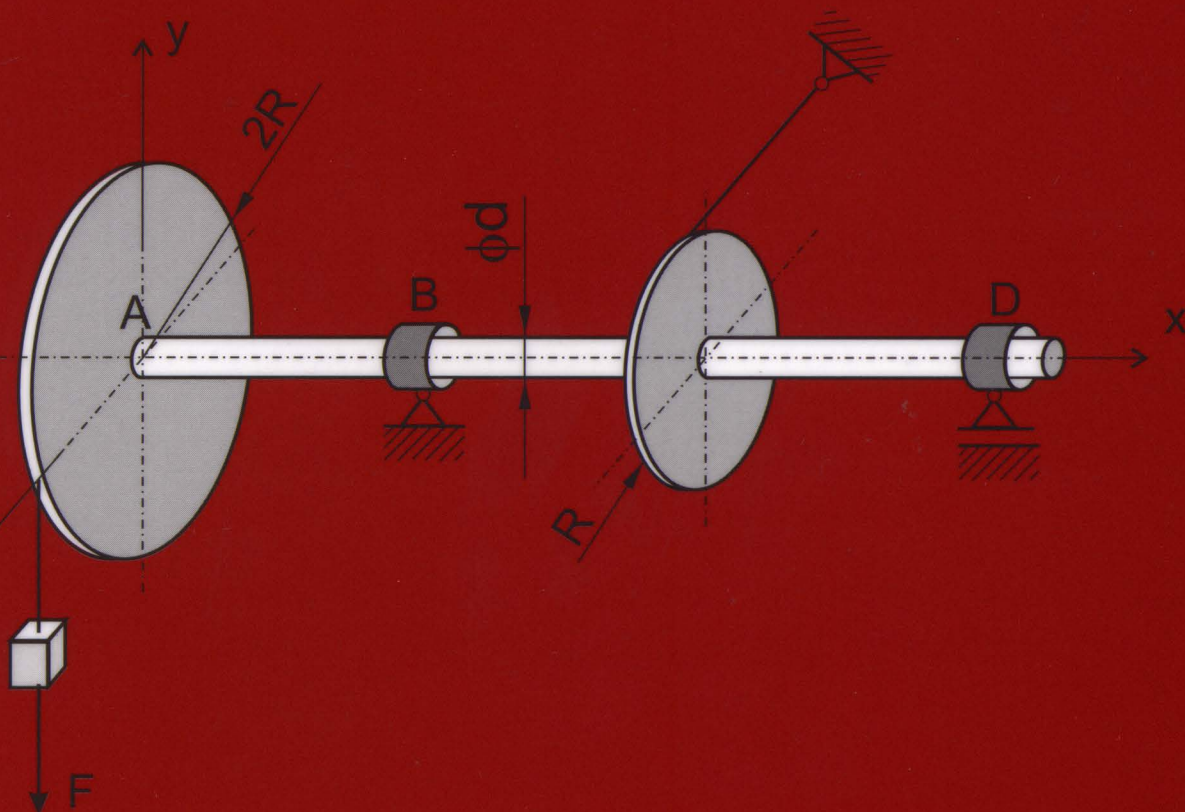


Tadeusz Gałkiewicz, Marian Królak, Tomasz Kubiak

ZBIÓR ZADAŃ Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW

Część II



Zbiór zadań z wytrzymałości

Cz. 2 /

SG141943

2010.

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

Łódź 2010

Biblioteka Główna PŁ
Termin zwrotu książki

**POLITECHNIKA ŁÓDZKA
PODRĘCZNIKI AKADEMICKIE**

Tadeusz Gałkiewicz, Marian Królak, Tomasz Kubiak

**ZBIÓR ZADAŃ
Z WYTRZYMAŁOŚCI MATERIAŁÓW**

część II

Łódź 2010

Recenzenci: **prof. dr hab. inż. Jerzy Zielnica**
prof. dr hab. inż. Tadeusz Niezgodziński

KOMITET REDAKCYJNY
WYDAWNICTW POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ

Przewodniczący: **prof. dr hab. inż. Piotr Wodziński**
Redaktor Naukowy Wydziału: **prof. dr hab. inż. Tomasz Kapitaniak**



141 943

© Copyright by Politechnika Łódzka 2010

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel/fax 42 684-07-93
e-mail: a-row-1@adm.p.lodz.pl
www.wydawnictwa.p.lodz.pl

ISBN 978-83-7283-374-7

Nakład 350 egz. Ark druk. 12,0. Papier offset. 80 g 70 x 100
Druk ukończono w październiku 2010 r.
Wykonano w Drukarni Offsetowej „Quick-Druk” s.c. ul. Łąkowa 11, 90-562 Łódź
Nr 1947

041-001/30/2020

Spis treści

1. Analiza dwukierunkowego stanu naprężenia	7
1.1. Wprowadzenie	7
1.2. Zadania przykładowe	9
1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	18
2. Wytrzymałość złożona	21
2.1. Wprowadzenie	21
2.2. Przykłady obliczeniowe elementów konstrukcji w złożonym stanie obciążenia	23
2.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	50
3. Zbiorniki cienkościenne	55
3.1. Wprowadzenie	55
3.2. Przykłady obliczeń naprężeń i odkształceń w zbiornikach cienkościennych ..	57
3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	68
4. Wyboczenie prętów ściskanych osiowo	71
4.1. Wprowadzenie	71
4.2. Przykłady obliczeń stateczności prętów ściskanych	75
4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	90
5. Metody energetyczne	93
5.1. Wprowadzenie	93
5.2. Przykłady obliczeń	96
5.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania	134
6. Zagadnienia specjalne	144
6.1. Czyste zginanie prętów silnie zakrzywionych	144
6.2. Środek sił poprzecznych	150
6.3. Naprężenia i odkształcenia w rurach grubościennych	155
6.4. Płyty kołowe obciążone osiowo-symetrycznie	160
6.5. Nośność graniczna	167
6.6. Obciążenia udarowe	186

Słowo od autorów

Druga część podręcznika „Zbiór zadań z wytrzymałości materiałów” jest kontynuacją części pierwszej wydanej przez Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej pod koniec 2008 roku, w której zamieszczono zadania dotyczące prostych przypadków wytrzymałości materiałów (rozciąganie, ściskanie, zginanie i skręcanie).

Część druga podręcznika przeznaczona jest dla studentów kierunków konstrukcyjnych i zawiera zadania z wytrzymałości złożonej, zbiorników cienkościennych, wyboczenia prętów, konstrukcji prętowych statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych (belek, ram, łuków), płyt kołowych oraz innych wybranych zagadnień wytrzymałości materiałów.

Rozdziały poprzedzone są krótkim wprowadzeniem zawierającym podstawowe wzory i definicje oraz metody i metodykę rozwiązywania zadań. Wiele zadań zostało rozwiązanych ze szczegółowym opisem rozwiązania.

Autorzy uważają, że najefektywniejszą metodą nauczania się poprawnego rozwiązywania zadań przez studentów jest samodzielne ich rozwiązanie. Dlatego też, podobnie jak w części pierwszej podręcznika, sporo zadań przeznaczonych jest do samodzielnego rozwiązania. Dla sprawdzenia poprawności rozwiązania tych zadań podano końcowe wyniki rozwiązania.

1. ANALIZA DWUKIERUNKOWEGO STANU NAPRĘŻENIA

1.1. Wprowadzenie

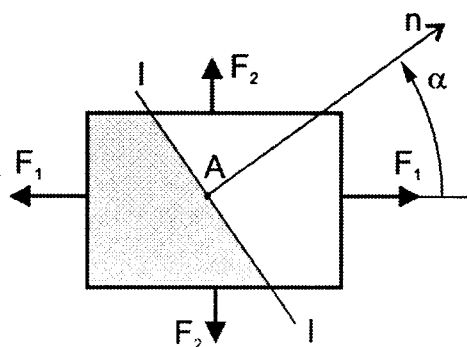
W dowolnym punkcie obciążonego ciała występują trzy wzajemnie prostopadłe naprężenia główne σ_1 , σ_2 , σ_3 , działające w kierunkach głównych 1, 2 i 3. Przyjmujemy, że zawsze $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Naprężenia główne są to naprężenia w przekrojach, w których nie ma naprężeń stycznych. Naprężenia główne, w odpowiednich płaszczyznach wzajemnie do siebie prostopadłych, osiągają wartości ekstremalne.

W przypadku, gdy jedno z naprężeń głównych jest równe zero, wówczas mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia.

Z liniowym (jednokierunkowym) stanem naprężenia mamy do czynienia wtedy, gdy jedno z naprężeń głównych jest różne od zera, a dwa pozostałe równe zero – występuje wówczas ściskanie lub rozciąganie.

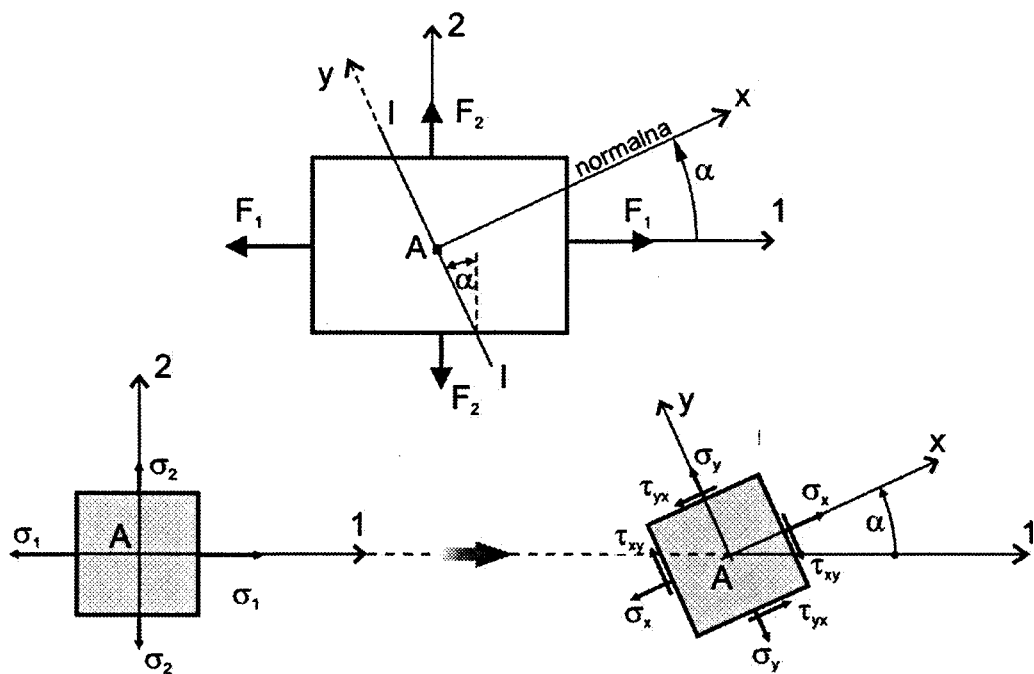
Celem analizy jest określenie stanu naprężenia występującego w dowolnym punkcie ciała znajdującego się w danym przekroju, którego normalna tworzy z kierunkiem naprężeń głównych σ_1 dowolny kąt α . Przykładem może być przedstawiona na rys. 1.1 płyta prostokątna rozciągana w dwu prostopadłych kierunkach, dla której chcemy wyznaczyć stan naprężeń w punkcie A w przekroju I-I.



Rys. 1.1

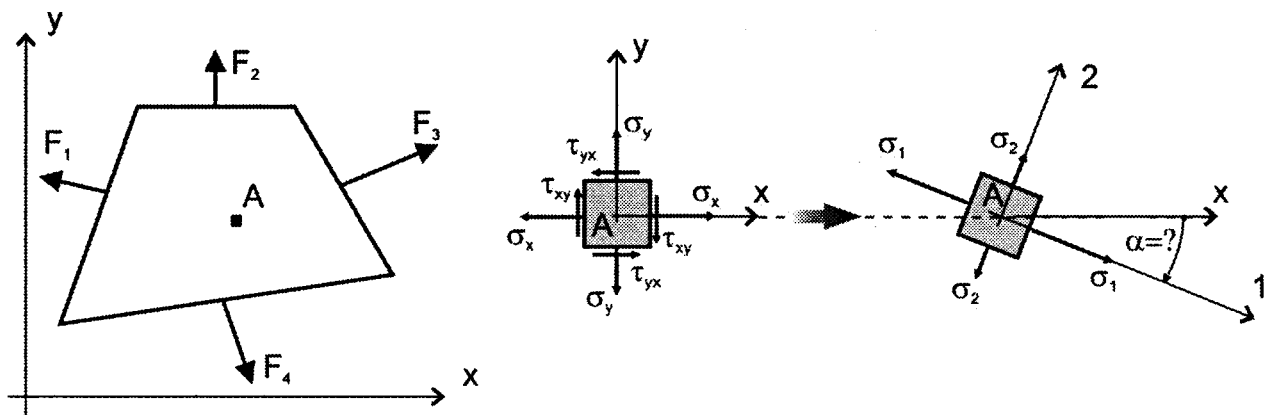
Dla różnych analizowanych przypadków rozpatruje się dwa warianty analizy:

- znane są w konkretnym punkcie ciała wartości i kierunki naprężeń głównych σ_1 , σ_2 , a szukamy stanów naprężeń w innych przekrojach prostopadłych do płaszczyzny osi głównych 1 i 2 przechodzących przez ten punkt (rys. 1.2);



Rys. 1.2

- znane są stany naprężeń (σ_x , σ_y , τ_{xy}) w dwóch prostopadłych do siebie przekrojach przechodzących przez interesujący nas punkt, a celem zadania jest wyznaczenie wartości naprężeń głównych σ_1 , σ_2 oraz kierunków ich działania (rys. 1.3).

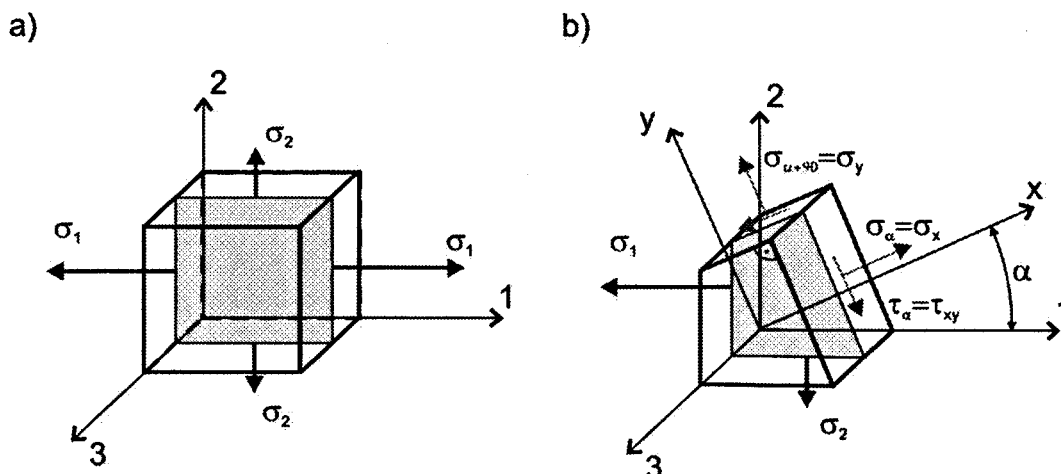


Rys. 1.3

Na przykładach szczegółowych omówione zostaną rozwiązania zagadnień metodą analityczną oraz wykreślną (koło Mohra).

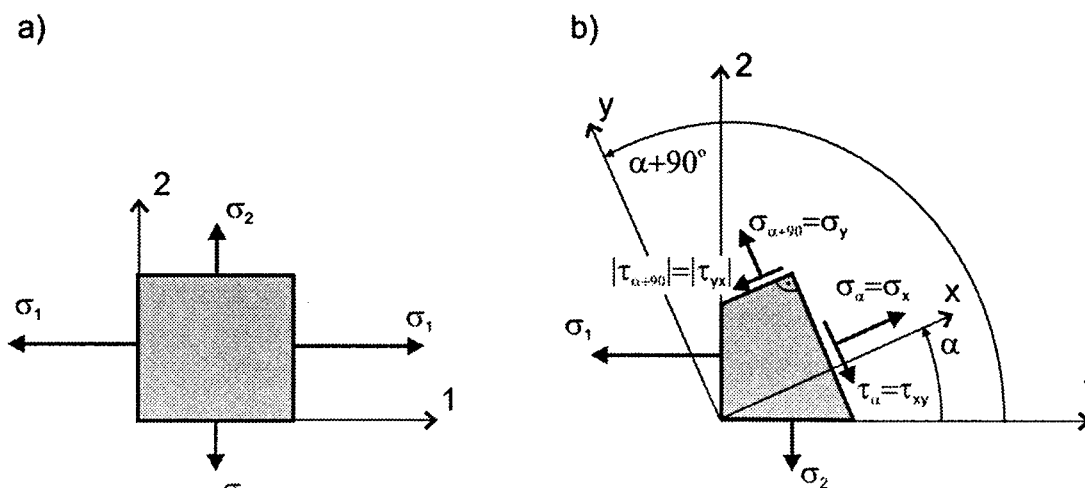
1.2. Zadania przykładowe

Zadanie 1.1. Kostka sześcienna obciążona jest naprężeniami głównymi: $\sigma_1 = 130$ MPa, $\sigma_2 = 50$ MPa i $\sigma_3 = 0$ (rys. 1.4). Wyznaczyć stan naprężeń w przekrojach pod kątami $\alpha = 30^\circ$ oraz $\alpha + 90^\circ = 120^\circ$ odmierzanych w kierunku dodatnim (trygonometrycznym) od płaszczyzny prostopadłej do osi głównej 1.



Rys. 1.4

R o z w i ą z a n i e . Kostka sześcienna obciążona jest jedynie w płaszczyźnie 1-2, mamy więc do czynienia z płaskim stanem naprężenia (rys. 1.4 i 1.5). W przekroju pod kątem $\alpha = 30^\circ$ występują dwie składowe istniejącego tam stanu naprężenia: składowa normalna σ_α , którą oznacza się często jako σ_x oraz składowa styczna τ_α , oznaczana również jako τ_{xy} .



Rys. 1.5

Naprężenia te określone są wzorami:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\alpha) = \frac{130 + 50}{2} + \frac{130 - 50}{2} \cos(2 \cdot 30) = 110 \text{ MPa},$$

$$\tau_\alpha = \tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha) = \frac{130 - 50}{2} \sin(2 \cdot 30) = 40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 35 \text{ MPa}.$$

W przekroju prostopadłym, tzn. w przekroju pod kątem $\alpha + 90^\circ = 120^\circ$, naprężenia wynoszą:

$$\sigma_{\alpha+90} = \sigma_y = \frac{130+50}{2} + \frac{130-50}{2} \cos(2 \cdot 120) = 70 \text{ MPa},$$

$$\tau_{\alpha+90} = \tau_{yx} = \frac{130-50}{2} \sin(2 \cdot 120) = -40 \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -35 \text{ MPa}.$$

Jak widać z powyższych obliczeń pomiędzy naprężeniami stycznymi w dwu prostopadłych przekrojach istnieje następująca zależność:

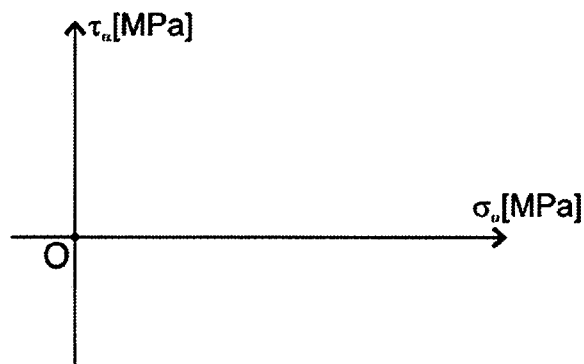
$$\tau_{\alpha+90} = -\tau_\alpha,$$

$$\tau_{yx} = -\tau_{xy}.$$

W przekrojach wzajemnie prostopadłych naprężenia styczne są co do wartości bezwzględnej jednakowe, natomiast ich zwroty są takie, że każda para naprężeń chce obrócić myślowo wydzielony element ciała w przeciwną stronę, dzięki czemu występuje równowaga elementu.

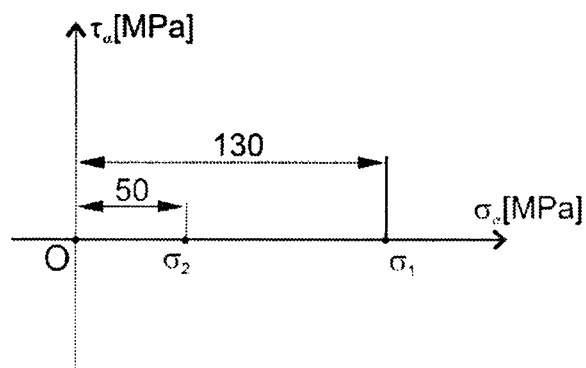
Powyżej przedstawiona została metoda analityczna wyznaczania stanu naprężeń w przekroju prostopadłym do płaszczyzny wyznaczonej przez osie 1 i 2. Tego typu analizę można również wykonać metodą wykreśłą, za pomocą tzw. koła Mohra. Dalej na kolejnych rysunkach (rys. 1.6 do 1.11) przedstawiony jest sposób sporządzania koła Mohra.

- obieramy prostokątny układ współrzędnych $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$: oś odciętych σ_α [MPa], oś rzędnych τ_α [MPa]



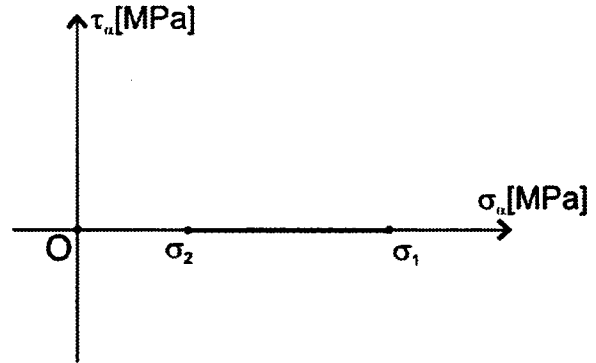
Rys. 1.6

- na osi odciętych wyznaczamy punkty o wartościach $\sigma_1 = 130 \text{ MPa}$ oraz $\sigma_2 = 50 \text{ MPa}$



Rys. 1.7

- odcinek $\sigma_1 - \sigma_2 = 80$ MPa jest średnicą koła Mohra

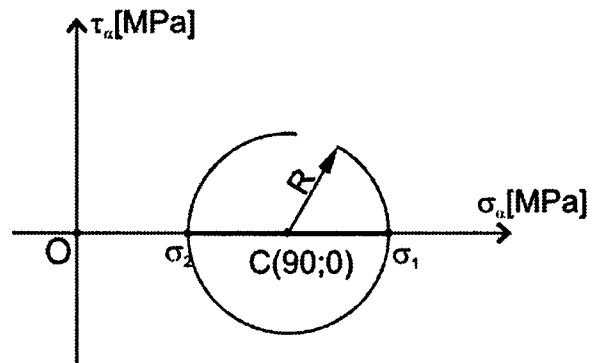


Rys. 1.8

- ze środka tego odcinka o współrzędnych $(90;0)$ określamy promieniem R

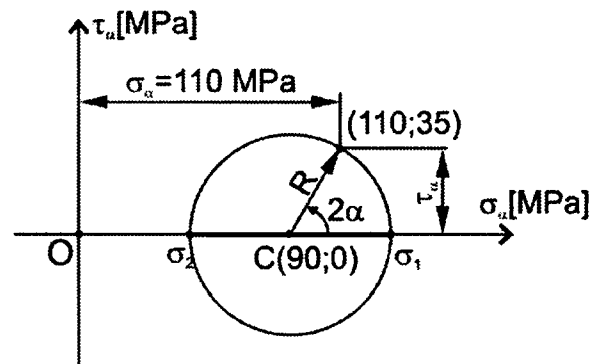
$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{130 - 50}{2} = 40 \text{ MPa}$$

okrąg, otrzymując koło Mohra



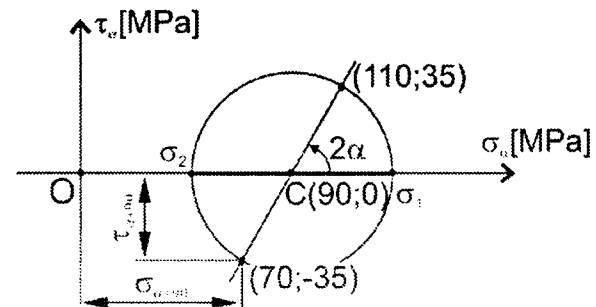
Rys. 1.9

- wartości naprężeń $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ występujące w przekroju określonym kątami α wyznaczają współrzędne końca promienia R obróconego względem osi poziomej układu $\sigma_\alpha \tau_\alpha$ w kierunku dodatnim (trygonometrycznym) o kąt $2\alpha = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$. Współrzędne końca promienia wynoszą $(110; 35)$, czyli $\sigma_\alpha = \overline{OC} + R \cdot \cos 2\alpha = 110$ MPa i $\tau_\alpha = R \cdot \sin 2\alpha = 35$ MPa (rys. 1.10)

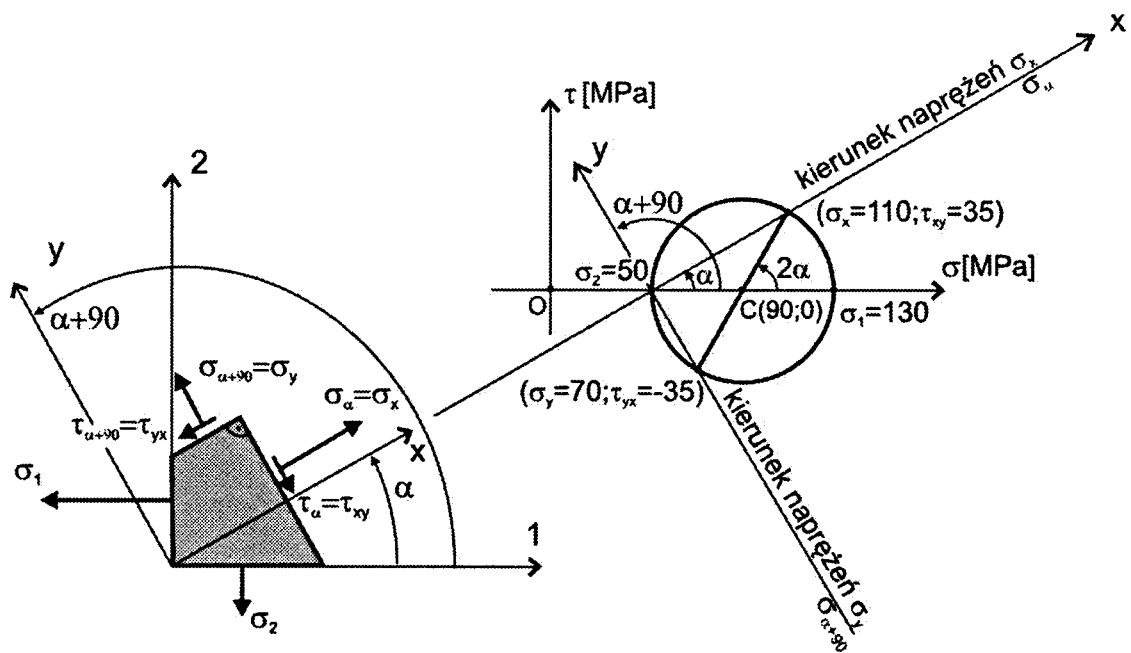


Rys. 1.10

- wartości naprężeń $\sigma_{\alpha+90}$ i $\tau_{\alpha+90}$, występujące w przekroju prostopadłym do przekroju, w którym wyznaczono wcześniej naprężenia σ_α i τ_α , wyznaczmy ze współrzędnych punktu przecięcia okręgu koła Mohra z prostą przechodzącą przez środek koła Mohra $(90; 0)$ i punkt o współrzędnych $(\sigma_\alpha = 110; \tau_\alpha = 35)$. W przedstawianym przykładzie otrzymamy punkt o współrzędnych $(70; -35)$, czyli $\sigma_{\alpha+90} = 70$ MPa i $\tau_{\alpha+90} = -35$ MPa (rys. 1.11)



Rys. 1.11



Rys. 1.12

Otrzymane stany naprężeń można przedstawić w formie graficznej jak na rys. 1.12. Zgodnie z przyjętą zasadą co do znaku naprężeń: dodatnia wartość naprężeń normalnych σ_α oznacza, że materiał jest rozciągany, a dodatnia wartość naprężeń stycznych τ_α oznacza, że naprężenia te próbują obrócić odcięty myślowo fragment elementu względem punktów leżących wewnątrz tej części w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara.

Z geometrycznych zależności (rys. 1.12) wynika, że kierunek prostej przechodzącej przez punkty o współrzędnych $(50;0)$ i $(110;35)$ jest kierunkiem prostopadłym do powierzchni przekroju, w którym określamy stan naprężeń. Tak więc, jeśli po narysowaniu koła Mohra przeprowadzimy przez punkt o współrzędnych $(\sigma_2;0)$ prostą pod wymaganym kątem α , wówczas współrzędne punktu przecięcia prostej z okręgiem koła Mohra dają nam rozwiązanie zadania $\sigma_x = \sigma_\alpha = 110$ MPa, $\tau_{xy} = \tau_\alpha = 35$ MPa)

Ze wzoru na naprężenia styczne τ_α :

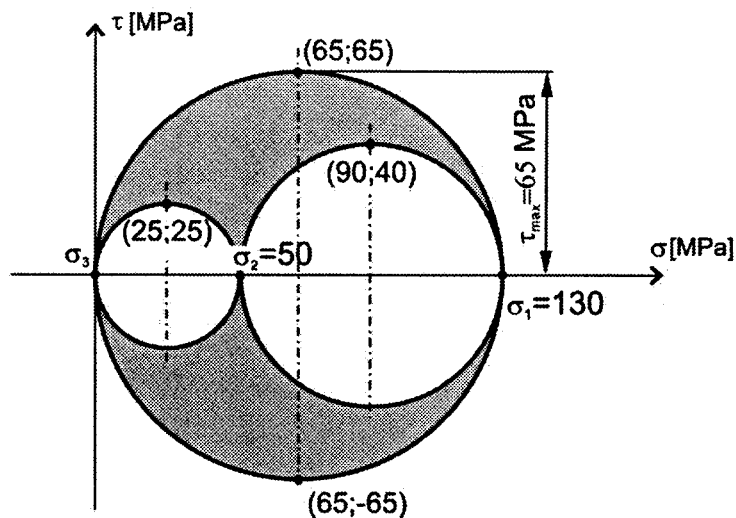
$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha),$$

oraz z koła Mohra (rys. 1.12) widać, że w przekrojach prostopadłych do płaszczyzn wyznaczonych przez osie główne 1, 2 naprężenia styczne τ_α osiągają bezwzględną wartość maksymalną dla kąta $\alpha = \pm 45^\circ$ – wówczas:

$$|\tau|_{\max} = |\tau_{\alpha=\pm 45}| = \left| \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right| = \left| \pm \frac{130 - 50}{2} \right| = |\pm 40| \text{ MPa} = R,$$

τ_{\max} występujące w płaszczyźnie 1-2 co do bezwzględnej wartości równe jest promieniowi R koła Mohra.

W analizowanej kostce możemy rozpatrzyć pozostałe dwie wzajemnie prostopadłe płaszczyzny 1-3 oraz 2-3 i dla każdej z nich zbudować koło Mohra. W efekcie otrzymamy trzy okręgi (rys. 1.13) – koła Mohra dla trójkierunkowego stanu naprężenia.



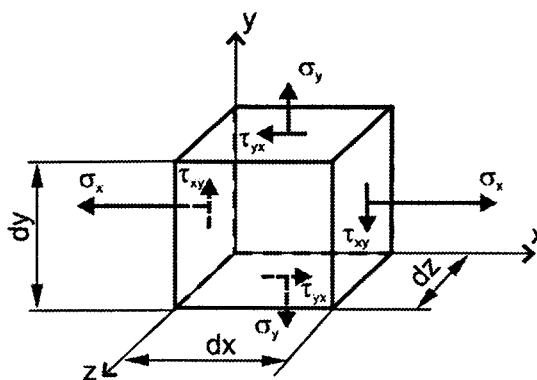
Rys. 1.13

Zacienione pole (rys. 1.13) wraz z liniami brzegowymi je otaczającymi zawiera punkty, których współrzędne odpowiadają stanowi naprężenia we wszystkich możliwych przekrojach analizowanej kostki. I tak na przykład, dla kostki maksymalne bezwzględne naprężenia styczne występują w przekroju prostopadłym do powierzchni 1-3, pod kątem $\alpha = \pm 45^\circ$ do kierunków głównych 1 i 3. Naprężenie τ_{\max} równe jest promieniowi największego koła Mohra i w omawianym przykładzie wynosi $|\pm 65|$ MPa.

Zadanie 1.2. Kostka prostokątna obciążona jest naprężeniami σ_x , τ_{xy} i σ_y , τ_{yx} w sposób widoczny na rys. 1.14:

- w przekroju prostopadłym do osi x :
 $\sigma_x = 120$ MPa, $\tau_{xy} = 30$ MPa, $\tau_{xz} = 0$;
- w przekroju prostopadłym do osi y :
 $\sigma_y = 40$ MPa, $\tau_{yx} = -30$ MPa, $\tau_{yz} = 0$;
- w przekroju prostopadłym do osi z :
 $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = 0$, $\tau_{zy} = 0$.

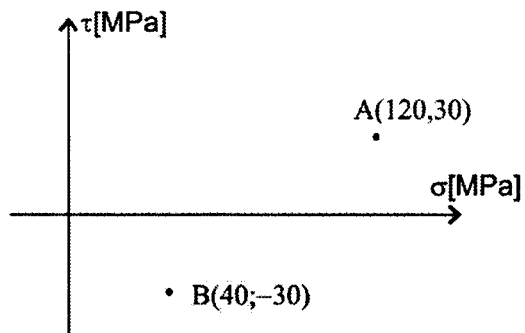
Wyznaczyć wartości naprężeń głównych oraz określić kąt, jaki tworzy oś maksymalnych naprężeń głównych z osią x . Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreslną.



Rys. 1.14

Rozwiązanie. W omawianym przypadku mamy do czynienia z płaskim stanem naprężenia. Ponieważ $\tau_{zx} = 0$ i $\tau_{zy} = 0$, to σ_z jest trzecim naprężeniem głównym. Zagadnienie rozpatrzmy w płaszczyźnie xy , gdzie znajdują się naprężenia główne i ich kierunki. Rozwiązanie rozpoczniemy od metody wykreslniej. Przy sporządzaniu wykresu koła Mohra postępujemy kolejno w następujący sposób:

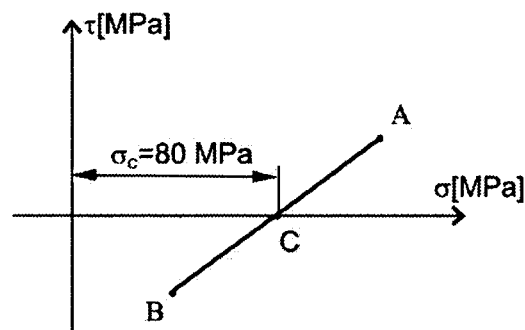
- rysujemy układ współrzędnych:
oś odciętych (pozioma) σ [MPa],
oś rzędnych (pionowa) τ [MPa]
- wyznaczamy w tym układzie punkty
A i B o współrzędnych
odpowiadających stanowi naprężenia
w dwóch prostopadłych przekrojach
analizowanej kostki.
A($\sigma_x = 120$ MPa; $\tau_{xy} = 30$ MPa)
B($\sigma_y = 40$ MPa; $\tau_{yx} = -30$ MPa)



Rys. 1.15

- odcinek \overline{AB} jest średnicą koła Mohra, a punkt C jest jego środkiem, którego współrzędna na osi odciętych wynosi:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{120 + 40}{2} = 80 \text{ MPa}$$

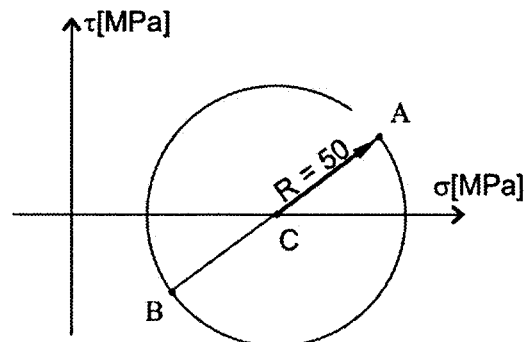


Rys. 1.16

- odcinek \overline{CA} jest promieniem R koła Mohra, którego długość możemy znaleźć z twierdzenia Pitagorasa:

$$R^2 = \tau_{xy}^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 = (50 \text{ MPa})^2,$$

- ze środka C koła rysujemy promieniem $R = 50$ MPa okrąg – jest to szukane koło Mohra



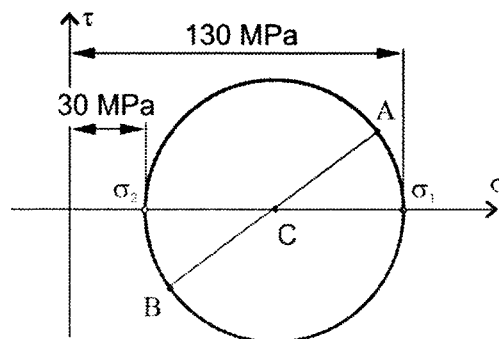
Rys. 1.17

- punkty przecięcia osi σ przez okrąg koła Mohra wyznaczają naprężenia główne, bo naprężenia styczne w tych punktach są równe zero ($\tau = 0$). Naprężenia normalne osiągają wartości ekstremalne. W omawianym przypadku są to:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 130 \text{ MPa},$$

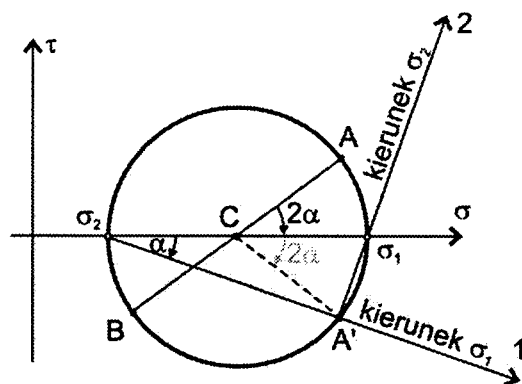
$$\sigma_2 = 30 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_3 = 0.$$



Rys. 1.18

- na kole Mohra promień $\overline{C\sigma_1}$ w stosunku do promienia \overline{CA} odchylony jest o kąt 2α o zwrocie zgodnym z ruchem wskazówek zegara, więc w rzeczywistości oś 1 odchylona jest od osi x w tym samym kierunku o kąt dwa razy mniejszy – o kąt α . Kąt α jest kątem wpisanym opartym na tym samym łuku co kąt środkowy 2α .



Rys. 1.19

Równania analityczne pozwalające określić wartości ekstremalnych naprężeń normalnych, czyli naprężenia główne σ_1 i σ_2 , wynikają z podanych niżej zależności geometrycznych, które z kolei wynikają z rys. 1.16 do 1.18.

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_C + R; \\ \sigma_2 &= \sigma_C - R.\end{aligned}$$

Wykorzystując wzory na R i σ_C , otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.\end{aligned}$$

Korzystając z powyższych wzorów, wyznaczamy w sposób analityczny wartości naprężeń głównych:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{120 + 40}{2} + \sqrt{\left(\frac{120 - 40}{2}\right)^2 + 30^2} = 80 + 50 = 130 \text{ MPa}, \\ \sigma_2 &= \frac{120 + 40}{2} - \sqrt{\left(\frac{120 - 40}{2}\right)^2 + 30^2} = 80 - 50 = 30 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

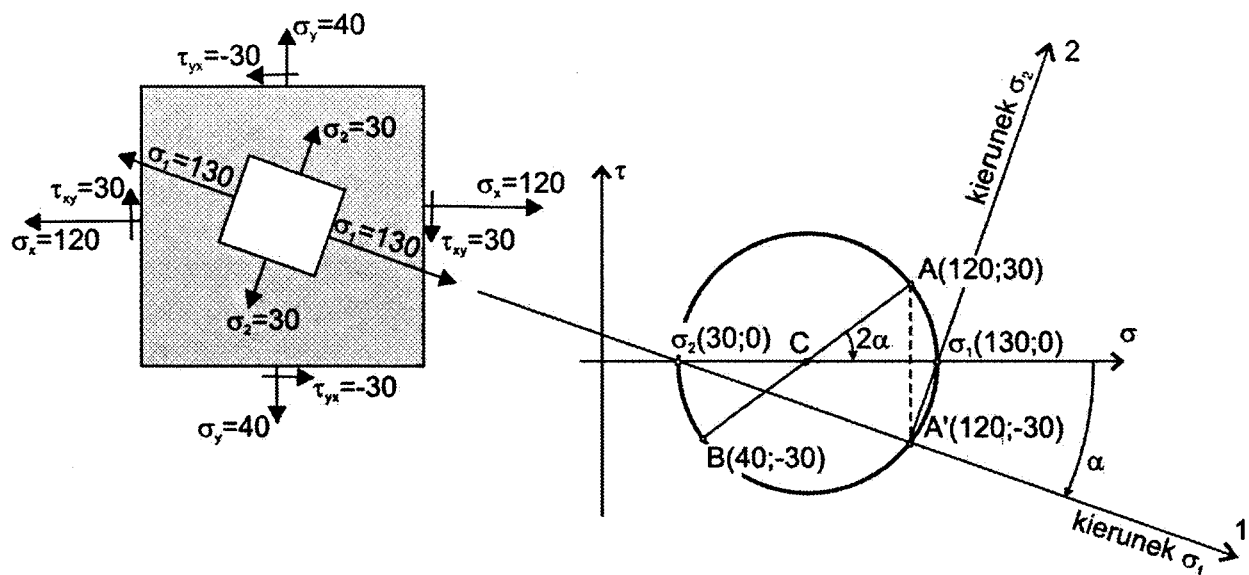
Kąt α pomiędzy kierunkiem naprężeń σ_x a kierunkiem maksymalnych naprężeń głównych σ_1 wyznaczamy ze wzoru

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y},$$

który wynika z zależności trygonometrycznych (rys. 1.19).

Podstawiając dane z przykładu, kąt α wynosi:

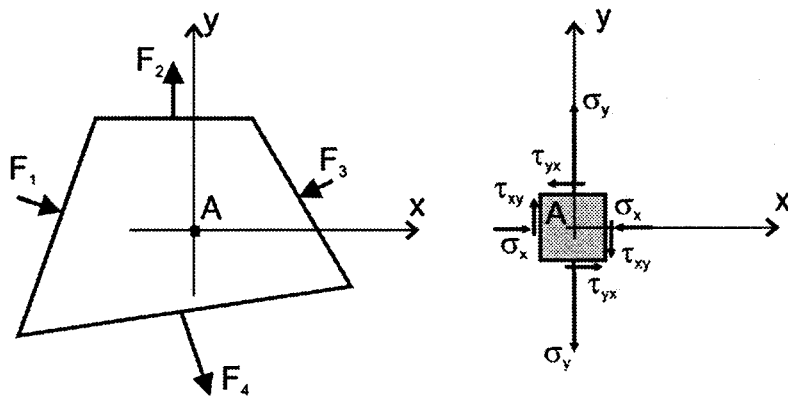
$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cdot 30}{120 - 40}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2} 36,87 = 18,43^\circ$$



Rys. 1.20

Oznacza to, że oś naprężeń głównych 1 obrócona jest względem osi x o kąt $\alpha = 18.43^\circ$ w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Otrzymane rozwiązanie przedstawić można w formie graficznej jak pokazano na rys. 1.20.

Zadanie 1.3. Płaska tarcza znajduje się w dwukierunkowym stanie naprężenia (rys. 1.21). W punkcie A w kierunkach x i y występują naprężenia normalne i styczne o następujących wartościach: $\sigma_x = -10$ MPa, $\tau_{xy} = 30$ MPa, $\sigma_y = 70$ MPa, $\tau_{yx} = -30$ MPa. Znaleźć naprężenia główne oraz określić kąt, jaki tworzy oś maksymalnych naprężeń głównych z osią x . Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślną.



Rys. 1.21

R o z w i ą z a n i e . Korzystając z równań analitycznych, obliczono wartości naprężeń głównych:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-10 + 70}{2} + \sqrt{\left(\frac{-10 - 70}{2}\right)^2 + 30^2} = 30 + 50 = 80 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-10 + 70}{2} - \sqrt{\left(\frac{-10 - 70}{2}\right)^2 + 30^2} = 30 - 50 = -20 \text{ MPa.}$$

Dla danych z rozwiązywanego zadania ($\sigma_y > \sigma_x$) korzystając ze wzoru

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

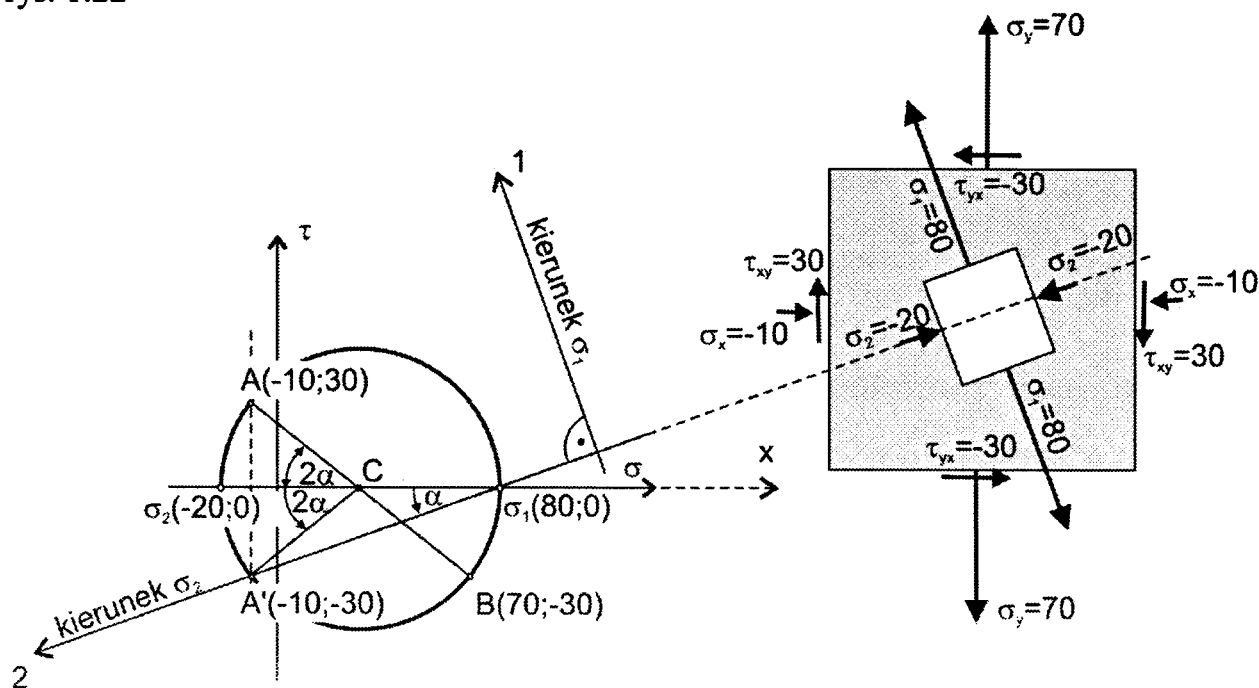
ze względu na właściwości funkcji tangens nie wyznaczmy kąta α pomiędzy kierunkiem naprężeń σ_x a kierunkiem maksymalnych naprężeń głównych σ_1 . Aby prawidłowo wyznaczyć kierunki naprężeń głównych możemy postąpić dwojako:

- zamienić osie t.j. założyć, że naprężenia o wartości 70 MPa działają w kierunku osi x a o wartości -10 MPa w kierunku osi y i dalej zadanie rozwiązać analogicznie jak zadanie 1.2;
- pozostać przy istniejących oznaczeniach wyznaczając w tym przypadku kierunek naprężeń σ_2 .

Dla niezmiennych oznaczeń kąt α wynosi:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \cdot 30}{-10 - 70} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{3}{-4} \right) = \frac{1}{2} (-36,87^\circ) = -18,43^\circ$$

i jest kątem zawartym pomiędzy kierunkiem naprężeń σ_x a kierunkiem naprężeń głównych σ_2 . Otrzymany kąt α ma wartość ujemną, więc powinien być odmierzony od osi x w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (rys. 1.22). W ten sposób otrzymane rozwiązanie można również przedstawić w formie graficznej jak pokazano na rys. 1.22

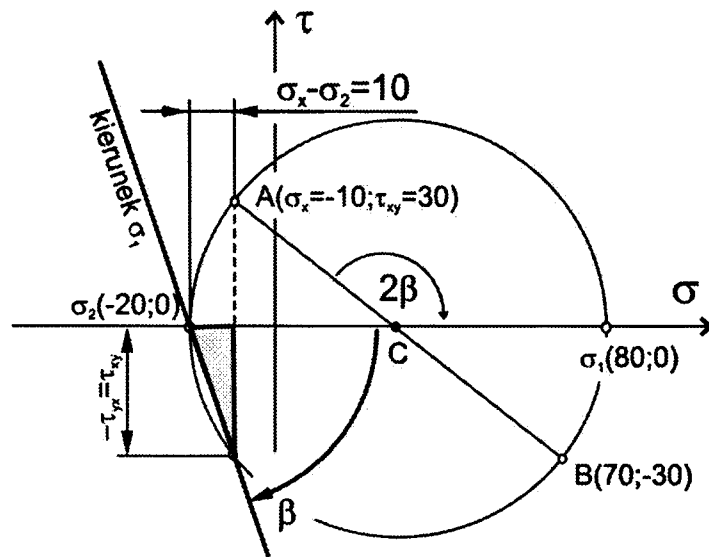


Rys. 1.22

Kierunek naprężeń głównych σ_1 można również wyznaczać, po wcześniejszym obliczeniu wartości σ_2 , z następującego wzoru:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2} \rightarrow \beta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2} \right),$$

który można wyprowadzić korzystając z trójkąta prostokątnego zaznaczonego na rysunku 1.23. Powyższego równania można używać nie zwracając uwagi na to, które z naprężeń normalnych σ_x czy σ_y jest większe i odmierzać zawsze wyznaczony kąt β od osi x zakładając jako dodatni, kierunek zgodny z ruchem wskazówek zegara.



