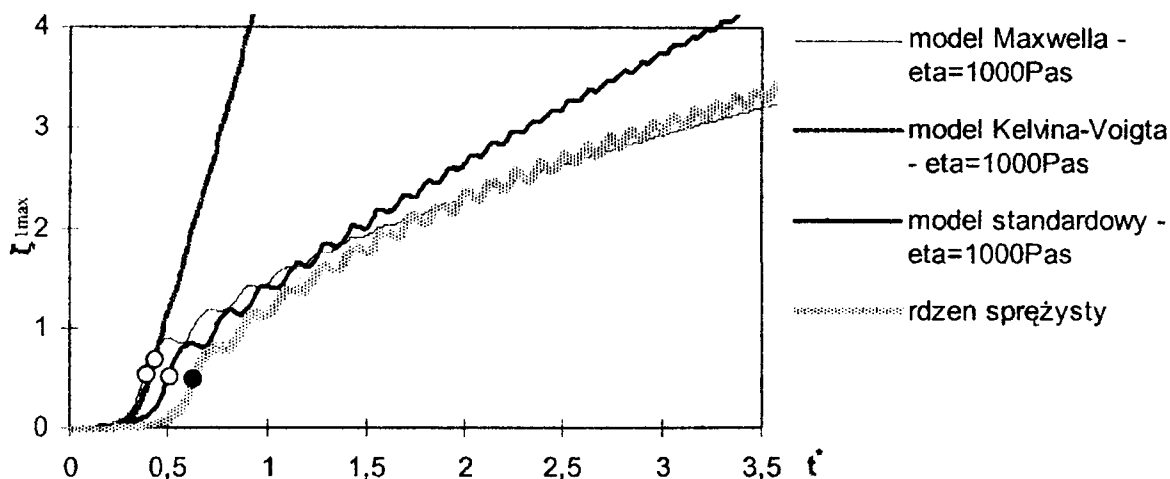
grubość rdzenia wynosi $h_2=0.005$ m, a moduł Kirchhoffa materiału rdzenia wynosi $G_2=15$ MPa.

Wymiary geometryczne płyty wynoszą: $r_z = 0.5$ m, $r_w = 0.2$ m. Okładziny mają grubości równą: $h'=0.001$ m każda i są stalowe: $E=2.1 \cdot 10^5$ MPa, $\nu=0.3$, $\mu=7.85 \cdot 10^3$ kg/m³. Grubość rdzenia wynosi: $h_2=0.005$ m.

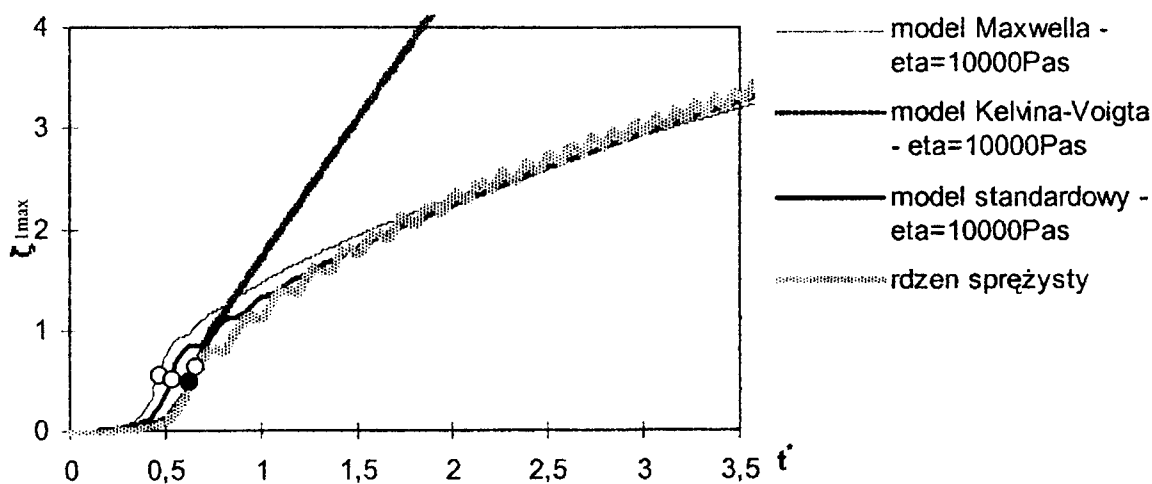
Przykładowej analizie poddano wpływ wartości stałej lepkości lepkosprężystego materiału rdzenia opisanego modelami: Maxwella, Kelvina-Voigta i modelem standardowym (rysunki 2, 3) na charakterystyki maksymalnych ugięć płyty w czasie jej obciążania oraz na wartości parametrów krytycznych (czasu, ugięcia i obciążenia) określone w chwili utraty stateczności płyty.

Krytyczną wartość czasu t_{kr}^* utraty stateczności płyty wyznaczono według kryterium podanego w pracy Volmira [6]. Zgodnie z przyjętym kryterium utrata stateczności płyty następuje w chwili, gdy prędkość punktu płyty o maksymalnym ugięciu osiągnie pierwsze maksimum.

Przedstawione wyniki obliczeń numerycznych otrzymano dla $N=14$ liczby punktów dyskretyzacji metody różnic skończonych.



Rys. 2. Charakterystyki płyty z rdzeniem lepkosprężystym o wartości $\eta(\text{eta})=10^3$ Pas



Rys. 3. Charakterystyki płyty z rdzeniem lepkosprężystym o wartości $\eta(\text{eta})=10^4$ Pas

Wykresy przedstawione na rysunkach 2, 3 dotyczą przypadków płyt z rdzeniem lepkosprężystym. Przyjęte w obliczeniach teoretyczne stałe materiałowe niezależnie od modelu reologicznego mają wartości: stała sprężysta $G=5$ MPa ($G=G_1$ dla modelu standardowego), stała lepkości $\eta=10^3$ i 10^4 Pa·s. Dodatkowo w celu porównania zachowań analizowanych płyt zamieszczono wyniki $\zeta_{t_{max}}=f(t^*)$ dla przypadku płyty z rdzeniem sprężystym z pianki poliuretanowej o wartości modułu Kirchhoffa równej: $G_2=5$ MPa i gęstości materiału $\mu_2=55$ kg/m³ [2].

9. PODSUMOWANIE

Przedstawione przykładowe wyniki obliczeń płyt z rdzeniem sprężystym i lepkosprężystym umożliwiają sformułowanie następujących spostrzeżeń:

- wzrost wartości stałej lepkości materiału rdzenia wydłuża czas krytyczny do utraty stateczności płyty,
- dla analizowanej wartości stałej lepkości $\eta=10^4$ Pa·s krytyczne zachowanie płyty z rdzeniem Kelvina-Voigta i pokrytyczne zachowania płyt z rdzeniem Maxwella i standardowym odpowiadają zachowaniom płyty z rdzeniem sprężystym,
- wartości dodatkowych ugięć krytycznych płyt istotnie nie zmieniają się, wartość ich jest w zakresie od 0.48 ÷ 0.68 całkowitej grubości płyty.

LITERATURA

- [1] Pawlus D., Numerical Solutions to Problem of Deflections of Viscoelastic Annular Plates Under Lateral Variable Loads, Machine Dynamics Problems, Vol.24, No.3, 2000, 93-112.
- [2] Romanów F., Wytrzymałość konstrukcji warstwowych. WSI w Zielonej Górze, Zielona Góra 1995.
- [3] Skrzypek J., Plastyczność i pełzanie, PWN, Warszawa 1986.
- [4] Trombski M., Wojciech S., Płyta pierścieniowa o ortotropii cylindrycznej obciążona w swej płaszczyźnie ciśnieniem zmiennym w czasie, Archiwum Budowy Maszyn, 27, 2, 1981.
- [5] Volmir A.C., Ustojcziwost deformujemych system, Nauka, Moskwa 1967.
- [6] Volmir A.C., Nieliniejnaja dynamika płastinok i obołoczek, Nauka, Moskwa 1972.

DYNAMIC STABILITY OF THREE-LAYERED ANNULAR PLATE WITH ELASTIC OR VISCOELASTIC CORE

The solution to the problem of deflections of three-layered, axially symmetrical, annular plate with elastic or viscoelastic core is presented in this paper. The plate is loaded in its surface by compressive stress proportionally increasing in time. The cross-sectional system of plate layers is symmetric. Outer, thin layers are made of the same, elastic material. Thicker, middle layer is the soft, isotropic core. The rheological models: Maxwell, Kelvin-Voigt and standard were used as the material of viscoelastic core. The system of differential equations (20,21,22) has been obtained and solved using the finite difference method.

THREE-CRITERIA OPTIMIZATION OF COMPRESSED AND BENT THIN-WALLED BEAMS-COLUMNS

S. V. RAKSHA

Department of Applied Mechanics, Dniepropetrovsk State Technical University of Railway Transport, ak. Lazaryana str. 2, Dniepropetrovsk, 49010, Ukraine

A three-criteria optimization problem for thin-walled members of open cross-section with one axis of symmetry (of channel type) subjected to compression or/and bending in two planes under stability constraints is solved. The objective function vector components are the compressive force and the bending moments in two planes. Optimal configurations of the cross-section for marginal cases of loading - axial compression or bending in both planes - are obtained, Pareto-optima are constructed and «compromise» optimal projects parameters are derived as a function of a single leading non-dimensional parameter of weight.

1. INTRODUCTION

Thin-walled members undergo in exploitation, as a rule, the action of various loads, e.g. compression and bending, separately or in a combination. Optimal configurations, which are determined for the separate loads, usually are different, and therefore there arises the problem of choice of a «compromise» project accounting for multifarious character of loading. This problem may be formulated and solved in the framework of the theory of multi-criterion optimization of structures (the vector-valued optimization) which was intensively elaborated in the last decades (see, e.g. [1]).

In the paper the single-, two- and three-criteria optimization problems for thin-walled members of open cross-section with one axis of symmetry (of channel type) subjected to compression and bending in two planes in various (a priori unknown) combinations, under stability constraints are solved. This work is a continuation of paper [2] where a two-criteria optimization problem for thin-walled beams under compression and bending in one plane has been considered.

2. FORMULATION OF THE PROBLEM

The length L , the material properties (elasticity modulus E , Poisson's ratio ν) are considered given. The profile thickness t , widths of the web and flange b_1 , b_2 (see Fig. 1) are design variables (thickness of all the elements is considered to be constant implying cold-formed members).

Stability constraints include conditions of overall stability (for bending and torsional-bending modes) and local buckling (Fig. 2). The overall buckling stresses for the bar under compression or bending were calculated according to the linear theory of thin-walled bars [3]. The local buckling stresses were calculated according to [4]. All the plates that constitute the thin-walled bar-beam were divided on several strips for which the longitudinal stress may be considered as a constant, and the solution of the

buckling problem was constructed by conjugation of the solutions for all the strips, with exact conjugation conditions at the contact lines (in distinction from the finite strips method which uses power approximations for displacements). The local buckling stresses were calculated for a wide range of half-waves numbers $m=2 - 25$.

Strength constraints were not imposed, i.e. the assumption was imposed that the material is elastic and the yield limit is sufficiently high. As it will be seen from the obtained solution this assumption is valid in a range of relatively low values of the weight parameter G^* or the load parameter P^* (see below), for usually employed steels and alloys. For other G^* values the presented solutions determine an idealized optimal configuration.

The nonlinear programming (NP) problem was solved by the linearized method of reduced gradient [5].

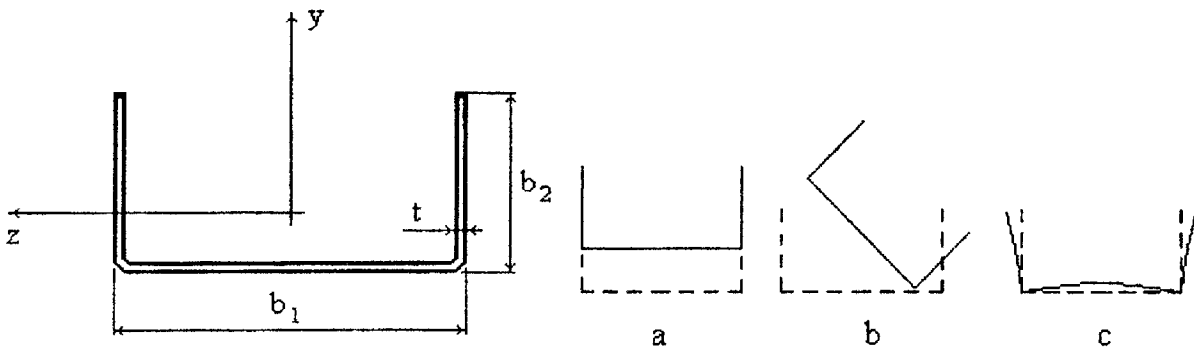


Fig. 1. Cross-section and design variables Fig. 2. Buckling modes of the channel

The non-dimensional parameters of weight, force, bending moments and stresses were used:

$$G^* = \frac{A}{L^2} 10^3, \quad P^* = \frac{P}{L^2 \cdot E} 10^6, \quad M_z^* = \frac{M_z}{L^3 \cdot E} 10^8, \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{E} 10^3 \quad (1)$$

The following optimization problems were considered sequentially:

- Optimization with a single criterion – maximum of the critical compressive force P or maximum of the bending moments M_z (in the symmetry plane) or M_y for given total cross-section area A . The objective functions in these three cases are as follows:

$$P = \max \min (P_f, P_{tf}, P_l), \quad M_z = \max \min (M_{ztf}, M_{zl}), \quad M_y = \max \min (M_{ytf}, M_{yl}),$$

where P_f, P_{tf}, P_l are the critical forces for the flexural mode in the symmetry plane, for the torsional-flexural mode (out-of-plane buckling) and local mode respectively (for the centrally compressed column), M_{ztf}, M_{ytf} are critical bending moments for torsional-flexural modes and M_{zl}, M_{yl} are critical bending moments for local buckling (for pure bending in the symmetry plane and in the perpendicular plane).

- Constructing Parero-optimal projects in the framework of two- and three-criteria optimization problems. The objective function vector components are axial compressive force and bending moments in two planes.

- Optimization with using a global criterion which comprises P , M_z and M_y (together or in pairs).

3. RESULTS OF THE SOLUTION

3.1. SINGLE-CRITERION OPTIMIZATION

Dimensionless parameters of the optimal cross-sections are derived as a function of a single leading parameter - a non-dimensional weight parameter $G^*=A \cdot 10^3/L^2$. Parameters of the cross-sections, optimal for compression ($\max P$) and pure bending ($\max M_z$ or $\max M_y$) turn out to be rather different as it is seen from Table 1 where optimal values of b_2/b_1 and t/b_1 are presented for $G^*=0.4$. (Results of single-criterion optimization for a column under compression in more details are given in [6, 7]).

Table 1. Optimal dimensionless cross-sections parameters for single-criterion optima ($G^*=0.4$).

Parameters	max P	max M_z	max M_y
b_2/b_1	0.433	0.540	0.334
t/b_1	0.022	0.036	0.017

For the single-criterion optima dependencies of non-dimensional critical force P^* and critical moments in two planes M_z^* and M_y^* upon G^* can be approximated with high accuracy (the error less than 1%) by power functions. These approximations are presented in Table 2 (1st - 3rd columns).

Table 2. Approximations of critical forces and moments via the weight parameter G^* in the single-criterion and multi-criterion minimizations

Optimal bar under compression	Optimal bar under bending by M_z	Optimal bar under bending by M_y	Compromise project in three-criteria optimization
$P^* = 2.794G^{*1.668}$	$P^* = 2.453G^{*1.676}$	$P^* = 2.033G^{*1.636}$	$P^* = 2.123G^{*1.646}$
$M_z^* = 3.805G^{*1.978}$	$M_z^* = 6.527G^{*1.995}$	$M_z^* = 3.134G^{*1.952}$	$M_z^* = 6.059G^{*1.966}$
$M_y^* = 16.334G^{*2.0025}$	$M_y^* = 14.184G^{*1.956}$	$M_y^* = 18.19G^{*1.993}$	$M_y^* = 16.487G^{*1.989}$

We see that, e. g., the optimal channel for $\max P^*$ can carry out the moment M_z which is approximately by 40 % less than that of the optimal channel for $\max M_z$, and, correspondingly, the latter bar can carry out the compressive force by 12% lesser than the optimal column for $\max P^*$.

3.2. MULTI-CRITERIA OPTIMIZATION

The Pareto-optimal projects for two- and three- criteria optima were obtained by minimization in P^* with constraints on M_z^* and M_y^* which gradually increased M_z^* and M_y^* from their values obtained for optimal compressed columns up to the values for optimal bars under bending (for a set of G^* values).

In Fig. 2 the Pareto-curve for the case of compression and bending in the symmetry plane for $G^*=0.4$ is presented. Each point on the curve corresponds to an optimal project for a certain combination of compressive force and bending moment.

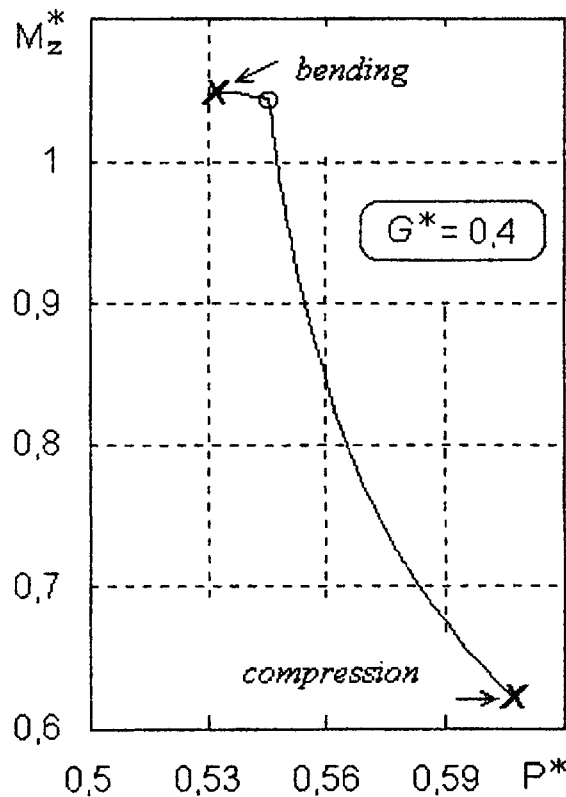


Fig. 2. Pareto-curve for the case of compression and bending in the symmetry plane for $G^*=0.4$

The Pareto-optima surface in the space (P^*, M_z^*, M_y^*) for $G^*=0.4$ is presented in Fig. 3.

With the aim of finding a «compromise» optimal project the optimization problem was solved with the global criterion

$$F = \frac{P^*}{P_{\max}^*} + \frac{M_z^*}{M_{z,\max}^*} + \frac{M_y^*}{M_{y,\max}^*} \quad (2)$$

where P_{\max}^* , $M_{z,\max}^*$ and $M_{y,\max}^*$ are the values of P^* , M_z^* and M_y^* for the single-criterion optima (for two-criteria minimization only two terms were remained in this

expression). In the last column of Table 2 there are presented approximations of P^* , M_z^* and M_y^* via G^* for three-criteria optimum. Comparison of critical values of non-dimensional compressive force and bending moments for various optimal projects (the single-criteria and compromise projects in two- and three-criteria problems) for $G^*=0.4$ is given in Table 3. In the last line the values of criteria F are given for all the optima. The obtained three-criteria optimal members are universal, in distinction from the optimal projects for special loading cases, and applicable at any combination of compression and bending.

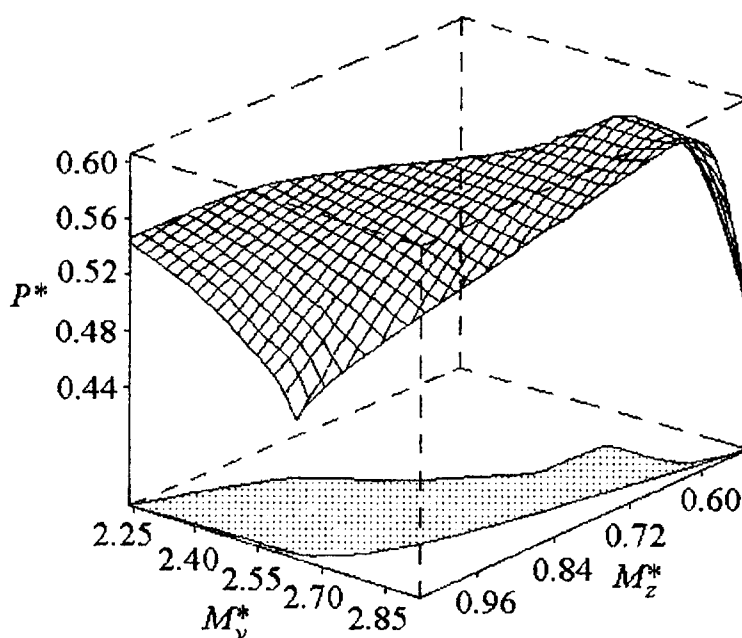


Fig. 3. Pareto-surface in three-criteria optimization for $G^*=0.4$.

Table 3. Comparison of single-, two- and three- criteria optima

	max P^*	max M_y^*	max M_z^*	max (P^* , M_y^*)	max (P^* , M_z^*)	max (P^* , M_y^* , M_z^*)
P^*	0.606	0.454	0.528	0.594	0.544	0.515
M_y^*	2.609	2.928	2.36	2.91	2.238	2.44
M_z^*	0.621	0.524	1.049	0.613	1.042	1.044
F	2.482	2.251	2.677	2.558	2.656	2.679

REFERENCES

- [1] Koski J., Multi-criterion Optimization in Structural Design. In: New Directions in Optimum Structural Design. Ed. by E. Atrek, R.H. Gallagher, K.M. Ragsdell, O.C. Zienkewich. John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1984.
- [2] Manevich A. I., Raksha S. V., Two-criteria Optimization of Thin-walled Beams-columns under Compression and Bending. Proc. of the Third Intern. Confer. on

- Thin-Walled Structures. Advances and Developments. Ed. J. Zaras, K. Kowal-Michalska and J. Rhodes, Elsevier Science Ltd, 2001, p. 575–583.
- [3] Vlasov V.Z., Thin-Walled Elastic Bars. 2-nd edition. Moscow, GIFML, 1959, 568 p. (in Russian).
- [4] Manevich A.I., Raksha S.V., Local and Coupled Buckling of Thin-Walled Bars under Compression and Bending. In: Theoretical Foundations of Civil Engineering, 4:1, part 2 (Proc. of the Polish-Ukrainian Seminar, Warsaw, July 1996), Dnepropetrovsk, 1996, 270-275 (in Russian).
- [5] Manevich A.I., Stability and Optimal Design of Stiffened Shells. Kiev-Donetsk, 1979, 152 p.(in Russian).
- [6] Manevich A.I., Raksha S.V., Optimal Centrally Compressed Bars of Open Cross-Section. In: Theoretical Foundations of Civil Engineering. Proc. of the Polish-Ukrainian seminar, Warsaw, 2000, 484-489 (in Russian).
- [7] Manevich A.I., Raksha S.V. The Optimum Design of Compressed Thin-walled Columns of Open Cross-section. In: Stability of Structures. IX Symposium (Zakopane, IX 2000), 2000, 189-196.

POST-CRITICAL STATE OF COMPRESSED PLATE WITHIN THE FRAMEWORK OF BI-NONLINEAR THEORY

F. ROMANÓW
P. NAJDYCHOR

Zakład Konstrukcji i Eksploatacji Pojazdów, Uniwersytet Zielonogórski
ul. Szafrana 4, 65-516 Zielona Góra

In the majority of strength problems related to sandwich constructions the concept of linear displacement state is used. This state of displacements is defined with the help of the broken line hypothesis, which is used for the determination of critical states of geometrically linear theory and for analysis of post-critical states of geometrically non-linear theory.

In the paper, taking into account the non-linear displacement state of the core and the geometrically linear theory for faces and core (bi-nonlinear theory), we conduct an analysis of post-critical loads. The problem is solved by means of the energy method. The post-critical stresses are described by a general formula applied also for an uniaxial compressed plate simply supported at both edges.

1. INTRODUCTION

The strength and stability of sandwich constructions with a soft foam core is usually analysed by means of the linear displacement state of the core and faces (linear hypothesis) [1,2,3,4,5,6,8]. The above assumption limits calculation methods to thin wall structures.

A survey of Polish scientific results related to the calculation and investigation of sandwich constructions at the turn of the century has been presented in [11] and [10].

Non-linear analysis of stability of sandwich constructions based upon the linear hypothesis of displacement state was already published in the seventies of the last century, e.g. [6],[8].

With the help of the idea of the linear displacement state, for the core and faces, papers taking into account the post-elastic state have also been executed e.g. [1],[12].

In paper [1] post-critical states in the elasto-plastic range were analysed. An example of a compressed three layered plate (steel-aluminium-steel) was given. In all the authors' papers, in contrast to others, the non-linear core displacement state hypothesis was used. By analogy with the linear hypothesis, this state can be shortly denoted as the hyperbolic hypothesis.

A comprehensive set of knowledge and varied applications of the hyperbolic hypothesis can be found in [7].

In the present paper the post-critical loads for the three-layers plate were presented. The faces are made of steel, the core is made of foam. The plate is compressed in one direction with unit force N_x which is uniformly distributed along edges simply supported (for $x=0$; $x=a$). Other two sides of the plate are free. An example of plate with corresponding designations is given in Fig.1.

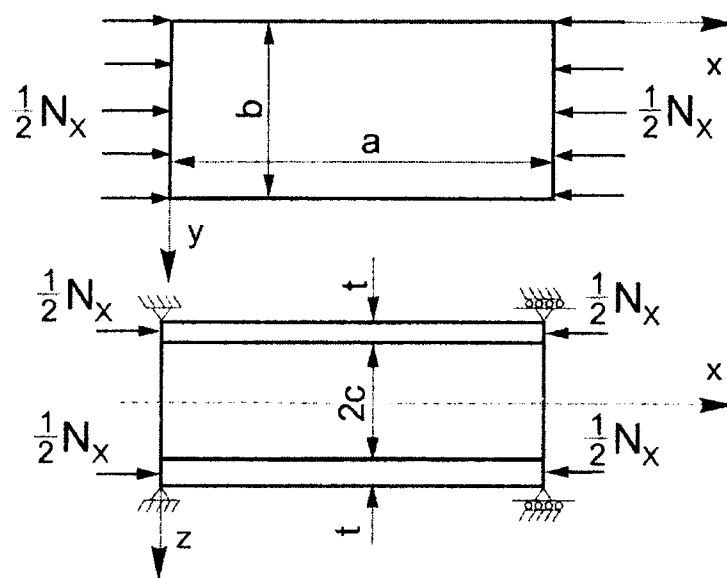


Fig. 1. Compressed sandwich plate with designations

The paper is characterized by the core non-linear displacement state and takes into account geometrically non-linear theory for the faces and core. So, such an approach can be named – bi-nonlinear theory.

A similar analysis was presented in [9]. There, the post-critical states, for the compressed homogeneous plate, fastened with two external layers, were analysed. Kinematics functions are given at the two parallel edges. By using simplified function $\phi(z)$ the transversal non-linear displacements for core are taken into account.

2. DISPLACEMENT AND STRAIN STATE

U and W displacements of faces in the x and z directions must satisfy boundary conditions for the supported plate:

$$\begin{aligned} U &= B_m \cos \beta x \\ W &= A_m \sin \beta x \\ \beta &= \frac{m\pi}{a} \end{aligned} \quad (1)$$

where m (m=1,2,3,...) – is the number of displacement state half waves for faces after stability loss.

The core non-linear displacement state is described by means of the two variables (x, z) functions:

$$\begin{aligned} U_r &= U - \frac{z}{c} \left(U - \frac{t}{2} \dot{W} \right) \cdot F(z) \\ W_r &= W \cdot T(z) \end{aligned} \quad (2)$$

Subindices r and o refer to the core and faces respectively. ($\dot{}$ (dot), $\hat{}$ (hat) designates derivatives in the x and z directions. $\dot{U} = \frac{\partial U}{\partial x}$; $\hat{W} = \frac{\partial W}{\partial z}$).

Functions F and T depend on the variable z only and are expressed by hyperbolic functions discussed in details in [7]. When functions F(z) and T(z) are equal to one, then formulas (2) describe the linear displacement state (broken line hypothesis).

The face and core strains are the non-linear relations and are defined by the formulas:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \dot{U} + \frac{1}{2} \dot{W}^2 \\ \varepsilon_{xr} &= \dot{U}_r + \frac{1}{2} \dot{W}_r^2, \quad \varepsilon_{zr} = \hat{W}_r + \frac{1}{2} \hat{W}_r^2, \quad \gamma_{xzt} = \hat{U}_r + \dot{W}_r + \hat{W}_r \cdot \dot{W}_r \end{aligned} \quad (3)$$

3. PLATE ELASTIC ENERGY

The total plate energy is composed of two terms: the first term corresponds to the core energy E_r , the second, corresponds to the faces energy E_o :

$$E_c = E_r + E_o \quad (4)$$

$$E_r = G_r \int_0^a \int_{-c}^c \left[\left(1 + \frac{\nu_r}{1-2\nu_r} \right) (\varepsilon_{xr}^2 + \varepsilon_{zr}^2) + \frac{2\nu_r}{1-2\nu_r} (\varepsilon_{xr} \varepsilon_{zr}) + \frac{1}{2} \gamma_{xzt} \right] dx dz \quad (4a)$$

where G and ν are the Kirchhoff modulus and Poisson's ratio, respectively.

Taking into account (2) and (3), one can get a formula for the core energy expressed by displacements U and W:

$$\begin{aligned} E_r &= G_r d \int_0^a \left[\frac{1}{c^2} \dot{U}^2 F1 - \frac{t}{c^2} \dot{U} \ddot{W} F1 + \frac{t^2}{4c^2} \ddot{W} F1 + W^2 F5 + \frac{1}{4} \dot{W}^4 F16 + \frac{1}{4} W^4 F19 \right] dx + \\ &+ G_r d \int_0^a \left[-\frac{2}{c} \dot{U} W F9 + \frac{t}{c} \ddot{W} W F9 + \frac{1}{2} W^2 \dot{W}^2 F22 \right] dx + \\ &+ G_r \int_0^a \left[\frac{1}{2c^2} U^2 F10 - \frac{t}{2c^2} U \dot{W} F10 + \frac{t^2}{8c^2} \dot{W}^2 F10 + \frac{1}{2} \dot{W}^2 F11 - \frac{1}{c} U \dot{W} F12 \right] dx + \\ &+ G_r \int_0^a \left[\frac{t}{2c} \dot{W}^2 F12 + \frac{1}{2} W^2 \dot{W}^2 F22 \right] dx \end{aligned} \quad (5)$$

where F1–F2 are certain integrals of hyperbolic functions [7], but the expressions described in italics contain non-linear elements.

The elastic energy of the faces is described by means of the formula

$$E_o = B^* \int_0^a \dot{U} dx + D \int_0^a \ddot{W}^2 dx + \frac{1}{4} B^* \int_0^a \dot{W}^4 dx \quad (6)$$

where $B^* = \frac{E^* t}{1-\nu^2}$; $D = \frac{E^* t^3}{12(1-\nu^2)}$

E^* –Young modulus, t – face thickness, a – plate length, b – its width.

The work of external forces is described by

$$L_Z = -\frac{1}{2} \int_0^a N_x \cdot W^2 dx \quad (7)$$

The potential energy of the whole plate is given by the sum of (5), (6) and (7):

$$P = E_O + E_I + L_Z \quad (8)$$

From the potential minimum condition, two equations are obtained:

$$\frac{\partial P}{\partial A_m} = 0; \quad \frac{\partial P}{\partial B_m} = 0 \quad (9)$$

resulting in formula for loading N_x :

$$N_x = \frac{A_m^2 \cdot R6 + (R1 - R2 \cdot R5)}{R4} \quad (10)$$

Formula (13) can be transformed into:

$$\alpha = \frac{N_x}{N_{xkr}} = \frac{A_m^2 \cdot R7}{N_{xkr}} + 1 \quad (11)$$

This expression defines a relation between the post-critical loads N_x and the deflection amplitude of face A_m . This is a quadratic equation for the independent variable A_m . If $A_m=0$, then the expression (11) can be used to obtain the plate critical load.

$$N_{xkr} = \frac{R1 - R2 \cdot R5}{R4} \quad (12)$$

where:

$$R1 = A_m^2 G_r \left[\beta^2 \frac{at}{c} \left(F1 \cdot d1 \cdot \beta^2 \frac{t}{4c} - F9 \cdot d2 + F10 \cdot \frac{t}{8c} + 0,5 \cdot F12 \right) + \beta^2 F11 \frac{a}{2} \right] + A_m^2 \cdot D \cdot \beta^4 \cdot a$$

$$R2 = A_m B_m \left[G_r \beta \left(d2 \cdot F9 \cdot \frac{a}{c} - \frac{at}{2c^2} d1 \cdot F1 \cdot \beta^2 - \frac{at}{4c^2} F10 - \frac{a}{2c} F12 \right) \right]$$

$$R3 = B_m^2 \left[G_r \left(F1 \cdot d1 \cdot \beta^2 \cdot \frac{a}{2c^2} + F10 \cdot \frac{a}{4c^2} \right) + B^* \beta^2 \frac{a}{2} \right]$$

$$R4 = \frac{ab}{2} \beta^2 \quad R5 = \frac{R2}{R3} \quad R7 = \frac{R6}{R4}$$

$$R6 = A_m^4 \left[G_r \left(d1 \cdot F16 \cdot \beta^4 \frac{3a}{8} + d1 \cdot F19 \frac{3a}{8} + F22 \cdot \beta^2 \frac{a}{4} + d2 \cdot F22 \cdot \beta^2 \frac{a}{4} \right) + B^* \beta^4 \frac{3a}{8} \right]$$

Examples

For given values of the plate parameters:

$$a = 0,285[m]; \quad b = 0,185[m]; \quad \nu_r = 0,17; \quad \nu = 0,3; \quad E_r^* = 58,9 \cdot 10^6[Pa];$$

$$E^* = 68694,8 \cdot 10^6[Pa]; \quad t = 0,001[m]$$

the following results were obtained (12)

Table 1. Critical loads versus core thickness

c [m]	N_{xkr} [N]	m
0,004	28961	1
0,005	36034	1
0,008	60040	1
0,01	77525	1
0,02	142754	13
0,05	143383	13

For these data, the dependence of the critical force (see (12)) on core thickness is presented in Table 1. Similar relation is presented in Fig.2.

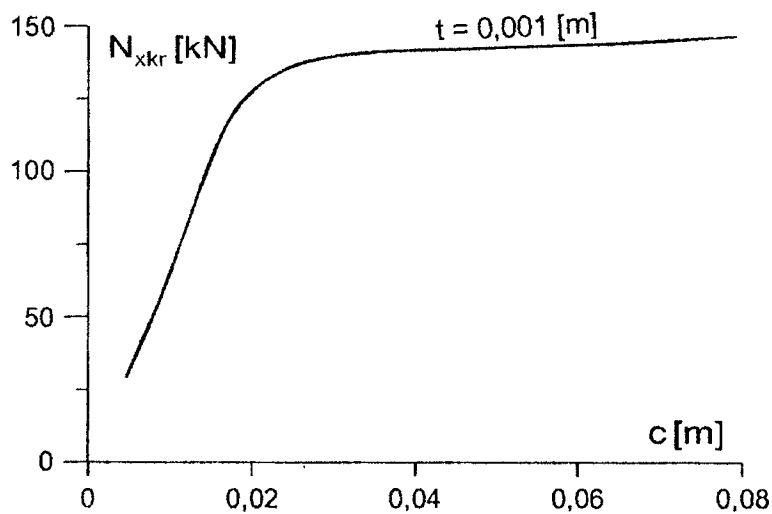


Fig. 2. The critical force N_{xkr} versus core thickness

A dependence of the coefficient alfa on values of the amplitude A_m (formula 11) is presented in Table 2.

Table 2. Dependence of the coefficient alfa on values of the amplitude A_m (11)

c = 0,004 [m]; m = 1						
A_m	$\pm 0,0005$	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0003$	$\pm 0,0002$	$\pm 0,0001$	0
α	1,07	1,04	1,024	1,01	1,003	1
c = 0,02 [m]; m = 13						
A_m	$\pm 0,0005$	$\pm 0,0004$	$\pm 0,0003$	$\pm 0,0002$	$\pm 0,0001$	0
α	1,009	1,0063	1,0035	1,0016	1,0004	1

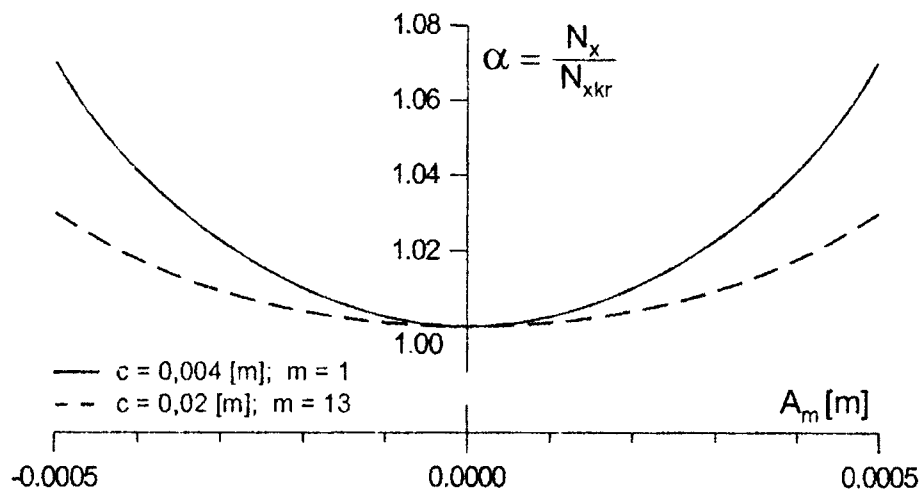


Fig. 3. Dependence of the coefficient alfa on values of the amplitude A_m

With the help of formulas (12) and (10) one can calculate the resultant force acting upon the plate:

$$N_{kr} = N_{xkr} \cdot b, \quad N_x = N_x \cdot b \quad (13)$$

or related stresses:

$$\sigma_{kr} = \frac{N_{xkr}}{2t}, \quad \sigma_x = \frac{N_x}{2t} \quad (14)$$

REFERENCES:

- [1] Grądzki R, Kowal-Michalska K., Nośność ściskanych wielowarstwowych płyt prostokątnych, IX Sympozjon Stateczności Konstrukcji Zakopane 2000, s. 53-60.
- [2] Hop T., Konstrukcje warstwowe, Arkady Warszawa 1980.
- [3] Planterma F.J., Sandwich Construction. John Wiley-Sonc, Inc. New York 1966.
- [4] Stam K, Witte H., Sandwichkonstruktionen. Springer-Verlag, Wien, New York 1973.
- [5] Magnucki K, Oswald M., Stateczność i optymalizacja konstrukcji warstwowych, Poznań – Zielona Góra 2001.
- [6] Szyc W., Nieliniowe zagadnienia stateczności sprężystej, trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej, Rozprawy Inżynierskie nr 19, 1971.
- [7] Romanów Fr., Wytrzymałość konstrukcji warstwowych, WSI Zielona Góra 1995.
- [8] Twardosz F, Duong Hong – Thai., Stateczność trójwarstwowej otwartej powłoki walcowej poddanej ścinaniu, Archiwum Budowy Maszyn, z. 3, 1975.
- [9] Romanów Fr, Najdychor P, Bejenka S., Stany nadkrytyczne ściskanych jednorodnych płyt usztywnionych zewnętrznymi warstwami, II Sympozjon Kompozyty – Konstrukcje warstwowe, PTMTS Oddział we Wrocławiu. Wrocław – Karpacz 2001, s. 199-204.
- [10] Bliński T, Kmita J., Dorobek nauki polskiej w zakresie konstrukcji zespolonych, Wydawnictwo Zachodnie Centrum Organizacji. Politechnika Zielonogórska 2000.
- [11] Romanów Fr., Wkład polskich uczonych w rozwój metod obliczeniowych i badań konstrukcji warstwowych, Polska Mechanika u progu XXI wieku, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Kazimierz Dolny – Warszawa 2001, s. 123-134.
- [12] Zielnica J., Wyboczenie trójwarstwowej powłoki stożkowej poza zakresem sprężystym przy obciążeniu złożonym. Rozprawy Inżynierskie 1981, s. 453-47.

BEHAVIOUR OF A CONCRETE FILLED STEEL BOX COLUMN WITH CONSIDERING DELAMINATION OF STEEL-CONCRETE INTERFACE

S. SHIMIZU, N. IWAMOTO

Department of Civil Engineering, Shinshu University
Wakasato 4-Chome, Nagano, 380-8553 Japan

One of the authors presented a numerical result of behaviour of partially concrete filled steel column in the 9th Symposium on Stability of Structures in 2000 held in Zakopane. Following this study in 2000, the authors made a numerical analysis on the partially concrete filled steel box column. In the current study, delamination of the interface of the steel plate and the filled-in concrete is taken into account. In the analysis, delamination is realized by the "Interface Elements" which have no physical dimension. In the analysis, three types of the models are considered: (1) the models with no delamination, (2) the models considering delamination and (3) the models with no filled-in concrete. The numerical results indicates that delamination decreases the strength of the column by nearly 7.5%.

1. INTRODUCTION

Steel box columns used as piers of the motorway viaduct are often filled with the concrete to improve the strength against earthquake, to prevent the local buckling of plates composing the column or to protect from the collision of cars [1], [2].

One of the authors also made a numerical analysis on the concrete-filled steel columns, with the height of the filled-in concrete as a parameter, and the influence of the filled-in concrete are cleared [3]. Originally, the filled-in concrete in a steel column is considered to play a role only to prevent the deformation of the steel plate, and to have no strength as a part of the column. However, the results of studies on the concrete-filled steel columns [1]-[3] indicate that the concrete in the column influences the strength of the columns.

Generally, in an interface of the concrete and the steel plate, such as the upper surface of the top flange of a composite steel girder, shear connectors are arranged to keep the adhesion of the concrete and the steel. However, in the concrete-filled steel columns, no shear-connector is arranged, because the filled-in concrete is considered to play no role in carrying the load. Therefore, in a practical concrete-filled steel column, delamination may occur at the interface of the steel plates and the concrete.

Although the delamination of the steel plates and the concrete in the column may have influence on the strength and the behaviour of the column, almost all previous studies on the strength of the concrete-filled steel columns do not take the influence of delamination into the account.

With the above background, the numerical analysis of the concrete-filled steel columns is made with considering the delamination at the interface of the steel plate and the filled-in concrete. In the analysis, delamination is realized by the "Interface Elements" which have no physical dimension and no strength under the tensile stress

with a certain magnitude. The analysis is made on three types of the models: (1) the models with no delamination, (2) the models considering delamination and (3) the models with no filled-in concrete, and the results are compared to each other. The current paper presents the results of the analysis.

2. THE INTERFACE ELEMENT

The interface element used in this study is one of the element type prepared in the program package LUSAS. For this type of element, the magnitude of the delaminating stress σ_d at which delamination begins should be specified. In this element, when the tensile stress reaches to σ_d , the delamination begins. After delamination begins, the distance between two nodes connected by the interface element is increased with decreasing of the stress in the interface element. When the stress in the interface element becomes zero, the delamination is completed.

In the current study, delaminating stress σ_d is assumed to be $\sigma_d=0.2$ MPa and $\sigma_d=20$ MPa. With the delaminating stress $\sigma_d=0.2$ MPa, of course delamination begins when the stress in the interface element reaches to 0.2 MPa. With $\sigma_d=20$ MPa, delamination shall begin when the stress reaches to 20 MPa. However, the results of the preliminary analysis indicate that the magnitude of the tensile stress in the surface of the concrete is less than 10 MPa, and delamination does not occur at $\sigma_d=20$ MPa. Therefore, the results of $\sigma_d=20$ MPa can be used to confirm the influence of the existence of the interface elements, by comparing with the results of the models with no interface elements.

3. ANALYSED MODELS AND LOADINGS

The numerical model used in this analysis is a steel column with the height of 4000mm and 1000mm x 1000mm square section. The thickness of the steel plates of the column is 10 mm. The concrete is assumed to be filled up to the height of 1500 mm from the bottom of the column.

The column is considered to be made with the Grade SM490 steel which has the Young's modulus $E_s=200$ GPa, yield stress is $\sigma_{sy}=460$ MPa and Poisson's ration $\nu_s=0.3$. After yielding, i.e. within the strain hardening range, the modulus of the stress is reduced to $E_h=2$ GPa. The filled-in concrete has the Young's modulus of $E_c=30$ GPa, yield stress is $\sigma_{cy}=39$ MPa and Poisson's ration $\nu_c=0.167$, and the modulus after yielding is 0.39 GPa.

The column is assumed as fixed in all directions at its bottom. In the model, no initial imperfection is considered. The 3-dimensional 8-nodes rectangular parallelepiped elements are used both for the concrete and the steel. The analysis is made with the arc-length increment technique.

In the analysis, the models (1) are the models with no delamination, (2) the models considering delamination and (3) the models with no filled-in concrete are used. However, the models with no delamination can be classified into two types, i.e. the models with no interface element and the models having interface element with large delaminating stress. In this paper, these model types are denominated as Type A (models with no interface element), Type B (models having interface element with large delaminating stress), Type C (models considering delamination) and Type D (models with no filled-in concrete). Hereafter the models are called using these names.