Rys. 1.23

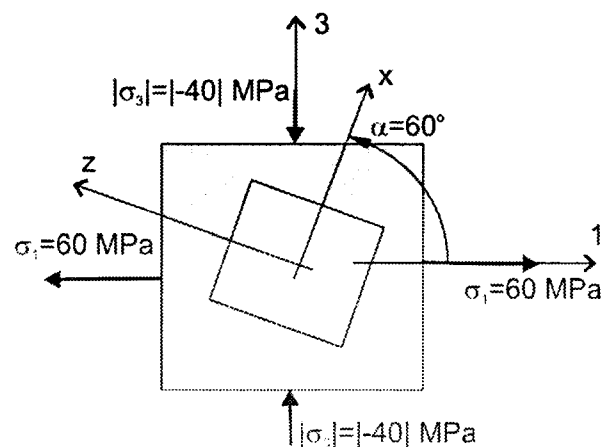
Wykorzystując zaproponowane równanie w analizowanym przykładzie, otrzymano:

$$\beta = \arctg\left(\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_2}\right) = \arctg\left(\frac{30}{-10 - (-20)}\right) = \arctg(3) = 71,57^\circ.$$

Jednakże dla celów praktycznych najprostszym rozwiązaniem jest analityczne wyznaczenie wartości naprężeń głównych oraz wartości kąta α , natomiast kierunek naprężeń głównych na podstawie szkicu koła Mohra.

1.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.4. Płaska tarcza (rys. 1.24) znajduje się w dwukierunkowym stanie naprężeń. Główne naprężenia wynoszą: $\sigma_1 = 60$ MPa; $\sigma_2 = 0$ i $\sigma_3 = -40$ MPa. Określić naprężenia występujące w przekrojach prostopadłych do płaszczyzny tarczy tworzących z osią 1 tarczy kąt $\alpha = 60^\circ$ oraz kąt $\alpha + 90^\circ = 150^\circ$. Znaleźć również maksymalne naprężenia styczne. Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślić.

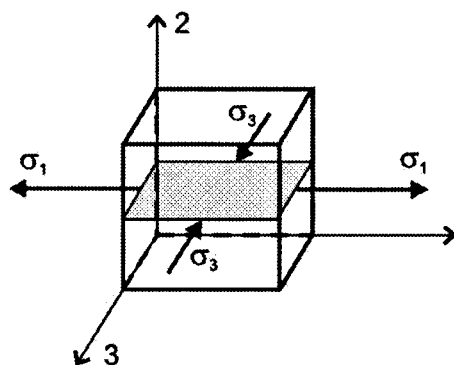


Rys. 1.24

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_\alpha = -15 \text{ MPa}; \tau_\alpha = \tau_{xy} = 43 \text{ MPa}; \sigma_{\alpha+90} = 35 \text{ MPa}; \tau_{\alpha+90} = -43 \text{ MPa}; \tau_{\max} = |\pm 50| \text{ MPa}.$$

Zadanie 1.5. Kostka sześcienna obciążona jest w sposób widoczny na rys. 1.25: $\sigma_1 = 80 \text{ MPa}$; $\sigma_2 = 0$ i $\sigma_3 = -40 \text{ MPa}$. Znaleźć stan naprężenia występujący w przekrojach określonych kątami: $\alpha = 30^\circ$, $\alpha + 90^\circ = 120^\circ$. Obliczyć wartości maksymalnych naprężeń stycznych i określić przekroje, w których one występują.

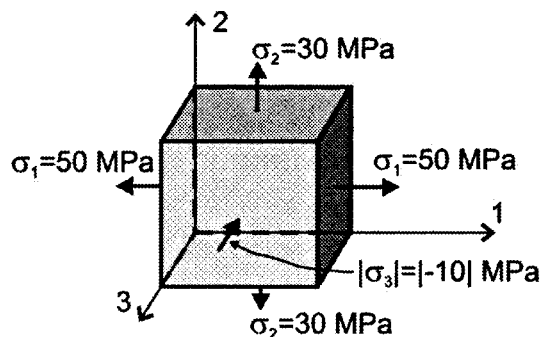


Rys. 1.25

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_\alpha = 50 \text{ MPa}; \tau_\alpha = 52 \text{ MPa}; \sigma_{\alpha+90} = -10 \text{ MPa}; \tau_{\alpha+90} = -52 \text{ MPa}; \tau_{\max} = |\pm 60| \text{ MPa}.$$

Zadanie 1.6. Dla sześcienniej kostki obciążonej jak na rysunku 1.26 wykreślić koło Mohra wyznaczając maksymalne naprężenia styczne τ_{\max} , jednocześnie wskazując przekroje, w których one występują.



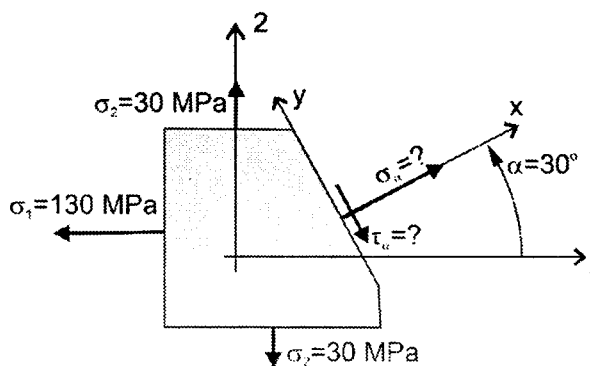
Rys. 1.26

Podpowiedź. Wykreślić należy trzy okręgi; maksymalne naprężenia znajdują się w przekrojach prostopadłych do płaszczyzny 1-3, tworząc z płaszczyzną 1-2 kąty $\pm 45^\circ$.

ODPOWIEDŹ:

$$\tau_{\max} = |\pm 30| \text{ MPa}.$$

Zadanie 1.7. Płaska tarcza (rys. 1.27) znajduje się w dwukierunkowym stanie naprężenia. Główne naprężenia wynoszą: $\sigma_1 = 130 \text{ MPa}$; $\sigma_2 = 30 \text{ MPa}$ i $\sigma_3 = 0$. Określić naprężenia występujące w przekrojach prostopadłych do płaszczyzny tarczy tworzących z osią 1 tarczy kąt $\alpha = 30^\circ$. Znaleźć również maksymalne naprężenia styczne występujące w przekrojach prostopadłych do płaszczyzn 1-2, 1-3 oraz 2-3. Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślić.



Rys. 1.27

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_\alpha = \sigma_x = 105 \text{ MPa}; \quad \tau_\alpha = \tau_{xy} = 43 \text{ MPa}; \quad \tau_{\max 1-2} = |\pm 50| \text{ MPa}; \quad \tau_{\max 1-3} = |\pm 65| \text{ MPa}; \\ \tau_{\max 2-3} = |\pm 15| \text{ MPa}.$$

Zadanie 1.8. Wyznaczyć naprężenia główne oraz ich kierunki wiedząc, że naprężenia w danym przekroju i przekroju prostopadłym tarczy będącej w płaskim stanie naprężenia wynoszą: $\sigma_x = 80 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 20 \text{ MPa}$, $\tau_{yx} = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$. Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślną.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = 100 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = 0; \quad \alpha = -27^\circ.$$

Zadanie 1.9. Płaska tarcza znajduje się w dwukierunkowym stanie naprężenia. W punkcie A występują naprężenia normalne i styczne o następujących wartościach: $\sigma_x = -50 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -40 \text{ MPa}$, $\sigma_y = 10 \text{ MPa}$, $\tau_{yx} = 40 \text{ MPa}$. Znaleźć naprężenia główne oraz określić kąt, jaki tworzy oś maksymalnych naprężeń głównych z osią x . Zadanie rozwiązać metodą analityczną i wykreślną.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_1 = 30 \text{ MPa}; \quad \sigma_2 = -70 \text{ MPa}; \quad \alpha = -53^\circ.$$

2. WYTRZYMAŁOŚĆ ZŁOŻONA

2.1. Wprowadzenie

Podstawową próbą wytrzymałościową przeprowadzaną w laboratoriach wytrzymałości materiałów dla większości materiałów, a zwłaszcza stali, jest statyczna próba rozciągania. Z wykresu rozciągania otrzymywanego podczas tej próby odczytuje się właściwości wytrzymałościowe materiału próbki takie, jak: wytrzymałość na rozciąganie R_m oraz granicę plastyczności σ_{pl} . W zależności od materiału oraz otrzymanego wykresu rozciągania można wyznaczyć wyraźną granicę plastyczności R_e albo umowną granicę plastyczności $R_{0.2}$. Znając rzeczywiste naprężenie maksymalne w pręcie rozciągany σ_r , można ocenić wyężenie materiału pręta. W elementach nośnych konstrukcji nie dopuszcza się odkształceń plastycznych, dlatego też najczęściej określa się wyężenie materiału w odniesieniu do granicy plastyczności σ_{pl} . Wyężenie materiału w prętach rozciąganych wyrażone w procentach można opisać wzorem:

$$W = \frac{\sigma_r}{\sigma_{pl}} \cdot 100 \quad \% \quad (2.1)$$

Jeżeli $\sigma_r = 0$, to $W = 0$ i wtedy materiał jest niewyężony, gdy $\sigma_r = \sigma_{pl}$ wyężenie pręta rozciąganego $W = 100\%$, co odpowiada uplastycznieniu pręta.

Stosunkowo łatwo określić (wyznaczyć) wyężenie elementów prętowych (słupów, belek, wałów) poddanych obciążeniom prostym, tzn. rozciąganiu osiowemu, czystemu zginaniu, skręcaniu lub czystemu ścinaniu. Niestety, w elementach nośnych konstrukcji występuje bardzo często złożony stan obciążania, który wywołuje złożony stan naprężenia. Doświadczalna weryfikacja wyężenia elementów konstrukcji poddanych obciążeniom złożonym byłaby bardzo kosztowna, pracochłonna, a często wręcz niemożliwa do zrealizowania. W związku z tym od dawna próbowano formułować teoretyczne hipotezy wytrzymałościowe, dzięki którym można ocenić wyężenie elementów konstrukcji poddanych obciążeniom złożonym. Obecnie dla elementów konstrukcji wykonanych z materiałów izotropowych w praktyce inżynierskiej stosowane są dwie hipotezy wytrzymałościowe:

- hipoteza energii odkształcenia postaciowego sformułowana najpierw przez Hubera, a później przez Misesa i Hencky'ego
- hipoteza maksymalnych naprężeń stycznych znana jako hipoteza Tresca, de Saint Venanta.

Badania doświadczalne wykazały, że zdecydowanie precyzyjniejszą jest hipoteza Hubera, według której o wyężeniu materiału decyduje wartość energii odkształcenia postaciowego. Hipoteza największych naprężeń stycznych jest mniej dokładna od hipotezy Hubera, lecz jest stosowana ze względu na jej prostotę i nieco bezpieczniejsze

(ale mniej ekonomiczne) projektowanie konstrukcji. W szczególnych przypadkach, to znaczy, gdy: $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ oraz gdy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \pm p$, wyniki uzyskane z obu hipotez są identyczne. W oparciu o hipotezy wytrzymałościowe wyprowadzono wzory na naprężenia zredukowane σ_{red} . Chodzi o taką redukcję złożonego stanu naprężenia do jednokierunkowego rozciągania, aby wyężenie materiału przy złożonym stanie naprężenia było takie samo jak wyężenie pręta rozciąganego, w którym naprężenia równe są naprężeniom zredukowanym.

Naprężenie zredukowane σ_{red} jest to taka umowna skalarna wielkość, która zależy od dowolnego trójkierunkowego stanu naprężenia w analizowanym punkcie ciała i wynika z przyjętej hipotezy wytrzymałościowej.

Wyężenie materiału poddanego złożonemu stanowi naprężenia w punkcie, w którym wyznaczono σ_{red} , w odniesieniu do granicy plastyczności σ_{pl} przy rozciąganiu, określone jest wzorem:

$$W = \frac{\sigma_{red}}{\sigma_{pl}} \cdot 100 \quad \% \quad (2.2)$$

Jeżeli w jakimś punkcie materiału izotropowego znane są naprężenia główne σ_1 , σ_2 i σ_3 , uporządkowane następująco $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, to naprężenia zredukowane odpowiadające takiemu złożonemu stanowi naprężenia oblicza się ze wzorów:

- według hipotezy Hubera:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \quad (2.3)$$

- według hipotezy τ_{max} :

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{max} - \sigma_{min} \quad (2.4)$$

W przypadku, gdy dane są naprężenia: σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} i τ_{zx} – wzór na naprężenia zredukowane wg hipotezy Hubera przyjmuje postać:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]} \quad (2.5)$$

Dla płaskiego stanu naprężenia, gdy naprężenia główne $\sigma_3 = 0$ lub naprężenia $\sigma_z = 0$ oraz $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, wzory na naprężenia zredukowane wg hipotezy Hubera upraszczają się do postaci:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} \quad (2.6)$$

lub

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \quad (2.7)$$

W przypadku zginania ze skręcaniem, gdy: $\sigma_x = \sigma_g$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = -\tau_{zy} = 0$, $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau_s^2$ naprężenia zredukowane określone są wzorami:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_g^2 + 3\tau_s^2} \quad - \text{według hipotezy Hubera,}$$

$$\sigma_{red.} = \sqrt{\sigma_g^2 + 4\tau_s^2} \quad \text{– według hipotezy } \tau_{max}.$$

Dla czystego ścinania (lub skręcania) naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera wynosi:

$$\sigma_{red.} = \sqrt{3}\tau. \quad (2.8)$$

Warunek bezpiecznego projektowania metodą naprężeń dopuszczalnych, elementów poddanych złożonemu stanowi naprężenia (obciążenia) jest następujący:

$$\sigma_{red.max} \leq k_r. \quad (2.9)$$

Z ostatnich dwóch wzorów wynika, że:

$$\sigma_{red.max} \leq \sqrt{3}k_t, \quad \sqrt{3}k_t = k_r, \quad (2.10)$$

stąd wartość naprężenia dopuszczalnego na ścinanie $k_t \approx 0,58 k_r$.

Dla trójkierunkowego równomiernego rozciągania lub ściskania, tzn. gdy $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \pm p$, naprężenie zredukowane obliczone zarówno z hipotezy Hubera jak i z hipotezy maksymalnych naprężeń stycznych jest równe zero, co oznacza, że materiał przy takim obciążeniu nie jest wyężony ($\sigma_{red} = 0$, $W = 0$).

Dla jednoczesnego rozciągania (ściskania), zginania i skręcania naprężenie zredukowane według hipotezy Hubera oblicza się ze wzoru:

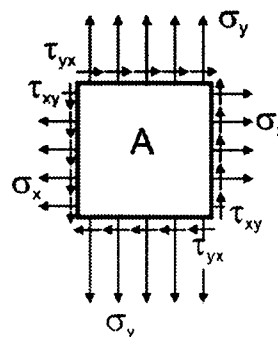
$$\sigma_{red.} = \sqrt{(\sigma_r + \sigma_g)^2 + 3\tau_s^2}. \quad (2.11)$$

Przy projektowaniu konstrukcji poddanych złożonemu stanowi obciążenia ze względu na wytrzymałość, najważniejsze wielkości to: $\sigma_{red.max}$ oraz k_r .

2.2. Przykłady obliczeniowe elementów konstrukcji w złożonym stanie obciążenia

Zadanie 2.1. W punkcie A sprężystej płaskiej tarczy występują naprężenia: $\sigma_x = 80$ MPa, $\tau_{xy} = -40$ MPa, $\sigma_y = 140$ MPa (rys. 2.1).

Pozostałe składowe stanu naprężenia: $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ i $\sigma_z = 0$. Określić wyężenie materiału w tym punkcie według hipotezy Hubera i hipotezy τ_{max} .



Rys. 2.1

R o z w i ą z a n i e . Ze wzoru na naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera dla płaskiego stanu naprężenia otrzymano:

$$\sigma_{red.} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{80^2 + 140^2 - 80 \cdot 140 + 3(-40)^2} = 140 \text{ MPa.}$$

Naprężenia główne σ_1 i σ_2 występujące w punkcie A zostaną wyznaczone z analizy płaskiego stanu naprężenia:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{80 + 140}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80 - 140}{2}\right)^2 + 30^2} = 110 \pm 50,$$

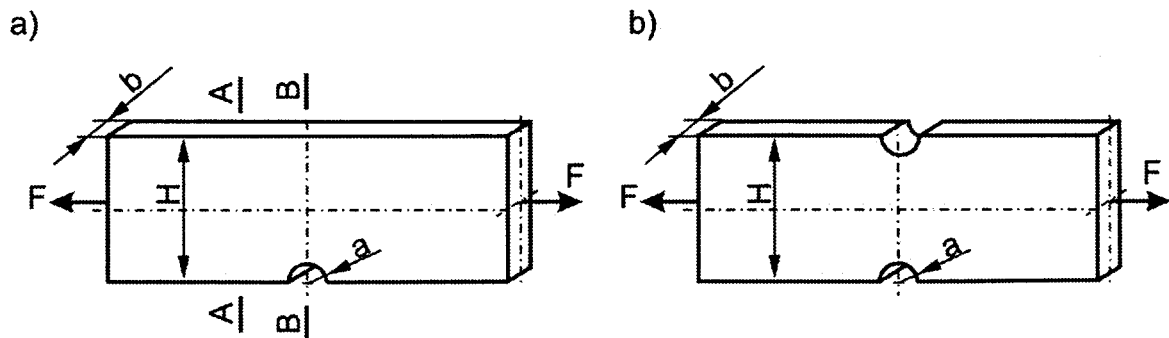
$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = 160 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 60 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \sigma_{\min} = 0.$$

Ze wzoru na naprężenia zredukowane według hipotezy maksymalnych naprężeń tnących:

$$\sigma_{\text{red.}} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min} = 160 - 0 = 160 \text{ MPa}.$$

W rozpatrywanym przypadku naprężenie zredukowane otrzymane z hipotezy τ_{\max} jest około 14% większe od naprężenia zredukowanego obliczonego według hipotezy Hubera. A zatem wyężenie materiału według hipotezy τ_{\max} jest o 14% większe niż według hipotezy Hubera.

Zadanie 2.2. Płaskownik o szerokości $H = 110 \text{ mm}$, grubości $b = 20 \text{ mm}$ z jednostronnym wycięciem o głębokości $a = 10 \text{ mm}$ (rys. 2.2a) jest rozciągany siłą osiową $F = 200 \text{ kN}$. Obliczyć maksymalne naprężenie w tym płaskowniku. Sprawdzić, jakie naprężenia działałyby w płaskowniku z dwoma symetrycznymi wycięciami (rys. 2.2b). Pomiąć zjawisko spiętrzenia naprężeń w miejscu karbu.



Rys. 2.2

R o z w i ą z a n i e . W przekroju poprzecznym A-A płaskownika o szerokości H i grubości b występuje osiowe równomierne rozciąganie (rys. 2.3a).

$$\sigma_A = \frac{N}{A_A} = \frac{F}{b \cdot H} = \frac{200 \cdot 10^3}{20 \cdot 110} = 91 \text{ MPa}.$$

Pole powierzchni przekroju B-B (rys. 2.3b) wynosi:

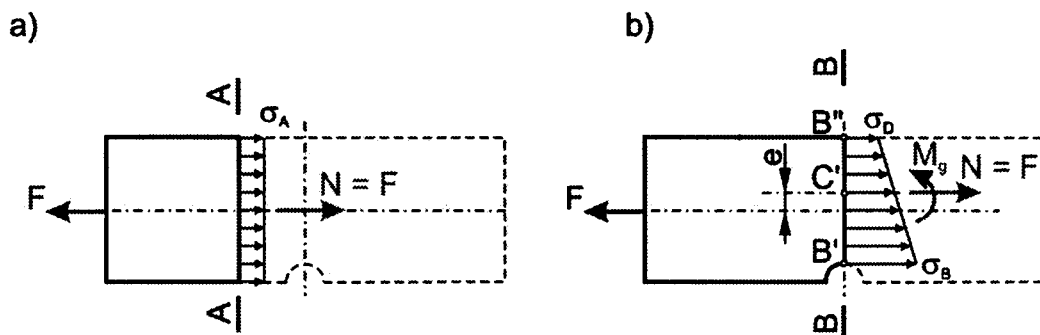
$$A_B = (H - a) \cdot b = (110 - 10) \cdot 20 = 2000 \text{ mm}^2$$

Środek ciężkości C' tego przekroju przesunął się ku górze o mimośród $e = 5 \text{ mm}$ (rys. 2.3b).

W przekroju B-B siła normalna $N = F = 200000$ N przyłożona jest w jego środku ciężkości C' . W przekroju tym na skutek zaistnienia mimośrodowo pojawił się dodatni moment gnący:

$$M_g = F \cdot e = 200000 \cdot 5 = 10^6 \text{ Nmm} = 1000 \text{ Nm},$$

powodujący rozciąganie wzdłużnych włókien dolnych i ścisnienie górnych.



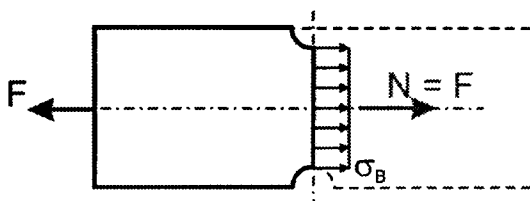
Rys. 2.3

Maksymalne naprężenia pochodzące od rozciągania siłą N i zginania momentem gnącym M_g występują w dolnych włóknach obciążonego fragmentu płaskownika (przekrój B-B na rys. 2.3b). Ponieważ naprężenia od siły N i momentu gnącego M_g występujące w punkcie B' są naprężeniami normalnymi o tym samym zwrocie, dodano je algebraicznie i są to maksymalne naprężenia zredukowane. Wskaźnik wytrzymałości na zginanie przekroju poprzecznego B-B wynosi:

$$W = \frac{bh^2}{6} = \frac{20 \cdot 100^2}{6} = \frac{1}{3} \cdot 10^5 \text{ mm}^3.$$

Maksymalne naprężenie w punkcie B':

$$\sigma_{max} = \sigma_B' = \frac{N}{A_B} + \frac{M_g}{W} = \frac{200000}{2000} + \frac{3 \cdot 10^6}{10^5} = 100 + 30 = 130 \text{ MPa}.$$



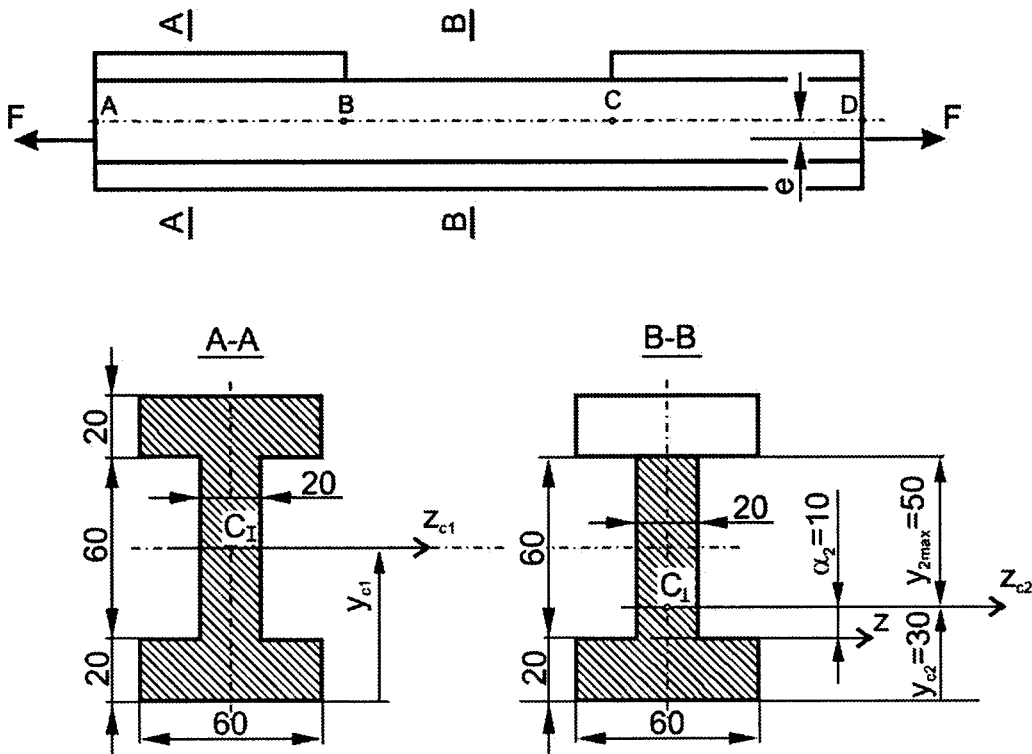
Rys. 2.4

Gdy istnieją dwa symetryczne wcięcia (rys. 2.4), wówczas w tak osłabionym przekroju płaskownika panuje tylko osiowe rozciąganie i wtedy:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{b(H-2a)} = \frac{200 \cdot 10^3}{20(110-2 \cdot 10)} = \frac{200 \cdot 10^3}{1800} = 111 \text{ MPa}.$$

Okazuje się, że dla dwóch symetrycznych wcięć o podanych wymiarach naprężenia są mniejsze niż przy jednym wycięciu.

Zadanie 2.3. Kształtownik stalowy ABCD (rys. 2.5) na odcinkach AB i CD jest dwuteownikiem, natomiast w przedziale BC pozbawiony został górnego pasa i jest teownikiem. Grubość ścianek kształtowników wynosi $t = 0,02$ m, a szerokość pasów i średnica wynosi $b = 0,06$ m. Naprężenia dopuszczalne materiału na rozciąganie $k_r = 100$ MPa. Na kształtownik działają dwie równe i przeciwnie skierowane siły rozciągające F , leżące w pionowej płaszczyźnie symetrii przekrojów poprzecznych. Wyznaczyć, w jakiej odległości e (rys. 2.5) od środka ciężkości przekroju dwuteownika i o jakiej wartości należy przyłożyć siły F , aby maksymalne naprężenia w dwuteowniku i teowniku jednocześnie osiągnęły naprężenia równe naprężeniom dopuszczalnym.



Rys. 2.5

R o z w i ą z a n i e . Charakterystyki przekrojów poprzecznych są następujące:

- dwuteownika:

$$A_1 = 3 \cdot 60 \cdot 20 = 3600 \text{ mm}^2,$$

$$I_{z_{c1}} = \frac{60 \cdot 100^3}{12} - \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 4,28 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$y_{c1} = 50 \text{ mm},$$

$$W_1 = \frac{I_{z_{c1}}}{y_{c1}} = 8,56 \cdot 10^4 \text{ mm}^3,$$

- teownika:

$$A_2 = 2 \cdot 60 \cdot 20 = 2400 \text{ mm}^2,$$

$$I_z = \frac{60 \cdot 20^3}{3} + \frac{20 \cdot 60^3}{3} = 1,6 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$y_{c2} = 30 \text{ mm},$$

$$\alpha_2 = 10 \text{ mm},$$

$$I_{zc2} = I_z - A_2 \cdot \alpha_2^2 = 1,6 \cdot 10^6 - 2400 \cdot 10^2 = 1,36 \cdot 10^6 \text{ mm}^4,$$

$$y_{2\max} = 50 \text{ mm},$$

$$W_2 = \frac{I_{zc2}}{y_{2\max}} = \frac{1,36 \cdot 10^6}{50} = 2,72 \cdot 10^4 \text{ mm}^3.$$

Siła przyłożona w odległości e poniżej środka ciężkości dwuteownika daje siłę normalną $N_1 = F$ i moment gnący $M_{g1} = F \cdot e$. Maksymalne naprężenie od rozciągania i zginania w dolnych włóknach dwuteownika wynosi:

$$\sigma_{1\max} = \frac{F}{A_1} + \frac{F \cdot e}{W_1} = F \left(\frac{1}{A_1} + \frac{e}{W_1} \right).$$

W przekroju teowym siła F wywołuje siłę normalną $N_2 = F$ oraz moment gnący:

$$M_{g2} = -F(y_{c1} - y_{c2} - e).$$

Maksymalne naprężenia od rozciągania i zginania w górnych włóknach teownika wynoszą:

$$\sigma_{2\max} = \frac{F}{A_2} - \frac{M_{g2}}{W_2} = \frac{F}{A_2} + \frac{F \cdot (y_{c1} - y_{c2} - e)}{W_2} = F \left(\frac{1}{A_2} + \frac{y_{c1} - y_{c2}}{W_2} - \frac{e}{W_2} \right).$$

Naprężenia $\sigma_{1\max}$ i $\sigma_{2\max}$ są rozciągające (dodatnie). Z warunku, że maksymalne naprężenia $\sigma_{\max} = k_r$ w obu kształtownikach mają być równe, tzn. $\sigma_{1\max} = \sigma_{2\max}$, wynika zależność:

$$\frac{1}{A_2} + \frac{y_{c1} - y_{c2}}{W_2} - \frac{e}{W_2} = \frac{1}{A_1} + \frac{e}{W_1},$$

z której wyznaczono odległość e punktu przyłożenia siły F mierzoną od środka ciężkości przekroju dwuteowego:

$$e = \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} + \frac{y_{c1} - y_{c2}}{W_2} \right) \frac{W_1 \cdot W_2}{W_1 + W_2}.$$

$$e = \left(\frac{1}{2400} - \frac{1}{3600} + \frac{50 - 30}{27200} \right) \frac{85600 \cdot 27200}{85600 + 27200} = 18 \text{ mm}.$$

Z przyrównania maksymalnego naprężenia $\sigma_{1\max}$ (lub $\sigma_{2\max}$) do naprężenia dopuszczalnego $k_r = 100 \text{ MPa}$ wyznaczono siłę F_{\max} :

$$k_r = \sigma_{1\max} = F_{\max} \left(\frac{1}{A_1} + \frac{e}{W_1} \right),$$

$$F_{\max} = \frac{k_r}{\frac{1}{A_1} + \frac{e}{W_1}} = \frac{W_1 \cdot A_1 \cdot k_r}{W_1 + A_1 \cdot e},$$

$$F_{\max} = \frac{85600 \cdot 3600 \cdot 100}{85600 + 3600 \cdot 18} = 204894 \text{ N} \approx 205 \text{ kN}.$$

Gdyby dwuteownik nie był osłabiony wycięciem górnego pasa, wówczas mógłby przenieść siłę rozciągającą:

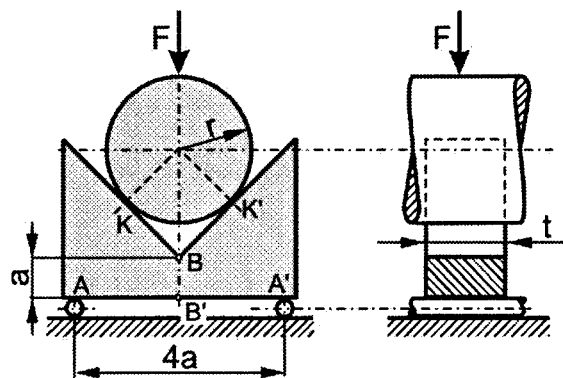
$$F_{\max} = A_1 \cdot k_r = 3600 \cdot 100 = 360000 \text{ N} = 360 \text{ kN}$$

przyłożoną w środku ciężkości przekroju poprzecznego.

Wycięcie górnego pasa osłabiło kształtownik o ponad 40%. Należy zwrócić uwagę, że jest to przypadek optymalny, gdy siła F jest przyłożona w odległości $e = 18 \text{ mm}$ w dół od środka ciężkości przekroju poprzecznego dwuteownika.

Zadanie 2.4. Płaski symetryczny element konstrukcji o grubości t ma pryzmatyczne wycięcie o kącie $\text{KBK}' = \pi/2$ (rys. 2.6).

Element podparty jest na dwóch podporach przegubowych o rozstawie $l = 4a$ i obciążony pionową siłą F poprzez walcowy krążek o promieniu $r = \sqrt{2}a$. Wysokość elementu na osi symetrii $\overline{BB'} = a$. Powierzchnie stykających się ciał są gładkie. Określić stan naprężenia w najbardziej wyciążonym przekroju poprzecznym.



Rys. 2.6

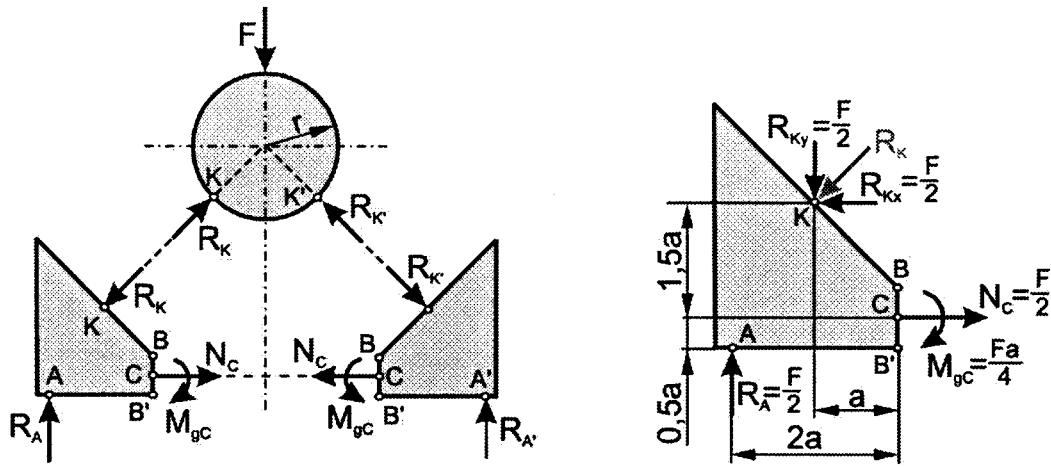
R o z w i ą z a n i e . Na rys. 2.7 pokazano reakcje oraz siły wewnętrzne działające na krążek i połowę elementu konstrukcyjnego.

Z równań statyki otrzymano:

$$R_A = \frac{F}{2}, \quad R_K = \frac{\sqrt{2}}{2} F, \quad R_{Kx} = R_{Ky} = \frac{F}{2},$$

$$N_C = \frac{F}{2}, \quad T_C = 0, \quad M_{gC} = \frac{Fa}{4}.$$

Prostokątny przekrój B-B' o wymiarach $a \times t$ obciążony jest siłą normalną N_C i momentem gnącym M_{gC} .



Rys. 2.7

Charakterystyki geometryczne rozpatrywanego przekroju to:

- pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$A = a \cdot t;$$

- moment bezwładności względem osi centralnej

$$I_{zc} = \frac{1}{12} a^3 t;$$

- wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_{zc} = \frac{1}{6} a^2 t.$$

Naprężenia w górnych punktach tego przekroju wynoszą:

- od rozciągania:

$$\sigma_N = \frac{N_C}{A} = \frac{F}{2at},$$

- od zginania:

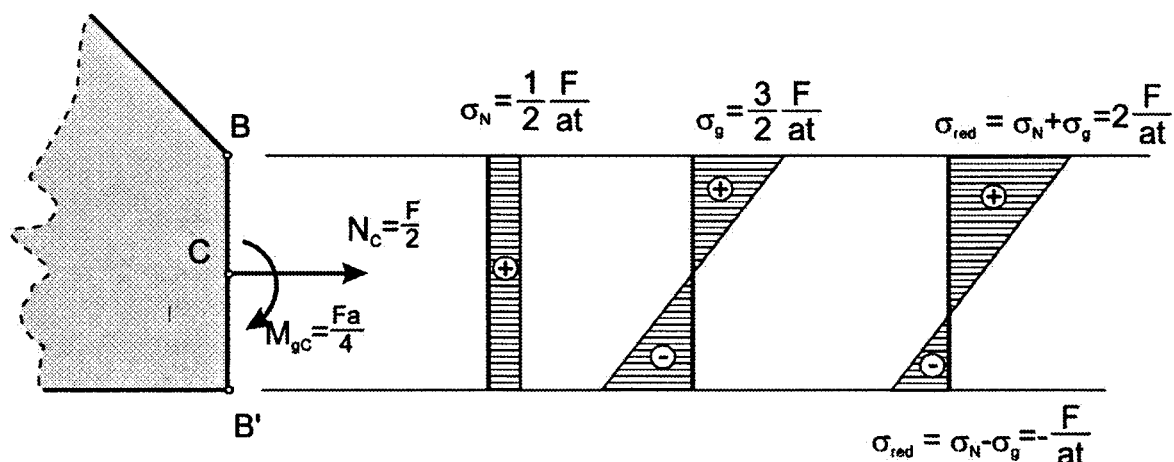
$$\sigma_g = \frac{M_{gC}}{W_{zc}} = \frac{\frac{Fa}{4}}{\frac{1}{6} a^2 t} = \frac{3}{2} \frac{F}{at}.$$

Naprężenia σ_N i σ_g mają taki sam kierunek i ten sam zwrot, więc maksymalne naprężenia zredukowane wynoszą:

$$\sigma_{red,max} = \sigma_N + \sigma_g = \frac{F}{2at} + \frac{3}{2} \frac{F}{at} = 2 \frac{F}{at}.$$

Rozkład naprężeń zredukowanych w przekroju B-B' pokazano na rys. 2.8.

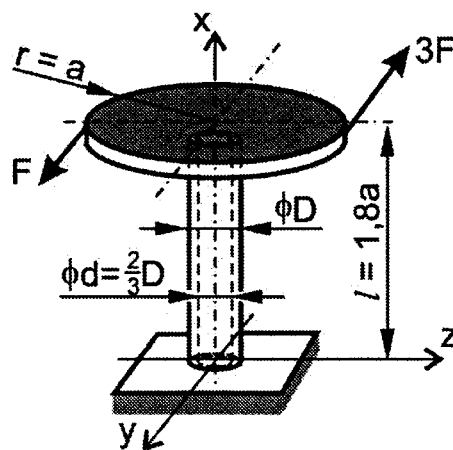
Należy zaznaczyć, że w ostrym wewnętrznym narożu B-B' wystąpi koncentracja (spiętrzenie) naprężeń, którą łagodzi się poprzez zaokrąglenie naroża.



Rys. 2.8

Zadanie 2.5. Rura stalowa ustawiona pionowo przyspawana jest na dolnym końcu do sztywnego podłoża. Do górnego końca rury przyspawana jest kołowa tarcza o promieniu $r = a = 0,2$ m obciążona siłami $F = 250$ N oraz $3F$ w sposób pokazany na rys. 2.9.

Obliczyć maksymalne naprężenia zredukowane i porównać z naprężeniami dopuszczalnymi na rozciąganie $k_r = 130$ MPa, mając dane: długość rury $l = 1,8a = 0,36$ m, średnicę zewnętrzną $D = 0,03$ m i wewnętrzną rury $d = 0,02$ m.



Rys. 2.9

R o z w i ą z a n i e . Charakterystyki przekroju poprzecznego rury:

- pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$A = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} = 393 \text{ mm}^2$$

- wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_{zc} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = 2127 \text{ mm}^3$$

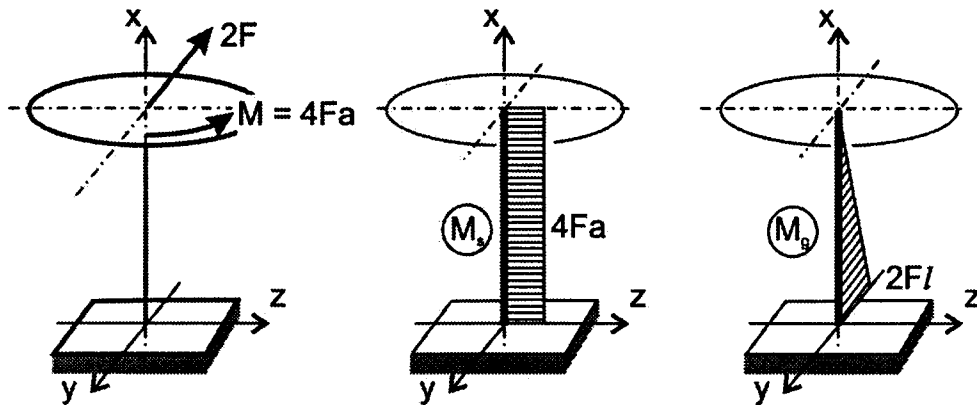
- wskaźnik wytrzymałości na skręcanie:

$$W_o = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = 2 \cdot W_{zc} = 4254 \text{ mm}^3$$

Rura skręcana jest momentem skręcającym

$$M_s = 3Fa + Fa = 4Fa = 200 \text{ Nm}$$

stałym na całej długości rury (rys. 2.10).



Rys. 2.10

Siły $3F$ i F powodują zginanie rury w płaszczyźnie równoległej do kierunków ich działania. Moment gnący zmienia się liniowo od zera na górnym końcu rury do wartości:

$$M_{gmax} = (3F - F)l = 2Fl = 180 \text{ Nm}$$

na jej dolnym końcu (rys. 2.10).

Maksymalne naprężenia wywołane skręcaniem i zginaniem w dolnym przekroju rury wynoszą:

$$\tau_{smax} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{200000}{4254} = 47 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{gmax} = \frac{M_{gmax}}{W_{zc}} = \frac{180000}{2127} = 85 \text{ MPa}.$$

Maksymalne naprężenie zredukowane obliczone według hipotezy Hubera dla przypadku zginania i skręcania ma wartość:

$$\sigma_{red,max} = \sqrt{\sigma_{gmax}^2 + 3\tau_{smax}^2} = \sqrt{85^2 + 3 \cdot 47^2} = 118 \text{ MPa}$$

Naprężenie to jest mniejsze od naprężenia dopuszczalnego na rozciąganie $k_r = 130 \text{ MPa}$. W obliczeniach pominięto naprężenia od ścinania siłą $T = 2F$ jako małe w porównaniu z τ_{smax} i σ_{gmax} .

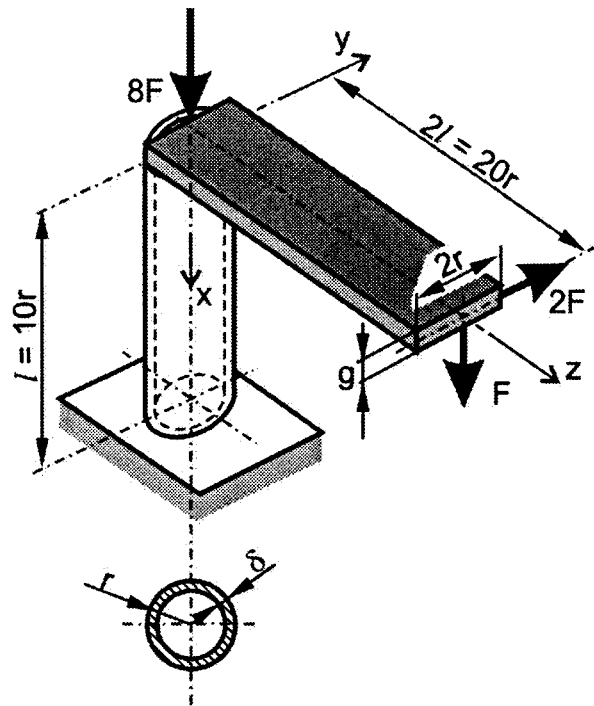
Zadanie 2.6. Cienkościenna stalowa rura o grubości ścianki $\delta = 2 \text{ mm}$ i o promieniu warstwy środkowej ścianki $r = 2\pi\delta = 12,57 \text{ mm}$, utwierdzona jest na dolnym końcu do nieodkształcalnego podłoża. Do górnego końca rury przyspawano poziomy płaskownik o wymiarach przekroju poprzecznego $2r \times g$ (rys. 2.11). Długość rury $l = 10r$, a długość płaskownika liczona od osi rury wynosi $2l$.

Układ obciążony jest trzema siłami:

- siłą $8F$ osiowo ściskającą rurę;
- pionową siłą F oraz poziomą siłą $2F$ przyłożonymi do swobodnego końca płaskownika (rys. 2.11).

Naprężenie dopuszczalne na rozciąganie materiału rury i płaskownika wynosi $k_r = k_g = 80$ MPa. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych dla rury, obliczyć maksymalne naprężenie zredukowane i dopuszczalną wartość siły F .

Po wyznaczeniu siły F obliczyć minimalną grubość płaskownika.



Rys. 2.11

Rozwiązanie. Po zredukowaniu sił działających na płaskownik do górnego przekroju poprzecznego rury otrzymano:

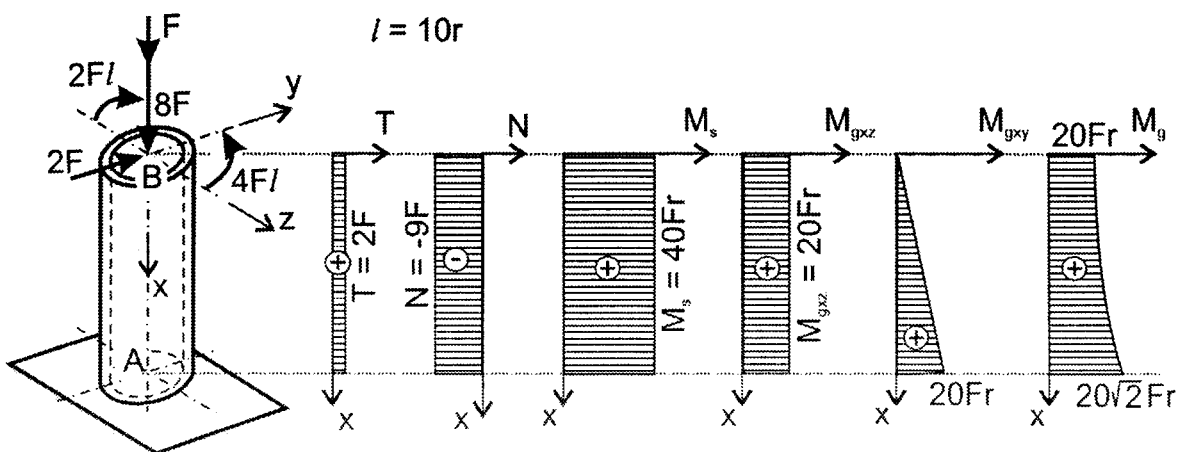
- moment gnący działający w płaszczyźnie xz :

$$M_{gz} = F \cdot 2l = 2Fl,$$

- moment skręcający:

$$M_s = 2F \cdot 2l = 4Fl.$$

Wykresy sił wewnętrznych dla rury pokazano na rys. 2.12.



Rys. 2.12

Najbardziej wyężony jest dolny przekrój poprzeczny rury. Siły wewnętrzne działające w tym przekroju wynoszą:

$$M_{gA} = M_{gmax} = \sqrt{M_{gz}^2 + M_{gy}^2} = 2\sqrt{2} Fl = 20\sqrt{2} Fr,$$

$$M_{sA} = 4 Fl = 40 Fr,$$

$$N_A = -8F - F = -9F,$$

$$T_A = 2F.$$

W dalszych obliczeniach zostaną pominięte naprężenia styczne wywołane siłą T_A , jako bardzo małe w porównaniu z pozostałymi naprężeniami. Maksymalne naprężenie zredukowane dotyczące przekroju dolnego rury zostanie obliczone według hipotezy Hubera:

$$\sigma_{red,max} = \sqrt{\left(\frac{N_A}{A} + \frac{M_{gA}}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{M_s}{W_0}\right)^2}.$$

Charakterystyki przekroju poprzecznego rury:

$$A = 2\pi r \delta = 2\pi r \frac{r}{2\pi} = r^2,$$

$$I_0 = 2\pi r \delta \cdot r^2 = 2\pi r^3 \delta = 2\pi r^3 \frac{r}{2\pi} = r^4,$$

$$I_{zc} = I_{yc} = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} r^4,$$

$$y_{max} = \rho_{max} = r + \frac{\delta}{2} = r + \frac{1}{2} \frac{r}{2\pi} = \left(1 + \frac{1}{4\pi}\right) r = 1,0796 r,$$

$$W_0 = \frac{I_0}{\rho_{max}} = \frac{r^4}{1,0796 r} = 0,926 r^3,$$

$$W = \frac{I_{zc}}{y_{max}} = \frac{r^4}{2 \cdot 1,0796 r} = 0,463 r^3.$$

Maksymalne naprężenie zredukowane wynosi

$$\sigma_{red,max} = \sqrt{\left[\frac{-9F}{r^2} + \left(-\frac{20\sqrt{2} Fr}{0,463 r^3}\right)\right]^2 + 3\left(\frac{40 Fr}{0,926 r^3}\right)^2} = 102,5 \frac{F}{r^2}.$$

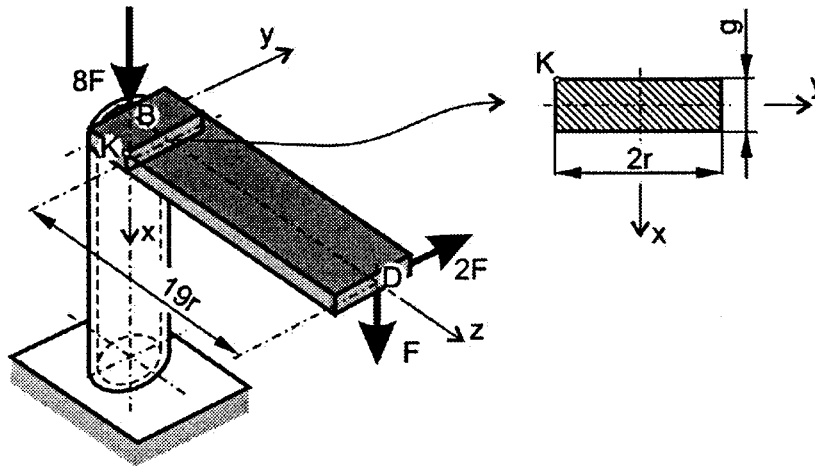
Jak wiadomo, w przekroju, w którym występują naprężenia gnące mamy do czynienia z włóknami ściskanymi i rozciąganyymi. Ponieważ siła normalna N_A powoduje ściskanie rury, to wartość naprężeń od zginania M_{gA}/W w powyższym wzorze podstawiono ze znakiem „minus”, tzn. rozpatrzono ściskanie od zginania punkt przekroju rury jako najbardziej wyężony od naprężeń normalnych.

Z warunku na wytrzymałość

$$\sigma_{red,max} = 102,5 \frac{F_{dop}}{r^2} \leq k_r$$

otrzymano:

$$F_{dop} \leq \frac{r^2 k_r}{102,5} = \frac{(12,57)^2 \cdot 80}{102,5} = 123 \text{ N}$$



Rys. 2.13

Płaskownik BD jest przez siły F i $2F$ zginany ukośnie. Maksymalne naprężenia występują w punkcie K (rys. 2.13) i oblicza się je ze wzoru

$$\sigma_K = \sigma_{max} = \frac{M_{gzy}}{W_x} + \frac{M_{gzx}}{W_y}$$

po podstawieniu wyrażeń na momenty gnące i wskaźniki przekroju na zginanie otrzymano:

$$\sigma_K = \frac{F_{dop} 19r}{\frac{1}{6} 2rg^2} + \frac{2F_{dop} 19r}{\frac{1}{6} g(2r)^2} = \frac{57F_{dop}}{g^2} + \frac{57F_{dop}}{gr} = \frac{57F_{dop}}{g} \left(\frac{1}{g} + \frac{1}{r} \right) = \frac{57F_{dop}}{g^2 r} (r + g).$$

Z warunku wytrzymałościowego:

$$\sigma_{max} = \sigma_K = \frac{57F_{dop}}{g^2 r} (r + g) \leq k_r,$$

otrzymano na g_{min} następujące równanie kwadratowe:

$$g^2 - \frac{57F_{dop}}{rk_r} \cdot g - \frac{57F_{dop}}{k_r} = 0.$$

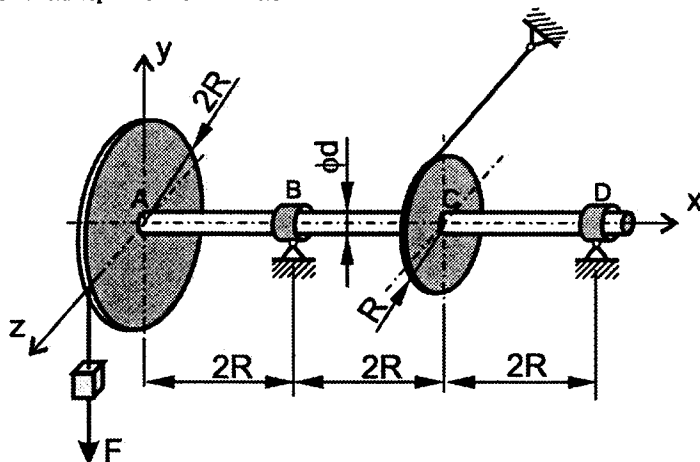
Po podstawieniu danych, równanie:

$$g^2 - 6,97 \cdot g - 87,64 = 0,$$

rozwiązano i otrzymano $g_{min} = 13,5 \text{ mm}$.

Zadanie 2.7. Obliczyć maksymalną wartość siły F , działającej na ułożyskowany wał z dwoma kołami (rys. 2.14).

Dane: średnica wału $d = 20$ mm, promień mniejszego koła $R = 150$ mm, promień większego koła $2R = 300$ mm, naprężenia dopuszczalne na rozciąganie materiału, z którego wykonano wał $k_t = 120$ MPa.

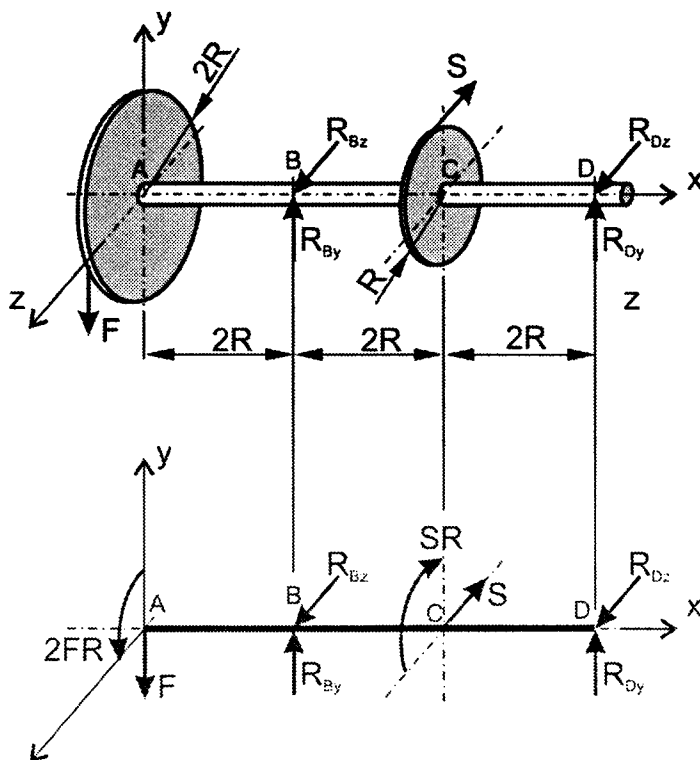


Rys. 2.14

Rozwiązanie. Wał uwolniono od więzów, zastępując podpory odpowiednimi reakcjami, a następnie wszystkie działające siły zredukowano do osi wału (rys. 2.15). Z sumy momentów sił względem osi wału obliczono siłę S rozciągającą poziomą linię:

$$F \cdot 2R - S \cdot R = 0,$$

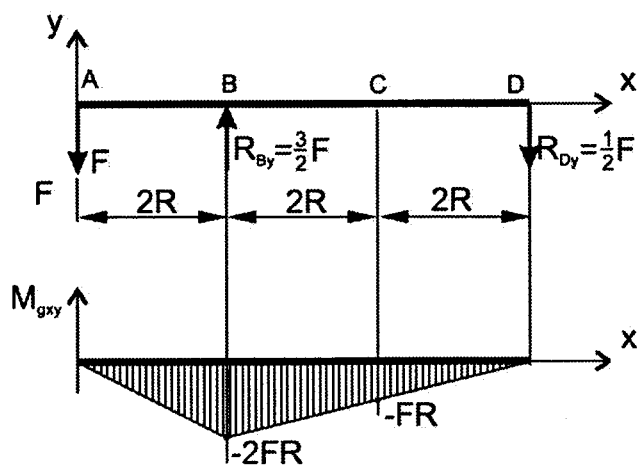
$$S = 2F.$$



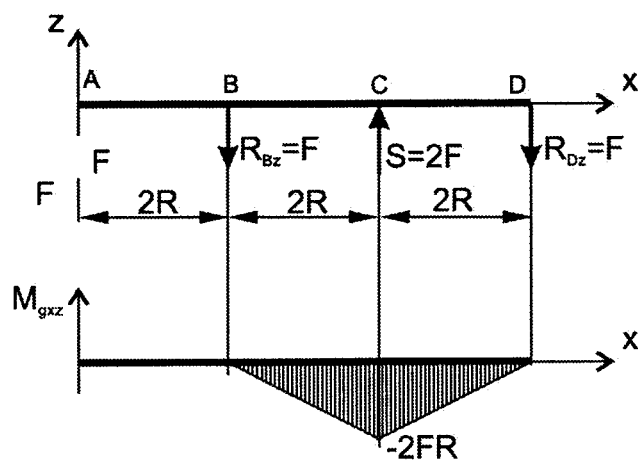
Rys. 2.15

Rozpatrywany wał jest zginany w dwu płaszczyznach pionowej xy i poziomej xz . Schematy obciążenia wału i wykresy momentów gnących w obu płaszczyznach przedstawiono na rys. 2.16.

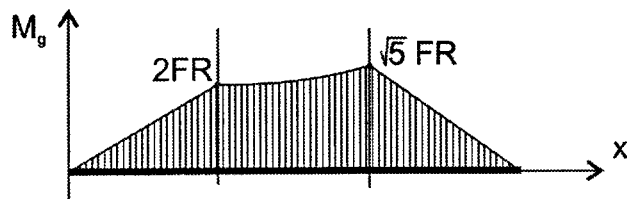
a)



b)



c)



Rys. 2.16

Maksymalny wypadkowy moment gnący (rys. 2.16c) występuje w przekroju C i wynosi:

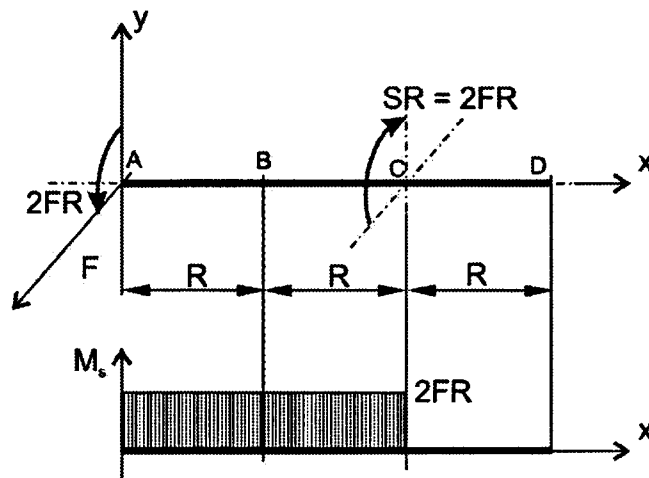
$$M_{gc} = \sqrt{(FR)^2 + (2FR)^2} = \sqrt{5} FR.$$

Wskaźnik wytrzymałości wału na zginanie:

$$W = \frac{\pi d^3}{32}$$

Maksymalne naprężenie od zginania:

$$\sigma_{gmax} = \frac{M_{gc}}{W} = \frac{32\sqrt{5}FR}{\pi d^3}$$



Rys. 2.17

Wał na odcinku AC jest również skręcany momentem $M_s = 2FR$ (rys. 2.17). Wskaźnik wytrzymałości wału na skręcanie:

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16}$$

Maksymalne naprężenie wywołane momentem skręcającym M_s wynosi:

$$\tau_{smax} = \frac{M_s}{W_0} = \frac{32FR}{\pi d^3}$$

Korzystając ze wzoru na naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera dla jednoczesnego zginania i skręcania, obliczono maksymalne naprężenia zredukowane w rozpatrywanym wale:

$$\sigma_{red.max} = \sqrt{(\sigma_{gmax})^2 + 3(\tau_{smax})^2},$$

$$\sigma_{red.max} = \sqrt{\left(\frac{32\sqrt{5}FR}{\pi d^3}\right)^2 + 3\left(\frac{32FR}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{64\sqrt{2}FR}{\pi d^3}.$$

Naprężenie to dotyczy pewnego punktu leżącego na powierzchni wału, po lewej stronie koła o promieniu R .

Z warunku wytrzymałości materiału wału:

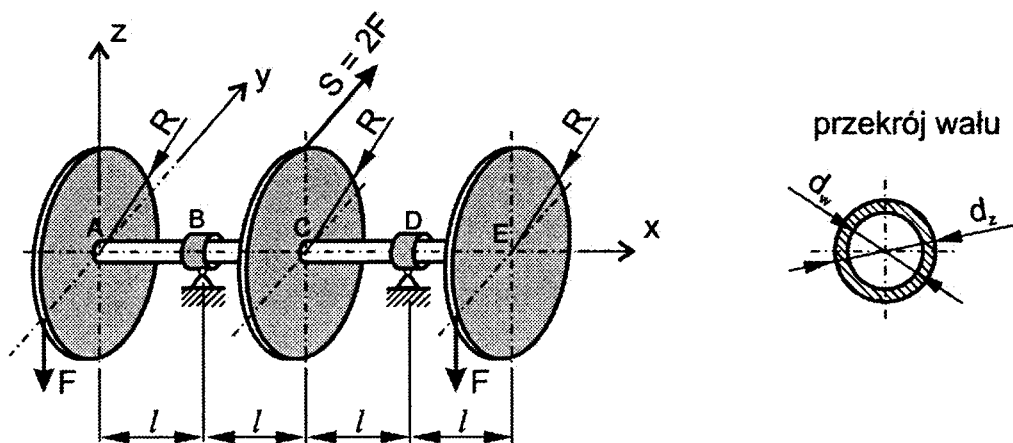
$$\sigma_{red.max} \leq k_r,$$

wyznaczono wartość siły F , jaką można obciążyć układ:

$$\frac{64\sqrt{2}FR}{\pi d^3} \leq k_r,$$

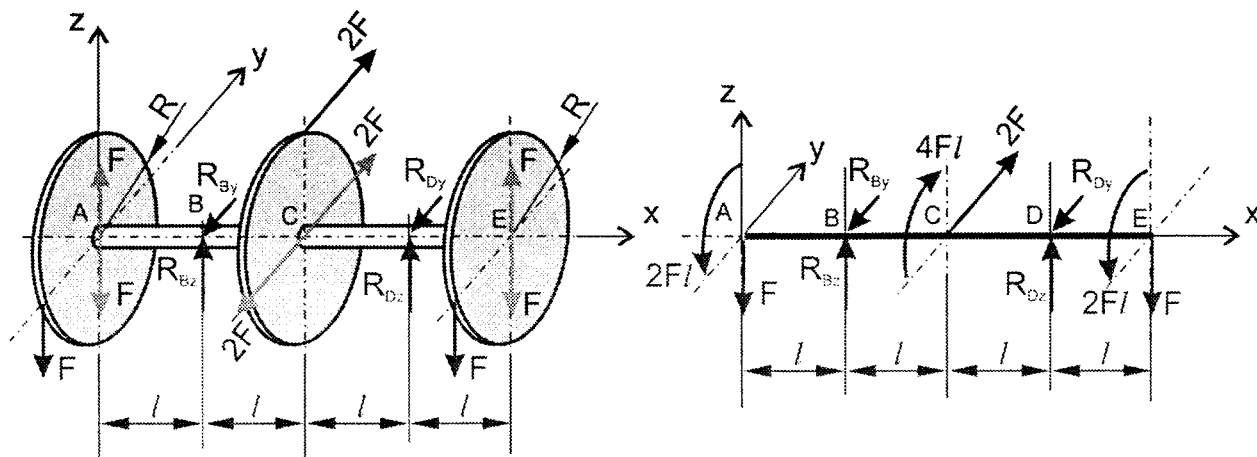
$$F \leq \frac{\pi d^3 k_r}{64\sqrt{2}R} = \frac{\pi \cdot 20^3 \cdot 120}{64\sqrt{2} \cdot 150} = 222 \text{ N.}$$

Zadanie 2.8. Wał drążony o stosunku średnic wewnętrznej d_w do zewnętrznej d_z jak 3:4 ułożyskowany w punktach B i D ma osadzone symetrycznie trzy koła o jednakowych promieniach $R = 200 \text{ mm}$ (rys. 2.18). Środkowe koło przy $n = 500 \text{ obr/min}$ przenosi moc $P = 28,4 \text{ KM}$ i przekazuje je równomiernie na dwa koła zewnętrzne. Pozioma siła $S = 2F$ działa stycznie do obwodu koła środkowego, natomiast pionowe siły F działają stycznie na koła boczne. Naprężenia dopuszczalne materiału wału $k_r = 120 \text{ MPa}$. Długości wszystkich odcinków $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ są równe $l = \frac{1}{2} R = 100 \text{ mm}$. Wykonać wykresy M_g i M_s oraz obliczyć średnice d_z i d_w wału.



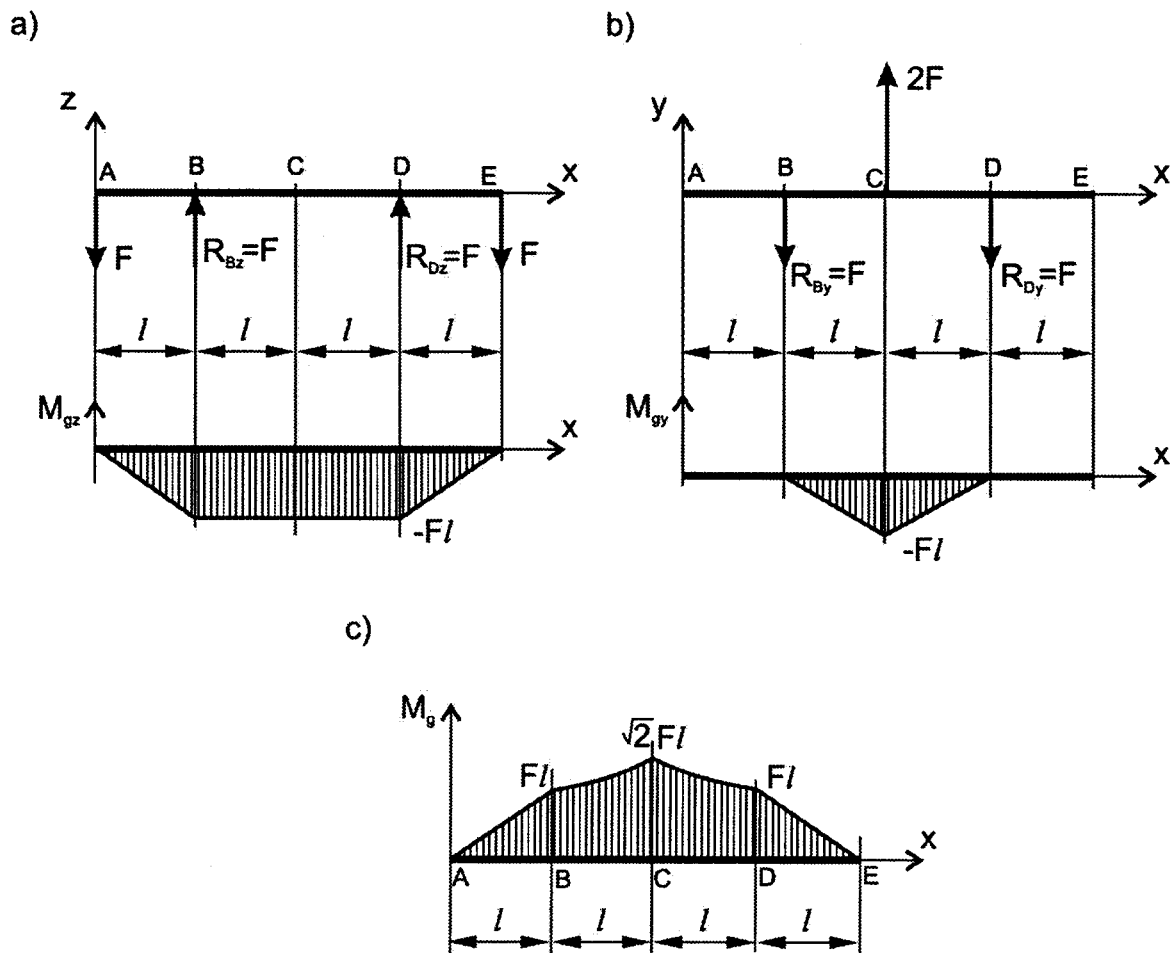
Rys. 2.18

Rozwiązanie. Wał uwolniono od więzów, zastępując oddziaływanie podpór odpowiednimi reakcjami, a następnie wszystkie działające siły zredukowano do osi wału (rys. 2.19).



Rys. 2.19

Wwał zginany jest w dwu płaszczyznach pionowej xy i poziomej xz . Schematy obciążenia wału i wykresy momentów gnących w obu płaszczyznach przedstawiono na rys. 2.20.



Rys. 2.20

Maksymalny wypadkowy moment gnący (rys. 2.20c) występuje w przekroju C i wynosi

$$M_{gc} = \sqrt{M_{gz}^2 + M_{gy}^2} = \sqrt{(-Fl)^2 + (Fl)^2} = \sqrt{2} Fl.$$

Rozpatrywany wał jest również skręcany, a występujące w każdym przekroju momenty skręcające przedstawiono w postaci wykresu na rys. 2.21.

Bezwzględna wartość momentu skręcającego na całej długości wału jest taka sama i wynosi

$$|M_s| = 2 Fl.$$

Charakterystyki geometryczne i wytrzymałościowe przekroju poprzecznego wału są następujące:

- biegunowy moment bezwładności:

$$I_0 = \frac{\pi d_z^4}{32} - \frac{\pi d_w^4}{32} = \frac{\pi}{32} \left[d_z^4 - \left(\frac{3}{4} d_z \right)^4 \right] = \frac{175\pi}{8192} d_z^4,$$

- wskaźnik wytrzymałości na skręcanie:

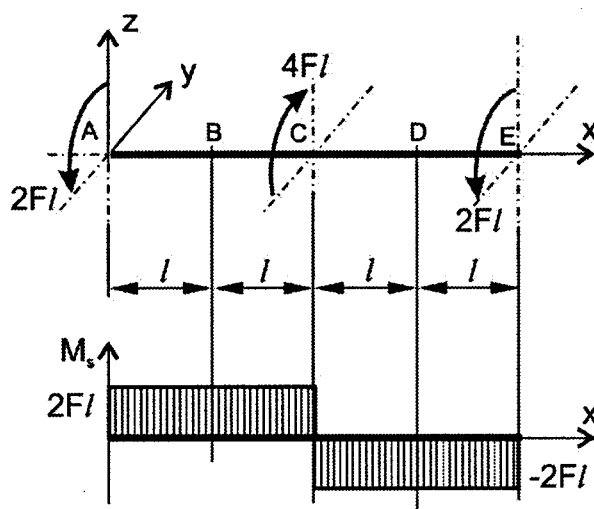
$$W_0 = \frac{I_0}{\frac{1}{2}d_z} = \frac{350\pi}{8192}d_z^3,$$

- moment bezwładności:

$$I_{zc} = \frac{1}{2}I_0 = \frac{175\pi}{16384}d_z^4,$$

- wskaźnik na zginanie:

$$W_z = \frac{I_{zc}}{y_{max}} = \frac{I_{zc}}{\frac{1}{2}d_z} = \frac{175\pi}{8192}d_z^3 = 0,0671d_z^3.$$



Rys. 2.21

1 kW \approx 1,36 KM, więc moc w kilowatach wynosi:

$$P = 28,4 \text{ KM} = 28,4 \frac{1}{1,36} = 20,9 \text{ kW}.$$

Moment obrotowy M_c w [Nm] jaki przenosi koło środkowe:

$$M_c = 2FR = 9550 \frac{P}{n} = 9550 \frac{20,9}{500} \approx 400 \text{ Nm} = 4 \cdot 10^5 \text{ Nmm},$$

więc siła F wynosi:

$$F = \frac{M_{sc}}{2R} = \frac{400000}{2 \cdot 200} = 1000 \text{ N}.$$

Obliczenia liczbowe dotyczące środkowego przekroju poprzecznego wału:

$$M_{gmax} = \sqrt{2} Fl = \sqrt{2} 1000 \cdot 100 = \sqrt{2} 10^5 \text{ Nmm},$$

$$|M_s| = 2 Fl = 2 \cdot 1000 \cdot 100 = 2 \cdot 10^5 \text{ Nmm},$$

$$M_{zast} = \sqrt{(M_{gmax})^2 + \frac{3}{4}(M_s)^2} = \sqrt{(\sqrt{2} Fl)^2 + \frac{3}{4}(2 Fl)^2} = \sqrt{5} Fl = 2,236 \cdot 10^5 \text{ Nmm}.$$

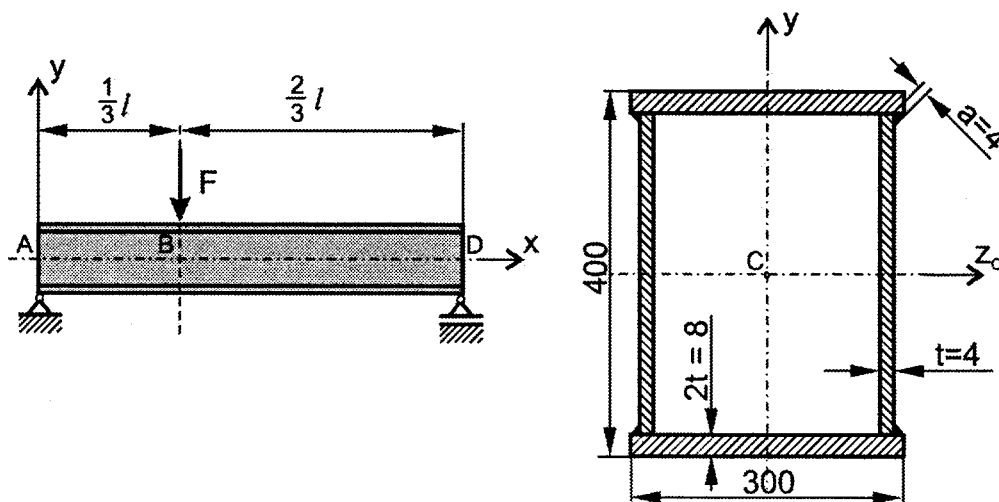
Wzór na moment zastępczy można stosować tylko do zginanych i skręcanych wałów o przekroju kołowym. Z warunku wytrzymałościowego:

$$\sigma_{red,max} = \frac{M_{zast}}{W_z} = \frac{2,236 \cdot 10^5}{0,0671 d_z^3} \leq kr = 120 \text{ MPa}$$

otrzymano $d_z \geq 30,3 \text{ mm}$.

Ostatecznie przyjęto: $d_z = 32 \text{ mm}$ i $d_w = \frac{3}{4} d_z = 24 \text{ mm}$.

Zadanie 2.9. Belka stalowa o przekroju skrzynkowym, którego wymiary podano na rys. 2.22, podparta jest na końcach na podporach przegubowych. W odległości $l/3 = 1 \text{ m}$ od lewej podpory, belka obciążona jest pionową siłą $F = 180 \text{ kN}$. Naprężenia dopuszczalne materiału belki i spoin na rozciąganie $k_r = 120 \text{ MPa}$. Określić stan naprężenia w belce oraz maksymalne wyczerpanie materiału.



Rys. 2.22

R o z w i ą z a n i e . Wykresy sił wewnętrznych T i M_g w belce pokazano na rys. 2.23.

Maksymalne wartości tych sił występują w przekroju $x = l/3 = 1 \text{ m}$ i wynoszą:

$$T_{max} = 120 \text{ kN} \text{ oraz } M_{gmax} = 120 \text{ kNm} = 1,2 \cdot 10^8 \text{ Nmm}.$$

Analiza stanu naprężenia będzie dotyczyć tego przekroju.

Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego:

- moment bezwładności względem osi z_c :

$$I_{z_c} = \frac{300 \cdot 400^3}{12} - \frac{292 \cdot 384^3}{12} = 2,22 \cdot 10^8 \text{ mm}^4,$$

- wskaźnik wytrzymałości na zginanie:

$$W_z = \frac{I_{zc}}{y_{max}} = \frac{2,22 \cdot 10^8}{200} = 1,11 \cdot 10^6 \text{ mm}^3,$$

- momenty statyczne części przekroju poprzecznego zawarte pomiędzy współzrzednymi y i $y_{max} = 200 \text{ mm}$:

$$\text{dla } y = y_{max} = 200 \text{ mm} \quad S_{200}^{200} = 300 \cdot 8 \cdot 196 = 0,$$

$$\text{dla } y = 192 \text{ mm} \quad S_{192}^{200} = 300 \cdot 8 \cdot 196 = 4,7 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

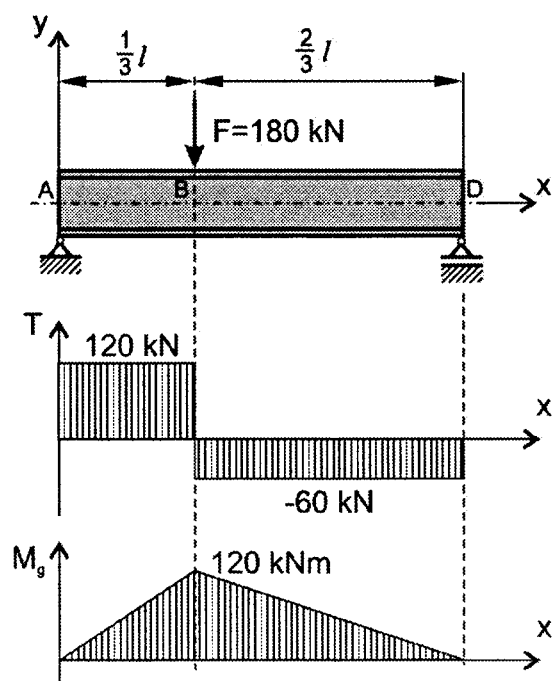
$$\text{dla } y = 0 \quad S_0^{200} = 4,7 \cdot 10^5 + 2 \left(\frac{4 \cdot 192 \cdot 192}{2} \right) = 6,18 \cdot 10^5 \text{ mm}^3,$$

- szerokości przekroju b_y :

$$\text{dla } 192 \text{ mm} \leq y \leq 200 \text{ mm} : b_y = 300 \text{ mm},$$

$$\text{dla } y^- = 192 \text{ mm} : b_y = 2 \cdot a = 8 \text{ mm} \text{ – (dwie grubości spoin)},$$

$$\text{dla } y = 0 : b_y = 2 \cdot t = 8 \text{ mm} \text{ – (dwie grubości srodnicow)}.$$



Rys. 2.23

Naprężenia styczne wywołane siłą tnącą T_{max} obliczone ze wzoru Żurawskiego:

$$\tau(y) = \frac{T_{max} \cdot S_y^{y_{max}}}{I_{zc} \cdot b_y},$$

wynoszą odpowiednio:

$$\tau(200) = 0,$$

$$\tau(192^+) = \frac{120000 \cdot 4,7 \cdot 10^5}{300 \cdot 2,22 \cdot 10^8} = 1 \text{ MPa},$$

$$\tau(192^-) = \frac{120000 \cdot 4,7 \cdot 10^5}{8 \cdot 2,22 \cdot 10^8} = 32 \text{ MPa},$$

$$\tau(0) = \frac{120000 \cdot 6,18 \cdot 10^5}{8 \cdot 2,22 \cdot 10^8} = 42 \text{ MPa},$$

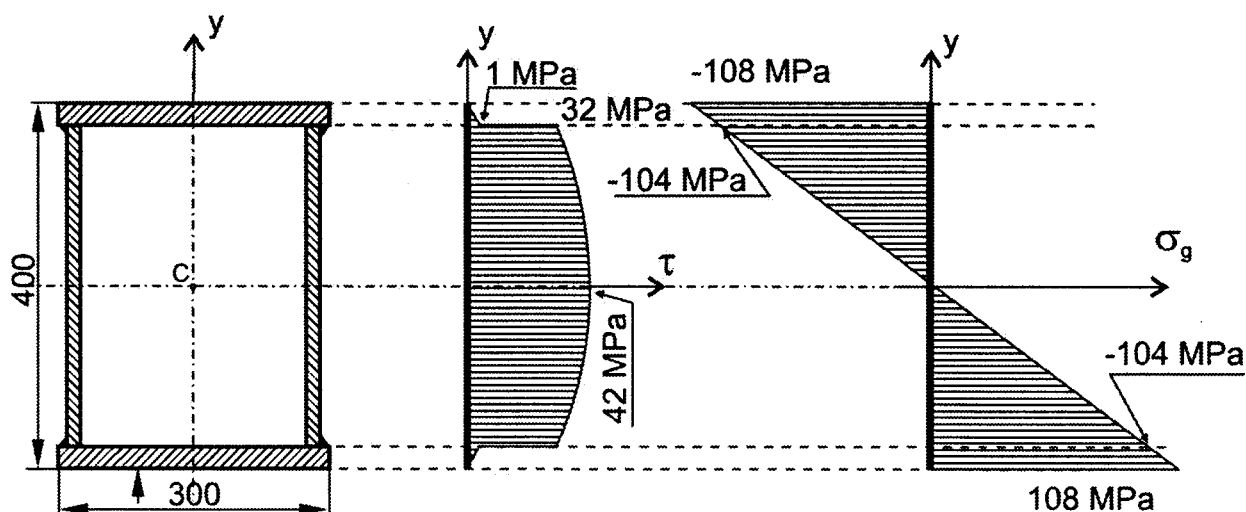
Obliczenie naprężeń od zginania działających w przekroju $x^- = 1\text{ m}$ dla następujących wartości $y = 0$; 192 i 200 mm:

$$|\sigma_{g \max}| = \frac{M_{g \max}}{W_z} = \frac{1,2 \cdot 10^8}{1,11 \cdot 10^6} = 108 \text{ MPa},$$

$$|(\sigma_g)_{y=192}| = \frac{M_{g \max}}{I_{zc}} y = \frac{1,2 \cdot 10^8}{2,22 \cdot 10^8} \cdot 192 = 104 \text{ MPa},$$

$$|(\sigma_g)_{y=0}| = 0.$$

Rozkład naprężeń gnących σ_g i tnących τ na wysokości analizowanego przekroju poprzecznego belki pokazano na rys. 2.24.



Rys. 2.24

Obliczenie naprężeń zredukowanych według hipotezy Hubera:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_g^2 + 3\tau^2}.$$

W rozpatrywanych punktach przekroju poprzecznego belki:

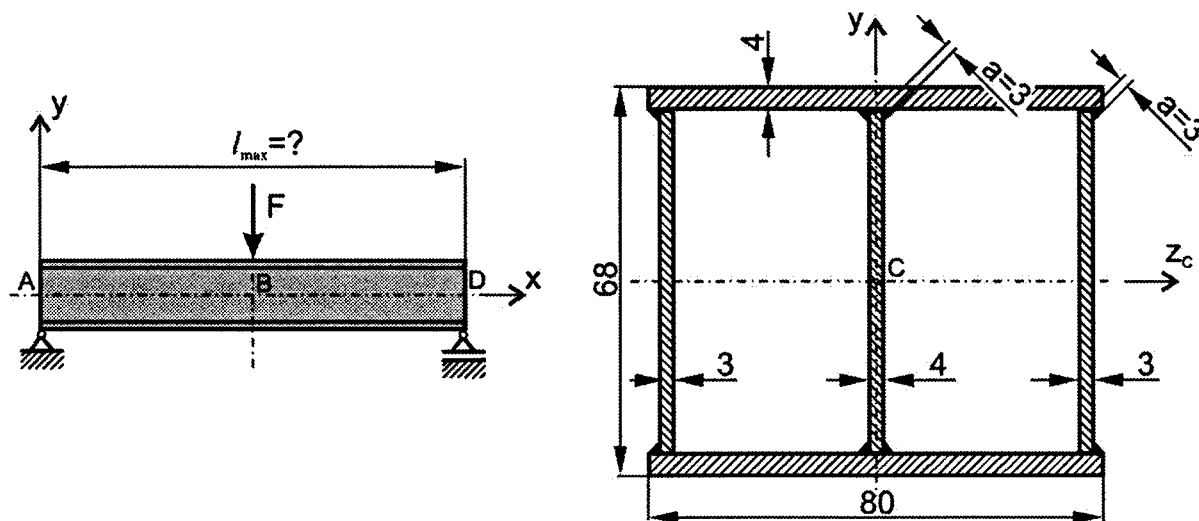
$$\sigma_{red}(x = 1000 \text{ mm}; y = 200 \text{ mm}) = \sigma_{g \max} = 108 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red}(x = 1000 \text{ mm}; y = 192 \text{ mm}) = \sqrt{104^2 + 3 \cdot 32^2} = 118 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{red}(x = 1000 \text{ mm}; y = 0) = \sqrt{3 \cdot 42^2} = 73 \text{ MPa}.$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że największe naprężenia zredukowane występują w spoinach i wynoszą $\sigma_{red\ max} = 118\text{ MPa}$. Materiał spoin jest najbardziej wyętyżony, ale naprężenia te są mniejsze od naprężeń dopuszczalnych $k_r = 120\text{ MPa}$.

Zadanie 2.10. Cienkościenna belka o dwukomorowym przekroju poprzecznym, podparta przegubowo na obu końcach, obciążona jest w środku długości pionową siłą $F = 24\text{ kN}$. Wymiary przekroju poprzecznego belki podano na rys. 2.25.



Rys. 2.25

Naprężenia dopuszczalne na rozciąganie materiału belki i spoin są równe i wynoszą $k_r = 150\text{ MPa}$. Grubość spoin $a = 3\text{ mm}$. Obliczyć, jaka może być maksymalna długość belki l_{max} , a następnie dla tej długości wyznaczyć wyętyżenie materiału spoin ($\sigma_{red\ sp}$).

R o z w i ą z a n i e . Wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na rys. 2.26. Maksymalne siły wewnętrzne wynoszą:

$$T_{max} = \frac{1}{2} F = 12\text{ kN},$$

$$M_{gmax} = \frac{1}{4} F l_{max}.$$

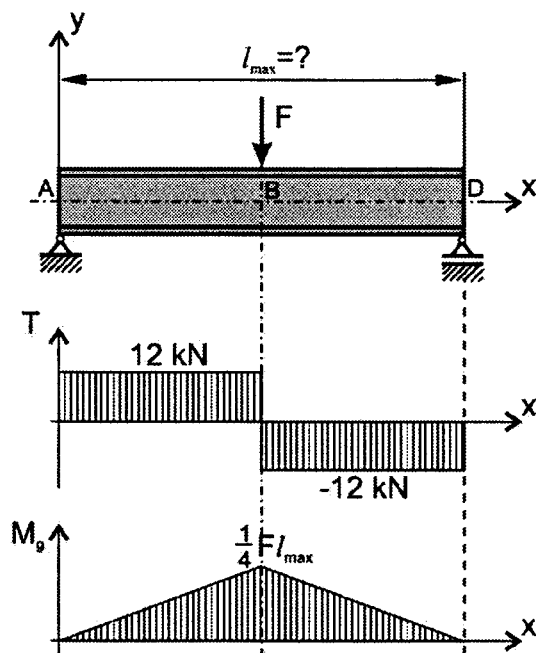
Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego belki

$$I_{z_c} = \frac{80 \cdot 68^3}{12} - \frac{70 \cdot 60^3}{12} = 8,36 \cdot 10^5\text{ mm}^4,$$

$$W_z = \frac{I_{z_c}}{y_{max}} = \frac{8,36 \cdot 10^5}{34} = 2,46 \cdot 10^4\text{ mm}^3,$$

$$S_{30}^{34} = 8 \cdot 4 \cdot 32 = 1024\text{ mm}^3,$$

S_{30}^{34} jest momentem statycznym pasa górnego względem osi z_c .



Rys. 2.26

Z warunku wytrzymałości belki na zginanie wynika, że:

$$M_{gmax} = W_z \cdot k_g = W_z \cdot k_r$$

stąd

$$\frac{1}{4} F \cdot l_{max} = W_z \cdot k_r,$$

$$l_{max} = \frac{4 W_z k_r}{F} = \frac{4 \cdot 2,46 \cdot 10^4 \cdot 150}{24000} = 615 \text{ mm.}$$

Dla tej długości moment gnący wynosi:

$$M_{gmax} = \frac{1}{4} F l_{max} = \frac{1}{4} \cdot 24000 \cdot 615 = 3690000 \text{ Nmm} = 3,69 \text{ kNm.}$$

Naprężenia normalne od momentu gnącego w spoinach wynoszą:

$$\sigma_{gsp} = \frac{M_{gmax}}{I_{zc}} y_{sp} = \frac{3690000}{8,36 \cdot 10^5} 30 = 132 \text{ MPa.}$$

Naprężenia w spoinach od siły tnącej:

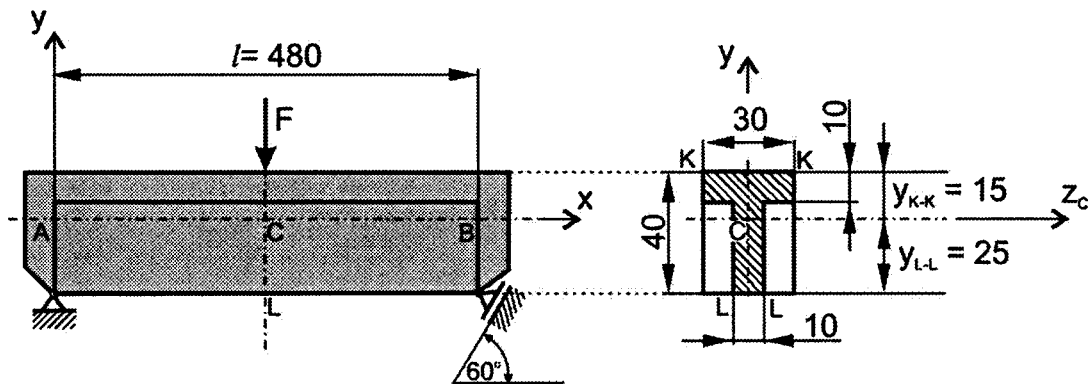
$$\tau_{sp} = \frac{T \cdot S_{30}^{34}}{4a \cdot I_{zc}} = \frac{12000 \cdot 1024}{4 \cdot 3 \cdot 8,36 \cdot 10^5} = 13 \text{ MPa.}$$

Naprężenia zredukowane w spoinach wynikające z hipotezy Hubera:

$$\sigma_{red.} = \sqrt{\sigma_g^2 + 3\tau^2} = \sqrt{132^2 + 3 \cdot 13^2} = 134 \text{ MPa.}$$

Naprężenia te są mniejsze od naprężeń dopuszczalnych $k_r = 150 \text{ MPa}$.

Zadanie 2.11. Belka stalowa ACB o przekroju teowym podparta w sposób pokazany na rys. 2.27, obciążona jest w połowie długości siłą poprzeczną F . Naprężenia dopuszczalne materiału belki na rozciąganie i ściskanie są takie same i wynoszą $k_r = k_c = 120$ MPa. Wymiary przekroju poprzecznego belki podano na rys. 2.27. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych oraz wyznaczyć dopuszczalną wartość siły F .



Rys. 2.27

Rozwiązanie. Reakcję normalną prawej podpory rozłożono na dwie składowe R_{Bx} i R_{By} . Schemat obciążenia belki (obciążenie F i wszystkie składowe reakcji po przeniesieniu do osi belki) oraz wykresy sił wewnętrznych N , T i M_g pokazano na rys. 2.28.

Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego:

- pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$A = 600 \text{ mm}^2,$$

- położenie środka ciężkości przekroju:

$$y_c = y_{L-L} = 25 \text{ mm},$$

- moment bezwładności przekroju poprzecznego:

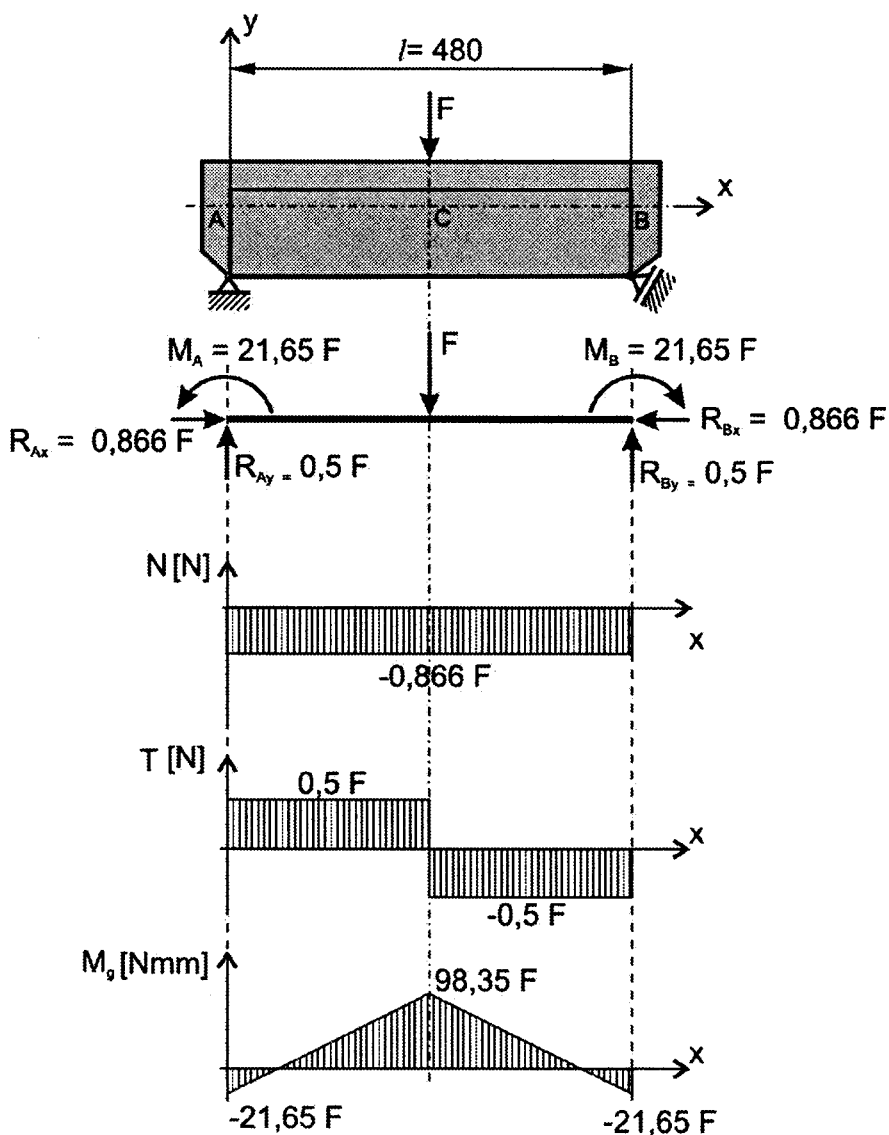
$$I_{zc} = 8,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

- wskaźniki wytrzymałości na zginanie:

$$W_{K-K} = \frac{I_{zc}}{y_{K-K}} = \frac{8,5 \cdot 10^4}{15} = 5,67 \cdot 10^3 \text{ mm}^3,$$

$$W_{L-L} = \frac{I_{zc}}{y_{max}} = \frac{8,5 \cdot 10^4}{25} = 3,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^3.$$

Maksymalny moment gnący wynosi $M_{gmax} = 98,35F$ [Nmm], przy sile F wyrażonej w [N].



Rys. 2.28

W rozwiązywanym zadaniu najbardziej wyężony jest przekrój w ęrodku dęugości belki. W tym przekroju wyznaczone zostały maksymalne naprężenia normalne pochodzące od zginania i ściskania w dolnych σ_{L-L} i górnych σ_{K-K} włóknach belki:

$$\sigma_{L-L} = \sigma_N + \sigma_{g_{L-L}} = \frac{N}{A} + \frac{M_{g_{max}}}{W_{L-L}} = \frac{-0,866 F}{600} + \frac{98,35 F}{3,4 \cdot 10^3} = 0,0275 F \text{ [N/mm}^2\text{]},$$

$$\sigma_{K-K} = \sigma_N - \sigma_{g_{K-K}} = \frac{N}{A} - \frac{M_{g_{max}}}{W_{K-K}} = \frac{-0,866 F}{600} - \frac{98,35 F}{5,67 \cdot 10^3} = -0,0188 F \text{ [N/mm}^2\text{]}.$$

Z wytrzymałościowego warunku:

$$\sigma_{red,max} = \sigma_{L-L} = 0,0275 F \leq k_r = 120 \text{ MPa}$$

otrzymano:

$$F \leq 4364 \text{ N.}$$

Dla $F_{\text{dop}} = 4364 \text{ N}$ naprężenia we włóknach górnych wynoszą:

$$\sigma_{K-K} = -0,0188 F = -0,0188 \cdot 4364 = -82 \text{ MPa.}$$

Na osi obojętnej zginania występują naprężenia od ściskania oraz naprężenia od ścinania, które właśnie w tym miejscu przekroju osiągają ekstremum (maksimum). Naprężenia od ściskania wynoszą:

$$\sigma_N = -\frac{N}{A} = -\frac{0,866 F}{A} = -\frac{0,866 \cdot 4364}{600} = -6 \text{ MPa.}$$

Maksymalne naprężenia styczne τ_{max} , występujące na osi obojętnej zginania ($y = 0$) obliczono ze wzoru Żurawskiego:

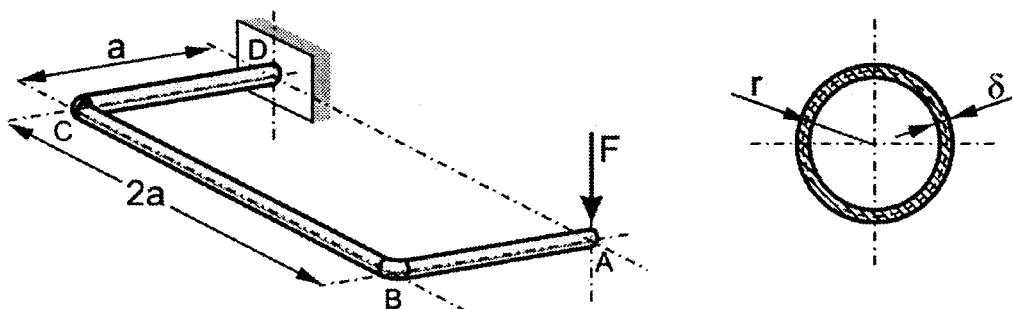
$$\tau_{\text{max}} = \frac{T \cdot S_y^{\text{ymax}}}{b_y \cdot I_{zc}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 4364 \cdot 10 \cdot 25 \cdot 12,5}{10 \cdot 8,5 \cdot 10^4} = 8 \text{ MPa.}$$

Naprężenia zredukowane, występujące w przekroju w połowie długości belki na osi obojętnej zginania, wyznaczone według hipotezy Hubera, wynoszą:

$$\sigma_{\text{red}} = \sqrt{6^2 + 3 \cdot 8^2} = 15 \text{ MPa}$$

i są dużo mniejsze od naprężeń dopuszczalnych.

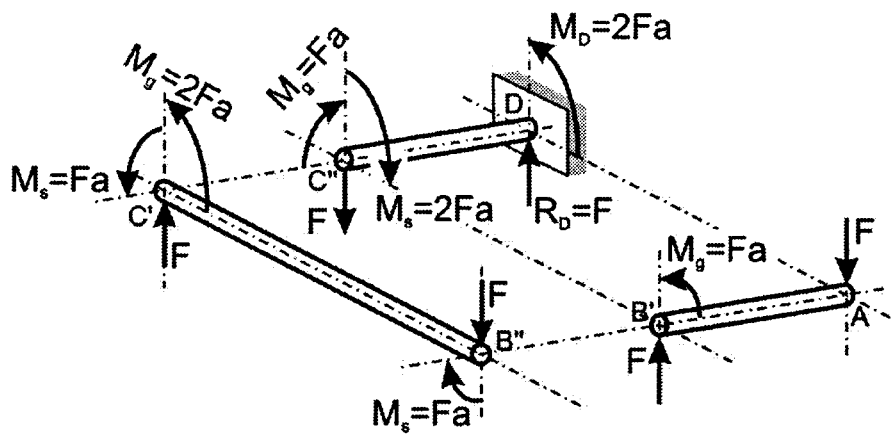
Zadanie 2.12. Rama ABCD, wykonana z cienkościennej rury, obciążona jest w punkcie A pionową siłą F (rys. 2.29).



Rys. 2.29

Wymiary ramy to: długość odcinków $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{BC} = 2a$, promień rury mierzony do środka grubości ścianki wynosi r , grubość ścianki $\delta = r/2\pi$. Obliczyć maksymalne naprężenie zredukowane.