The load is applied uniformly at the top of the column. Under an earthquake, many practical steel columns are damaged by the horizontal motion of the superstructure on the column. Therefore, in the current analysis, two types of the loading pattern including the horizontal load are considered as illustrated in Fig.1. Fig.1(a) indicates a horizontal loading as the horizontal motion of the superstructure. Fig.1(b) is the loading pattern with both the horizontal and the vertical load. Considering the Japanese design code on the earthquake resistance design, the magnitude of the horizontal load is assumed to be 0.2 times of the vertical load.

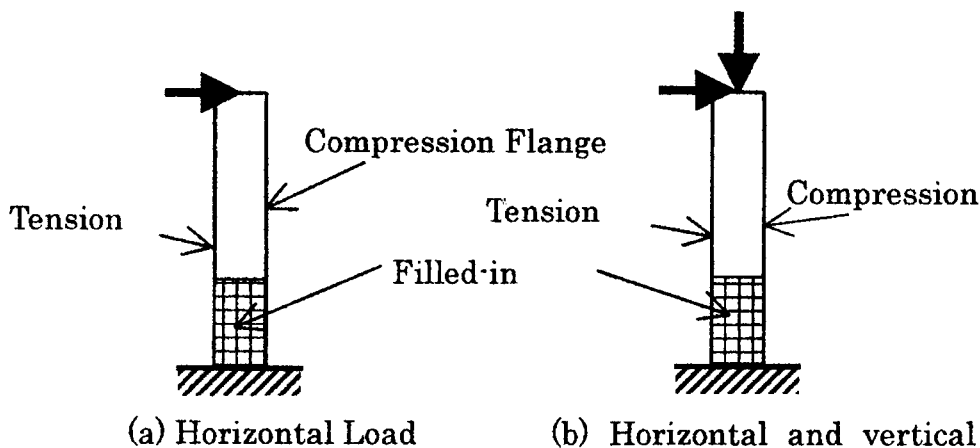


Fig.1 Loading Patterns

4. NUMERICAL RESULTS

4.1. LOAD DEFLECTION RELATIONS

Fig.2 shows the load-deflection relations of the models subjected to the horizontal loading only. In this figure, the vertical axis denotes the magnitude of the load of the horizontal direction, and the horizontal axis the horizontal deflection at the top of the column.

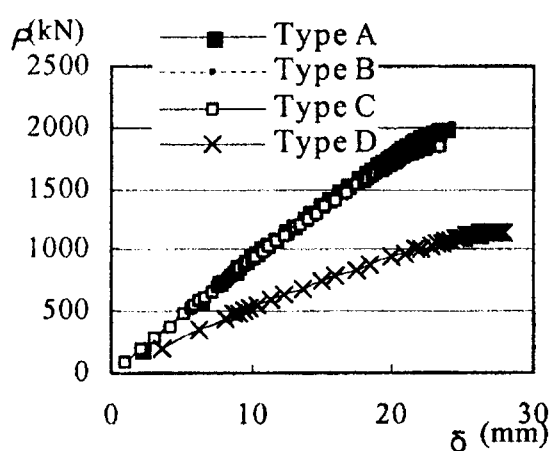


Fig.2. Load-Deflection Relations (Horizontal Load)

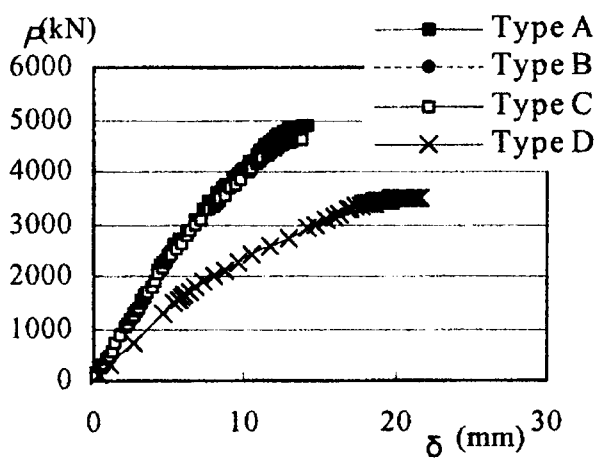


Fig.3. Load-Deflection Relations (Horizontal and Vertical Load)

In all models, the deflection increases gradually and almost linearly with the load. The model Type A (with no interface element) and the model Type B (having interface element with large delaminating stress) have almost the same path on the load-deflection diagrams. This fact suggests that the arrangement of the interface elements between the concrete and the steel has no influence on the behaviour of columns. The maximum load of these two models is 2000 kN. The model Type C (considering delamination) has the maximum load of 1850 kN, and this is smaller by nearly 7.5% than the maximum load of the models Type A and B. This is presumably caused by delamination of the steel plates. In these three models, buckling of the steel plate is observed at the load of about 800 kN. The deformation due to the buckling is observed at the height of 3000mm from the bottom in the compressed flange of the column in all models. The horizontal deflection of these three models at their maximum load is approximately 25 mm. The model Type D (with no filled-in concrete) has its maximum load of 1100 kN, and this is smaller by 45% than the maximum load of the Types A and B. On the other hand, the

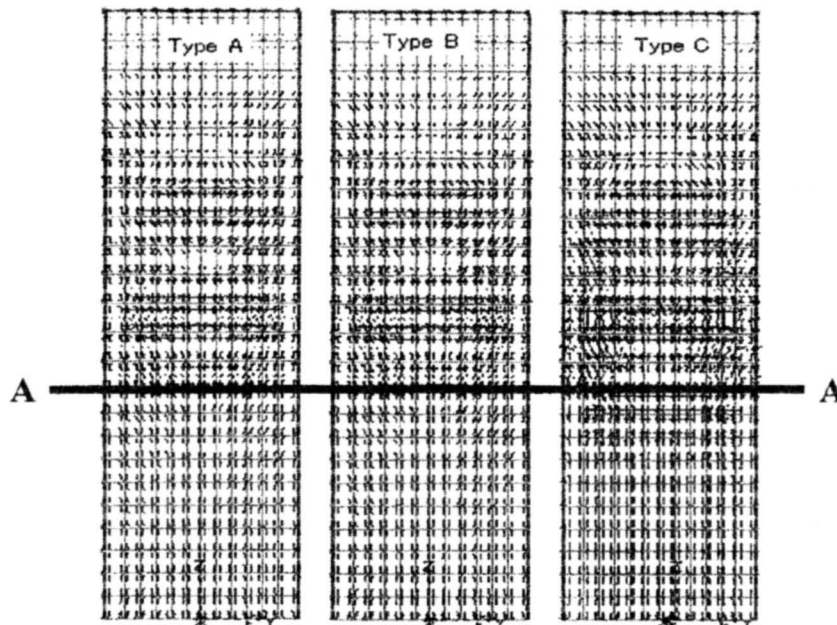


Fig.4 Principal Stress Distributions (Horizontal Load)

horizontal deflection of the model Type D at the maximum load is about 28 mm and 12% larger than for the Types A and B. This result indicates that, as pointed out in [3], the filled-in concrete increases the strength but decreases the deformation capacity of the column.

Fig.3 also shows the load-deflection relations, however, models in this figure are subjected not only to the horizontal loading but also to the vertical load. The vertical axis of this figure denotes the magnitude of the load in the vertical direction. Therefore, it should be noted that the magnitude of the horizontal load is 0.2 times of the load in this figure.

In this figure, Types A and B have almost similar curves too. The deflection of Types A, B and C increases almost linearly up to the load of about 2000 kN. At $P=2000$ kN, the inclination of the curves becomes smaller, and after this stage, the deflection increases again linearly. In these models, buckling is observed at about $P=2200$ kN. The maximum load of the Types A and B is 4850 kN and of Type C is 4640 kN. In the Type C, the inclination of the curve is changed at $P=1600$ kN and the maximum load of this

model is about 3480 kN. The horizontal deflection of this model at the maximum load is nearly 24 mm although it is about 14mm in the models Type A, Type B and Type C.

4.2. STRESS DISTRIBUTIONS

In Fig.4 and Fig. 5, the distributions of the principal stress of steel plates of the columns of the model Types A, B and C are plotted. Within these figures, Fig.4 is a figure of the models being subjected to the horizontal load (at the horizontal load reached to $P=1850$ kN), and Fig.5 is of the models with both the vertical and horizontal

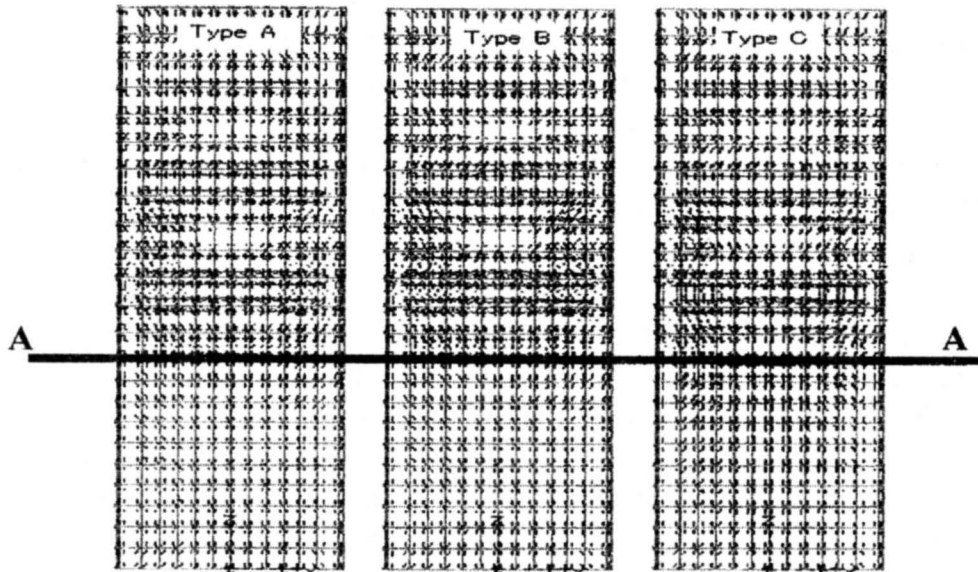


Fig.5 Principal Stress Distributions (Horizontal & Vertical Load)

loading at the vertical load $P=4500$ kN (horizontal load of 900 kN). The principal stress distributions in the compression flange of the column are shown in these figures. The thick lines marked as A-A in these figures indicate that the concrete is filled up to the level of the line.

At first, results in Fig.4 are shown. This figure shows that the model Type A (with no interface element) and the model Type B (having interface element with large delaminating stress) have very similar stress distribution. In the bottom part of the column where the concrete is filled-in, the compressive stress directed almost vertically is observed. Reflecting the magnitude of the bending moment as a cantilever beam, the vertical stress in the bottom part is larger than in the upper part in the concrete-filled zone. In the Type C (with delamination), the larger stress is found at the upper part of the concrete-filled zone, and the direction of the stress is disturbed. This is caused by the out-of-plane deflection of the steel plate due to delamination. In the upper part of the column, zones with the larger stress and the smaller stresses are found alternately.

The stress distributions in Fig.5 are very similar to those shown in Fig.4. However, due to the compression caused by the vertical loading, the magnitude of the vertical stress in the concrete-filled zone seems almost uniform.

In both figures, the stress in the upper part (non concrete-filled part) is larger than in the lower part. This fact indicates that the filled-in concrete carries a part of the loading. In the upper part, a zone with smaller stresses is found just above the Line AA

in the Type C model, although in Types A and B the zone with smaller stress is found a little upper than in Type C.

Although the figures are not shown in this paper, in the tension flange of the column, Types A,B and Type C have very similar stress distribution, and influence of delamination is not observed under both loading patterns.

5. REMARKS AND CONCLUSIONS

In this study, numerical analysis is made on the partially concrete-filled steel columns with considering delamination of the filled-in concrete and steel plates.

In all models, the buckling deformation is found in the compression flange of the columns. The maximum out-of-plane deformation of the plate is 30mm in the Type C model and 28mm in the Types A and B under the horizontal load at their final stage. Thus, it is found that delamination shall increase the buckling deformation of the steel plate of the column. In the tension flange of the column buckling deformation is not observed. However, large intensity stress is found in the tension flange at the location of the top part of the filled-in concrete in all models except Type D. In the tension flange, delamination does not arise.

According to the results in this paper, delamination decreases the strength of the column. Delamination also disturbs the stress distribution of the compression flange of the column. Almost all previous studies on the concrete-filled steel columns are made on the assumption that the steel plates of a column adhere completely to the filled-in concrete. However, the results described in this paper indicate that delamination of the concrete and the steel plate should be taken into account in designing a concrete-filled steel column.

The series of our studies on the concrete-filled steel columns including [3] are made concerning the concrete-filled steel piers damaged by the Kobe Earthquake in 1995, i.e. the Kobe Earthquake made a beginning for this study. However, in the current study, only the static loading is considered and the effect of the dynamic (or alternative) loading is not considered. Therefore, the authors feel that the analysis of the dynamic behaviour of this problem must be made in future.

REFERENCES

- [1] Ge,H.B., Usami,T., Strength Analysis of Concrete-Filled Thin-Walled Steel Box Columns, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol.30, pp259-281, 1994
- [2] Usami.T., Ge.H.B., Saizuka.K., Behaviour of Partially Concrete-filled Steel Bridge Piers Under Cycle and Dynamic Loading, *Jour. Struct. Eng., ASCE*, Vol.41, No.41, 1997
- [3] S. Shimizu, M. Kameko and T., Yamamoto Post-Stiffening of Partially Concrete-Filled Steel Box Columns, *Proc. of 9th Symposium on Stability of Structures*, 255-262, Zakopane, Poland, 2000

ANALIZA STATECZNOŚCI I WYTRZYMAŁOŚCI GRANICZNEJ WARSTWOWEGO ELEMENTU PRĘTOWEGO

E. SZYMCZYK, M. WIECZOREK

Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej WME WAT
Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

W referacie przedstawiono model warstwowego belkowego elementu skończonego. Przekrój belki podzielono na warstwy o zmiennej szerokości i sztywności. W modelu elementu uwzględniono nieliniowość fizyczną i geometryczną. Dokonano analizy wpływu wzmocnienia belki na stateczność i nośność graniczną konstrukcji prętowych.

1. WSTĘP

W analizie konstrukcji wybór elementu skończonego decyduje o dokładności i efektywności obliczeń. Przy modelowaniu konstrukcji należy brać pod uwagę jej geometrię, strukturę wewnętrzną, charakter obciążenia oraz wynikający z nich charakter deformacji. W pracy przedstawiono krzywoliniowy element skończony MES, którego pełny opis zamieszczono w [1]. Prezentowany element stanowi modyfikację elementu krzywoliniowego rozważanego w [2]. Umożliwia on dyskretyzację płaskiej konstrukcji prętowej, zbudowanej z uwarstwionych prętów prostych lub zakrzywionych o przekrojach mających jedną oś symetrii, leżącą w płaszczyźnie konstrukcji.

W proponowanym modelu elementu przyjęto koncepcję podziału przekroju na warstwy. Pozwala ona na opis stopniowego uplastyczniania się przekroju oraz na uwzględnienie różnych parametrów geometrycznych i materiałowych w poszczególnych warstwach przekroju pręta. Każda warstwa może mieć inną szerokość, ale musi być symetryczna względem osi symetrii przekroju.

2. MODEL ELEMENTU

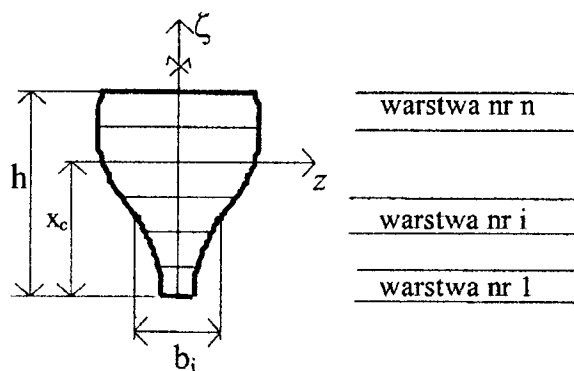
W modelu elementu przyjęto następujące założenia :

- wysokość h przekroju pręta jest mała w porównaniu z jego promieniem krzywizny R ($h \ll R$),
- pomija się odkształcenia postaciowe ($\Delta\gamma = 0$),
- przekroje po odkształceniu pozostają płaskie,
- przyrosty odkształceń wzdłużnych są bardzo małe ($\Delta\varepsilon \ll 1$).

Parametry materiałowe elementu zebrane są w macierzy sprężysto – plastyczności \mathbf{D}_{e-p} , która ma wymiar 2×2 . Uwzględniając postulat podziału przekroju elementu na warstwy (rys. 1) wyrazy macierzy \mathbf{D}_{e-p} definiuje się w postaci sum skończonych.

Zakłada się, że przekrój został podzielony na n warstw o tej samej wysokości $h_i = \frac{h}{n}$, różnych szerokościach b_i oraz parametrach materiałowych E_i i σ_{pli} . Położenie środka ciężkości przekroju otrzymuje się wówczas ze wzoru :

$$x_c = \frac{S}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i \frac{h^2}{n^2} \left(i - \frac{1}{2}\right)}{\sum_{i=1}^n b_i \frac{h}{n}} \quad (1)$$



Rys. 1. Podział przekroju na warstwy

W zakresie sprężystym oraz gdy wartości modułów Younga poszczególnych warstw są takie same ($E_i = E$), macierz \mathbf{D}_{e-p} ma klasyczną postać

$$\mathbf{D}_{e-p} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdzie: A - pole powierzchni przekroju,

I - moment bezwładności przekroju.

Jeżeli założymy, że warstwy przekroju są zbudowane z różnych materiałów, to wtedy macierz \mathbf{D}_{e-p} ma wszystkie wyrazy różne od zera, nawet w zakresie sprężystym.

W takim modelu macierz \mathbf{D}_{e-p} można sprowadzić do postaci diagonalnej, redukując siły wewnętrzne względem fizycznego środka ciężkości x_{cf} .

$$x_{cf} = \frac{S_f}{A_f} = \frac{\sum_{i=1}^n b_i E_i \frac{h^2}{n^2} \left(i - \frac{1}{2}\right)}{\sum_{i=1}^n b_i E_i \frac{h}{n}} \quad (3)$$

W rezultacie takiej redukcji sił wewnętrznych w zakresie sprężystym macierz \mathbf{D}_{e-p} przyjmuje postać diagonalną :

$$\mathbf{D}_e = \begin{bmatrix} A_f & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie $I_f = \sum_{i=1}^n b_i E_i \left(\frac{h^3}{n^3} (i^2 - i + \frac{1}{3}) - \frac{h^2}{n^2} x_{cf} (2i - 1) - \frac{h}{n} x_{cf}^2 \right)$ - zastępcza sztywność

na zginanie.

Na podstawie powyższych założeń wyprowadzono macierz sztywności i macierz geometryczną. Stanowią one bazę numerycznej analizy stateczności konstrukcji i analizy nieliniowej [3]. Sposób tworzenia powyższych macierzy opisano szczegółowo w pracach [1,2].

3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

W praktyce inżynierskiej wytrzymałość belek zbrojonych oblicza się stosując sztywność zastępczą [4]. Dzięki wprowadzeniu w modelu belki warstw o różnej sztywności możliwa jest analiza konstrukcji wzmocnionych zbrojeniem. Celem przedstawionych przykładów jest ocena wpływu zbrojenia szczególnie rozmieszczonego niesymetrycznie w przekroju pręta na stateczność konstrukcji.

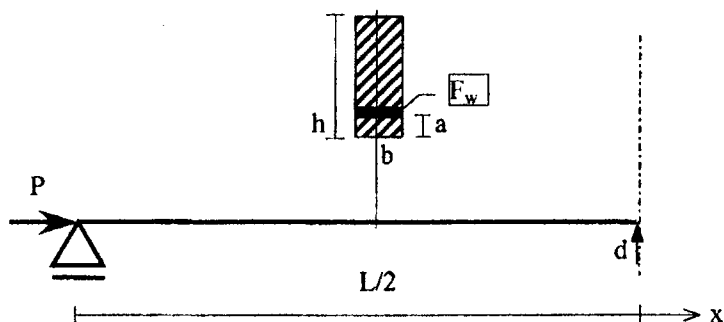
3.1. BELKA JEDNOPRZESŁOWA

Belka jednoprzęsłowa wykonana jest z jednorodnego materiału osnowy i dodatkowo wzmocniona prętami zbrojenia (rys. 2). Celem analizy jest zbadanie wpływu zbrojenia na stateczność belki w zakresie sprężystym.

Rozważono belkę o przekroju prostokątnym, swobodnie podpartą i ścisną osiowo (rys. 2). Przyjęto następujące wymiary: długość belki $L = 2$ [m], przekrój poprzeczny $b = 0.12$ [m], $h = 0.1$ [m], rozmieszczenie wzmocnienia $a/h = 0.1$, wielkość wzmocnienia $\mu_w = 0.1$, gdzie $\mu_w = \frac{F_w}{b \cdot h}$ (rys. 2). Moduł sprężystości osnowy $E_M = 21000$ [MPa] oraz moduł sprężystości zbrojenia $E_w = 210000$ [MPa].

Obliczenia wykonano dla dwóch wariantów przekroju poprzecznego:

- wariant 1 – belka jednorodna (bez wzmocnienia),
- wariant 2 – belka ze wzmocnieniem,



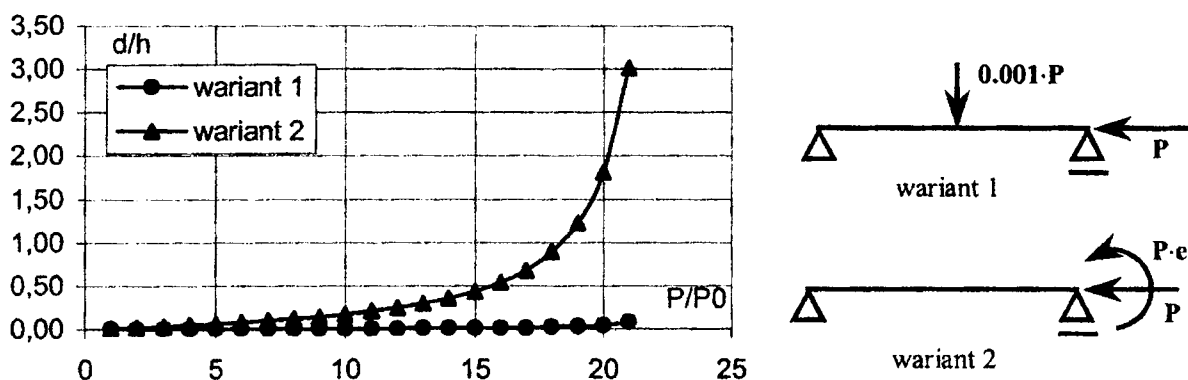
Rys 2. Model belki

W wariacie 1 belka jest jednorodna, ale jej szerokość przekroju wynosi $b_z = 0.2046379$ [m]. Stosunek b_z/b wynosi 1.705316. Szerokość przekroju b_z dobrano przy założeniu, że sztywność na zginanie w obu wariantach jest taka sama.

Siłę krytyczną belki swobodnie podpartej ścisanej osiowo wyznacza się analitycznie na podstawie wzoru Eulera:

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^4} \stackrel{\text{wariant 2}}{=} \frac{\pi^2 \cdot I_f}{L^4} \quad (5)$$

W wyniku obliczeń numerycznych (liniowa analiza stateczności) i analitycznych dla obu wariantów uzyskano taką samą wartość siły krytycznej równą 841 [kN]. Wyniki geometrycznie nieliniowej analizy belek przedstawiono na rys. 3, gdzie P oznacza wartość obciążenia, $P_0 = 40$ [kN], d oznacza przemieszczenie środkowego przekroju belki (rys. 2). W wariacie 1 wprowadzono siłę prostopadłą równą co do wartości $0.001 P$ i działającą w środku rozpiętości belki. W obu przypadkach uzyskano ten sam poziom obciążenia krytycznych 840 [kN], ale w wariacie 2 w wyniku mimośrodu e wartości przemieszczeń są kilka rzędów większe niż w wariacie 1.

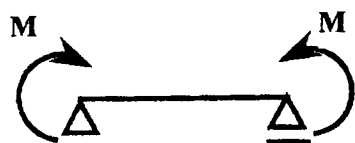


Rys 3. Ścieżka równowagi

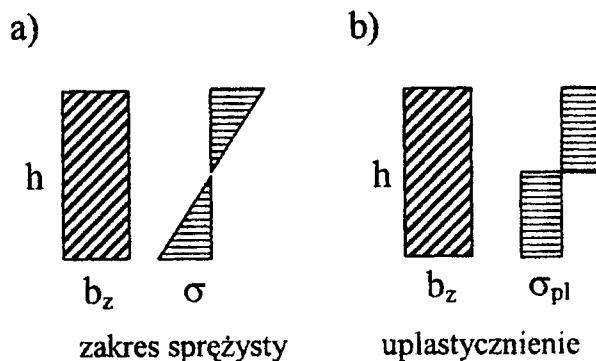
3.2. BELKA ZGINANA

Wpływ niesymetrycznego wzmocnienia przekroju staje się istotny w przypadku określania nośności granicznej. Wykażemy to na przykładzie belki poddanej czystemu zginaniu (rys. 4). Rozważmy belkę o właściwościach z poprzedniego przykładu, ale pracującą w zakresie sprężysto – plastycznym. Granica plastyczności osnowy $\sigma_{plM} = 20$ [MPa], a zbrojenia $\sigma_{plW} = 200$ [MPa]. Model materiału jest sprężysto idealnie plastyczny. Na rys 5 przedstawiono wykres naprężeń normalnych wywołanych czystym zginaniem w przekroju jednorodnym, a na rysunkach 6 wykres naprężeń normalnych w przekroju wzmocnionym zbrojeniem.

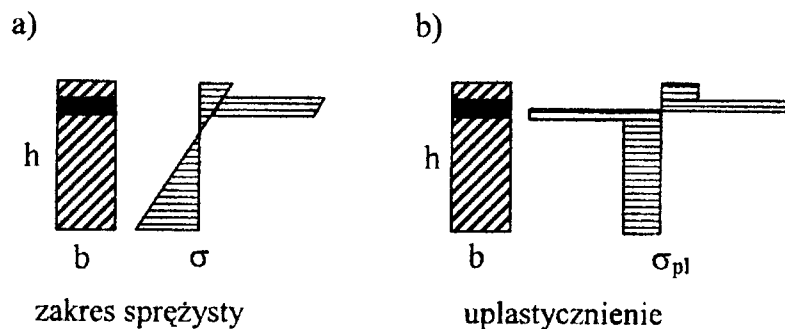
Porównując rys. 5a i 6a widzimy, że w przypadku przekroju jednorodnego fizyczny środek ciężkości przekroju pokrywa się ze środkiem geometrycznym, natomiast gdy przekrój jest wzmocniony niesymetrycznym zbrojeniem fizyczny środek ciężkości przesuwa się w stronę zbrojenia. W procesie deformacji i uplastyczniania się przekroju fizyczny środek ciężkości ulega dalszemu przesunięciu i zbliża się do warstwy stanowiącej zbrojenie.



Rys 4. Belka zginana



Rys. 5. Wykresy naprężeń w przekroju jednorodnym



Rys. 6. Wykresy naprężeń normalnych w przekroju ze wzmocnieniem

Tabela 1. Porównanie wyników analitycznych i numerycznych

	Moment plastyczny [Nm]		różnica [%]
	analityczne	numeryczne	
Wariant 1	10232	10928	6.8
Wariant 2	9186	10120	10
różnica [%]	10	7.4	

Wyniki obliczeń analitycznych i numerycznych przedstawiono w tabeli 1. Zakładając, że naprężenia plastyczne dla wzmocnienia są 10 razy większe od naprężeń plastycznych dla osnowy, nośność graniczna belki dla przekroju jednorodnego jest około 10% większa od nośności granicznej dla przekroju zbrojonego. Wyniki uzyskane numerycznie są kilka procent wyższe od analitycznych. Obliczenia numeryczne obarczone są błędem wynikającym z faktu, że uplastycznienie warstwy następuje w momencie gdy naprężenia w środku wysokości warstwy osiągają granicę plastyczności. Największy błąd powstaje przy uplastycznianiu ostatniej warstwy (najbliższej osi obojętnej). W przypadku przekrojów niesymetrycznych uplastycznienie tej warstwy może być obarczone bardzo dużym błędem

3.3. RAMA

Rozważono ramę utwierdzoną złożoną belek o przekroju prostokątnym, słupy ściskano osiowo (rys. 7). Przyjęto wymiary belki jak w przykładzie 3.1. Porównawcza wartość siły $P = 1000$ [N]. Celem analizy jest zbadanie wpływu zbrojenia na stateczność ramy w zakresie sprężystym.

Rozważono pięć modeli ramy od 1 do 5 pięter (rys. 7). Obliczenia wykonano dla trzech wariantów przekroju poprzecznego:

- wariant 1 – belka ze wzmocnieniem od wewnątrz ramy,
- wariant 2 – belka jednorodna (bez wzmocnienia),
- wariant 3 – belka ze wzmocnieniem na zewnątrz ramy.

Tabela 2. Wartości mnożników obciążenia krytycznego μ_{kr}

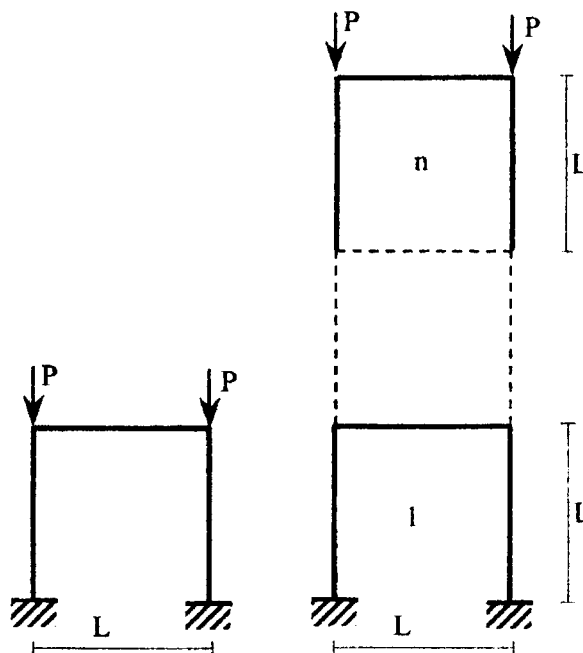
model	Wariant 1	Wariant 2	Wariant 3	Różnica [%]
1	623.5	628.4	633.3	1.12
2	413.1	437.7	444.7	1.61
3	377.5	384.2	391.5	1.83
4	355.5	361.9	369.5	1.95
5	339.4	346.3	353.2	2.03

W tabeli 2 zestawiono wartości μ_{kr} uzyskane w wyniku liniowej analizy stateczności dla modeli 1 – 5. Obciążenie krytyczne wyznacza się ze wzoru $P_{kr} = \mu_{kr} P$

4. PODSUMOWANIE

Z przedstawionych rozważań wynikają następujące wnioski. Dla konstrukcji statycznie wyznaczalnych liniowa analiza stateczności belek zbrojonych jest równoważna analizie belek jednorodnych o sztywności zastępczej. Niesymetryczne usytuowanie zbrojenia nie ma w tym przypadku wpływu na wartości obciążeń krytycznych. W wyniku analizy nieliniowej obserwuje się jednak większe deformacje ze względu na wpływ mimośrod.

Analiza nośności granicznej pokazuje, że niesymetryczne zbrojenie powoduje obniżenie wartości momentu plastycznego w stosunku do przekroju jednorodnego. Wynika to ze zmiany charakteru wykresu naprężeń.



Rys. 7. Model 1

Model n

Dla konstrukcji statycznie niewyznaczalnych zaobserwowano pewne różnice w wartościach sił krytycznych belek zbrojonych w porównaniu do belek jednorodnych o takiej samej sztywności zastępczej. Wynika to z redystrybucji sił wewnętrznych w konstrukcji statycznie niewyznaczalnej.

LITERATURA

- [1] Szymczyk E., Wieczorek M., Krzywoliniowy warstwowy element skończony, Biuletyn WAT, nr 5, 2002
- [2] Borkowski W., Kleiber M., Wieczorek M., Nieliniowa analiza płaskich konstrukcji prętowych modelowanych prętami zakrzywionymi. IX Konferencji Metody Komputerowe w Mechanice, Kraków-Rytro, maj 1989
- [3] Waszczyszyn Z., Cichoń Cz., Radwańska M., Metoda elementów skończonych w stateczności konstrukcji. Arkady, Warszawa 1990
- [4] Cichorski W., Stolarski A., Wpływ układu zbrojenia na sprężyste przemieszczenia belek i tarcz obciążonych statycznie, Biuletyn WAT, 2, 1998

STABILITY AND STRENGTH ANALYSIS OF LAYERED BEAM ELEMENT

The model of layered beam finite element is presented. Beam cross section is divided into layers of different width and stiffness. Model of element includes geometrical and material nonlinearity. Influence of beam reinforcement on its stability and strength is investigated.

WYBOCZENIE CIENKOŚCIENNYCH KONSTRUKCJI KOMPOZYTOWYCH Z ŻEBRAMI POŚREDNIMI

A. TETER

Katedra Mechaniki Stosowanej, Politechniki Lubelskiej
Nadbystrzycka 36, 20-618 Lublin

Z. KOŁAKOWSKI, T. KUBIAK

Katedra Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji Politechniki Łódzkiej
Stefanowskiego 1/15, 90-924 Łódź

W pracy rozpatrzono interakcyjne wyoboczenie pryzmatycznych, cienkościennych, kompozytowych słupów o przekrojach otwartych wzmocnionych żebrami pośrednimi i wzmocnieniami brzegowymi. Przyjęto, że słupy są swobodnie podparte. Nieliniowe zagadnienie rozwiązano asymptotyczną teorią Koitera w ramach pierwszego rzędu przybliżenia. Asymptotyczna teoria pierwszego nieliniowego przybliżenia pozwala ocenić jednocześnie wpływ niedokładności i interakcji różnych postaci wyoboczenia na zachowanie się konstrukcji cienkościennych. Ocena ta może stanowić jedynie dolne oszacowanie nośności. Szczegółowe obliczenia prowadzono dla kilku przypadków słupów.

1. WSTĘP

Nowoczesne materiały kompozytowe od chwili ich pojawienia się w latach sześćdziesiątych znalazły bardzo szerokie zastosowanie w nowoczesnych konstrukcjach, zaś postęp w ich stosowaniu w dużym stopniu zależy od wiedzy i umiejętności konstruktorów i użytkowników. Wytrzymałość kompozytów w kierunku ułożenia włókien wzmacniających jest kilkakrotnie wyższa niż w pozostałych kierunkach. Wymagają przez to większej uwagi przy ich projektowaniu niż konstrukcje izotropowe. Lepsze zrozumienie zjawisk zachodzących podczas utraty i po utracie stateczności jest konieczne do prawidłowej oceny pracy cienkościennych konstrukcji kompozytowych.

Autorzy od prawie dziesięciu lat zajmują się nieliniową statecznością izotropowych konstrukcji cienkościennych z żebrami pośrednimi. Podsumowaniem prowadzonych badań jest praca [6]. W prezentowanej pracy przedstawiono ocenę nośności cienkościennych konstrukcji kompozytowych o przekrojach otwartych wzmocnionych żebrami pośrednimi. Usztywnienia przenoszą część obciążenia i dzielą element płytowy na mniejsze części o większej sztywności powiększając w ten sposób znacznie ich nośność. Wielkość, kształt, położenie żeber pośrednich oraz wzmocnienia brzegowe wywierają istotny wpływ na krytyczne i zakrytyczne zachowanie się konstrukcji. Asymptotyczna teoria pierwszego nieliniowego przybliżenia [1-3, 5-8] pozwala ocenić jednocześnie wpływ niedokładności i interakcji różnych postaci wyoboczenia na zachowanie się konstrukcji cienkościennych. Może stanowić jedynie dolne oszacowanie nośności lub też próbę oszacowania nośności w ramach drugiego rzędu na podstawie przyjętego przybliżenia dla liniowej analizy stateczności [4].

2. POSTAWIENIE ZAGADNIENIA

Rozpatrzono cienkościennie, kompozytowe słupy o przekrojach otwartych poddane ścisłaniu. Przekroje poprzeczne analizowanych elementów są zbudowane z płyt prostokątnych o długości ℓ połączonych na wzdłużnych brzegach i podpartych swobodnie na obu końcach. Dla każdej i -tej płyty przyporządkowano lokalny kartezjański układ współrzędnych. Materiał wszystkich płyt podlega prawu Hooke'a. W analizie teoretycznej założono klasyczną teorię płyt kompozytowych [5,7] oraz płytowy model konstrukcji cienkościennych [8].

Dla każdej i -tej płyty przyjęto następujące zależności geometryczne [5,7]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= u_{1,1} + 0,5 u_{m,1} u_{m,1} & \varepsilon_4 &= -h u_{3,11} \\ \varepsilon_2 &= u_{2,2} + 0,5 u_{m,2} u_{m,2} & \varepsilon_5 &= -h u_{3,22} \\ \varepsilon_3 &= u_{1,2} + u_{2,1} + u_{m,1} u_{m,2} & \varepsilon_6 &= -2 h u_{3,12} \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie: h jest grubością płyty; $u_1 \equiv u$, $u_2 \equiv v$, $u_3 \equiv w$ składowymi wektora przemieszczenia względem osi $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ oraz $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_x$, $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon_y$, $\varepsilon_3 \equiv 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}$, $\varepsilon_4 \equiv h \kappa_x$, $\varepsilon_5 \equiv h \kappa_y$, $\varepsilon_6 \equiv h \kappa_{xy}$. Sumowanie po $m=1,2,3$.

Wykorzystując klasyczną teorię płyt wielowarstwowych równania konstytutywne mają następującą postać [5,7]:

$$\{N\} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} = [K] \{\varepsilon\} \quad (2)$$

gdzie: N_1 , N_2 , N_3 są bezwymiarowymi siłami przekrojowymi, zaś N_4 , N_5 , N_6 bezwymiarowymi momentami przekrojowymi:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N_x}{E_o h} & N_2 &= \frac{N_y}{E_o h} & N_3 &= \frac{N_{xy}}{E_o h} \\ N_4 &= \frac{M_x}{E_o h^2} & N_5 &= \frac{M_y}{E_o h^2} & N_6 &= \frac{M_{xy}}{E_o h^2} \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie: E_o jest modułem odniesienia Younga.

Z zasady prac przygotowanych dla pojedynczej i -tej płyty przy uwzględnieniu zależności (1) wynikają następujące różniczkowe równania równowagi:

$$\begin{aligned} [N_1 (1 + u_{1,1}) + N_3 u_{1,2}]_{,1} + [N_2 u_{1,2} + N_3 (1 + u_{1,1})]_{,2} &= 0 \\ [N_1 u_{2,1} + N_3 (1 + u_{2,2})]_{,1} + [N_2 (1 + u_{2,2}) + N_3 u_{2,1}]_{,2} &= 0 \\ (h N_{4,1} + N_1 u_{3,1} + N_3 u_{3,2})_{,1} + (h N_{5,2} + 2 h N_{6,1} + N_2 u_{3,2} + N_3 u_{3,1})_{,2} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Rozwiązanie układu (4) dla i-tej płyty tworzącej cienkościenny słup musi spełniać kinematyczne i statyczne warunki współpracy na wzdłużnych brzegach oraz dodatkowo warunki brzegowe odpowiadające swobodnemu podparciu na obu końcach słupa (dla $x_1 = 0; \ell$). Nieliniowe zagadnienie stateczności w ramach pierwszego rzędu nieliniowego przybliżenia rozwiązano asymptotyczną metodą Byskova i Hutchinsona [1]. Pola przemieszczeń \bar{U} i sił \bar{N} rozwinięto w szeregi potęgowe względem bezwymiarowych amplitud postaci wyboczenia ξ_j :

$$\bar{U} = \lambda \bar{U}^{(0)} + \xi_j \bar{U}^{(j)} + \dots \quad \bar{N} = \lambda \bar{N}^{(0)} + \xi_j \bar{N}^{(j)} + \dots \quad (5)$$

gdzie: $\bar{U}^{(0)}, \bar{N}^{(0)}$ — pole dokrytyczne, $\bar{U}^{(j)}, \bar{N}^{(j)}$ — stany krytyczne. Zakres wskaźników j wynosi $[1, J]$ gdzie J jest liczbą współdziałających postaci wyboczenia.

W punkcie, w którym parametr obciążenia λ osiąga wartość maksymalną λ_s dla konstrukcji z imperfekcjami, jacobian nieliniowego układu równań [1,5-8]:

$$a_r \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_r} \right) \xi_r + a_{jkr} \xi_j \xi_k + b_{jklr} \xi_j \xi_k \xi_l = a_r \frac{\lambda}{\lambda_r} \xi_r^* \quad \text{dla} \quad r = 1, 2, \dots, J \quad (6)$$

jest równy zero. Wyrażenie na całkowitą energię potencjalną odpowiadającą (6) można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \Pi = & -a_o \lambda^2 / 2 + a_r (1 - \lambda / \lambda_r) \xi_r^2 / 2 + a_{jkr} \xi_j \xi_k \xi_r / 3 + b_{jklr} \xi_j \xi_k \xi_l \xi_r / 4 \\ & - a_r \xi_r \xi_r^* \lambda / \lambda_r \end{aligned} \quad (7)$$

gdzie: $\Pi_o = a_o \lambda^2 / 2$ - energia stanu dokrytycznego.

Współczynnik redukcji sztywności odpowiadający k-tej niesprężonej lokalnej postaci wyboczenia dla konstrukcji bez ugięć wstępnych i z symetryczną charakterystyką ugięć dla niesprężonej lokalnej postaci wyboczenia ($a_{kkk} = 0$) opisuje zależność [4,6,8]:

$$\bar{\eta}_k = \lim_{x \rightarrow \infty} \eta_k = \left[1 + \frac{a_k^2}{2 a_o b_{kkkk}} \right]^{-1} \approx \left[1 - \frac{a_k^2}{2 a_o \bar{b}_{kkkk}} \right] \quad (8)$$

Przybliżoną wartość b_{kkkk} dla k-tej niesprężonej lokalnej postaci można wyznaczyć ze wzoru (8):

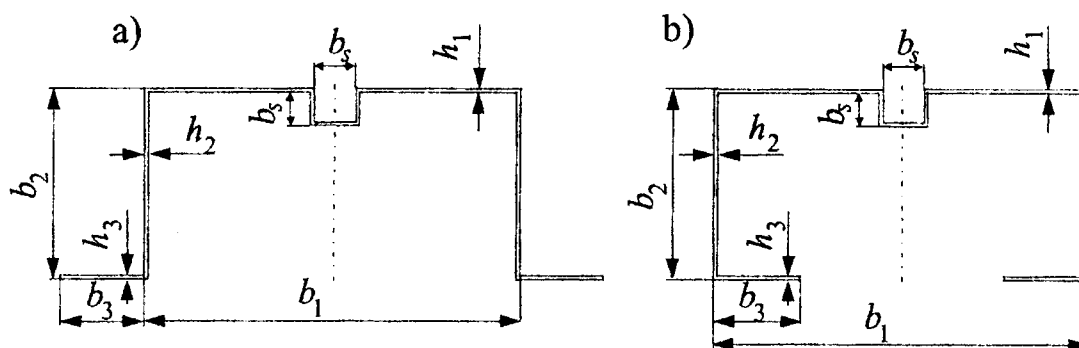
$$b_{kkkk} = \bar{b}_{kkkk} - \frac{a_k^2}{2 a_o} \quad (9)$$

gdzie: wartość \bar{b}_{kkkk} jest określona na podstawie znajomości funkcji ugięcia k-tej niesprężonej lokalnej postaci wyboczenia dla pierwszego rzędu przybliżenia [4].

Dla pojedynczej płyty współczynnik redukcji sztywności redukuje się do znanych wzorów Koitera i Pignataro [3]. Szczegółowy opis metody rozwiązania zagadnienia podano w pracy [4]. Dalej przyjęto $J=2$ oraz indeks 1 oznacza globalną postać wyboczenia, 2 – lokalną postać wyboczenia.