R o z w i ą z a n i e . Siły wewnętrzne, tzn. momenty gnące M_g i skręcające M_s , działające w narożach ramy pokazano na rys. 2.30 i zestawiono w tabelicy 2.1.



Rys. 2.30

Tablica 2.1

Przekrój	M_g	M_s	$M_{zast} = \sqrt{M_g^2 + \frac{3}{4}M_s^2}$
B'-B'	$M_{gB'} = Fa$	$M_{sB'} = 0$	$M_{zast} = Fa$
B''-B''	$M_{gB''} = 0$	$M_{sB''} = Fa$	$M_{zast} = \frac{\sqrt{3}}{2} Fa$
C'-C'	$M_{gC'} = 2Fa$	$M_{sC'} = Fa$	$M_{zast} = \frac{\sqrt{19}}{2} Fa$
C''-C''	$M_{gC''} = Fa$	$M_{sC''} = 2Fa$	$M_{zast} = 2Fa$
D-D	$M_{gD} = 0$	$M_{sD} = 2Fa$	$M_{zast} = \sqrt{3} Fa$

Maksymalny moment zastępczy występuje w przekroju C'-C' i wynosi:

$$M_{zast} = \frac{\sqrt{19}}{2} Fa = 2,18 Fa.$$

Charakterystyki geometryczne przekroju poprzecznego rury:

- pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$A = 2\pi r \delta = 2\pi r \cdot \frac{r}{2\pi} = r^2,$$

- biegunowy moment bezwładności:

$$I_0 = 2\pi r \delta \cdot r^2 = r^4,$$

- moment bezwładności względem osi centralnej:

$$I_{zc} = \frac{1}{2} I_0 = \frac{1}{2} r^4,$$

- wskaźniki wytrzymałości na zginanie:

$$W_z = \frac{I_{zc}}{y_{max}} = \frac{\frac{1}{2}r^4}{r + \frac{\delta}{2}} = \frac{\frac{1}{2}r^4}{r + \frac{1}{2} \frac{r}{2\pi}} = \frac{2\pi}{(4\pi+1)} r^3 \approx 0,463 r^3.$$

Maksymalne naprężenie zredukowane występujące w przekroju C'-C' (w punktach leżących na osi pionowej) wynoszą:

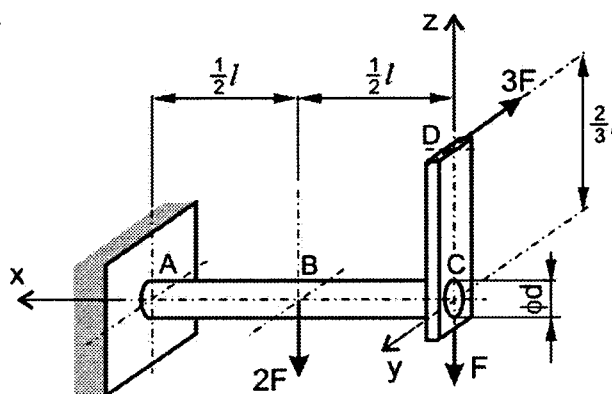
$$\sigma_{red} = \frac{M_{zast}}{W_z} = \frac{2,18 Fa}{0,463 r^3} = 4,71 \frac{Fa}{r^3}.$$

2.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 2.13. Pręt AC o średnicy d utwierdzony jest w punkcie A w nieodkształcalnej ścianie. Obciążenie pręta siłami F , $2F$ i $3F$ pokazano na rys. 2.31. Długości odcinków pręta są następujące:

$$\overline{AB} = \frac{l}{2}, \quad \overline{BC} = \frac{l}{2}, \quad \overline{CD} = \frac{2}{3}l.$$

Wykonać wykresy momentów gnących i skręcających oraz obliczyć maksymalne naprężenie zredukowane (które określa maksymalne wyężenie materiału). Założono, że elementowi CD zniszczenie nie zagraża.

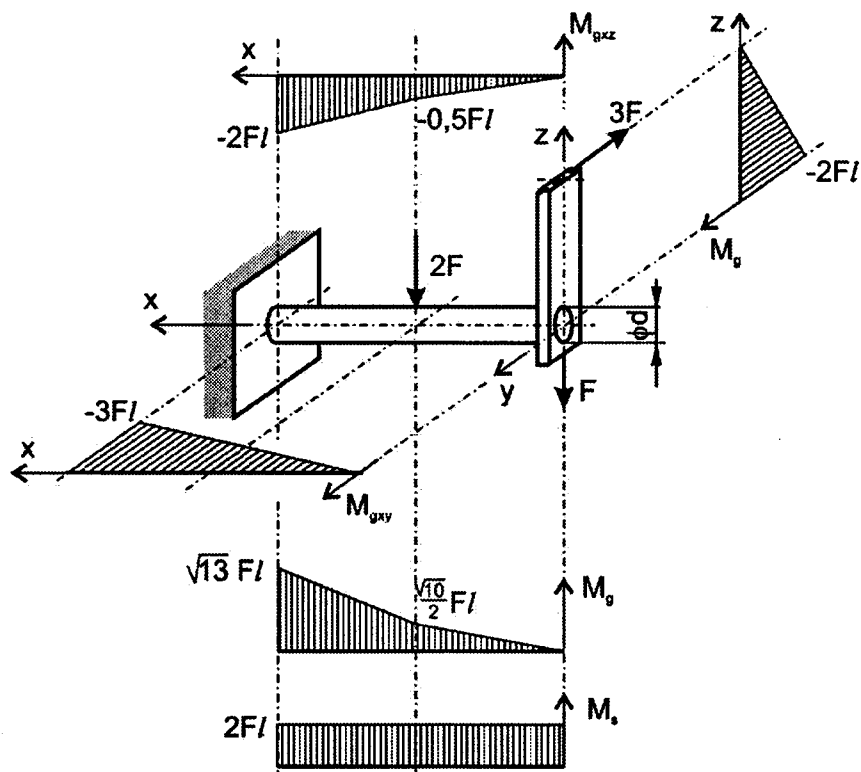


Rys. 2.31

ODPOWIEDŹ

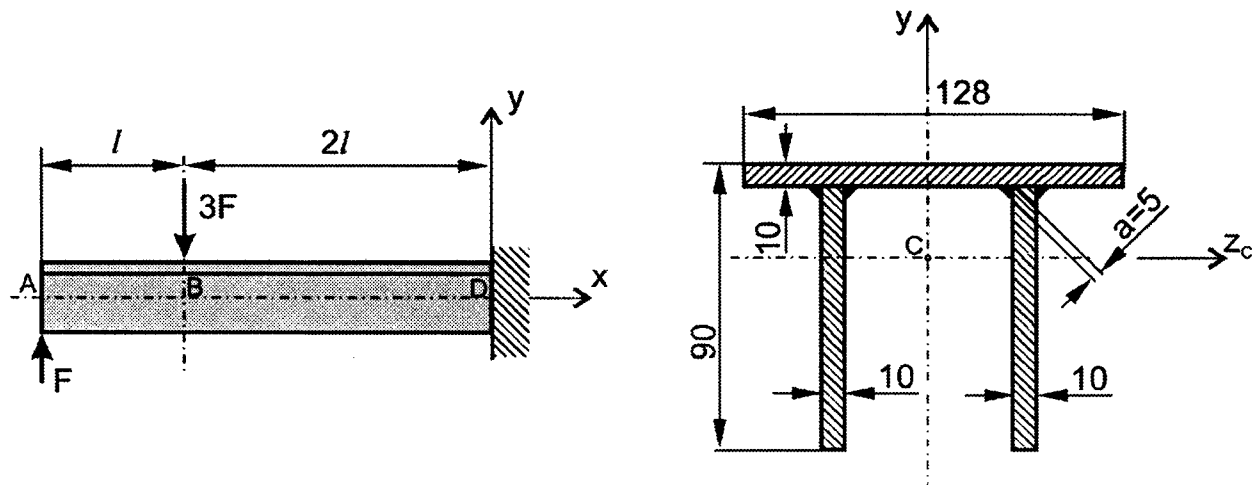
Wykresy M_g i M_s przedstawiono na rys. 2.32. Maksymalne naprężenia zredukowane występują w utwierdzeniu i wynoszą:

$$\sigma_{red,max} = \sigma_{red,A} = \frac{128 Fl}{\pi d^3}$$



Rys. 2.32

Zadanie 2.14. Belka wspornikowa ABD o długości $3l = 600$ mm utwierdzona jest na prawym końcu (punkt D). W punkcie A działa siła poprzeczna $F = 6$ kN skierowana do góry, a w punkcie B – siła $3F$ skierowana do dołu (rys. 2.33). Wymiary przekroju poprzecznego beki pokazano na rys. 2.33. Obliczyć maksymalne naprężenia zredukowane w belce oraz określić wyężenie materiału spoin.

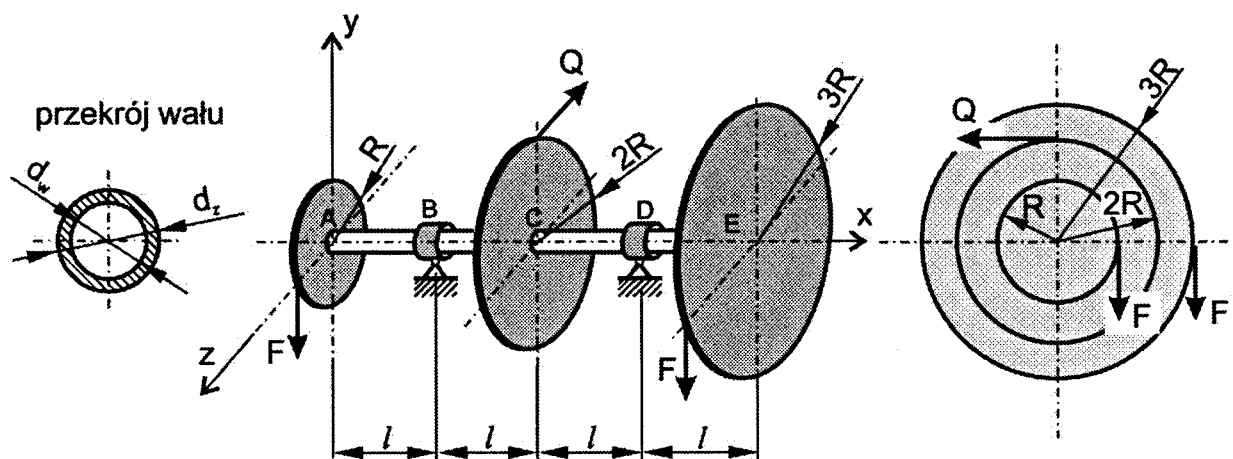


Rys. 2.33

ODPOWIEDŹ

Maksymalne naprężenie zredukowane występuje w dolnych włóknach przekroju utwierdzonego belki $\sigma_{red} = 94$ MPa. Naprężenia zredukowane w spoinach $\sigma_{red} = 34$ MPa.

Zadanie 2.15. Wał drążony o średnicach zewnętrznej $d_z = 40$ mm i wewnętrznej $d_w = 30$ mm z trzema kołami w punktach A, C i E o promieniach odpowiednio $R = 200$ mm, $2R$ i $3R$ ułożyskowany jest w punktach B i D. Długości odcinków wału $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = l = 400$ mm. Wał wraz z obciążeniem pokazano na rys. 2.34. Obliczyć dopuszczalną siłę F_{dop} , jeżeli wał wykonano z materiału o $k_r = 120$ MPa.

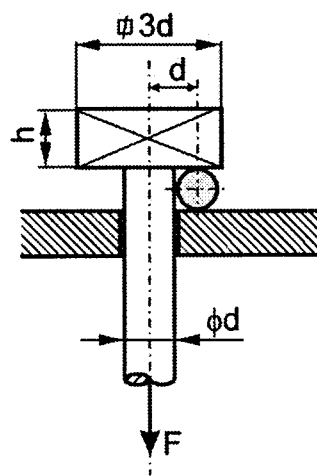


Rys. 2.34

ODPOWIEDŹ:

$$F_{dop} \leq 671 \text{ N.}$$

Zadanie 2.16. Stalowy sworzeń o średnicy d wpasowany jest suwliwie w pionowy przelotowy gładki otwór w dostatecznie grubej płycie. Prostopadłościenny łeb sworznia o wymiarach $3d \times 3d \times h$ opiera się dolną powierzchnią o walcową podporę (rys. 2.35). Sworzeń obciążony jest osiową siłą F . Obliczyć stosunek maksymalnych naprężeń zredukowanych w górnej części sworznia do naprężeń zredukowanych w dolnej części.

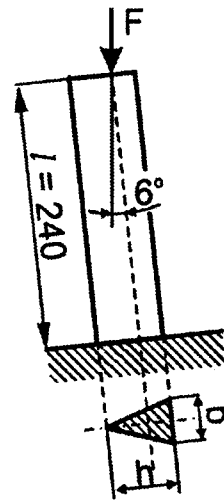


Rys. 2.35

ODPOWIEDŹ:

$$n = \frac{\sigma_{red,max}^g}{\sigma_{red}^d} = \frac{\frac{36F}{\pi d^2}}{\frac{4F}{\pi d^2}} = 9.$$

Zadanie 2.17. Żeliwny element (słup) ma długość $l = 240$ mm, a jego przekrój poprzeczny ma kształt równoramiennego trójkąta o podstawie $b = 40$ mm i wysokości $h = 60$ mm. Słup odchylony jest od pionu w płaszczyźnie jego pionowej symetrii o kąt $\alpha = 6^\circ$ (rys. 2.36). Słup obciążony jest pionową siłą $F = 30$ kN przyłożoną w środku ciężkości górnego przekroju. Naprężenia dopuszczalne żeliwa na rozciąganie i ściskanie wynoszą odpowiednio: $k_t = 40$ MPa i $k_c = 160$ MPa. Podać miejsce oraz wielkość maksymalnego wyężenia materiału. Naprężenia od ścinania pominać.

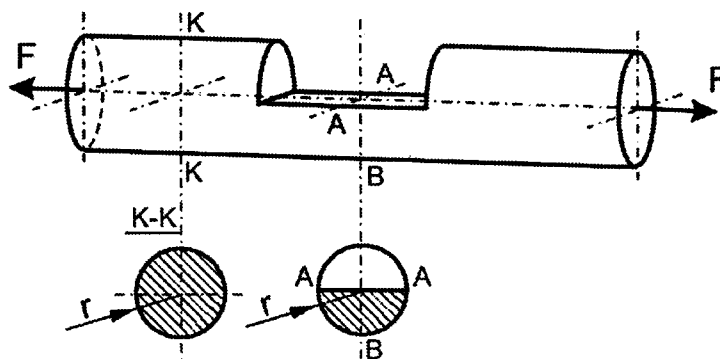


Rys. 2.36

ODPOWIEDŹ:

Największe wyężenie materiału występuje w przekroju dolnym (utwierdzenie). Wierzchołek trójkąta w tym przekroju jest ściskany naprężeniami $\sigma_I = |-150|$ MPa pochodzącymi od siły normalnej i momentu gnącego. W przekroju tym wzdłuż podstawy trójkąta występują naprężenia $\sigma_{II} = 38$ MPa. Wartości bezwzględne tych naprężeń stanowią około 94% odpowiednich naprężeń dopuszczalnych na ściskanie k_c i rozciąganie k_t . Wyężenie słupa jest nieco mniejsze od naprężeń dopuszczalnych.

Zadanie 2.18. Pręt o średnicy $d = 2r$ ma w części środkowej wybranie równe połowie przekroju poprzecznego pręta (rys. 2.37). Pręt rozciągany jest siłą F . Określić ile razy wyężenie materiału części środkowej (osłabionej) jest większe od wyężenia materiału pręta pełnego.

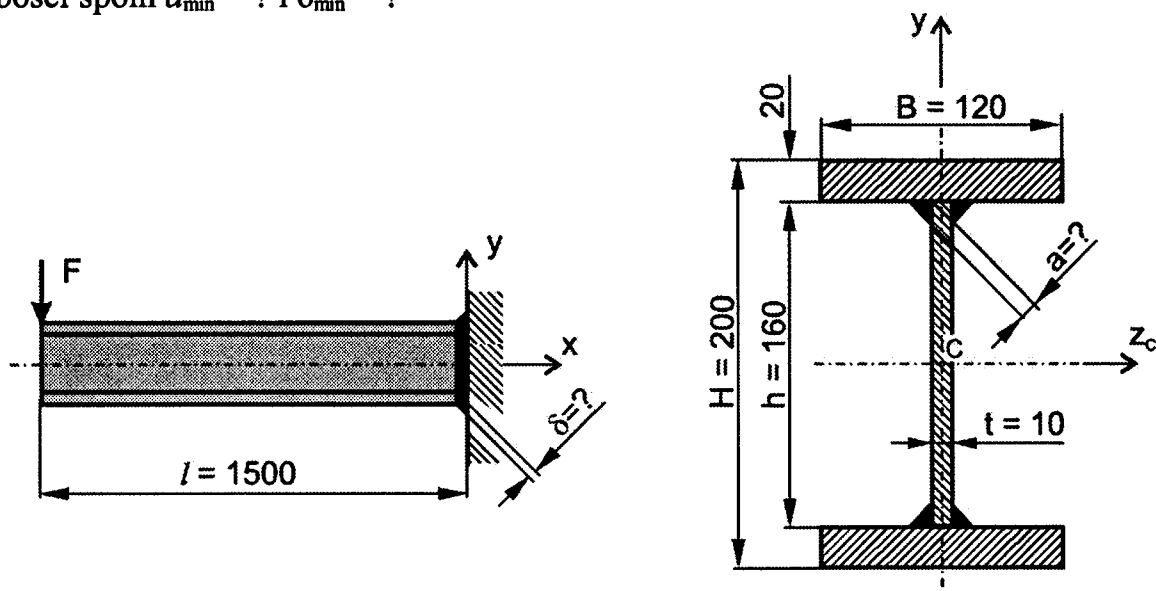


Rys. 2.37

ODPOWIEDŹ:

Wyężenie materiału górnej warstwy osłabionej części pręta jest większe w stosunku do wyężenia pręta pełnego o $n = 7,14$ razy.

Zadanie 2.19. Stalowy wspornik o długości $l = 1500$ mm, przekroju poprzecznym dwuteowym i wymiarach widocznych na rys. 2.38 w prawym końcu jest przyspawany do pionowej stalowej ściany spoiną pachwinową o grubości δ , a w lewym końcu obciążony pionową siłą F . Pasy przyspawane są do środka obustronnie spoinami pachwinowymi o grubości a . Naprężenie dopuszczalne dla materiału spoin wynosi $k_r = 140$ MPa. Znaleźć maksymalną wartość siły F , następnie określić minimalne grubości spoin $a_{\min} = ?$ i $\delta_{\min} = ?$



Rys. 2.38

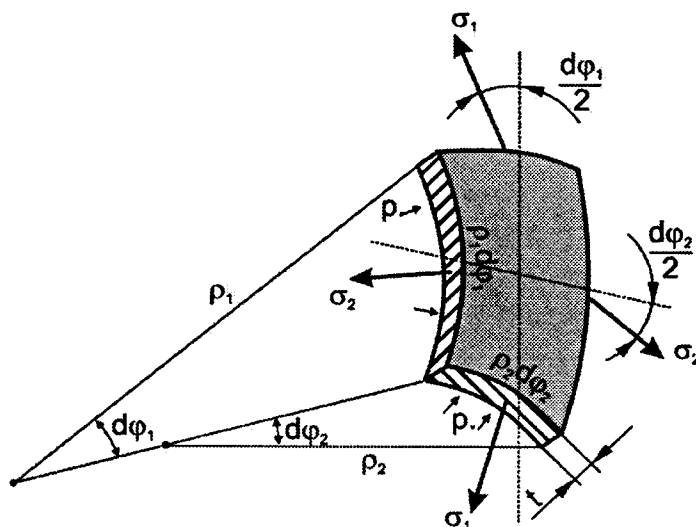
ODPOWIEDŹ:

$$F_{\max} = 39620 \text{ kN}, a_{\min} = 1,1 \text{ mm}, \delta_{\min} = 8,27 \text{ mm}.$$

3. ZBIORNIKI CIENKOŚCIENNE

3.1. Wprowadzenie

Zbiornik (naczynie) uważany jest za cienkościenny, jeżeli grubość t ścianki powłoki jest znacznie mniejsza od głównych promieni krzywizn powłoki ρ_1, ρ_2 ($t \ll \rho_1, t \ll \rho_2$).



Rys. 3.1

Jeżeli po obu stronach powłoki występuje różnica ciśnień $p = p_{\text{wewn.}} - p_{\text{zewn.}}$ ($p > 0$ – nadciśnienie, $p < 0$ – podciśnienie), to z sumy rzutów sił działających na element $(\rho_1 d\varphi_1 \times \rho_2 d\varphi_2) t$ (rys. 3.1) wynika, że między ekstremalnymi naprężeniami (naprężeniami głównymi) σ_1 i σ_2 a wielkością ciśnienia p istnieje zależność:

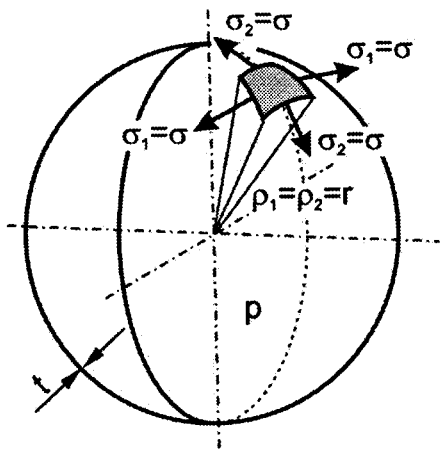
$$\frac{\sigma_1}{\rho_1} + \frac{\sigma_2}{\rho_2} = \frac{p}{t} \quad (3.1)$$

W inżynierskich obliczeniach zakłada się, że w powłoce cienkościennej występuje błonowy stan naprężenia ($\sigma_1 = \text{const}$, $\sigma_2 = \text{const}$, $\sigma_{\text{gnące}} = 0$). Ponieważ w rozwiązywanych zagadnieniach wartości bezwzględne naprężeń σ_1 i σ_2 są dużo większe od wartości nad- lub podciśnienia p , to przyjmuje się, że w powłoce występuje w przybliżeniu dwukierunkowy stan naprężenia.

Dla zbiornika kulistego ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) z równania 3.1 można wyznaczyć naprężenie $\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$ (rys. 3.2). Natomiast dla powłoki walcowej i stożkowej $\rho_2 = \infty$, więc po wyznaczeniu σ_1 naprężenie σ_2 wyznacza się z sumy rzutów sił na kierunek osi x (rys. 3.3 i 3.4). Najważniejsze równania dla wyżej wymienionych powłok zestawiono w tabelicy 3.1.

Tablica 3.1

powłoka kulista



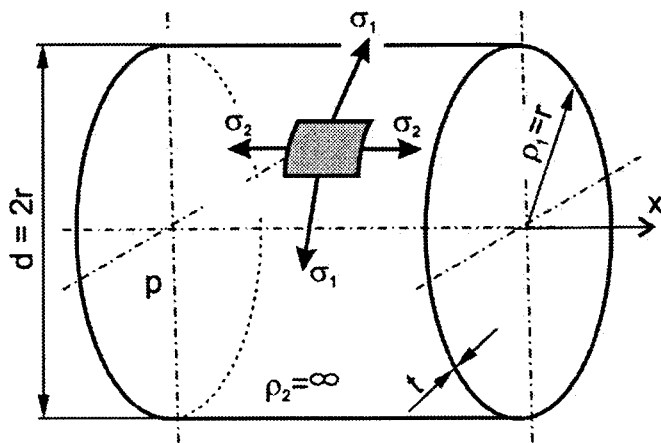
Rys. 3.2

$$\sigma = \frac{pr}{2t} = \frac{pd}{4t}$$

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sigma$$

$$\sigma_{zred} = \sigma = \frac{pd}{4t} = \frac{pr}{2t}$$

powłoka walcowa



Rys. 3.3

$$\sigma_1 = \frac{pr}{t} = \frac{pd}{2t}$$

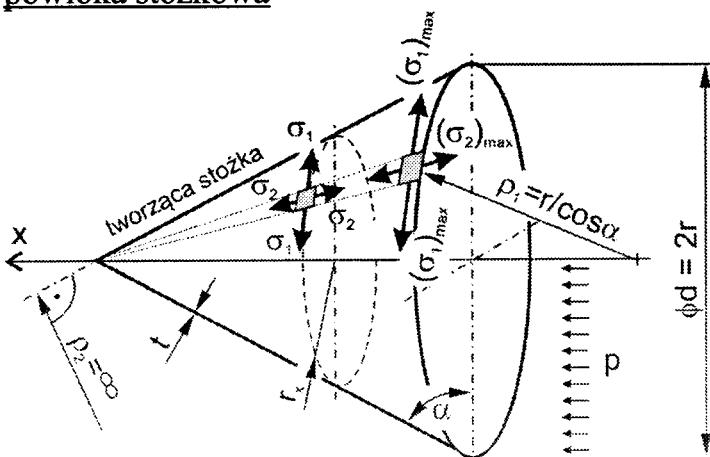
$$\sigma_2 = \frac{pr}{2t} = \frac{pd}{4t}$$

$$\sigma_{zred} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{3} \sigma_2$$

$$\sigma_{zred} = \sqrt{3} \frac{pd}{4t}$$

$$\sigma_{zred} \approx \frac{pd}{2,3t}$$

powłoka stożkowa



Rys. 3.4

$$\sigma_1 = \frac{pr_x}{t \cos \alpha}$$

$$\sigma_2 = \frac{pr_x}{2t \cos \alpha}$$

$$(\sigma_1)_{max} = \frac{pr}{t \cos \alpha}$$

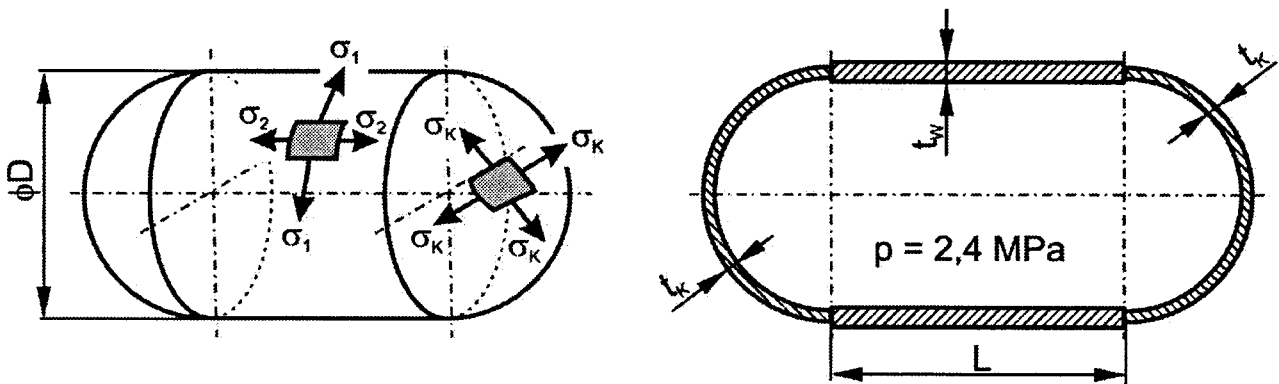
$$(\sigma_2)_{max} = \frac{pr}{2t \cos \alpha}$$

$$\sigma_{zred} = \sqrt{3} \sigma_2 = \sqrt{3} \frac{pr_x}{2t \cos \alpha}$$

$$(\sigma_{zred})_{max} = \sqrt{3} (\sigma_2)_{max} = \sqrt{3} \frac{pr}{2t \cos \alpha}$$

3.2. Przykłady obliczeń naprężeń i odkształceń w zbiornikach cienkościennych

Zadanie 3.1. Cienkościenny zbiornik walcowy o średnicy $D = 1,2$ m i długości $L = 3,6$ m zamknięty z obu stron półkulistymi dnami (rys. 3.5) obciążony jest ciśnieniem wewnętrznym (nadciśnieniem) $p = 2,4$ MPa. Zbiornik wykonany jest z blachy o następujących własnościach materiałowych: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, dopuszczalne naprężenia na rozciąganie $k_t = 80$ MPa. Wyznaczyć stosunek grubości ścianki części walcowej do grubości ścianki części kulistej tak, aby na linii styku tych części nie występowało zginanie, a następnie, wykorzystując warunek wytrzymałościowy, wyznaczyć minimalne grubości ścianek. Dla dobranych grubości ścianek obliczyć zmianę objętości zbiornika wywołaną panującym nadciśnieniem.



Rys. 3.5

R o z w i ą z a n i e . W dnach, to znaczy w ścianach części kulistych zbiornika panuje dwukierunkowy jednorodny stan naprężenia. W dowolnych przekrojach poprzecznych naprężenia wynoszą:

$$\sigma_K = \frac{pD}{4t_K},$$

natomiast w części walcowej występują naprężenia obwodowe σ_1 i naprężenia wzdłużne σ_2 :

$$\sigma_1 = \frac{pD}{2t_w}, \quad \sigma_2 = \frac{pD}{4t_w} = \frac{1}{2} \sigma_1.$$

Na linii styku dna kulistego z częścią walcową nie będzie zginania wówczas, gdy przyrost długości średnicy dna ΔD_K będzie równy przyrostowi średnicy części walcowej ΔD_w . Średnice są sobie równe $D = D_w = D_K$, więc odpowiednie przyrosty długości średnic wyznaczamy ze wzorów:

$$\Delta D_K = \varepsilon_K \cdot D = \left(\frac{\sigma_K}{E} - \nu \frac{\sigma_K}{E} \right) D = \frac{\sigma_K}{E} (1 - \nu) D = \frac{pD^2}{4Et_K} (1 - \nu)$$

$$\Delta D_w = \varepsilon_w \cdot D = \left(\frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} \right) D = \left(\frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{2E} \right) D = \frac{\sigma_1}{2E} (2 - \nu) D = \frac{pD^2}{4Et_w} (2 - \nu)$$

Z warunku $\Delta D_K = \Delta D_w$ wynika następująca zależność:

$$\frac{1}{t_K} (1 - \nu) = \frac{1}{t_w} (2 - \nu),$$

gdzie $\nu = 0,3$

$$\frac{t_w}{t_K} = \frac{2 - \nu}{1 - \nu} = \frac{1,7}{0,7} = 2,428.$$

Przy zachowaniu powyższych proporcji, posługując się hipotezą Hubera, wyznaczono naprężenia zredukowane w części walcowej i kulistej:

$$\sigma_{red.K} = \sqrt{\sigma_K^2 + \sigma_K^2 - \sigma_K \cdot \sigma_K} = \sigma_K = \frac{pD}{4t_K},$$

$$\sigma_{red.W} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} = \sqrt{(2\sigma_2)^2 + \sigma_2^2 - (2\sigma_2) \cdot \sigma_2} = \sqrt{3}\sigma_2,$$

$$\sigma_{red.W} = \sqrt{3}\sigma_2 = \sqrt{3} \frac{pD}{4t_w} = \frac{\sqrt{3}}{2,428} \frac{pD}{4t_K} \approx 0,713 \frac{pD}{4t_K}.$$

Z powyższego wynika, że przy zachowaniu wyznaczonych proporcji grubości ścianek bardziej wyęzione jest dno (część kulista zbiornika), tak więc dla materiału dna zastosowano warunek wytrzymałościowy:

$$\sigma_{red.K} = \frac{pD}{4t_K} \leq k_r,$$

z którego wyznaczono grubość ścianki dna:

$$t_K \geq \frac{pD}{4k_r} = \frac{2,4 \cdot 1200}{4 \cdot 80} = 9 \text{ mm},$$

czyli grubość ścianki części walcowej zbiornika powinna wynosić:

$$t_w = 2,428 \cdot t_K = 2,428 \cdot 9 = 21,85 \text{ mm}.$$

Ostatecznie przyjęto: $t_K = 9 \text{ mm}$ i $t_w = 22 \text{ mm}$.

Dla tych grubości naprężenia zredukowane wynoszą:

– w dnach

$$\sigma_{red.K} = k_r = 80 \text{ MPa},$$

– w części walcowej

$$\sigma_{red.W} = \sqrt{3} \frac{pD}{4t_w} = \sqrt{3} \frac{2,4 \cdot 1200}{4 \cdot 22} = 57 \text{ MPa} \leq k_r.$$

Dla dobranych grubości ścianek wyznaczono wydłużenia względne:

– w części walcowej, odpowiednio odkształcenia obwodowe i wzdłużne:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma_1}{2E} (2 - \nu) = \frac{pD}{4Et_w} (2 - \nu) = \frac{2,4 \cdot 1200}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 22} (2 - 0,3) = 2,8 \cdot 10^{-4},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{E} = \frac{\sigma_1}{2E} (1 - 2\nu) = \frac{pD}{4Et_w} (1 - 2\nu) = \frac{2,4 \cdot 1200}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 22} (1 - 2 \cdot 0,3) = 0,65 \cdot 10^{-4},$$

– w części kulistej:

$$\varepsilon_K = \frac{\sigma_K}{E} - \nu \frac{\sigma_K}{E} = \frac{\sigma_K}{E} (1 - \nu) = \frac{pD}{4Et_K} (1 - \nu) = \frac{2,4 \cdot 1200}{4 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 9} (1 - 0,3) = 2,8 \cdot 10^{-4}.$$

Przy małych odkształceniach względnych, względna zmiana (przyrost) objętości ciała odkształcalnego wynosi:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Jednostka $1 \times 1 \times 1$ objętości zbiornika doznaje przyrostów:

– w części walcowej:

$$\frac{\Delta V_K}{V_K} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

– w obydwu częściach kulistych:

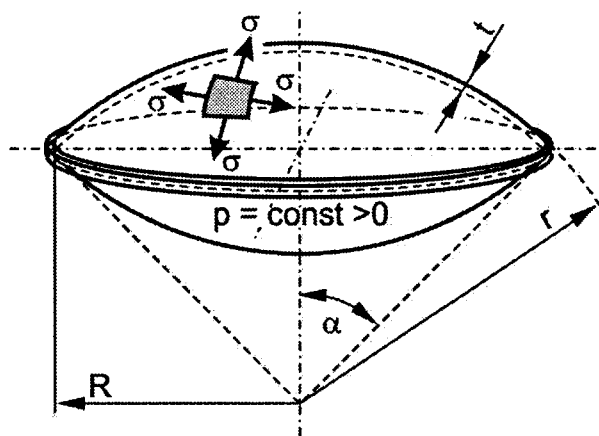
$$\frac{\Delta V_W}{V_W} = 3\varepsilon_K,$$

a więc przyrost objętość zbiornika:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta V_W + \Delta V_K = (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)V_W + 3\varepsilon_K \cdot V_K = (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{\pi D^2}{4} L + (3\varepsilon_K) \frac{4}{3} \pi \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \\ &= (2 \cdot 2,8 \cdot 10^{-4} + 0,65 \cdot 10^{-4}) \frac{\pi \cdot 1200^2}{4} 3600 + 3 \cdot 2,8 \cdot 10^{-4} \frac{4}{3} \pi \cdot 600^3 = 3,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3. \end{aligned}$$

Zmiana objętości zbiornika na skutek jego odkształcenia wynosi $\Delta V = 3,3 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = 3,3 \cdot \text{dm}^3 = 3,3$ litra.

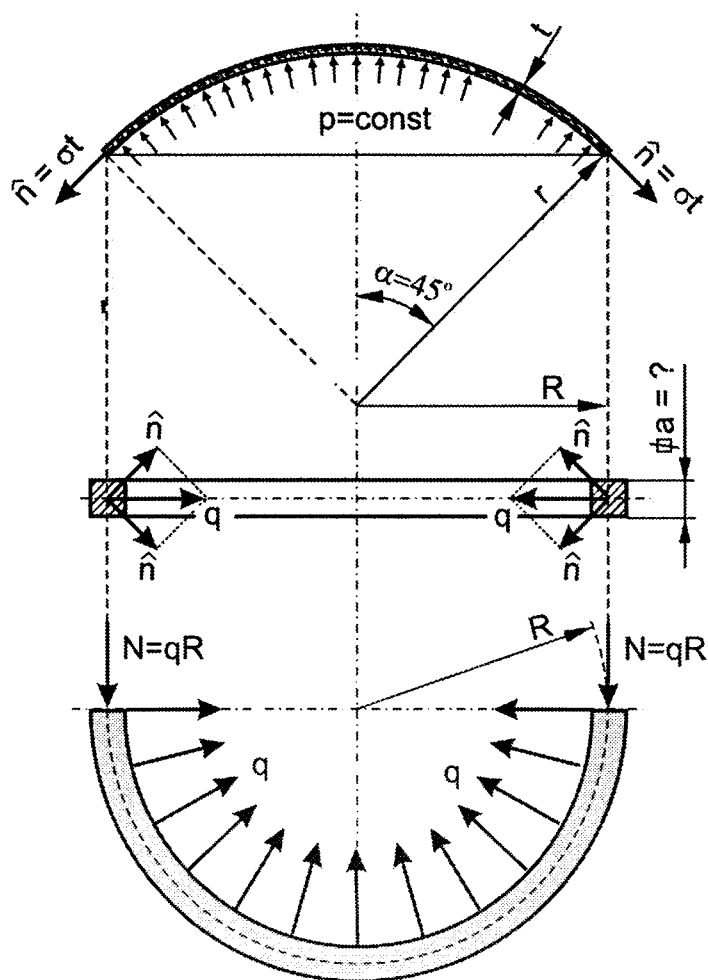
Zadanie 3.2. Cienkościenny zbiornik ciśnieniowy o kształcie zewnętrznym soczewkowym (rys. 3.6) wykonany jest z dwóch symetrycznych fragmentów powłoki kulistej. W swojej poziomej płaszczyźnie symetrii zbiornik wzmocniony jest pierścieniem, którego przekrój jest kwadratem o boku a . Dane: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$, naprężenia dopuszczalne na ściskanie i rozciąganie $k_r = k_c = 80$ MPa, ciśnienie wewnętrzne $p = 0,2$ MPa, promień warstwy środkowej czaszy $r = 2,4$ m, grubość ścianki $t = 5$ mm, kąt $\alpha = 45^\circ$. Wyznaczyć wartości naprężeń w ściance zbiornika, dobrać wymiar a kwadratowego przekroju poprzecznego pierścienia.



Rys. 3.6

R o z w i ą z a n i e . Naprężenia błonowe w ścianach zbiornika o powłokach kulistych wynoszą:

$$\sigma = \frac{pr}{2t} = \frac{0,2 \cdot 2400}{2 \cdot 5} = 48 \text{ MPa} \leq k_r = 80 \text{ MPa}.$$



Rys. 3.7

Obciążenie pierścienia wynikające z oddziaływania powłok przedstawiono na rys. 3.7. Przez \hat{n} oznaczono siłę normalną przypadającą na jednostkę długości powłoki, która w omawianym przypadku wynosi:

$$\hat{n} = \sigma t = \frac{pr}{2} = \frac{0,2 \cdot 2400}{2} = 240 \text{ N/mm.}$$

Wykorzystując zależności geometryczne przedstawione na rys. 3.7, wyznaczono jednostkowy nacisk promieniowy q działający na pierścień. Ponieważ $\alpha = 45^\circ$, więc:

$$q = \hat{n} \cdot \sqrt{2} = 240 \sqrt{2} = 339 \text{ N/mm.}$$

Obwodowa siła ściskająca pierścień:

$$N = qR = qr \cdot \sin \alpha = 339 \cdot 2400 \cdot \sin 45^\circ = 575302 \text{ N} = 575 \text{ kN.}$$

Z warunku wytrzymałościowego obowiązującego dla ściskania:

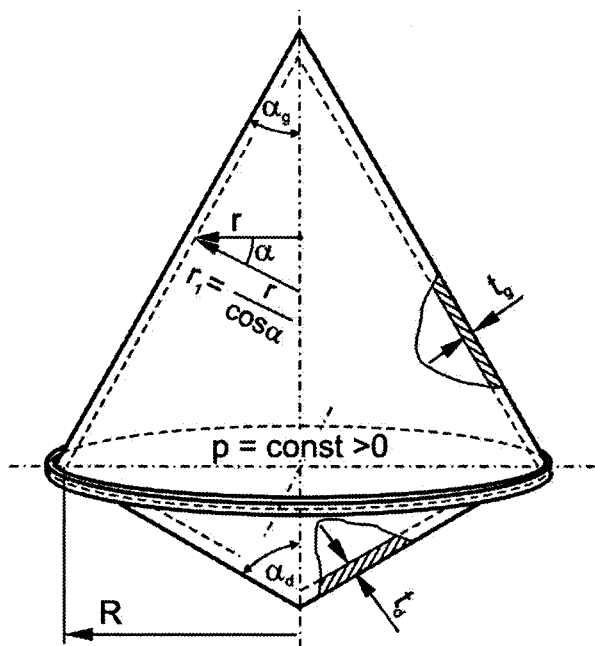
$$\sigma_p = \frac{N}{a^2} \leq k_c,$$

wyznaczono minimalny wymiar a przekroju poprzecznego:

$$a_{\min} = \sqrt{\frac{N}{k_c}} = \sqrt{\frac{575302}{80}} = 84,8 \text{ mm.}$$

Ostatecznie przyjęto długość boku kwadratowego przekroju poprzecznego $a = 85 \text{ mm}$. Należy zwrócić uwagę, że pierścień wzmacniający jest ściskany, choć w związku ze sposobem obciążenia wydawać by się mogło, że powinien być rozciągany. Zbiornik cienkościenny obciążony ciśnieniem wewnętrznym, odkształcając się dąży do osiągnięcia kształtu elipsoidalnego, tak więc rozpatrywany zbiornik o kształcie soczewkowym w płaszczyźnie pierścienia zmniejsza swoją poziomą średnicę, co wywołuje ściskanie pierścienia.

Zadanie 3.3. Cienkościenny zbiornik ciśnieniowy, składający się z dwóch różnych powłok stożkowych wzmocnionych w płaszczyźnie styku pierścieniem (rys. 3.8), obciążono nadciśnieniem wewnętrznym $p = 0,5 \text{ MPa}$. Dane: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$; naprężenia dopuszczalne na ściskanie i rozciąganie $k_r = k_c = 100 \text{ MPa}$; grubość górnej powłoki stożkowej $t_g = 5 \text{ mm}$; promień podstawy obu powłok stożkowych $R = 0,5 \text{ m}$; kąt między tworzącą stożka górnego a pionową osią symetrii zbiornika $\alpha_g = 30^\circ$; kąt dla stożka dolnego $\alpha_d = 60^\circ$. Określić jaka ma być grubość ścianki powłoki dolnej $t_d = ?$ zbiornika, aby maksymalne naprężenia zredukowane w środkowych warstwach ścianek obu powłok stożkowych były jednakowe. Znaleźć pole powierzchni przekroju poprzecznego pierścienia wzmacniającego.



Rys. 3.8

R o z w i ą z a n i e . Według hipotezy Hubera naprężenia zredukowane w środkowej powierzchni powłoki stożkowej osiągają wartość maksymalną w miejscu, gdzie promień r jest maksymalny ($r = R$) i w analizowanym przypadku dla powłoki górnej wynoszą:

$$\sigma_{red.max}^g = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{t_g \cos \alpha_g} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{0,5 \cdot 500}{5 \cdot \cos 30^\circ} = 50 \text{ MPa} \leq k_r = 100 \text{ MPa}.$$

W powłoce dolnej maksymalne naprężenia zredukowane mają mieć taką samą wartość jak w powłoce górnej, tak więc otrzymano warunek:

$$\sigma_{red.max}^d = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{t_d \cos \alpha_d} = \sigma_{red.max}^g,$$

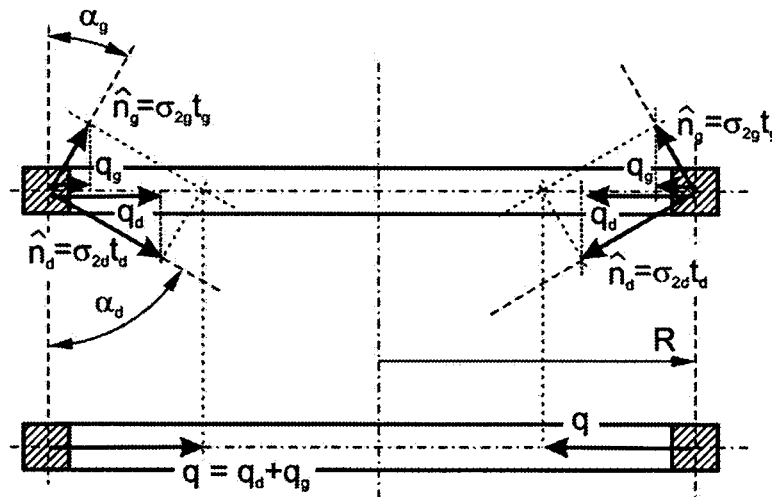
pozwalający wyznaczyć grubość ścianki powłoki dolnej, która wynosi:

$$t_d = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{\sigma_{red.max}^d \cos \alpha_d} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{0,5 \cdot 500}{50 \cdot \cos 60^\circ} = 8,65 \text{ mm}.$$

Ostatecznie przyjęto $t_d = 9 \text{ mm}$.

Należy zauważyć, że w tego typu zadaniach istnieje niezgodność promieniowych odkształceń każdego ze stożków i pierścienia. W rzeczywistych konstrukcjach zniwelowanie różnic odkształceń promieniowych wspólnych punktów konstrukcji prowadzi do wystąpienia przybrzegowych lokalnych spiętrzeń naprężeń wywołanych lokalnym zginaniem. W omawianym zadaniu znalezione naprężenia σ_{red} są mniejsze od naprężeń dopuszczalnych k_r i dotyczą punktów w warstwie środkowej ścian powłoki. W przekrojach, w których σ_{red} jest bliskie k_r , spiętrzenie naprężeń może w zewnętrznych warstwach powłoki powodować przybrzegowe niewskazane uplastycznienie materiału. Powyższa uwaga dotyczy wszystkich zadań tego rozdziału.

Na rys. 3.9 przedstawiono pierścień wzmacniający i siły jednostkowe \hat{n}_d i \hat{n}_g , jakimi oddziałują powłoki stożkowe na ten pierścień.



Rys. 3.9

Naprężenia wzdłużne σ_2 są to naprężenia skierowane wzdłuż tworzących stożków, występują one w przekrojach prostopadłych do tworzących. W omawianych powłokach naprężenia σ_2 (gdy $p = \text{const}$) osiągają swoje maksymalne wartości w ich podstawach, czyli dla $r = R$:

$$\sigma_{2g} = \frac{pR}{2t_g \cos \alpha_g}, \quad \sigma_{2d} = \frac{pR}{2t_d \cos \alpha_d}.$$

Wykorzystując zależności przedstawione na rys. 3.9, wyznaczony zostanie jednostkowy nacisk promieniowy q działający na pierścień:

$$q = q_d + q_g = \hat{n}_d \sin \alpha_d + \hat{n}_g \sin \alpha_g = \sigma_{2d} t_d \sin \alpha_d + \sigma_{2g} t_g \sin \alpha_g$$

$$q = \frac{1}{2} pR \tan \alpha_d + \frac{1}{2} pR \tan \alpha_g = \frac{pR}{2} (\tan \alpha_d + \tan \alpha_g)$$

$$q = \frac{0,5 \cdot 500}{2} (\tan 60^\circ + \tan 30^\circ) = 289 \text{ N/mm}.$$

Obwodowa siła ściskająca pierścień:

$$N = qR = 289 \cdot 500 = 144500 \text{ N} = 144,5 \text{ kN}.$$

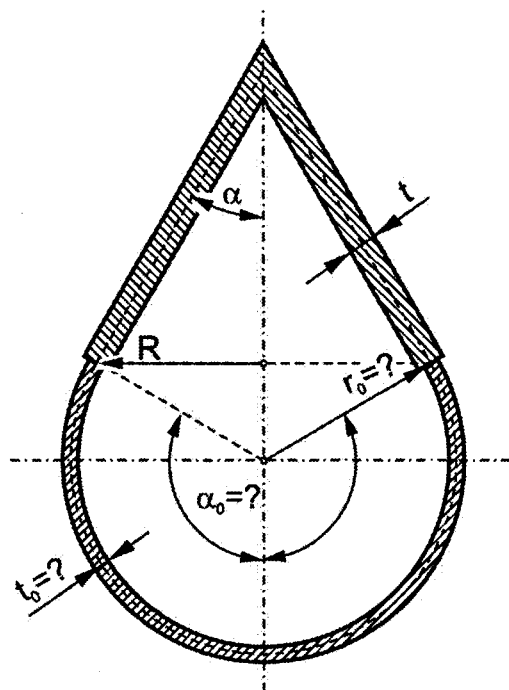
Z warunku wytrzymałościowego obowiązującego przy ściskaniu:

$$\sigma_p = \frac{N}{A} \leq k_c,$$

wyznaczono pole powierzchni przekroju poprzecznego pierścienia:

$$A \geq \frac{N}{k_c} = \frac{144500}{100} = 1445 \text{ mm}^2.$$

Zadanie 3.4. Cienkościenny zbiornik ciśnieniowy, w którym panuje nadciśnienie p składa się z części kulistej oraz stożkowej (rys. 3.10). Dla stożka dane są: promień podstawy R , grubość ścianki t oraz kąt $\alpha = 30^\circ$ między tworzącą stożka a osią symetrii zbiornika. Wyznaczyć wymiary: t_0 – grubość ścianki, r_0 – promień kuli oraz kąt α_0 dla części kulistej zbiornika (rys. 3.10) tak, aby w ściankach zbiornika występował jedynie stan błonowy. Dla tak dobranych wymiarów zbiornika wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane.



Rys. 3.10

Rozwiązanie. Aby we wszystkich punktach rozpatrywanego zbiornika cienkościennego występował błonowy stan naprężenia trzeba, żeby w linii styku obu części zbiornika nie występowało lokalne zginanie, więc muszą być spełnione równocześnie dwa następujące warunki:

- w miejscu łączenia się obu części zbiornika powierzchnia musi być ciągła, nie mogą występować załamania środkowych warstw ścianek;
- obwodowe wydłużenia jednostkowe części górnej (stożkowej) ε_1 i dolnej (kulistej) ε_0 w linii styku powinny być jednakowe.

Aby mógł być spełniony pierwszy z wyżej wymienionych warunków, gdy kąt stożka $\alpha = 30^\circ$, wówczas dla powłoki kulistej kąt α_0 musi być równy 120° (rys. 3.10).

Dla kąta α_0 promień kuli r_0 , który jest jednocześnie promieniem krzywizny środkowej warstwy powłoki kulistej i powłoki stożkowej przy jego podstawie $r_{1\max} = r_0$:

$$r_0 = r_{1\max} = \frac{R}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R.$$

Wykorzystując drugi z warunków wyznaczyć można grubość ścianki powłoki kulistej t_0 . Wydłużenia względne obu powierzchni w linii styku kolejno wynoszą:

- dla powierzchni stożkowej:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_1}{2E} = \frac{\sigma_1}{2E} (2 - \nu) = \frac{pr_{1\max}}{2Et} (2 - \nu) = \frac{pr_0}{2Et} (2 - \nu),$$

- dla powierzchni kulistej:

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} - \nu \frac{\sigma_0}{E} = \frac{\sigma_0}{E} (1 - \nu) = \frac{pr_0}{2Et_0} (1 - \nu).$$

Spełniając konieczny warunek równości odkształceń $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, otrzymujemy zależność:

$$\frac{pr_0}{2Et}(2-\nu) = \frac{pr_0}{2Et_0}(1-\nu),$$

z której wyznaczymy szukaną grubość ścianki części kulistej:

$$t_0 = t \frac{1-\nu}{2-\nu}.$$

Naprężenia zredukowane w warstwie środkowej powłoki kulistej (rys. 3.2) określone są wzorem:

$$\sigma_{red.K} = \frac{pr_0}{2t_0} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{pR}{t},$$

natomiast w warstwie środkowej powłoki stożkowej maksymalne naprężenia zredukowane (rys. 3.4) dotyczą podstawy stożka:

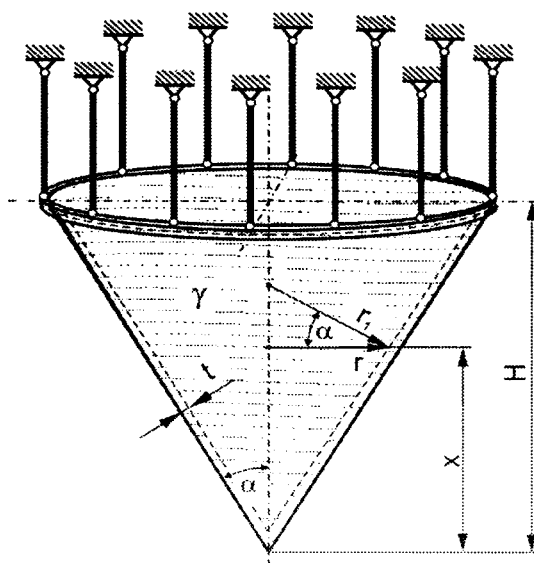
$$\sigma_{red.S} = \sqrt{\sigma_{1max}^2 + \sigma_{2max}^2 - \sigma_{1max} \cdot \sigma_{2max}} = \sqrt{(2\sigma_{2max})^2 + \sigma_{2max}^2 - 2\sigma_{2max} \cdot \sigma_{2max}} = \sqrt{3}\sigma_{2max},$$

$$\sigma_{red.S} = \sqrt{3}\sigma_{2max} = \sqrt{3} \frac{pR}{2t \cos \alpha} = \sqrt{3} \frac{pR}{2t \cos 30^\circ} = \frac{pR}{t}.$$

Z porównania wartości naprężeń w części kulistej i stożkowej wynika, że maksymalne naprężenia zredukowane w rozpatrywanym zbiorniku występują w części kulistej i gdy $\nu = 0,3$ wynoszą:

$$\sigma_{red.max} = \sigma_{red.K} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{2-\nu}{1-\nu} \frac{pR}{t} \approx 1,4 \frac{pR}{t}.$$

Zadanie 3.5. Cienkościenny zbiornik stożkowy (rys. 3.11) wzmocniony pierścieniem zawieszony jest na pionowych prętach i wypełniony w całości cieczą o ciężarze właściwym γ . Dane są: H – wysokość zbiornika, α – kąt zawarty między tworzącą stożka a jego pionową osią symetrii, t – grubość ścianki zbiornika, A_p – pole pracującego przekroju poprzecznego pierścienia wzmocniającego, A_0 – pole przekroju pręta, n – liczba prętów. Znaleźć naprężenia w prętach $\sigma_{r.pret}$, wyężenie powłoki stożkowej i naprężenia w pierścieniu wzmocniającym $\sigma_{c.pierscien}$.



Rys. 3.11

R o z w i ą z a n i e . Oznaczmy przez R promień podstawy powłoki stożkowej, a następnie wyrażmy ją przez wielkości dane w zadaniu:

$$R = H \tan \alpha .$$

Wszystkie pręty podtrzymujące zbiornik obciążone są siłami rozciągającymi pochodzącymi od ciężaru zbiornika i ciężaru cieczy. Pomijając ciężar zbiornika, ciężar cieczy można wyznaczyć z zależności:

$$G = \frac{1}{3} \pi R^2 H \cdot \gamma = \frac{1}{3} \pi H^3 \gamma \tan^2 \alpha$$

Naprężenia rozciągające jeden pręt wynoszą:

$$\sigma_{r.pret} = \frac{G}{nA_0} = \frac{\pi H^3 \gamma \tan^2 \alpha}{3 nA_0}$$

Do wyznaczenia rozkładu naprężeń w powłoce stożkowej wykorzystano zależność:

$$\frac{\sigma_1}{r_1} + \frac{\sigma_2}{r_2} = \frac{p_x}{t} ,$$

gdzie:

- r_1 i r_2 to promienie krzywizn rozpatrywanej powłoki, które po wykorzystaniu zależności geometrycznych widocznych na rys. 3.11 wyrazić można następująco:

$$r_1 = \frac{r}{\cos \alpha} = \frac{\frac{R}{H} x}{\cos \alpha} = \frac{x \tan \alpha}{\cos \alpha} , \quad r_2 = \infty$$

- t – grubość ścianki,
- p_x – ciśnienie hydrostatyczne zależne od x i wyrażone wzorem:

$$p_x = \gamma (H - x) .$$

Wykorzystując powyższe, wyznaczyć można równanie opisujące zmianę naprężeń głównych obwodowych σ_1 w funkcji położenia x :

$$\sigma_1 = \frac{p_x r_1}{t} = \frac{\gamma (H - x) x \tan \alpha}{t \cos \alpha} .$$

Jest to równanie paraboli, zgodnie z którym naprężenia obwodowe σ_1 dla $x = 0$ i $x = H$ przyjmują wartość zero, a ich wartość maksymalna dla $x = H/2$ wynosi:

$$\sigma_{1max} = \frac{\gamma H^2 \tan \alpha}{4 t \cos \alpha} .$$

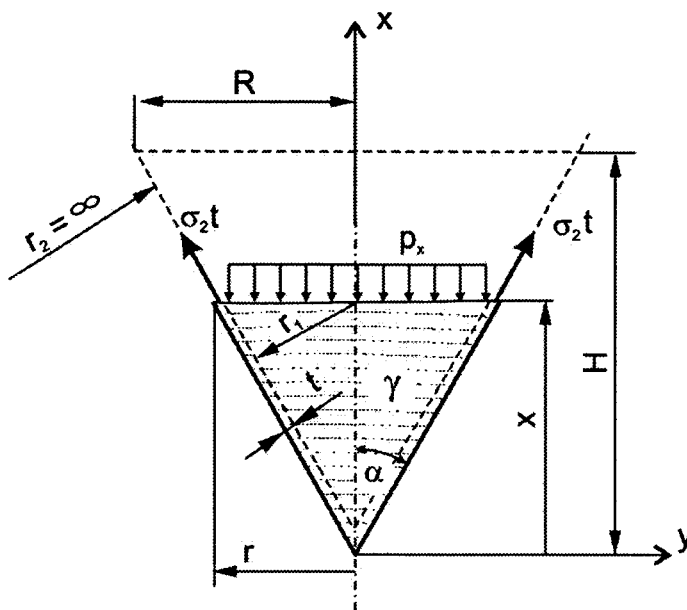
Dla odciętego fragmentu zbiornika (rys. 3.12) zapisać można równanie równowagi – sumę rzutów na oś pionową x wszystkich sił pochodzących od: naprężenia σ_2 na polu przekroju ścianek zbiornika, ciśnienia hydrostatycznego na odciętych przekroju

zbiornika i ciężaru cieczy w odciętej części zbiornika, działających na odcięty fragment zbiornika:

$$\sum F_{ix} = (\sigma_2 t) \cos \alpha \cdot (2\pi r) - p_x \pi r^2 - \frac{1}{3} \pi r^2 x \gamma = 0.$$

Z powyższego równania mamy:

$$\sigma_2 = \frac{p_x r}{2 t \cos \alpha} + \frac{r x \gamma}{6 t \cos \alpha} = \frac{(H-x) r \gamma}{2 t \cos \alpha} + \frac{r x \gamma}{6 t \cos \alpha} = \frac{(3H-2x) x \gamma \tan \alpha}{6 t \cos \alpha}.$$



Rys. 3.12

Wartości naprężeń obwodowych σ_1 , wzdłużnych σ_2 i zredukowanych σ_{red} wyznaczonych zgodnie z hipotezą Hubera ze wzoru:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

dla różnych wartości x zestawiono w tabelicy 3.2, w której $\sigma = \sigma_{1max} = \frac{H^2 \gamma \tan \alpha}{4 t \cos \alpha}$

Tablica 3.2

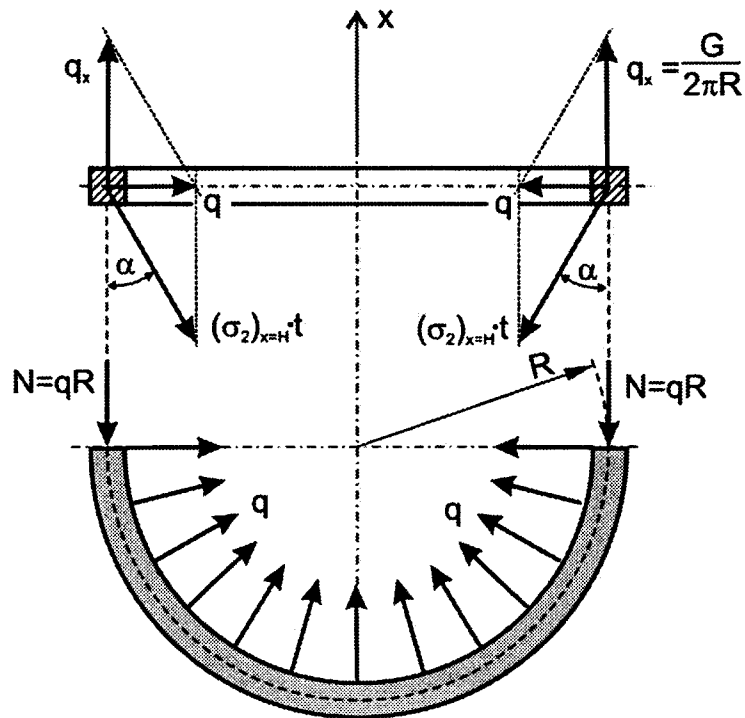
x	σ_1	σ_2	σ_{red}
0	0	0	0
$\frac{1}{4} H$	$\frac{3}{4} \sigma$	$\frac{5}{12} \sigma$	$\frac{\sqrt{61}}{12} \sigma \approx 0,61 \sigma_{1max}$
$\frac{1}{2} H$	$\sigma = \sigma_{1max}$	$\frac{2}{3} \sigma$	$\frac{\sqrt{7}}{3} \sigma \approx 0,88 \sigma_{1max}$
$\frac{3}{4} H$	$\frac{3}{4} \sigma$	$\frac{3}{4} \sigma$	$\frac{3}{4} \sigma = 0,75 \sigma_{1max}$
H	0	$\frac{2}{3} \sigma$	$\frac{2}{3} \sigma \approx 0,67 \sigma_{1max}$

Aby wyznaczyć naprężenia występujące w pierścieniu wzmacniającym, należy najpierw wyznaczyć jednostkowy nacisk promieniowy q działający na pierścień. W tym celu należy wykorzystać zależności przedstawione na rys. 3.13, z których wynika, że:

$$q = (\sigma_2|_{x=H} \cdot t) \cdot \sin \alpha$$

Siła ściskająca pierścień wzmacniający wynosi:

$$N = qR = (\sigma_2|_{x=H} \cdot t) \cdot \sin \alpha \cdot R = \frac{H^2 \gamma \tan \alpha}{6t \cos \alpha} t H \tan \alpha \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} \gamma H^3 \tan^3 \alpha.$$



Rys. 3.13

Naprężenia ściskające występujące w pierścieniu wzmacniającym wynoszą:

$$\sigma_{c.pierscien} = \frac{N}{A_p} = \frac{\gamma H^3 \tan^3 \alpha}{6 A_p} = \frac{\gamma R^3}{6 A_p}.$$

3.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 3.6. W cienkościennym zbiorniku panuje nadciśnienie $p = 1,6$ MPa (16 at). Zbiornik ten wykonany jest ze stali, dla której $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\nu = 0,3$. Długość rozpatrywanej części walcowej wynosi $L = 2$ m, średnica $D = 2$ m i grubość ścianki $t = 20$ mm. Wyznaczyć naprężenia zredukowane, określić przyrosty średnicy ΔD i długości ΔL części walcowej zbiornika oraz zmianę jego objętości ΔV .

ODPOWIEDŹ:

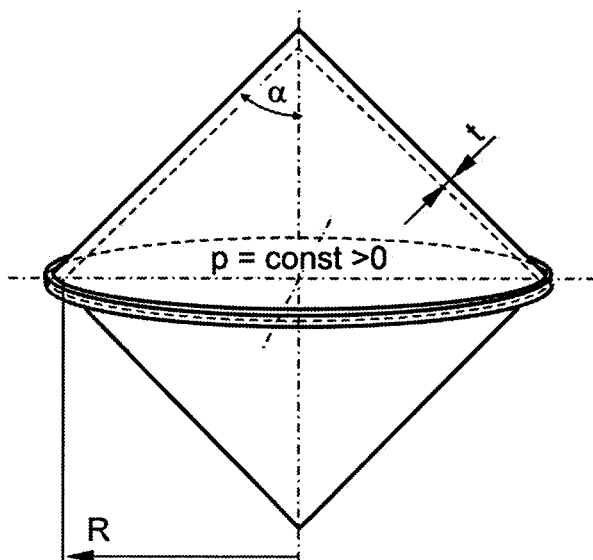
$$\sigma_{red} = 69 \text{ MPa}, \quad \Delta D = 0,68 \text{ mm}, \quad \Delta L = 0,32 \text{ mm}, \\ \Delta V = 9,55 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = 9,55 \text{ dm}^3 = 9,55 \text{ litra}.$$

Zadanie 3.7. W cienkościennym zbiorniku kulistym o średnicy D i grubości ścianki t panuje nadciśnienie p . Zbiornik wykonany jest ze stali, dla której $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\nu = 0,3$. Wyznaczyć naprężenia zredukowane, określić przyrosty średnicy ΔD i objętości ΔV zbiornika.

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_{red} = \frac{pD}{rt}, \quad \Delta D = \frac{pD^2(1-\nu)}{4tE}, \quad \Delta V = \frac{\pi(1-\nu)}{8E} \frac{pD^4}{t}.$$

Zadanie 3.8. Cienkościenny stalowy zbiornik ciśnieniowy, składający się z dwóch takich samych powłok stożkowych wzmocnionych w płaszczyźnie styku pierścieniem (rys. 3.14), obciążono nadciśnieniem wewnętrznym $p = 0,5 \text{ MPa}$. Dane: własności materiałowe dla powłok stożkowych i pierścienia $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$; naprężenia dopuszczalne na ściskanie i rozciąganie $k_r = k_c = 160 \text{ MPa}$; grubość powłok $t = 5 \text{ mm}$; promień podstawy $R = 1 \text{ m}$; kąt między tworzącą stożków a pionową osią symetrii $\alpha = 45^\circ$. Wyznaczyć maksymalne naprężenia zredukowane w warstwie środkowej ścianek powłok. Znaleźć pole powierzchni pracującego przekroju poprzecznego pierścienia wzmacniającego $A_p = ?$ przy założeniu, że ściskanemu pierścieniowi nie grozi utrata stateczności.

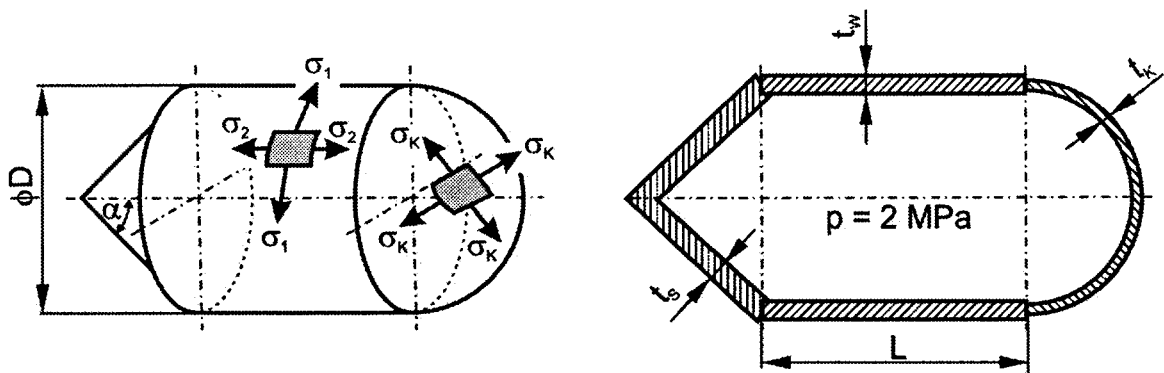


Rys. 3.14

ODPOWIEDŹ:

$$\sigma_{red} = 123 \text{ MPa}; \quad A_p \geq 3125 \text{ mm}^2.$$

Zadanie 3.9. Cienkościenny zbiornik walcowy o średnicy $D = 1 \text{ m}$ i długości $L = 3 \text{ m}$ zamknięty jest z jednej strony dnem kulistym, a z drugiej powłoką stożkową o kącie pomiędzy tworzącą a osią symetrii $\alpha = 45^\circ$ (rys. 3.15). Zbiornik obciążony jest nadciśnieniem wewnętrznym $p = 2 \text{ MPa}$. Zbiornik wykonany jest z blachy o następujących własnościach materiałowych: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\nu = 0,3$; dopuszczalne naprężenia na rozciąganie $k_r = 120 \text{ MPa}$.



Rys. 3.15

Wyznaczyć stosunek grubości ścianki części walcowej zbiornika do grubości ścianki części kulistej t_w/t_k oraz grubości ścianki części walcowej do części stożkowej t_w/t_k tak, aby na liniach styku tych części nie występowało zginanie. Następnie, wykorzystując warunek wytrzymałościowy, wyznaczyć minimalne grubości ścianek.

ODPOWIEDŹ:

$$\frac{t_w}{t_k} = \frac{2-\nu}{1-\nu} = (2,43)_{\nu=0,3}; \quad \frac{t_w}{t_s} = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707;$$

$$(t_k)_{min} = \frac{pD}{4k_r} = \frac{2 \cdot 1000}{4 \cdot 120} = 4,17 \text{ mm}; \quad t_w = 10,12 \text{ mm}; \quad t_s = 14,3 \text{ mm}.$$

4. WYBOCZENIE PRĘTÓW ŚCISKANYCH OSIOWO

4.1. Wprowadzenie

Pręt prosty poddany osiowemu ścisnaniu siłą F pozostaje prostym, dopóki wartość siły ściskającej jest mniejsza od pewnej jej wartości nazywanej siłą krytyczną F_{kr} . Przy sile $F = F_{kr}$ możliwa jest równowaga zarówno dla prostoliniowego, jak również dla wyboczonego (wygiętego) pręta. Wartość siły krytycznej zależy od maksymalnej smukłości pręta, która jest wielkością bezwymiarową określoną wzorem:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} \quad (4.1)$$

gdzie: l_w – długość wyboczeniowa pręta. Dla pręta prostego o długości l , podpartego przegubowo na obu końcach, długość wyboczeniowa $l_w = l$;
 i_{min} – minimalne ramię (promień) bezwładności przekroju poprzecznego pręta:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} \quad ; \quad (4.2)$$

I_{min} – najmniejszy główny centralny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta;

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta ($A = \text{const}$ na całej długości pręta).

W zagadnieniach stateczności (wyboczenia) siły i naprężenia ściskające przyjmuje się jako dodatnie.

Wyboczenie sprężyste

Pręty smukłe tracą stateczność (ulegają wyboczeniu) w zakresie sprężystym, jeżeli działające w nich krytyczne naprężenia ściskające są nie większe od granicy proporcjonalności materiału na ścisnienie, czyli gdy $\sigma_{kr} \leq \sigma_{prop}$.

Dla wyboczenia sprężystego, naprężenia krytyczne przy osiowym ścisnaniu według Eulera określone są wzorem:

$$\sigma_{kr}^E = \frac{\pi^2 E}{S_{max}^2} \quad . \quad (4.3)$$

Z warunku $\sigma_{kr}^E \leq \sigma_{prop}$ wynika, że sprężyste wyboczenie zachodzi, gdy maksymalna smukłość pręta jest większa od smukłości granicznej S_{gr} , czyli gdy:

$$S_{max} \geq S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop}}}. \quad (4.4)$$

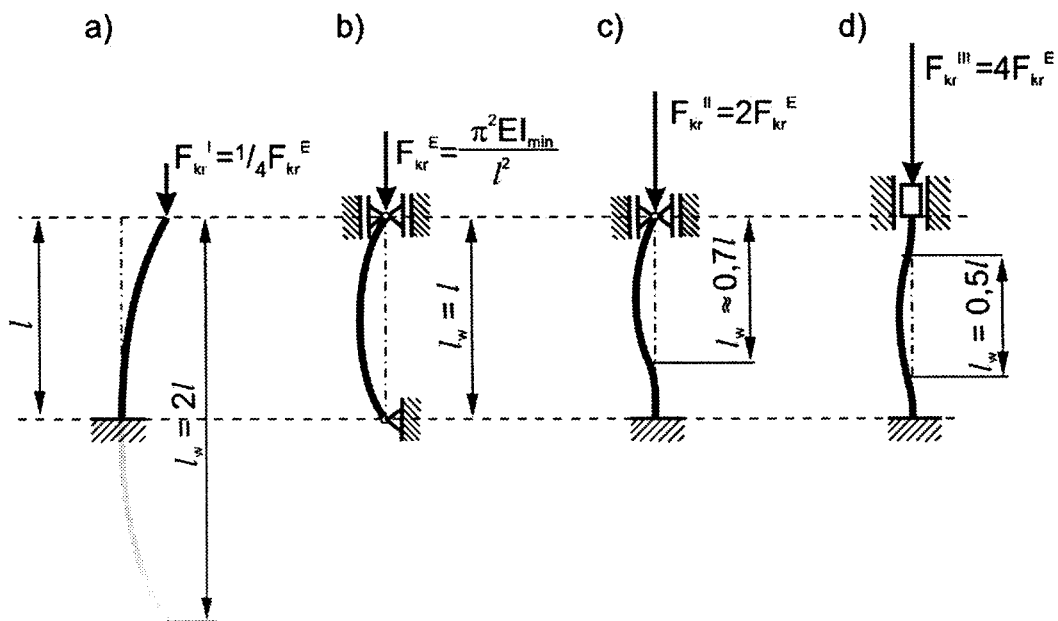
Moduł sprężystości (Younga) w normalnych zewnętrznych warunkach termicznych praktycznie dla wszystkich stali przyjmuje się w przybliżeniu $E \approx 2 \cdot 10^5$ MPa. Natomiast granica proporcjonalności zależy od gatunku stali, a zatem smukłość graniczna pręta zależy od gatunku stali. Dla stali S235JR (dawniej St3S) smukłość graniczna wynosi $S_{gr} \approx 100$.

Siła krytyczna, przy której następuje wyboczenie sprężyste pręta ściskanego wynosi:

$$F_{kr}^E = \sigma_{kr}^E \cdot A = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{l_w}{\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}}\right)^2} \cdot A = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_w^2}. \quad (4.5)$$

Wzory (4.3) i (4.5) są wzorami Eulera dla naprężenia krytycznego i siły krytycznej pręta ściskanego osiowo.

Długość wyboczeniowa l_w pręta o długości l zależy od warunków zamocowania jego końców. Na rys. 4.1 pokazano długości wyboczeniowe prętów dla czterech charakterystycznych przypadków zamocowania ich końców.

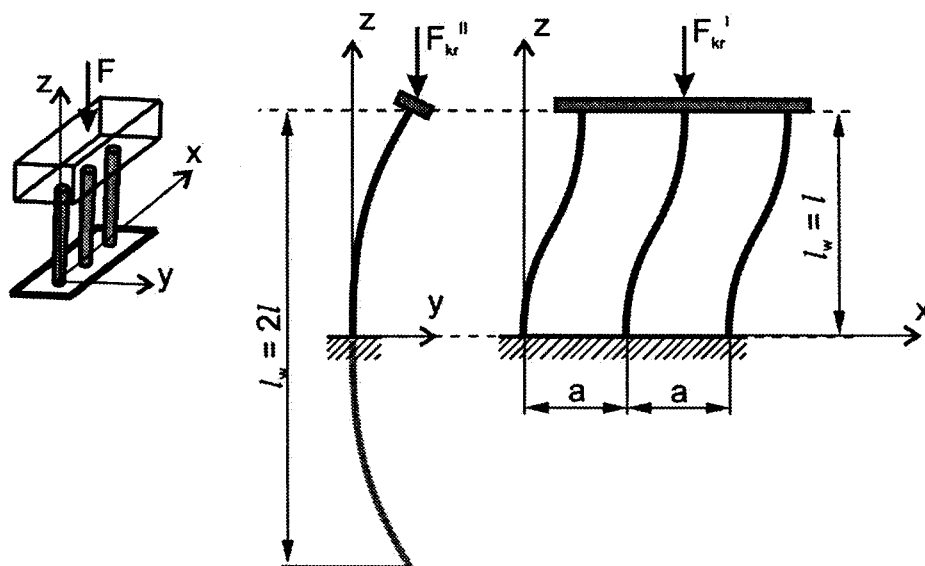


Rys. 4.1

Z rys. 4.1 widać, że długości wyboczeniowe prętów są równe długości jednej półfali sinusoidy wyboczonego pręta. Gdyby pręty pokazane na rys. 4.1 miały takie same wartości: modułu Younga E , minimalnych promieni bezwładności i_{min} i takie same

długości l , to przy najmniejszej sile krytycznej wyboczyłby się pręt utwierdzony na jednym końcu i swobodny na drugim (rys. 4.1a – pręt o największej długości wyboczeniowej $l_w = 2l$). Największa siła krytyczna byłaby dla pręta utwierdzonego na obu końcach (utwierdzenie końca obciążonego musi być przesuwne, np. w tulei) – pręt o najmniejszej długości wyboczeniowej $l_w = \frac{1}{2} l$ (rys. 4.1d).

Pręty mogą mieć różne długości wyboczeniowe, a zatem i różne smukłości w dwu wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Na rys. 4.2 pokazana jest konstrukcja składająca się z trzech jednakowych prętów utwierdzonych na dole, a u góry połączonych sztywno poprzez poziomą nieodkształcalną trawersę (poprzeczkę). Trawersa obciążona jest symetrycznie pionową siłą F .



Rys. 4.2

Jeżeli trawersa (rys. 4.2) może przemieszczać się w płaszczyźnie xz oraz w płaszczyźnie yz , to długość wyboczeniowa prętów w płaszczyźnie xz wynosi $l_w = l$, natomiast w płaszczyźnie prostopadłej (płaszczyzna yz) $l_w = 2l$.

Wyboczenie niesprężyste (sprężysto-plastyczne)

Wzór Eulera (4.3) na naprężenia krytyczne wyboczenia sprężystego jest ważny, gdy spełniona jest nierówność (4.4) czyli gdy $\sigma_{kr}^E \leq \sigma_{prop}$. W prętach o smukłości S_{max} mniejszych od smukłości granicznej S_{gr} , wyboczenie pręta występuje przy naprężeniach krytycznych zawartych w przedziale $\sigma_{prop} \leq \sigma_{kr} \leq \sigma_{pl}$, gdzie σ_{pl} jest granicą plastyczności na ściskanie.

Na rys. 4.3 przedstawiono wykresy naprężeń krytycznych w funkcji maksymalnych smukłości prętów ulegających wyboczeniu w zakresie sprężystym ($\sigma_{kr} \leq \sigma_{prop}$) oraz w zakresie niesprężystym (sprężysto-plastycznym) gdy $\sigma_{prop} \leq \sigma_{kr} \leq \sigma_{pl}$.

Naprężenia krytyczne wyboczenia sprężystego, dla smukłości $S_{max} \geq S_{gr}$, oblicza się ze wzoru Eulera (4.3). Wzór Eulera jako funkcja $\sigma_{kr}(S_{max})$ jest hiperbolą.

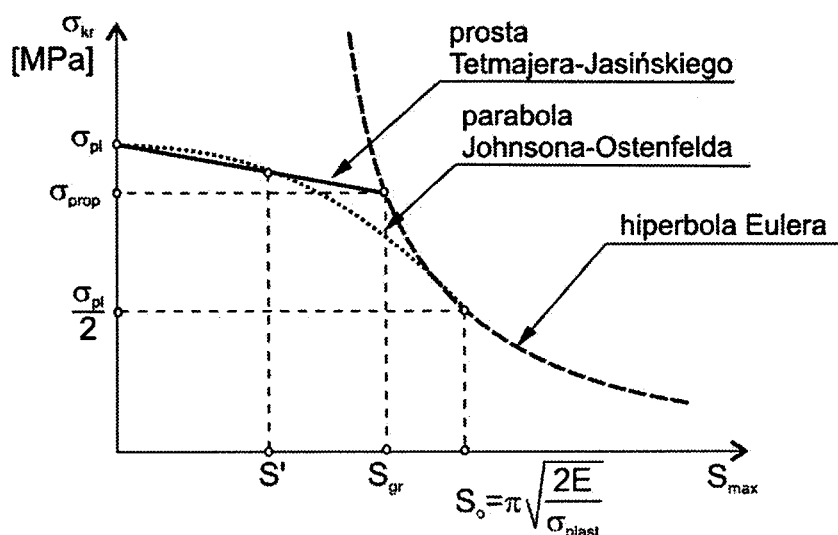
W przedziale $0 < S_{max} \leq S_{gr}$, w którym $\sigma_{prop} \leq \sigma_{kr} \leq \sigma_{pl}$ przybliżone wartości naprężeń krytycznych oblicza się ze wzorów:

$$\sigma_{kr} = \sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl} - \sigma_{prop.}}{S_{gr}} S_{max} \quad \text{- prosta Tetmajera-Jasińskiego,} \quad (4.6)$$

$$\sigma_{kr} = \sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl}}{2} \cdot \left(\frac{S_{max}}{S_0}\right)^2 \quad \text{- parabola Johnsona-Ostenfelda,} \quad (4.7)$$

gdzie S_0 jest smukłością, przy której hiperbola Eulera i parabola Johnsona-Ostenfelda mają wspólną styczną, a wartości naprężeń krytycznych są sobie równe. Smukłość S_0 wyznaczmy ze wzoru:

$$S_0 = \pi \sqrt{\frac{2E}{\sigma_{pl}}} \quad (4.8)$$



Rys. 4.3

Badania doświadczalne wykazały, że w obliczeniach inżynierskich mogą być stosowane oba wzory (4.6) i (4.7). Dla stopów aluminium (durale) oraz miedzi (mosiądz) wyniki obliczeń uzyskane ze wzoru Johnsona-Ostenfelda (4.7) są bliższe badaniom doświadczalnym.

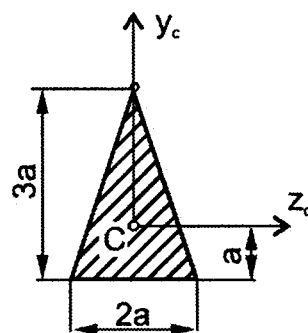
Dopuszczalną siłę ściskającą pręt (słup) określa się ze wzoru:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{n_w}, \quad (4.9)$$

gdzie n_w jest współczynnikiem bezpieczeństwa na wyoboczenie. Współczynniki bezpieczeństwa na wyoboczenie dla prętów stalowych przyjmuje się najczęściej w granicach $n_w = 1,5 \div 2,5$, a w słupach żelbetowych nawet jeszcze większe.

4.2. Przykłady obliczeń stateczności prętów ściskanych

Zadanie 4.1. Pręt o długości $l = 1,2$ m wykonany ze stali, dla której $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = 240$ MPa, $E = 2,06 \cdot 10^5$ MPa ma przekrój poprzeczny o kształcie równoramiennego trójkąta o podstawie $b = 2a$ i wysokości $h = 3a$, gdzie $a = 2$ cm (rys. 4.4). Wykonano trzy takie pręty i zamocowano je w sposób pokazany na rys. 4.5.

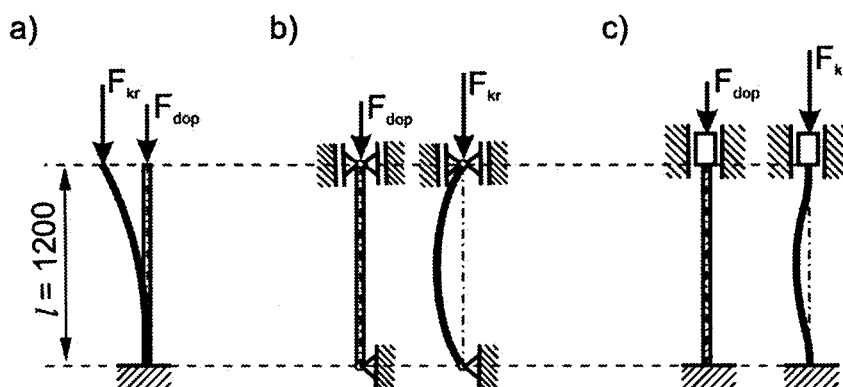


Rys. 4.4

Obliczyć dopuszczalne wartości siły F_{dop} dla tych trzech przypadków warunków brzegowych. Współczynnik bezpieczeństwa na wyoboczenie n_w zależy od smukłości pręta, jego wartość rośnie wraz ze wzrostem smukłości pręta.

W rozpatrywanym zadaniu należy przyjąć:

- $n_w = 2$ dla wyoboczenia niesprężystego, gdy $S_{max} < S_{gr}$;
- $n_w = 2,5$ dla $S_{gr} \leq S_{max} \leq 1,5S_{gr}$ (pręt o średniej smukłości);
- $n_w = 3,5$ dla $S_{max} > 1,5S_{gr}$ (pręt bardzo smukły);



Rys. 4.5

R o z w i ą z a n i e . Pole powierzchni przekroju każdego z prętów:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{2a \cdot 3a}{2} = 3a^2 = 3 \cdot (20)^2 = 1200 \text{ mm}^2.$$

Główne centralne osie bezwładności rozpatrywanego przekroju poprzecznego pręta pokazano na rys. 4.4. Wartości momentów bezwładności przekroju poprzecznego wynoszą:

$$I_{max} = I_{z_c} = \frac{b \cdot h^3}{36} = \frac{2a \cdot (3a)^3}{36} = 1,5 a^4 = 1,5 \cdot (20)^4 = 2,4 \cdot 10^5 \text{ mm}^4,$$

$$I_{min} = I_{y_c} = 2 \frac{h \cdot (b/2)^3}{12} = 2 \frac{3a \cdot a^3}{12} = 0,5 a^4 = 0,5 \cdot (20)^4 = 0,8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4.$$

Minimalne ramię (promień) bezwładności:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{80 \cdot 10^3}{1,2 \cdot 10^3}} = 8,16 \text{ mm.}$$

Smukłość graniczna pręta:

$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop.}}} = \pi \sqrt{\frac{2,06 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Przypadek 1 – pręt przedstawiony na rys. 4.5a.

Długość wyboczeniowa pręta:

$$l_w = 2 \cdot l = 2400 \text{ mm.}$$

Smukłość maksymalna:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{2400}{8,16} = 294 > S_{gr} = 100.$$

Rozpatrywany pręt ma smukłość maksymalną większą od smukłości granicznej, czyli ulegnie wyboczeniu sprężystemu przy naprężeniu krytycznym mniejszym od granicy proporcjonalności materiału. Siłę krytyczną w tym przypadku oblicza się ze wzoru Eulera:

$$F_{kr}^{(a)} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot 0,8 \cdot 10^5}{2400^2} = 28238 \text{ N} \approx 28,2 \text{ kN.}$$

Pręt jest bardzo smukły, dlatego współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie przyjęto $n_w = 3,5$. Dla pręta z rys. 4.5a dopuszczalna siła ściskająca wynosi:

$$F_{dop}^{(a)} = \frac{F_{kr}^{(a)}}{n_w} = \frac{28,2}{3,5} = 8,06 \text{ kN.}$$

Przypadek 2 – pręt przedstawiony na rys. 4.5b.

Długość wyboczeniowa pręta:

$$l_w = l = 1200 \text{ mm.}$$

Smukłość maksymalna:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{1200}{8,16} = 147 > S_{gr} = 100.$$

Pręt pokazany na rys. 4.5b również ulegnie wyboczeniu sprężystemu. Siła krytyczna obliczona ze wzoru Eulera wynosi:

$$F_{kr}^{(b)} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,06 \cdot 10^5 \cdot 0,8 \cdot 10^5}{1200^2} = 112952 \text{ N} \approx 112,95 \text{ kN.}$$

Współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie dla smukłości S_{max} zawartej w przedziale $S_{gr} = 100 < S_{max} = 147 < 1,5 \cdot S_{max} = 150$ przyjęto $n_w = 2,5$. Siła dopuszczalna dla pręta pokazanego na rys. 4.5b wynosi:

$$F_{dop}^{(b)} = \frac{F_{kr}^{(b)}}{n_w} = \frac{112,95}{2,5} = 45,2 \text{ kN.}$$

Przypadek 3 – pręt przedstawiony na rys. 4.5c.

Długość wyboczeniowa pręta:

$$l_w = \frac{1}{2} l = 600 \text{ mm.}$$

Smukłość maksymalna:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{600}{8,16} = 73,5 < S_{gr} = 100.$$

jest mniejsza od smukłości granicznej, co oznacza, że wyboczenie pręta będzie niesprężyste (sprężysto-plastyczne). Naprężenie krytyczne dla pręta utwierdzonego na obu końcach (rys. 4.5c) zostanie obliczone ze wzoru Tetmajera-Jasińskiego:

$$\sigma_{kr}^{(c)} = \sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl} - \sigma_{prop.}}{S_{gr}} \cdot S_{max} = 240 - \frac{240 - 200}{100} \cdot 73,5 = 211 \text{ MPa.}$$

Naprężenia te są większe od granicy proporcjonalności $\sigma_{prop} = 200 \text{ MPa}$. Przyjmuje się, że naprężenia w stanie krytycznym są równomierne na całym polu powierzchni przekroju poprzecznego pręta. W tym przypadku siła krytyczna wynosi:

$$F_{kr}^c = \sigma_{kr}^{(c)} \cdot A = 211 \cdot 1200 = 253200 \text{ N} \approx 253,2 \text{ kN.}$$

Przy współczynniku bezpieczeństwa na wyboczenie niesprężyste $n_w = 2$ siła dopuszczalna nie może przekroczyć wartości:

$$F_{dop}^{(c)} = \frac{F_{kr}^{(c)}}{n_w} = \frac{253,2}{2} = 126,6 \text{ kN.}$$

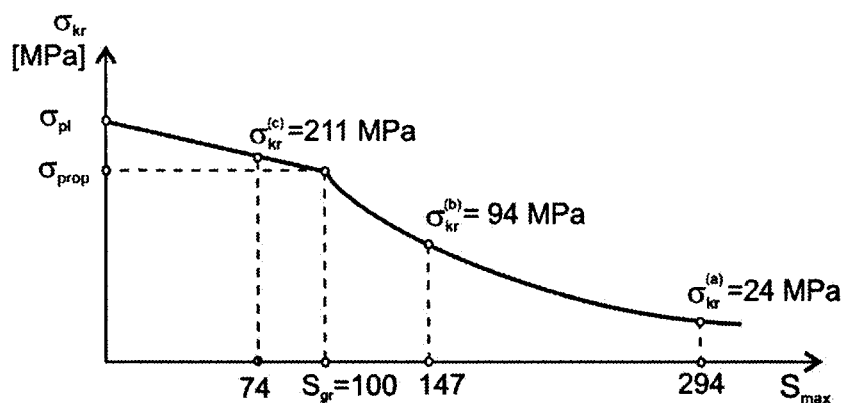
Podsumowanie – krytyczne wartości naprężeń:

$$\sigma_{kr}^{(a)} = \frac{F_{kr}^{(a)}}{A} = \frac{28238}{1200} = 24 \text{ MPa,}$$

$$\sigma_{kr}^{(b)} = \frac{F_{kr}^{(b)}}{A} = \frac{112952}{1200} = 94 \text{ MPa,}$$

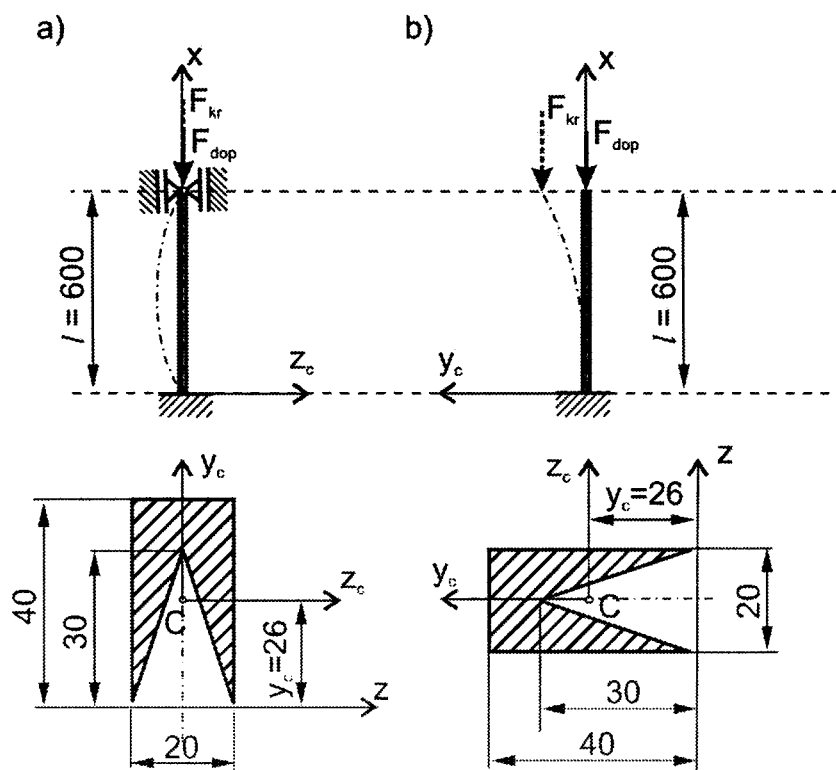
$$\sigma_{kr}^{(c)} = 211 \text{ MPa}$$

zaznaczono na wykresie $\sigma_{kr} = \sigma_{kr}(S_{max})$ (rys. 4.6)



Rys. 4.6

Zadanie 4.2. Prosty pręt stalowy o długości $l = 0,6$ m i przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 4.7 ściskany jest siłą F . Dolny koniec pręta jest utwierdzony, natomiast górny, obciążony siłą F , zakończony jest przegubem przesuwным walcowym – nie pozwalającym na przesunięcie tego końca w płaszczyźnie xz_c i nie ograniczającym jego przesuwu w płaszczyźnie xy_c (rys. 4.7). Dane liczbowe dla materiału pręta: $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = 240$ MPa. Wymiary przekroju poprzecznego podano na rys. 4.7. Należy przyjąć następujące współczynniki bezpieczeństwa na wyboczenie: $n_w = 2$ dla wyboczenia niesprężystego i $n_w = 2,5$ dla wyboczenia sprężystego. Obliczyć dopuszczalną siłę ściskającą F_{dop} , którą można obciążyć pręt.



Rys. 4.7

R o z w i ą z a n i e . Smukłość graniczna rozpatrywanego pręta:

$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop.}}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 10^5}{200}} \approx 99.$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$A = 20 \cdot 40 - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 = 800 - 300 = 500 \text{ mm}^2.$$

Współrzędne środka ciężkości rozpatrywanego przekroju:

$$z_c = 0, \quad y_c = \frac{40 \cdot 20 \cdot 20 - 0,5 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 10}{500} = 26 \text{ mm}.$$

Główne centralne momenty bezwładności przekroju poprzecznego pręta wynoszą:

$$I_{yc} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} - 2 \cdot \frac{30 \cdot 10^3}{12} = 21667 \text{ mm}^4,$$
$$I_{zc} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} + 20 \cdot 40 \cdot 6^2 - \left[\frac{20 \cdot 30^3}{36} + \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 30 \cdot 16^2 \right] = 43667 \text{ mm}^4.$$

Promienie (ramiona) bezwładności:

– dla wyboczenia w płaszczyźnie xz_c :

$$i_{yc} = \sqrt{\frac{I_{yc}}{A}} = \sqrt{\frac{21667}{500}} = 6,58 \text{ mm},$$

– dla wyboczenia w płaszczyźnie xy_c :

$$i_{zc} = \sqrt{\frac{I_{zc}}{A}} = \sqrt{\frac{43667}{500}} = 9,35 \text{ mm}.$$

Długości wyboczeniowe pręta

– przy wyboczeniu w płaszczyźnie xz_c :

$$l_w^{(a)} = 0,7l = 420 \text{ mm},$$

– dla wyboczenia w płaszczyźnie xy_c :

$$l_w^{(b)} = 2l = 2 \cdot 600 = 1200 \text{ mm}.$$

Obliczenie maksymalnej smukłości:

$$S^{(a)} = \frac{l_w^{(a)}}{i_{yc}} = \frac{420}{6,58} = 64,$$

$$S^{(b)} = \frac{l_w^{(b)}}{i_{zc}} = \frac{1200}{9,35} = 128.$$

Maksymalna smukłość pręta wynosi:

$$S_{max} = S^{(b)} = 128 > S_{gr} = 99.$$

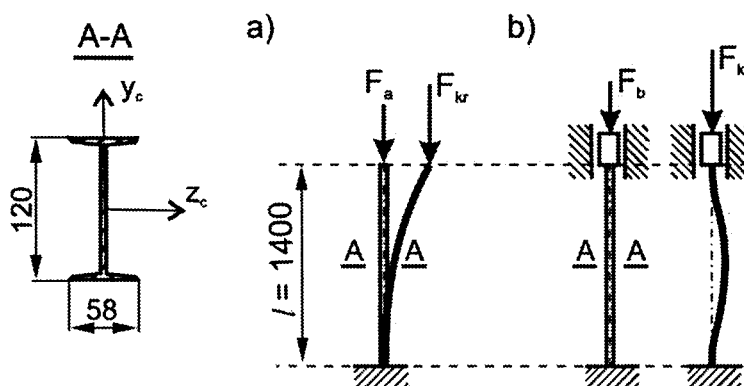
tzn., że pręt wyboczy się w płaszczyźnie xy_c i wyboczenie będzie w zakresie sprężystym. Siłę krytyczną trzeba obliczyć ze wzoru Eulera:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{zc}}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 43667}{1200^2} = 59858 \text{ N.}$$

Dopuszczalna siła ściskająca pręt przy współczynniku bezpieczeństwa $n_w = 2,5$ wynosi:

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{n_w} = \frac{59858}{2,5} = 23943 \text{ N} \approx 23,94 \text{ kN.}$$

Zadanie 4.3. Ze znormalizowanego stalowego dwuteownika PN I 120 wykonano dwa słupy, każdy o długości $l = 1,4$ m. Dolne końce słupów utwierdzono, natomiast warunki brzegowe (podparcia) obciążonych końców górnych są różne (rys. 4.8). Słup pokazany na rys. 4.8a ma górny koniec swobodny i ściskany siłą $F_a = 20$ kN, a słup z rys. 4.8b jest na górnym końcu utwierdzone przesuwnie (utwierdzenie z możliwością przemieszczeń wzdłuż osi pręta) i ściskany siłą $F_b = 150$ kN. Stal, z której wykonano słupy ma następujące własności materiałowe: $E = 2,04 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = R_H = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = R_e = 240$ MPa. Określić współczynniki bezpieczeństwa na wyboczenie dla każdego z analizowanych słupów.



Rys. 4.8

R o z w i ą z a n i e . Według Polskich Norm dane dotyczące charakterystyk przekroju poprzecznego dwuteownika PN I 120, odczytane z tablic, wynoszą:

- pole powierzchni przekroju poprzecznego: $A = 14,2 \text{ cm}^2 = 1420 \text{ mm}^2$;
- momenty bezwładności względem głównych centralnych osi bezwładności (osi symetrii dwuteownika): $I_{zc} = 328 \text{ cm}^4$, $I_{min} = I_{yc} = 21,5 \text{ cm}^4 = 215000 \text{ mm}^4$;
- ramiona bezwładności: $i_{zc} = 4,81 \text{ cm}$, $i_{min} = i_{yc} = 1,23 \text{ cm} = 12,3 \text{ mm}$;

– Smukłość graniczna prętów wynosi:

$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop.}}} = \pi \sqrt{\frac{2,04 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Obliczenia dla pręta z rys. 4.8a.

Długość wyboczeniowa słupa: $l_w = 2l$

Smukłość maksymalna:

$$S_{max}^{(a)} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{2 \cdot l}{i_{min}} = \frac{2 \cdot 1400}{12,3} = 227,6 > S_{gr} = 100.$$

Smukłość maksymalna słupa jest większa od smukłości granicznej, a zatem nastąpi sprężyste wyboczenie słupa. W takim przypadku siłę krytyczną wyznaczamy, korzystając ze wzoru Eulera:

$$F_{kr}^{(a)} = \frac{\pi^2 E I_{zc}}{l_w^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2,04 \cdot 10^5 \cdot 2,15 \cdot 10^5}{(2 \cdot 1400)^2} = 55214 \text{ N.}$$

Słup ściskany jest siłą $F_a = 20 \text{ kN}$, czyli współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie wynosi:

$$n_w = \frac{F_{kr}^{(a)}}{F_a} = \frac{55214}{20000} = 2,76.$$

Obliczenia dla pręta z rys. 4.8b.