3. ANALIZA WYNIKÓW OBLICZEŃ

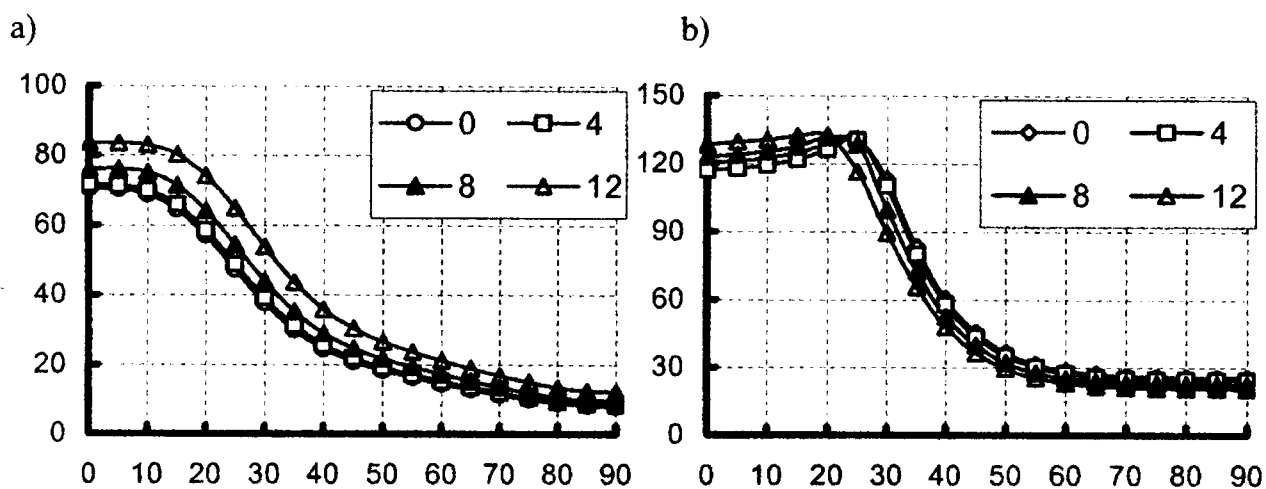
Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1 o następujących wymiarach geometrycznych: $b_1 = 50$ mm, $b_2 = 25$ mm, $b_3 = 12,5$ mm, $h_1 = h_2 = h_3 = 8h_{warst} = 8 \cdot 0,125$ mm = 1 mm i długości $l = 650$ mm. Każda z płyt wykonana jest z ośmiowarstwowego kompozytu. Każda z warstw charakteryzuje się następującymi właściwościami mechanicznymi: $E_1 = 140$ GPa, $E_2 = 10,3$ GPa, $G = 5,15$ GPa, $\nu_{12} = 0,29$, $h_{warst} = 0,125$ mm oraz skierowanym kątem Θ względem lokalnego układu współrzędnych [5,7]. Rozpatrzono jedynie kompozyty o symetrycznym $[\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/\Theta]_T$ i antysymetrycznym ułożeniu warstw $[\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta/\Theta/-\Theta]_T$.



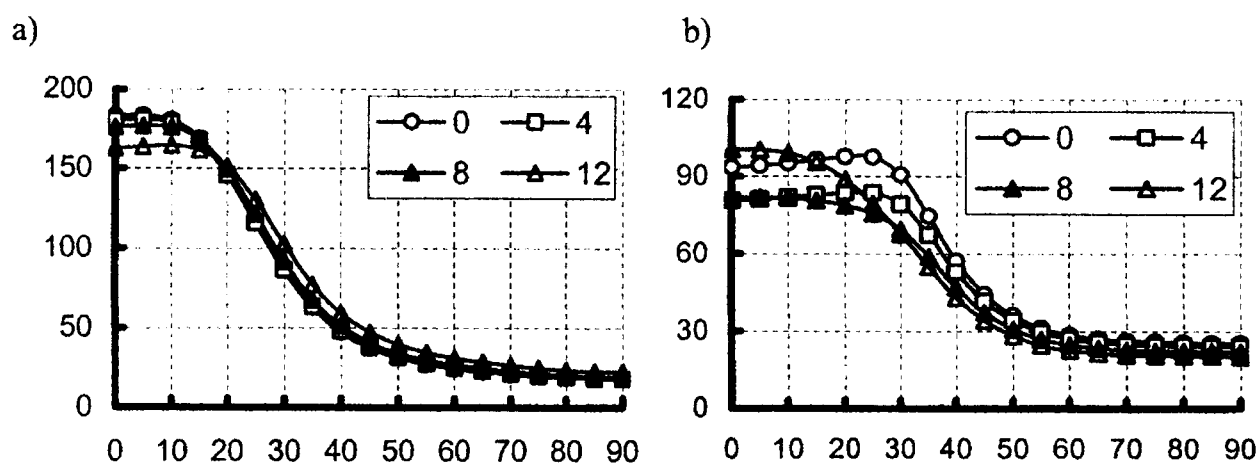
Rys. 1. Przekroje otwarte z centralnym C-żebrem pośrednim: a) omega zewnętrzna, b) omega wewnętrzna.

Na rys. 2 przedstawiono wykresy globalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] dla wyboczenia giętno-skrętnego (rys. 2a) i wyboczenia giętnego (rys. 2b) w funkcji kąta Θ [deg] dla przekroju pokazanego na rys. 1a, zaś na rys. 3 analogiczne wykresy dla przekroju pokazanego na rys. 1b dla czterech wartości parametru wzmocnienia żebra $b_s = 0; 4; 8; 12$ mm i symetrycznego ułożenia warstw. W przypadku antysymetrycznego ułożeniu warstw otrzymano praktycznie identyczne wyniki obciążeń krytycznych. Na rys. 4 przedstawiono zależność naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] dla postaci lokalnej w funkcji kąta Θ [deg] dla przekroju z rys. 1a. Wyniki obliczeń dla przekroju pokazanego na rys. 1b są takie same zarówno dla ułożenia warstw symetrycznego i antysymetrycznego.

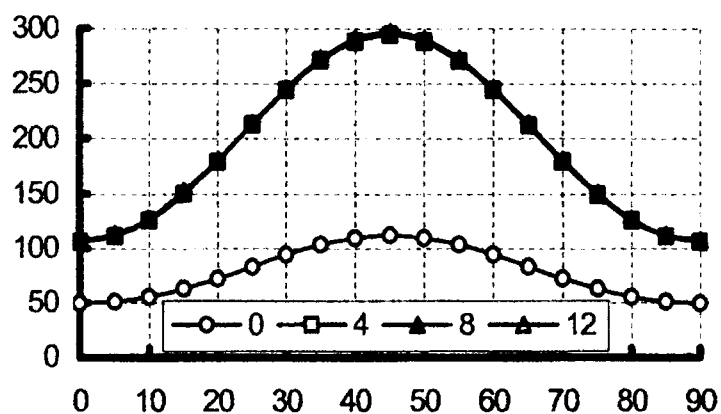
Wartości globalnych naprężeń krytycznych dla różnych wartości b_s są sobie bliskie. Największe wartości krytyczne dla wyboczenia giętno-skrętnego są dla $0 \leq \Theta \leq 15^\circ$, zaś dla wyboczenia giętnego dla $0 \leq \Theta \leq 25^\circ$, najmniejsza dla $\Theta = 90^\circ$. Wpływ wielkości b_s daje się zauważyć dla wartości $b_s \geq 2$ mm i osiąga maksymalną wartość dla $\Theta = 45^\circ$.



Rys. 2. Wykresy globalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] w funkcji kąta ułożenia warstw Θ oraz parametru wzmocnienia b_s dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1a: a) postać giętno-skrętna (antysymetryczna), b) postać giętna (symetryczna)



Rys. 3. Wykresy globalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] w funkcji kąta ułożenia warstw Θ oraz parametru wzmocnienia b_s dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1b: a) postać giętno-skrętna (antysymetryczna), b) postać giętna (symetryczna)



Rys. 4. Wykresy lokalnych naprężeń krytycznych σ_{kr} [MPa] w funkcji kąta ułożenia warstw Θ oraz parametru wzmocnienia b_s dla ściskanych słupów pokazanych na rys. 1

Tabela 1. Porównanie naprężeń krytycznych dla różnych ułożeń warstw kompozytu.

Lp.	Postać wybożenia	Naprężenia krytyczne σ_{kr} [MPa]			
		[45/-45/45/-45/-45/45/-45/45] _T		[45/-45/0/0/0/0/-45/45] _T	
		Rys. 1a	Rys. 1b	Rys. 1a	Rys. 1b
1.	globalna giętno-skretna	21,9	37,8	59,5	135,4
2.	globalna giętna	43,7	41,6	177,9	133,4
3.	lokalna	294,1	293,2	289,6	289,9

Tabela 2. Porównanie wrażliwości omawianych konstrukcji na niedokładności.

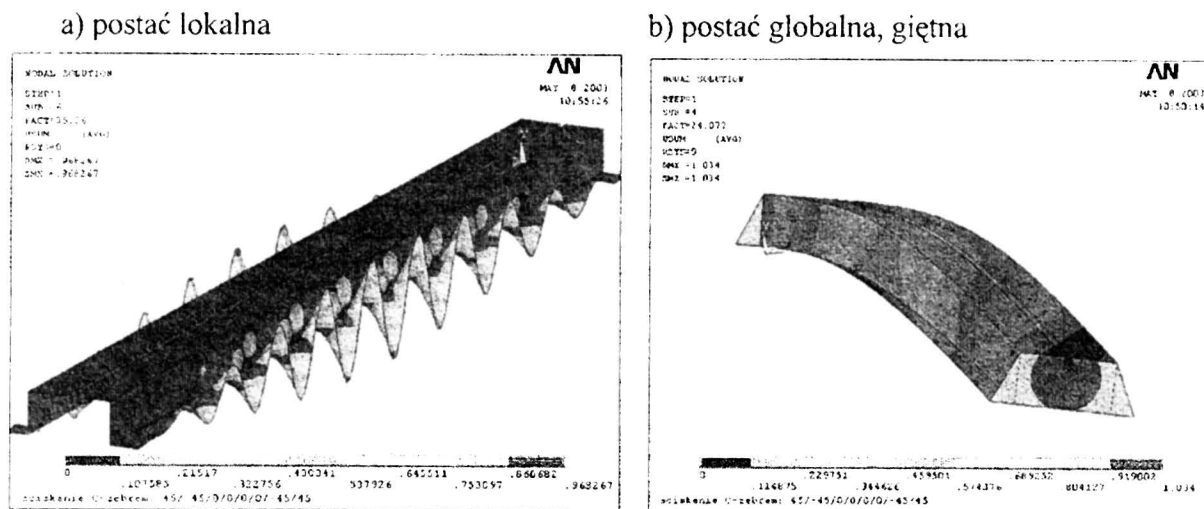
Lp.	Przypadek	σ_1	σ_2	σ_s	σ_1 / σ_2	$\sigma_s / [\min(\sigma_1, \sigma_2)]$
		[MPa]	[MPa]	[MPa]	[-]	[-]
1.	Rys. 1a	181,9	174,7	122,1	1,049	0,699
2.	Rys. 1b	143,4	173,4	116,8	0,822	0,815

Tabela 3. Porównanie obciążeń krytycznych dla ceownika na rys. 1 a.

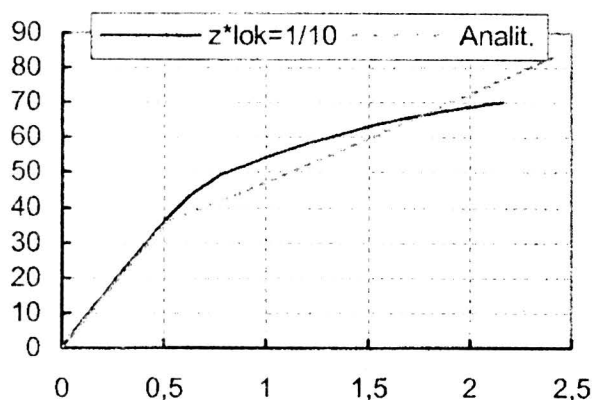
Lp.	Postać wybożenia	Naprężenia krytyczne σ_{kr} [MPa]	
		Prezentowana metoda	ANSYS5.7
1.	globalna giętna	177	181
2.	lokalna	289	266

W analizie numerycznej nie stwierdzono przypadku pojawienia się dwóch minimów dla różnych lokalnych postaci wybożenia, co jest charakterystyczne dla konstrukcji izotropowych z żebrami pośrednimi [4,6]. Następnie przeprowadzono obliczenia dla następującego symetrycznego ułożenia warstw [45/-45/0/0/0/0/-45/45]_T. W Tabeli 1 przedstawiono porównanie wyników naprężeń krytycznych dla dwóch typów ułożenia warstw i $b_s = 4$ mm. Jak widać z tego porównania wzrost obciążenia globalnego dla drugiego typu ułożenia warstw powoduje znaczny wzrost globalnych wartości naprężeń krytycznych, zaś praktycznie niezmienną wartość krytycznych naprężeń lokalnych. Wzrost obciążenia globalnego wynika ze znacznego wzrostu globalnej sztywności giętniej całego przekroju poprzecznego, zaś lokalna sztywność giętna poszczególnych płyt pozostaje praktycznie stała. Następnie analizowano czułość konstrukcji pokazanych na rys. 1 na imperfekcje dla drugiego typu ułożenia warstw [45/-45/0/0]_S w ramach pierwszego rzędu nieliniowego przybliżenia dla założonych wielkości wstępnych ugięć $\xi_1^* = |1,0|$, $\xi_2^* = |0,2|$ oraz dla parametru wzmocnienia $b_s = 2$ mm. Najbardziej niebezpieczna okazała się interakcja globalnej giętniej postaci wybożenia z lokalną postacią wybożenia. W przypadku, gdy wartości obciążeń krytycznych są bliskie (przypadek 1 w Tabeli 2) następuje gwałtowny wzrost czułości konstrukcji na imperfekcje [1,5-8]. W Tabeli 3 przedstawiono zestawienie obciążeń krytycznych otrzymanych prezentowaną metodą oraz metodą elementów skończonych MES (pakiet ANSYS 5.7) dla przekroju pokazanego na rys. 1a o ułożeniu warstw [45/-45/0/0/0/0/-45/45]_T i $b_s = 4$ mm. W przypadku obliczeń MES-em na obciążonych brzegach ceownika zamodelowano tylko warunki odpowiadające globalnej giętniej i lokanej postaci wybożenia. Dla analizowanego powyżej ceownika w celu wyznaczenia lokalnej pokrytycznej ścieżki równowagi założono długość ceownika $\ell = 150$ mm. W oparciu o liniową analizę modalną dla lokalnych postaci wybożenia wyznaczono przybliżone wartości współczynników dla drugiego rzędu przybliżenia (9) b_{kkkk} dla $k=1-5$ (szczegóły w [2,4]). Tak wyznaczone współczynniki wstawiono do wyrażenia na energię (7), a następnie z zasady minimum

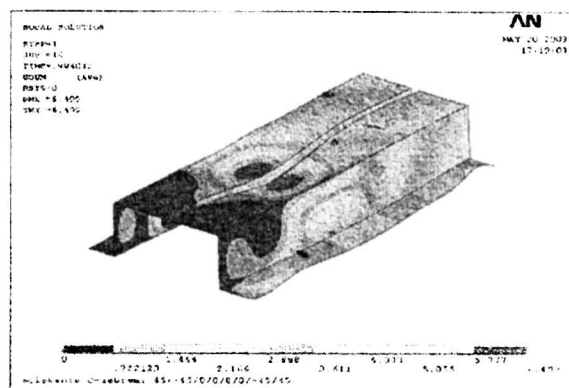
całkowitej energii wyznaczono przybliżone lokalne pokrytyczne zachowanie się ściskanego ceownika (rys. 6). Na tym samym rysunku przedstawiono też wyniki otrzymane z ANSYS5.7. Stwierdzono dobrą zgodność wyników otrzymaną obiema metodami. Należy podkreślić, że przybliżona metoda daje wyniki łatwiej i mniejszym nakładem czasu. Na rys. 7 przedstawiono postać wybożenia dla skrócenia czterokrotnie przekraczającego skrócenie krytyczne.



Rys. 5. Postacie wybożenia dla przekroju otwartego (rys. 1a) z zębem pośrednim $b_s=4$ mm obliczone metodą elementów skończonych



Rys.6. Wykres siły ściskającej [kN] w funkcji skrócenia [mm] dla ceownika o długości 150 mm z zębem pośrednim o układzie warstw[45/-45/0/0]_s



Rys.7. Postać wybożenia dla skrócenia czterokrotnie przekraczającego skrócenie krytyczne

4. WNIOSKI

Prezentowana metoda umożliwia modalną analizę wybożenia konstrukcji cienkościennych z zębami pośrednimi. Prowadzone szczegółowe obliczenia numeryczne dla różnych parametrów omawianych kompozytowych konstrukcji o przekrojach otwartych prowadzą do następujących spostrzeżeń:

- wartości naprężeń krytycznych dla różnych wartości b_s są sobie bliskie;
- nie stwierdzono przypadku pojawienia się dwóch minimów dla różnych lokalnych postaci wybożenia;

- wpływ wielkości b_s daje się zauważyć dla wartości $b_s \geq 2$ mm i osiąga maksymalną wartość dla $\Theta = 45^\circ$;
- dla różnych typów ułożenia warstw istotnie zmieniają się obciążenia globalne, zaś praktycznie nie zmieniają się wartości krytyczne naprężeń lokalnych;
- dla omawianych konstrukcji kompozytowych najbardziej niebezpieczna okazała się interakcja globalnej giętej postaci wyboczenia z lokalną postacią wyboczenia.
- zaproponowane oszacowanie nośności konstrukcji dla drugiego rzędu w oparciu o analizę liniową zgadza się z MES-em z maksymalnym błędem 25% w całym analizowanym nadkrytycznym zakresie skrócenia.

LITERATURA

- [1] Byskov E, Hutchinson JW. Mode interaction in axially stiffened cylindrical shells. *AIAA J.*, 1977; 15(7): 941-948.
- [2] Byskov E. Elastic buckling problem with infinitely many local modes. The Danish Center for Applied Mathematics and Mechanics, The Technical University of Denmark, Report No. 327, 1986.
- [3] Koiter WT, Pignataro M. An alternative approach to the interaction between local and overall buckling in stiffened panels. In: "Buckling of Structures" /Proc. of IUTAM Symposium, Cambridge, 1974: 133-148.
- [4] Kołakowski Z. A semi-analytical method of interactive buckling of thin-walled elastic structures in the second order approximation; *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, No.25., 1996, pp.3779-3790.
- [5] Kołakowski Z, Kowal-Michalska K. (Eds.) Selected problems of instabilities in composite structures. Series of monog. Tech. University of Lodz, 1999, pp.222.
- [6] Królak, M. (Ed.). Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich. PWN, Warszawa-Łódź, 1990, str.553.
- [7] Królak M., Kołakowski Z., Kotelko M. Modal coupled instabilities of thin-walled composite plate and shell structures, *Proceedings of the Third International Conference on Thin-Walled Structures*, Elsevier, 2001, pp.293-300.
- [8] Teter A, Kołakowski Z. Interactive buckling and load carrying capacity of thin-walled beam-columns with intermediate stiffeners; *The Special Issue of Thin-Walled Structures Journal*, 2003, praca w druku.

BUCKLING OF THIN-WALLED COMPOSITE STRUCTURES WITH INTERMEDIATE STIFFENERS

This investigation is concerned with interactive buckling of open composite columns with intermediate and edge stiffeners under axial compression. The columns are assumed to be simply supported at their ends. The asymptotic Koiter's method is used in the first order approximation. The paper's aim is to achieve the improved study of the equilibrium path in the imperfection sensitivity of imperfect structures regarding the first order approximation. The first order approximation of the stability problem of thin-walled structures can serve as a lower estimation of load carrying capacity. The limit load is always lower than the minimum value of bifurcation load in the linear analysis. The calculations are carried out for a few columns.

STABILITY OF THIN UNIPERIODIC CYLINDRICAL SHELLS

B. TOMCZYK

Department of Structural Mechanics, Technical University of Łódź
al. Politechniki 6, 93-590 Łódź, Poland

The aim of this contribution is to propose a new averaged model for stability analysis of thin linear-elastic cylindrical shells having the periodic structure along one direction tangent to the shell midsurface. In contrast with the known homogenized models the proposed one makes it possible to describe the effect of the periodicity cell size on the overall shell behavior (a length-scale effect). In order to derive the governing equations with constant or slowly varying coefficients the known tolerance averaging procedure is applied. The comparison between the proposed model and the model without the length-scale effect is presented.

1. INTRODUCTION

In this paper a new average model of cylindrical shells having a periodic structure (a periodically varying thickness and/or periodically varying elastic and inertial properties) along one direction tangent to the undeformed shell midsurface \mathcal{M} is presented. Shells like that are termed *uniperiodic*.

The exact equations of the shell (plate) theory are too complicated to constitute the basis for investigations of most engineering problems because they involve highly oscillating and often discontinuous coefficients. Thus many different approximated modelling methods for periodic (locally periodic) shells and plates have been formulated. Structures of this kind are usually described using homogenized models derived by means of asymptotic methods. Unfortunately, these models neglect the effect of periodicity cell length dimensions on the global structure behavior (the length-scale effect). The alternative nonasymptotic modelling procedure based on the notion of tolerance and leading to so-called the length-scale (or tolerance) models of dynamic and stationary problems for micro-periodic structures was proposed by Woźniak in a series of papers, e.g. [2,3]. These tolerance models have constant coefficients and take into account the effect of a periodicity cell size on the global body behavior. This effect is described by means of certain extra unknowns called *internal or fluctuation variables* and by known functions, which represent oscillations inside the periodicity cell. The length-scale model for stability analysis of cylindrical shells with two-directional periodic structure has been proposed in [1]. However, this model is not sufficient to analyze stability problems of uniperiodic cylindrical shells, which are not special case of those with a periodic structure in both directions tangent to \mathcal{M} .

The aim of this contribution is to derive an averaged model of uniperiodic cylindrical shell, which has constant coefficients in direction of periodicity and describes the effect of a cell size on the global shell stability. This model will be derived by using the tolerance averaging procedure proposed by Woźniak and Wierzbicki in [3]. The proposed tolerance model will be compared with a simplified (homogenized) one in which the length-scale effect is neglected.

2. PRELIMINARIES

In this paper we will investigate thin linear-elastic cylindrical shells with periodic structure along one direction tangent to \mathcal{M} and slowly varying structure along the perpendicular direction tangent to \mathcal{M} .

Denote by $\Omega \subset R^2$ a regular region of points $\Theta \equiv (\Theta^1, \Theta^2)$ on the $O\Theta^1\Theta^2$ -plane, Θ^1, Θ^2 being the Cartesian orthogonal coordinates on this plane and let E^3 be the physical space parametrized by the Cartesian orthogonal coordinate system $Ox^1x^2x^3$. Let us introduce the orthogonal parametric representation of the undeformed smooth cylindrical shell midsurface \mathcal{M} by means of:

$\mathcal{M} := \{ \mathbf{x} \equiv (x^1, x^2, x^3) \in E^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2), \Theta \in \Omega \}$, where $\mathbf{x}(\Theta^1, \Theta^2)$ is a position vector of a point on \mathcal{M} having coordinates Θ^1, Θ^2 . Throughout the paper indices α, β, \dots run over 1, 2 and are related to the midsurface parameters Θ^1, Θ^2 ; indices A, B, \dots run over 1, 2, ..., N , summation convention holds for all aforesaid indices. To every point $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\Theta)$, $\Theta \in \Omega$ we assign a covariant base vectors $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{x}_{,\alpha}$ and covariant midsurface first and second metric tensors denoted by $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$, respectively, which are given as follows: $a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$, $b_{\alpha\beta} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{a}_{\alpha,\beta}$, where \mathbf{n} is a unit normal to \mathcal{M} . Let $\delta(\Theta)$ stand for the shell thickness. We also define t as the time coordinate. Taking into account that coordinate lines $\Theta^2 = \text{const.}$ are parallel on the $O\Theta^1\Theta^2$ -plane and that Θ^2 is an arc coordinate on \mathcal{M} we define l as the period of shell structure in Θ^2 -direction. The period l is assumed to be sufficiently large compared with the maximum shell thickness and sufficiently small as compared to the midsurface curvature radius R as well as the characteristic length dimension L of the shell midsurface along the direction of shell periodicity. Under given above assumptions for period l the shell under consideration will be referred to as a *mezostructured shell*, cf.[2], and the period l will be called *the mezostructured length parameter*. We shall denote by $\Lambda \equiv \{0\} \times (-l/2, l/2)$ the straight line segment on the $O\Theta^1\Theta^2$ -plane along the $O\Theta^2$ -axis direction, which can be taken as a representative cell of the shell periodic structure (the periodicity cell). To every $\Theta \in \Omega$ an arbitrary cell on $O\Theta^1\Theta^2$ -plane will be defined by means of: $\Lambda(\Theta) \equiv \Theta + \Lambda$, $\Theta \in \Omega_\Lambda$, $\Omega_\Lambda := \{ \Theta \in \Omega : \Lambda(\Theta) \subset \Omega \}$, where the point $\Theta \in \Omega_\Lambda$ is a center of a cell $\Lambda(\Theta)$ and Ω_Λ is a set of all the cell centers which are inside Ω .

A function $f(\Theta)$ defined on Ω_Λ will be called Λ -periodic if for arbitrary but fixed Θ^1 and arbitrary $\Theta^2, \Theta^2 \pm l$ it satisfies condition: $f(\Theta^1, \Theta^2) = f(\Theta^1, \Theta^2 \pm l)$ in the whole domain of its definition and it is not constant.

It is assumed that the cylindrical shell thickness as well as its material and inertial properties are Λ -periodic functions of Θ^2 and slowly varying functions of Θ^1 . Shells like that are called *uniperiodic*, moreover under given above assumptions for period l they are referred to *mezostructured shells*.

For an arbitrary integrable function $\varphi(\cdot)$ defined on Ω , following [3], we define *the averaging operation*, given by

$$\langle \varphi \rangle(\Theta) \equiv \frac{1}{l} \int_{\Lambda(\Theta)} \varphi(\Theta^1, \Psi^2) d\Psi^2, \quad \Theta = (\Theta^1, \Theta^2) \in \Omega_\Lambda. \quad \text{For a function } \varphi, \text{ which is}$$

Λ -periodic in Θ^2 this formula leads to $\langle \varphi \rangle(\Theta^1)$. If the functions φ is Λ -periodic in Θ^2 and is independent of Θ^1 , its averaged value obtained from the above formula is constant.

Our considerations will be based on the simplified linear Kirchhoff-Love theory of thin elastic shells.

Let $u_\alpha(\Theta, t)$, $w(\Theta, t)$ stand for the midsurface shell displacements in directions tangent and normal to \mathcal{M} , respectively. We denote by $\varepsilon_{\alpha\beta}(\Theta, t)$, $\kappa_{\alpha\beta}(\Theta, t)$ the membrane and curvature strain tensors and by $n^{\alpha\beta}(\Theta, t)$, $m^{\alpha\beta}(\Theta, t)$ the stress resultants and stress couples, respectively. The properties of shell are described by 2D-shell stiffness tensors $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$, $B^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$ and let $\mu(\Theta)$ stand for a shell mass density per midsurface unit area. Let $f_\alpha(\Theta, t)$, $f(\Theta, t)$ be external force components per midsurface unit area, respectively tangent and normal to \mathcal{M} .

Functions $\mu(\Theta)$, $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$, $B^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$ and $\delta(\Theta)$ are Λ -periodic functions of Θ^2 and are assumed to be slowly varying functions of Θ^1 .

We denote by $\bar{N}^{\alpha\beta}$ the compressive membrane forces in the shell midsurface, which satisfy the following equations of equilibrium $\bar{N}_{,\alpha}^{\alpha\beta} + f^\beta = 0$, $b_{\alpha\beta} \bar{N}^{\alpha\beta} + f = 0$.

The equations of a shell theory under consideration consist of :

1) the strain-displacement equations

$$\varepsilon_{\gamma\delta} = u_{(\gamma,\delta)} - b_{\gamma\delta} w, \quad \kappa_{\gamma\delta} = -w_{,\gamma\delta}, \quad (2.1)$$

2) the stress-strain relations

$$n^{\alpha\beta} = D^{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}, \quad m^{\alpha\beta} = B^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta}, \quad (2.2)$$

3) the equations of equilibrium

$$n^{\alpha\beta}_{,\alpha} = 0, \quad m^{\alpha\beta}_{,\alpha\beta} + b_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} - \bar{N}^{\alpha\beta} w_{,\alpha\beta} = 0, \quad (2.3)$$

In the above equations the displacements $u_\alpha = u_\alpha(\Theta, t)$ and $w = w(\Theta, t)$, $\Theta \in \Omega$, are the basic unknowns.

For mezostructured shells, $\mu(\Theta)$, $D^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$ and $B^{\alpha\beta\gamma\delta}(\Theta)$, $\Theta \in \Omega$, are highly oscillating Λ -periodic functions; that is why equations (2.1)-(2.3) cannot be directly applied to the numerical analysis of special problems. From (2.1)-(2.3) an averaged model of uniperiodic cylindrical shells having coefficients, which are independent of Θ^2 -midsurface parameter and are slowly varying functions of Θ^1 as well as describing the cell size effect on critical forces will be derived. In order to derive it the tolerance averaging procedure given by Woźniak and Wierzbicki in [3], will be applied. To make the analysis more clear, in the next section we shall outline the basic concepts and the main kinematic assumption of this approach, following the monograph [3].

3. BASIC CONCEPTS

The fundamental concepts of the tolerance averaging approach are that of a certain tolerance system, slowly varying functions, periodic-like functions and periodic-like oscillating functions. These functions will be defined with respect to the Λ -periodic shell structure defined in the foregoing section.

By a *tolerance system* we shall mean a pair $T=(\mathcal{F}, \varepsilon(\cdot))$, where \mathcal{F} is a set of real valued bounded functions $F(\cdot)$ defined on $\overline{\Omega}$ and their derivatives, which represent the unknowns in the problem under consideration (such as unknown shell displacements tangent and normal to \mathcal{M}) and for which the tolerance parameters ε_F being positive real numbers and determining the admissible accuracy related to computations of values of $F(\cdot)$ are given; by ε is denoted the mapping $\mathcal{F} \ni F \rightarrow \varepsilon_F$.

A continuous bounded differentiable function $F(\Theta, t)$ defined on $\overline{\Omega}$ is called *Λ -slowly_varying* with respect to the cell Λ and the tolerance system T , $F \in SV_\Lambda(T)$, if roughly speaking, can be treated (together with its derivatives) as constant on an arbitrary periodicity cell Λ . The continuous function $\varphi(\cdot)$ defined on $\overline{\Omega}$ will be termed a *Λ -periodic-like function*, $\varphi(\cdot) \in PL_\Lambda(T)$, with respect to the cell Λ and the tolerance system T , if for every $\Theta=(\Theta^1, \Theta^2) \in \Omega_\Lambda$ there exists a continuous Λ -periodic function $\varphi_\Theta(\cdot)$ such that $(\forall \Psi=(\Psi^1, \Psi^2)) [\|\Theta - \Psi\| \leq l \Rightarrow \varphi(\Psi) \cong \varphi_\Theta(\Psi)]$, $\Psi \in \Lambda(\Theta)$, and the similar conditions are also fulfilled by all its derivatives. It means that the values of a periodic-like function $\varphi(\cdot)$ in an arbitrary cell $\Lambda(\Theta)$, $\Theta \in \Omega_\Lambda$, can be approximated, with sufficient accuracy, by the corresponding values of a certain Λ -periodic function $\varphi_\Theta(\cdot)$. The function $\varphi_\Theta(\cdot)$ will be referred to as a Λ -periodic approximation of $\varphi(\cdot)$ on $\Lambda(\Theta)$. Let $\mu(\cdot)$ be a positive value Λ -periodic function. The periodic-like function φ is called Λ -oscillating (with the weight μ), $\varphi(\cdot) \in PL_\Lambda^\mu(T)$, provided that the condition $\langle \mu \varphi \rangle(\Theta) \cong 0$ holds for every $\Theta \in \Omega_\Lambda$.

If $F \in SV_\Lambda(T)$, $\varphi(\cdot) \in PL_\Lambda(T)$ and $\varphi_\Theta(\cdot)$ is a Λ -periodic approximation of $\varphi(\cdot)$ on $\Lambda(\Theta)$ then for every Λ -periodic bounded function $f(\cdot)$ and every continuous Λ -periodic differentiable function $h(\cdot)$ such that $\sup \{ |h(\Psi^1, \Psi^2)|, (\Psi^1, \Psi^2) \in \Lambda \} \leq l$, the following *tolerance averaging relations* determined by the pertinent tolerance parameters hold for every $\Theta \in \Omega_\Lambda$:

$$\begin{aligned} \text{(T1)} \quad \langle fF \rangle(\Theta) &\cong \langle f \rangle(\Theta) F(\Theta), & \text{(T2)} \quad \langle f(hF)_{,2} \rangle(\Theta) &\cong \langle fF h_{,2} \rangle(\Theta), \\ \text{(T3)} \quad \langle f \varphi \rangle(\Theta) &\cong \langle f \varphi_\Theta \rangle(\Theta), & \text{(T4)} \quad \langle h(f \varphi)_{,2} \rangle(\Theta) &\cong - \langle f \varphi h_{,2} \rangle(\Theta). \end{aligned}$$

In the tolerance averaging procedure, the left-hand sides of formulae (T1)-(T4) will be approximated by their right-hand sides, respectively - this operation will be called the *Tolerance Averaging Assumption*.

The main kinematic assumption of the tolerance averaging method is called *Conformability Assumption* and states that in every periodic solid the displacement fields have to conform to the periodic structure of this solid. It means that the displacement fields are periodic-like functions and hence can be represented by a sum of averaged displacements, which are slowly varying, and by highly oscillating periodic-like disturbances, caused by the periodic structure of the solid.

The aforementioned *Conformability Assumption* together with the *Tolerance Averaging Assumption* constitute the foundations of the tolerance averaging technique. Using this technique the tolerance model of stability problems for uniperiodic cylindrical shells will be derived in the subsequent section.

4. GOVERNING EQUATIONS

Let us assumed that there is a certain tolerance system $T=(\mathcal{F}, \varepsilon(\cdot))$, where the set \mathcal{F} consists of the unknown shell displacements tangent and normal to \mathcal{M} and their derivatives. From the *Conformability Assumption*, it follows that the unknown shell

displacements $u_\alpha(\cdot, t)$, $w(\cdot, t)$ in Eqs.(2.1)-(2.3) have to satisfy the conditions: $u_\alpha(\cdot, t) \in PL_\Lambda(T)$, $w(\cdot, t) \in PL_\Lambda(T)$. Hence, we obtain what is called the *modelling decomposition*

$$u_\alpha(\cdot, t) = U_\alpha(\cdot, t) + d_\alpha(\cdot, t), \quad w(\cdot, t) = W(\cdot, t) + p(\cdot, t), \quad (4.1)$$

$$U_\alpha(\cdot, t), W(\cdot, t) \in SV_\Lambda(T), \quad d_\alpha(\cdot, t), p(\cdot, t) \in PL_\Lambda^\mu(T),$$

which becomes under the normalizing conditions $\langle \mu d_\alpha(\cdot, t) \rangle = \langle \mu p(\cdot, t) \rangle = 0$.

It can be shown, cf. [3], that the unknown Λ -slowly varying averaged displacements $U_\alpha(\cdot, t)$, $W(\cdot, t)$ in (4.1) are given by: $U_\alpha(\cdot, t) \equiv \langle \mu \rangle^{-1}(\Theta^1) \langle \mu u_\alpha \rangle(\cdot, t)$, $W(\cdot, t) \equiv \langle \mu \rangle^{-1}(\Theta^1) \langle \mu w \rangle(\cdot, t)$. The unknown displacement disturbances $d_\alpha(\cdot, t)$, $p(\cdot, t)$ in (4.1) being oscillating periodic-like functions are caused by the highly oscillating character of the shell mezostructure.

Substituting the right-hand side of (4.1) into (2.3) and after the tolerance averaging of the resulting equations, we arrive at the equations

$$[\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle(\Theta^1)(U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta}W) + \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\gamma,\delta} \rangle(\Theta, t) + b_{\gamma\delta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} p \rangle(\Theta, t)]_{,\alpha} = 0, \quad (4.2)$$

$$[\langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle(\Theta^1)W_{,\gamma\delta} + \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} p_{,\gamma\delta} \rangle(\Theta, t)]_{,\alpha\beta} - b_{\alpha\beta}[\langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle(\Theta^1)(U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta}W) + \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\gamma,\delta} \rangle(\Theta, t) - b_{\gamma\delta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} p \rangle] - \bar{N}^{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} = 0$$

Multiplying Eqs.(2.3)₁ and (2.3)₂ by arbitrary Λ -periodic test functions d^* , p^* , respectively, such that $\langle \mu d^* \rangle = \langle \mu p^* \rangle = 0$, integrating these equations over $\Lambda(\Theta)$, $\Theta \in \Omega_\Lambda$, and using the *Tolerance Averaging Assumption* as well as denoting by \tilde{d}_α , \tilde{p} the Λ -periodic approximations of d_α , p , respectively, on $\Lambda(\Theta)$, we obtain the periodic problem on $\Lambda(\Theta)$ for functions $\tilde{d}_\alpha(\Theta^1, \Psi^2, t)$, $\tilde{p}(\Theta^1, \Psi^2, t)$, $(\Theta^1, \Psi^2) \in \Lambda(\Theta) = \Lambda(\Theta^1, \Theta^2)$, given by the following variational conditions

$$-\langle d^*_{,2} D^{2\beta\gamma\delta} \tilde{d}_{\gamma,\delta} \rangle + \langle d^* (D^{1\beta\gamma\delta} \tilde{d}_{\gamma,\delta})_{,1} \rangle - b_{\gamma\delta} [-\langle d^*_{,2} D^{2\beta\gamma\delta} \tilde{p} \rangle + \langle d^* (D^{1\beta\gamma\delta} \tilde{p})_{,1} \rangle] = \langle d^*_{,\alpha} D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta}W) - [\langle d^* D^{1\beta\gamma\delta} \rangle (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta}W)]_{,1}, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \langle p^*_{,22} B^{22\gamma\delta} \tilde{p}_{,\gamma\delta} \rangle - 2 \langle p^*_{,2} (B^{21\gamma\delta} \tilde{p}_{,\gamma\delta})_{,1} \rangle + \langle p^* (B^{11\gamma\delta} \tilde{p}_{,\gamma\delta})_{,11} \rangle + \\ & - b_{\alpha\beta} [\langle p^* D^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{d}_{\gamma,\delta} \rangle - b_{\gamma\delta} \langle p^* D^{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{p} \rangle] = b_{\alpha\beta} \langle p^* D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta}W) + \\ & - \langle p^*_{,22} B^{22\lambda\delta} \rangle W_{,\gamma\delta} + 2[\langle p^*_{,2} B^{21\gamma\delta} \rangle_{,1} - \langle p^*_{,21} B^{21\gamma\delta} \rangle] W_{,\gamma\delta} + \langle p^*_{,2} B^{21\gamma\delta} \rangle W_{,\gamma\delta 1} + \\ & - \{ \langle p^* B^{11\gamma\delta} \rangle_{,1} - 2 \langle p^*_{,1} B^{11\lambda\delta} \rangle_{,1} + \langle p^*_{,11} B^{11\gamma\delta} \rangle \} W_{,\gamma\delta} + 2 \langle p^* B^{11\gamma\delta} \rangle_{,1} + \\ & - \langle p^*_{,1} B^{11\gamma\delta} \rangle W_{,\gamma\delta 1} + \langle p^* B^{11\gamma\delta} \rangle W_{,\gamma\delta 11} \} + \bar{N}^{11} \langle p^* \rangle W_{,11} \end{aligned}$$

An approximate solution to this problem, which may be obtained by the orthogonalization method, will be assumed in the form

$$\begin{aligned}\tilde{d}_\alpha(\Theta^1, \Psi^2, t) &= h^A(\Theta^1, \Psi^2) Q_\alpha^A(\Theta^1, \Theta^2, t), \\ \tilde{p}(\Theta^1, \Psi^2, t) &= g^A(\Theta^1, \Psi^2) V^A(\Theta^1, \Theta^2, t), \quad A=1,2,\dots,N,\end{aligned}\quad (4.4)$$

with $h^A(\Theta^1, \cdot)$, $g^A(\Theta^1, \cdot)$ as postulated Λ -periodic *shape functions* such that $\langle \mu h^A \rangle(\Theta^1) = \langle \mu g^A \rangle(\Theta^1) = 0$, $\max |h^A(\Theta^1, \Psi^2)| \leq l$, $\max |g^A(\Theta^1, \Psi^2)| \leq l^2$, $h^A, lh_{,2}^A, l^{-1}g^A, g_{,2}^A, lg_{,22}^A \in O(l)$ and with $Q_\alpha^A(\Theta^1, \Theta^2, t), V^A(\Theta^1, \Theta^2, t)$ as new unknowns called *fluctuation variables*, being Λ -slowly varying functions in Θ^2 , i.e. $Q_\alpha^A, V^A \in SV_\Lambda(T)$.

Substituting the right-hand sides of (4.4) into (4.2) and (4.3) and setting $d^* = h^A(\Theta^1, \Psi^2)$, $p^* = g^A(\Theta^1, \Psi^2)$, $A=1,2,\dots,N$, in (4.3), on the basis of the *Tolerance Averaging Assumption* we arrive at the *tolerance fluctuation variable model of stability problems for unperiodic cylindrical shells*. Under extra denotations

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} &\equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, D^{A\alpha\beta\gamma} \equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\delta}^A \rangle, \bar{D}^{A\alpha\beta\gamma} \equiv l^{-1} \langle D^{\alpha\beta\gamma 1} h^A \rangle, \\ L^{A\alpha\beta} &\equiv l^{-2} b_{\gamma\delta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g^A \rangle, \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} \rangle, K^{A\alpha\beta} \equiv \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^A \rangle, \\ \bar{K}^{A\alpha\beta} &\equiv l^{-1} \langle B^{\alpha\beta 1\delta} g_{,\delta}^A \rangle, \tilde{K}^{A\alpha\beta} \equiv l^{-2} \langle B^{\alpha\beta 11} g^A \rangle, C^{AB\beta\gamma} \equiv \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha}^A h_{,\delta}^B \rangle, \\ \bar{C}^{AB\beta\gamma} &\equiv l^{-1} \langle D^{\alpha\beta\gamma 1} h_{,\alpha}^A h^B \rangle, F^{AB\beta} \equiv l^{-2} b_{\gamma\delta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} h_{,\alpha}^A g^B \rangle, \\ \tilde{C}^{AB\beta\gamma} &\equiv l^{-2} \langle D^{1\beta\gamma 1} h^A h^B \rangle, \bar{F}^{AB\beta} \equiv l^{-3} b_{\gamma\delta} \langle D^{1\beta\gamma\delta} h^A g^B \rangle, R^{AB} \equiv \langle B^{\alpha\beta\gamma\delta} g_{,\alpha\beta}^A g_{,\gamma\delta}^B \rangle, \\ \bar{L}^{AB} &\equiv l^{-4} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\delta} \langle D^{\alpha\beta\gamma\delta} g^A g^B \rangle, \tilde{R}^{AB} \equiv l^{-1} \langle B^{1\beta\gamma\delta} g_{,\beta}^A g_{,\gamma\delta}^B \rangle, \\ \tilde{R}^{AB} &\equiv l^{-2} \langle B^{11\gamma\delta} g_{,\gamma\delta}^A g^B \rangle, \bar{R}^{AB} \equiv l^{-3} \langle B^{1\beta 11} g_{,\beta}^A g^B \rangle, \\ \tilde{R}^{AB} &\equiv l^{-4} \langle B^{1111} g^A g^B \rangle, \tilde{S}^{AB} \equiv l^{-2} \langle B^{1\gamma 1\delta} g_{,\gamma}^A g_{,\delta}^B \rangle,\end{aligned}\quad (4.5)$$

this model is represented by :

1) the constitutive equations

$$\begin{aligned}N^{\alpha\beta} &= \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) + D^{B\alpha\beta\gamma} Q_\gamma^B + \bar{D}^{B\alpha\beta\gamma} Q_{\gamma,1}^B - \underline{l^2 L^{B\alpha\beta}} V^B, \\ M^{\alpha\beta} &= \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\gamma\delta} + K^{B\alpha\beta} V^B + 2l\bar{K}^{B\alpha\beta} V_{,1}^B + l^2 \tilde{K}^{B\alpha\beta} V_{,11}^B, \\ H^{AB} &= D^{A\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) + C^{AB\beta\gamma} Q_\gamma^B + \bar{C}^{AB\beta\gamma} Q_{\gamma,1}^B - \underline{l^2 F^{AB\beta}} V^B, \\ \bar{H}^{AB} &= \bar{D}^{A\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) + \bar{C}^{AB\beta\gamma} Q_\gamma^B + l^2 \tilde{C}^{AB\beta\gamma} Q_{\gamma,1}^B - \underline{l^3 \bar{F}^{AB\beta}} V^B, \\ G^A &= -\underline{l^2 L^{A\gamma\delta}} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) + K^{A\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} - \underline{l^2 F^{A\beta\gamma}} Q_\gamma^B - \underline{l^3 \bar{F}^{A\beta\gamma}} Q_{\gamma,1}^B + \\ &+ (R^{AB} + \underline{l^4 \bar{L}^{AB}} V^B + 2l\tilde{R}^{AB} V_{,1}^B + l^2 \tilde{R}^{AB} V_{,11}^B), \\ \tilde{G}^A &= \underline{l^2 K^{A\alpha\beta}} W_{,\alpha\beta} + \underline{l^2 \tilde{R}^{AB}} V^B + 2l^3 \bar{R}^{AB} V_{,1}^B + \underline{l^4 \tilde{R}^{AB}} V_{,11}^B, \\ \bar{G}^A &= \underline{l\bar{K}^{A\alpha\beta}} W_{,\alpha\beta} + \underline{l\tilde{R}^{AB}} V^B + 2l^2 \tilde{S}^{AB} V_{,1}^B + \underline{l^3 \bar{R}^{AB}} V_{,11}^B,\end{aligned}\quad (4.6)$$

2) the system of three averaged partial differential equations of equilibrium for averaged displacements $U_\alpha(\Theta, t), W(\Theta, t)$

$$N_{,\alpha}^{\alpha\beta} = 0, \quad M_{,\alpha\beta}^{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} - \bar{N}^{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} = 0 \quad (4.7)$$

3) the system of $3N$ partial differential equations for the fluctuation variables $Q_{\alpha}^B(\Theta, t), V^B(\Theta, t), B=1,2,\dots,N,$

$$H^{A\beta} - \bar{H}_{,1}^{A\beta} = 0, \quad G^A + \tilde{G}_{,11}^A - 2\bar{G}_{,1}^A + N^{11} \underline{g^A} W_{,11} = 0, \quad A, B = 1,2,\dots,N. \quad (4.8)$$

The above model has a physical sense provided that the basic unknowns $U_{\alpha}(\Theta, t), W(\Theta, t), Q_{\gamma}^A(\Theta, t), V^A(\Theta, t) \in SV_A(T), A=1,2,\dots,N,$ i.e. they are Λ -slowly varying functions of Θ^2 -midsurface parameter.

Taking into account (4.1) and (4.4) the shell displacement fields can be approximated by means of formulae

$$u_{\alpha}(\cdot, t) \approx U_{\alpha}(\cdot, t) + h^A(\cdot) Q_{\alpha}^A(\cdot, t), \quad w(\cdot, t) \approx W(\cdot, t) + g^A(\cdot) V^A(\cdot, t), A = 1,2,\dots,N, \quad (4.9)$$

where the approximation \approx depends on the number of terms $h^A(\cdot) Q_{\alpha}^A(\cdot, t), g^A(\cdot) V^A(\cdot, t).$

The characteristic features of the derived model are:

- 1) The model takes into account the effect of the cell size on the overall shell behavior; this effect is describes by underlined coefficients dependent on the mezostructure length parameter l .
- 2) The model equations involve averaged coefficients which are independent of Θ^2 -midsurface parameter (i.e. they are constant in direction of periodicity) and are slowly varying functions of Θ^1 .

Assuming that the cylindrical shell under consideration has material and geometrical properties independent of Θ^1 we obtain governing equations (4.7)-(4.8) with constant averaged coefficients. Moreover, in this case the mode-shape functions $h^A, g^A, A=1,2,\dots,N,$ are also independent of Θ^1 -midsurface parameter.

In the next section the homogenized model of uniperiodic cylindrical shells will be derived as a special case of Eqs.(4.6)-(4.8).

5. HOMOGENIZED MODEL

The simplified model of uniperiodic cylindrical shells can be derived directly from the tolerance model (4.6)-(4.8) by a limit passage $l \rightarrow 0$, i.e. by neglecting the underlined terms which depend on the mezostructure length parameter l . Hence, we arrive at the homogenized shell model governed by

1) equilibrium equations

$$D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta\alpha} - b_{\gamma\delta} W_{,\alpha}) = 0, \quad B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\alpha\beta\gamma\delta} - b_{\alpha\beta} D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{\gamma,\delta} - b_{\gamma\delta} W) + \bar{N}^{\alpha\beta} W_{,\alpha\beta} = 0, \quad (5.1)$$

2) constitutive equations

$$N^{\alpha\beta} = D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} (U_{,\gamma\delta} - b_{\gamma\delta} W), \quad M^{\alpha\beta} = -B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{,\gamma\delta} \quad (5.2)$$

where $D_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \tilde{D}^{\alpha\beta\gamma\delta} - D^{A\alpha\beta\eta} G_{\eta\xi}^{AB} D^{B\xi\gamma\delta}$, $B_{eff}^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \tilde{B}^{\alpha\beta\gamma\delta} - K^{A\alpha\beta} E^{AB} K^{B\gamma\delta}$, with $G_{\alpha\beta}^{AB}$ and E^{AB} defined by $G_{\alpha\beta}^{AB} C^{BC\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma} \delta^{AC}$, $E^{AB} R^{BC} = \delta^{AC}$.

The obtained above homogenized model governed by Eqs.(5.1),(5.2) is not able to describe the length-scale effect on the overall shell behavior being independent of the mezostructure length parameter l .

6. FINAL REMARKS

The subject-matter of this contribution is a thin linear-elastic cylindrical shell having a periodic structure in one direction tangent to the undeformed shell midsurface \mathcal{M} . Shells of this kind are termed uniperiodic. For these shells the equations governed of the Kirchhoff-Love shell theory involve highly oscillating periodic coefficients. In order to simplify the Kirchhoff-Love shell theory to the form which can be applied in engineering problems and also takes into account the effect of a periodicity cell on the overall shell behavior a new model of thin uniperiodic cylindrical shells has been proposed. In order to derive it the *tolerance averaging procedure* given by Woźniak and Wierzbicki in [3] was applied. This model called the tolerance model is represented by a system of partial differential equations (4.7)-(4.8) with coefficients, which are constant in direction of periodicity. The basic unknowns are : the *averaged displacements* U_{α} , W and the *fluctuation variables* $Q_{\alpha}^A, V^A, A=1,2,\dots,N$, which have to be *slowly varying functions* with respect to the cell and certain tolerance system. In order to obtain the governing equations the periodic shape functions $h^A, g^A, A=1,2,\dots,N$, should be postulated. *In contrast with the homogenized models the proposed one makes it possible to describe the effect of the periodicity cell on the critical forces (the length-scale effect)*. Problems related to applications of the proposed Eqs.(4.6)-(4.8) to investigate the critical forces of uniperiodic cylindrical shells are reserved for a separate paper

REFERENCES

- [1] Tomczyk B., Length-scale versus asymptotic model in stability of mezostructured cylindrical shells, Proceedings of IXth Symposium "Stability of Structures", Zakopane,2000, 285-292.
- [2] Woźniak C., On dynamics of substructured shells, J. Theor. Appl Mech., **37**, 1999, 255-265.
- [3] Woźniak C., Wierzbicki E., Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2000.

DRGANIA I STATECZNOŚĆ KOLUMN PODDANYCH OBCIĄŻENIU UOGÓLNIONEMU Z SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA Z UWZGLĘDNIENIEM PODATNOŚCI WĘZŁÓW KONSTRUKCYJNYCH

L. TOMSKI, I. PODGÓRSKA-BRZDĘKIEWICZ, J. SZMIDLA

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Częstochowskiej
Dąbrowskiego 72, 42-200 Częstochowa

W pracy prezentuje się kolumny poddane obciążeniu uogólnionemu z siłą skierowaną do bieguna. W rozważaniach uwzględnia się sprężystość węzłów konstrukcyjnych zamodelowanych za pomocą sztywności sprężyn rotacyjnych i translacyjnych. Przeprowadza się analizę teoretyczną dotyczącą geometrii układu i sformułowania warunków brzegowych na podstawie całkowitej energii układu. Zrealizowano badania symulacyjne dotyczące przebiegu krzywych wartości własnych na płaszczyźnie: obciążenie - częstość drgań własnych. Rozważania dotyczyły wpływu parametrów geometrycznych i fizycznych kolumn i głowic na krzywe częstości drgań własnych oraz na siłę krytyczną kolumn.

1. WPROWADZENIE

W publikacjach innych autorów były rozważane następujące obciążenia układów smukłych:

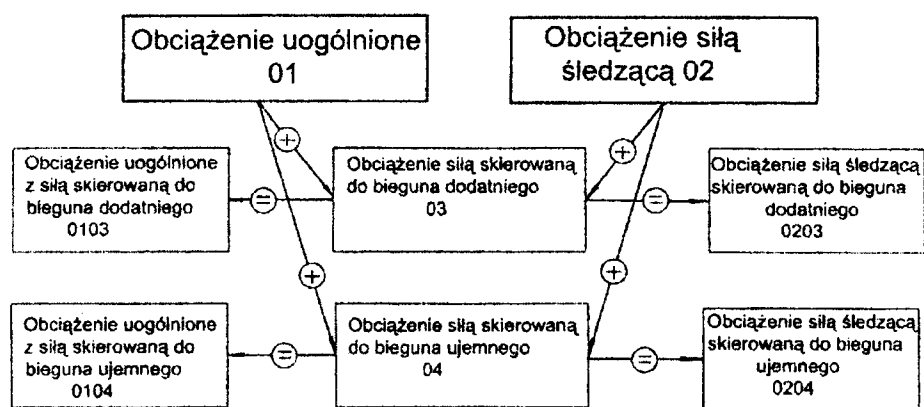
- 01) Obciążenie uogólnione - siła tnąca i moment zginający na nieutwierdzonym końcu kolumny zależy od przemieszczeń i kąta ugięcia tego końca (por. [1-3]).
- 02) Obciążenie siłą śledzącą - kąt na kierunku działania siły jest równy kątowi ugięcia na nieutwierdzonym końcu kolumny (por. [4-6]).
- 03) Obciążenie siłą skierowaną do bieguna dodatniego - stały punkt, przez który przechodzi kierunek działania siły znajduje się poniżej nieutwierdzonego końca kolumny (por. [7-8]).
- 04) Obciążenie siłą skierowaną do bieguna ujemnego - stały punkt, przez który przechodzi kierunek działania siły znajduje się powyżej nieutwierdzonego końca kolumny (por. [8]).

W IMiPKM Politechniki Częstochowskiej od 1994 r. prowadzone są badania teoretyczne, eksperymentalne i symulacyjne kolumn poddanych obciążeniu, które wynalazł L. Tomski [9]. To swoiste obciążenie powstało w wyniku skojarzenia obciążeń odkrytych przez innych autorów, co przedstawiono na diagramie (rys. 1) [10].

Częściowe rezultaty badań teoretycznych, symulacyjnych i eksperymentalnych drgań swobodnych i stateczności układów smukłych poddanych swoistemu obciążeniu przedstawiono w publikacjach w następujący sposób:

- obciążenie uogólnione z siłą skierowaną do bieguna: dodatniego [9,11-14] i ujemnego [14];
 - obciążenie siłą śledzącą skierowaną do bieguna dodatniego i ujemnego [15,16,17].
- W publikacjach powyżej wyszczególnionych badane konstrukcje układów spełniają trzy podstawowe cechy:
- połączenia elementów tworzących głowice obciążające są nieskończenie sztywne,

- w węzłach obrotowych głowic obciążających nie występuje tarcie ślizgowe,
- w węzłach obrotowych występuje tarcie toczne.



Rys. 1. Nazewnictwo i klasyfikacja obciążenia swoistego

Należy podkreślić, że wszystkie warianty obciążenia swoistego zostały urzeczywistnione. Wykonano kilkanaście głowic wymuszających i przejmujących to obciążenie, a wyniki badań eksperymentalnych zaprezentowano między innymi w powyżej wymienionych pracach. W zależności od parametrów geometrycznych głowic to swoiste obciążenie układów smukłych może dać oryginalny przebieg krzywej na płaszczyźnie: obciążenie - częstość drgań własnych.

2. ENERGIA MECHANICZNA UKŁADU

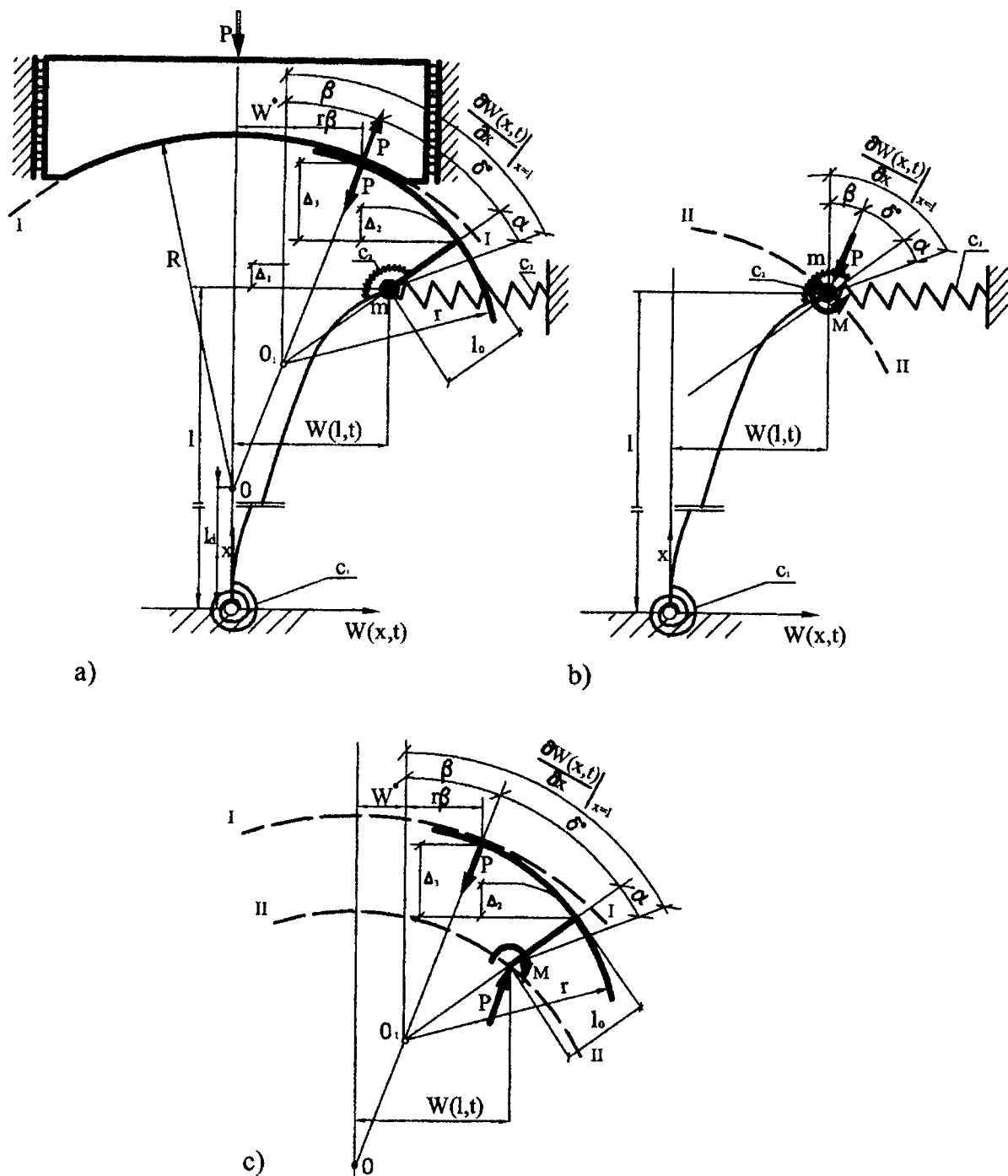
Przedstawiono model fizyczny kolumny poddanej obciążeniu uogólnionemu z siłą skierowaną do bieguna dodatniego (0103) z uwzględnieniem sprężystości węzłów konstrukcyjnych (rys. 2). Sztywność na zginanie oznaczmy EJ , a masę przypadającą na jednostkę długości ρA (gdzie E jest modułem sprężystości podłużnej, J momentem bezwładności względem osi obojętnej w płaszczyźnie zginania, ρ gęstością materiału kolumny, A polem przekroju poprzecznego), $W(x,t)$ jest przemieszczeniem poprzecznym kolumny, m - masą skupioną na końcu nieutwierdzonym. Sprężystość zamocowania została zamodelowana za pomocą sprężyny rotacyjnej o sztywności c_1 . Na swobodnym końcu kolumna połączona jest z głowicą przejmującą obciążenie poprzez sztywny element o długości l_0 . Uwzględnia się podatność węzła konstrukcyjnego mocującego rygiel z kolumną (sprężyna c_2) oraz sprężystość podparcia - sprężyna o współczynniku sztywności c_3 .

Na rys. 2 przedstawiono geometrię układu oraz siły wewnętrzne w dwóch przekrojach. Przekrój I-I uzewnętrznia siłę w głowicy obciążającej, a przekrój II-II siły pomiędzy prętem kolumny a ryglem. Całkowitą energię potencjalną rozpatruje się w zależności od miejsca jej uzewnętrznienia (przekroje I-I i II-II):

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left[\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx \quad - \text{energia odkształcenia sprężystego},$$

$$V_2 = \frac{1}{2} c_1 \left[\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right]^2 \Big|_{x=0} \quad - \text{energia potencjalna sprężystości zamocowania},$$

V_k^j – energia potencjalna układu zależna od miejsca jej uzewnętrznienia (tabela 1-
gdzie $k = 3,4,5,6,7$; $j = *,**,***$).



Rys. 2. Model fizyczny układu (0103) z uwzględnieniem podatności węzłów konstrukcyjnych, geometria i uzewnętrznienie obciążenia

Zgodnie z rys. 2 przemieszczenie wzdłużne Δ_1 końca kolumny wywołane działaniem siły P jest wyrażone:

$$\Delta_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \left[\frac{\partial W(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx \quad (1)$$

Tabela 1. Energia potencjalna układu

Uzewnętrzniecie obciążenia w przekroju:		
I-I	II-II	I-I i II-II
Energia potencjalna składowej poziomej siły P:		
$V_3^* = \frac{1}{2} P\beta (r\beta + W^*)$	$V_3^{**} = \frac{1}{2} P\beta W(l, t)$	$V_3^{***} = \frac{1}{2} P\beta [r\beta + W^* - W(l, t)]$
Energia potencjalna składowej pionowej siły P:		
$V_4^* = -P\Delta_1 - P\Delta_2 + P\Delta_3$	$V_4^{**} = -P\Delta_1$	$V_4^{***} = -P\Delta_2 + P\Delta_3$
Energia potencjalna momentu zginającego:		
$V_5^* = 0$	$V_5^{**} = -V_5^{***}$	$V_5^{***} = \frac{-P}{2} (r - l_0) \delta^* \left[\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big _{x=l} - \alpha \right]$
Energia potencjalna sprężystości węzła mocującego rygiel z kolumną:		
$V_6^* = \frac{1}{2} c_2 \alpha^2(l, t)$	$V_6^{**} = \frac{1}{2} c_2 \alpha^2(l, t)$	$V_6^{***} = 0$
Energia potencjalna sprężystości podparcia:		
$V_7^* = \frac{1}{2} c_3 W^2(l, t)$	$V_7^{**} = \frac{1}{2} c_3 W^2(l, t)$	$V_7^{***} = 0$

Wielkość Δ_2 określającą przemieszczenie sztywnego elementu l_0 i przemieszczenie Δ_3 wynikające z przesunięcia punktu przyłożenia siły względem końca próbki wyznaczamy w następujący sposób (rys. 2):

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} l_0 \left[\left[\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l} - \alpha \right]^2, \quad \Delta_3 = \frac{1}{2} r \left[\left(\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} - \alpha \right)^2 - \beta^2 \right] \quad (2)$$

Zależności geometryczne pomiędzy elementami układu prowadzą do związków:

$$\beta = \frac{W^*(l, t)}{R - r}, \quad W^* = W(l, t) - (r - l_0) \left[\frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} - \alpha \right] \quad (3,4)$$

$$\delta^* = \left[\left(\frac{R - l_0}{R - r} \right) \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} - \frac{1}{R - r} W(l, t) \right] \frac{1}{n^*}, \quad n^* = 1 + P \frac{1}{c_2} \frac{(r - l_0)(R - l_0)}{R - r} \quad (5,6)$$

$$\alpha = P \frac{r - l_0}{c_2} \delta^* = P \left\{ \left[\frac{(r - l_0)(R - l_0)}{R - r} \frac{1}{n^*} \frac{1}{c_2} \right] \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} - \frac{r - l_0}{R - r} \frac{1}{n^*} \frac{1}{c_2} W(l, t) \right\} \quad (7)$$

Energia kinetyczna kolumny i masy skupionej wynosi:

$$T = \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left[\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx + \frac{m}{2} \left[\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l} \right]^2 \quad (8)$$

Sformułowanie zagadnienia w niniejszej pracy odbywa się przy zastosowaniu zasady Hamiltona [18]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V^j) dt = 0 \quad (9)$$

gdzie: $V^j = \sum_{i=1}^2 V_i + \sum_{k=3}^5 V_k^j$, dla $i = 1, 2$

3. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA BRZEGOWEGO

W zasadzie Hamiltona [18] wykorzystuje się przemienność operacji całkowania (względem x oraz t) i obliczania wariacji. Po uwzględnieniu przemienności operatorów wariacji i różniczkowania oraz po scałkowaniu przez części energii kinetycznej i potencjalnej układu otrzymuje się różniczkowe równanie ruchu:

$$EJ \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

Znane a priori warunki brzegowe rozpatrywanego układu (rys. 1):

$$W(0, t) = 0, \quad EJ \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} - c_1 \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0 \quad (11a-b)$$

po podstawieniu do równania (10) umożliwiają wyznaczenie pozostałych warunków niezbędnych do rozwiązania zagadnienia:

$$EJ \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=1} + P \left(\rho \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} + \nu W(l, t) \right) = 0$$

$$EJ \frac{\partial^3 W(x, t)}{\partial x^3} \Big|_{x=1} + P \left(\mu \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=1} + \gamma W(l, t) \right) - c_3 W(l, t) - m \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{x=1} = 0 \quad (11c-d)$$

gdzie wartości współczynników ρ, ν, μ, γ wynoszą:

$$\rho = \frac{(r - lo)(R - lo)}{R - r} \frac{1}{n^*}, \quad \nu = -\frac{r - lo}{R - r} \frac{1}{n^*}, \quad (12a-b)$$

$$\mu = \frac{(R - lo)}{R - r} \left(1 + P \frac{r - lo}{c_2} \right) \frac{1}{n^*}, \quad \gamma = -\frac{1}{R - r} \left(1 + P \frac{r - lo}{c_2} \right) \frac{1}{n^*} \quad (12c-d)$$

Związki (11a-d) określają warunki brzegowe kolumny z uwzględnieniem sprężystości węzłów konstrukcyjnych poddanej zarówno obciążeniu uogólnionemu z siłą skierowaną do bieguna ujemnego ($R < 0$ i $r < 0$) - kolumna (0104) jak i obciążeniu

uogólnionemu z siłą skierowaną do bieguna dodatniego ($R > 0$ i $r > 0$) - kolumna (0103).

Rozdzielając zmienne funkcji $W(x,t)$ względem czasu i przemieszczenia, i wstawiając rozwiązanie ogólne do warunków brzegowych (11a-d), otrzymujemy równanie przestępne na wartości własne rozpatrywanego układu.

4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Kolumna składa się z dwóch prętów o sztywności na zginanie odpowiednio $(EJ)_1$ i $(EJ)_2$ oraz masy przypadającej na jednostkę długości $(\rho A)_1$ i $(\rho A)_2$, (przy czym $(EJ)_1 + (EJ)_2 = EJ$, $(\rho A)_1 + (\rho A)_2 = \bar{\rho}A$). Wyróżnienie prętów oraz parametrów fizycznych i geometrycznych indeksami 1 i 2 potrzebne jest tylko do wyznaczenia symetrycznej częstości drgań własnych.

Przeprowadzono obliczenia numeryczne odnośnie do zmian krytycznego parametru obciążenia λ_c odniesionego do całkowitej długości układu l_1 :

$$\lambda_c = \frac{P_c l_1^2}{EJ}, l_1 = l_0 + l = \text{idem} \quad (13)$$

dla określonych wartości fizycznych i geometrycznych charakteryzujących układ, wyrażonych we współrzędnych bezwymiarowych odniesionych do długości l_1 :

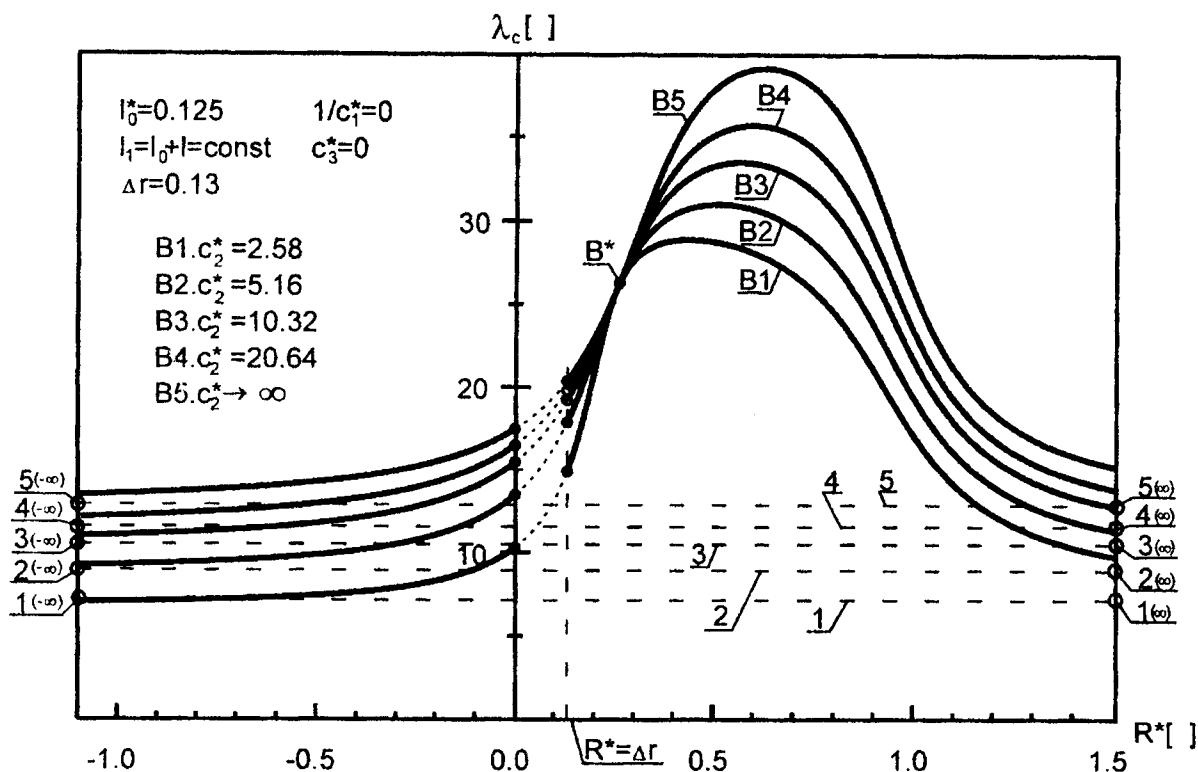
$$R^* = \frac{R}{l_1}, r^* = \frac{r}{l_1}, \Delta r = \frac{R-r}{l_1}, l_0^* = \frac{l_0}{l_1}, c_1^* = \frac{c_1 l_1}{EJ}, c_2^* = \frac{c_2 l_1}{EJ}, c_3^* = \frac{c_3 l_1^2}{EJ} \quad (14)$$

Dokonano również obliczeń numerycznych przebiegu częstości drgań własnych układu w funkcji obciążenia zewnętrznego dla wybranych parametrów fizycznych i geometrycznych układu i stałej masy skupionej m na swobodnym końcu układu. Częstość drgań własnych określono w postaci bezwymiarowej Ω w funkcji bezwymiarowego parametru obciążenia λ . Przyjmuje się:

$$\Omega = \frac{\rho A \omega^2}{EJ} l_1^4, \lambda = \frac{P l_1^2}{EJ}, m^* = \frac{m}{\bar{\rho} A l_1} \quad (15)$$

Zmianę krytycznego parametru obciążenia w funkcji promienia R^* głowicy obciążającej dla określonych: długości sztywnego elementu oraz parametru Δr z uwzględnieniem sprężystości c_2^* przedstawiono na rys. 3. W całym rozpatrywanym zakresie promienia R^* istnieją pewne jego dodatnie wartości ($R^* > 0$) dla których przy $\Delta r = \text{idem}$ nie istnieje rozwiązanie konstrukcyjne (musi być spełniony warunek $r^* > 0$) - co zaznaczono liniami przerywanymi. Liniami 1 ÷ 5 określono wartość krytycznego parametru obciążenia odpowiadającemu $R^* \rightarrow \pm\infty$. Jeżeli spełniona jest zależność

$r^* = l_0^*$, to krytyczny parametr obciążenia odpowiada układowi obciążonemu siłą skierowaną do bieguna dodatniego - punkt B^* i nie zależy od sprężystości c_2^* .



Rys. 3. Zmiana krytycznego parametru obciążenia λ_c w funkcji promienia R^* głowicy obciążającej przy różnych wartościach współczynnika sprężystości c_2^*

Praca wykonana w ramach projektu badawczego KBN nr 7T07C03218

LITERATURA

- [1] Kordas Z., Stability of the Elastically Clamped Compressed Bar in the General Case of Behaviour of the Loading, Bulletin de L'Academie Polonaise des Sciences XI, 1963, s. 419-427.
- [2] Gajewski A., Życzkowski M., Optimal Design of Elastic Columns Subject to the General Conservative Behaviour of Loading, ZAMP, Vol. 21, s. 1970, 806-818.
- [3] Gajewski A., Życzkowski M., Optimal structural design under stability constraints, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers 1988, s. 103-107.
- [4] Beck M., M. Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes. Zeit. Ang.Math.Phys. 3, 1952, , 3, 225-228.
- [4] Bolotin V.V., Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability, Moscow 1961, English translation published by Pergamon Press Inc, 1963.
- [5] Bogacz R., Janiszewski R., Zagadnienia analizy i syntezy kolumn obciążonych siłami śledzącymi ze względu na stateczność, Prace IPPT, PAN 6, Warszawa 1986.
- [6] Timoshenko S.P. and Gere J.M., Theory of Elastic Stability, New York, Mc Graw- Hill, 1961.

- [7] Gajewski A., Życzkowski M., Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, *Rozprawy Inżynierskie* 2, 17, 1969, s. 299-329.
- [8] Tomski L., Gołębiowska-Rozanow M., Przybylski J., Szmidla J., Stability and vibration of a two-member frame under generalised load. *Stability of Steel Structures*, Edited by M.Ivanyi, Vol.1, Akademiai Kiado, Publishing House of Hungarian Academy of Science „Budapest 1995, s. 493-500.
- [9] Tomski L., Szmidla J., Gołębiowska-Rozanow M., Drgania swobodne i stateczność układów smukłych poddanych swoistemu obciążeniu konserwatywnemu, *Polska Mechanika u progu XXI wieku*, Warszawa – Kazimierz Dolny 2001, s. 503 – 510.
- [10] Tomski L., Gołębiowska-Rozanow M., Szmidla J., Drgania swobodne obciążone siłą i momentem, *Free Vibration of a Column Loaded by a Force and Bending Moment*, XVI Symposium „Vibrations in Physical Systems”, Poznań-Błażejewko, May 26-28, 1994, s. 317-319.
- [11] Tomski L., Przybylski J., Gołębiowska-Rozanow M., Szmidla J., Vibration and stability of an elastic column subject to a generalized load, *Archive of Applied Mechanics* 67, 1996, s. 105-116.
- [12] Bogacz R, Imiełowski Sz., Tomski L.: Stability and Vibration of Column Structures Subjected to Generalized Concentrated Load. *Theoretical and Experimental Study*, *Dynamics of Continua: - International Symposium I D. Besko und R. Bogacz*, Aachen, Shaker, 1998, s. 45-54.
- [13] Tomski L., Przybylski J., Gołębiowska-Rozanow M., Szmidla J., Vibration and Stability of columns subjected to a certain type of generalised load, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, No. 2, Vol.37, 1999, s. 283-299.
- [14] Tomski L., Przybylski J., Gołębiowska-Rozanow M., Szmidla J., Vibration and stability of a cantilever column subject to a follower force passing through a fixed point, *Journal of Sound and Vibration*, 214 , 1, 1998, s. 67-81.
- [15] Tomski L., Szmidla J., Gołębiowska-Rozanow M., Drgania i stateczność kolumny obciążonej poprzez wycinek łożyska tocznego, *IX Sympozjum Stateczności Konstrukcji*, Zakopane 25-29, 09. 2000, s. 293-298.
- [16] Szmidla J., Drgania i stateczność kolumny geometrycznie nieliniowej obciążonej siłą śledzącą do bieguna dodatniego, *Praca doktorska*, Częstochowa, 1998, Promotor prof. dr hab. inż. Lech Tomski.
- [17] Goldstein M., *Clasical Mechanics* Cambridge, Addison - Wesley, Publishing Company U.S.A., England 1950, s. 38-42.

STABILITY AND VIBRATION OF COLUMNS UNDER GENERALISED LOAD DIRECTED TOWARDS A POLE WITH FLEXIBLE CONSTRUCTIONAL JOINTS

Columns loaded by a generalised load towards a pole are presented in this work. Elasticity of constructional joints has been modelled by using rigidity of rotational and transversal springs. Theoretical analysis concerning geometry of the system and the boundary condition formulation on the base of the total system energy has been carried out. Realised simulation concerned the course of natural vibration curves in the plane: load-natural vibration. Research has been devoted to the influence of physical and geometrical parameters of columns and loading heads on the critical force and natural vibration curves.

DRGANIA I STATECZNOŚĆ KOLUMNY LINIOWEJ I GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ OBCIĄŻONEJ SIŁĄ SKIEROWANĄ DO BIEGUNA (APROKSYMACJA KOLUMNY BECKA)

**L. TOMSKI, J. SZMIDLA, M. GOŁĘBIOWSKA – ROZANOW,
A. KASPRZYCKI**

Instytut Mechaniki i Podstaw Konstrukcji Maszyn Politechniki Częstochowskiej
Dąbrowskiego 72, 42-200 Częstochowa

W pracy przedstawia się badania teoretyczne i eksperymentalne dotyczące drgań swobodnych i stateczności kolumny liniowej i geometrycznie nieliniowej poddanej obciążeniu siłą skierowaną do bieguna dodatniego. Wyznacza się wpływ asymetrii sztywności na zginanie poszczególnych prętów kolumny geometrycznie nieliniowej oraz położenia bieguna na wartość siły krytycznej oraz istnienie zakresów lokalnej i globalnej niestateczności. Określa się także położenie bieguna dla którego rozpatrywany układ można zaliczyć do jednego z dwóch typów układów dywergencyjnego lub dywergencyjnego pseudoflaterowego. W pracy urzeczywistniono także aproksymację kolumny Beck'a za pomocą układu dywergencyjnego pseudoflaterowego jakim może być kolumna obciążona siłą skierowaną do bieguna dodatniego.

1. WPROWADZENIE

W pracach [1-6] zaprezentowano badania geometrycznie nieliniowych kolumn poddanych obciążeniu Eulera (obciążenie siłą wzdłużną o stałym punkcie zaczepienia i stałym kierunku). Rozważane układy zbudowane są (w płaszczyźnie zginania) z trzech belek o symetrycznym rozkładzie sztywności na zginanie [1, 3, 4, 5] lub pręta i rury osadzonych współosiowo [2, 6]. Te trzy pręty lub pręt i rura połączone są w taki sposób, że przemieszczenia i kąty ugięcia na końcach tych kolumn są jednakowe.

W powyżej wymienionych pracach przedstawiono następujące zagadnienia:

- wyboczenie wstępnie sprężonej kolumny [1] (badania teoretyczne i eksperymentalne),
- zachowanie się przedwyołoczeniowe kolumny wspornikowej (bez wstępnego sprężenia) w zakresie od postaci prostoliniowej do postaci linii ugiętej [2] (badania teoretyczne),
- drgania swobodne i stateczność wstępnie sprężonej kolumny przegubowo podpartej [3, 4] (badania teoretyczne) oraz [5] (badania teoretyczne i eksperymentalne),
- drgań swobodnych i stateczności kolumny z elementem wywołującym inercję rotacyjną [6] (badania teoretyczne i eksperymentalne).

W pracach [3, 5, 6] do rozwiązania zagadnień drgań swobodnych zastosowano metodę perturbacyjną małego parametru [7] a w pracy [4] – uogólnioną metodę Ritza.

W pracy [9] badano (teoretycznie i eksperymentalnie) układ geometrycznie nieliniowy wstępnie sprężony (bez obciążenia zewnętrznego). Jest to belka wspornikowa z masą na nieobciążonym końcu.

W publikacji [10] rozważono też układ geometrycznie nieliniowy lecz skonstruowany inaczej niż przedstawiony w powyżej cytowanych pracach. Układ składa się z kolumny zamocowanej przegubowo na obu końcach oraz osiowo umieszczonej sprężyny (na jednym końcu). Kolumna obciążona jest mimośrodowo siłą wzdłużną.

Cechą układów geometrycznie nieliniowych jest to, że częstość drgań swobodnych zależy od wstępnego sprężenia tego układu.

W pracy [11] rozważono układ złożony z trzech belek, który jest tak zbudowany, że wszystkie belki mają jednakową linię ugięcia. To powoduje że układ jest geometrycznie liniowy. Przeprowadzono badania teoretyczne oraz eksperymentalne i stwierdzono, że wstępne sprężenie nie ma wpływu na częstość drgań własnych – co jest oczywiste dla układów geometrycznie liniowych.

W pracy [12] przeprowadzono badania teoretyczne dotyczące stateczności geometrycznie nieliniowej kolumny Eulera (rama przesztywniona). Określono wpływ asymetrii rozkładu sztywności na zginanie poszczególnych prętów kolumny na wartość siły krytycznej oraz istnienie obszarów lokalnej i globalnej utraty stateczności. Zrealizowano badania eksperymentalne dotyczące przebiegu krzywej na płaszczyźnie: obciążenie - częstość drgań własnych w przypadku lokalnej i globalnej utraty stateczności. Określono również wpływ wstępnego sprężenia na stateczność rozważanego układu w zakresie lokalnej i globalnej utraty stateczności.

W pracach [13, 14] zawarto badania eksperymentalne kolumny z siłą skierowaną do bieguna dodatniego. Za pomocą tej kolumny aproksymowano przebieg krzywej na płaszczyźnie obciążenie (P) – częstość drgań własnych odpowiadający kolumnie Beck'a. Aproksymacja omawianego układu flaterowego dotyczyła układu liniowego.

W niniejszej pracy przedstawia się badania teoretyczne i eksperymentalne dotyczące drgań swobodnych i stateczności kolumny liniowej i geometrycznie nieliniowej poddanej obciążeniu siłą skierowaną do bieguna dodatniego. Dla obciążenia siłą skierowaną do bieguna dodatniego kierunek działania siły przechodzi przez stały punkt leżący poniżej nieutwierdzonego końca kolumny (por. [15, 16]). Dla rozpatrywanego układu określa się wpływ asymetrii na zginanie poszczególnych prętów kolumny geometrycznie nieliniowej oraz położenia bieguna na wartość obciążenia krytycznego, istnienie zakresów lokalnej i globalnej utraty stateczności oraz przebieg częstości drgań własnych w funkcji obciążenia zewnętrznego. Przeprowadza się również aproksymacje kolumny Beck'a (por.[17]) za pomocą rozważanego układu obciążonego siłą skierowaną do bieguna dodatniego w zakresie dywergencyjnym pseudoflaterowym.

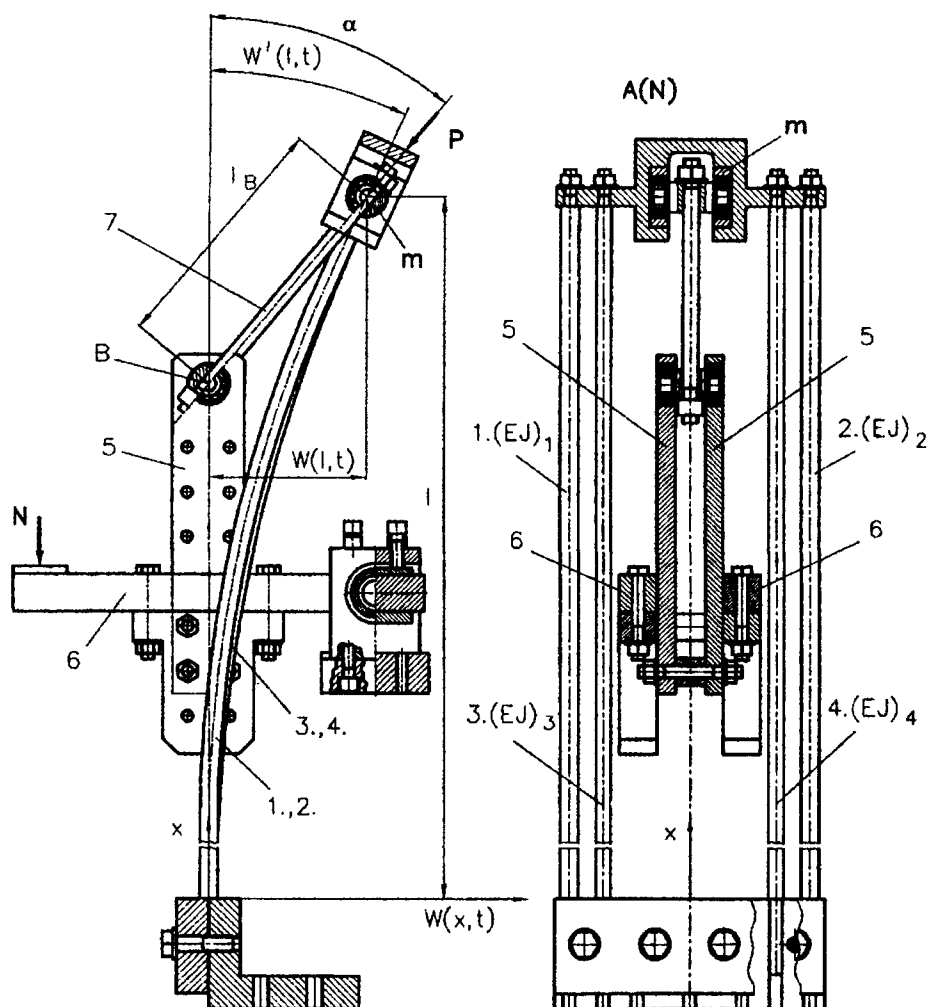
2. SCHEMAT KONSTRUKCYJNY UKŁADU OBCIĄŻAJĄCEGO I KOLUMNY. KLASYFIKACJA KOLUMN

Sposób zamocowania i obciążenia oraz kształt ugiętych osi prętów rozpatrywanej geometrycznie nieliniowej kolumny obciążonej siłą skierowaną do bieguna dodatniego przedstawia rysunek 1. Układ zbudowany jest z czterech prętów (1, 2, 3, 4) o przekroju kołowym i symetrycznym rozkładzie sztywności na zginanie $(EJ)_i$ oraz masy przypadającej na jednostkę długości $(\rho A)_i$ przy czym:

$$(EJ)_1 = (EJ)_2, (EJ)_3 = (EJ)_4 \quad \text{i} \quad (\rho A)_1 = (\rho A)_2, (\rho A)_3 = (\rho A)_4 \quad (1)$$

E_i, J_i, A_i, ρ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) są odpowiednio modułem sprężystości podłużnej materiału, centralnym osiowym momentem bezwładności przekroju, polem powierzchni i masą właściwą i – tego pręta kolumny.

Pręty kolumny są sztywno utwierdzone z jednej strony ($x=0$) oraz połączone za pomocą masy skupionej (m) na swobodnym końcu układu ($x=l$). Kolumna obciążona jest siłą (N) poprzez sztywny element (6) oraz elastyczne cięgno (7), które określa kierunek działania obciążenia zewnętrznego (P) przechodzącego przez stały punkt (B). Biegun (B) umiejscowiony jest w odległości (l_B) od swobodnego końca kolumny. Zmienne położenie bieguna (B) realizowane jest poprzez układ mechaniczny (5).



Rys. 1. Kształt ugiętych prętów i sposób zamocowania geometrycznie nieliniowej kolumny obciążonej siłą skierowaną do bieguna

Przyjmuje się następujące oznaczenia rozważanych kolumn:

$A(N)$ – kolumna geometrycznie nieliniowa (przesztywniona rama płaska) zbudowana z czterech prętów (zgodnie z rys. 1). Biorąc pod uwagę symetryczny rozkład sztywności na zginanie, masy przypadającej na jednostkę długości (1), a także równość przemieszczeń wzdłużnych wszystkich prętów układu na

swobodnym końcu układu oraz prawo Hocke'a, rozkład sił wewnętrznych w poszczególnych prętach jest następujący:

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2} \frac{(EA)_1 + (EA)_2}{\sum_{i=1}^4 (EA)_i}, \quad S_3 = S_4 = \frac{P}{2} \frac{(EA)_3 + (EA)_4}{\sum_{i=1}^4 (EA)_i} \quad (2)$$

A(L2) – kolumna liniowa zbudowana z dwóch prętów o sztywności na zginanie $(EJ)_1, (EJ)_2$ i ściskanie $(EA)_1, (EA)_2$ (bez prętów wewnętrznych (3), (4) – rys.1). Sztywność prętów kolumny A(L2) jest taka sama jak prętów o i indeksach 1,2 kolumny A(N) przy przyjętej asymetrii sztywności na zginanie kolumny geometrycznie nieliniowej. Rozkład sił wewnętrznych jest następujący:

$$S_1 = S_2 = \frac{P}{2} \quad (3)$$

3. RÓWNANIA RUCHU. WARUNKI BRZEGOWE

Równania ruchu dla rozpatrywanej kolumny geometrycznie nieliniowej A(N) oraz liniowej A(L2) po uprzednim rozdzieleniu zmiennych funkcji $W_i(x, t)$ względem czasu i przemieszczenia w postaci:

$$W_i(x, t) = y_i(x) \sin(\omega t) \quad (4)$$

są następujące:

$$E_i J_i y_i^{IV}(x) + S_i y_i''(x) - \rho_i A_i \omega^2 y_i(x) = 0 \quad (5)$$

Warunki brzegowe w punktach sztywnego utwierdzenia oraz na swobodnym końcu kolumny przyjmują postać:

$$\begin{aligned} y_1(x)|_{x=0} &= y_2(x)|_{x=0} = y_3(x)|_{x=0} = y_4(x)|_{x=0} = 0 \\ y_1'(x)|_{x=0} &= y_2'(x)|_{x=0} = y_3'(x)|_{x=0} = y_4'(x)|_{x=0} = 0 \\ y_1(x)|_{x=1} &= y_2(x)|_{x=1} = y_3(x)|_{x=1} = y_4(x)|_{x=1} \\ y_1'(x)|_{x=1} &= y_2'(x)|_{x=1} = y_3'(x)|_{x=1} = y_4'(x)|_{x=1} \\ \sum (EJ)_i y_i''(x)|_{x=1} &= 0 \\ \sum (EJ)_i y_i'''(x)|_{x=1} + P \left[y_1'(x)|_{x=1} - \frac{y_1(x)|_{x=1}}{l_B} \right] + m\omega^2 y_1(x)|_{x=1} &= 0 \end{aligned} \quad (6a-p)$$

Dla kolumny A(N) $i=1, 2, 3, 4$, a dla A(L2) $i=1, 2$.