Długość wyboczeniowa słupa:

$$l_w = \frac{1}{2} l = \frac{1}{2} 1400 = 700 \text{ mm.}$$

Maksymalna smukłość pręta:

$$S_{max}^{(b)} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{700}{12,3} = 56,9 < S_{gr} = 100.$$

Ponieważ smukłość maksymalna słupa pręta jest mniejsza od smukłości granicznej $S_{max} < S_{gr}$, więc słup ulegnie wyboczeniu niesprężystemu. Naprężenia krytyczne wyboczenia niesprężystego można obliczyć ze wzoru Tetmajera-Jasińskiego

$$\sigma_{kr}^{(b)} = \sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl} - \sigma_{prop.}}{S_{gr}} \cdot S_{max} = 240 - \frac{240 - 200}{100} \cdot 56,9 = 217 \text{ MPa.}$$

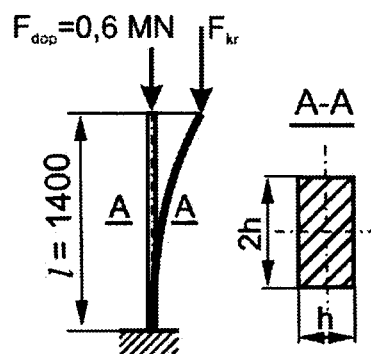
Odpowiadająca tym naprężeniom siła krytyczna wynosi:

$$F_{kr}^{(b)} = \sigma_{kr}^{(b)} \cdot A = 217 \cdot 1420 = 308140 \text{ N} = 308 \text{ kN.}$$

Pręt ściskany jest siłą $F_b = 150 \text{ kN}$, więc współczynnik bezpieczeństwa w tym przypadku wynosi:

$$n_w = \frac{F_{kr}^{(b)}}{F_b} = \frac{308}{150} = 2,05 \approx 2.$$

Zadanie 4.4. Stalowy pręt o długości $l = 0,4$ m utwierdzony na dolnym końcu ściskany jest siłą osiową $F = 160$ kN. Przekrój poprzeczny pręta ma kształt prostokąta o bokach $2h \times h$ (rys. 4.9). Własności materiału pręta: $E = 2,05 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = 240$ MPa. Współczynnik bezpieczeństwa na wyboczenie $n_w = 2,5$. Obliczyć wymiar h przekroju poprzecznego pręta.



Rys. 4.9

R o z w i ą z a n i e . Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta:

$$A = 2h \cdot h = 2 \cdot h^2.$$

Minimalny moment bezwładności:

$$I_{min} = \frac{2h \cdot h^3}{12} = \frac{h^4}{6}.$$

Minimalne ramię bezwładności:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{h^4}{6}}{2 \cdot h^2}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{h}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}h}{6}.$$

Maksymalna smukłość pręta:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{2l}{\frac{1}{6} \sqrt{3} h} = \frac{2l \cdot 2 \sqrt{3}}{h} = 4 \cdot \sqrt{3} \frac{l}{h}.$$

Smukłość graniczna:

$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop}}} = \pi \sqrt{\frac{2,05 \cdot 10^5}{200}} = 100,6.$$

Ponieważ nie znany jest wymiar h przekroju poprzecznego pręta, nie można ustalić czy maksymalna smukłość jest większa czy mniejsza od smukłości granicznej, czyli nie można stwierdzić czy wyboczenie będzie sprężyste, czy sprężysto-plastyczne?

Wstępnie przyjęto, że wyboczenie będzie sprężyste i że do obliczenia wymiaru h można zastosować wzór Eulera:

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_w^2}.$$

Pręt ma przenieść siłę $F = 160$ kN przy współczynniku bezpieczeństwa na wyboczenie $n_w = 2,5$, więc dla tego przypadku siła krytyczna wynosi:

$$F_{kr} = F_{dop} \cdot n_w = F \cdot n_w = 160 \cdot 2,5 = 400 \text{ kN.}$$

Ze wzoru Eulera obliczono I_{min} :

$$I_{min} = \frac{F_{kr} l_w^2}{\pi^2 E} = \frac{F_{kr} (2l)^2}{\pi^2 E} = \frac{400 \cdot 10^3 \cdot (2 \cdot 400)^2}{\pi^2 \cdot 2,05 \cdot 10^5} = 126500 \text{ mm}^4.$$

Ze wzoru na minimalny moment bezwładności przekroju pręta obliczono wymiar h :

$$h = \sqrt[4]{6 \cdot I_{min}} = \sqrt[4]{6 \cdot 126500} = 29,5 \text{ mm.}$$

Teraz można obliczyć maksymalną smukłość pręta:

$$S_{max} = 4\sqrt{3} \frac{l}{h} = 4\sqrt{3} \frac{400}{29,5} = 93,9.$$

i porównać ją ze smukłością graniczną:

$$S_{max} = 93,9 < S_{gr} = 100,6.$$

Z nierówności tej wynika, że wyboczenie pręta jest niesprężyste, więc obliczenie wymiaru h ze wzoru Eulera jest niepoprawne. Do obliczenia wymiaru h zostanie teraz zastosowany wzór Tetmajera-Jasińskiego:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl} - \sigma_{prop.}}{S_{gr}} \cdot S_{max}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$\frac{400000}{2h^2} = 240 - \frac{240 - 200}{100,6} \cdot 4\sqrt{3} \frac{400}{h},$$

czyli

$$\frac{200000}{h^2} = 240 - \frac{1101,9}{h}.$$

Równanie to po pomnożeniu obustronnie przez h^2 i podzieleniu przez 240 przyjmuje postać następującego równania kwadratowego:

$$h^2 - 4,59h - 833,3 = 0$$

Powyższe równanie ma dwa rozwiązania – jedno dodatnie a drugie ujemne. Ujemne jest fizycznie nieuzasadnione, a dodatni pierwiastek tego równania wynosi:

$$h = 31,2 \text{ mm}$$

Maksymalna smukłość pręta dla $h = 31,2$ ma wartość:

$$S_{max} = 4\sqrt{3} \frac{400}{31,2} = 88,8 < S_{gr} = 100,6,$$

co potwierdza, że wyboczenie pręta jest niesprężyste, a obliczony wymiar h przekroju poprzecznego pręta jest poprawny.

Obliczony wymiar h w praktyce zaokrągla się w górę do pełnych milimetrów, więc po zaokrągleniu otrzymano $h = 32$ mm.

Zwiększanie wymiaru poprzecznego pręta powoduje zwiększenie współczynnika bezpieczeństwa na wyboczenie.

Omawiane zadanie można również rozwiązać wykorzystując wzór Johnsona-Ostenfelda:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl}}{2} \cdot \left(\frac{S_{max}}{S_0} \right)^2$$

gdzie S_0 jest smukłością, przy której hiperbola Eulera i parabola Johnsona-Ostenfelda mają wspólną styczną, a wartości naprężeń krytycznych są sobie równe. Smukłość S_0 dla danych materiałowych z zadania wynosi:

$$S_0 = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot E}{\sigma_{pl}}} = \pi \sqrt{\frac{2 \cdot 2,05 \cdot 10^5}{240}} = 129,85 \approx 130.$$

Po podstawieniu powyższych obliczeń do wzoru Johnsona-Ostenfelda otrzymano:

$$\frac{400000}{2h^2} = 240 - \frac{240}{2} \cdot \left(\frac{4\sqrt{3} \cdot 400/h}{130} \right)^2,$$

czyli

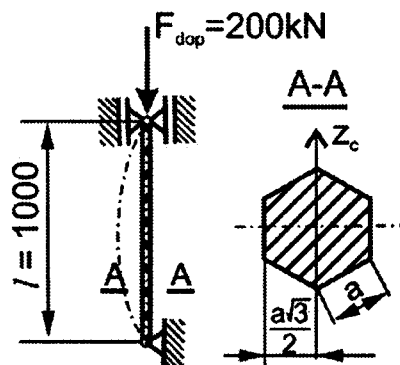
$$\frac{200000}{h^2} = 240 - \frac{54532}{h^2}.$$

Rozwiązanie powyższego równania pozwala wyznaczyć wymiar h przekroju poprzecznego pręta:

$$h = \sqrt{\frac{254532}{240}} = 32,6 \approx 33 \text{ mm}.$$

Wyznaczony ze wzoru Johnsona-Ostenfelda wymiar przekroju poprzecznego pręta ma wartość $h = 33$ mm i jest o 3% większy od analogicznie wyznaczonej wartości przy wykorzystaniu wzoru Tetmajera-Jasińskiego. Z powyższego wynika, że w rozpatrywanym przypadku wzór Johnsona-Ostenfelda daje bezpieczniejszy wynik.

Zadanie 4.5. Pręt prosty stalowy o długości $l = 1$ m podparty przegubowo na obu końcach ma być ściskany siłą $F_{dop} = 200$ kN, przy współczynniku bezpieczeństwa $n_w = 2,2$. Własności materiałowe to: $E = 2,06 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = 240$ MPa. Przekrój poprzeczny pręta ma kształt sześciokąta foremnego o boku a . Określić wymiar tego boku, a następnie obliczyć długości l prętów dla innych charakterystycznych przypadków zamocowania (rys. 4.1) o takim samym wymiarze a przekroju poprzecznego, przenoszących taką samą siłę F_{dop} przy takim samym współczynniku bezpieczeństwa.



Rys. 4.10

R o z w i ą z a n i e . Smukłość graniczna prętów:

$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop.}}} = \pi \sqrt{\frac{2,06 \cdot 10^5}{200}} = 100,8 \approx 101.$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego prętów (rys. 4.10)

$$A = 6 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = 2,598 a^2.$$

Rozpatrywany przekrój ma aż sześć osi symetrii. Jeżeli figura płaska ma co najmniej trzy osie symetrii, to momenty bezwładności względem dowolnej osi przechodzącej przez jej środek ciężkości są sobie równe. W rozpatrywanym przypadku obliczono moment bezwładności względem osi z_c (rys. 4.10):

$$I_{min} = I_{z_c} = 4 \frac{a \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{12} + 2 \frac{a \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3}{4} = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4.$$

Ramię bezwładności:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{5\sqrt{3} a^4 \cdot 2}{16 \cdot 3\sqrt{3} a^2}} = \sqrt{\frac{5}{24}} a.$$

Smukłość pręta (taka sama w dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez oś pręta):

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{l_w}{\sqrt{\frac{5}{24}} a} = \sqrt{\frac{24}{5}} \frac{l_w}{a}.$$

Dla pręta przegubowo podpartego na obu końcach:

$$l_w = l,$$

$$S_{max} = \sqrt{\frac{24}{5}} \frac{l}{a} = 2,191 \frac{l}{a}.$$

Przy nieznanym wymiarze boku a nie można wyznaczyć wartości S_{max} i nie można ustalić czy wyboczenie pręta pod działaniem siły ściskającej:

$$F_{kr} = F_{dop} \cdot n_w = 200 \cdot 2,2 = 440 \text{ kN}$$

będzie sprężyste czy sprężysto-plastyczne.

Przyjęto, że wyboczenie pręta jest niesprężyste i naprężenie krytyczne obliczono ze wzoru Tetmajera-Jasińskiego:

$$\sigma_{kr} = 240 - \frac{240 - 200}{101} S_{max} = 240 - 0,396 \cdot 2,191 \frac{l}{a}.$$

Z drugiej strony wiadomo, że:

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A} = \frac{440000}{2,598 \cdot a^2}.$$

Po przyrównaniu prawych stron powyższych wzorów i po przekształceniach uzyskano równanie kwadratowe względem niewiadomej a :

$$a^2 - 3,615 \cdot a - 705,671 = 0.$$

Dodatni (interesujący nas) pierwiastek tego równania wynosi $a = 28,43 \text{ mm}$.

Dla tej wartości a smukłość pręta:

$$S_{max} = 2,191 \frac{1000}{28,43} = 77 < S_{gr} = 101$$

jest mniejsza od smukłości granicznej co oznacza, że dobrze przewidziano wyboczenie niesprężyste, więc obliczenie wymiaru a jest poprawne. W projektowaniu inżynierskim prawdopodobnie przyjęto by $a = 30 \text{ mm}$.

Gdyby zastosowano wzór Johnsona-Ostenfelda, to otrzymano by $a = 29,1 \text{ mm}$, czyli po zaokrągleniu byłby to taki sam wynik jak ze wzoru Tetmajera-Jasińskiego.

Długości prętów dla innych charakterystycznych warunków zamocowania końców (rys. 4.1):

– pręt utwierdzony na dolnym końcu:

$$l_1 = \frac{l_w}{2} = \frac{l}{2} = \frac{1000}{2} = 500 \text{ mm} = 0,5 \text{ m};$$

– pręt utwierdzony na dolnym końcu i przegubowo podparty u góry:

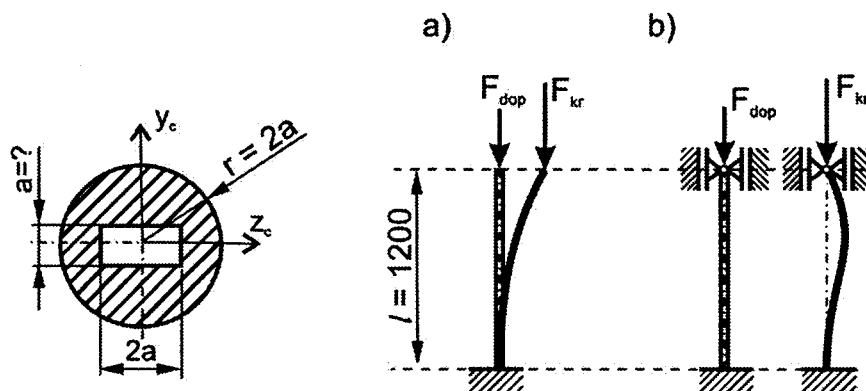
$$l_2 = \frac{l_w}{0,7} = \frac{l}{0,7} = \frac{1000}{0,7} = 1429 \text{ mm} \approx 1,43 \text{ m};$$

– pręt utwierdzony na obu końcach:

$$l_3 = 2 \cdot l_w = 2 \cdot l = 2 \cdot 1000 = 2000 \text{ mm} = 2 \text{ m}.$$

Zadanie 4.6. Dwa pręty o takiej samej długości $l = 1,2$ m zostaną wykonane z tego samego materiału o własnościach: $E = 2,04 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = R_e = 240$ MPa. Każdy z tych prętów ma przenosić siłę $F_{dop} = 6 \cdot 10^4$ N, przy współczynniku bezpieczeństwa na wyoboczenie $n_w = 2,5$. Kształt przekroju poprzecznego tych prętów pokazano na rys. 4.11a. Obliczyć wymiar a przekroju poprzecznego:

- dla pręta utwierdzonego na dole ze swobodnym końcem górnym (rys. 4.11a),
- dla pręta utwierdzonego na dole z górnym końcem podpartym przegubowo (rys. 4.11b).



Rys. 4.11

R o z w i ą z a n i e . Siła krytyczna, przy której nastąpi wyoboczenie prętów:

$$F_{kr} = n_w \cdot F_{dop} = 2,5 \cdot 6 \cdot 10^4 = 150000 \text{ N} = 150 \text{ kN}.$$

Pole powierzchni przekroju poprzecznego wynosi:

$$A = \pi (2a)^2 - 2a \cdot a = 2a^2 (2\pi - 1) = 10,57 a^2.$$

Momenty bezwładności przekroju poprzecznego względem głównych osi centralnych:

$$I_{zc} = \frac{\pi (2a)^4}{4} - \frac{2a \cdot a^3}{12} = a^4 \left(4\pi - \frac{1}{6} \right) \approx 12,4 a^4,$$

$$I_{yc} = \frac{\pi (2a)^4}{4} - \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = a^4 \left(4\pi - \frac{2}{3} \right) \approx 11,9 a^4.$$

Minimalny moment bezwładności:

$$I_{min} = I_{yc} = 11,9 a^4.$$

Minimalny promień bezwładności:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{11,9 a^4}{10,57 a^2}} \approx 1,06 a.$$

Smukłość graniczna prętów:

$$S_{gr} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{prop.}}} = \pi \sqrt{\frac{2,04 \cdot 10^5}{200}} \approx 100.$$

Obliczenia dla pręta z rys. 4.11a.

Długość wyboczeniowa:

$$l_w = 2l = 2 \cdot 1200 = 2400 \text{ mm.}$$

Ponieważ nieznanymi jest wymiar przekroju poprzecznego, nie można wyznaczyć maksymalnej smukłości pręta i nie można ustalić czy wyboczenie pręta będzie sprężyste, czy sprężysto-plastyczne. Wyznamy wymiar a przekroju poprzecznego, korzystając ze wzoru Eulera:

$$P_{kr} = n_w \cdot P_{dop} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l_w^2},$$
$$150000 = \frac{\pi^2 \cdot 2,04 \cdot 10^5 \cdot 11,9 a^4}{2400^2},$$
$$a \geq \sqrt[4]{\frac{150000 \cdot (2400)^2}{\pi^2 \cdot 2,04 \cdot 10^5}} \approx 13,8 \text{ mm.}$$

Ostatecznie przyjęto $a = 14 \text{ mm}$.

Minimalny promień bezwładności dla przyjętego wymiaru a przekroju poprzecznego wynosi:

$$i_{min} = 1,06 a = 1,06 \cdot 14 = 14,84 \text{ mm.}$$

Maksymalna smukłość pręta:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{2400}{14,84} \approx 162 > S_{gr} = 100.$$

Ponieważ maksymalna smukłość jest większa od smukłości granicznej, wyboczenie pręta jest sprężyste i zastosowanie wzoru Eulera było słuszne.

Obliczenia dla pręta z rys. 4.11b.

Długość wyboczeniowa pręta:

$$l_w = 0,7 \cdot l = 0,7 \cdot 1200 = 840 \text{ mm.}$$

Założmy wstępnie jak w poprzednim przypadku, że wyboczenie pręta jest sprężyste. Obliczamy więc wymiar a , korzystając ze wzoru Eulera:

$$150000 = \frac{\pi^2 \cdot 2,04 \cdot 10^5 \cdot 11,9 a^4}{840^2},$$
$$a \geq \sqrt[4]{\frac{150000 \cdot (840)^2}{\pi^2 \cdot 2,04 \cdot 10^5}} \approx 15,14 \text{ mm.}$$

Minimalny promień bezwładności dla przyjętego wymiaru a przekroju poprzecznego wynosi:

$$i_{min} = 1,06 a = 1,06 \cdot 15,14 = 16,05 \text{ mm.}$$

Maksymalna smukłość pręta:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{840}{16,05} \approx 52 < S_{gr} = 100.$$

Ponieważ otrzymana wartość smukłości maksymalnej jest mniejsza od smukłości granicznej, więc wyboczenie jest sprężysto-plastyczne. Wymiar a przekroju poprzecznego trzeba wyznaczyć ze wzoru Tetmajera-Jasińskiego lub Johnsona-Ostfelda. Po zastosowaniu wzoru Tetmajera-Jasińskiego pomnożonego obustronnie przez pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta:

$$\sigma_{kr} \cdot A = \left(\sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl} - \sigma_{prop.}}{S_{gr}} \cdot S_{max} \right) \cdot A,$$

czyli

$$F_{kr} = \left(\sigma_{pl} - \frac{\sigma_{pl} - \sigma_{prop.}}{S_{gr}} \cdot S_{max} \right) \cdot A,$$

w którym: $F_{kr} = 150000\text{N}$, $\sigma_{pl} = 240\text{MPa}$, $\sigma_{prop} = 200\text{MPa}$, $S_{gr} = 100$ i S_{max} :

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{840}{1,06a} = \frac{792,4}{a}$$

otrzymano ostatecznie następujące równanie:

$$150000 = \left(240 - 0,4 \frac{792,4}{a} \right) \cdot 10,57a^2.$$

Po uporządkowaniu otrzymano:

$$a^2 - 1,32a - 59,13 = 0.$$

Rozwiązując powyższe równanie kwadratowe, otrzymano dodatnią wartość $a = 8,4\text{ mm}$. Tak, więc wymiar a powinien spełniać nierówność:

$$a \geq 8,4\text{ mm}.$$

Ostatecznie przyjęto $a = 9\text{ mm}$.

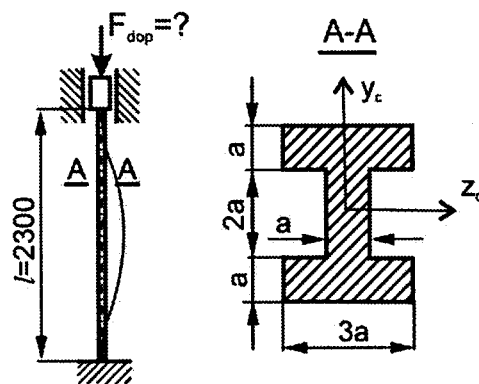
Maksymalna smukłość pręta dla przyjętego wymiaru a wynosi:

$$S_{max} = \frac{l_w}{i_{min}} = \frac{840}{1,06 \cdot 9} \approx 88 < S_{gr} = 100.$$

Ponieważ smukłość maksymalna jest mniejsza od smukłości granicznej, zastosowanie wzoru Tetmajera-Jasińskiego jest właściwe.

4.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 4.7. Obliczyć dopuszczalną wartość siły F_{dop} ściskającej pręt o przekroju dwuteowym utwierdzony na obu końcach. Utwierdzenie końca górnego (obciążonego) jest przesuwne (rys. 4.12). Dane: $l = 230$ cm, $a = 2$ cm, $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 210$ MPa, $\sigma_{pl} = 250$ MPa, $n_w = 2,2$.

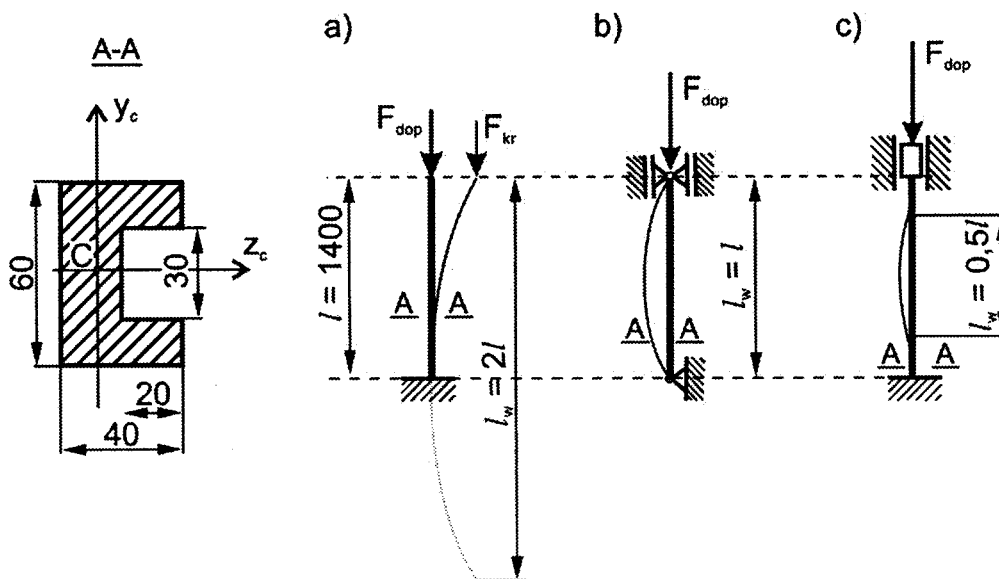


Rys. 4.12

ODPOWIEDŹ:

$$F_{dop} = 320 \text{ kN.}$$

Zadanie 4.8. Stosując odpowiednie wzory (Eulera, Tetmajera-Jasińskiego, Johnsona-Ostenfelda), obliczyć dopuszczalne wartości siły ściskającej F_{dop} w trzech identycznych prętach o przekroju ceowym przy zamocowaniu ich końców jak na rys. 4.13 a, b, c.



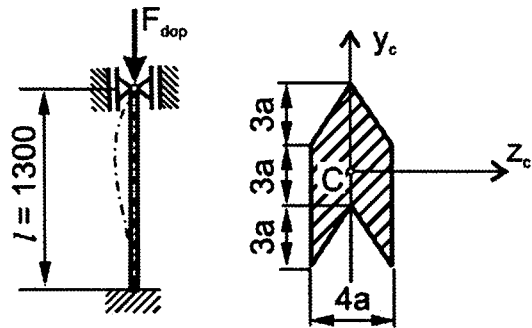
Rys. 4.13

Wymiary przekroju poprzecznego prętów podano na rysunku, a pozostałe dane to: $l = 1,4$ m; $E = 2,1 \cdot 10^5$ MPa; $\sigma_{prop} = 206$ MPa; $\sigma_{pl} = 256$ MPa; $n_w = 2,5$.

ODPOWIEDŹ:

- a) $F_{dop} = 23,26$ kN,
- b) $F_{dop} = 93,06$ kN,
- c) $F_{dop} = 161,5$ kN.

Zadanie 4.9. Obliczyć dopuszczalną wartość siły F_{dop} ściskającej pręt o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 4.14. Dolny koniec pręta jest utwierdzony, a górny przegubowo podparty. Dane: $l = 1,3$ m, $a = 1$ cm, $E = 2,04 \cdot 10^5$ MPa, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = 240$ MPa, $n_w = 2,2$.

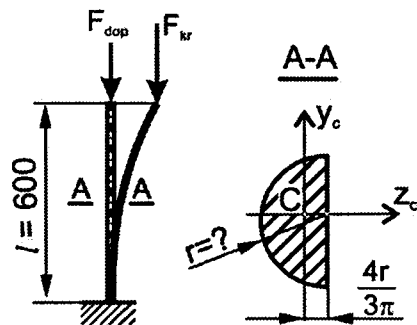


Rys. 4.14

ODPOWIEDŹ:

$$F_{dop} = 227 \text{ kN.}$$

Zadanie 4.10. Pręt stalowy o długości $l = 0,6$ m ma być ściskany siłą osiową $F = 20$ kN. Przekrój poprzeczny pręta jest połową koła o promieniu r . Obliczyć najmniejszą wielkość tego promienia, przy której pręt będzie bezpiecznie pracował. Dane: $\sigma_{prop} = 210$ MPa, $\sigma_{pl} = 250$ MPa, $E = 2 \cdot 10^5$ MPa, $n_w = 2,5$.

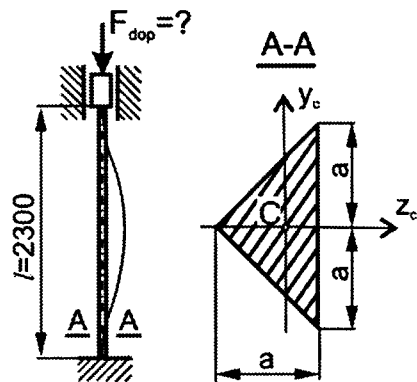


Rys. 4.15

ODPOWIEDŹ:

$$r = 24 \text{ mm.}$$

Zadanie 4.11. Obliczyć wymiar a przekroju poprzecznego słupa ściskanego pokazanego na rys. 4.16. Dane: $F_{dop} = 300$ kN, $l = 1,2$ m, $n_w = 2,2$, $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $\sigma_{pl} = 240$ MPa, $E = 2,04 \cdot 10^5$ MPa.

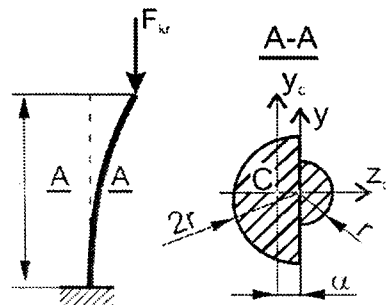


Rys. 4.16

ODPOWIEDŹ:

$$a = 55 \text{ mm.}$$

Zadanie 4.12. Określić dla jakich stosunków wymiarów l/r wyboczenie pręta pokazanego na rys. 4.17 jest wyboczeniem sprężystym. Dane: $\sigma_{prop} = 200$ MPa, $E = 2,06 \cdot 10^5$ MPa,



Rys. 4.17

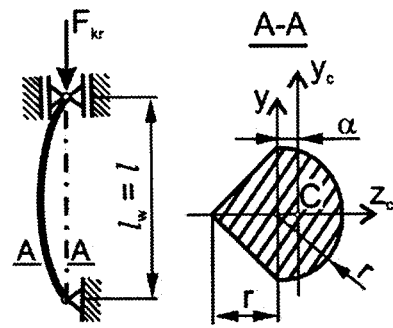
ODPOWIEDŹ:

$$\frac{l}{r} \geq 35,5$$

Zadanie 4.13. Słup o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 4.18 wykonano z materiału o następujących własnościach: $\sigma_{\text{prop}} = 230 \text{ MPa}$, $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Określić przy jakim stosunku l_w/r słup wyboczy się sprężysto.

ODPOWIEDŹ:

$$\frac{l_w}{r} \geq 42,1$$



Rys. 4.18

5. METODY ENERGERYCZNE

5.1. Wprowadzenie

Metody energetyczne są bardzo często stosowane w wytrzymałości materiałów do analizy stanu naprężeń i odkształceń statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych układów prętowych (kratownice, belki, ramy, łuki, wały), ze względu na ich szeroki zakres zastosowań i prostotę obliczeń. Podstawą tych obliczeń są dwa twierdzenia energetyczne: Castigliano i Menabre.

Twierdzenie Castigliano służy do wyznaczania przemieszczeń układów prętowych statycznie wyznaczalnych i statycznie niewyznaczalnych. Twierdzenie Menabre stosowane jest do wyznaczania wielkości statycznie niewyznaczalnych (reakcji podporowych, sił wewnętrznych).

Przed przytoczeniem tych twierdzeń podane zostaną pojęcia siły uogólnionej i współrzędnej uogólnionej odpowiadającej tej sile.

Pod nazwą siła uogólniona kryje się wiele rodzajów obciążenia, a mianowicie nie tylko siła skupiona, ale także obciążenie liniowe, obciążenie powierzchniowe oraz moment skupiony (gnący lub skręcający).

Współrzedną uogólnioną odpowiadającą danej sile uogólnionej nazywamy taką wielkość geometryczną (np. wydłużenie, ugięcie, kąt ugięcia, kąt skręcenia, przemieszczenie), której przyrost (w przypadku gdy układ wychylał się nieskończenie mało z położenia równowagi) mnożony przez daną siłę uogólnioną daje pracę tej siły. Jeżeli siłą uogólnioną jest siła skupiona, to współrzedną uogólnioną jest przemieszczenie punktu przyłożenia tej siły, mierzone w kierunku jej działania. Przemieszczenie to jest dodatnie jeżeli jest zgodne ze zwrotem działania siły. Sile uogólnionej w postaci skupionego momentu gnącego odpowiada kąt ugięcia belki w punkcie przyłożenia tego momentu. Momentowi skręcającemu odpowiada kąt obrotu przekroju poprzecznego pręta dookoła jego osi, w miejscu jego przyłożenia.

Za wielkość statycznie niewyznaczalną można przyjąć:

- reakcję o znanym kierunku,
- składową reakcji o nieznanym kierunku,
- siłę wewnętrzną w układach statycznie niewyznaczalnych wewnętrznie.

Wielkości statycznie niewyznaczalnych musi być tyle, ilokrotnie statycznie niewyznaczalny jest układ.

Twierdzenia Castigliano

Pochodna cząstkowa energii sprężystej V układu względem siły uogólnionej F_i jest równa współrzędnej uogólnionej f_i odpowiadającej sile F_i :

$$\frac{\partial V}{\partial F_i} = f_i. \quad (5.1)$$

Twierdzenia Menabre

Pochodna cząstkowa energii sprężystej V układu względem siły (reakcji) statycznie niewyznaczalnej jest równa zero:

$$\frac{\partial V}{\partial F_i} = 0. \quad (5.2)$$

Energia sprężysta układów płaskich poddanych obciążeniom złożonym działającym w ich płaszczyźnie określana jest wzorem:

$$V = V_N + V_{M_g} + V_{M_s} + V_T = \int_l \left(\frac{N^2}{2EA} + \frac{M_g^2}{2EI_{zc}} + \frac{M_s^2}{2GI_0} + \frac{\Psi T^2}{2GA} \right) dx, \quad (5.3)$$

w którym N , M_g , M_s i T są siłami wewnętrznymi, a EA , EI_{zc} , GI_0 i GA – sztywnościami pręta odpowiednio na: rozciąganie (ściskanie), zginanie, skręcanie i ścinanie. Energia sprężysta przy ścinaniu zależy od kształtu przekroju poprzecznego pręta, co wyrażone jest przez współczynnik Ψ . Współczynnik ten opisany jest przez całkę:

$$\Psi = \int_A \frac{A^2}{I_{zc}^2} \left(\frac{S_y^{y_{max}}}{b_y} \right)^2 dA. \quad (5.4)$$

Współczynnik Ψ jest równy:

$\Psi = 1,2$ – dla przekroju prostokątnego,

$\Psi = 1,185$ – dla przekroju kołowego.

W zdecydowanej większości niezbyt krótkich belek zginanych poprzecznie, energia sprężysta ścinania (pochodząca od siły tnącej T) jako wielkość mała w porównaniu z energią zginania jest pomijana. Obliczona ze wzoru (5.3) energia sprężysta jest słuszna dla układów Clapeyrona, tzn. układów liniowo sprężystych obciążonych statycznie, w których działanie jednych sił nie powoduje zmiany charakteru działania innych sił przyłożonych do układu – siły obciążające zostały przyłożone jednocześnie, a stosunek między wartościami tych sił w trakcie ich wzrostu jest stały. Energia sprężysta jest jednorodną funkcją kwadratową obciążeń lub przemieszczeń.

W kratownicach energia sprężysta jest równa sumie energii wszystkich prętów kratownicy:

$$V_N = \sum_{k=1}^n \int_{l_k} \frac{N_k^2 dx}{2E_k A_k} = \sum_{k=1}^n \frac{N_k^2 l_k}{2E_k A_k}. \quad (5.5)$$

Całkowanie wykonano przy założeniu, że siły w poszczególnych prętach i sztywności prętów są stałe, co w kratownicach jest regułą. Przemieszczenia węzłów kratownicy można wyznaczyć z równania:

$$f_i = \frac{\partial V_N}{\partial F_i} = \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\sum_{k=1}^n V_{N_k} \right) = \frac{\partial}{\partial F_i} \left(\sum_{k=1}^n \int_{l_k} \frac{N_k^2 dx}{2 E_k A_k} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{N_k \frac{\partial N_k}{\partial F_i} l_k}{E_k A_k}. \quad (5.6)$$

Przemieszczenia (ugięcia) wywołane zginaniem belek ($M_g \neq 0$, $N = 0$, $M_s = 0$ i $V_T \ll V_{Mg}$) najlepiej obliczać ze wzoru:

$$w_i = \int_l \frac{M_g \frac{\partial M_g}{\partial F_i}}{E I_{zc}} dx. \quad (5.7)$$

Energię sprężystą sprężyny rozciąganej (lub ściskanej) siłą S oblicza się ze wzoru:

$$V = \frac{S^2}{2c}, \quad (5.8)$$

gdzie c jest stałą sprężyny, czyli stosunkiem siły S do wydłużenia (skrócenia) sprężyny λ :

$$c = \frac{S[N]}{\lambda[m]}. \quad (5.9)$$

Metodyka rozwiązywania zadań statycznie niewyznaczalnych metodą energetyczną przy zastosowaniu twierdzenia Menabre.

1. Ustalić statyczną niewyznaczalność układu.

Układ jest statycznie niewyznaczalny zewnętrznie, gdy z równań statyki nie można wyznaczyć reakcji podpór. Liczba wszystkich reakcji o znanym kierunku lub składowych reakcji o nieznanym kierunku minus liczba równań statyki daje statyczną niewyznaczalność zewnętrzną. Za wielkości statycznie niewyznaczalne wolno przyjąć tylko te reakcje bądź ich składowe, których nie można wyznaczyć z równań statyki. Układy mogą być statycznie niewyznaczalne wewnętrznie, gdy po obliczeniu wszystkich reakcji bądź ich składowych nie można sporządzić wykresów sił wewnętrznych. Wtedy trzeba zrobić myślowy przekrój, narysować działające w tym przekroju siły wewnętrzne i rozpatrując taki układ ustalić statyczną niewyznaczalność wewnętrzną. Każda oś symetrii układu i obciążenia przecinająca pręt zmniejsza statyczną niewyznaczalność układu o jeden (siła tnąca w przekroju pręta leżącym na osi symetrii jest równa zero). Natomiast każda oś symetrii układu, która jest jednocześnie osią antysymetrii obciążenia zmniejsza statyczną niewyznaczalność układu o dwa (siła normalna i moment gnący w przekroju, do którego oś ta jest styczna, są równe zero, tzn. $N = 0$ i $M_g = 0$).

2. Przyjąć konkretne składowe reakcji lub siły wewnętrzne jako wielkości statycznie niewyznaczalne.

3. Zapisać wzory na siły wewnętrzne w poszczególnych elementach konstrukcji, wyrażając je przez obciążenie układu i przyjęte wielkości statycznie niewyznaczalne.

4. Obliczyć pochodne sił wewnętrznych względem wielkości statycznie niewyznaczalnych.

5. Zastosować twierdzenie Menabre.

Dla belek, łuków, ram i prętów, w których występują siły N i M_g ($M_s = 0$ i $T = 0$) wygodnie jest stosować twierdzenie Menabre w postaci:

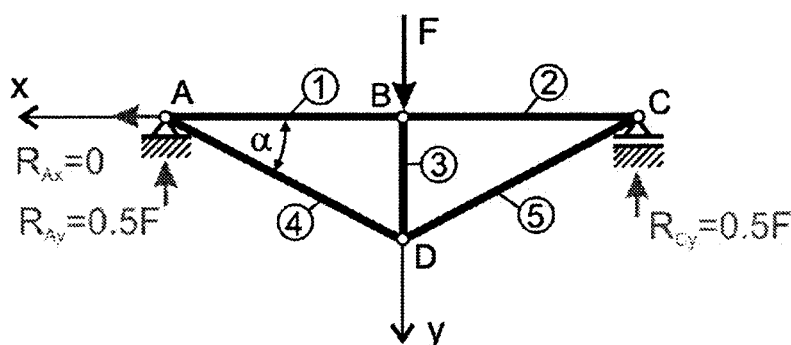
$$\frac{\partial V}{\partial R_i} = \int_l \frac{M_g \frac{\partial M_g}{\partial R_i}}{EI_{zc}} dx + \int_l \frac{N \frac{\partial N}{\partial R_i}}{EA} dx = 0. \quad (5.10)$$

Wyznaczenie wielkości statycznie niewyznaczalnych pozwala na sporządzenie wykresów sił wewnętrznych, obliczenie naprężeń w interesujących nas przekrojach oraz maksymalnych naprężeń zredukowanych.

- Zastosować twierdzenie Castigliano do wyznaczenia interesujących nas odkształceń, po ewentualnym przyłożeniu dodatkowych sił uogólnionych (równych zero) odpowiadających szukanym współrzędnym (przemieszczeniom) uogólnionym.

5.2. Przykłady obliczeń

Zadanie 5.1. Płaska kratownica widoczna na rys. 5.1 obciążona jest w węźle B pionową siłą F . Sztywności prętów zarówno na rozciąganie, jak i na ściskanie są jednakowe i wynoszą $EA = \text{const}$. Długość pręta BD jest równa l , natomiast kąt $\alpha = 30^\circ$. Obliczyć siły w prętach oraz przemieszczenia węzłów kratownicy.



Rys. 5.1

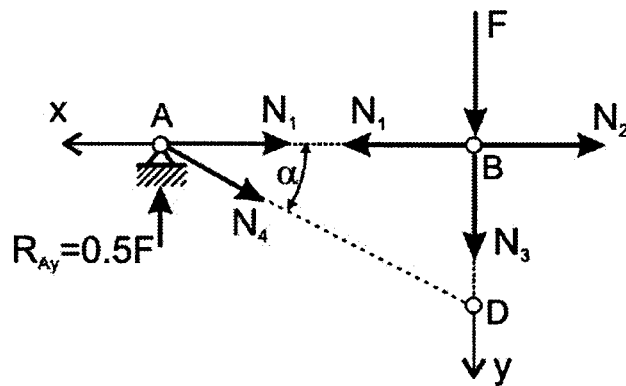
R o z w i ą z a n i e . Przyjętą numerację prętów oraz układ współrzędnych pokazano na rys. 5.1. Kratownica ma symetryczną budowę i symetryczne obciążenie. Z warunków podparcia kratownicy i równań statyki wynika, że w podporach A i C działają tylko reakcje pionowe równe:

$$R_A = R_{Ay} = \frac{1}{2}F \quad \text{oraz} \quad R_C = R_{Cy} = \frac{1}{2}F.$$

Mając daną długość pręta $l_3 = l$ oraz kąt $\alpha = 30^\circ$, z trójkąta ABD obliczono długości pozostałych prętów:

$$l_1 = l_2 = \sqrt{3}l, \quad l_4 = l_5 = 2l.$$

Ze względu na symetrię układu siły normalne w prętach kratownicy obliczono z równań równowagi sił działających na węzły A i B (rys. 5.2).



Rys. 5.2

Jak widać z rys. 5.2 zwroty wszystkich sił normalnych przyjęto od węzłów, tzn. założono, że wszystkie pręty są rozciągane. Z równań równowagi sił dla węzła A otrzymano:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_4 = \frac{0,5F}{\sin 30^\circ} = F,$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_1 = -N_4 \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} F,$$

a z równowagi węzła B:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow N_2 = N_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} F,$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N_3 = -F.$$

Z symetrii budowy i obciążenia kratownicy :

$$N_5 = N_4 = -F.$$

Otrzymane ujemne wartości sił N_1 , N_2 i N_3 oznaczają, że pręty te są ściskane.

Przemieszczenie poziome węzła B równe jest skróceniu pręta nr 1, czyli jest przemieszczeniem w kierunku węzła A (w kierunku dodatniego zwrotu osi x – rys. 5.2):

$$u_{Bx} = |\Delta l_1| = \frac{|N_1| l_1}{EA} = \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{2} F \right| \sqrt{3} l}{EA} = \frac{3Fl}{2EA}.$$

Przemieszczenie pionowe u_{By} węzła B obliczone zostanie z twierdzenia Castigliano. Energia sprężysta układu sił wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^5 \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i} = 2 \frac{N_1^2 l_1}{2EA} + 2 \frac{N_4^2 l_4}{2EA} + \frac{N_3^2 l_3}{2EA} = 2 \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} F \right)^2 \sqrt{3} l}{2EA} + 2 \frac{F^2 \cdot 2l}{2EA} + \frac{(-F)^2 \cdot l}{2EA},$$

$$V = \frac{3\sqrt{3} + 10}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot l}{2EA}.$$

Z twierdzenia Castigliano mamy:

$$u_{By} = \frac{dV}{dF} = \frac{3\sqrt{3}+10}{2} \cdot \frac{Fl}{EA} \approx 7,6 \frac{Fl}{EA}.$$

Przemieszczenie u_{By} jest dodatnie, co w twierdzeniu Castigliano oznacza, że zwrot u_{By} (przemieszczenia pionowego punktu przyłożenia siły F) jest zgodny ze zwrotem siły F , czyli, że węzeł B przemieszcza się w dół.

Podpora C przybliżyła się do podpory A o skrócenia dwóch takich samych prętów (nr 1 i nr 2), w których działają takie same siły normalne czyli:

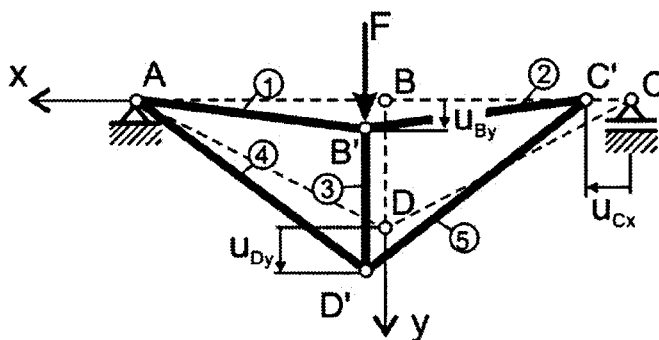
$$u_{Cx} = u_C = \frac{|N_1|l_1}{EA} + \frac{|N_2|l_2}{EA} = 2|\Delta l_1| = 2 \cdot \frac{3}{2} \frac{Fl}{EA} = 3 \cdot \frac{Fl}{EA}.$$

Składowe u_{Dx} i u_{Dy} węzła D wynoszą:

$$u_{Dx} = u_{Bx} = \frac{3}{2} \frac{Fl}{EA},$$

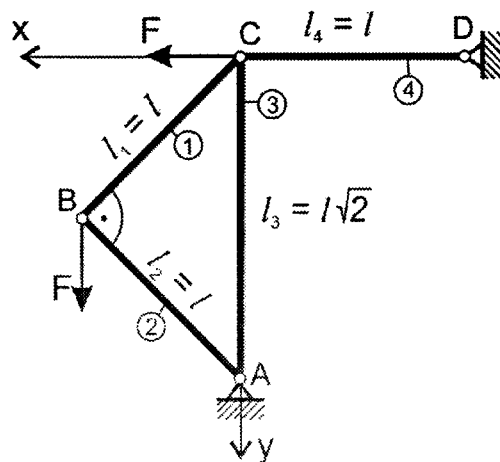
$$u_{Dy} = u_{By} - |\Delta l_3| = \frac{3\sqrt{3}+10}{2} \frac{Fl}{EA} - \frac{|-F|l}{EA} = \frac{3\sqrt{3}+8}{2} \frac{Fl}{EA} \approx 6,6 \frac{Fl}{EA}.$$

Na rys. 5.3 pokazano położenie kratownicy po odkształceniu (po wydłużeniu lub skróceniu jej prętów).



Rys. 5.3

Zadanie 5.2. Konstrukcja prętowa widoczna na rys. 5.4 obciążona jest w węźle B siłą pionową F skierowaną do dołu, a w punkcie C poziomą siłą F skierowaną w lewo. Obliczyć przemieszczenia węzłów B i C . Sztywności prętów na rozciąganie i ściskanie są jednakowe, $EA = \text{const}$. Pręty AB i BC o długościach $l_1 = l_2 = l$ są do siebie wzajemnie prostopadłe.



Rys. 5.4

R o z w i ą z a n i e . Przemieszczenie pionowe f_{By} węzła B obliczyć można z twierdzenia Castigliano jako pochodną energii sprężystej całego układu względem siły uogólnionej F przyłożonej w punkcie B, działającej równoległe do osi y przyjętego układu współrzędnych:

$$f_{By} = \frac{\partial V}{\partial F}.$$

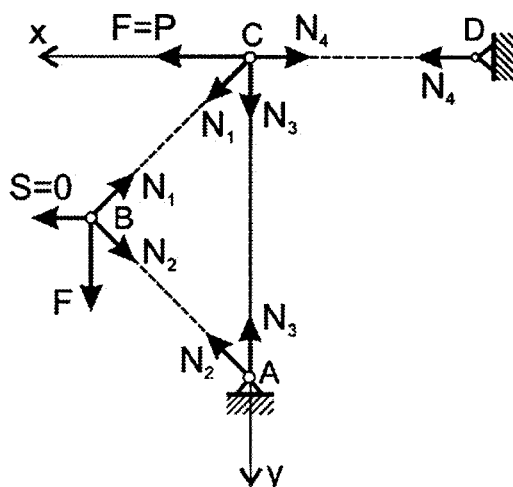
Ponieważ analizowany układ obciążony jest dwiema siłami i obie oznaczone są jako F , to dla odróżnienia ich podczas różniczkowania (stosowania twierdzenia Castigliano) siłę przyłożoną w punkcie C oznaczono przez $P = F$ (rys. 5.5). Ponadto, aby obliczyć przemieszczenie poziome węzła B, trzeba w tym węźle przyłożyć dodatkową siłę równą zero, np. $S = 0$ i wtedy:

$$f_{Bx} = \frac{\partial V}{\partial S}.$$

Z warunków równowagi sił działających w węzłach B i C (rys. 5.5) wynikają następujące zależności dla sił normalnych w prętach od 1 do 4:

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(F+S), \quad N_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-F+S),$$

$$N_3 = \frac{1}{2}(-F-S), \quad N_4 = \frac{1}{2}(F+S)+P.$$



Rys. 5.5

W omawianym przypadku (ponieważ $S = 0$ i $P = F$) rzeczywiste siły normalne w prętach układu wynoszą:

$$N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}F, \quad N_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F, \quad N_3 = -\frac{1}{2}F, \quad N_4 = \frac{3}{2}F.$$

Siły normalne w prętach 2 i 3 otrzymano ujemne, co oznacza, że pręty te są ściskane. Energia sprężysta układu sił wynosi:

$$V = \sum_{i=1}^4 \frac{N_i^2 l_i}{2 E_i A_i} = \frac{N_1^2 l}{2 EA} + \frac{N_2^2 l}{2 EA} + \frac{N_3^2 l \sqrt{2}}{2 EA} + \frac{N_4^2 l}{2 EA}.$$

Po przekształceniach równanie na energię sprężystą układu sił przyjmuje postać:

$$V = \frac{l}{4 EA} \left\{ (F+S)^2 + (-F+S)^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} (F+S)^2 + 2 \left[\frac{1}{2} (F+S) + P \right]^2 \right\}.$$

Z twierdzenia Castigliano mamy:

$$f_{By} = \frac{dV}{dF} = \frac{2l}{4 EA} \left\{ (F+S) \cdot 1 + (-F+S) \cdot (-1) + \frac{\sqrt{2}}{2} (F+S) \cdot 1 + 2 \left[\frac{1}{2} (F+S) + P \right] \cdot \frac{1}{2} \right\},$$

$$f_{Bx} = \frac{dV}{dS} = \frac{2l}{4 EA} \left\{ (F+S) \cdot 1 + (-F+S) \cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} (F+S) \cdot 1 + 2 \left[\frac{1}{2} (F+S) + P \right] \cdot \frac{1}{2} \right\},$$

$$f_{Cy} = \frac{dV}{dP} = \frac{2l}{4 EA} \left\{ 0 + 0 + 0 + 2 \left[\frac{1}{2} (F+S) + P \right] \cdot 1 \right\},$$

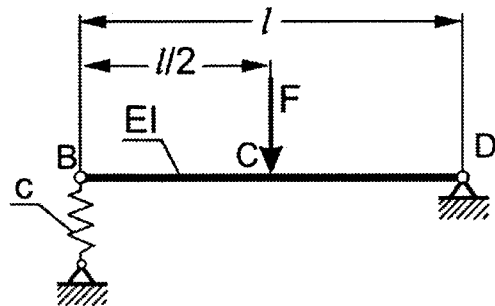
ponieważ $S = 0$ i $P = F$ to poszukiwane przemieszczenie węzłów wynoszą:

$$f_{By} = \frac{dV}{dF} = \frac{l}{2 EA} \left(F + F + \frac{\sqrt{2}}{2} F + \frac{3}{2} F \right) = \frac{7 + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{Fl}{EA} \approx 2,103 \cdot \frac{Fl}{EA},$$

$$f_{Bx} = \frac{dV}{dS} = \frac{l}{2 EA} \left(F - F + \frac{\sqrt{2}}{2} F + \frac{3}{2} F \right) = \frac{3 + \sqrt{2}}{4} \cdot \frac{Fl}{EA} \approx 1,103 \cdot \frac{Fl}{EA},$$

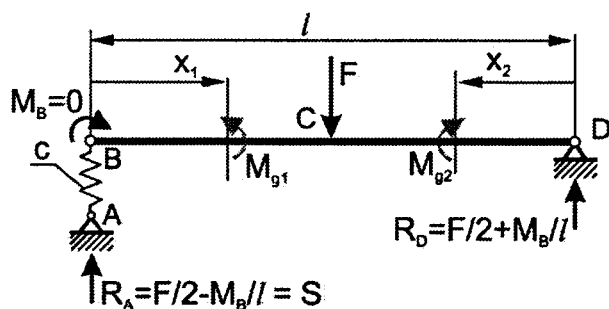
$$f_{Cx} = \frac{dV}{dP} = \frac{l}{2 EA} (0 + 0 + 0 + 3F) = \frac{3}{2} \cdot \frac{Fl}{EA} = 1,5 \cdot \frac{Fl}{EA} = \Delta l_4.$$

Zadanie 5.3. Belka o długości l i sztywności na zginanie EI podparta jest w punkcie B na sprężynie o stałej c , a w punkcie D na podporze przegubowej. Obliczyć przemieszczenie pionowe (ugięcie) f_C środka długości belki (punktu C), w którym przyłożona jest pionowa siła F (rys. 5.6) oraz kąt ugięcia θ_B belki w punkcie B.