Dla rozważanych w niniejszej pracy kolumn przyjmuje się łączną sztywność na zginanie:

$$\sum (EJ)_i = \text{idem} \quad (7)$$

oraz definiuje się współczynnik asymetrii sztywności na zginanie μ w postaci:

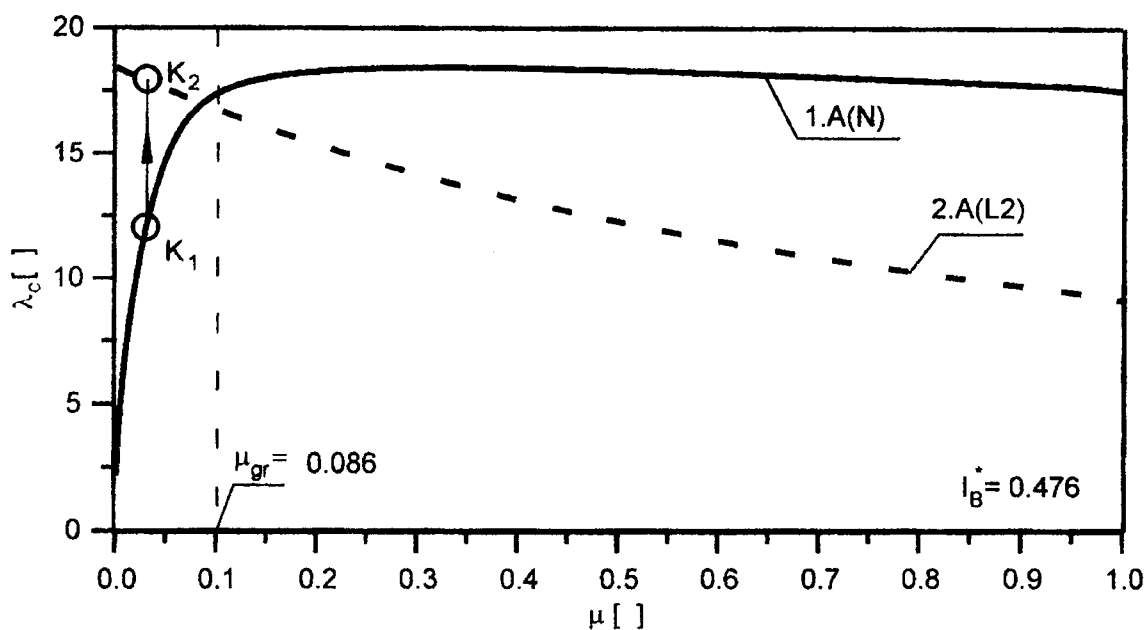
$$\mu = \frac{(EJ)_3 + (EJ)_4}{(EJ)_1 + (EJ)_2} \quad (8)$$

4. STATECZNOŚĆ KOLUMNY GEOMETRYCZNIE NIELINIOWEJ A(N)

Dla porównania kolumn A(N) i A(L2) ze względu na siłę krytyczną P_c przyjmuje się krytyczny bezwymiarowy parametr obciążenia λ_c w postaci:

$$\lambda_c = \frac{P_c l^2}{\sum (EJ)_i} \quad (9)$$

Rozważa się stateczność kolumny geometrycznie nieliniowej A(N) (krzywa 1 – rys. 2) oraz kolumny liniowej złożonej z dwóch prętów A(L2) (krzywa 2 – rys. 2) w funkcji współczynnika asymetrii rozkładu sztywności na zginanie w zakresie $\mu \in (0,1)$ dla wybranych długości l_B elastycznego ciągu (7) - (por. rys.1),



Rys. 2 Wartość krytycznego parametru obciążenia λ_c w funkcji parametru μ dla kolumn: A(N), A(L2)

gdzie:

$$l_B^* = \frac{l_B}{l} \quad (10)$$

W zakresie zmienności współczynnika μ od zera do μ_{gr} krytyczny parametr obciążenia kolumny geometrycznie nieliniowej $A(N)$ jest mniejszy od tego parametru dla kolumny liniowej zbudowanej z dwóch prętów $A(L2)$ o sztywności na zginanie $(EJ)_1 + (EJ)_2$. Sztywność $(EJ)_1 + (EJ)_2$ prętów kolumny liniowej zmienia się tak samo jak sztywność prętów o indeksach 1,2 kolumny geometrycznie nieliniowej. W kolumnie geometrycznie nieliniowej znajdują się dodatkowo pręty o sztywności na zginanie $(EJ)_3 + (EJ)_4$. Usunięcie z kolumny geometrycznie nieliniowej tych prętów powoduje nagły wzrost siły krytycznej (przejście od punktu K_1 do punktu K_2). W związku z powyższym w zakresie zmienności współczynnika rozkładu asymetrii sztywności na zginanie prętów μ od wartości zero do μ_{gr} następuje lokalna utrata stateczności układu. Dla $\mu > \mu_{gr}$ występuje globalna utrata stateczności układu.

5. APROKSYMACJA KOLUMNY BECK'A

Aproksymacji kolumny Beck'a za pomocą kolumny obciążonej siłą skierowaną do bieguna dodatniego w zakresie układów geometrycznie nieliniowych lub liniowych dokonuje się poprzez zmianę położenia bieguna B (zmienny zakres długości l_B). Rozważany model kolumny Beck'a jest identyczny z omawianą geometrią układu obciążonego siłą skierowaną do bieguna dodatniego (kolumna $A(N)$ - rys.1 lub $A(L2)$) przy czym obciążony jest siłą P , której kierunek działania jest styczny do linii ugięcia swobodnego końca kolumny (por.[17]). Przedział wartości l_B dla kolumny obciążonej siłą skierowaną do bieguna dodatniego w zakresie dywergencyjnym – pseudoflateowym (por.[18]) przy założonej geometrii i stałych fizycznych kolumn wyznacza się na podstawie zależności, która wynika z porównania warunków brzegowych określających siłę tnącą na swobodnym końcu dla rozważanych układów. Wynika stąd związek:

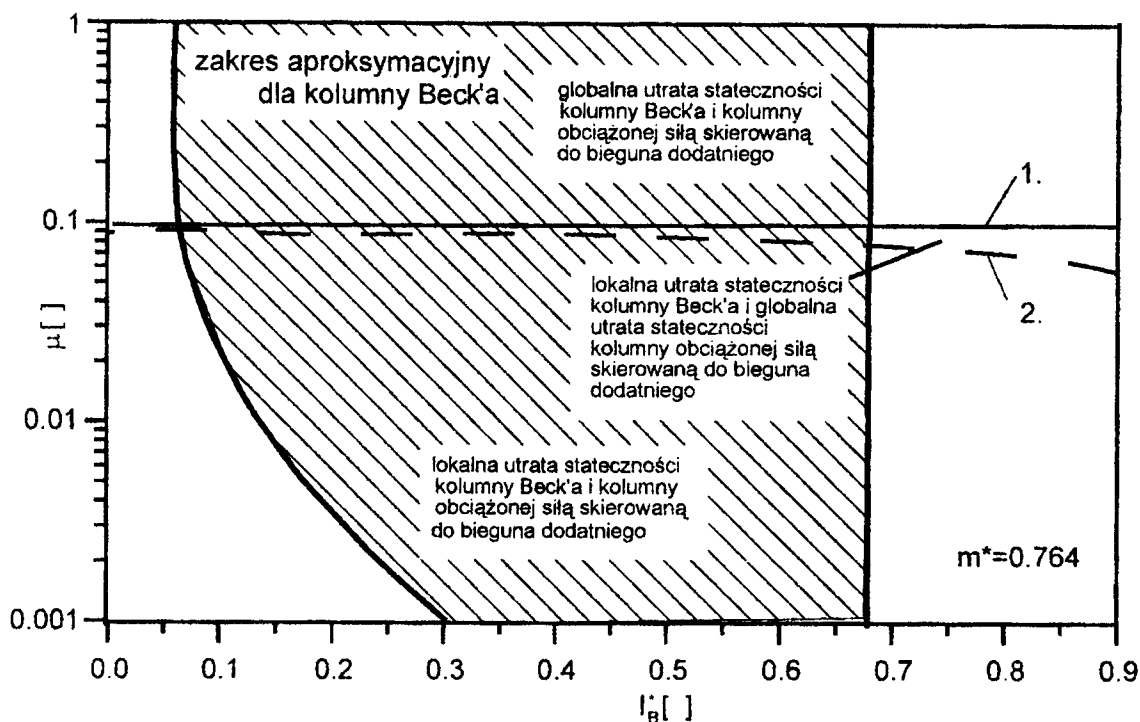
$$P y_1'(x)|_{x=1} - P \frac{y_1(x)|_{x=1}}{l_B} = 0 \quad (11)$$

Przy uwzględnieniu relacji (10) otrzymujemy:

$$l_B^* = \frac{y_1(x)|_{x=1}}{l y_1'(x)|_{x=1}} \quad (12)$$

Analizując zagadnienie aproksymacji wykonuje się obliczenia numeryczne i badania eksperymentalne mające na celu wyznaczenie przedziału aproksymacyjnego parametru l_B^* w zakresie globalnej i lokalnej utraty stateczności rozważanych kolumn. Na rysunku 3 przedstawiono zakres aproksymujący w funkcji współczynnika asymetrii sztywności na zginanie prętów kolumny geometrycznie nieliniowej $A(N)$ oraz położenia bieguna definiowanego poprzez parametr l_B^* . Krzywa (2) opisuje wartość współczynnika asymetrii na zginanie, która rozgranicza obszary lokalnej i globalnej utraty stateczności dla kolumny $A(N)$. Wartość omawianego współczynnika dla

geometrycznie nieliniowej kolumny Beck'a jest niezależna od wartości parametru I_B^* (linia 1). Obliczenia wykonano dla stałej wartości masy skupionej na swobodnym końcu kolumn m^* wyrażonej bezwymiarowo, odnosząc jej wartość do całkowitej masy układu ciągłego.



Rys. 3. Zakres aproksymacyjny dla kolumny Beck'a w funkcji parametrów kolumny A(N)

Praca wykonana w projekcie badawczego KBN nr 7T07C03218 oraz pracy BS - 01-302/99/P.

LITERATURA

- [1] Godley M.H.R, Chilver A.H., Elastic Buckling of Overbraced Frames, Journal Mechanical Engineering Science, 1970, Vol. 12 , No4 ,238 –247.
- [2] Tomski L., Prebuckling Behaviour of Compound Column – Direct Nonlinear Analysis, ZAMM, Z. Angew. Math. U. Mech. 65, 1985, 1, 59-61.
- [3] Przybylski J., Tomski L., Vibration of an Initially Prestressed Compound Column under Axial Compression. Elsevier Science Publishers B.V., 1992, 263-268.
- [4] Tomski L.,Kukła S., Vibration of a Prestressed Two-Member Compound Column. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1992, Vol 30, No. 3, 624-638.
- [5] Przybylski J., Tomski L., Gołębiowska – Rozanow M., Free Vibration of an Axially Loaded Prestressed PlanarFrame. Journal of Sound and Vibration, 1996, Vol.189, No.5, 609 –624.
- [6] Tomski L., Przybylski J., Gołębiowska – Rozanow M., Szmidla J., Free Vibration of a Longitudinally Loaded Column With Rotary Inertia Elements. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 1997, Vol.35, No.3, 615,626.

- [7] Nayfeh A., Perturbation Methods, John Wiley, New York, 1973, Chap 3
- [8] Szemplinska – Stupnicka W., "Non – linear modes and the generalised Ritz method in the problems of vibrations of non – linear elastic continuous system. Non – Linear Mechanics, 1983, 18, 149 –165.
- [9] Tomski L., Przybylski J., Geisler T, Vibrations of a Prestressed Compound Beam With a Concentrated Mass. Journal of Sound and Vibration, 1994, 174(3), 315 – 321.
- [10] Tomski L.,Kukla S., Free Vibrations of a Certain Geometrically Nonlinear System with Initial Imperfection. AIAA, 1990, Vol.28, No.7, 1240- 1245.
- [11] Kerr A.D., On the Dynamic Response of a Prestressed Beam. Journal of Sound and Vibration, 1976, 49(4), 569 –573.
- [12] Tomski L., Szmidla J., Local and Global Instability and Vibration of Overbraced Euler's Column. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2003, Vol. 41, No. 1, 137-154.
- [13] Willems N., Experimental verification of the dynamic stability of a tangentially loaded cantilever column. Journal of Applied Mechanics, 1966, 460 –461.
- [14] Xiong y., Wang T. K., Tararrok B., On a centripetally loaded model simulating Beck's column. International Journal Solids Structures, 1989, Vol.25, No.10, 1107 –1113.
- [15] Timoshenko S.P. and Gere J.M., Theory of Elastic Stability, New York, Mc Graw- Hill, 1961.
- [16] Gajewski A., Życzkowski M., Optymalne kształtowanie pręta ściskanego siłą skierowaną do bieguna, Rozprawy Inżynierskie 2, 17, 1969, s. 299-329.
- [17] Beck M., M. Die Knicklast des einseitig eingespannten tangential gedrückten Stabes. Zeit. Ang.Math.Phys. 3, 1952, , 3, 225-228.
- [18] Tomski L., Szmidla J., Gołębiowska-Rozanow M., Drgania swobodne i stateczność układów smukłych poddanych swoistemu obciążeniu konserwatywnemu. Polska Mechanika u progu XXI wieku, Warszawa – Kazimierz Dolny 2001, str. 503 – 510.

STABILITY AND VIBRATION OF CENTRIPETALLY LOADED GEOMETRICALLY LINEAR AND NON-LINEAR COLUMNS (BECK'S COLUMN APPROXIMATION)

Theoretical and experimental investigation of free vibration and stability of geometrically linear and non-linear columns loaded towards a positive pole are presented in the paper. The influence of asymmetry of the bending rigidity of particular non-linear column bars and the pole position on the scope of local and global instability have been established. The pole position for which the system can be treated as the divergence one or the divergence pseudo flutter one has been determined. An approximation of Beck's column has been carried out by using the divergence pseudo flutter system (the column loaded towards a positive pole).

WPLYW SPOSOBU MODELOWANIA WLAŚCIWOŚCI MATERIAŁU NA WYLICZONĄ TWARDOŚĆ BRINELLA

M.WIECZOREK, K.KOSIUCZENKO

Instytut Materiałoznawstwa i Mechaniki Technicznej

Wojskowej Akademii Technicznej

Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa

W pracy zbadano jaki wpływ na ocenę twardości ma przyjęty model materiału. Symulację numeryczną przeprowadzono MES. Szczegółowe rozważania oparto na przykładzie stali 30HGSA.

1. WSTĘP

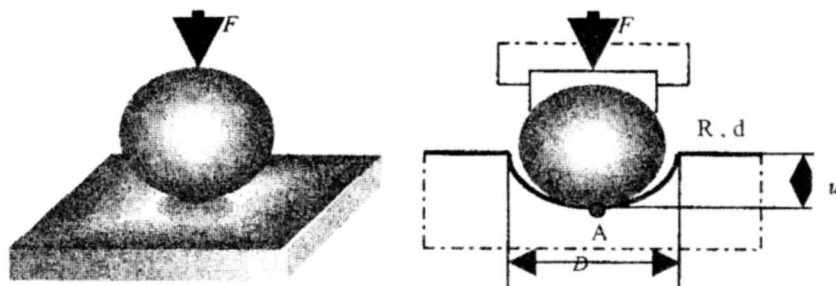
Stosowane powszechnie metody numeryczne umożliwiają dowolnie dokładne modelowanie pracy konstrukcji. Istniejące uwarunkowania sprzętowe, na ogół zmuszają projektanta do stosowania pewnych uproszczeń i uogólnień, które mają wpływ na dokładność otrzymywanych wyników. Celem niniejszego referatu jest próba zwrócenia uwagi na rolę i skutki przyjęcia określonych modeli materiału na ocenę twardości. Przedstawione w pracy rozważania dotyczą symulacji numerycznej MES pomiaru twardości metodą Brinella. We wszystkich wariantach obliczeń wykorzystano ten sam model dyskretny skojarzenia płytka-kulka. Zmieniano tylko model materiału płytki. Założono, że płytka wykonana jest ze stali 30HGSA, a wciskana kulka jest nieskończenie sztywna. Uzyskane wartości twardości HB wraz z odpowiadającymi im modelami materiału zestawiono w odpowiedniej tablicy. Przedstawiona analiza jest kontynuacją prac prowadzonych przez autorów, zmierzających do oceny twardości materiału metodami komputerowymi [4,5].

2. METODA BRINELLA

Metoda Brinella polega na wgniataniu w badany materiał kulki stalowej o średnicy d (Rys. 1). Wynikiem obciążenia kulki siłą F i następnie jej odciążenia do wartości $F=0$ jest trwała deformacja (odcisk), którego średnica D i głębokość u charakteryzują badany materiał w zakresie własności plastycznych. Głębokość odcisku jest różnicą pomiędzy przemieszczeniem całkowitym punktu A uzyskanym w procesie obciążania (wcisk maksymalny) i przemieszczeniem sprężystym tego samego punktu powstającym podczas odciążania. Wartość obciążenia F ustala się na podstawie zaleceń podanych w Polskiej Normie. Według PN miarą twardości Brinella jest stosunek siły obciążającej F do powierzchni czaszy kulistej, powstałej po wgnieceniu kulki [3]. Oblicza się ją ze wzoru:

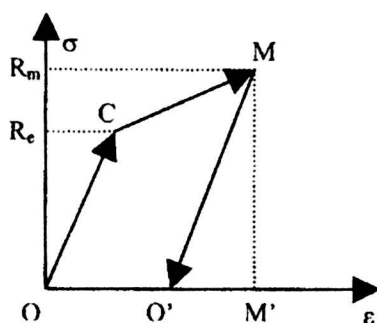
$$HB = \frac{F}{\pi \cdot d \cdot u} \quad (1)$$

gdzie: F - siła przyłożona do kulki, d - średnica kulki, u - wartość wgłębienia



Rys. 1. Pomiar twardości HB

Metoda Brinella dobrze oddaje problematykę wpływu parametrów materiału (stałe materiałowe, wykres $\sigma(\varepsilon)$) na odkształcenia trwałe. Wielu badaczy twardość *HB* uzależniało liniowo od doraźnej wytrzymałości na rozciąganie R_m [1,2]. Sposób ten miał kiedyś duże znaczenie praktyczne. Wiemy jednak że właściwości plastyczne stali zależą od wielu czynników. Dlatego powyższe założenie nie pozwala na dokładny opis zjawiska wciskania kulki. Aby model materiału właściwie opisywał dyssypację energii występującą w procesie plastycznym, niezbędna jest jeszcze znajomość granicy plastyczności R_e oraz kształtu krzywej $\sigma(\varepsilon)$ powyżej granicy plastyczności (Rys. 2):



Rys. 2. Energia nieodwracalnej części procesu (pole OCMO')

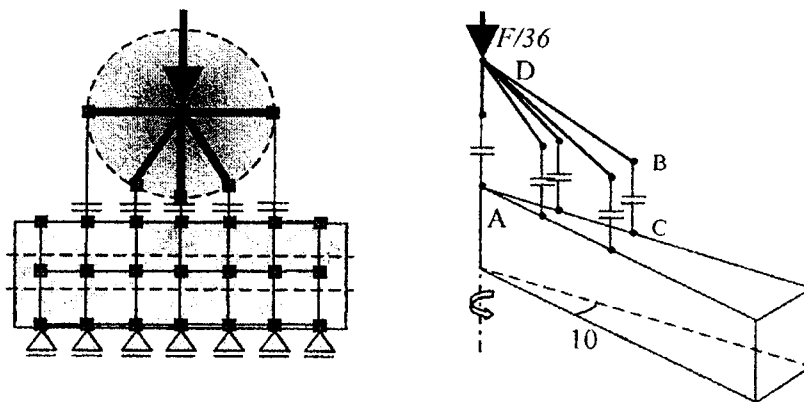
3. OBLICZENIA NUMERYCZNE

Obliczenia numeryczne wykonano metodą elementów skończonych wykorzystując do tego celu program MSC Nastran for Windows [6]. Rozważano płytkę okrągłą o grubości 6mm i promieniu 8mm, w którą wciskano kulkę o średnicy $d=10mm$.

3.1. OPIS MODELU

Z uwagi na osiową symetrię problemu (Rys.1) zbudowano model numeryczny wycinka płytki o kącie wierzchołkowym 10° . Warunki brzegowe i współrzędne węzłów opisano w układzie cylindrycznym (rys. 3). Kulkę modelowano elementem sztywnym RIGID współpracującym z elementami kontaktowymi GAP. Badany materiał (wycinek o kącie wierzchołkowym 10°) modelowano elementami bryłowymi SOLID sześci- i ośmiowęzłowymi. Przyjęto 60 warstw elementów bryłowych w pionie, 80 warstw wzdłuż promienia i jedną warstwę w kierunku obwodowym. Płaszczyzna dolna materiału została oparta na nieodkształcalnej powierzchni. Do węzłów leżących na niej dołączono podpory. Model obciążono statycznie siłą F przyłożoną do węzła niezależnego D elementu RIGID (rys. 3). Uzyskaną wartość przemieszczenia u węzła

A leżącego na osi symetrii podstawiano do wzoru 1, uzyskując w rezultacie poszukiwaną wartość twardości.



Rys. 3. Widok modelu dyskretnego

Pomiędzy współpracującymi węzłami narzędzia (punkt B) i materiału (punkt C) wprowadzono elementy kontaktowe GAP. Zapobiegają one przenikaniu elementu RIGID w głąb materiału oraz umożliwiają modelowanie kształtu narzędzia i chropowatości badanej powierzchni. Powierzchnię tą definiowano poprzez luzy U_{0i} w elementach GAP. Wartość luzów U_{0i} wyznaczono z zależności 2 (Rys. 4.):

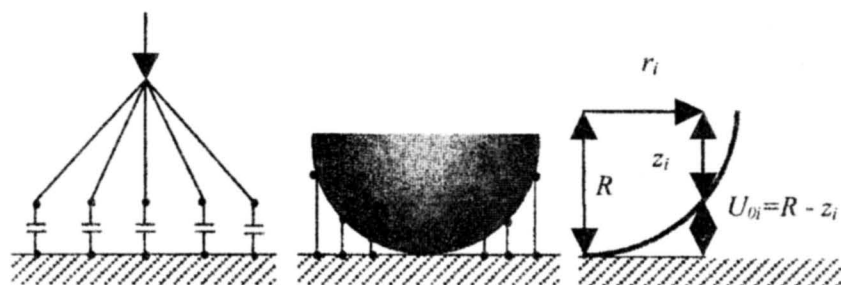
$$r_i \in (0, R) \Rightarrow U_{0i} = R - z_i, z_i = \sqrt{R^2 - r_i^2} \Rightarrow U_{0i} = R - \sqrt{R^2 - r_i^2} \quad (2)$$

gdzie: R - średnica kulki, U_{0i} - luz i -tego elementu GAP, r_i - współrzędna promieniowa i -tego elementu GAP, z_i - połowa cięciwy kulki odpowiadającej współrzędnej r_i

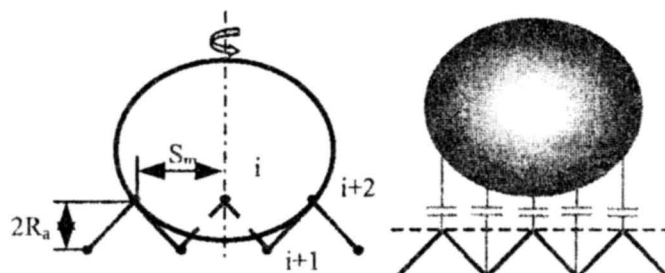
Użyty w modelu element RIGID służył do rozłożenia siły F (działającej w węzle niezależnym D - rys.3.) na składowe pionowe F_i (generowane w elementach GAP połączonych z elementem RIGID w węzle zależnym B). Siły te obciążają poszczególne węzły obszaru kontaktu (punkty C). Dzięki idealnej sztywności elementów RIGID, model narzędzia nie odkształca się. Wielkość wcisku kulki zależy także od nierówności powierzchni, a głównie od chropowatości. Chropowatość modelowano powierzchnią utworzoną przez obrót wokół osi symetrii jednorodnej linii łamanej, określonej parametrami R_a i S_m (rys. 5.). Węzły wprowadzono tylko w wierzchołkach łamanej. Nierówności wpływają na wielkość luzu w elementach kontaktowych. W pracy przyjęto, że poziomem odniesienia jest linia prosta przechodząca przez górne wierzchołki łamanej. W związku z tym wszystkie wartości luzów U_{0i} wynikające z kształtu narzędzia poddano modyfikacji wg. zależności 3:

$$i = 1,3,5... \begin{cases} U_{0i}^* = U_{0i} \\ U_{0i+1}^* = U_{0i+1} + 2R_a \end{cases} \quad (3)$$

gdzie: R_a - wysokość chropowatości



Rys. 4. Interpretacja luzów GAP w modelu dyskretnym



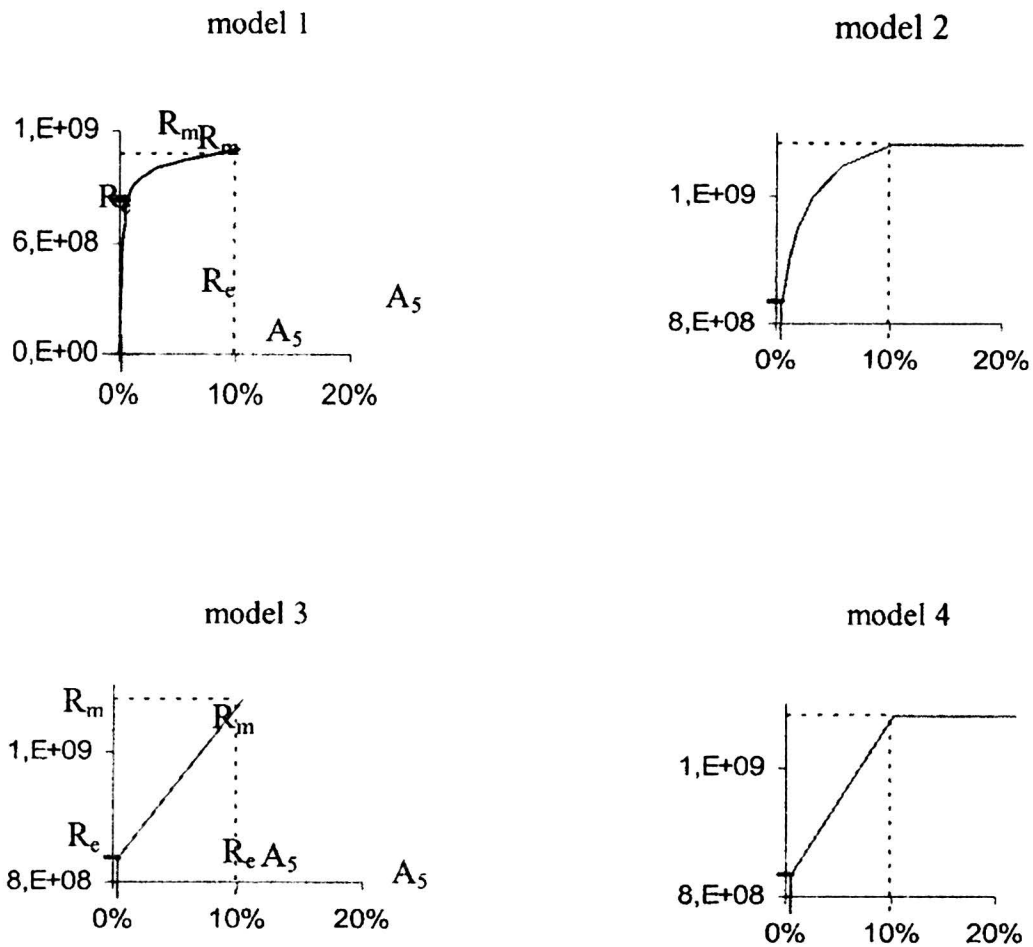
Rys. 5. Modyfikacja wielkości luzu o wysokość chropowatości

3.2 OPIS MATERIAŁU

Modelu fizycznego pomiaru twardości nie można opisać równaniami teorii sprężystości, ponieważ związek pomiędzy naprężeniami i odkształceniami nie jest liniowy bo występuje nieliniowość fizyczna. Dlatego stosuje się przyrostowy opis badanego zjawiska. Aby uprościć obliczenia zakłada się różne modele materiału. Buduje się je na podstawie dokładnej krzywej $\sigma(\epsilon)$ przyjmując pewne założenia upraszczające, np. zakładając kształt biliniowy krzywej $\sigma(\epsilon)$. Dysponując rzeczywistą charakterystyką rozciągania stali 30HGSA, zbudowano kilka wariantów modeli materiału, które w różny sposób oddają właściwości plastyczne tej stali. We wszystkich wariantach założono te same wartości granicy plastyczności $R_e=8.35E8Pa$, wytrzymałości na rozciąganie $R_m=1,08E9Pa$, wydłużenia $A_5=10\%$ i modułu Younga $E=1.91E11Pa$. Wykresy $\sigma(\epsilon)$ każdego modelu przyjęto jako łamane oparte na poszczególnych punktach rzeczywistego wykresu $\sigma(\epsilon)$ stali 30HGSA. Podstawowe cechy modeli materiałów podano w tabeli 1:

Tabela 1. Modyfikacje wprowadzane do wykresu $\sigma(\epsilon)$

model	podstawowe cechy modelu materiału
1	łamane, wierzchołki łamanej leżą na krzywej rzeczywistej $\sigma(\epsilon)$, dla $\epsilon > A_5$ $\sigma(\epsilon)$ ekstrapolowano wg. ostatniego odcinka łamanej
2	łamane, wierzchołki łamanej leżą na krzywej rzeczywistej $\sigma(\epsilon)$, dla $\epsilon > A_5$ $\sigma(\epsilon)=R_m$
3	charakterystyka biliniowa z $E_T=2.45E9Pa$
4	charakterystyka trzyliniowa z $E_T=2.45E9Pa$ dla $\epsilon < A_5$ oraz $\sigma=R_m$ dla $\epsilon > A_5$



Rys. 6. Kształt krzywej $\sigma(\epsilon)$ kolejnych wariantów



Rys. 7. Model dyskretny

4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Wykorzystując opisany model dyskretny skojarzenia płytka-kulka oraz modeli materiału, przeprowadzono obliczenia MES modułem analizy nieliniowej programu

MSC Nastran. Przyjmując za wartość chropowatości $R_a=2\mu m$, kulkę obciążono siłą $F=18kN$. Obciążenie F podzielono na 500 kroków i założono 500 iteracji na każdym kroku. Jako metodę rozwiązania przyrostowych równań równowagi przyjęto metodę Newtona-Raphsona. Po wykonaniu cyklu obciążenie-odciążenie, odczytano wartość przemieszczenia u węzła A (Rys. 1.). Mając wartość przemieszczenia u oraz wartość siły F wyznaczono twardość stali ze wzoru 1. Wyniki obliczeń dla kolejnych modeli materiału przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Wynik obliczeń numerycznych

model	obliczona twardość HB	błąd względny w stosunku do wyników dla modelu 2 [%]
1	383	20
2	315	0
4	289	-10
5	295	-8

5. PODSUMOWANIE

Przedstawione w pracy wyniki badań wskazują, że ocenę twardości materiałów można wykonać na drodze eksperymentu numerycznego wykonanego MES. Dokładność oceny twardości zależy od zastosowanego modelu materiału. Dla modelu nr 2 różni się ona 2% od wartości otrzymanych na drodze eksperymentalnej, równej HB320 [7]. Nawet przy wykorzystaniu najprostszych modeli materiału ocena twardości jest praktycznie wystarczająco dokładna (różnica nie przekracza 10%).

LITERATURA

- [1] Błażewski S., Pomiary twardości metali, PWT, Warszawa, 1954.
- [2] Bielajew N.M., Wytrzymałość materiałów, MON, Warszawa, 1954.
- [3] Polskie Normy PN-91/H-04350, PN-87/M-04256/02 oraz PN-89/H-84030/04
- [4] Wieczorek M., Kosiuczenko K., Ocena twardości metoda elementów skończonych na przykładzie stali 30HGSA, VII Sympozjum Naukowo-Techniczne Programy MES w komputerowym wspomaganii analizy, projektowania i wytwarzania, Warszawa, 2002.
- [5] Wieczorek M., Kosiuczenko K., Próba symulacji numerycznej procesu nagniatania, XXX Jubileuszowa Szkoła Inżynierii Materiałowej, Kraków-Ustroń, 2002.
- [6] The Mac Neal-Schwendler Corp., Quick Reference Guide, Los Angeles, 1998
- [7] Zięba S., Sprawozdanie z badań statycznych i zmęczeniowych połączeń na śruby wstępnie sprężone, WAT, Warszawa 1960

INFLUENCE OF THE MATERIAL MODELLING PROCEDURE ON THE CALCULATED HARDNESS

Abstract: In the paper, the influence of the assumed model of the material on the assessment of its hardness was investigated. The problem was solved using the Finite Element Method (FEM). Detailed considerations were carried out for the 30HGSA steel.

ON THE MODELLING OF STABILITY PROBLEMS FOR MICROPERIODIC SOLIDS AND STRUCTURES

E. WIERZBICKI, CZ. WOŹNIAK

Institute of Mathematics and Informatics, Technological University of
Częstochowa, Dąbrowskiego 73, 42 200 Częstochowa, Poland

The object of considerations are elastic solids with a micro-periodic geometry or a nonhomogeneous micro-periodic structure. So far, a variety of averaged (macroscopic) models describing the static and dynamic behaviour of these solids can be found in the recent literature. The aim of this contribution is to formulate a macroscopic model which can serve as a basis for investigations of stability problems in microperiodic solids. In the separate lecture the obtained result will be applied to the modeling of stability of thin periodic plates, [5].

1. INTRODUCTION

The object of considerations are elastic composite solids with a periodic nonhomogeneous material structure or a periodic geometry. A fragment of a solid with a periodic geometry is shown in Fig.1 where we deal with a certain skeletal structure discussed in [5]; if empty regions in this structure are filled by a certain material then we shall deal with the skeletal composite solid. In the subsequent considerations we shall treat a skeletal structure with a periodic geometry (as shown in Fig. 1) as a special case of a periodic composite by the assumption that the skeleton is filled with

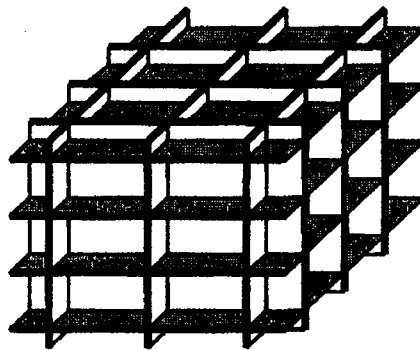


Fig. 1. A fragment of a periodic skeletal structure

a certain soft material. We also assume that the periods of the solid inhomogeneity are sufficiently small when compared to the smallest characteristic length dimension of the region occupied by this solid. The behaviour of solids under consideration can be described on two levels. First, we can use the classical field equations of elasticity as a mathematical tool of analysis. In this case we shall deal with equations having periodically variable (piecewise constant) coefficients and we have to satisfy suitable jump conditions between the solid constituents. Because the ratio between the maximum

period of inhomogeneity and the minimum solid length dimension is assumed to be very small, this approach to the solid behaviour description can be referred to as a micro-level description. It is evident that the aforementioned approach to elastodynamics of microperiodic solids yields a good result only for a few special problems, e.g. [4]. Thus, in the recent literature one can find numerous attempts to describe the behaviour of a composite solid by means of certain approximate theories governed by differential equations with constant coefficients. Using these theories we deal with what is called a macroscopic description (or a macroscopic model) of a microperiodic solid. An overview of various approaches to the formulation of different macroscopic models can be found in [7].

The main aim of this contribution is to propose a macroscopic model of an elastic micro-periodic composite solid which describes the effect of initial stress on the global solid behaviour and hence can be used to the analysis of stability problems. As a tool of modelling we shall apply the tolerance averaging technique [7]. The resulting equations have constant coefficients and represent a certain generalization of equations derived in [7], where the effect of initial stress was neglected. The characteristic feature of the proposed macroscopic model is that it describes the effect of the periodicity cell size on the dynamic solid behaviour in contrast to the models obtained by the asymptotic homogenization technique, [3,4].

2. MICRO-LEVEL DESCRIPTION

Let Ω be a regular region in the physical space E^3 occupied by the elastic solid in its initial state and denote

$$\Delta = (-l_1/2, l_1/2) \times (-l_2/2, l_2/2) \times (-l_3/2, l_3/2)$$

as a representative material element of this solid. The properties of the solid are assumed to be described by the elastic moduli tensor field \mathbf{C} and mass density scalar field ρ which are the known Δ -periodic functions, i.e., functions with periods l_1, l_2, l_3 in the directions of pertinent coordinate axes. We have assumed that the diameter l of Δ is sufficiently small when compared to the smallest characteristic length dimensions of Ω . Let be also given the decomposition of the boundary $\partial\Omega$ into two disjointed parts $\partial_1\Omega, \partial_2\Omega$, where $\overline{\partial_1\Omega} \cup \overline{\partial_2\Omega} = \partial\Omega$.

Define by $\mathbf{u}(\cdot, t)$ a displacement field defined in Ω at an arbitrary time t such that $\mathbf{u}=\mathbf{0}$ on $\partial_1\Omega$. Let \mathbf{T} be the symmetric initial stress tensor such that $\nabla \cdot \mathbf{T}=\mathbf{0}$ in Ω and $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}=\mathbf{p}$ on $\partial_2\Omega$, where \mathbf{p} are the known boundary tractions and \mathbf{n} is a unit normal to $\partial_2\Omega$ outward to Ω . Let us also define the kinetic energy function K , strain energy function U and prestressing potential W , respectively, by means of formulae

$$K = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \quad U = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{u} : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}, \quad W = \mathbf{T} : \left(\nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \right) \quad (1)$$

We shall postulate that the initial strains related to \mathbf{T} can be neglected when compared to 1. We shall also neglect the effect of body forces on the solid behaviour. In this case the

action functional describing the elastodynamic behaviour of the solid can be assumed in the form

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{\Omega} (K - U - W) dv - \int_{\partial_2 \Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} ds \right] dt$$

where dv is a volume element of Ω and ds is a surface element of $\partial_2 \Omega$. The principle of stationary action leads to the following equations of motion in Ω

$$\nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) + \mathbf{T} : (\nabla \otimes \nabla) \mathbf{u} - \rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (2)$$

to the jump conditions on the interfaces between different constituents oriented by the unit normal \mathbf{n}

$$\left[\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{T} \right] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (3)$$

and to the stress boundary condition on $\partial_2 \Omega$ as well as the displacement boundary conditions on $\partial_1 \Omega$, respectively, in the form

$$\left(\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \cdot \mathbf{T} \right) \Big|_{\partial_2 \Omega} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \Big|_{\partial_1 \Omega} = \mathbf{0} \quad (4)$$

where \mathbf{n} is a unit normal outward to $\partial_2 \Omega$. The above equations have to hold for every time $t \in (t_1, t_2)$ and describe behaviour of a microperiodic composite solid subjected to the initial stress \mathbf{T} . Because coefficients \mathbb{C} , ρ in these equations are represented by Δ -periodic functions we deal here with a micro-level description of a composite solid. A direct application of eqs(2)-(4) to the analysis of special dynamic and stability problems is possible only for a limited class of periodic composites such as the prestrained elastic laminates, [2]. That is why in the subsequent section we shall pass from eqs(2)-(4) to a certain macroscopic model of the solid under consideration.

3. MACROSCOPIC DESCRIPTION

The passage from the micro-level description of periodic solids, given by eqs(2)-(4), to a certain approximate macroscopic description, represented by equations with constant coefficients, will be carried out by the tolerance averaging technique, [7]. This modelling technique, in contrast to the known homogenization technique, [3], takes into account the effect of the period lengths on the macroscopic solid behaviour. We start with some auxiliary concepts. Denote $\Delta(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \Delta$, $\mathbf{x} \in E^3$, as a cell with a center at point \mathbf{x} and

$$\Omega_0 = \{ \mathbf{x} \in \Omega : \Delta(\mathbf{x}) \subset \Omega \}$$

as a subregion of Ω . For any integrable function f defined in Ω we introduce its averaging defined in Ω_0 by means of

$$\langle f \rangle(\mathbf{x}) = \frac{1}{l_1 l_2 l_3} \int_{\Delta(\mathbf{x})} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_0.$$

If f is a Δ -periodic function then $\langle f \rangle$ is constant. A philosophy of the tolerance averaging technique, which was detailed in [7], is based on the supposition that to every physical field φ , which is expressed in a certain unit measure, it can be assigned a positive number ε_φ , called a tolerance parameter, such that every two values φ_1, φ_2 of this field, satisfying condition $|\varphi_1 - \varphi_2| \leq \varepsilon_\varphi$, can be treated as indiscernible.

Let T be a set of all tolerance parameters regarded in the modelling procedure and l be the diameter of Δ . Assuming that T and l are known and denoting by $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\|$ a distance between points $\mathbf{x}', \mathbf{x}''$ of E^3 , we recall the following definitions, [7].

Definition 1. Function F defined on Ω will be called slowly-varying if for every $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in \Omega$ condition $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \leq l$ implies $|F(\mathbf{x}') - F(\mathbf{x}'')| \leq \varepsilon_F$.

Definition 2. Function f defined on Ω will be called periodic-like if for every $\mathbf{x} \in \Omega_0$ there exists Δ -periodic function $f_{\mathbf{x}}(\cdot)$ such that for every $\mathbf{y} \in \Omega$ condition $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq l$ implies $|f(\mathbf{y}) - f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y})| \leq \varepsilon_f$. Function $f_{\mathbf{x}}$ will be called a local periodic approximation of f at $\Delta(\mathbf{x})$.

Subsequently, the aforementioned functions f and F will also depend on argument t as a parameter. In this case we write $f(\cdot, t) \in PL_\Delta(T)$ and $F(\cdot, t) \in SV_\Delta(T)$ provided that $F(\cdot, t)$ is slowly varying together with all its derivatives (including derivatives with respect to t) which occur in the problem under consideration. We shall also use the following corollary the proof of which can be found in [7]:

Corollary. If $f(\cdot)$ is a periodic-like function and $\rho(\cdot)$ is a Δ -periodic function then $\langle \rho f \rangle(\cdot)$ is a slowly-varying function.

The tolerance averaging technique of PDEs with periodic coefficients is based on two modelling assumptions. The first of them is strictly related to the concept of slowly-varying and periodic-like functions.

Tolerance Averaging Approximation (TAA). For every Δ -periodic integrable function $g(\cdot)$ defined in Ω and every integrable functions $F(\cdot) \in SV_\Delta(T)$, $f(\cdot) \in PL_\Delta(T)$, the following approximations are assumed to hold:

$$\langle gF \rangle(\mathbf{x}) \cong \langle g \rangle F(\mathbf{x}) \tag{5}$$

$$\langle gf \rangle(\mathbf{x}) \equiv \langle gf_{\mathbf{x}} \rangle(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_o \quad (6)$$

From the first of the above formulae it follows that in the course of averaging increments $F(\mathbf{y}) - F(\mathbf{x})$ for every $\mathbf{y} \in \Delta(\mathbf{x})$ in the domain of function F can be neglected.

The second modelling assumption restricts the class of elastodynamic problems to those in which, roughly speaking, a typical wavelength of a macroscopic deformation pattern is sufficiently large when compared to cell diameter l .

Conformability Assumption (CA). *A displacement field $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\cdot,t)$ and an initial stress field $\mathbf{T}(\cdot,t)$ for every time t , conform to the Δ -periodic structure of the solid under consideration, i.e. $\mathbf{u}(\cdot,t)$ together with all derivatives and $\mathbf{T}(\cdot,t)$ have to be periodic-like functions.*

The above requirement can be violated only in a vicinity of the boundary $\partial\Omega$.

The tolerance averaging technique of equations (2), (3) will be based on (5), (6) and on the above conformability assumption. Setting $\mathbf{w} = \langle \mathbf{u} \rangle$, by means of

$$\mathbf{u}(\cdot,t) \in PL_{\Delta}(T),$$

we conclude that

$$\mathbf{w}(\cdot,t) \in SV_{\Delta}(T).$$

Hence, we can introduce the decomposition

$$\mathbf{u}=\mathbf{w}+\mathbf{v}, \quad \langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0},$$

of a displacement field \mathbf{u} into the averaged (macroscopic) part \mathbf{w} and fluctuating part \mathbf{v} , such that $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}$. Setting aside all particulars which can be found in [7], we shall approximate \mathbf{v} by a finite series $\mathbf{h}^A(\mathbf{x})v^A(\mathbf{x},t)$, $A=1,\dots,N$ (summation convention over A holds), where $v^A(\cdot,t) \in SV_{\Delta}(T)$ are new scalar unknowns called fluctuation variables and \mathbf{h}^A are the known Δ -periodic vector mode-shape functions which have to approximate the expected form of the oscillating parts of the free periodic vibration modes of a periodic cell Δ . From (5) it follows that $\langle \mathbf{h}^A \rangle = \mathbf{0}$; moreover, values of functions \mathbf{h}^A have to satisfy conditions

$$\mathbf{h}^A(\mathbf{x}) \in O(l), \quad l\nabla\mathbf{h}^A(\mathbf{x}) \in O(l),$$

where by l we have denoted the diameter of periodic cell Δ . In the subsequent considerations superscripts A, B run over $1,\dots,N$, summation convention holds.

Substituting approximation $\mathbf{u} \equiv \mathbf{w} + \mathbf{h}^A v^A$ into the averaged values of functions (1) and using (5), we shall introduce the new action functional

$$A(\mathbf{w}, v^A) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega_0} (\langle K \rangle - \langle U \rangle - \langle W \rangle) dv - \int_{\partial_2 \Omega_0} \langle \mathbf{p} \rangle \cdot \mathbf{w} ds dt \quad (7)$$

where

$$\partial_2 \Omega_0 = \{ \mathbf{x} \in \partial \Omega : \partial \Delta(\mathbf{x}) \cap \partial \Omega \neq \emptyset \}.$$

Setting $\partial_1 \Omega_0 = \partial \Omega_0 \setminus \overline{\partial_2 \Omega_0}$, $\partial_1 \Omega_0 = \partial \Omega_0 \setminus \partial_2 \Omega_0$, we shall also assume that $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ on $\partial_1 \Omega_0$.

Using the principle of stationary action and after some manipulations, we obtain from (7) the following field equations in Ω_0 .

$$\langle \rho \rangle \ddot{\mathbf{w}} + \langle \rho \mathbf{h}^A \rangle \ddot{v}^A - \nabla \cdot (\langle \mathbf{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \mathbf{C} : \nabla \mathbf{h}^A \rangle v^A) - \langle \mathbf{T} \rangle : (\nabla \otimes \nabla) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \langle \rho \mathbf{h}^A \cdot \mathbf{h}^B \rangle \ddot{v}^B + \langle \rho \mathbf{h}^A \rangle \cdot \ddot{\mathbf{w}} + \langle \nabla \mathbf{h}^A : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{h}^B \rangle v^B + \\ + \langle \nabla \mathbf{h}^A : \mathbf{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \mathbf{T} : [\nabla \mathbf{h}^A \cdot (\nabla \mathbf{h}^B)^T] \rangle v^B = 0, \end{aligned}$$

and the boundary conditions on $\partial_1 \Omega_0$ and $\partial_2 \Omega_0$, respectively, given by

$$\mathbf{w} \Big|_{\partial_1 \Omega_0} = \mathbf{0}, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot (\langle \mathbf{C} \rangle : \nabla \mathbf{w} + \langle \mathbf{C} : \nabla \mathbf{h}^A \rangle v^A + \langle \mathbf{T} \rangle \cdot \nabla \mathbf{w}) \Big|_{\partial_2 \Omega_0} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0},$$

The basic unknowns in (8), (9) are the averaged (macroscopic) displacement field \mathbf{w} and the fluctuation variables v^A , $A=1, \dots, N$. The obtained equations have constant coefficients and hence represent a certain macroscopic model of a micro-periodic elastic solid under consideration. In contrast to the micro-level description, this model does not involve any jump conditions on the interfaces between constituents.

It can be seen that the macroscopic model equations (8), (9) can be formulated on different levels of accuracy which depend on the choice and number of mode-shape functions \mathbf{h}^A . For the discussion of this problem the reader is referred to [7] and to the related papers.

4. CONCLUDING REMARKS

Due to the occurrence of the initial stresses \mathbf{T} in the resulting equations (8),(9) we have obtained a certain generalization of the model equations, derived in [7] and applied in a series of related papers. Thus, the obtained model makes it possible to investigate the effect of initial stresses on the vibrations of elastic micro-periodic solids and to analyze stability problems. If $\partial_1\Omega_0=\partial\Omega_0$ then equations (8), (9) describe the internal stability problem, i.e. a stability of a micro-periodic elastic solid confined by rigid boundaries, [1,6]. Let us observe that in order to apply (8), (9) to the analysis of stability problems, the initial stress field \mathbf{T} has to be previously calculated. This is a separate problem which can be solved provided that there are known boundary tractions \mathbf{p} on $\partial_2\Omega_0$ and/or initial strains in Ω .

Two characteristic features of the obtained macroscopic model have to be mentioned. First, for the fluctuation variables v^A we have obtained a system of ordinary differential equations, involving only time derivatives of v^A . Hence, the fluctuation variables do not enter boundary conditions but have to satisfy only initial conditions. Due to the formulae $\mathbf{u}=\mathbf{w}+\mathbf{v}$, $\mathbf{v}\cong\mathbf{h}^A v^A$, the initial values of v^A and v^A describe the initial fluctuations and initial fluctuation velocities, respectively, of the displacement field. Second, the coefficients $\langle\rho\mathbf{h}^A\mathbf{h}^B\rangle$ and $\langle\rho\mathbf{h}^A\rangle$ are values of an order $O(l^2)$ and $O(l)$, respectively, and hence the obtained model describes the effect of the periodicity cell size on the macroscopic solid behaviour. This effect takes place only in dynamic problems.

It has to be emphasized that solutions \mathbf{w} , v^A to equations (8), (9) have a physical sense only if $\mathbf{w}(\cdot,t)$, $v^A(\cdot,t)$ (together with their derivatives which occur in (8), (9)) are slowly-varying functions. It follows that the macroscopic model equations have to be considered together with conditions

$$\mathbf{w}(\cdot,t)\in SV_\Delta(T), v^A(\cdot,t)\in SV_\Delta(T) \quad (10)$$

which have to hold for every time t . For the discussion of these conditions the reader is referred to [6].

It can be shown that for quasi-stationary and equilibrium problems the fluctuation variables v^A can be eliminated from (8), (9) and the only basic unknown is the macroscopic displacement field \mathbf{w} .

An example of application of the model equations (8), (9) will be given in the separate lecture, cf. [5], in this volume.

REFERENCES

- [1] Biot M.A., Internal buckling under initial stress in finite elasticity, Proc. R. Soc. A., London 273 (1963), 306-328
- [2] Bufler H.V., Kennerknecht H., Prestrained elastic laminates: deformations, stability and vibrations, Acta Mechanica 48, 1983, 1-30
- [3] Jikov V.V., Kozlov C.M., Oleinik O.A., Homogenization of differential operators and integral functionals, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg 1994

- [4] Kolpakov A.G., Homogenized model for plate periodic structure with initial stresses, *Int. J. Engng. Sci.*, 38 (2000), 2079-2094
- [5] Mazur-Śniady K., Woźniak Cz., A 2D-model for the stability of elastic plates with a periodic structures, this issue
- [6] Wierzbicki E., Woźniak Cz., Continuum modeling and the internal instability of certain periodic structures. *Arch. Appl. Mech.*, 72, 2002, 451-457
- [7] Woźniak Cz., Wierzbicki E., Averaging techniques in thermomechanics of composite solids, *Wyd. Pol. Częstochowskiej*, Częstochowa 2000

EKSPERYMENTALNA ANALIZA STATECZNOŚCI SKRĘCANEJ POWŁOKI WALCOWEJ WZMOCNIONEJ PROFILAMI ZAMKNIĘTYMI

L. WITEK

Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki Politechniki Rzeszowskiej
Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów

Praca przedstawia opis oraz wyniki badań eksperymentalnych skręcanie cienkościennej powłoki cylindrycznej wzmocnionej profilami o przekroju omegowym. W doświadczeniach wykorzystano technikę modelowych badań elastooptycznych. Wyznaczono zarówno obciążenie krytyczne, formę utraty stateczności jak również ścieżkę równowagi struktury w stanie powyboczeniowym. Analiza efektów optycznych prowadzona w trakcie eksperymentu pozwoliła na precyzyjne określenie siły krytycznej oraz identyfikację miejsc, w których występują lokalne koncentracje naprężeń.

1. WSTĘP

Analiza stanów naprężenia cienkościennych ustrojów nośnych w warunkach deformacji powyboczeniowej należy do problemów o istotnym znaczeniu zarówno z poznawczego, jak i praktycznego punktu widzenia. Powszechne dążenie do minimalizacji ciężaru wraz z pojawieniem się coraz to bardziej wytrzymałych materiałów sprawia, że problem stateczności stał się podstawowym kryterium poprawnego projektowania konstrukcji powłokowych.

W wielu konstrukcjach dopuszcza się lokalną utratę stateczności elementów ustroju nośnego w zakresie obciążeń eksploatacyjnie dopuszczalnych. Przykładem może być np. poszycie skrzydła lub kadłuba samolotu. Wystąpienie stanu deformacji zakrytycznej w elementach pokrycia nie jest jednoznaczne z wyczerpaniem nośności granicznej struktury. Oznacza to, że dalsze zwiększanie obciążenia jest możliwe i dopuszczalne, pozostając w zgodności z przepisami budowy statków powietrznych.

Dążenie do osiągnięcia coraz korzystniejszego ilorazu ciężaru użytecznego do własnego doprowadza do wielu rozwiązań, w których przy niewielkim wzroście ciężaru struktury możliwy jest wzrost obciążenia krytycznego, zmniejszenie poziomu wyteżenia konstrukcji a także łagodniejsze „bezbifurkacyjne” przechodzenie ustroju w stan powyboczeniowy, co zapewnia zwiększenie trwałości zmęczeniowej oraz niezawodności ustroju.

Przykład tego typu konstrukcji mogą stanowić powłoki walcowe, z reguły wzmocnione podłużnicami. Rozwiązania tego typu napotkać można w wielu konstrukcjach m.in. w kadłubach samolotów, belkach ogonowych śmigłowców itp.

Należy wspomnieć, że usztywnienie elementów struktury cienkościennej stwarza warunki do „programowania” zarówno kierunku jak i gęstości usztywnienia w zależności od potrzeb stawianych ustrojom nośnym (np. flatter, dywergencja itp.).

2. PRZEGLĄD LITERATURY

Czyniono wiele prób, by na bazie metod analitycznych, z uwzględnieniem nieliniowości geometrycznej otrzymywać rozwiązania dla stanów powyboczeniowych

ustrojów cienkościennych. Kończyły się one sukcesem jedynie w geometrycznie prostszych przypadkach np. płyty, powłoki walcowe, stożkowe itp.

Zagadnieniu stateczności ściskanych oraz skręcanych powłok walcowych poświęcona jest monografia Pogorełowa [11], w której autor podaje teoretyczne rozwiązanie wyznaczenia obciążenia krytycznego. W pracy [4] Kabanow rozszerza analizę o zagadnienia stateczności ściskanych powłok walcowych wzmocnionych podłużnicami i wręgami, podając wyniki w sposób tabelaryczny z uwzględnieniem wpływu wybranych parametrów geometrycznych usztywnienia na wartość siły krytycznej.

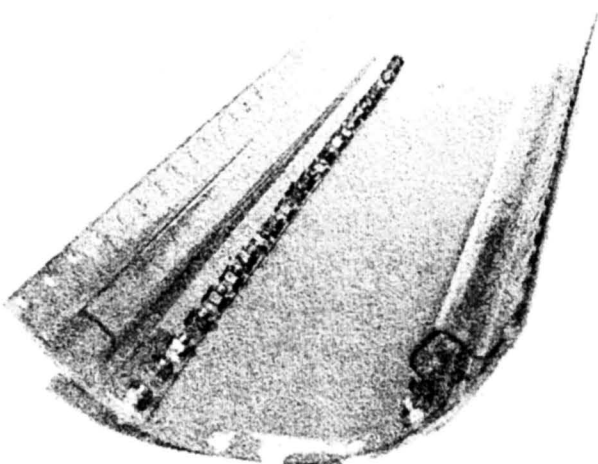
W przeglądzie literatury należy wspomnieć o osiągnięciach polskich uczonych w badaniach nad statecznością. Naleszkiewicz w swej monografii [10] przedstawia teorię stateczności sprężystej oraz zajmuje się m.in. zagadnieniem stateczności powłok walcowych. Brzozka [1] prezentuje teorię pola ciągnięć do opisu nośności granicznej cienkościennego dźwigara pracującego w stanie zakrytycznym. Statecznością uźebrowanych płyt zajmowali się także Jabłoński [2] oraz Leyko i Weselak [9]. Zagadnieniu stateczności oraz nośności cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich poświęcone są prace Królaka [7],[8].

Ciekawe ujęcie w zakresie badań doświadczalnych przedstawione zostało w pracy [3], gdzie wykorzystano technikę badań elastooptycznych w analizie stateczności płyt prostokątnych. Podobną metodykę zastosował w swojej pracy Smykla [12] w analizie stateczności płyt prostokątnych z usztywnieniami tłoczonymi.

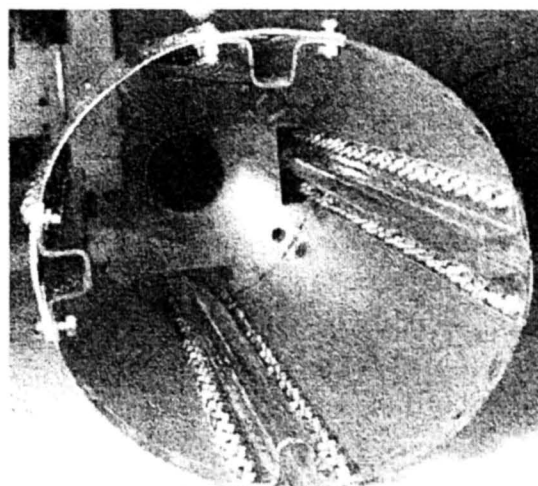
Złożoność geometryczna rozpatrywanych ustrojów determinuje potrzebę wykonania eksperymentu, przy pomocy którego możliwe będzie znalezienie odpowiedzi na szereg pytań dotyczących pracy struktury zarówno w stanach pod jak i zakrytycznych.

3. OPIS MODELU ORAZ STANOWISKA BADAWCZEGO

Model stosowany w badaniach eksperymentalnych składa się z czterech powłokowych paneli walcowych o grubości ścianki równej 0,75 [mm], czterech podłużnic o przekroju poprzecznym w kształcie litery Ω i grubości ścianki 1,5 [mm] oraz nakładek tworzących z profilem usztywniającym zamknięty obwód siłowy (rys. 1, 2). Wszystkie ww. elementy zostały połączone za pomocą śrub M-4

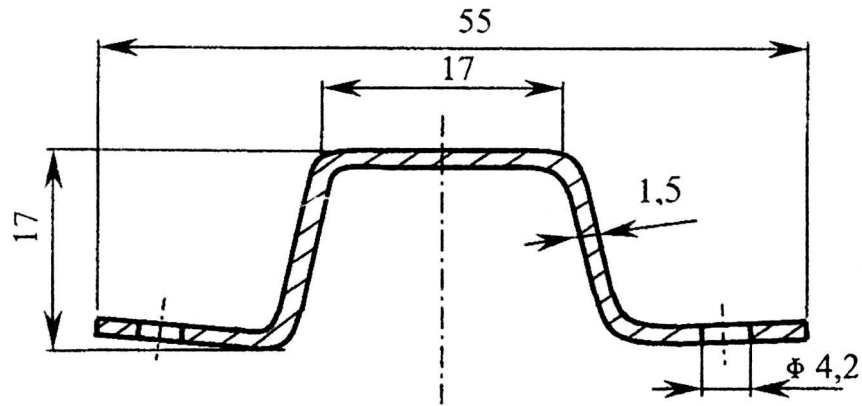


Rys. 1. Pojedyncza panel walcowa z podłużnicami.



Rys. 2. Model częściowo zmontowany.

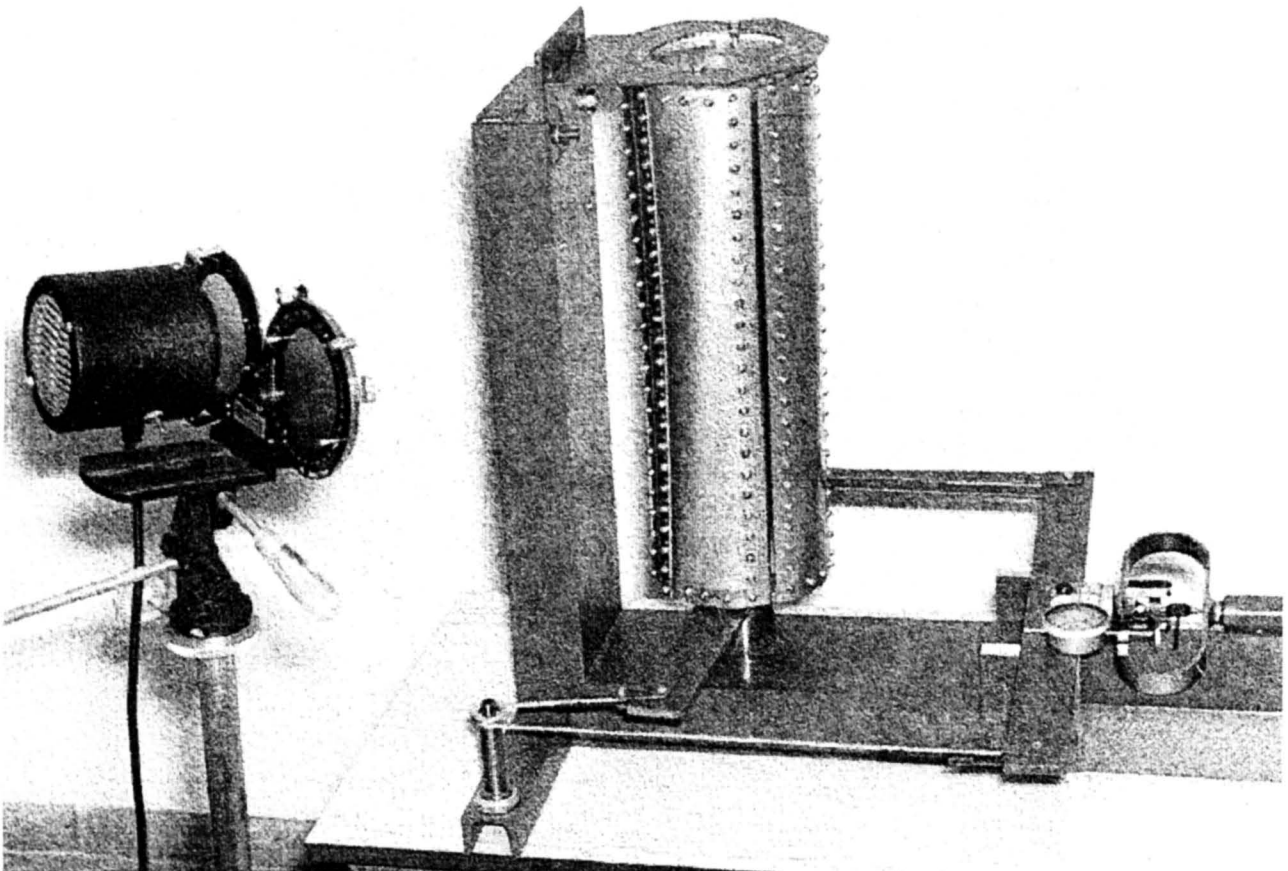
Do budowy modelu został wykorzystany materiał optycznie czynny w postaci kompozycji żywicy epoksydowej Epidian 5 + utwardzacz Z-1 + ftalan dwubutyli. Po całkowitej polimeryzacji tworzywo posiada następujące stałe materiałowe: $R_m = 75$ [MPa]; $E = 3000$ [MPa] [6].



Rys. 3. Przekrój poprzeczny podłużnicy. Wymiary podano w milimetrach.

Przed końcowym montażem elementy wykonane z żywicy powlekane są lakierem refleksyjnym w kolorze srebrnym. Gotowy do badań model posiada następujące wymiary gabarytowe: średnica $D = 160$ [mm]; wysokość $H = 480$ [mm].

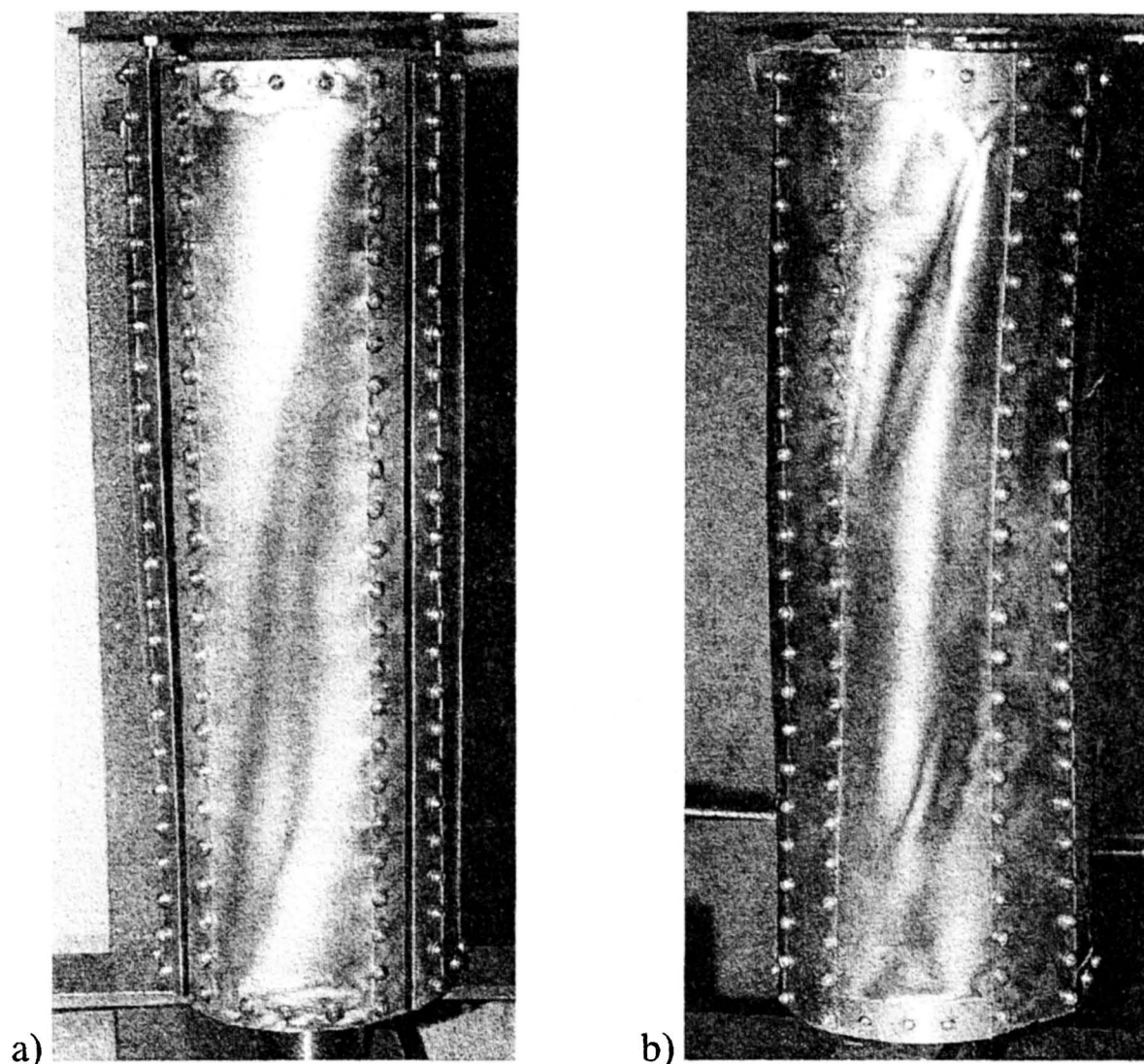
Rysunek 4 przedstawia widok stanowiska z zamontowanym modelem oraz polaryskopem refleksyjnym, wykorzystywanym w badaniach.



Rys. 4. Widok stanowiska z modelem gotowym do badań.

Rysunek 5 przedstawia efekty optyczne po przekroczeniu obciążenia krytycznego, widoczne w warunkach polaryzacji kołowej.

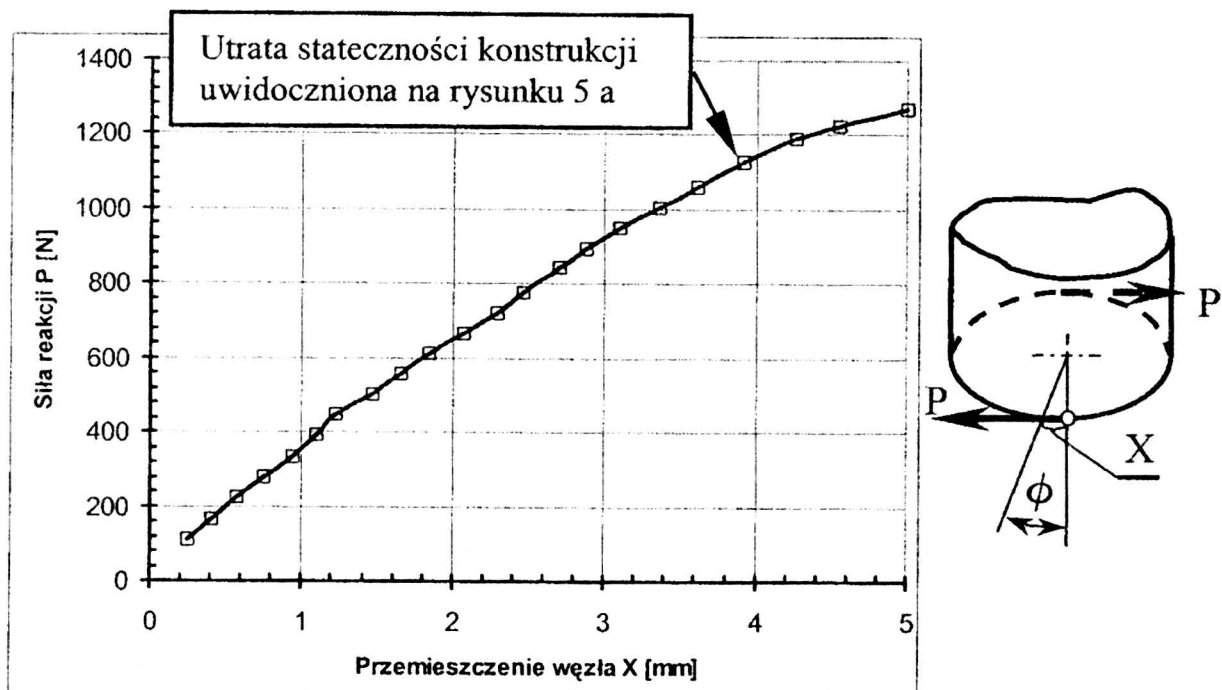
Otrzymany obraz nie może być interpretowany bezpośrednio jako pole izochrom, bowiem w warunkach deformacji zakrytycznej w konstrukcji o tak złożonej geometrii jak rozpatrywana, możliwa jest zmiana kierunków głównych naprężeń wzdłuż grubości płyty. Można wykazać [5], iż w przypadku nie pokrywania się kierunków głównych naprężeń stanu giętnego i błonowego efekty optyczne są zawyżone w stosunku do niezaburzonego obrazu izochrom dotyczącego w istocie stanu wyłącznie błonowego.



Rys. 5. Efekty optyczne widoczne na powierzchni modelu tuż po utracie stateczności (a) oraz w zaawansowanym stanie powyboczeniowym (b).

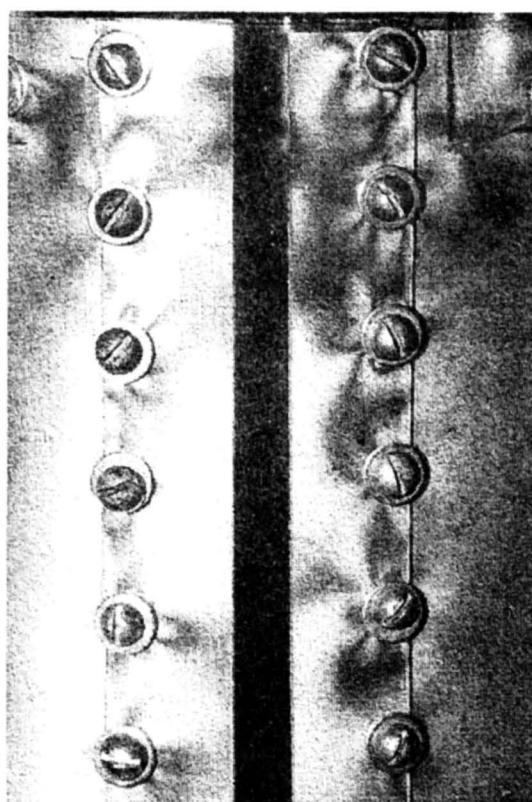
Toteż otrzymany rezultat, bardzo pomocny w ustaleniu lokalizacji stref newralgicznych oraz identyfikacji poziomu obciążenia krytycznego, należy traktować raczej jako wynik badań jakościowych.

Konstrukcja traci stateczność w sposób bezbifurkacyjny, przy sile około 1150 [N]. Na doświadczalnej ścieżce równowagi (rysunek 6) nie jest widoczne wyraźne załamanie krzywej, tak więc zastosowanie metody światła odbitego okazało się niezwykle pomocne w ocenie poziomu obciążenia krytycznego (poprzez obserwację zmiany efektów optycznych w momencie utraty stateczności struktury).



Rys. 6. Ścieżka równowagi skręcanej powłoki.

Ponadto obserwacje efektów optycznych występujących wokół połączeń śrubowych dostarczają informacji o dużej koncentracji naprężeń w tych strefach (rysunek 7).



Rys. 7. Koncentracje naprężeń w pobliżu połączeń śrubowych.

Prezentowane na rysunku 7 wyniki natury jakościowej mogą być przydatne na etapie projektowania konstrukcji a także w trakcie tworzenia siatki modelu dyskretnego powłoki, stosowanego w dalszej analizie naprężeń i odkształceń MES.

LITERATURA

- [1] Brzoska Z., Statyka i stateczność konstrukcji prętowych i cienkościennych, PWN, Warszawa, 1961.
- [2] Jabłoński I., Wyboczenie płyt prostokątnych wzmocnionych ukośnie żebrami, rozprawa doktorska, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska.
- [3] Janowski M., Kopecki H., Elastooptyczne badania modelowe ścinanej płyty prostokątnej wykazującej cechy ortotropii, III Sympozjum Stat. Konstr., Łódź, 1979.
- [4] Kabanow. W. W., Ustojciwost nieodnorodnych cylindriceskich obołoczek, Wydawnictwo „Maszynostrojenie”, Moskwa 1982.
- [5] Kopecki H. Problemy analizy stanów naprężenia ustrojów nośnych w świetle badań eksperymentalnych metodami mechaniki modelowej, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, z.26, t.78, Rzeszów, 1991.
- [6] Kopkowicz M., Badanie właściwości mechanicznych i optycznych materiałów modelowych, rozprawa doktorska, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska, 1996.
- [7] Królak M., Stany zakrytyczne i nośność graniczna cienkościennych dźwigarów o ścianach płaskich, PWN, Warszawa-Łódź, 1990.
- [8] Królak M., Stateczność, stany zakrytyczne i nośność cienkościennych konstrukcji o ortotropowych ścianach płaskich, Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 1995.
- [9] Leyko J., Weselak J., Teoretyczna i doświadczalna analiza stateczności ściskanych tarcz prostokątnych gęsto uźebrowanych, III Sympozjum Stat. Konstr., Łódź, 1979.
- [10] Naleszkiewicz J., Zagadnienia stateczności sprężystej, PWN, Warszawa, 1958.
- [11] Pogorełow A. W., Geometricieskoje metody w nieliniejoj teorii uprugich obołoczek, Wydawnictwo „Nauka”, Moskwa 1967.
- [12] Smykla J., Analiza stanów naprężenia płyt prostokątnych z usztywnieniami tłoczonymi w warunkach deformacji zakrytycznej, rozprawa doktorska, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska, 2000.

EXPERIMENTAL ANALYSIS OF STABILITY OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELL REINFORCED BY STRINGERS IN THE SHAPE OF CLOSED FORMERS

The paper presents description and results of the experimental investigations of thin-walled cylindrical shell reinforced by stringers in the shape of closed formers, subjected to torsion. In the studies the photo-elastic method was used. The critical load, forms of stability loss and equilibrium path in the post-buckling state of the structure were obtained.

NUMERYCZNA ANALIZA STATECZNOŚCI ORAZ NOŚNOŚCI GRANICZNEJ SKRĘCANEJ POWŁOKI WALCOWEJ WZMOCNIONEJ PROFILAMI ZAMKNIĘTYMI

L. WITEK

Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki Politechniki Rzeszowskiej
Al. Powstańców Warszawy 8, 35-959 Rzeszów

W pracy przedstawione zostały wyniki obliczeń numerycznych dotyczących stateczności, stanów powyboczeniowych oraz nośności granicznej skręcanie cienkościennych powłoki cylindrycznej wzmocnionej podłużnicami o przekroju omegowym. W obliczeniach wykorzystano zarówno analizę utraty stateczności w ujęciu zlinearyzowanym, jak również analizę nieliniową. W budowie modelu numerycznego zastosowano oryginalny sposób łączenia elementów pokrycia i podłużnicy (modelowanie połączeń nitowych w skali makro). Kontrola poziomu naprężenia najbardziej wyteżonego węzła modelu w kolejnych krokach analizy nieliniowej oraz wyznaczenie numerycznej ścieżki równowagi pozwoliły na oszacowanie nośności granicznej występującej w powyboczeniowej fazie deformacji struktury.

1. PRZEGLĄD LITERATURY

Pierwsze prace dotyczące wykorzystania metody elementów skończonych do problemów stateczności pojawiają się w latach sześćdziesiątych (Gallagher [6], Argyris [3] oraz pierwsze prace Odena cytowane w jego monografii [8]).

Lata siedemdziesiąte XX w. charakteryzują się intensywnym rozwojem metod obliczeniowych. Oryginalne koncepcje Riksa, dotyczące sterowania parametrem łuku [10], były modyfikowane i rozwijane przez Crisfielda [4], [5].

Na uwagę zasługują prace doświadczalne prowadzone w Delft University of Technology pod kierunkiem Arbocza [1], [2]. Dotyczą one stateczności powłok walcowych wzmocnionych żebrami. W sposób praktyczny wykorzystano pomiary imperfekcji geometrycznych. Ich znajomość pozwoliła na precyzyjniejsze oszacowanie obciążeń krytycznych.

Ciekawą pracą z dziedziny zastosowań inżynierskich jest publikacja Rittwegera i in. [11], gdzie prezentowane są wyniki numerycznej analizy stateczności kompozytowej walcowej powłoki rakiety ARIANE 5 z uwzględnieniem imperfekcji geometrycznej oraz praca Radwańskiej i Waszczyszyna [9], prezentująca analizę stateczności chłodni kominowej. Godna uwagi jest także praca [7] autorstwa Kotełko, w której analizowano mechanizmy zniszczenia cienkościennego dźwigara pracującego w stanie zakrytycznym.

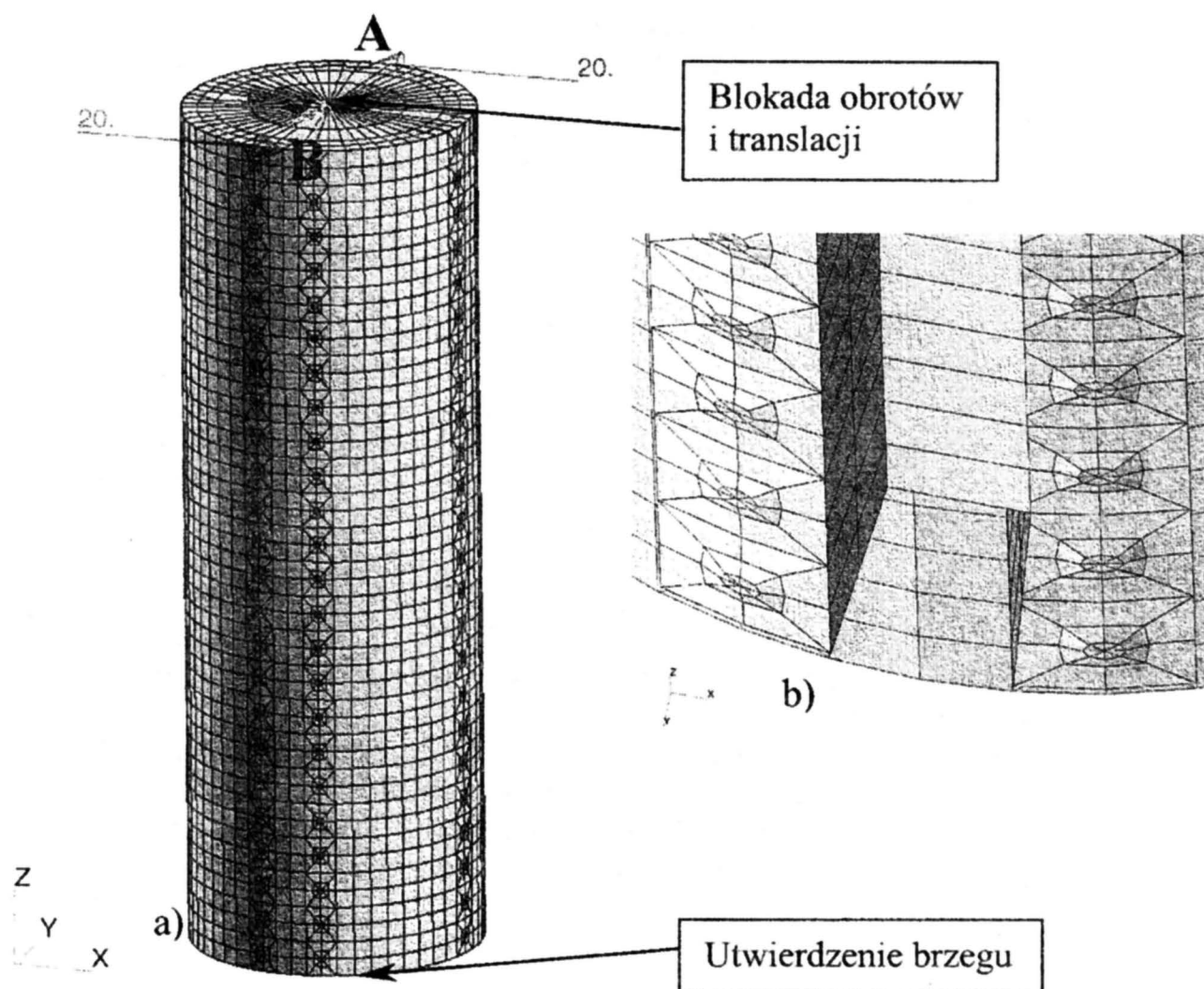
W podsumowaniu można stwierdzić, że literatura w zakresie analizy utraty stateczności powłok o małym stopniu skomplikowania geometrycznego zarówno w ujęciu analitycznym jak i numerycznym jest dość obszerna. Natomiast w przypadku struktur o wysokim stopniu złożoności (zastosowania inżynierskie) prac jest znacznie mniej i dotyczą one w dużej mierze stateczności w ujęciu zlinearyzowanym. Uzasadnienia takiego stanu rzeczy należy upatrywać w konieczności dysponowania dużymi mocami obliczeniowymi komputerów, oraz adekwatnym oprogramowaniem

mogącym wykorzystywać wieloprocesorowe stacje robocze w nieliniowej analizie stateczności złożonych konstrukcji.

Przedmiotem szczegółowej analizy numerycznej jest powłoka cylindryczna usztywniona czterema podłużnicami.

2. BUDOWA MODELU NUMERYCZNEGO

Model numeryczny powłoki wykonany został w oparciu o geometrię opisaną w referacie poświęconym badaniom eksperymentalnym. Do budowy modelu wykorzystano program MSC Patran 2000. Prezentowany na rysunku 1 model składa się z 15696 płytowych elementów skończonych typu Quad 4 [12]. Powłoka została utwierdzona w dolnej podstawie. Ponadto środkowy węzeł górnej węgry został częściowo utwierdzony (zablokowanie translacji T_x , T_y oraz rotacji R_x , R_y) z możliwością obrotu oraz przemieszczenia wzdłuż osi Z.

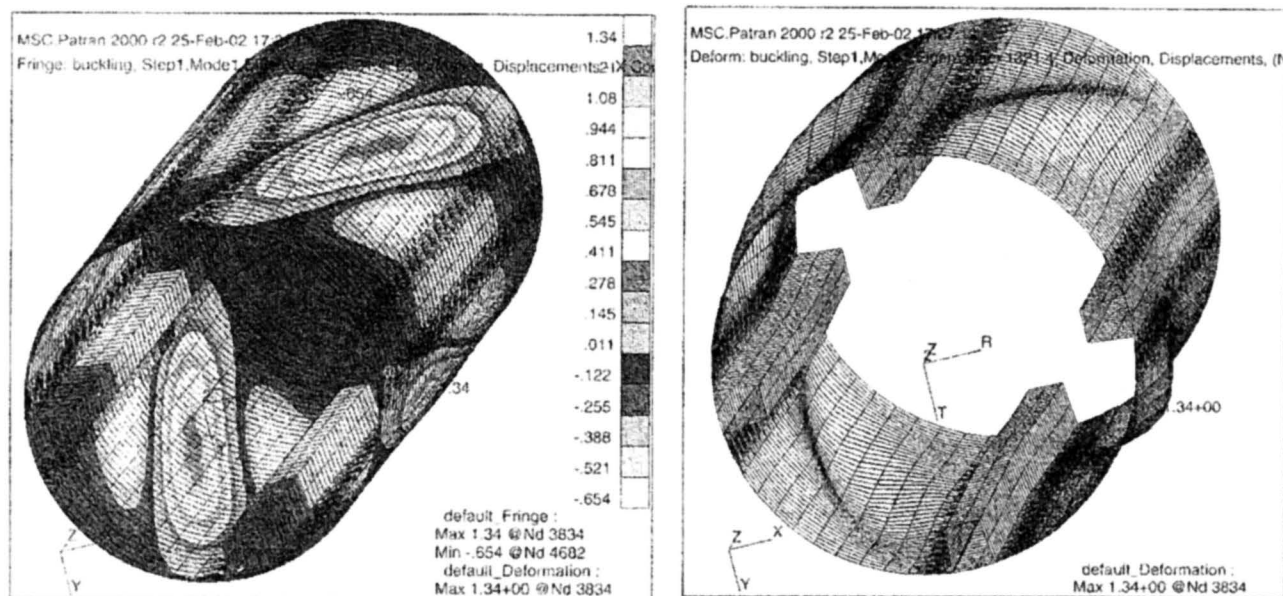


Rys. 1 Model dyskretny analizowanej powłoki. Obciążenie oraz warunki brzegowe (a). Sposób modelowania połączeń konstrukcyjnych (b).

W punktach A i B zostały przyłożone dwie siły skupione (rys. 1a), powodujące skręcanie powłoki. W przypadku liniowej analizy stateczności były to siły jednostkowe. W obliczeniach wykorzystano model materiału liniowo-sprężysty. Przyjęto następujące stałe materiałowe: $E=3000$ [MPa], $\nu=0.36$ (żywica Epidian).

3. WYNIKI OBLICZEŃ LINIOWEJ ANALIZY STATECZNOŚCI.

W obliczeniach krytycznej wartości obciążenia stosowany był program MSC-Advanced FEA (solver). Podstawowym wynikiem uzyskanym za pomocą bifurkacyjnej (liniowej) analizy stateczności jest wartość obciążenia krytycznego. W analizowanym przypadku jest ona równa 1321,4 [N]. Odpowiadająca jej postać deformacji przedstawiona jest na rysunkach 2 i 3. Skrót (H-M-H) używany w opisie rysunków oznacza naprężenia zredukowane wg hipotezy Hubera (Huber-Mises-Hencky).



Rys. 2. Odształcenie promieniowe [mm] powłoki w momencie utraty stateczności.

Rys. 3. Forma deformacji odpowiadająca pierwszej postaci wyboczenia (skala deformacji 5:1).

Analizując powyższe rysunki można zauważyć, że postać deformacji przypomina typowe pole ciągnięć uzyskane w próbie skręcania modelowej powłoki. Uzyskana wartość obciążenia krytycznego jest zawyżona w stosunku do wyniku eksperymentalnego (1150 [N]) o około 15 %.