Rys. 5.6

R o z w i ą z a n i e . Aby wyznaczyć ugięcie f_C i kąt ugięcia θ_B belki z twierdzenia Castigliano, trzeba ustalić siły uogólnione odpowiadające szukany przemieszczeniom uogólnionym. Ugięciu f_C odpowiada siła uogólniona F , natomiast kątowi ugięcia θ_B odpowiada siła uogólniona w postaci momentu skupionego. W punkcie B nie działa rzeczywisty moment skupiony, dlatego też w tym punkcie należy przyłożyć fikcyjny moment skupiony $M_B = 0$ (rys. 5.7).



Rys. 5.7

Energia sprężysta układu składa się z energii zginania belki i energii ściskania sprężyny:

$$V = \int_l \frac{M_g^2 dx}{2EI} + \frac{S^2}{2c}.$$

Analizowana belka podparta jest w sposób statycznie wyznaczalny, tzn. że reakcje w podporach można obliczyć z równań statyki. Siła S ściskająca sprężynę wyznaczona z sumy momentów wszystkich sił działających na belkę względem punktu D wynosi:

$$R_A = S = \frac{F}{2} - \frac{M_B}{l}.$$

Z sumy rzutów sił na oś pionową (oś y) otrzymano składową pionową reakcji w podporze D :

$$R_{Dx} = 0, \quad R_{Dy} = \frac{F}{2} + \frac{M_B}{l}.$$

Moment gnący w przekroju odległym o x_1 od punktu B w przedziale $0 \leq x_1 \leq l/2$ opisuje wzór:

$$M_{g1} = S \cdot x_1 + M_B = \left(\frac{F}{2} - \frac{M_B}{l} \right) x_1 + M_B.$$

Pochodne cząstkowe tego momentu względem sił uogólnionych F i M_B wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial F} = \frac{x_1}{2}, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_B} = 1 - \frac{x_1}{l}.$$

Równanie momentu gnącego dla drugiego przedziału $0 \leq x_2 \leq l/2$, w przekroju odległym o x_2 od punktu D , zapisano w postaci:

$$M_{g2} = R_{Dy} \cdot x_2 = \left(\frac{F}{2} + \frac{M_B}{l} \right) x_2.$$

Pochodne cząstkowe tego momentu względem sił uogólnionych F i M_B wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g2}}{\partial F} = \frac{x_2}{2}, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_B} = \frac{x_2}{l}.$$

Po obliczeniu pochodnych można już teraz we wzorach na momenty M_{g1} i M_{g2} dodatkowy moment M_B przyjąć równy zero, co daje:

$$M_{g1} = \frac{F}{2} \cdot x_1, \quad M_{g2} = \frac{F}{2} \cdot x_2.$$

Z twierdzenia Castigliano otrzymujemy:

$$f_c = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{F}{2} x_1\right) \left(\frac{x_1}{2}\right) dx_1}{EI} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{F}{2} x_2\right) \left(\frac{x_2}{2}\right) dx_2}{EI} + \frac{F}{2} \cdot \frac{1}{c},$$

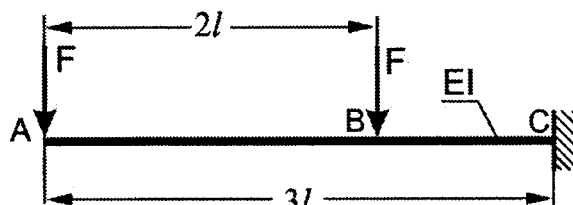
$$\theta_B = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{F}{2} x_1\right) \left(1 - \frac{x_1}{l}\right) dx_1}{EI} + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{F}{2} x_2\right) \left(\frac{x_2}{l}\right) dx_2}{EI} + \frac{F}{2} \left(-\frac{1}{c}\right).$$

Obliczenie powyższych całek daje ostateczne wzory na przemieszczenia uogólnione f_c i θ_B :

$$f_c = \frac{Fl^3}{48EI} + \frac{F}{4c},$$

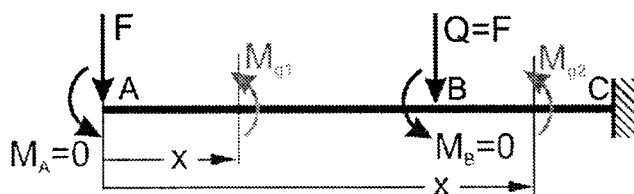
$$\theta_B = \frac{Fl^2}{16EI} - \frac{F}{2cl}.$$

Zadanie 5.4. Belka wspornikowa o długości $3l$ i sztywności na zginanie EI obciążona jest na swobodnym końcu A oraz w odległości $2l$ od tego końca (punkt B) – siłami F . Prawy koniec belki jest utwierdzony. Korzystając z twierdzenia Castigliano, obliczyć ugięcia oraz kąty ugięcia belki w punktach A i B.



Rys. 5.8

R o z w i ą z a n i e . Belka jest dwuprzędziałowa i statycznie wyznaczalna (z równań statyki wyznaczyć możemy nieznaną reakcję w utwierdzeniu). Pierwszy przedział zawarty jest w granicach $(0; 2l)$, a drugi $(2l; 3l)$.



Rys. 5.9

Następującym współrzędnym uogólnionym:
 f_A – ugięcie belki w punkcie A,

f_B – ugięcie belki w punkcie B,

θ_A – kąt ugięcia belki w punkcie A,

θ_B – kąt ugięcia belki w punkcie B,

przyporządkujemy odpowiadające im siły uogólnione: F , $Q = F$, $M_A = 0$ i $M_B = 0$, pokazane na rys. 5.9.

Wzory na momenty gnące (rys. 5.9) dla rozpatrywanych przedziałów belki mają postać:

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 2l & \quad M_{g1} = -M_A - F \cdot x, \\ 2l \leq x \leq 3l & \quad M_{g2} = -M_A - F \cdot x - M_B - Q(x - 2l). \end{aligned}$$

Pochodne tych momentów względem sił uogólnionych F , Q , M_A i M_B wynoszą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_{g1}}{\partial F} &= -x, & \frac{\partial M_{g2}}{\partial F} &= -x, \\ \frac{\partial M_{g1}}{\partial Q} &= 0, & \frac{\partial M_{g2}}{\partial Q} &= 2l - x, \\ \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_A} &= -1, & \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_A} &= -1, \\ \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_B} &= 0, & \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_B} &= -1. \end{aligned}$$

Po obliczeniu tych pochodnych, można już teraz we wzorach na momenty gnące przyjąć $Q = F$, $M_A = 0$ i $M_B = 0$, co upraszcza wzory i dalsze obliczenia:

$$\begin{aligned} M_{g1} &= -F \cdot x, \\ M_{g2} &= -F \cdot x - F(x - 2l) = 2F(l - x). \end{aligned}$$

Ugięcia i kąty ugięć belki w punktach A i B obliczono z wykorzystaniem twierdzenia Castigliano, ze wzorów podanych poniżej:

$$\begin{aligned} f_A &= \frac{\partial V}{\partial F} = \int_0^{2l} \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial F} dx + \int_{2l}^{3l} \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial F} dx, \\ f_B &= \frac{\partial V}{\partial Q} = \int_0^{2l} \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial Q} dx + \int_{2l}^{3l} \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial Q} dx, \\ \theta_A &= \frac{\partial V}{\partial M_A} = \int_0^{2l} \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_A} dx + \int_{2l}^{3l} \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_A} dx, \\ \theta_B &= \frac{\partial V}{\partial M_B} = \int_0^{2l} \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_B} dx + \int_{2l}^{3l} \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_B} dx. \end{aligned}$$

Szczegółowe obliczenia, po wykorzystaniu wzorów na momenty gnące i pochodne cząstkowe tych momentów względem poszczególnych sił uogólnionych, są następujące:

$$f_A = \int_0^{2l} \frac{(-Fx)(-x)dx}{EI} + \int_{2l}^{3l} \frac{2F(l-x)(-x)dx}{EI} = \frac{F}{EI} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2l} + \frac{2F}{EI} \left[-l \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{2l}^{3l} = \frac{31}{3} \frac{Fl^3}{EI},$$

$$f_B = \int_0^{2l} \frac{(-Fx)(0)dx}{EI} + \int_{2l}^{3l} \frac{2F(l-x)(2l-x)dx}{EI} = 0 + \frac{2F}{EI} \int_{2l}^{3l} (2l^2 - 3lx + x^2)dx =$$

$$= \frac{2F}{EI} \left[2l^2x - 3l \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_{2l}^{3l} = \frac{2F}{EI} \left(6l^3 - \frac{27}{2}l^3 + 9l^3 - 4l^3 + 6l^3 - \frac{8}{3}l^3 \right) = \frac{5}{3} \frac{Fl^3}{EI},$$

$$\theta_A = \int_0^{2l} \frac{(-Fx)(-1)dx}{EI} + \int_{2l}^{3l} \frac{2F(l-x)(-1)dx}{EI} = 5 \frac{Fl^2}{EI},$$

$$\theta_B = \int_0^{2l} \frac{(-Fx)(0)dx}{EI} + \int_{2l}^{3l} \frac{2F(l-x)(-1)dx}{EI} = 0 + \frac{2F}{EI} \int_{2l}^{3l} (x-l)dx =$$

$$= \frac{2F}{EI} \left[\frac{x^2}{2} - lx \right]_{2l}^{3l} = \frac{2F}{EI} \left(\frac{9}{2}l^2 - 2l^2 - 3l^2 + 2l^2 \right) = 3 \frac{Fl^2}{EI}.$$

Zadanie 5.5. Obliczyć przemieszczenie pionowe f i kąt ugięcia θ swobodnego końca A łuku o promieniu r i sztywności na zginanie EI . Łuk obciążony jest pionową siłą F i momentem skupionym M przyłożonymi w punkcie A (rys. 5.10). Energię siły normalnej N i siły tnącej T pominać.

R o z w i ą z a n i e . Moment gnący działający w przekroju określonym kątem φ (rys. 5.11) opisuje wzór:

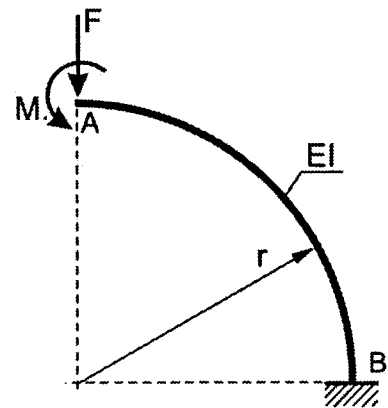
$$M(\varphi) = Fr \sin(\varphi) + M.$$

Energię sprężystą od zginania w rozpatrywanym łuku można zapisać w postaci:

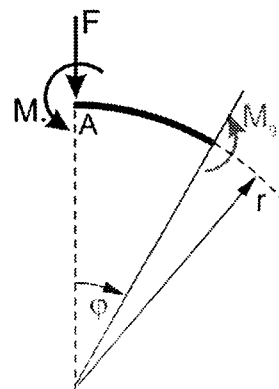
$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_g^2 rd \varphi}{2EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(Fr \sin(\varphi) + M)^2 rd \varphi}{2EI}.$$

Pochodne cząstkowe momentu gnącego względem sił uogólnionych F i M wynoszą:

$$\frac{\partial M_1}{\partial F} = r \sin(\varphi), \quad \frac{\partial M_g}{\partial M} = 1.$$



Rys. 5.10



Rys. 5.11

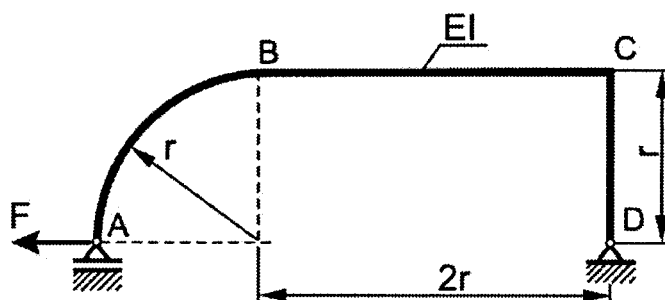
Pionowa strzałka ugięcia swobodnego końca łuku zgodnie z twierdzeniem Castigliano wynosi:

$$f = \frac{\partial V}{\partial F} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_g \frac{\partial M_g}{\partial F} r d\varphi}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(Fr \sin(\varphi) + M)(r \sin(\varphi)) r d\varphi}{EI} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{Fr^3}{EI} + \frac{Mr^2}{EI}.$$

Kąt ugięcia łuku w punkcie A:

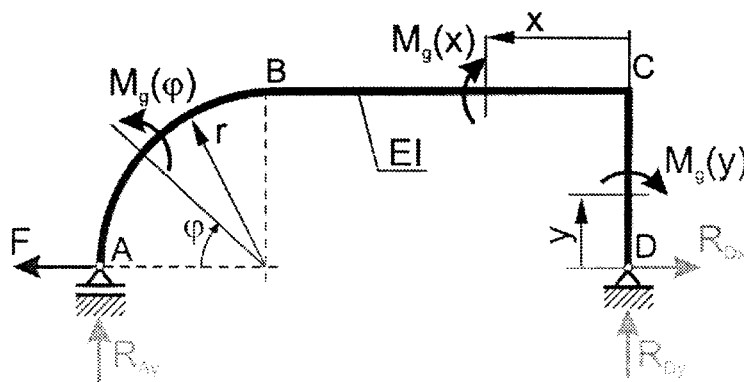
$$\theta = \frac{\partial V}{\partial M} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_g \frac{\partial M_g}{\partial M} r d\varphi}{EI} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(Fr \sin(\varphi) + M) \cdot 1 r d\varphi}{EI} = \frac{Fr^2}{EI} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{Mr}{EI}.$$

Zadanie 5.6. Pręt ABCD (rys. 5.12) złożony z łuku AB oraz ramy BCD, zamocowany przegubowo nieprzesuwnie w punkcie D i przegubowo przesuwnie w punkcie A, obciążony jest w punkcie A poziomą siłą F. Sztywność pręta na zginanie EI jest stała. Obliczyć przemieszczenie poziome h_A punktu A oraz sumę kątów obrotów stycznych do osi pręta w punktach A i D.



Rys. 5.12

Rozwiązanie. W rozpatrywanym pręcie trzeba wyróżnić trzy przedziały AB, BC i CD. Współrzędne określające dowolny przekrój pręta w poszczególnych przedziałach oznaczono przez φ , x i y (rys. 5.13). Granice przedziałów są następujące: $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq x \leq 2r$, $0 \leq y \leq L$.



Rys. 5.13

Obliczenie przemieszczenia poziomego h_A rozpoczniemy od wyznaczenia reakcji podpór. Rozpatrywany pręt będzie w równowadze, jeżeli w punkcie D będzie działać pozioma siła F o przeciwnym zwrocie niż siła przyłożona w punkcie A. Tak więc reakcje podpór mają następujące wartości: $R_{Ay} = 0$, $R_{Dy} = 0$, $R_{Dx} = F$. Momenty gnące w poszczególnych przedziałach określone są wzorami:

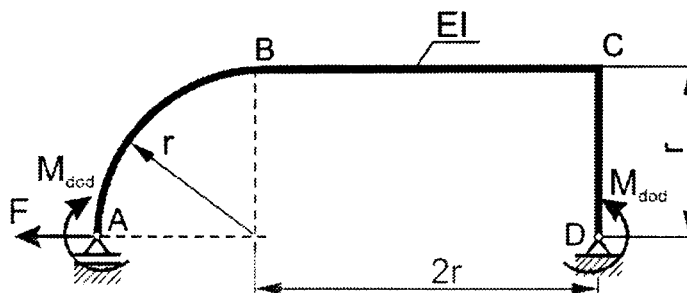
$$\begin{aligned} M_g(\varphi) &= Fr \sin(\varphi), \\ M_g(x) &= Fr, \\ M_g(y) &= Fy. \end{aligned}$$

Pochodne tych momentów względem siły F wynoszą:

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_g(\varphi)}{\partial F} &= r \sin(\varphi), \\ \frac{\partial M_g(x)}{\partial F} &= r, \\ \frac{\partial M_g(y)}{\partial F} &= y. \end{aligned}$$

Przemieszczenia h_A obliczono z twierdzenia Castigliano:

$$\begin{aligned} h_A = \frac{\partial V}{\partial F} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_g(\varphi)}{EI} \frac{\partial M_g(\varphi)}{\partial F} r d\varphi + \int_0^{2r} \frac{M_g(x)}{EI} \frac{\partial M_g(x)}{\partial F} dx + \int_0^r \frac{M_g(y)}{EI} \frac{\partial M_g(y)}{\partial F} dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Fr^2 \sin^2(\varphi)}{EI} r d\varphi + \int_0^{2r} \frac{Fr^2}{EI} dx + \int_0^r \frac{Fy^2}{EI} dy = \\ &= \frac{Fr^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi) d\varphi + \frac{2Fr^3}{EI} + \frac{Fr^3}{3EI} = \frac{Fr^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\varphi)) d\varphi + \frac{7Fr^3}{3EI} = \\ &= \frac{Fr^3}{2EI} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{7Fr^3}{3EI} = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{7}{3} \right) \frac{Fr^3}{EI} \approx 3,12 \frac{Fr^3}{EI}. \end{aligned}$$



Rys. 5.14

Suma kątów obrotu stycznych do osi pręta w punktach A i D zostanie obliczona z twierdzenia Castigliano przy założeniu w punktach A i D zerowych momentów dodatkowych $M_{dod} = 0$ o przeciwnych zwrotach (rys. 5.14). Rozpatrywany pręt będzie wtedy nadal w równowadze, a wyznaczone reakcje podpór pozostaną bez zmian.

Wzory na momenty gnące w poszczególnych przedziałach pręta są następujące:

$$\begin{aligned} M_g(\varphi) &= Fr \sin(\varphi) + M_{dod}, \\ M_g(x) &= Fr + M_{dod}, \\ M_g(y) &= Fy + M_{dod}. \end{aligned}$$

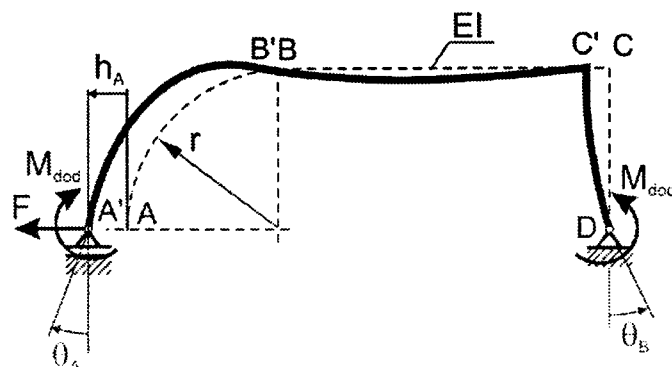
Pochodne momentów gnących względem siły uogólnionej M_{dod} wynoszą:

$$\frac{\partial M_g(\varphi)}{\partial M_{dod}} = \frac{\partial M_g(x)}{\partial M_{dod}} = \frac{\partial M_g(y)}{\partial M_{dod}} = 1.$$

Po obliczeniu tych pochodnych już teraz we wzorach na momenty gnące przyjęto, że $M_{dod} = 0$. Sumę kątów obrotu stycznych do osi pręta w punktach A i D, czyli $\theta_A + \theta_D$, obliczono z twierdzenia Castigliano:

$$\begin{aligned} \theta_A + \theta_D &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M_g(\varphi)}{EI} \frac{\partial M_g(\varphi)}{\partial M_{dod}} r d\varphi + \int_0^{2r} \frac{M_g(x)}{EI} \frac{\partial M_g(x)}{\partial M_{dod}} dx + \int_0^r \frac{M_g(y)}{EI} \frac{\partial M_g(y)}{\partial M_{dod}} dy = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Fr \sin(\varphi) \cdot 1}{EI} r d\varphi + \int_0^{2r} \frac{Fr \cdot 1}{EI} dx + \int_0^r \frac{Fy \cdot 1}{EI} dy = \\ &= \frac{Fr^2}{EI} [-\cos(\varphi)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2Fr^2}{EI} + \frac{Fr^2}{2EI} = \frac{Fr^2}{EI} + \frac{5Fr^2}{2EI} = \frac{7Fr^2}{2EI}. \end{aligned}$$

Wprowadzenie tak samo oznaczonego momentu dodatkowego M_{dod} w obu punktach pozwala obliczyć sumę kątów ugięcia, a przyjęcie odwrotnych kierunków tego momentu skutkuje odmierzeniem kątów w obu tych punktach w przeciwnym kierunku (rys. 5.15). Dla rozwiązywanego przykładu kąty $\theta_A + \theta_D$, oraz ich zwroty wynikające z fizyki zjawiska pokazano na rys. 5.15.



Rys. 5.15

Aby obliczyć kąt ugięcia łuku w punkcie A, trzeba tylko w tym jednym punkcie przyłożyć do układu moment $M_d = 0$ i obliczyć pochodną energii sprężystej układu względem M_d . Po przeprowadzeniu takich obliczeń otrzymano:

$$\theta_A = \frac{3}{2} \frac{F r^2}{EI}.$$

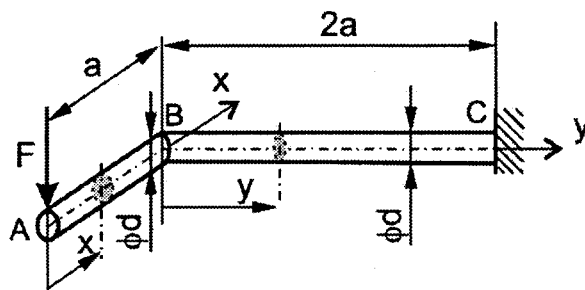
Znając sumę kątów:

$$\theta_A + \theta_D = \frac{7}{2} \frac{F r^2}{EI},$$

obliczono również kąt ugięcia θ_D :

$$\theta_D = (\theta_A + \theta_D) - \theta_A = \frac{7}{2} \frac{F r^2}{EI} - \frac{3}{2} \frac{F r^2}{EI} = \frac{2 F r^2}{EI}.$$

Zadanie 5.7. Pręt o przekroju kołowym zagięty w punkcie B pod kątem prostym (rys. 5.16), został utwierdzony w punkcie C w taki sposób, że elementy AB i BC pręta leżą w płaszczyźnie poziomej. Pręt obciążony jest w punkcie A pionową siłą F . Obliczyć przemieszczenie pionowe punktu A, mając dane: F , a , d , E , G , gdzie E jest modułem sprężystości wzdłużnej (moduł Younga), a G modułem odkształcenia postaciowego.



Rys. 5.16

Rozwiązanie. Zadanie rozwiązane zostanie metodą energetyczną przy zastosowaniu twierdzenia Castigliano. Sztywności pręta:

- na zginanie: $EI_{zc} = E \frac{\pi d^4}{64},$
- na skręcanie: $GI_0 = G \frac{\pi d^4}{32}.$

Element AB pręta jest zginany. Moment gnący w dowolnym przekroju z przedziału $0 \leq x \leq a$ jest równy:

$$M_g(x) = -F x.$$

Drugi element pręta jest zginany i skręcany. Moment gnący w dowolnym przekroju z przedziału $0 \leq y \leq 2a$ jest równy:

$$M_g(y) = -F y.$$

Moment skręcający na całej długości odcinka BC jest stały i wynosi:

$$M_s = F a.$$

Energia sprężysta układu składa się z energii pochodzącej od zginania prętów AB i BC oraz energii skręcania elementu BC:

$$V = \int_0^a \frac{[M_g(x)]^2 dx}{2 EI_{zc}} + \int_0^{2a} \frac{[M_g(y)]^2 dy}{2 EI_{zc}} + \int_0^{2a} \frac{M_s^2 dy}{2 GI_0}.$$

Aby obliczyć przemieszczenia pionowe f_A punktu A, można nie obliczać energii V , a od razu jej pochodną względem siły uogólnionej F ze wzoru:

$$f_A = \frac{\partial V}{\partial F} = \int_0^a \frac{M_g(x) \frac{\partial M_g(x)}{\partial F} dx}{EI_{zc}} + \int_0^{2a} \frac{M_g(y) \frac{\partial M_g(y)}{\partial F} dy}{EI_{zc}} + \int_0^{2a} \frac{M_s \frac{\partial M_s}{\partial F} dy}{GI_0}.$$

Pochodne momentów $M_g(x)$, $M_g(y)$ i M_s względem F wynoszą:

$$\frac{\partial M_g(x)}{\partial F} = -x, \quad \frac{\partial M_g(y)}{\partial F} = -y, \quad \frac{\partial M_s}{\partial F} = a.$$

Po podstawieniu momentów gnących i ich pochodnych do równania na f_A otrzymano:

$$\begin{aligned} f_A &= \int_0^a \frac{(-Fx)(-x) dx}{EI_{zc}} + \int_0^{2a} \frac{(-Fy)(-y) dy}{EI_{zc}} + \int_0^{2a} \frac{Fa \cdot a dy}{GI_0} = \\ &= \frac{Fa^3}{3 EI_{zc}} + \frac{8Fa^3}{3 EI_{zc}} + \frac{2Fa^3}{GI_0} = \frac{3Fa^3}{EI_{zc}} + \frac{2Fa^3}{GI_0}. \end{aligned}$$

Wykorzystując związek między G , E i ν oraz przyjmując $\nu = 0,3$, uzależniono sztywność skręcania GI_0 od sztywności zginania EI_{zc} :

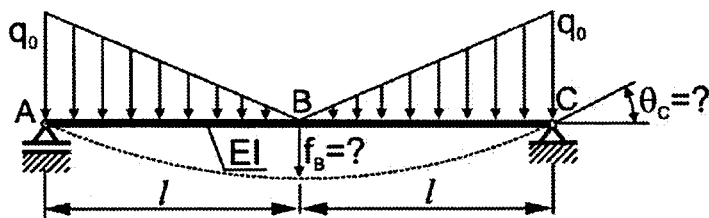
$$GI_0 = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\pi d^4}{32} = \frac{E}{(1+0,3)} \cdot \frac{\pi d^4}{64} = \frac{E I_{zc}}{1,3},$$

wtedy

$$f_A = \frac{3Fa^3}{EI_{zc}} + \frac{1,3 \cdot 2Fa^3}{EI_{zc}} = 5,6 \frac{Fa^3}{EI_{zc}}.$$

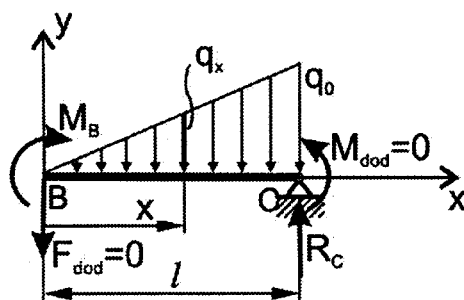
Skręcanie spowodowało wzrost ugięcia końca A pręta o około 87%.

Zadanie 5.8. Obliczyć ugięcie f_B punktu B oraz kąt ugięcia θ_C przy podporze C belki pokazanej na rys. 5.17. Dane $EI = \text{const}$, l , q_0 .



Rys. 5.17.

R o z w i ą z a n i e . Belka ma symetryczną budowę i jest symetrycznie obciążona. Wykorzystując warunki symetrii (siła tnąca $T_B = 0$), można dalej rozpatrywać jedynie połowę belki, która obciążona jest jak pokazano na rys. 5.18.



Rys. 5.18

Obciążenie q_x w przekroju oddalonym o x od punktu B wynosi:

$$q_x = q_0 \frac{x}{l}.$$

Z równań równowagi wynika, że:

$$R_C = \frac{q_0 l}{2} + F_{dod}, \quad M_B = \frac{q_0 l^2}{6} + M_{dod} + F_{dod} l.$$

Moment gnący w przekroju x :

$$M_g(x) = -\frac{q_x x}{2} \cdot \frac{1}{3} x + M_B - F_{dod} \cdot x.$$

Wykorzystując w równaniu na moment gnący wyznaczoną wartość reakcji M_B oraz zależność na q_x , otrzymano:

$$M_g(x) = -\frac{q_0 x^3}{6l} + \frac{q_0 l^2}{6} + M_{dod} + F_{dod} \cdot l - F_{dod} \cdot x.$$

Pochodne momentu gnącego $M_g(x)$ względem sił uogólnionych F_{dod} i M_{dod} odpowiadających szukanyemu współrzędnym uogólnionym f_B i θ_C wynoszą:

$$\frac{\partial M_g(x)}{\partial F_{dod}} = l - x, \quad \frac{\partial M_g(x)}{\partial M_{dod}} = 1.$$

Po obliczeniu pochodnych w wyrażeniu na moment gnący $M_g(x)$ przyjmujemy $F_{\text{dod}} = 0$ i $M_{\text{dod}} = 0$, co daje:

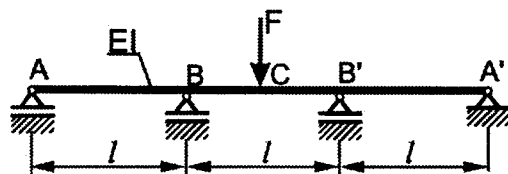
$$M_g(x) = -\frac{q_0 x^3}{6l} + \frac{q_0 l^2}{6}.$$

Z twierdzenia Castigliano obliczono f_B i θ_C :

$$f_B = \int_0^l \frac{\left(-\frac{q_0 x^3}{6l} + \frac{q_0 l^2}{6}\right)(l-x) dx}{EI} = \frac{3}{40} \cdot \frac{q_0 l^4}{EI},$$

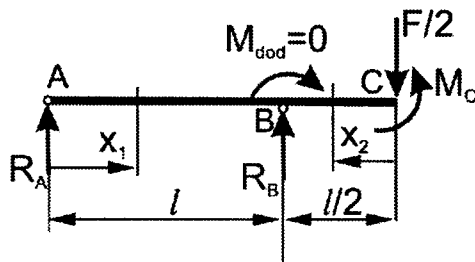
$$\theta_C = \int_0^l \frac{\left(-\frac{q_0 x^3}{6l} + \frac{q_0 l^2}{6}\right) \cdot 1 dx}{EI} = \frac{q_0 l^3}{8EI}.$$

Zadanie 5.9. Belka trójprzęsłowa (rys. 5.19) w środku długości obciążona jest pionową siłą F . Długości przęseł $l_{AB} = l_{BB'} = l_{B'A'} = l$ są jednakowe. Sztywność belki na zginanie $EI = \text{const}$. Stosując metodę energetyczną, wyznaczyć reakcje podporowe oraz ugięcie belki w punkcie C. Sporządzić wykres momentów gnących.



Rys. 5.19

R o z w i ą z a n i e . Belka ma symetryczną budowę i jest symetrycznie obciążona (rys. 5.20).



Rys. 5.20

Z tej symetrii wynika, że $R_A = R_{A'}$, $R_B = R_{B'}$, czyli że rozpatrywana belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Z sumy rzutów sił na oś y wynika, że:

$$2R_A + 2R_B - F = 0,$$

stąd:

$$R_B = \frac{F}{2} - R_A.$$

Za wielkość statycznie niewyznaczalną można przyjąć reakcję R_A , pamiętając jednocześnie, że reakcja R_B jest funkcją R_A . Energia sprężysta całej belki ABB'A' jest równa podwojonej energii połowy belki ABC:

$$V = 2V_{ABC}.$$

Zamiast całej belki można rozpatrywać połowę belki obciążonej i podpartej jak pokazano na rys. 5.20. Z racji istnienia symetrii budowy i obciążenia belki siłą obciążającą działającą w osi symetrii dzielimy na pół i przykładamy do rozpatrywanej połowy belki. Z sumy momentów sił względem punktu B otrzymano równanie:

$$R_A l + M_{dod} + \frac{F}{2} \frac{l}{2} - M_C = 0,$$

stąd:

$$M_C = R_A l + M_{dod} + \frac{Fl}{4}.$$

Momenty gnące w poszczególnych przedziałach wynoszą:

$$0 \leq x_1 \leq l \quad M_{g1} = M_g(x_1) = R_A x_1,$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2} \quad M_{g2} = M_g(x_2) = M_C - \frac{F}{2} x_2 = R_A l + M_{dod} + \frac{Fl}{4} - \frac{F}{2} x_2.$$

Pochodne cząstkowe momentów gnących względem reakcji statycznie niewyznaczalnej i sił uogólnionych wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial R_A} = x_1, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_A} = l,$$

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial \left(\frac{F}{2}\right)} = \frac{l}{2} - x_2, \quad \text{lub} \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial F} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial F} = \frac{l}{4} - \frac{x_2}{2},$$

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial M_{dod}} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_{dod}} = 1.$$

Siła uogólniona odpowiadająca przemieszczeniu punktu C, który leży na osi symetrii układu, może być przyjęta jako $F/2$, gdy rozpatrywana będzie jedynie połowa układu (energia sprężysta w twierdzeniu Castigliano wzięta tylko dla połowy układu) lub jako F , gdy rozpatrywany będzie cały układ (energia sprężysta całego układu). Stąd też w niniejszym przykładzie zarówno przy wyznaczeniu pochodnych cząstkowych, jak i przemieszczenia f_C rozpatrzono oba przypadki pokazując, że prowadzą do tego samego wyniku.

Po obliczeniu tych pochodnych można przyjąć $M_{\text{dod}} = 0$, skąd:

$$M_{g^2} = M_g(x_2) = R_A l + \frac{Fl}{4} - \frac{F}{2} x_2.$$

Wykorzystując twierdzenie Menabre, obliczono niewyznaczalną statycznie reakcję R_A :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial R_A} &= 0, \\ \int_0^l \frac{R_A x_1 \cdot x_1}{EI} dx_1 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(R_A l + \frac{Fl}{4} - \frac{F}{2} x_2\right) \cdot l}{EI} dx_2 &= 0, \\ R_A \frac{l^3}{3} + R_A \frac{l^3}{2} + \frac{Fl^3}{8} - \frac{Fl^3}{16} &= 0, \\ R_A &= -\frac{6}{80} F = -\frac{3}{40} F, \\ R_B = \frac{F}{2} - R_A &= \frac{1}{2} R_A + \frac{3}{40} F = \frac{23}{40} F. \end{aligned}$$

Mając reakcje podpór i wykorzystując twierdzenie Casigliano, wyznaczono przemieszczenie pionowe środka belki f_c oraz kąt ugięcia θ_B :

$$\begin{aligned} f_c = \frac{\partial V}{\partial \frac{F}{2}} &= 0 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{g^2} \frac{\partial M_{g^2}}{\partial \frac{F}{2}}}{EI} dx_2 = 0 + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(R_A l + \frac{Fl}{4} - \frac{F}{2} x_2\right) \cdot \left(\frac{l}{2} - x_2\right)}{EI} dx_2 = \\ &= \frac{R_A l^3}{4EI} + \frac{Fl^3}{16EI} - \frac{Fl^3}{32EI} - \frac{R_A l^3}{8EI} - \frac{Fl^3}{32EI} + \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{R_A l^3}{8EI} + \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{-3Fl^3}{40 \cdot 8EI} + \frac{Fl^3}{48EI} = \\ &= \frac{-9Fl^3}{960EI} + \frac{20Fl^3}{960EI} = \frac{11Fl^3}{960EI} \end{aligned}$$

lub

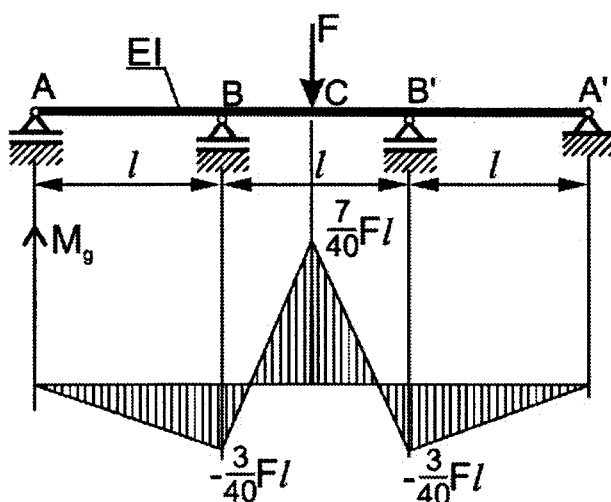
$$\begin{aligned} f_c = \frac{\partial V}{\partial F} &= 0 + 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{g^2} \frac{\partial M_{g^2}}{\partial F}}{EI} dx_2 = 0 + 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(R_A l + \frac{Fl}{4} - \frac{F}{2} x_2\right) \cdot \left(\frac{l}{4} - \frac{x_2}{2}\right)}{EI} dx_2 = \\ &= 2 \left(\frac{R_A l^3}{8EI} + \frac{Fl^3}{32EI} - \frac{Fl^3}{64EI} - \frac{R_A l^3}{16EI} - \frac{Fl^3}{64EI} + \frac{Fl^3}{96EI} \right) = 2 \left(\frac{R_A l^3}{16EI} + \frac{Fl^3}{96EI} \right) = \\ &= \frac{R_A l^3}{8EI} + \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{-3Fl^3}{40 \cdot 8EI} + \frac{Fl^3}{48EI} = \frac{-3Fl^3}{320EI} + \frac{20Fl^3}{960EI} = \frac{-9Fl^3}{960EI} + \frac{20Fl^3}{960EI} = \frac{11Fl^3}{960EI}. \end{aligned}$$

Znając wartości reakcji, momenty gnące w poszczególnych przedziałach, można wyrazić jako funkcję siły obciążającej F i współrzędnej x w postaci:

$$0 \leq x_1 \leq l \quad M_{g1} = -\frac{3}{40} F x_1,$$

$$0 \leq x_2 \leq \frac{l}{2} \quad M_{g2} = \frac{7}{40} F l - \frac{F}{2} x_2$$

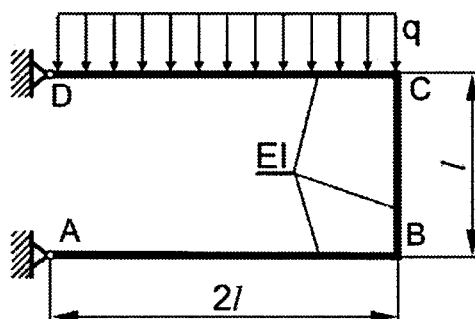
i wykorzystać je do narysowania wykresu momentów gnących (rys. 5.21).



Rys. 5.21

Zadanie 5.10. Rama ABCD pokazana na rys. 5.22 obciążona jest na elemencie CD = 2l obciążeniem ciągłym $q = \text{const}$ prostopadłym do osi tego elementu. Sztywność elementów ramy na zginanie $EI = \text{const}$.

Wyznaczyć reakcje w przegubach A i D oraz obliczyć kąt obrotu naroża B ramy.

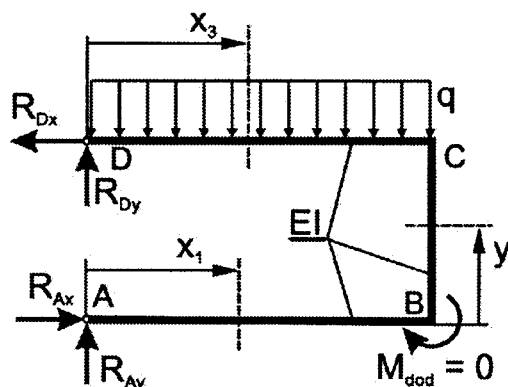


Rys. 5.22

Rozwiązanie. Zadanie to można rozwiązać na dwa sposoby. Pierwszy polegający na dodaniu w punkcie B momentu dodatkowego M_{dod} i jednoczesnym wyznaczeniu reakcji podpór i kąta ugięcia naroża B ramy. Drugi sposób to najpierw wyznaczenie nieznanymi reakcji, a następnie wyznaczenie kąta obrotu w punkcie B przy założeniu, że statycznie nieznaną reakcją jest siłą znaną obciążającą układ. Zadanie rozwiązane zostanie dwiema metodami.

Sposób I

W narożu B ramy nie ma siły uogólnionej odpowiadającej poszukiwanemu przemieszczeniu (kąt obrotu punktu B – θ_B), tak więc dodajemy $M_{dod} = 0$ i uwalniamy układ od więzów (rys. 5.23).



Rys. 5.23

Zadanie jest więc jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Reakcje R_{Ax} , R_{Dx} można obliczyć z równań statyki, dlatego nie wolno ich przyjąć jako statycznie niewyznaczalne. Z sum momentów sił względem punktów A i D obliczono:

$$R_{Ax} = 2ql + \frac{M_{dod}}{l},$$

$$R_{Dx} = 2ql + \frac{M_{dod}}{l}.$$

Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjęto reakcję R_{Ay} . Z sumy rzutów sił na oś y otrzymano:

$$R_{Dy} = 2ql - R_{Ay},$$

z czego wynika, że reakcja R_{Dy} jest funkcją reakcji R_{Ay} .

Wzory na momenty gnące w trzech przedziałach AB, BC i CD ramy mają postać:

$$M_{g1} = M_g(x_1) = R_{Ay} \cdot x_1,$$

$$M_{g2} = M_g(y) = R_{Ay} \cdot 2l - R_{Ax} \cdot y = R_{Ay} \cdot 2l - 2ql \cdot y - \frac{M_{dod}}{l} \cdot y + M_{dod},$$

$$M_{g3} = M_g(x_3) = R_{Dy} \cdot x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2 = (2ql - R_{Ay})x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2.$$

W celu znalezienia reakcji statycznie niewyznaczalnych potrzebne będą pochodne tych momentów względem wielkości statycznie niewyznaczalnej R_{Ay} . Natomiast dla wyznaczenia kąta ugięcia należy wyznaczyć pochodne wyżej określonych momentów gnących względem siły uogólnionej M_{dod} . Odpowiednie pochodne wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial R_{Ay}} = x_1, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_{Ay}} = 2l, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial R_{Ay}} = -x_3,$$

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial M_{dod}}=0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_{dod}}=-\frac{y}{l}+1, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_{dod}}=0.$$

Teraz już we wszystkich równaniach można pominąć M_{dod} jako równą zero.
Z twierdzenia Menabre:

$$\frac{\partial V}{\partial R_{Ay}}=0$$

otrzymano równanie:

$$\int_0^{2l} \frac{(R_{Ay} x_1) x_1}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{(R_{Ay} \cdot 2l - 2ql \cdot y) 2l}{EI} dy + \int_0^{2l} \frac{\left[(2q - R_{Ay}) x_3 - \frac{1}{2} q x_3^2 \right] \cdot (-x_3)}{EI} dx_3 = 0.$$

Po pomnożeniu obu stron tego równania przez EI i scałkowaniu otrzymano:

$$\frac{8}{3} R_{Ay} l^3 + R_{Ay} 4l^3 - 2ql^4 - \frac{16}{3} ql^4 + \frac{8}{3} R_{Ay} l^3 + 2ql^4 = 0,$$

$$R_{Ay} = \frac{4}{7} ql.$$

Reakcja R_{Dy} wynosi:

$$R_{Dy} = 2ql - \frac{4}{7} ql = \frac{10}{7} ql.$$

Natomiast z twierdzenia Castigliano:

$$\theta_B = \frac{\partial V}{\partial \theta_B}$$

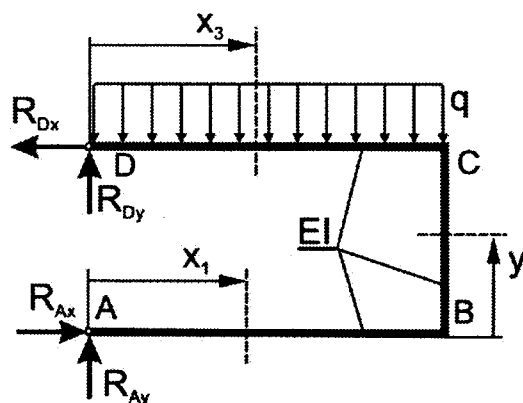
otrzymano kąt obrotu naroża B ramy, który wynosi:

$$\theta_B = \frac{\partial V}{\partial \theta_B} = \int_0^l \frac{\left(\frac{8}{7} ql^2 - 2ql \cdot y \right) \left(1 - \frac{y}{l} \right)}{EI} dy = \frac{1}{EI} \left(\frac{8}{7} ql^3 - ql^3 - \frac{4}{7} ql^3 + \frac{2}{3} ql^3 \right) = \frac{5}{21} \frac{ql^3}{EI}$$

i ma zwrot zgodny z przyjętym zwrotem momentu M_{dod} .

Sposób II

Uwolnioną od więzów ramę pokazano na rys. 5.24. Najpierw trzeba wyznaczyć składowe R_{Ax} , R_{Ay} , R_{Dx} , R_{Dy} reakcji działających w przegubach A i D. Reakcji R_{Ay} i R_{Dy} nie da się obliczyć z równań statyki, ponieważ do dyspozycji mamy tylko trzy równania równowagi przy czterech niewiadomych. Zadanie jest więc jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Reakcje R_{Ax} , R_{Dx} można obliczyć z równań statyki, dlatego nie wolno ich przyjąć jako statycznie niewyznaczalne.



Rys. 5.24

Z sum momentów sił względem punktów A i D obliczono:

$$R_{Ax} = 2ql, \quad R_{Dx} = 2ql.$$

Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjęto reakcję R_{Ay} . Z sumy rzutów sił na oś y otrzymano:

$$R_{Dy} = 2ql - R_{Ay},$$

z czego wynika, że reakcja R_{Dy} jest funkcją reakcji R_{Ay} .

Wzory na momenty gnące w trzech przedziałach AB, BC i CD ramy mają postać:

$$M_{g1} = M_g(x_1) = R_{Ay} \cdot x_1,$$

$$M_{g2} = M_g(y) = R_{Ay} \cdot 2l - R_{Ax} \cdot y = R_{Ay} \cdot 2l - 2ql \cdot y,$$

$$M_{g3} = M_g(x_3) = R_{Dy} \cdot x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2 = (2ql - R_{Ay})x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2.$$

Pochodne tych momentów względem wielkości statycznie niewyznaczalnej R_{Ay} wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial R_{Ay}} = x_1, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_{Ay}} = 2l, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial R_{Ay}} = -x_3.$$

Z twierdzenia Menabre:

$$\frac{\partial V}{\partial R_{Ay}} = 0$$

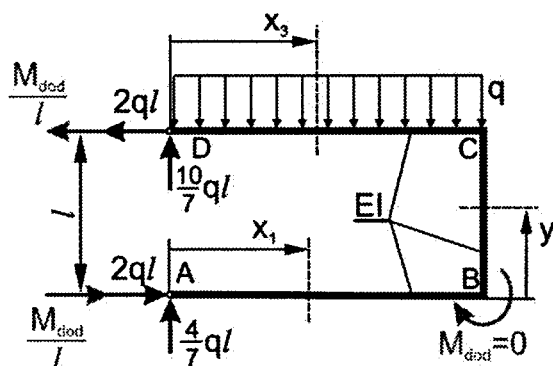
otrzymano równanie:

$$\int_0^{2l} \frac{(R_{Ay} \cdot x_1) x_1}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{(R_{Ay} \cdot 2l - 2ql \cdot y) 2l}{EI} dy + \int_0^{2l} \frac{\left[(2ql - R_{Ay}) x_3 - \frac{1}{2} q x_3^2 \right] \cdot (-x_3)}{EI} dx_3 = 0,$$

które jest identyczne jak w poprzednio przedstawionym sposobie rozwiązanie. Tak więc wynik w postaci reakcji R_{Ay} otrzymano jak poprzednio.

Przy obliczaniu kąta θ_B obrotu naroża ramy, ramę można rozpatrywać jako statycznie wyznaczalną (częściowo uwolnioną od więzów jak pokazano na rys. 5.25), obciążoną w przegubie A siłą R_{Ay} składową:

$$R_{Ay} = \frac{4}{7}ql$$



Rys. 5.25

Aby obliczyć kąt θ_B z twierdzenia Castigliano, trzeba naroże B obciążyć dodatkowym momentem skupionym $M_{dod} = 0$, równocześnie dodając odpowiednie siły (rys. 5.25) jako dodatkowe reakcje poziome w podporach A i D równoważące nowy układ sił. Wzory na momenty gnące przyjmują wtedy postać:

$$M_{g1} = M_g(x_1) = R_{Ay} \cdot x_1 = \frac{4}{7}qlx_1,$$

$$M_{g2} = M_g(y) = R_{Ay} \cdot 2l - \left(2ql + \frac{M_{dod}}{l}\right)y + M_{dod},$$

$$M_{g3} = M_g(x_3) = R_{Dy} \cdot x_3 - \frac{1}{2}qx_3^2 = \frac{10}{7}qlx_3 - \frac{1}{2}qx_3^2.$$

Pochodne momentów M_{g1} , M_{g2} i M_{g3} względem M_{dod} wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial M_{dod}} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_{dod}} = 1 - \frac{y}{l}, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial M_{dod}} = 0.$$

Tak więc kąt obrotu naroża B ramy wynosi:

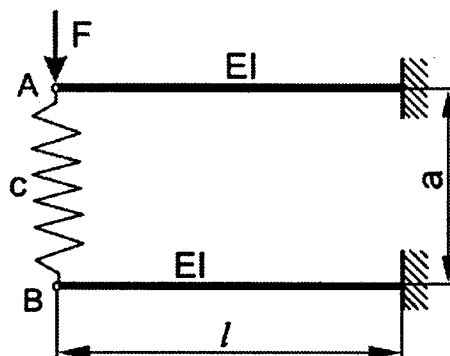
$$\theta_B = \frac{\partial V}{\partial \theta_B} = \int_0^l \frac{\left(\frac{8}{7}ql^2 - 2ql \cdot y\right) \left(1 - \frac{y}{l}\right)}{EI} dy = \frac{1}{EI} \left(\frac{8}{7}ql^3 - ql^3 - \frac{4}{7}ql^3 + \frac{2}{3}ql^3\right) = \frac{5}{21} \frac{ql^3}{EI}$$

i ma zwrot zgodny z przyjętym zwrotem momentu M_{dod} .