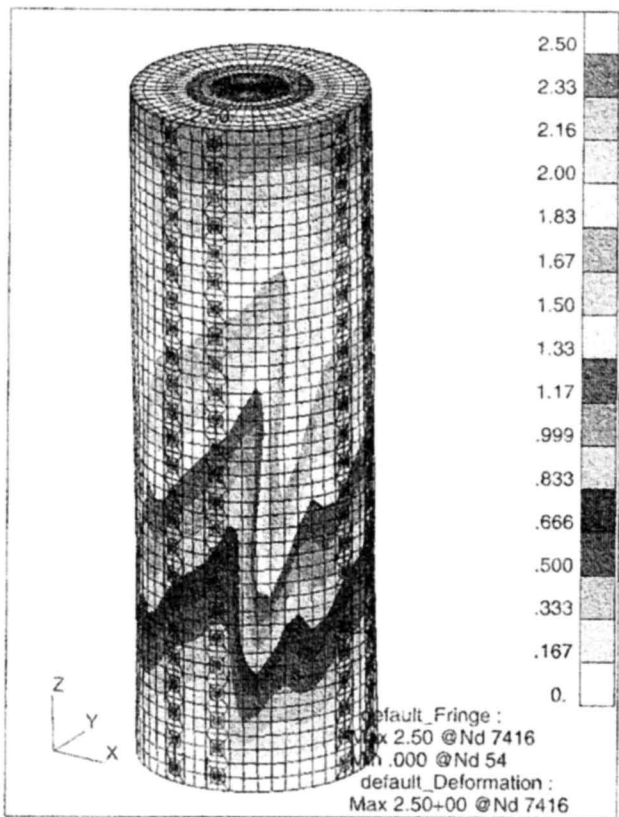
Na podstawie przeprowadzonych badań doświadczalnych można stwierdzić, że granica wytrzymałości materiału (naprężenia niszczące) zostanie osiągnięta dopiero w stanie zakrytycznym przy dalszym skręcaniu struktury.

4. ANALIZA NIELINIOWA

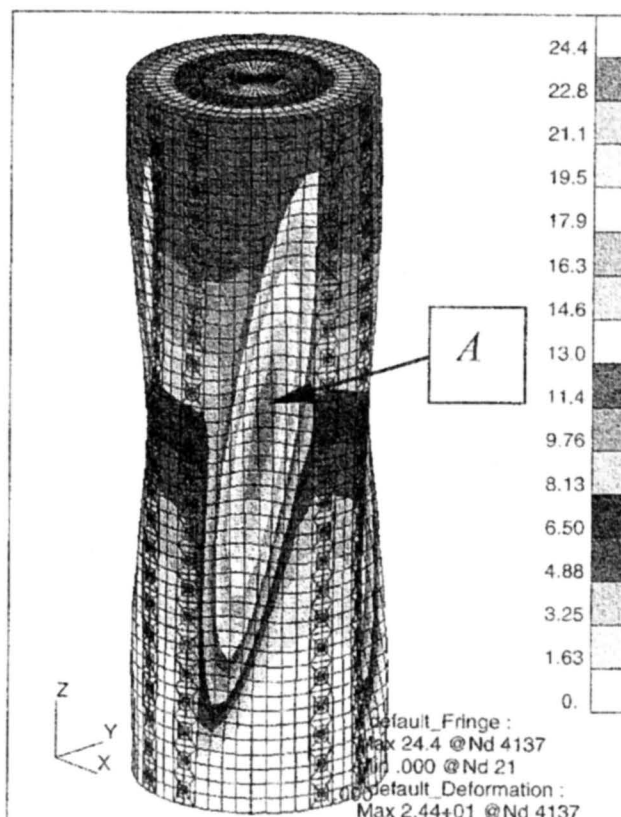
W celu określenia deformacji, rozkładu naprężeń oraz ścieżki równowagi analizowanej konstrukcji w stanie powyboczeniowym zastosowano numeryczną analizę nieliniową.

W rozpatrywanym przypadku zastosowano obciążenie typu przemieszczeniowego (dwa wektory przemieszczenia (rys. 1a) o wartości 20 [mm])). Obliczenia prowadzono z zastosowaniem programu MSC-Advanced FEA, który wykorzystuje metodę mieszaną, przyrostowo-iteracyjną [5], [10], [12]. W ramach każdego przyrostu stosowana była iteracyjna metoda Riksa.

Deformacje struktury (w postaci wektora wypadkowego przemieszczenia) w fazie zarówno przed jak i powyboczeniowej prezentowane są na rysunkach 4 i 5.

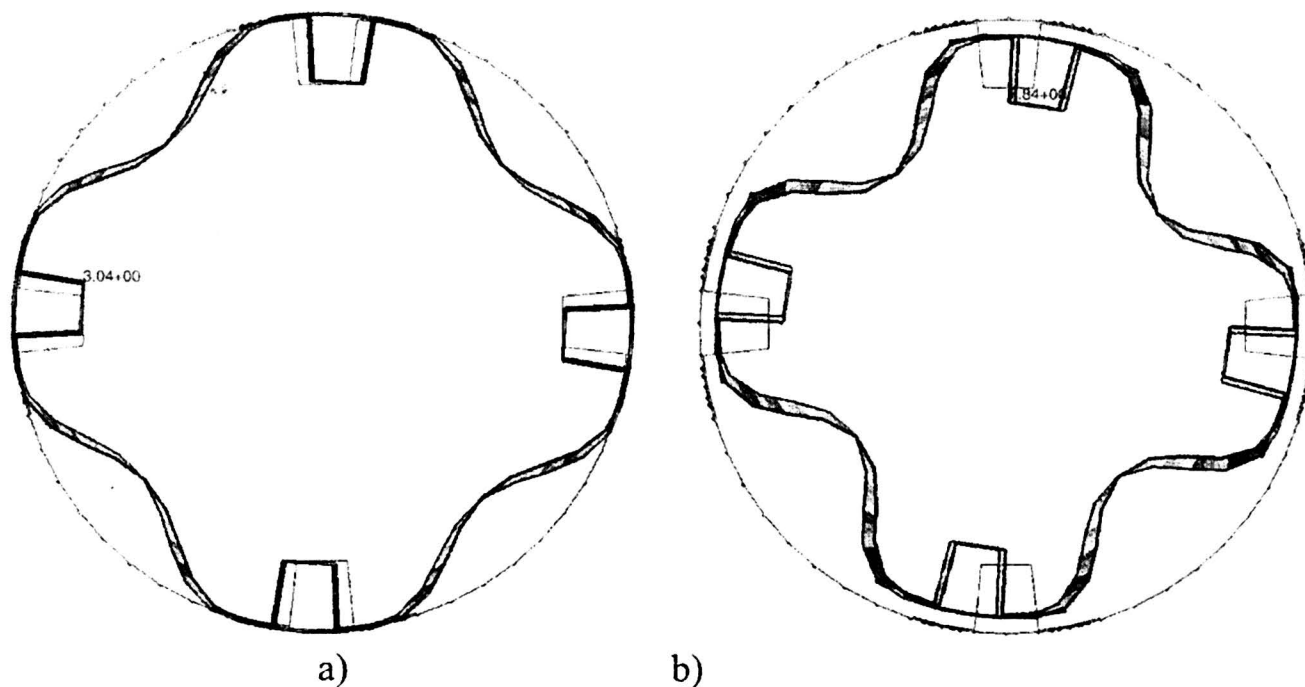


Rys. 4. Deformacja powłoki przed utratą stateczności (90 % P_{kr}), [mm].

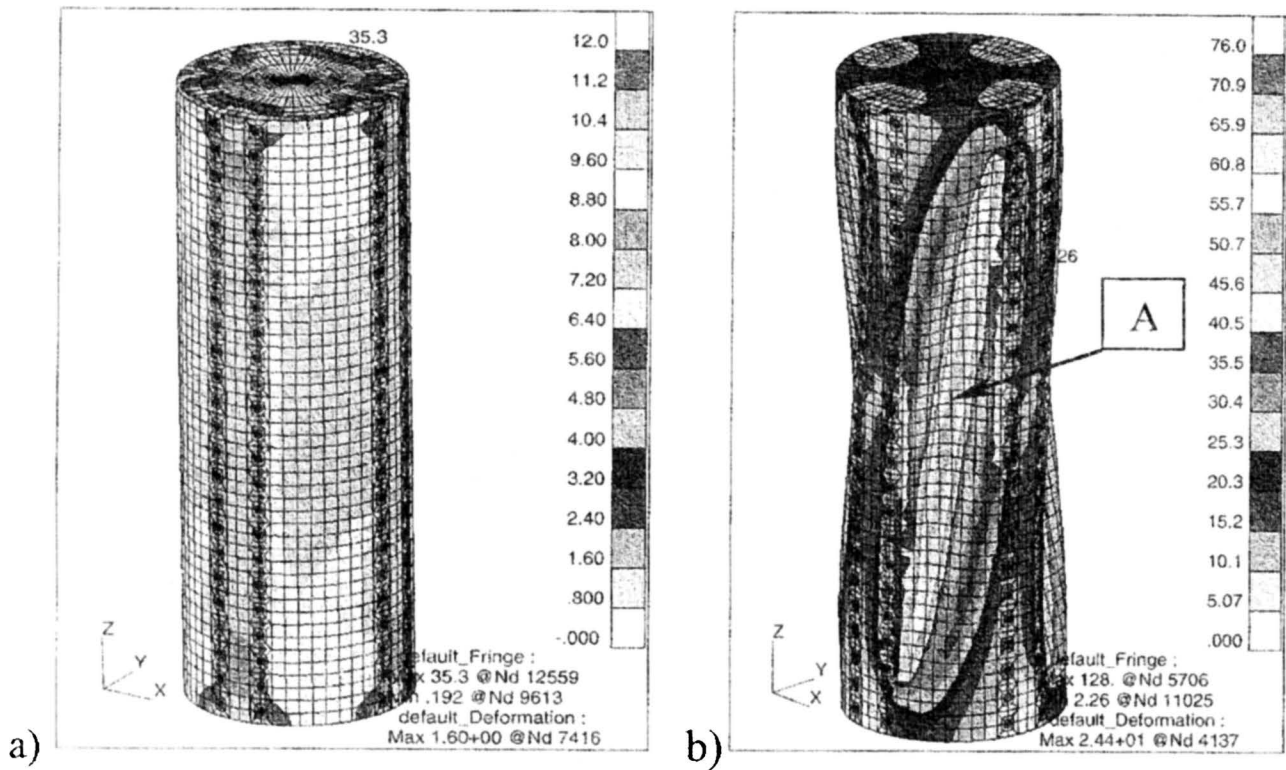


Rys. 5. Deformacja struktury w stanie powybczeniowym, [mm].

Obserwując powyższe rysunki można zauważyć wyraźną zmianę pierwotnego kształtu skręcanej powłoki już przed osiągnięciem obciążenia krytycznego.

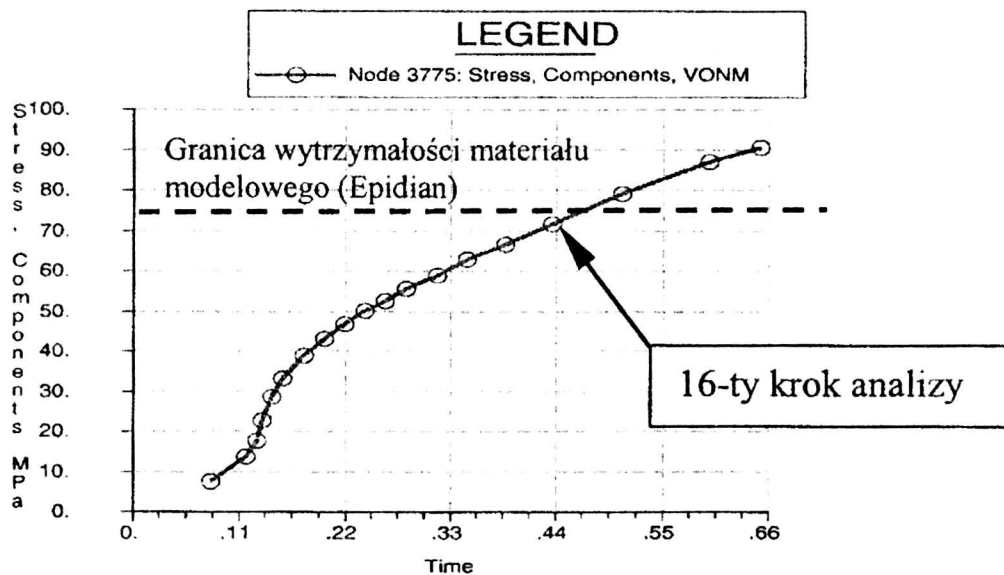


Rys. 6. Charakter deformacji powybczeniowej przekroju poprzecznego powłoki na tle struktury niezdeformowanej (rzeczywista skala deformacji). Bliski stan zakrytyczny a) oraz zaawansowany stan powybczeniowy b).



Rys. 7. Rozkład naprężeń zredukowanych (H-M-H) na powierzchni modelu przed osiągnięciem obciążenia krytycznego (a) i w stanie powybozeniowym (b), [MPa].

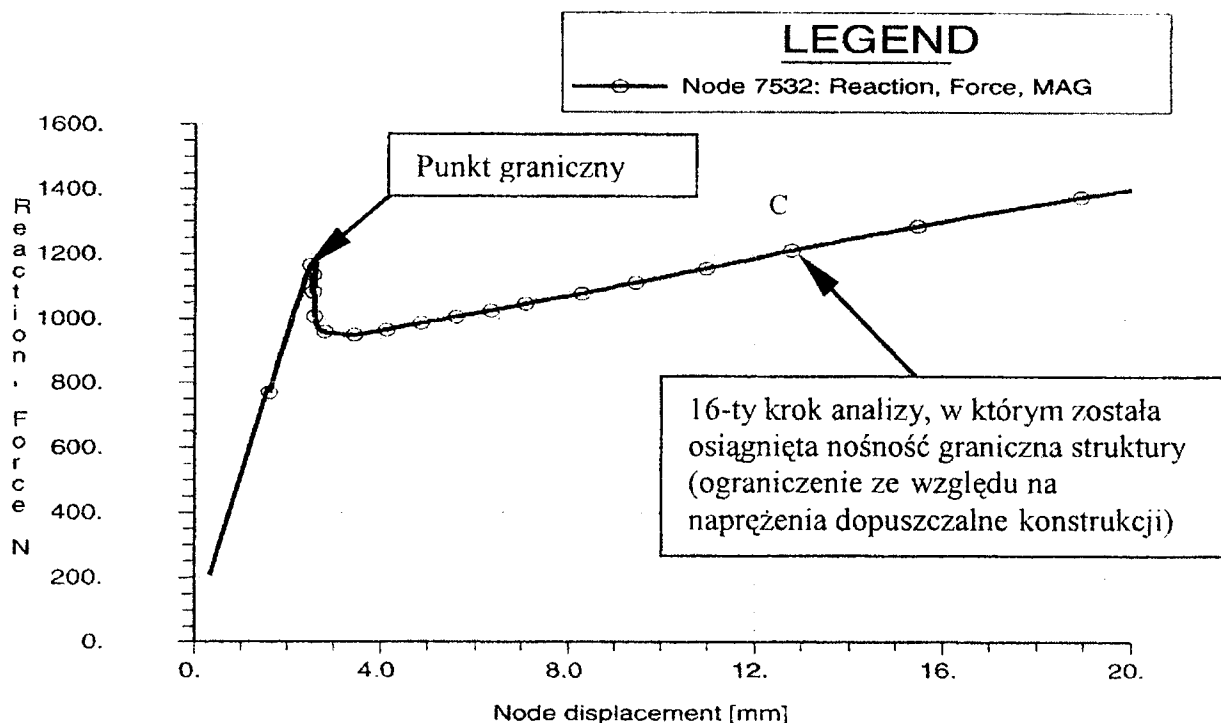
Analizując rozkłady naprężeń prezentowane na rysunkach 7a) i 7b) widoczna jest dysproporcja zarówno wartości jak i rozkładu naprężeń w powłoce po przekroczeniu obciążenia krytycznego. Równomierny rozkład naprężeń przed utratą stateczności (rys. 7a) związany jest z jednorodnym skręcaniem struktury (teoria Bredta), z udziałem głównie naprężeń stycznych. Po przekroczeniu obciążenia krytycznego zmienia się geometria ustroju a co za tym idzie także rozkład naprężeń (rys. 7b). Udział naprężeń stycznych nie jest w tym przypadku dominujący. Największa wartość naprężeń zredukowanych przypada na jeden ze środkowych węzłów panelu powłokowego (punkt A na rysunku 7b) i pokrywa się z miejscem największych deformacji powłoki.



Rys. 8. Naprężenia zredukowane (H-M-H) najbardziej wyężonego węzła modelu (punkt A na rysunku 7b) w kolejnych krokach analizy.

Na prezentowanym wcześniej wykresie (rys. 8) widoczna jest linia powstała na podstawie znanej wytrzymałości na rozciąganie materiału, z którego wykonano model powłoki (dla stosowanej kompozycji żywicy $R_m = 75$ [MPa]). Trzy ostatnie kroki analizy nie mogą zatem zostać zrealizowane ze względu na ograniczoną wytrzymałość materiału stosowanego w rzeczywistej powłoce.

Kontrolując jednocześnie wartość reakcji (siły) oraz przemieszczenie węzła, w którym przyłożone zostało obciążenie można wyznaczyć numeryczną ścieżkę równowagi analizowanej konstrukcji (rys. 9).



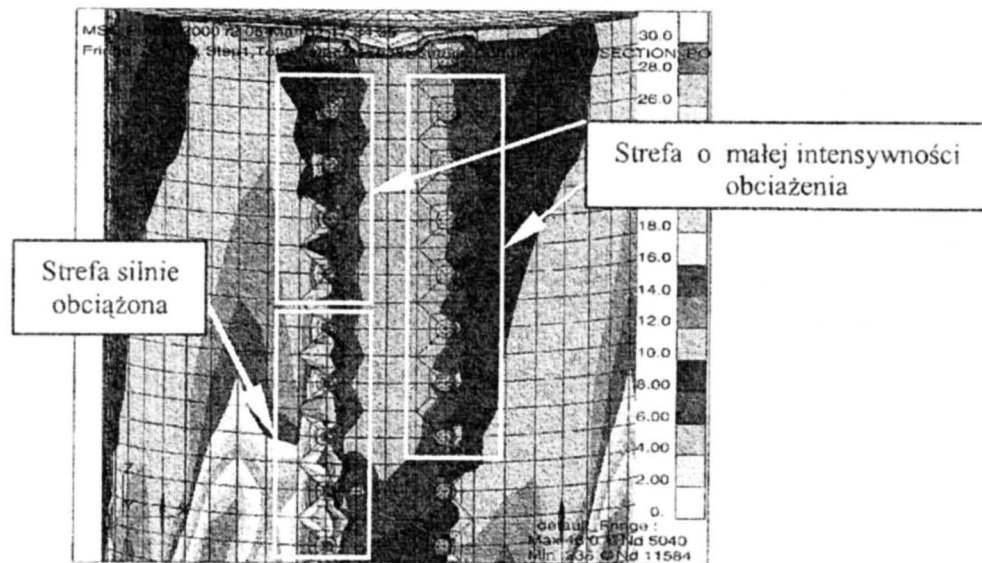
Rys. 9. Ścieżka równowagi skęcanej powłoki cylindrycznej.

Analizowana konstrukcja traci stateczność przy sile $P_{kr} = 1180$ [N]. Jest to wartość mniejsza o około 12 % w stosunku do wyniku uzyskanego za pomocą liniowej analizy stateczności (1321,4 [N]) i zbliżona do obciążenia krytycznego otrzymanego w eksperymencie (1150 [N]). Występujące rozbieżności mogą być spowodowane przede wszystkim wpływem imperfekcji geometrycznych występujących w modelu doświadczalnym. Utrata stateczności przebiega w sposób bifurkacyjny przy czym obserwowany spadek obciążenia wynosi około 200 [N].

Po przekroczeniu dolnego punktu granicznego spada diametralnie sztywność ustroju, zaś krzywa równowagi wykazuje w dalszym ciągu cechy liniowe. Nośność graniczna (1215 [N]) determinowana jest w tym przypadku przez osiągnięcie naprężeń niszczących w newralgicznym punkcie konstrukcji (p. A na rysunku 7).

Odmiennym zagadnieniem w rozważaniach dotyczących stateczności złożonych ustrojów cienkościennych, jest problem oceny wyętwienia lokalnego struktury, w strefach połączeń nitowych. Zagadnienie to omówione będzie szczegółowo na przykładzie analizowanej powłoki.

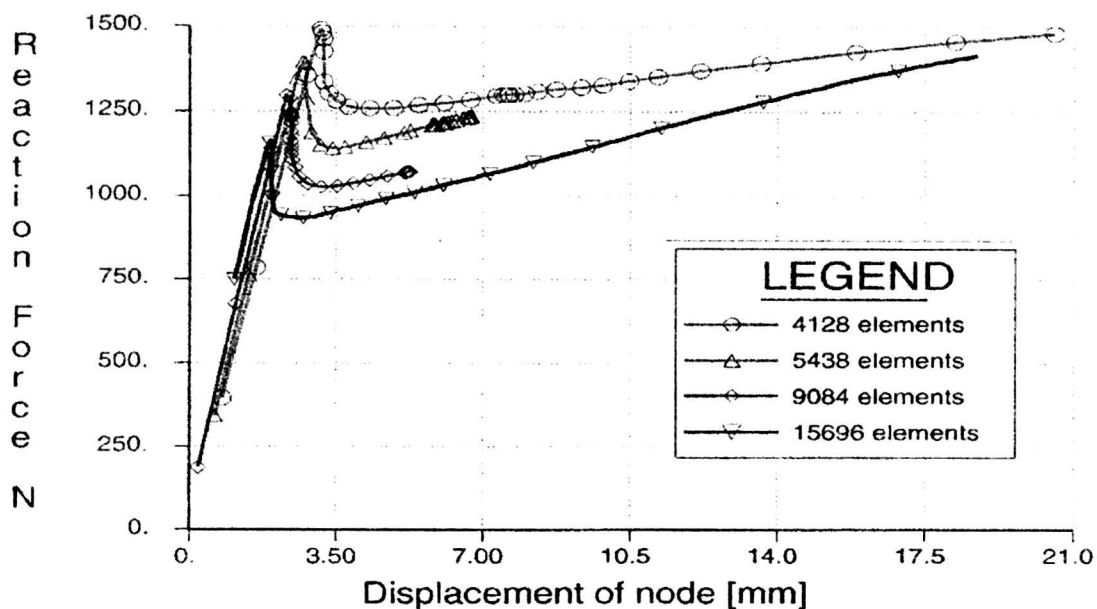
Stosując opisany wcześniej sposób dyskretnego połączenia pokrycia i podłużnic można jedynie w sposób jakościowy oszacować wyętwienie poszczególnych węzłów powstających w wyniku nitowania (rys. 10).



Rys. 10. Rozkład naprężeń zredukowanych (H-M-H) wokół połączeń podłużnicy i pokrycia, [MPa].

Zróznicowane poziomy naprężeń wokół obszaru wspólnych węzłów powłoki i usztywnienia świadczą o nierównomiernym obciążeniu poszczególnych nitów. Informacja ta może być przydatna w trakcie doboru średnicy oraz rozstawu nitów na etapie projektowania konstrukcji.

W celu oceny zbieżności rozwiązania nieliniowego obliczenia powtórzono dla modeli z różną liczbą elementów skończonych. Numeryczne ścieżki równowagi dla różnych modeli przedstawiono na rysunku 11.



Rys. 11. Ścieżki równowagi skręcannej powłoki dla modeli z różną liczbą elementów.

Wartości uzyskanej siły krytycznej (Tablica 1) wykazują wyraźne zniżenie (o około 10 – 12%) w stosunku do wyników uzyskanych drogą analizy liniowej (nie prezentowane w niniejszej pracy). Za zadowalające można uznać wyniki uzyskane dla modeli z liczbą elementów w zakresie 10000-15000. Uzyskany tą drogą wynik różni się o około 4 – 10% od wartości siły krytycznej uzyskanej w badaniach eksperymentalnych. Dalsze zwiększanie gęstości siatki nie jest korzystne ze względów praktycznych, bowiem czasy obliczeń przekraczały by wówczas 100 godzin.

Tabela 1. Wartości uzyskanej siły krytycznej (analiza nieliniowa).

Model numer	1	2	3	4	5
Liczba elementów	4128	5438	9084	12625	15696
Obciążenie krytyczne uzyskane drogą analizy nieliniowej [N]	1480	1380	1300	1230	1180

LITERATURA

- [1] Arbocz J., Hol J. M. A. M., Collapse of axially compressed cylindrical shells with random imperfections, *AIAA Journal*, vol. 29 (2247-2259), 1991.
- [2] Arbocz J., Post-buckling behaviour of structures. Numerical techniques for more complicated structures, *Lecture Notes In Physics* 288, 1985.
- [3] Argyris J. H., Konig M., Nagy D. A., Haase M., Malejannakis G., Metoda elementów skończonych w zagadnieniach geometrycznie nieliniowych. W: [109], s. 163—234.
- [4] Crisfield M. A., A faster modified Newton-Raphson iteration *Comp. Meth. In Appl. Mech. Engng*, Vol. 20, s. 267—278, 1979
- [5] Crisfield M. A., An arc-length method including line searches and accelerations, *Int. J. Num. Met. Eng.*, Vol. 19, s. 1269-1289, 1983.
- [6] Gallagher R. H., Gellatly R. A., Padlog J., Mallett R. H., A discrete element procedure for thin shell instability analysis. *AIAA J.*, Vol. 5, No. 1, s. 138—145. 1967.
- [7] Kotelko M., Mechanizmy zniszczenia zginanych dźwigarów cienkościennych o ścianach izo- i ortotropowych, *Politechnika Łódzka, Zeszyty Naukowe Nr 844, Łódź 2000*, str. 119.
- [8] Oden J. T., *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, Inc., 1972.
- [9] Radwańska M., Waszczyszyn Z., Buckling analysis of a cooling tower shell with measured and theoretically modeled imperfections, *Thin-Walled Structures*, vol. 23. (107-121), 1995.
- [10] Riks E., A unquied method for the computation of critical equilibrium states of nonlinear elastic systems, *ActaTechn. Acad. Scient. Hung.* Vol. 87, No. 1—2,s. 121—141, 1978.
- [11] Rittweger i in., Influence of geometric imperfections on the load capacity of orthotropic stiffened and compsite shells, *Thin-Walled Structures*, vol. 23. (237-254), 1995.
- [12] MSC-Patran, *Advanced FEA, User's Manuals*.

NUMERICAL ANALYSIS OF STABILITY AND DESTRUCTIVE LOAD OF THIN-WALLED CYLINDRICAL SHELL REINFORCED BY STRINGERS IN THE SHAPE OF CLOSED FORMERS

The paper presents results of the numerical calculation of thin-walled cylindrical shell reinforced by stringers in the shape of closed formers, subjected to torsion. In the investigation the critical force, postbuckling stress state, equilibrium path and destructive load were obtained. Moreover the sensitivity studies for the discrete model were performed. In this study the load-displacement characteristics of the model as a function of a number of finite elements were obtained.

TORSIONAL BUCKLING OF THIN-WALLED I-BEAM COLUMN WITH WARPING STIFFENERS

W. WITKOWSKI, C. SZYMCZAK, I. LUBOWIECKA

Department of Structural Mechanics, Gdańsk University of Technology
Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk, Poland

J. CHRÓŚCIELEWSKI

Department of Bridge Structures, Gdańsk University of Technology
Narutowicza 11, 80-952 Gdańsk, Poland

Problems of buckling of I-beam columns with battens or transverse plate stiffeners are investigated. The critical buckling of torsional buckling of I-beam column with stiffeners can be found in accordance with the classical theory of thin-walled with non-deformable cross-section. The stiffeners are included into the column one-dimensional model as the additional restraints of the cross-section warping. The simple formulas for the stiffener stiffness are proposed in literature. Comparison of the buckling loads obtained with the more accurate two-dimensional shell model of the column is presented. Accuracy of the one-dimensional model proved to be sufficient for engineering application.

1. INTRODUCTION

Thin-walled beams and columns with I-beam cross-section are widely used in engineering structures. Unfortunately their torsional stiffness is small, therefore if the members undergo torsion an additional stiffeners are necessary. Application of battens or transverse plate stiffeners are the most popular manner of increasing the member torsional stiffness. The stability analysis of the thin-walled columns can be carried out in accordance with the classical theory of thin-walled beams with non-deformable cross-section [1]. The restraining effect of the stiffener is taken into account by introducing an additional elastic constraint acting upon the cross-section warping [2,3]. A comparative study and an attempt to identify the stiffness modulus [4] point out that considerable discrepancy between this modulus proposed in literature mentioned above and more accurate model of FEM may occur. The most important reason of this discrepancy is the deformation of the beam cross-section in the vicinity of the stiffener placement. Looking for a more appropriate model of the thin-walled member with the warping stiffeners a concept of a stiffener superelement is adopted [5]. Comparative study dealing with static analysis of the I-beam with battens undergoing torsion allows one to draw a conclusion that accuracy is sufficiently good for practical application. In this paper a comparison of the results of stability analysis of I-beam columns with stiffeners carried out by means of the classical beam theory and the FEM is shown.

2. ONE-DIMENSIONAL MODEL

The critical torsional buckling load of I-beam columns compressed by axial end loads P without any warping stiffeners can be determined with the aid of theory of thin-walled beams with non-deformable cross-section [1]. The governing differential

equation is

$$\theta^{IV} + \alpha^2 \theta'' = 0, \quad (1)$$

where:

- θ - the rotational displacement of the cross-section,
- α - the decay coefficient given by

$$\alpha^2 = \frac{Pr_0^2 - GI_d}{EI_\omega}, \quad (2)$$

where:

- r_0 - the radius of gyration of the cross-section,
- E - the Young's modulus,
- G - the shear modulus,
- I_d - the Saint Venant's torsion moment of inertia,
- I_ω - the warping moment of inertia.

In the cross-sections for both sides of the warping stiffener a step variable change of the bimoment ΔB occurs [2,3]. The bimoment change depends on the warping stiffness of the stiffener k_w and can be written as

$$\Delta B = k_w \theta'. \quad (3)$$

The warping stiffness of the batten presented in Fig.1 is given by the following formula [2]

$$k_w = \frac{Eb_b^3 b_1^2 t}{2h} \frac{1}{1 + 0.2 \frac{E}{G} \left(\frac{b_b}{h} \right)^2}, \quad (4)$$

where:

- h - the height of the I cross-section,
- b_b - the batten width,
- t - the batten thickness,
- b_1 - the distance between battens in the cross-section.

Similarly, the stiffness of the transverse plate stiffener presented in Fig.1 is

$$k_w = \frac{1}{3} Gbht^3, \quad (5)$$

where:

- b - the transverse plate stiffener width.

3. FEM ANALYSIS

The results of the previous section were verified using fully nonlinear shell theory. The thin-walled member was considered to be a non-smooth shell structure. Kinematics of the shell was described by two-dimensional Cosserat continuum with natural strain measures. The governing equations of the theory were expressed exclusively in terms of stress resultants. In the adopted approach the configuration space is not a linear space, therefore a non-standard techniques are required for interpolation and parametrization of

the rotation group $SO(3)$, linearization and iteration to the finite element approximations. A family of four-nine- and sixteen-nodes displacement-rotational based C^0 elements was constructed (see e.g. [6,7]). All elements contain six degrees of freedom in each node. The drilling degree-of-freedom enters the theory in the natural way. The sixth degree of freedom enables use of the elements in the analysis of torsion of complex surface-like structures containing branches or stiffeners.

In the present study CAMe16 elements with full integration (FI) were used which were proved to be very reliable [7,8], where, among others, the convergence study was carried out.

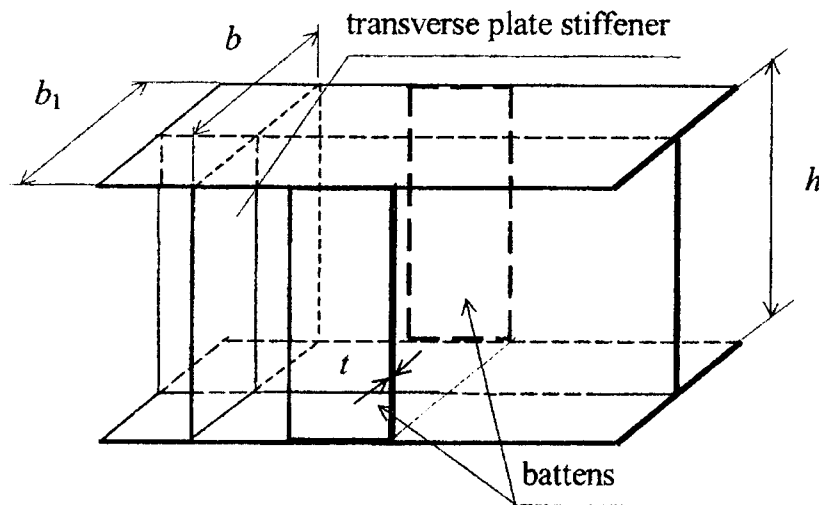


Fig. 1. I-beam segment with battens and plate stiffeners

4. EXAMPLES

Three examples were studied, which according to the beam theory, may be regarded as simply supported beam (case A), beam with both ends fixed (case B) (in both cases of length is $L = 8m$) and cantilever arm (case C) of length $4m$. In cases A and C the width of the batten was assumed to be either $0,1$ or $0,2m$. The studied cross section was $0,2 \times 0,2 \times 0,2m$. In each case the compressive reference load $P_{ref} = 1MN$ was uniformly distributed over cross-section area and, in order to determine the torsional buckling load, a torsional moment $M_{impf} = 50Nm$ was applied at the cross-section centre of gravity (see Fig. 3 for details). The non-linear deformation path was examined using standard procedures i.e. load control, displacement control and arc-length control. Proper interpretation of results obtained within one-dimensional beam theory and two-dimensional shell theory requires precise specification of boundary conditions which, in case of shell theory, are complex and therefore ambiguous.

In cases A and B, due to the symmetry, only half of the beam was studied. In each case the same mesh i.e. $(2+2+2) \times 40$ (lower flange + web + upper flange) \times length) of sixteen-nodes elements with full integration (denoted CAMe16 FI) was used. The battens were discretized in the same manner as the web. The FEM mesh had 2369 nodes and 14214 dofs. For two-dimensional shell theory simply supported conditions with symmetry condition and fixed edge conditions are understood here in a sense given in Fig. 2 where constrained nodal degrees of freedom at representative nodes are shown.

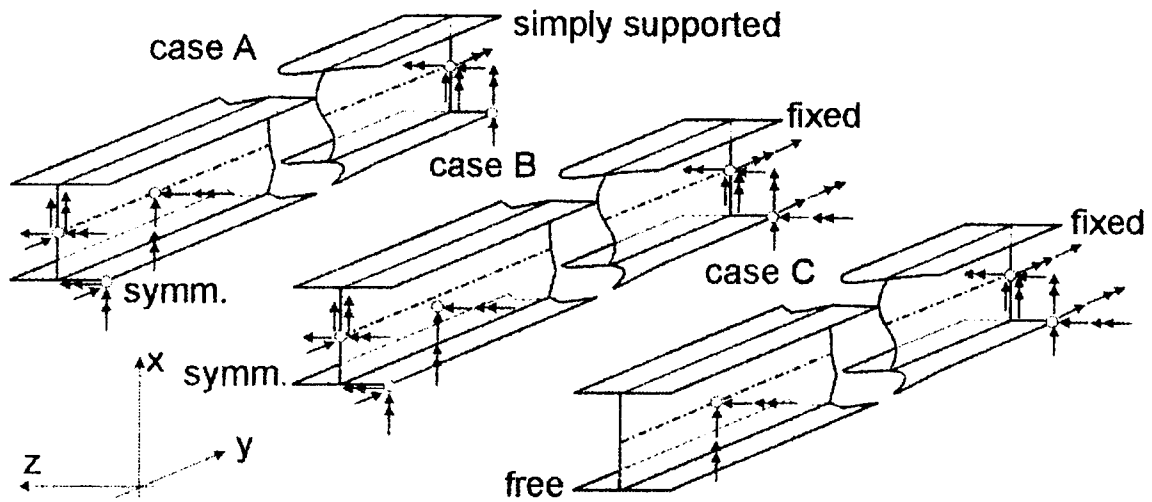


Fig. 2. Imposed boundary conditions
(single arrow – translational dof, double arrow – rotational dof)

As in can be noted, in each case in order to enforce torsional buckling, all nodes on the longitudinal axis had x and z displacements and rotations constrained.

Fig. 3 depicts typical non-linear load-displacement path for horizontal displacement z_{cont} of point at the intersection of lower flange and web with corresponding deformation shape for $\lambda = 2,67$. The non-linear critical load was determined in the following fashion. The path with imperfection was traced using load control and arc-length control techniques until reaching neighbourhood of the secondary path (black dot in Fig 3). Then, the imperfection load was removed yielding jump on the secondary path. Then, by using from that point displacement control technique until z_{cont} was close to zero, the beam was restored to its symmetric state at the bifurcation point yielding critical torsional load factor.

5. RESULTS

Table 1 gives the comparison between the results. As it can be observed the torsional behaviour of thin-walled I-beams can be essentially improved by adding battens. This observation was proved analytically, on the basis of one-dimensional beam model, and on the basis of FEM two-dimensional shell model. However, in all considered cases one-dimensional beam solution gives larger values of critical load than corresponding results form FEM two-dimensional shell model. As in our previous studies [7,8] on models which meet the geometrical assumptions of classical beam theory i.e. beams without stiffeners (see Table 1, Cases: A0, B0, C0), the obtained results are in excellent agreement. However, taking into account the stiffeners in form of battens yields the 40% discrepancies (see Table 1, Case C10). The discrepancies between two studied models can be attributed to problems with representing (compatibility) boundary conditions of one-dimensional beam theory on the grounds of shell theory. Furthermore, in one-dimensional analysis the torsional buckling length l_b was assumed as $l_b = l - 0,5b_p$ while in FEM model the compressive load was applied at the end of the beam.

Hence, the conclusion that the one-dimensional model, though simple and comfortable, requires an extensive research on expressions for the spring stiffness (4).

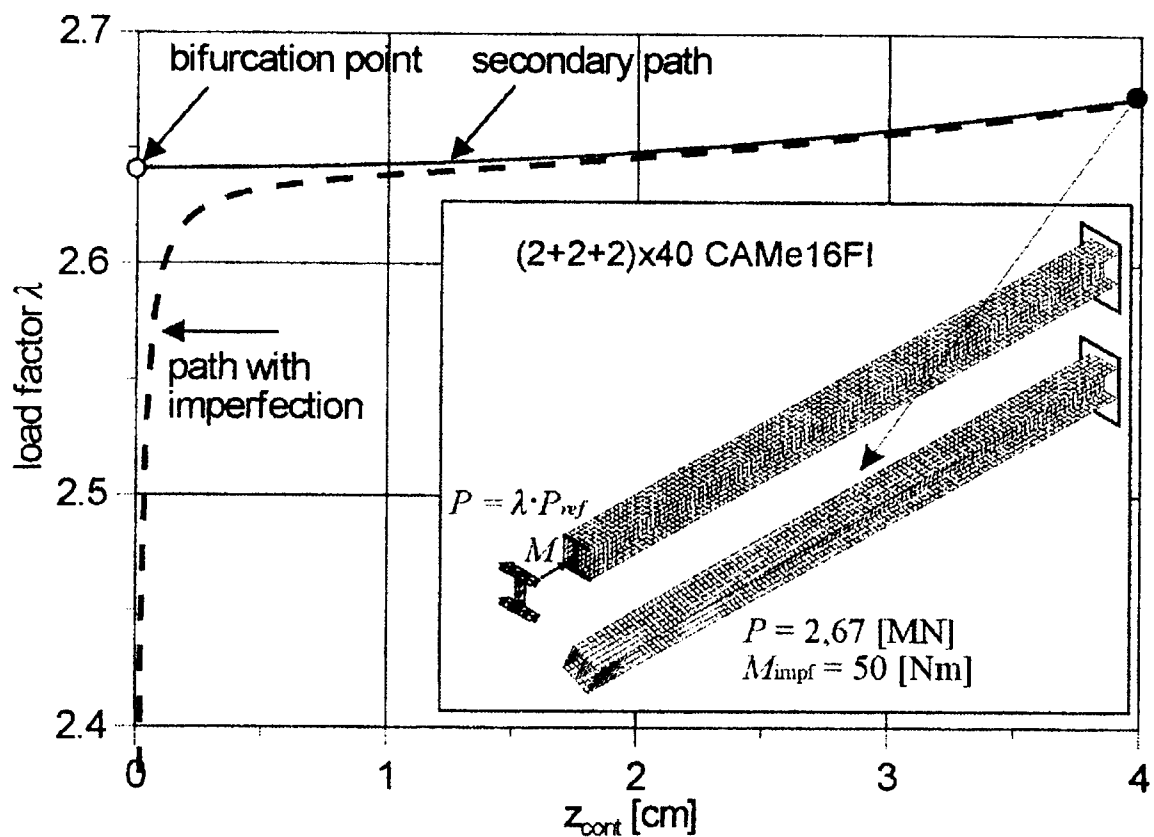
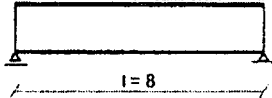
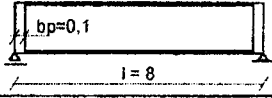
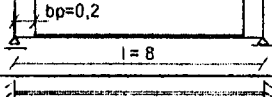
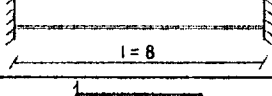
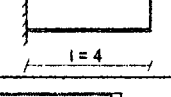
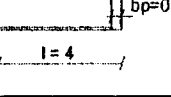
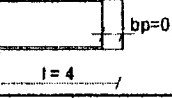


Fig. 3. Representative load-deformation path

Table 1. Critical load from one-dimensional beam and two-dimensional shell model

Case	Analytical ID beam [MN]	Model	FEM 2D shell [MN]
A0	2,047		2,035
A10	3,157		2,636
A20	3,285		3,065
B0	3,342		3,327
C0	2,047		2,004
C10	3,193		2,292
C20	3,369		2,641

REFERENCES

- [1] Vlasov V. Z., *Thin-Walled Elastic Beams*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Oldbourne Press, London 1961.
- [2] Svensson S.E., Plum C.M., Stiffener Effects on Torsional Buckling of Columns, *J. Struct. Engng. ASCE*, **109**, 1983, pp. 758-772.
- [3] Szewczak R.M., Smith E.A. and DeWolf J.T., Beams with Torsional Stiffeners. *J. Struct. Engng. ASCE*, **109**, 1983, pp.1635-1647.
- [4] Szymczak C., Mikulski T., Longitudinal Stiffeners Model Identification of Thin-Walled Bar with I-cross-section, *Proceedings of Gdansk University of Technology*, **585**, 2001, pp. 273-280 (in Polish).
- [5] Kreja I., Szymczak C., Numerical simulation of a thin-walled beam with warping stiffeners undergoing torsion, *TASK Quarterly*, **6**, 2002, pp.453-60.
- [6] Chróścielewski J., Makowski J., Stumpf H., Finite element analysis of smooth, folded and multi-shell structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **141**, 1997, pp.1-46.
- [7] Chróścielewski J., Family of C^0 finite elements in six parameter nonlinear theory of shells, *Proceedings of Gdansk University of Technology*, **540**, 1996, pp.1-291 (in Polish).
- [8] Szymczak C., Chróścielewski J., Lubowiecka I., On the paradox of torsional buckling of thin-walled I columns. *Archives Civil Engineering*, **XLIX**, **1**, 2003, pp.3-13.

STATECZNOŚĆ SPRŻYSTEJ BELKI WSPÓŁDZIAŁAJĄCEJ Z POPRZECZNIE PERIODYCZNYM LEPKOSPĘŻYSTYM PODŁOŻEM

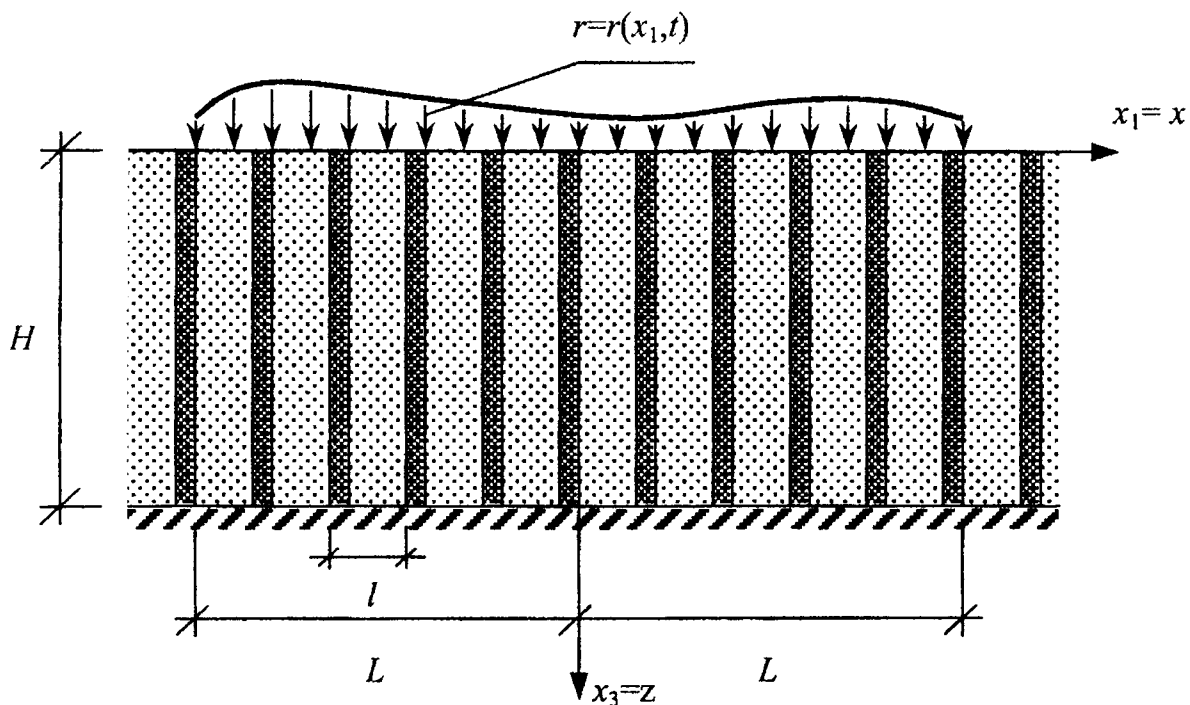
M. WOŹNIAK, K. BŁAŻEJOWSKI

Zakład Geotechniki Drogowej Politechniki Świętokrzyskiej
Al. 1000-lecia Państwa Polskiego 3, 25-314 Kielce

Głównym celem pracy jest przedstawienie modelu matematycznego dla analizy stateczności jednorodnej belki współpracującej z periodyczną niejednorodną grubą lepkospężystą warstwą. Zakładamy, że kierunek periodyki jest równoległy do osi belki. Rozpatrujemy także belkę na lepkospężystych podporach o skończonej szerokości. Zaproponowany sposób modelowania uwzględnia wpływ wielkości okresu periodyczności na stateczność belki. Wyprowadzono równania stateczności dynamicznej belki; wpływ okresu periodyczności pokazano na prostych przykładach

1. MODELOWANIE LEPKOSPĘŻYSTEJ WARSTWY POPRZECZNIE PERIODYCZNEJ

Podłoże periodycznie niejednorodne w kierunku prostopadłym do poziomego brzegu zostało przedstawione w pracy [4], gdzie wyprowadzono 2D-model grubej warstwy podłoża złożonej z dużej liczby cienkich warstewek. W niniejszej pracy mamy



Rys.1. Fragment warstwy o poprzecznie periodycznej strukturze, spoczywającej na nieodkształconym podłożu i obciążonej belką o długości $2L$

do czynienia z periodyczną niejednorodnością w kierunku równoległym do brzegu warstwy, tj. z warstwą poprzecznie periodycznie niejednorodną. Rozpatrujemy warstwę lepkosprężystą o strukturze periodycznej spoczywającą na nieodkształcalnej podstawie i obciążoną siłami $r = r(x,t)$ działającymi w kierunku osi x_3 i wynikającymi z obciążenia podłoża belką. Schemat warstwy pokazano na rys. 1. Warstwa ma strukturę periodyczną w kierunku osi x_1 . Okres periodyczności wynosi l . Grubość warstwy oznaczamy przez H . Model podłoża belki konstruujemy przy następujących założeniach :

- 1) okres periodyczności jest mały w porównaniu z grubością warstwy i długością belki

$$l \ll H, \quad l \ll L, \quad (1)$$

- 2) przemieszczenia warstwy w kierunku x_1 oraz x_2 są pomijalnie małe,

$$u_1 = u_2 = 0, \quad (2)$$

- 3) przemieszczenia warstwy w kierunku osi $x_3 = z$ postulujemy w postaci

$$\begin{aligned} u_3 &= w(x,t)\varphi(z), \quad z \in [0, H], \quad x \in [-L, L], \\ w(x,t) &= v(x,t) + h(x)\psi(x,t), \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $v(x,t)$, $\psi(x,t)$ są funkcjami wolnozmiennymi, por. [3], $v(\cdot, t)$, $\psi(\cdot, t) \in SV(T)$, $w' \approx v' + h'\psi$, zaś $\varphi(z)$ jest monotoniczną funkcją zanikania, por. [2], przyjmującą wartości $\varphi(0) = 1$, $\varphi(H) = 0$. Występująca powyżej funkcja $h(x)$ jest funkcją periodyczną o okresie l opisującą fluktuacje pola przemieszczeń $w(\cdot, t)$ zwaną funkcją kształtu. Wartości tej funkcji są rzędu okresu l natomiast rzędy ich pochodnych są wielkościami niezależnymi od l ,

- 4) materiał podłoża jest liniowo-lepkosprężysty (model Voighta),

- 5) zakładamy symetrię materiałową warstwy w płaszczyznach $z = x_3 = \text{const}$.

Korzystając z założeń 2 i 3, równania konstytutywne dla naprężeń ośrodka lepkosprężystego o przyjętej strukturze periodycznej przyjmiemy w postaci

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= C_{3333} u_{3,3} + \bar{C}_{3333} \dot{u}_{3,3}, \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = C_{1313} u_{3,1} + \bar{C}_{1313} \dot{u}_{3,1}, \end{aligned} \quad (4)$$

gdzie C_{3333} , C_{1313} są modułami sprężystymi odpowiednio ściskania i ścinania, a \bar{C}_{3333} , \bar{C}_{1313} są odpowiednimi modułami lepkimi; są to periodyczne funkcje argumentu $x = x_1$ o okresie l . Z przyjętych założeń ponadto wynika, że

$$\begin{aligned} u_{3,3} &= (v + h\psi)\varphi', \\ u_{3,1} &= (v' + h'\psi)\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Równania 2D-modelu wyżej omawianego podłoża wyprowadzamy z zasady prac przygotowanych. Zakładamy, że brzeg warstwy $z=0$ jest obciążony na odcinku $(-L, L)$ swobodnie podpartą belką a tym samym przemieszczenia punktów $x = \pm L$ brzegu są równe zero. Oznaczmy przemieszczenia przygotowane przez $\bar{u}_3 = (\bar{v}(x) + h(x))\bar{\psi}(z)$, gdzie \bar{v} , $\bar{\psi}$ są funkcjami testowymi. Tym samym dla każdych \bar{v} i $\bar{\psi}$, takich, że $\bar{v}(-L) = \bar{v}(L) = 0$, zachodzi :

$$\int_{-L}^L \int_0^H (\sigma_{33} \bar{\varepsilon}_{33} + \sigma_{13} \bar{\varepsilon}_{13}) dz dx = \int_{-L}^L r(\bar{v} + h\bar{\psi}) dx + \int_{-L}^L \int_0^H (\rho b - \rho \ddot{u}_3) \bar{u}_3 dz dx \quad (6)$$

gdzie ρ jest gęstością masy podłoża oraz b siłą masową; ponadto

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{33} &\equiv \bar{u}_{3,3} \equiv (\bar{v}(x) + h(x)\bar{\psi}(x))\varphi'(z), \\ \bar{\varepsilon}_{13} &\equiv \bar{\varepsilon}_{31} \equiv \bar{u}_{3,1} \equiv (\bar{v}'(x) + h'(x)\bar{\psi}(x))\varphi(z). \end{aligned} \quad (7)$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$[f] = \int_0^H f dz \quad (8)$$

wyrażające uśrednienie podług grubości warstwy. Po podstawieniu (4), (5) i (7) do równania (6) i wykorzystaniu oznaczenia (8), otrzymamy

$$\begin{aligned} [\sigma_{33} \varphi'] - [\sigma_{13} \varphi]' &= r + \rho b[\varphi] - \rho(\ddot{v} + h\ddot{\psi})[\varphi^2] \\ [\sigma_{33} \varphi']h - [\sigma_{13} \varphi]h' &= rh + \rho b[\varphi]h - \rho h(\ddot{v} + h\ddot{\psi})[\varphi^2] \end{aligned} \quad (9)$$

Uśrednijmy powyższe równania podług przedziałów periodyczności: $(x-l/2, x+l/2)$, $x \in (-L+l/2, L-l/2)$, zgodnie z formułą

$$\langle f \rangle(x) = \frac{1}{l} \int_{x-l/2}^{x+l/2} f(\bar{x}) d\bar{x} \quad (10)$$

Korzystając z faktu, że funkcje $v(\cdot, t)$, $\psi(\cdot, t)$ są wolnozmiennie, oraz oznaczając

$$a = [(\varphi')^2], \quad a_1 = [\varphi], \quad a_2 = [\varphi^2] \quad (11)$$

i pomijając wielkości rzędu $\varepsilon = l/H$ wobec jedności, otrzymamy

$$\begin{aligned} \langle r \rangle = & a \langle C_{3333} \rangle v + \langle \tilde{C}_{3333} \rangle \dot{v} - a_2 (\langle C_{1313} \rangle v'' + \langle C_{1313} h' \rangle \psi' + \\ & + \langle \tilde{C}_{1313} \rangle \dot{v}'' + \langle \tilde{C}_{1313} h' \rangle \dot{\psi}' - a_1 b \langle \rho \rangle + a_2 (\langle \rho \rangle \ddot{v} + \langle \rho h \rangle \ddot{\psi}) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \langle rh \rangle = & a_2 (\langle C_{1313} h' \rangle v' + \langle C_{1313} (h')^2 \rangle \psi' + \langle \tilde{C}_{1313} h' \rangle \dot{v}' + \langle \tilde{C}_{1313} (h')^2 \rangle \dot{\psi}' - \\ & - a_1 b \langle \rho h \rangle + a_2 (\langle \rho h \rangle \ddot{v} + \langle \rho h^2 \rangle \ddot{\psi}) \end{aligned}$$

Powyższe wzory są punktem wyjścia do otrzymania równań belki na poprzecznie periodycznym podłożu lepkosprężystym.

2. BELKA NA PODŁOŻU LEPKOSPREŻYSTYM

Rozpatrujemy belkę obciążoną siłami p - r , gdzie wartości $-r$ są reakcją rozpatrywanego podłoża, zaś p obciążeniem zewnętrznym belki. Przez B i ρ_0 oznaczmy odpowiednio sztywność zginania i gęstość masy belki.

Równanie belki poddanej działaniu siły osiowej N i obciążeniu p spoczywającej na podłożu, po przeprowadzeniu procedury uśredniania, [3], ma postać

$$\begin{aligned} Bv^{IV} - Nv'' + \langle r \rangle + \rho_0 \ddot{v} &= \langle p \rangle \\ \rho_0 \langle h^2 \rangle \ddot{\psi} + \langle rh \rangle + (B \langle (h'')^2 \rangle + N \langle (h')^2 \rangle) \psi &= \langle ph \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

Po podstawieniu prawych stron (12) do (13) i po wprowadzeniu oznaczeń

$$\begin{aligned}
k &\equiv a \langle C_{3333} \rangle, & \tilde{k} &\equiv a \langle \tilde{C}_{3333} \rangle, \\
2s &\equiv a_2 \langle C_{1313} \rangle, & 2\tilde{s} &\equiv a_2 \langle \tilde{C}_{1313} \rangle, \\
2s_1 &\equiv a_2 \langle C_{1313} h' \rangle, & 2\tilde{s}_1 &\equiv a_2 \langle \tilde{C}_{1313} h' \rangle, \\
m &\equiv \rho_0 + a_2 \langle \rho \rangle, & m_1 &\equiv a_2 \langle \rho \rangle, & m_2 &\equiv \rho_0 \langle h^2 \rangle + a_2 \langle \rho h^2 \rangle, \\
f &\equiv \langle p \rangle + a_1 b \langle \rho \rangle, & f_1 &\equiv \langle \rho h \rangle + a_1 b \langle \rho h \rangle, \\
2s_2 &\equiv a_2 \langle C_{1313} (h')^2 \rangle, & 2\tilde{s}_2 &\equiv a_2 \langle \tilde{C}_{1313} (h')^2 \rangle
\end{aligned}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned}
Bv^{IV} - Nv'' + kv + k\dot{v} - 2sv'' - 2\tilde{s}\dot{v}'' + m\ddot{v} - 2s\psi' - 2\tilde{s}\dot{\psi}' &= f \\
m_2\ddot{\psi} + 2s_2\psi + 2\tilde{s}_2\dot{\psi} + (B\langle (h'')^2 \rangle + N\langle (h')^2 \rangle)\psi + 2s_1v' - 2\tilde{s}_1\dot{v}' &= f_1
\end{aligned} \tag{14}$$

przy dodatkowym założeniu $\langle \rho h \rangle = 0$ dla funkcji h .

Równania (14) przedstawiają model jednorodnej belki sprężystej spoczywającej na poprzecznie periodycznym lepkosprężystym podłożu. Model ten można wykorzystać do analizy stateczności takiej belki.

3. BELKA NA LEPKOSPŘĘŻYSTYCH PODPORACH

W przypadku tym można pominąć naprężenia styczne w warstwie i wykazać, że zamiast formuł (12) otrzymamy

$$\begin{aligned}
\langle r \rangle &= a \langle C_{3333} \rangle v + a \langle \tilde{C}_{3333} \rangle \dot{v} + a \langle C_{3333} h \rangle \psi + a \langle C_{3333} h \rangle \dot{\psi} - \\
&\quad - a_1 b \langle \rho \rangle + a_2 \langle \rho \rangle \ddot{v} + a_2 \langle \rho h \rangle \ddot{\psi} \\
\langle rh \rangle &= a \langle C_{3333} h \rangle v + a \langle \tilde{C}_{3333} h \rangle \dot{v} + a \langle C_{3333} h^2 \rangle \psi + a \langle \tilde{C}_{3333} h^2 \rangle \dot{\psi} - \\
&\quad - a_1 b \langle \rho h \rangle + a_2 \langle \rho h \rangle \ddot{v} + a_2 \langle \rho h^2 \rangle \ddot{\psi}
\end{aligned} \tag{15}$$

Wprowadzając nowe oznaczenia

$$\begin{aligned}
k &= a \langle C_{3333} \rangle, & \tilde{k} &= a \langle \tilde{C}_{3333} \rangle, \\
k_1 &= a \langle C_{3333} h \rangle, & \tilde{k}_1 &= a \langle \tilde{C}_{3333} h \rangle, \\
k_2 &= a \langle C_{3333} h^2 \rangle, & \tilde{k}_2 &= a \langle \tilde{C}_{3333} h^2 \rangle,
\end{aligned}$$

zamiast (13) otrzymamy

$$\begin{aligned}
Bv^{IV} - Nv'' + kv + \tilde{k}v + k_1\psi + \tilde{k}_1\psi + m\ddot{v} + m_1\ddot{\psi} &= f \\
m_2\ddot{\psi} + m_1\ddot{v} + k_2\psi + \tilde{k}_2\psi + k_1v + \tilde{k}_1\dot{v} + (B\langle(h'')^2\rangle + N\langle(h')^2\rangle)\psi &= f_1
\end{aligned} \tag{16}$$

Równania (16) przedstawiają model belki jednorodnej sprężystej spoczywającej na podporach lepkosprężystych o skończonej szerokości, rozmieszczonych periodycznie.

4. RÓWNANIA STATECZNOŚCI DYNAMICZNEJ. WYZNACZENIE SIŁ KRYTYCZNYCH DLA PRZYPADKU STATYCZNEGO

Rozpatrujemy zagadnienie stateczności dynamicznej belki jednorodnej sprężystej spoczywającej na podporach lepkosprężystych o skończonej szerokości, które są periodycznie rozmieszczone. Przyjmując $f = f_1 = 0$ w równaniach (16) (brak obciążenia poprzecznego belki) oraz pomijając wpływ sił masowych na przemieszczenia warstwy, otrzymamy

$$\begin{aligned}
m\ddot{v} + Bv^{IV} - Nv'' + kv + \tilde{k}v + k_1\psi + \tilde{k}_1\psi &= 0 \\
m_2\ddot{\psi} + k_2\psi + \tilde{k}_2\psi + (B\langle(h'')^2\rangle + N\langle(h')^2\rangle)\psi + k_1v + \tilde{k}_1\dot{v} &= 0
\end{aligned} \tag{17}$$

Dla uproszczenia rozważań pomijamy lepkość warstwy podłoża kładąc $\tilde{k}_1 = \tilde{k}_2 = 0$. W tym przypadku rozwiązania układu równań (17) szukamy w postaci

$$v(x, t) = f_n(t)\sin(n\pi x/L), \quad \psi(x, t) = g_n(t)\sin(n\pi x/L), \tag{18}$$

gdzie $f_n(t)$, $g_n(t)$ są niewiadomymi funkcjami czasu; odpowiada to swobodnemu podparciu obu końców belki. Podstawiając (18) do (17) i oznaczając $\xi \equiv n\pi x/L$ oraz definiując ponadto $\beta \equiv \langle(h'')^2\rangle$, $\eta \equiv \langle(h')^2\rangle$, otrzymamy układ równań dla $f = f_n$ i $g = g_n$ w postaci

$$\begin{aligned}
mf'' + (\xi^4 B + \xi^2 N + k)f + k_1 g &= 0 \\
m_2 \ddot{g} + (\beta B + \eta N + k_2)g + k_1 f &= 0
\end{aligned} \tag{19}$$

Przyjmując siłę ściskającą w postaci $N=P_0+P\Phi(t)$, gdzie $\Phi(t)$ jest funkcją periodyczną o okresie T oraz P_0, P są stałymi, otrzymamy

$$\ddot{f} + \frac{\xi^4 B + k + P_0 \xi^2}{m} \left[1 + \frac{P \xi^2}{\xi^4 B + k + P_0 \xi^2} \Phi(t) \right] f(t) + \frac{k_1}{m} f(t) = 0 \quad (20)$$

$$\ddot{g} + \frac{\beta B + k_2 + \eta P_0}{m} \left[1 + \frac{\eta P}{\beta B + k_2 + \eta P_0} \Phi(t) \right] g(t) + \frac{k_1}{m_2} g(t) = 0$$

Dla ośrodka jednorodnego $k_1 = 0$; wtedy równanie (20)₁ sprowadza się do znanego równania Hilla, [1]. W rozpatrywanym tu przypadku zagadnienie dynamicznej stateczności belki spoczywającej na periodycznie rozmieszczonych podporach o skończonej szerokości i przy pominięciu własności lepkich tych podpór, prowadzi więc do układu dwóch równań (20).

Przejdźmy do analizy przypadku statycznego. Równanie (20) przy założeniu, że $P = 0, P_0 = N, f_1(t) = C_f, g_1(t) = C_g$, gdzie C_f, C_g są stałymi, otrzymamy układ dla C_f, C_g :

$$\begin{bmatrix} \xi^4 B + \xi^2 N + k & k_1 \\ k_1 & \beta B + \eta N + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_f \\ C_g \end{bmatrix} = 0 \quad (21)$$

Przyrównując do zera wyznacznik powyższego równania, otrzymamy następujące równanie dla statycznej siły krytycznej

$$\xi^2 \eta N^2 + [\xi^2 (\beta B + k_2) + \eta (\xi B + k)] N + (\xi B + k)(\xi B + k_2) - k_1^2 = 0 \quad (22)$$

Celem otrzymania prostszego wyrażenia na N zastosujemy podejście asymptotyczne biorąc pod uwagę, że $h = O(l), h' = O(1), h'' = O(l^{-1})$ gdzie okres periodyczności l traktujemy jako mały parametr, gdyż zachodzi $l \ll L$. Wtedy otrzymamy następujące wyrażenie asymptotyczne dla niższych wartości siły krytycznej:

$$N_{kr} = -\frac{\xi^4 B + k}{\xi^2} + \frac{k_1^2}{\beta B \xi^2} + O(l^6) \quad (23)$$

Wynika stąd, że niejednorodność podłoża, którą charakteryzuje współczynnik k_1 , obniża wartość siły krytycznej.

Przeprowadźmy podobną analizę dla przypadku belki spoczywającej na poprzecznie periodycznie niejednorodnym podłożu sprężystym. Otrzymamy wtedy wyrażenie dla siły krytycznej

$$N_{kr} = -\frac{\xi^4 B + k - 2s}{\xi^2} + \frac{4s_1^2}{\beta B} + O(l^6) \quad (24)$$

Należy zauważyć, że w obu powyższych przypadkach wpływ niejednorodności podłoża na stateczność belki jest niewielki.

LITERATURA CYTOWANA W TEKŚCIE

- [1] Bolotin W. W., *Dinamiczeskaja ustojcziwost uprugich system*, GITTL, Moskwa, 1956
- [2] Vlasov W. Z., Leontiev N. N., *Balki, plity i oboloczki na uprugom osnovanii*, Moskwa, Fizmatgiz, 1960
- [3] Woźniak Cz., Wierzbicki E., *Averaging techniques in thermomechanics of composite solids*. Wyd. Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa 2000
- [4] Woźniak M. *2D-Dynamics of a Stratified Elastic Subsoil Layer*, Arch. Appl. Mech., 66, 1996, 284-290

ON A STABILITY OF AN ELASTIC BEAM INTERACTING WITH A TRANSVERSALLY PERIODIC VISCOELASTIC SUBSOIL

The main aim of this contribution is to propose a mathematical model for the stability analysis of a homogeneous viscoelastic beam resting on a periodically nonhomogeneous thick viscoelastic layer. It is assumed that the layer is resting on a rigid basis and the direction of the subsoil periodicity is parallel to the beam axis. The proposed modelling approach takes into account the effect of the periodicity length on the beam stability.

SIMULATION AND OPTIMIZATION OF DYNAMIC PROCESSES IN THIN-WALLED SHELLS IN A THREE-DIMENSIONAL APPROXIMATION

YU.D. ZOZULYAK

Department of Mathematics, Technical University of Koszalin
Raclawicka 15-17, 75-620 Koszalin

The mathematical model, based on the presentation of the sought values by the generalized forces-moments in the form of superposition of translational and rotational components of mechanic motion relative to the shell median surface has been proposed for investigation of dynamic processes in thin-walled shells. A general structure of constitutive equations has been constructed. The problem of optimization of the outer force loading, which minimizes the possibility of the shell dynamic stability loss has been stated and solved.

1. INTRODUCTION

A significant attention in literature is paid to the development of general approaches and methods of construction of mathematical elastic shell models on the base of three-dimensional problem statement. This is caused, particularly, by the improvement of constructive forms and internal composition of the shell-structured elements, as well as by the need to study dynamic processes which occur in them under extreme operating conditions. Building of these elaborated mathematical models, in general, is based on the usage of variational approaches with expansion of the unknown quantities on the predetermined base. A variational-moment approach [1] was proposed for the development of studies in this direction, which allows to choose an optimum basis of expansion for each boundary problem and ensures a pinpoint accuracy of the decision on the small base of approximations. The energy approach to iterative construction of governing relations of nonlinear mechanics of shells is proposed in works [2,3]. In order to get them in sufficiently general form, representation of a decision by expansion on corresponding basis of tensor functions is used. To develop this direction we offer in our work an iterative construction scheme of mathematical model for study of dynamic processes in shells of rotation. It is formed on presentation of the sought values through generalised efforts-moments in the form of superposition of translations and rotations about basic (median) surface of the shell (cross-section motion of the shell is presented as a translational motion of a median surface and a rotational motion relative to this surface). Herewith, balance equations of energy, linear momentum and angular momentum for the chosen shell's element are taken for reference. The general structure of constitutive equations of shells is built on the chosen phase space of parameters of local state. Equations of dynamics of a cylindrical shell have been obtained; frequency characteristics have been studied. The problem of optimization of the outer force loading, which minimizes the possibility of the shell dynamic stability loss has been stated and solved.

2. CONSTITUTIVE EQUATIONS

Let us consider an elastic body, which in a strainless state (the initial moment of time $\tau = \tau_o$) is a shell of a constant thickness $2h$ ($-h \leq \gamma \leq h$), referred to the curvilinear orthonormalized system of coordinates (α, β, γ) .

Let us present radius-vector of an arbitrary point of a shell in the form

$$\vec{r}(\alpha, \beta, \gamma, \tau_o) = \vec{r}_o(\alpha, \beta, \tau_o) + \vec{r}_{o\gamma}(\gamma, \tau_o) \quad (1)$$

and a vector of its displacements - as a sum of onward displacements relatively to the points of the median surface ($\gamma = 0$) and rotations about the axis of rotation that goes through the corresponding points of median surface

$$\vec{u} = [u_\alpha, u_\beta, u_\gamma] = \vec{u}^{(o)} + [\vec{r}_{o\gamma} \times \vec{\varphi}]. \quad (2)$$

Here:

$u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$ - components of the displacements vector;

$\vec{u}^{(o)} = \vec{u}^{(o)}(\alpha, \beta)$ - a vector of onward displacements relatively to the median surface;

\vec{r}_o - a radius-vector of basic surface points; $\vec{r}_{o\gamma} = \gamma \vec{e}_\gamma$;

\vec{e}_γ - unit basic vector in direction of the normal to median surface.

Components φ_1, φ_2 vector $\vec{\varphi}(\alpha, \beta, \tau) = [\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ are angles of rotation, conditioned by deformation of basic vectors $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta$ in normal to the surface planes.

And φ_3 is an angle of rotation of the element of median surface about normal to the surface. Vector product operation is marked by symbol $[\times]$.

Then it is possible to represent the law of motion for the point of shell as

$$\vec{r}(\alpha, \beta, \gamma, \tau) = \vec{r}_o + \vec{r}_{o\gamma} + \vec{u}^{(o)} + [\vec{r}_{o\gamma} \times \vec{\varphi}], \quad \vec{u}(\alpha, \beta, \gamma, \tau_o) = 0. \quad (3)$$

Let us write the energy balance equation under isothermal conditions ($T(\vec{r}, \tau) = T(\vec{r}) \equiv T_o$) at the actual moment of time for the shell's element $X(\tau_o)$ with surface

$$\partial X(\tau_o) = \partial X_1(\tau_o) \cup \partial X_2(\tau_o) \cup \partial X_{12}(\tau_o) \quad (4)$$

which is built on the base of the arbitrarily chosen area of basic surface of the shell $\partial X_o^c(\tau_o)$

$$\frac{d}{d\tau} \int_{X(\tau)} E dV = \int_{\partial X(\tau)} (\vec{n} \circ \vec{\sigma}) \circ \vec{v} d\Sigma + \int_{X(\tau)} (\vec{f} \circ \vec{v}) dV, \quad (5)$$

where E - density of energy; $\hat{\sigma}$ - Cauchy's stress tensor; \vec{f} - a density vector of mass forces; $\vec{v} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau}$ - a velocity vector; \vec{n} - an external normal; $\partial X_1(\tau_o), \partial X_2(\tau_o)$ - surfaces of the chosen area of the shell with $\gamma = \pm h$ for an initial moment of time $\tau = \tau_o$; $\partial X_{12}(\tau_o)$ - linear lateral surface which crosses basic ∂X_o^c on closed circuit Γ_o ; $dV, d\Sigma$ - volume and area of physically small domains of the chosen element. A vector scalar product operation is marked by a dot.

After transition to values, normalized by geometric characteristics of initial configuration and using the Ostrogradsky - Gauss formula from the equation (5) we obtain

$$\int_{X(\tau_o)} \frac{\partial E_o}{\partial \tau} dV_o = \iint_{X(\tau_o)} [\vec{\nabla}_o \circ (\hat{\sigma}_o \circ \vec{v}) + \vec{f}_o \circ \vec{v}] dV_o. \quad (6)$$

Here $E_o = E \frac{dV}{dV_o}$; $\vec{\nabla}_o = \frac{1}{A_1} \vec{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_2} \vec{e}_\beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \vec{e}_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}$ - a Hamiltonian operator in initial configuration; A_1, A_2 - coefficients of the first quadratic form of a median surface; $\hat{\sigma}_o$ - stress tensor of Piola - Kirchhoff. Index "o" indicates that basic parameters are normalized relatively to the metric characteristics of the chosen element at the initial moment of time.

Taking into account that $\vec{\nabla}_o \circ (\hat{\sigma}_o \circ \vec{v}) = (\vec{\nabla}_o \circ \hat{\sigma}_o) \circ \vec{v} + \hat{\sigma}_o \circ \frac{\partial \vec{e}_o}{\partial \tau}$ the equation of energy balance (6) can be written in a form

$$\int_{\partial X_o^c} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-h}^h E_o d\gamma d\Sigma_o^c = \int_{\partial X_o^c} \int_{-h}^h \left[(\vec{\nabla}_o \circ \hat{\sigma}_o + \vec{f}_o) \circ \vec{v} + \hat{\sigma}_o \circ \frac{\partial \vec{e}_o}{\partial \tau} \right] d\gamma d\Sigma_o^c, \quad (7)$$

where $\vec{e}_o = \vec{\nabla}_o \otimes \vec{u}$, $d\Sigma_o^c$ - an area of the small element of median surface ∂X_o^c . Symbol " \otimes " marks an tensor product operation, two dots - an operation of double scalar product.

The equation (7) in a local form will be

$$\frac{\partial L_o}{\partial \tau} = \int_{-h}^h \left(-\vec{P}_o \circ \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \hat{\sigma} \circ \frac{\partial \vec{e}_o}{\partial \tau} \right) d\gamma. \quad (8)$$

Here $L_o = \int_{-h}^h (E_o - \vec{P}_o \circ \vec{v}) d\gamma$, $\vec{P}_o = \vec{P}_{o(o)} + \int_{\tau_o}^{\tau} (\vec{\nabla}_o \circ \hat{\sigma}_o + \vec{f}_o) d\zeta$ - a force impulse vector; $\vec{P}_{o(o)}$ - an initial value of this vector.

Considering representation (2) we'll present a velocity vector \vec{v} as

$$\vec{v} = \vec{v}^{(o)} + [\gamma \vec{e}_\gamma \times \vec{\omega}]. \quad (9)$$

Then the next differential form, after a number of transformations, is possible to be put in correspondence with equation (8)

$$dL_o = -\bar{Q}_{o1} \circ d\vec{v}^{(o)} - \bar{Q}_{o2} \circ d\vec{\omega} + \hat{Q}_{o3} \circ \circ d\hat{e}_o^{(o)T} + \hat{Q}_{o4} \circ \circ d\hat{e}_o^{(\varphi)T} \quad (10)$$

Here the following symbols are introduced:

$$\bar{Q}_{o1} = \int_{-h}^h \bar{P}_o d\gamma, \quad \bar{Q}_{o2} = \vec{e}_\gamma \times \int_{-h}^h \gamma \bar{P}_o d\gamma, \quad \hat{Q}_{o3} = \int_{-h}^h \hat{\sigma}_o d\gamma, \quad \hat{Q}_{o4} = \int_{-h}^h (\vec{r}_{o\gamma} \times \hat{\sigma}_o) d\gamma,$$

$$\vec{\omega} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \tau}, \quad \vec{v}^{(o)} = \frac{\partial \vec{u}^{(o)}}{\partial \tau}, \quad \hat{e}_o^{(o)} = \frac{\partial \vec{u}^{(o)}}{\partial \vec{r}_o}, \quad \hat{e}_o^{(\varphi)} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \vec{r}_o}.$$

Index "T" marks an operation of transposing.

The relation (10) shows that for the potential description of local situation the function of state is the function L_o , which can be considered in the phase space of state parameters $\vec{v}^{(o)}, \vec{\omega}, \hat{e}_o^{(o)T}, \hat{e}_o^{(\varphi)T}$. Accordingly, the generalised forces $\bar{Q}_{o1}, \bar{Q}_{o2}, \hat{Q}_{o3}, \hat{Q}_{o4}$ are coupled for the specified base parameters. Herewith we obtain the following equations of thermodynamic state:

$$\bar{Q}_{o1} = \int_{-h}^h \left[\bar{P}_{o(o)} + \int_{\tau_o}^{\tau} (\vec{\nabla}_o \circ \hat{\sigma}_o + \vec{f}_o) d\zeta \right] d\gamma = -\frac{\partial L_o}{\partial \vec{v}} \equiv \bar{Q}_{o1}(\vec{v}^{(o)}, \hat{e}_o^{(o)T}, \vec{\omega}, \hat{e}_o^{(\varphi)T}),$$

$$\bar{Q}_{o2} = -\frac{\partial L_o}{\partial \vec{\omega}} \equiv \bar{Q}_{o2}(\vec{v}^{(o)}, \hat{e}_o^{(o)T}, \vec{\omega}, \hat{e}_o^{(\varphi)T}), \quad \hat{Q}_{o3} = \frac{\partial L_o}{\partial \hat{e}_o^{(o)T}} \equiv \hat{Q}_{o3}(\vec{v}^{(o)}, \hat{e}_o^{(o)T}, \vec{\omega}, \hat{e}_o^{(\varphi)T}),$$

$$\hat{Q}_{o4} = \frac{\partial L_o}{\partial \hat{e}_o^{(\varphi)T}} \equiv \hat{Q}_{o4}(\vec{v}^{(o)}, \hat{e}_o^{(o)T}, \vec{\omega}, \hat{e}_o^{(\varphi)T}).$$

For the determination of the unknown functions $\vec{u}^{(o)}, \bar{\varphi}$ it is necessary to concretise the structure of state function L_o , as well as to formulate initial and boundary conditions that correspond to the initial ones for three-dimensional statement.

3. DYNAMIC EQUATIONS FOR A CYLINDRICAL SHELLS

Henceforward, for derivation of equations, by which functions $\vec{u}^{(o)}, \bar{\varphi}$, can be defined we'll proceed from balance equations of conservation of both linear momentum and angular momentum.

Thus, for the chosen shell element $X(\tau_o)$ the equation of conservation of linear momentum will be

$$\frac{d}{d\tau} \int_{X(\tau_0)} \rho_o \bar{v} dV_o = \int_{\partial X(\tau_0)} \bar{\sigma}_n d\Sigma_o, \quad (11)$$

where $\bar{\sigma}_n$ - an external force vector, applied to surfaces (4) of the chosen element.

After transition in equation (11) to the space integral, and integration over γ within $(-h) - (+h)$ and with account of presentation (9), we'll obtain in a local form

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}_o} \circ \int_{-h}^h \hat{\sigma}_o d\gamma + \bar{\sigma}_{o\gamma}^+ - \bar{\sigma}_{o\gamma}^- + \int_{-h}^h \bar{f}_o d\gamma = 2h\rho_o \frac{\partial \bar{v}^{(o)}}{\partial \tau}. \quad (12)$$

Here $\bar{\sigma}_{o\gamma}^+$, $\bar{\sigma}_{o\gamma}^-$ - force vectors of external load on surfaces $\gamma = h$ and $\gamma = -h$ respectively.

By means of generalised forces the equation (12) will be written in the form

$$\bar{\nabla}_o^* \circ \hat{Q}_{o3} + \bar{q} = 2h\rho_o \frac{\partial \bar{v}^{(o)}}{\partial \tau} \quad (13)$$

and the equation of conservation of angular momentum will be

$$\bar{\nabla}_o^* \circ \hat{Q}_{o4} + \bar{m} = \frac{2h^3}{3} \rho_o \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau} - \frac{\partial \omega_3}{\partial \tau} \bar{e}_\gamma \right), \quad (14)$$

where $\bar{\nabla}_o^* = \bar{\nabla}_o - \bar{e}_\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma}$; $\bar{q} = \bar{\sigma}_{o\gamma}^+ + \bar{\sigma}_{o\gamma}^- + \int_{-h}^h \bar{f}_o d\gamma$;

$$\bar{m} = \left[h\bar{e}_\gamma \times (\bar{\sigma}_{o\gamma}^+ - \bar{\sigma}_{o\gamma}^-) \right] + \int_{-h}^h (\gamma \bar{e}_\gamma \times \bar{f}_o) d\gamma.$$

For one dimensional case, when external load and consequently all values that characterize stress-strain state of a shell do not depend on coordinate β , the set of equations (13), (14) in a component form will be written as

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z^{(o)}}{\partial z^2} + m_1 &= \rho_o \frac{\partial^2 u_z^{(o)}}{\partial \tau^2}, \quad \mu \frac{\partial^2 u_\beta^{(o)}}{\partial z^2} + m_2 = \rho_o \frac{\partial^2 u_\beta^{(o)}}{\partial \tau^2}, \\ \mu \frac{\partial^2 u_\gamma^{(o)}}{\partial z^2} &= \rho_o \frac{\partial^2 u_\gamma^{(o)}}{\partial \tau^2}, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{3}{h^2} u_\beta^{(o)} \right) + \lambda \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) + q_1 &= \rho_o \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2}, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{2\lambda}{R} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \mu \frac{3}{h^2} \frac{\partial u_\gamma^{(o)}}{\partial z} + q_2 &= \rho_o \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial \tau^2}, \\ \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z^2} - \frac{1}{R^2} \varphi_3 \right) + \lambda \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + q_3 &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Here q_1, q_2, q_3, m_1, m_2 - components of external force vectors and moments respectively; λ, μ - Lamé coefficients; R - a radius-vector of basic surface; z - axial coordinate.

4. OPTIMIZATION

Let a cylindrical shell of constant thickness $2h$ in the time interval $0 \leq \tau \leq \tau_1$ be influenced by a transient axisymmetric surface loading marked by vectors \vec{q}, \vec{m} . Body forces will not be taken into account. In the cases when schemes and regimes of loading are not prescribed strictly and are changeable within some boundaries, it is quite natural to state the problem of their optimization.

Let's consider a mathematical statement and solution of the problem of optimization of regimes and schemes of outer force loading, which within the limits of the prescribed restrictions minimize the possibility of the shell dynamic stability loss. With this purpose by analogy with work [4] we shall choose functional – an energetic measure of shell motion as criterion of optimization. It'll have the form

$$K = \pi \rho_1 R^2 \int_0^{\tau_1} \int_0^{x_0} \left[\left(\frac{\partial u_x^{(o)}}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{2}{3} h^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_\gamma^{(o)}}{\partial \tau} \right)^2 \right] dx d\tau \quad (16)$$

Here $\rho_1 = 2h\rho$, $x = \frac{z}{R}$, $x_0 = \frac{l}{R}$, l – shell length.

Displacement functions $u_x^{(o)}, u_\gamma^{(o)}, \varphi_1, \varphi_3$ are connected with the functions of the external loading by the equations

$$\begin{aligned} \frac{\lambda + 2\mu}{R^2} \frac{\partial^2 u_x^{(o)}}{\partial x^2} + m_1 &= \rho_o \frac{\partial^2 u_x^{(o)}}{\partial \tau^2}, & \frac{\mu}{R^2} \frac{\partial^2 u_\gamma^{(o)}}{\partial x^2} &= \rho_o \frac{\partial^2 u_\gamma^{(o)}}{\partial \tau^2}, & (17) \\ \frac{\mu}{R^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) + q_1 &= \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2}, & \frac{\partial u_\gamma^{(o)}}{\partial x} &= 0, & \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \varphi_3 \right) + R^2 q_3 &= 0, \end{aligned}$$

and have to satisfy some boundary and initial conditions.

We'll assume for simplicity that for the set of equations (17) zero initial conditions exist and we'll restrict ourselves to the consideration of the homogeneous (with respect to displacements) boundary conditions

$$F_{io} \left(u_x^{(o)}, u_\gamma^{(o)}, \varphi_1, \varphi_3 \right)_{x=0} = 0, \quad F_{il} \left(u_x^{(o)}, u_\gamma^{(o)}, \varphi_1, \varphi_3 \right)_{x=l} = 0, \quad (i = \overline{1,4}), \quad (18)$$

where F_{io}, F_{il} - corresponding linear operators.

Conditions of the form (18) can be used for the shell in which the force loading [4] is applied over its edges $x = 0, x = x_0$. Besides functions q_1, q_3, m_1 in equations

(17), which are sought governing functions are given in the form $q_1^* = q_1 + q_{1o}$, $q_3^* = q_3 + q_{3o}$, $m_1^* = m_1 + m_{1o}$,

where q_{1o} , q_{3o} , m_{1o} - surface loading equivalent to longitudinal forces, transverse forces and bending moments, respectively.

For concretisation of the set of admissible functions and providing of nontrivial solutions of the problem let assume the additional conditions of the form

$$\int_0^{\tau_1} \int_0^{x_o} \left(x - \frac{x_o}{2}\right)^i q_1^* dx d\tau = Q_{1i}^*, \quad (i = \overline{0, n}), \quad \int_0^{\tau_1} \int_0^{x_o} \left(x - \frac{x_o}{2}\right)^j q_3^* dx d\tau = Q_{3j}^*, \quad (j = \overline{0, m})$$

$$\int_0^{\tau_1} \int_0^{x_o} \left(x - \frac{x_o}{2}\right)^k m_1^* dx d\tau = M_{1k}^*, \quad (k = \overline{0, r}) \quad (19)$$

These conditions correspond to the specified to the corresponding order moment characteristics of force loading against $x = \frac{x_o}{2}$ crossing.

Let's solve the problem of optimization using constructive building of the solution of the set of equations (17). We'll confine ourselves by acting on the shell with the normal outer loading $q_3 = q_3(x)$ and distributed uniformly over the edges $x = 0, l$ axial forces of intensity N_o which for $\tau > 0$ are hold unchangeable in time ($m_1 = 0$, $q_1 = 0$). It is necessary to find the loading $q_3 = q_3(x)$ for which functional (16) reaches minimum value. Equations (17) must be satisfied which in the given case will have the form

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_x^{(o)}}{\partial x^2} - \rho_o R^2 \frac{\partial^2 u_x^{(o)}}{\partial \tau^2} = 0,$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) - \rho_o R^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} = -R^2 q_1^*(x), \quad \mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} - \varphi_3 \right) = -R^2 q_3.$$

Here $q_1^*(x) = \frac{N_o}{R} [\delta_+(x) - \delta_-(x_o - x)]$ $\delta_+(\cdot)$, $\delta_-(\cdot)$ - asymmetric delta-functions.

Let present loading function q_1^* , q_3 and displacement function $u_x^{(o)}$, φ_1 , φ_3 in the form

$$q_1^* = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \lambda_n x, \quad q_3 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x, \quad u_x^{(o)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(\tau) \cos \lambda_n x, \quad (20)$$

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1n}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad \varphi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3n}(x) \sin \lambda_n x.$$

Then for coefficients of expansion $u_n(\tau)$, $\varphi_{1n}(\tau)$, $\varphi_{3n}(\tau)$ we'll get the following sets of equations

$$\frac{\rho_o R^2}{\lambda + 2\mu} \frac{d^2 u_n}{d\tau^2} + \lambda_n^2 u_n = 0, \quad \varphi_{3n} = \frac{R^2}{\mu(1 + \lambda_n^2)} A_n S_+(\tau)$$

$$\frac{\rho_o R^2}{\mu} \frac{d^2 \varphi_{1n}}{d\tau^2} + \lambda_n^2 \varphi_{1n} + \lambda_n \varphi_{3n} = \frac{R^2}{\mu} B_n, \quad S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau \leq 0, \end{cases} \quad \lambda_n = \frac{n\pi R}{l}.$$

Solving this set with account of zero initial condition we obtain

$$\varphi_{1n} = -\frac{\lambda_n A_n}{\lambda_{2n} \rho_o (1 + \lambda_n^2)} (1 - \cos \lambda_{2n} \tau) S_+(\tau) + \frac{R^2}{\mu \lambda_n^2} B_n,$$

$$u_n = 0, \quad \lambda_{2n} = \frac{\lambda_n}{R} \left(\frac{\rho_o}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)$$

Substituting (20),(21) to functional (16), and for restrictions on loading $q_3(x)$ of the form

$$\int_0^{x_o} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \lambda_n x \right) dx = P_{3o} \quad (22)$$

and from the extreme conditions of the functional we'll obtain the relation which enables to find the sought coefficients A_n of expansion of governing functions $q_3(x)$.

The approach can be used to solve the problems of decreasing of influence of thin-shells dynamic effects and increasing of parameters of their dynamic stability.

REFERENCES

- [1] Burak Ya., Zozulyak Yu., Hnativ Yu., Application of the variation-moment approach to the problems of theory of elasticity of thin-walled shells., *Dopovidi Nationalnoji Akademiji Nauk Ukrainy*, N 1, Kyiv, 1990, s. 43-47 (in Ukrainian).
- [2] Burak Ya., Zozulyak Yu., Energy approach to the construction of equation of elastic shells in generalised valuables. *Dopovidi Nationalnoji Akademiji Nauk Ukrainy*, N 6, Kyiv, 1995, s. 41-44 (in Ukrainian).
- [3] Zozulyak Yu., Ostapski W., Energy Approach to Building a Mathematical Model of Thermoelastic Shells, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 22, Warsaw University of Technology, 1998, s. 95-103 .
- [4] Burak Ya. Yo., Selected Works, Scientific Training Center of Mathematical Modelling IPPMM of NASU, Akhil, Lviv, 2000 (in Ukrainian).

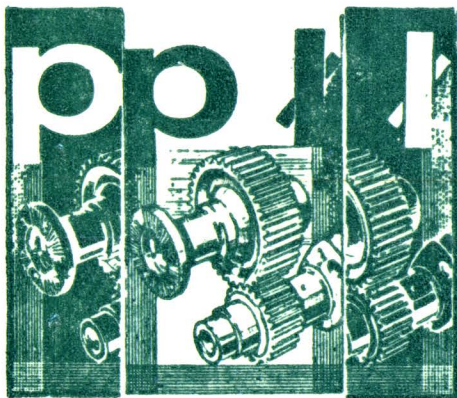


017055

Biblioteka Główna
PL



97055



EXLIBRIS

politechnika łódzka • łódź • biblioteka