Zadanie 5.11. Dwie poziome belki wspornikowe o długości l każda, połączone są ze sobą pionową sprężyną (rys. 5.26). Sztywności belek na zginanie $EI = \text{const}$ są jednakowe, a stała sprężyny:

$$c = \frac{3EI}{2l^3}.$$

Na lewy koniec górnej belki działa skierowana do dołu pionowa siła F . Znaleźć strzałki ugięcia f_A i f_B obu końców belek.

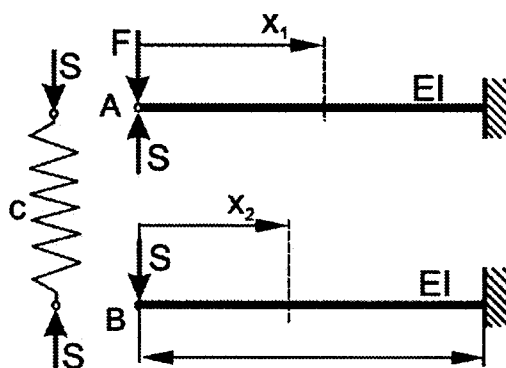


Rys. 5.26

R o z w i ą z a n i e . Na rys. 5.27 przedstawiono analizowaną konstrukcję częściowo uwolnioną od więzów. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjęto wewnętrzną siłę S w sprężynie. Siłę S wyznaczamy z twierdzenia Menabre:

$$\frac{\partial V}{\partial S} = 0,$$

tu $V = V_g + V_s$, gdzie: $V_s = \frac{S^2}{2c}$.



Rys. 5.27

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \int_0^l \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial S} dx_1 + \int_0^l \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial S} dx_2 + \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{S^2}{2c} \right) = 0.$$

Obliczenia szczegółowe:

$$M_{g1} = (S - F)x_1, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial S} = x_1, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial F} = -x_1,$$

$$M_{g2} = -S \cdot x_2, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial S} = -x_2, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial F} = 0,$$

$$V_{spr} = \frac{S^2}{2c} \quad \frac{\partial V_{spr}}{\partial S} = \frac{S}{c} = \frac{2Sl^3}{3EI}.$$

Po wykorzystaniu twierdzenia Menabre i powyższych obliczeń otrzymano:

$$\int_0^l \frac{(S - F)x_1^2}{EI} dx_1 + \int_0^l \frac{Sx_2^2}{EI} dx_2 + \frac{2Sl^3}{3EI} = 0,$$

$$\frac{1}{3}(S - F)l^3 + \frac{1}{3}Sl^3 + \frac{2}{3}Sl^3 = 0,$$

$$S = \frac{1}{4} F.$$

Strzałki ugięć f_A i f_B rozpatrywanych belek obliczymy z twierdzenia Castigliano:

$$\begin{aligned} f_A = \frac{\partial V}{\partial F} &= \int_0^l \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial F} dx_1 = \int_0^l \frac{(S-F)x_1 \cdot (-x_1)}{EI} dx_1 = \frac{-S+F}{EI} \left[\frac{x_1^3}{3} \right]_0^l = \frac{(F-S)l^3}{3EI} = \\ &= \frac{\left(F - \frac{1}{4}F \right) l^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{4EI}, \end{aligned}$$

$$f_B = \frac{\partial V}{\partial S} = \int_0^l \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial S} dx_2 = \int_0^l \frac{Sx_2^2}{EI} dx_2 = \frac{Sl^3}{3EI} = \frac{Fl^3}{12EI}.$$

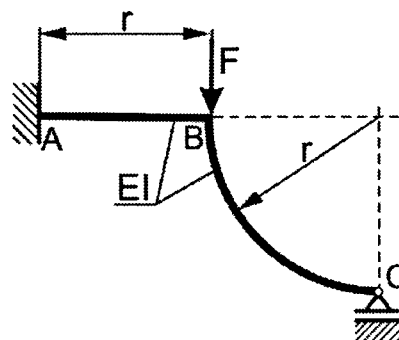
Skrócenie sprężyny:

$$\Delta a = f_A - f_B = \frac{Fl^3}{4EI} - \frac{Fl^3}{12EI} = \frac{Fl^3}{6EI}$$

lub

$$\Delta a = \frac{S}{c} = \frac{\frac{1}{4}F}{\frac{3EI}{2l^3}} = \frac{Fl^3}{6EI}.$$

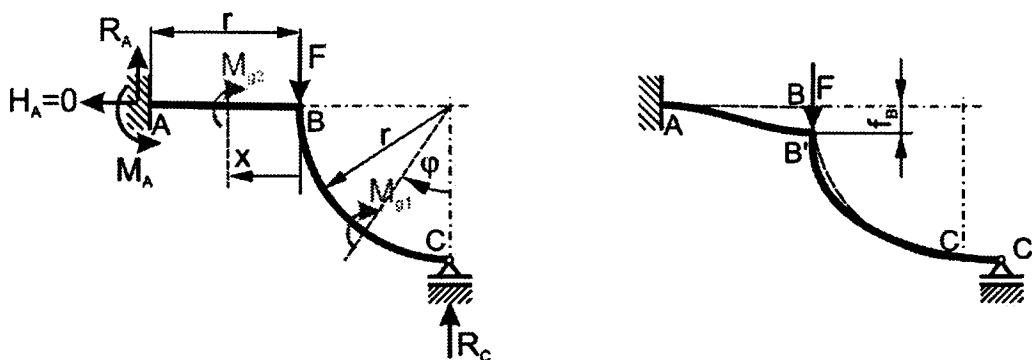
Zadanie 5.12. Element konstrukcyjny ABC złożony z belki AB i łuku BC utwierdzony jest w punkcie A i podparty na podporze przegubowej przesuwnej w punkcie C (rys. 5.28). Obliczyć przemieszczenie f_B punktu B, jeżeli układ obciążony jest w punkcie B pionową siłą F . Sztywność belki i łuku na zginanie jest jednakowa i wynosi $EI = \text{const}$.



Rys. 5.28

Rozwiązanie. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. Za siłę statycznie niewyznaczalną najlepiej przyjąć reakcję R_C w podporze C (rys. 5.29). Równania opisujące momenty gnące w każdym przekroju belki i łuku mają następującą postać:

$$\begin{aligned} M_{g1} &= M_g(\varphi) = R_C r \sin(\varphi), \\ M_{g2} &= M_g(x) = R_C(r+x) - Fx. \end{aligned}$$



Rys. 5.29

Pochodne tych momentów względem sił R_C i F wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial R_C} = r \sin(\varphi), \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_C} = r + x,$$

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial F} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial F} = -x,$$

Obliczenia reakcji R_C z twierdzenia Menabre:

$$\frac{\partial V}{\partial R_C} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R_C r \sin(\varphi) \cdot r \sin(\varphi)}{EI} r d\varphi + \int_0^r \frac{[R_C(r+x) - Fx](r+x)}{EI} dx = 0,$$

$$\frac{R_C r^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(\varphi) d\varphi + \frac{R_C}{EI} \int_0^r (r+x)^2 dx - \frac{F}{EI} \int_0^r (r+x)x dx = 0,$$

$$\frac{R_C r^3}{EI} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\varphi)) d\varphi + \frac{R_C}{EI} \int_0^r (r^2 + 2rx + x^2) dx - \frac{F}{EI} \int_0^r (rx + x^2) dx = 0.$$

Po scałkowaniu i pomnożeniu przez EI otrzymano:

$$R_C r^3 \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + R_C \left[r^2 x + rx^2 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^r - F \left[r \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^r = 0,$$

$$R_C \frac{\pi}{4} + R_C \frac{7}{3} = F \frac{5}{6},$$

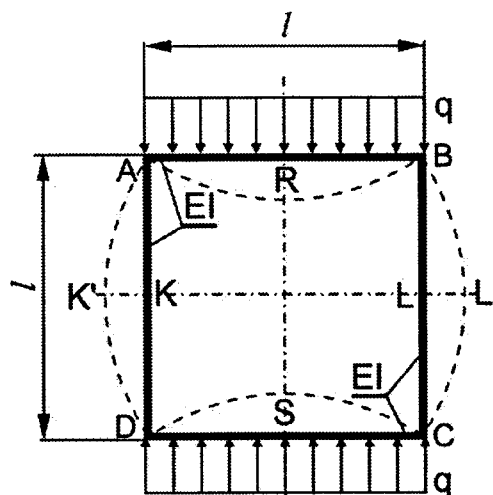
stąd:

$$R_C = \frac{10}{3\pi + 28} F.$$

Przemieszczenie punktu B obliczono z twierdzenia Castigliano:

$$f_B = \frac{\partial V}{\partial F} = \int_0^r \frac{[R_C(r+x) - Fx](-x)}{EI} dx = -\frac{5}{6} \frac{R_C r^3}{EI} + \frac{1}{3} \frac{F r^3}{EI} = \frac{\pi + 1}{3\pi + 28} \frac{F r^3}{EI} \approx 0,11 \frac{F r^3}{EI}.$$

Zadanie 5.13. Kwadratowa rama ABCD o długości boków l i sztywności na zginanie prętów ramy EI poddana jest obciążeniu $q = \text{const}$ na dwóch przeciwległych prętach (rys. 5.30). Sporządzić wykresy sił wewnętrznych oraz obliczyć zmianę odległości pomiędzy punktami K i L po odkształceniu ramy.



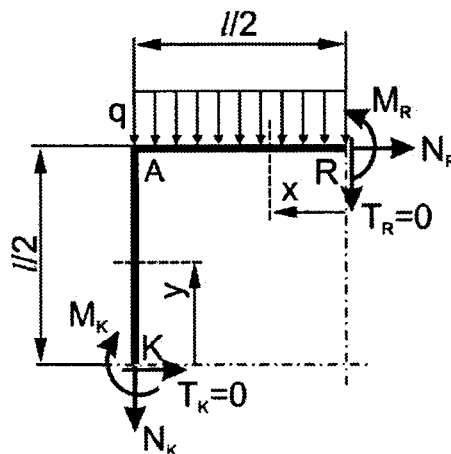
Rys. 5.30

R o z w i ą z a n i e . Rama ze względu na swoją budowę ma 4 osie symetrii, a ze względu na obciążenie dwie osie symetrii, pionową i poziomą.

W przekrojach poprzecznych prętów ramy leżących na osiach symetrii budowy i obciążenia siły tnące T są równe zero.

Aby wyznaczyć siły wewnętrzne dla analizowanej konstrukcji, wystarczy rozpatrzyć $\frac{1}{4}$ część ramy, np. część znajdującą się między punktami KAR.

Na rys. 5.31 pokazano myślowo odciętą część ramy KAR z obciążeniem zewnętrznym q i wewnętrznymi siłami uogólnionymi N_K , M_K oraz N_R i M_R . Z równań równowagi wynika, że:



Rys. 5.31

$$N_R = 0, \quad N_K = -\frac{1}{2}ql,$$

$$\sum M_R = M_R + \frac{1}{8}ql^2 - M_K + N_K \frac{l}{2} = 0,$$

co świadczy, że rama jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Za wielkość statycznie niewyznaczalną przyjęto moment M_R . Wtedy moment M_K staje się funkcją przyjętej wielkości statycznie niewyznaczalnej:

$$M_K = M_R - \frac{1}{8}ql^2.$$

Równania na momenty gnące działające w przekrojach określonych współrzędnymi x i y (rys. 5.31) mają postać:

$$M_{g1}(x) = M_R - \frac{qx^2}{2},$$

$$M_{g2}(y) = M_K = M_R - \frac{ql^2}{8}.$$

Energia sprężysta zginania całej ramy wynosi:

$$V_{zg} = 4 \left(\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{g1}^2}{2EI} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{g2}^2}{2EI} dy \right).$$

Energię sprężystą od sił normalnych i sił tnących pominięto jako wielkości małe. Pochodne momentów gnących względem statycznie niewyznacznego momentu M_R :

$$\frac{\partial M_{g1}(x)}{\partial M_R} = 1, \quad \frac{\partial M_{g2}(y)}{\partial M_R} = 1.$$

Z twierdzenia Menabre dla $\frac{1}{4}$ części ramy wynika, że:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(M_R - \frac{qx^2}{2} \right) \cdot 1}{EI} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(M_R - \frac{ql^2}{8} \right) \cdot 1}{EI} dy = 0.$$

Po scałkowaniu i obustronnym pomnożeniu przez EI otrzymano równanie:

$$M_R \frac{l}{2} - \frac{ql^3}{48} + M_R \frac{l}{2} - \frac{ql^3}{16} = 0,$$

z którego wynika, że:

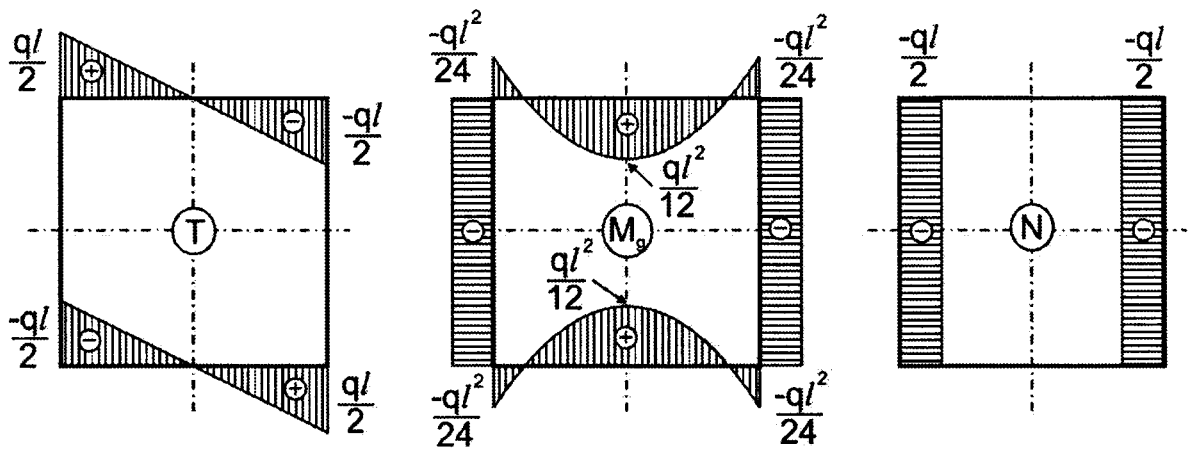
$$M_R = \frac{ql^2}{12}.$$

Znając siły wewnętrzne w przekrojach leżących na osiach symetrii obciążenia ramy, możemy zapisać wzory dla sił wewnętrznych:

$$N_1(x) = 0, \quad T_1(x) = qx, \quad M_{g1}(x) = \frac{ql^2}{12} - \frac{qx^2}{2},$$

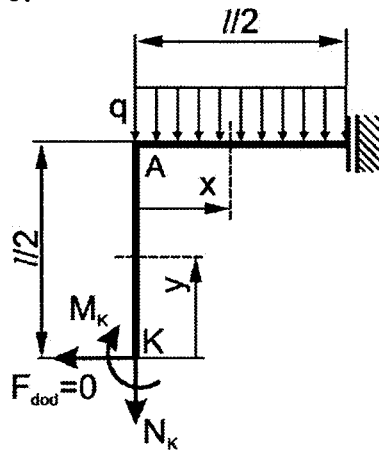
$$N_2(y) = N_K = -\frac{ql}{2}, \quad T_2(y) = 0, \quad M_{g2}(y) = \frac{ql^2}{12} - \frac{ql^2}{8} = -\frac{ql^2}{24}.$$

Wykresy sił wewnętrznych dla całej ramy pokazano na rys. 5.32. Należy pamiętać, że wykresy sił normalnych N i momentów gnących M_g są symetryczne względem osi symetrii KL i RS, natomiast wykresy sił tnących T są antysymetryczne względem tych osi.



Rys. 5.32

Zmianę odległości między punktami K i L można obliczyć jako podwójne przemieszczenie poziome punktu K przy przesuwym utwierdzeniu $\frac{1}{4}$ części ramy w punkcie R (rys. 5.33). Zgodnie z twierdzeniem Castigliano w punkcie K trzeba przyłożyć siłę dodatkową $F_{\text{dod}} = 0$.



Rys. 5.33

Momenty gnące dla dwóch prętów ramy (rys. 5.33) oraz pochodne cząstkowe tych momentów względem siły uogólnionej F_{dod} zapisano w postaci:

$$M_g(y) = M_K + F_{\text{dod}} \cdot y = -\frac{ql^2}{24} + F_{\text{dod}} \cdot y, \quad \frac{\partial M_g(y)}{\partial F_{\text{dod}}} = y,$$

$$M_g(x) = M_K + \frac{F_{\text{dod}} \cdot l}{2} - N_K \cdot x - \frac{qx^2}{2} = -\frac{ql^2}{24} + \frac{F_{\text{dod}} \cdot l}{2} + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}, \quad \frac{\partial M_g(x)}{\partial F_{\text{dod}}} = \frac{l}{2}.$$

Po wyznaczeniu pochodnych względem siły uogólnionej, w równaniach momentów gnących można uwzględnić, że $F_{\text{dod}} = 0$ i wtedy:

$$M_g(y) = -\frac{ql^2}{24},$$

$$M_g(x) = -\frac{ql^2}{24} + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Przemieszczenie poziome punktu K obliczono z twierdzenia Castigliano:

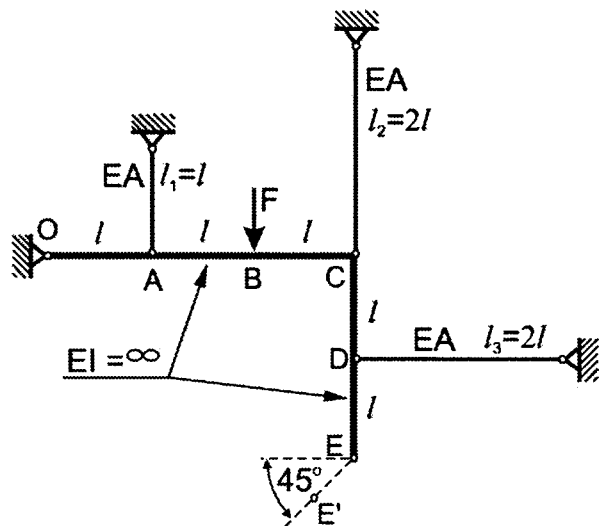
$$f_K = \frac{\partial V}{\partial F_{\text{dod}}} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(-\frac{ql^2}{24}\right) \cdot y}{EI} dx + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(-\frac{ql^2}{24} + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}\right) \cdot \frac{l}{2}}{EI} dx =$$

$$= -\frac{ql^2}{24EI} \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{l}{2EI} \left(-\frac{ql^3}{48} + \frac{ql^3}{16} - \frac{ql^3}{48} \right) = \frac{ql^4}{32EI} \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{ql^4}{32EI} \cdot \frac{1}{6} = \frac{ql^4}{192EI}.$$

Ostatecznie z symetrii odkształcenia ramy ABCD, zmiana odległości pomiędzy punktami K i L wynosi:

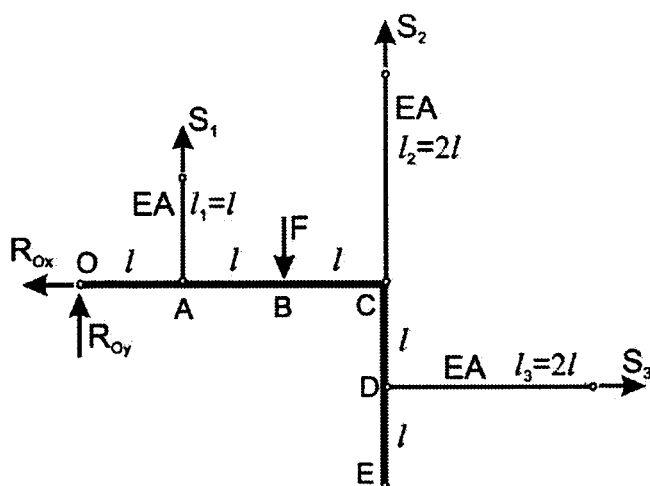
$$\Delta_{KL} = 2 \cdot f_K = 2 \cdot \frac{ql^4}{192EI} = \frac{ql^4}{96EI}.$$

Zadanie 5.14. Sztywna lekka rama OCE zamocowana w sposób pokazany na rys. 5.34 obciążona jest w punkcie B pionową siłą F . Trzy pręty podtrzymujące ramę o długościach $l_1 = l$, $l_2 = 2l$ i $l_3 = 2l$ mają jednakową sztywność na rozciąganie EA . Obliczyć siły w prętach oraz przemieszczenie punktu E w kierunku tworzącym z poziomem kąt $\alpha = 45^\circ$.



Rys. 5.34

Rozwiązanie. Siły działające na ramę po uwolnieniu jej wraz z prętami od więzów podporowych pokazano na rys. 5.35. Wielkości niewiadome to składowe R_{Ox} i R_{Oy} reakcji w podporze przegubowej oraz trzy siły w prętach S_1 , S_2 i S_3 . Ponieważ na ramę działa płaski dowolny układ sił, do dyspozycji mamy trzy równania statyki przy pięciu niewiadomych. Zadanie jest więc dwukrotnie statycznie niewyznaczalne.



Rys. 5.35

Przyjmijmy, że wielkości statycznie niewyznaczalne to siły S_1 i S_2 . Dodatkowe dwa równania otrzymamy z twierdzenia Menabre. W postaci niejawniej równania te można zapisać następująco:

$$\frac{\partial V}{\partial S_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial S_2} = 0.$$

W równaniach tych V jest energią sprężystą układu.

Przy założeniu, że rama jest sztywna, brana jest pod uwagę tylko energia sprężysta w odkształcanych prętach. Energia ta określona jest wzorem:

$$V = \sum_{i=1}^3 \frac{S_i^2 l_i}{2EA} = \frac{S_1^2 l}{2EA} + \frac{S_2^2 2l}{2EA} + \frac{S_3^2 2l}{2EA}.$$

Ponieważ jako wielkości statycznie niewyznaczalne przyjęto siły S_1 i S_2 , to siłę S_3 trzeba wyrazić jako funkcję przyjętych wielkości statycznie niewyznaczalnych i obciążenia zewnętrznego F . W tym celu wystarczy zapisać jedno z równań równowagi, a mianowicie sumę momentów wszystkich sił względem punktu O ramy, czyli:

$$S_1 \cdot l + S_2 \cdot 3l + S_3 \cdot l - F \cdot 2l = 0.$$

Z równania tego wynika, że:

$$S_3 = 2F - S_1 - 3S_2.$$

Po podstawieniu S_3 do wyrażenia na energię V otrzymano:

$$V = \frac{l}{2EA} \left[S_1^2 + 2S_2^2 + 2(2F - S_1 - 3S_2)^2 \right]$$

Ponieważ układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny, istnieją dwa dodatkowe równania wynikające z twierdzenia Menabre, czyli układ dwóch równań algebraicznych:

$$\begin{cases} -6S_1 - 12S_2 = -8F, \\ 6S_1 + 20S_2 = 12F, \end{cases}$$

po rozwiązaniu którego wyznaczono siły w prętach S_1 i S_2 , a z równania $\Sigma M_o = 0$ siłę S_3 :

$$S_1 = \frac{1}{3}F, \quad S_2 = \frac{1}{2}F, \quad S_3 = \frac{1}{6}F.$$

Z pozostałych równań równowagi (suma rzutów wszystkich sił na oś x $\Sigma F_{ix} = 0$ i suma rzutów wszystkich sił na oś y $\Sigma F_{iy} = 0$) można obliczyć składowe reakcji w podporze przegubowej R_{ox} i R_{oy} .

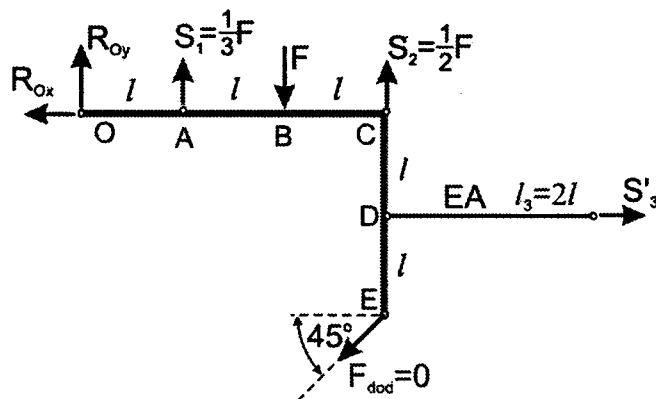
Po podstawieniu sił S_1 , S_2 i S_3 do wzoru na energię V mamy:

$$V = \frac{F^2 l}{3 EA}.$$

Przemieszczenie punktu B przyłożenia siły F w kierunku jej działania, zgodnie z twierdzeniem Castigliano, wynosi:

$$u_{By} = \frac{\partial V}{\partial F} = \frac{2Fl}{3EA}.$$

W celu wyznaczenia przemieszczenia punktu E ramy w kierunku tworzącym kąt 45° z poziomem (rys. 5.36), rozpatrywaną konstrukcję traktujemy jako statycznie wyznaczalną, przyjmując siły S_1 i S_2 (wcześniej uznane za statycznie niewyznaczalne) jako obciążenie czynne. Rozpatrzmy ramę zamocowaną przegubowo w punkcie O i unieruchomioną przez poziomy pręt nr 3. Rama obciążona jest siłami F , S_1 i S_2 oraz dodatkową siłą $F_{dod} = 0$, przyłożoną w punkcie E w kierunku szukanego przemieszczenia punktu E (rys. 5.36).



Rys. 5.36

Wyznamy nową wartość siły w pręcie poziomym S'_3 , która będzie inna niż S_3 na skutek przyłożenia siły F_{dod} do punktu E ramy (rys. 5.36). Zapisując sumę momentów wszystkich sił względem punktu O i przyrównując ją do zera, otrzymano:

$$\Sigma M_o = S_1 \cdot l - F \cdot 2l + S_2 \cdot 3l + S'_3 \cdot l - F_{dod} \cdot \cos 45^\circ \cdot 2l - F_{dod} \cdot \sin 45^\circ \cdot 3l = 0,$$

$$\Sigma M_o = \frac{1}{3}F \cdot l - F \cdot 2l + \frac{1}{2}F \cdot 3l + S'_3 \cdot l - F_{dod} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2l - F_{dod} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 3l = 0,$$

stąd:

$$S'_3 = \frac{1}{6}F + \frac{5\sqrt{2}}{2}F_{dod}$$

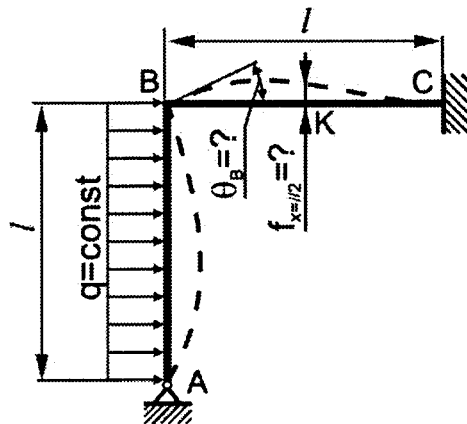
Energia sprężysta tak obciążonego układu wynosi:

$$V = \frac{S_1^2 l}{2EA} + \frac{S_2^2 2l}{2EA} + \frac{(S'_3)^2 2l}{2EA} = \frac{F^2 l}{8EA} + \frac{F^2 l}{4EA} + \frac{\left(\frac{F}{6} + \frac{5\sqrt{2}}{2}F_{dod}\right)^2 2l}{2EA}$$

Z twierdzenia Castigliano wynika, że:

$$u_{E(\alpha=45^\circ)} = \left(\frac{\partial V}{\partial F_{dod}}\right)_{F_{dod}=0} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \frac{Fl}{EA}$$

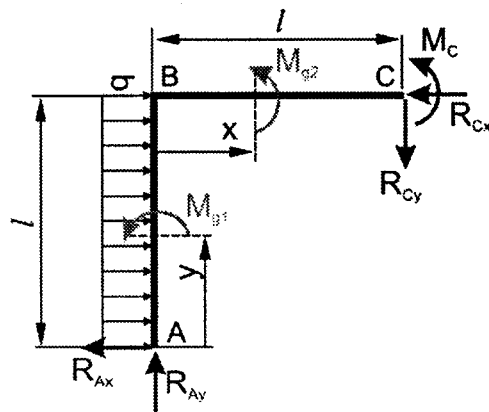
Zadanie 5.15. Rama ABC (rys. 5.37) o sztywności na zginanie $EI = \text{const}$ w punkcie A podparta jest na podporze przegubowej nieprzesuwnej, a w punkcie C – sztywno utwierdzona. Obciążenie q i wymiary l ramy pokazano na rysunku. Obliczyć kąt obrotu naroża B ramy oraz ugięcie w środku długości BC (punkt K)



Rys. 5.37

Rozwiązanie. Rozpatrywana rama jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna. Za wielkości statycznie niewyznaczalne najlepiej przyjąć składowe reakcje w podporze A czyli R_{Ax} i R_{Ay} o zwrotach pokazanych na rys. 5.38.

Reakcje te wyznaczamy z twierdzenia Menabre.



Rys. 5.38

Momenty gnące w elementach pionowym i poziomym ramy opisują wzory:

$$M_{g1} = M_g(y) = R_{Ax} \cdot y - \frac{qy^2}{2},$$

$$M_{g2} = M_g(x) = R_{Ax} \cdot l + R_{Ay} \cdot x - \frac{ql^2}{2}.$$

Pochodne tych momentów względem wielkości statycznie niewyznaczalnych wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial R_{Ax}} = y, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_{Ax}} = l, \quad \frac{\partial M_{g1}}{\partial R_{Ay}} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_{Ax}} = x.$$

Z twierdzenia Menabre wynikają następujące równania:

$$\frac{\partial V}{\partial R_{Ax}} = \int_0^l \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial R_{Ax}} dy + \int_0^l \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_{Ax}} dx = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial R_{Ay}} = \int_0^l \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial R_{Ay}} dy + \int_0^l \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial R_{Ay}} dx = 0.$$

Po podstawieniu wzorów na momenty gnące i ich pochodne otrzymano:

$$\int_0^l \frac{\left(R_{Ax} \cdot y - \frac{qy^2}{2}\right) y}{EI} dy + \int_0^l \frac{\left(R_{Ax} \cdot l + R_{Ay} \cdot x - \frac{ql^2}{2}\right) l}{EI} dx = 0,$$

$$\int_0^l \frac{\left(R_{Ax} \cdot l + R_{Ay} \cdot x - \frac{ql^2}{2}\right) x}{EI} dx = 0.$$

Po pomnożeniu równań przez EI i scałkowaniu, powyższe równania przyjmują następującą postać:

$$R_{Ax} \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} + R_{Ax} l^3 + R_{Ay} \frac{l^3}{2} - \frac{ql^4}{2} = 0,$$

$$R_{Ax} \frac{l^3}{2} + R_{Ay} \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{4} = 0.$$

Po kolejnych przekształceniach:

$$32 R_{Ax} + 12 R_{Ay} = 15 ql,$$

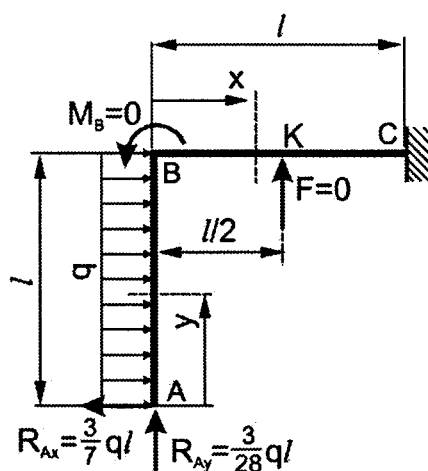
$$6 R_{Ax} + 4 R_{Ay} = 3 ql.$$

Z rozwiązania tego układu równań otrzymano:

$$R_{Ax} = \frac{3}{7} ql, \quad R_{Ay} = \frac{3}{28} ql.$$

Przy wyznaczaniu kąta obrotu θ_B naroża B ramy i ugięcia f_K punktu K (środką długości elementu BC) będziemy ramę traktować jako statycznie wyznaczalną, obciążoną obciążeniem ciągłym o wartości q i reakcjami R_{Ax} i R_{Ay} (rys.5.39).

Aby wyznaczyć θ_B i f_K z twierdzenia Casigliana, trzeba naroże B ramy obciążyć momentem dodatkowym $M_B = 0$, a w punkcie K ramy przyłożyć pionową siłę dodatkową $F = 0$.



Rys. 5.39

Wzory na momenty gące w pionowym i poziomym elemencie ramy mają postać:

$$M_{g1} = M_g(y) = \frac{3}{7} ql \cdot y - \frac{qy^2}{2} \quad \text{dla } 0 \leq y \leq l,$$

$$M_{g2} = M_g(x) = \frac{3}{7} ql^2 + \frac{3}{28} ql \cdot x - \frac{ql^2}{2} - M_B \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{l}{2},$$

$$M_{g3} = M_g(x) = \frac{3}{7} ql^2 + \frac{3}{28} ql \cdot x - \frac{ql^2}{2} - M_B + F \left(x - \frac{l}{2} \right) \quad \text{dla } \frac{l}{2} \leq x \leq l.$$

Pochodne tych momentów względem sił dodatkowych wynoszą:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial M_B} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_B} = -1, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial M_B} = -1,$$

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial F} = 0, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial F} = 0, \quad \frac{\partial M_{g3}}{\partial F} = x - \frac{l}{2}.$$

W równaniach na momenty gące po obliczeniu pochodnych można opuścić człony z F i M_B , gdyż są one równe zero. Mamy wtedy:

$$M_{g1} = M_g(y) = \frac{3}{7} ql \cdot y - \frac{qy^2}{2} \quad \text{dla } 0 \leq y \leq l,$$

$$M_{g2} = M_g(x) = \frac{3}{7} ql^2 + \frac{3}{28} ql \cdot x - \frac{ql^2}{2} \quad \text{dla } 0 \leq x \leq \frac{l}{2},$$

$$M_{g3} = M_g(x) = \frac{3}{7} ql^2 + \frac{3}{28} ql \cdot x - \frac{ql^2}{2} \quad \text{dla } \frac{l}{2} \leq x \leq l.$$

Z twierdzenia Castigliano wynika, że:

$$f_K = \frac{\partial V}{\partial F} = \int_0^l \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial F} dy + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial F} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_{g3}}{EI} \frac{\partial M_{g3}}{\partial F} dx,$$

$$\theta_B = \frac{\partial V}{\partial M_B} = \int_0^l \frac{M_{g1}}{EI} \frac{\partial M_{g1}}{\partial M_B} dy + \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_{g2}}{EI} \frac{\partial M_{g2}}{\partial M_B} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{M_{g3}}{EI} \frac{\partial M_{g3}}{\partial M_B} dx.$$

Po podstawieniu do powyższych równań odpowiednich momentów gnących i ich pochodnych otrzymano:

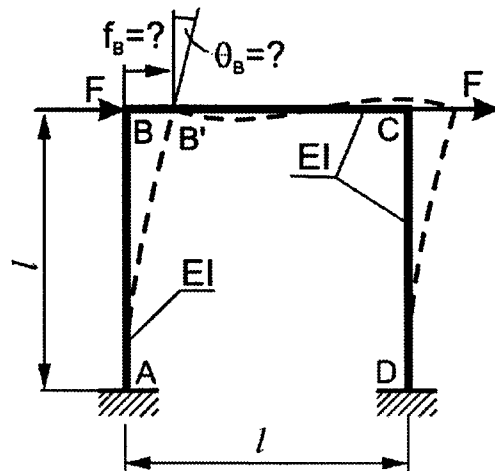
$$f_K = \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{\left(\frac{3}{7}gl^2 + \frac{3}{28}qlx - \frac{1}{2}ql^2\right)\left(x - \frac{l}{2}\right)}{EI} dx = \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{\left(\frac{3}{28}qlx - \frac{1}{14}ql^2\right)\left(x - \frac{l}{2}\right)}{EI} dx = \frac{1}{448} \frac{ql^4}{EI},$$

$$\theta_B = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{3}{28}qlx - \frac{1}{14}ql^2\right)(-1)}{EI} dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \frac{\left(\frac{3}{28}qlx - \frac{1}{14}ql^2\right)(-1)}{EI} dx =$$

$$= \int_0^l \frac{\left(\frac{3}{28}qlx - \frac{1}{14}ql^2\right)(-1)}{EI} dx = \frac{1}{56} \frac{ql^3}{EI}.$$

Ponieważ dodatkowa siła F została skierowana do góry, to dodatnia wartość f_K oznacza, że ugięcie jest skierowane zgodnie ze zwrotem siły F . Zwrot kąta obrotu naroża B θ_B jest zgodny z przyjętym zwrotem dodatkowego momentu M_B .

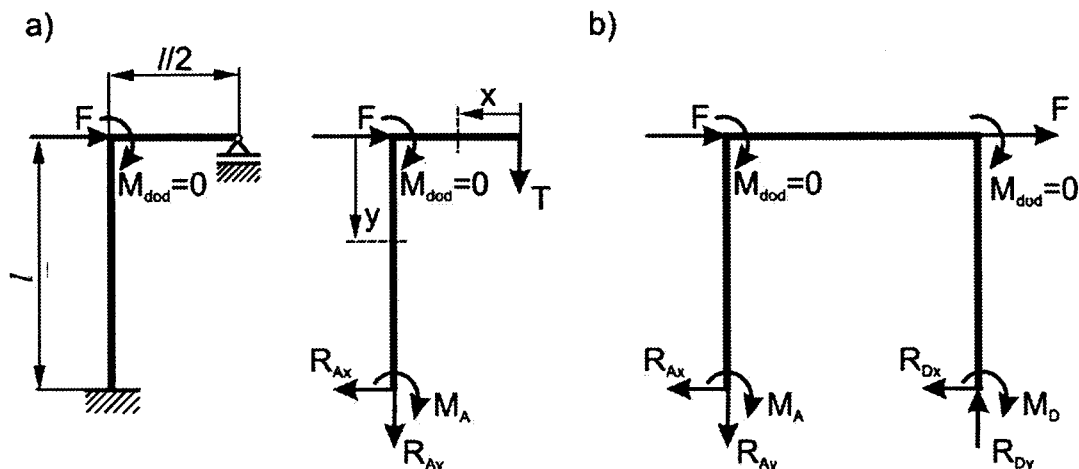
Zadanie 5.16. Rama ABCD (rys. 5.40) o długości elementów $AB = BC = CD = l$ jest utwierdzona w punktach A i D. Sztywności na zginanie prętów ramy $EI = \text{const}$. W narożach B i C rama obciążona jest siłami poziomymi F skierowanymi w prawo. Obliczyć reakcje w podporach A i D, przemieszczenie poziome f_B narożnika B oraz jego kąt obrotu θ_B .



Rys. 5.40

R o z w i ą z a n i e . Analizowana rama ma pionową oś symetrii kształtu, która jest osią antysymetrii obciążenia. Uwzględniając, że na osi antysymetrii obciążenia siły wewnętrzne N i M_g są równe zero, dalej można analizować połowę ramy, która na osi antysymetrii podparta jest na podporze przegubowej przesuwnej (rys. 5.41a) lub obciążona nieznaną siłą poprzeczną (wewnętrzna siła tnąca T). Należy pamiętać, że reakcje w symetrycznie położonych podporach są antysymetryczne – identyczne co do wartości bezwzględnej. Dzięki wykorzystaniu warunków antysymetrii obciążenia,

zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne. W przypadku, gdyby nie zauważono antysymetrii obciążenia układ byłby trzykrotnie statycznie niewyznaczalny. Wyznaczone kierunki działania reakcji podpór pokazano na rys. 5.41b.



Rys. 5.41

Za wielkość statycznie niewyznaczalną najlepiej przyjąć siłę T , ponieważ wtedy nie trzeba pisać równań statyki. Równania statyki można napisać po obliczeniu siły T i obliczyć z nich składowe reakcji R_{Ax} , R_{Ay} i M_A .

Momenty gnące $M_g(x)$ i $M_g(y)$ wynoszą:

$$M_g(x) = -T \cdot x,$$

$$M_g(y) = -T \cdot \frac{l}{2} - F \cdot y.$$

Pochodne tych momentów względem statycznie niewyznaczalnej siły T wynoszą:

$$\frac{\partial M_g(x)}{\partial T} = -x,$$

$$\frac{\partial M_g(y)}{\partial T} = -\frac{l}{2}$$

Z twierdzenia Menabre mamy:

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_g(x) \frac{\partial M_g(x)}{\partial T}}{EI} dx + \int_0^l \frac{M_g(y) \frac{\partial M_g(y)}{\partial T}}{EI} dy = 0,$$

Po podstawieniu wzorów na momenty gnące i ich pochodne otrzymano równanie:

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(-Tx)(-x)}{EI} dx + \int_0^l \frac{\left(-T \frac{l}{2} - Fy\right) \left(-\frac{l}{2}\right)}{EI} dy = 0,$$

skąd po scałkowaniu:

$$\frac{Tl^3}{24EI} + \frac{Tl^3}{4EI} + \frac{Fl^3}{4EI} = 0.$$

Ostatecznie otrzymano:

$$T = -\frac{6}{7}F.$$

Reakcje wynikające z równań równowagi wynoszą:

$$\begin{aligned} R_{Ax} &= F, \\ R_{Ay} &= -T = \frac{6}{7}F, \\ M_A &= -\frac{4}{7}Fl. \end{aligned}$$

Reakcje w podporze D są antysymetryczne względem odpowiednich reakcji w podporze A (rys. 5.41b), czyli:

$$R_{Dx} = F, \quad R_{Dy} = \frac{6}{7}F, \quad M_D = -\frac{4}{7}Fl.$$

Wartości, kierunki i zwroty ich działania pokazano na rys. 5.41b.

Ponieważ została wyznaczona statycznie niewyznaczalna siła T , zadanie można dalej traktować jako statycznie wyznaczalne. Siła F i dodatkowy moment $M_{\text{dod}} = 0$ przyłożone w punkcie B odpowiadają odpowiednio przemieszczeniu poziomemu f_B i kątowni obrotu θ_B naroża ramy. Wzory na momenty gnące:

$$\begin{aligned} M_g(x) &= -T \cdot x, \\ M_g(y) &= -T \cdot \frac{l}{2} - F \cdot y - M_{\text{dod}} \end{aligned}$$

oraz ich pochodne względem F i M_{dod} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_g(x)}{\partial F} &= 0, & \frac{\partial M_g(y)}{\partial F} &= -y, \\ \frac{\partial M_g(x)}{\partial M_{\text{dod}}} &= 0, & \frac{\partial M_g(y)}{\partial M_{\text{dod}}} &= -1. \end{aligned}$$

Z twierdzenia Castigliano:

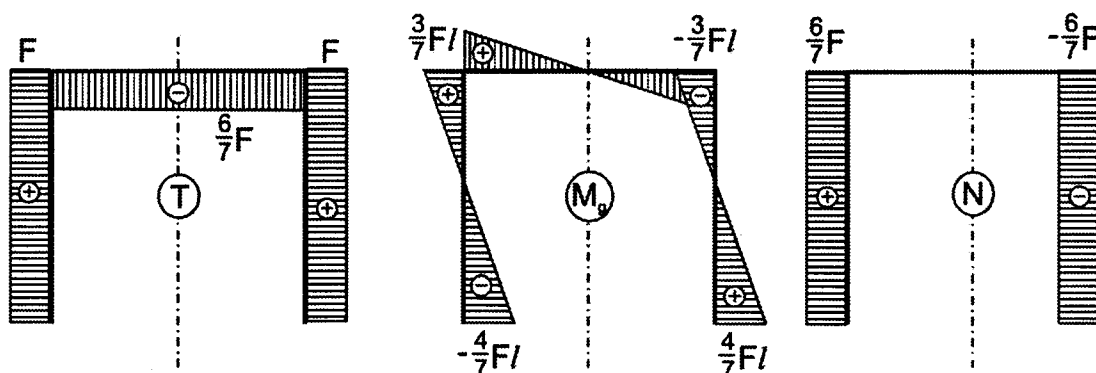
$$\begin{aligned} f_B = \frac{\partial V}{\partial F} &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_g(x) \frac{\partial M_g(x)}{\partial F}}{EI} dx + \int_0^l \frac{M_g(y) \frac{\partial M_g(y)}{\partial F}}{EI} dy, \\ \theta_B = \frac{\partial V}{\partial M_B} &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M_g(x) \frac{\partial M_g(x)}{\partial M_B}}{EI} dx + \int_0^l \frac{M_g(y) \frac{\partial M_g(y)}{\partial M_B}}{EI} dy. \end{aligned}$$

Po podstawieniu wyrażeń na momenty gnące i na ich pochodne względem odpowiednich sił uogólnionych otrzymano:

$$f_B = 0 + \int_0^l \frac{\left(-T \frac{l}{2} - Fy\right)(-y)}{EI} dy = \int_0^l \frac{\left(\frac{3}{7}Fl - Fy\right)(-y)}{EI} dy = \frac{F}{EI} \left(-\frac{3}{14}l^3 + \frac{1}{3}l^3\right) = \frac{5}{42} \frac{Fl^3}{EI},$$

$$\theta_B = 0 + \int_0^l \frac{\left(-T \frac{l}{2} - Fy\right)(-1)}{EI} dy = \int_0^l \frac{\left(\frac{3}{7}Fl - Fy\right)(-1)}{EI} dy = \frac{F}{EI} \left(-\frac{3}{7}l^2 + \frac{1}{2}l^2\right) = \frac{1}{14} \frac{Fl^2}{EI}.$$

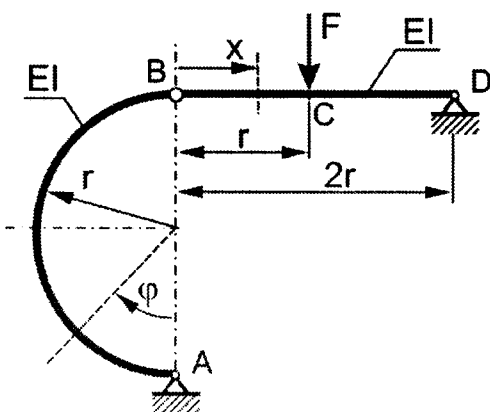
Przy sporządzaniu wykresów sił wewnętrznych N , T i M_g należy pamiętać, że wykres sił tnących jest symetryczny względem osi antysymetrii obciążenia, a wykresy sił normalnych i momentów gnących są antysymetryczne. Dla ramy z niniejszego przykładu wykresy sił wewnętrznych przedstawiono na rys. 5.42.



Rys. 5.42

5.3. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 5.17. Półkolisty łuk o promieniu r połączony jest przegubowo z poziomą belką BD o długości $2r$ (rys. 5.43). Punkty A (łuku) i D (belki) są podparte na podporach przegubowych nieprzesuwanych. Obliczyć ugięcie f_c środka długości belki (punkt C), w którym przyłożona jest pionowa, skierowana ku dołowi siła F . Sztywność zginania belki i łuku $EI = \text{const}$.

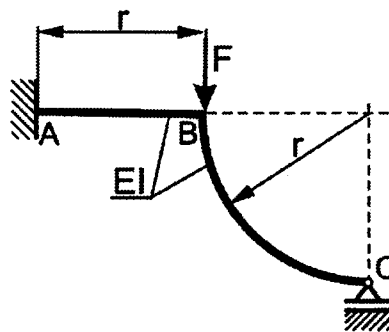


Rys. 5.43

ODPOWIEDŹ:

$$f_c = \frac{3\pi + 4}{24} \frac{Fr^3}{EI}.$$

Zadanie 5.18. Zakrzywiony pręt ABC o sztywności na zginanie $EI = \text{const}$ utwierdzony jest w punkcie A, a w punkcie C podparty na podporze przegubowej przesuwnej (rys. 5.44). W punkcie B działa pionowa siła F . Promień łuku i długość elementu poziomego są równe r . Obliczyć przemieszczenie podpory C. W obliczeniach uwzględnić tylko energię zginania.

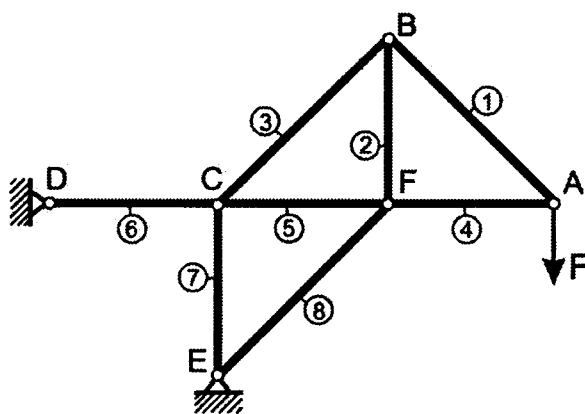


Rys. 5.44

ODPOWIEDŹ:

$$f_c = \frac{12 - 3\pi}{2(3\pi + 28)} \frac{Fr^3}{EI}$$

Zadanie 5.19. Kratownica pokazana na rys. 5.45 obciążona jest w węzle A pionową siłą F . Sztywność prętów na rozciąganie lub ścisnienie $EA = \text{const}$. Długości prętów 2, 4, 5, 6, i 7 są równe l , natomiast pręty oznaczone numerami 1, 3 i 8 mają długość $\sqrt{2}l$. Obliczyć przemieszczenie poziome f_x i pionowe f_y węzła A kratownicy metodą energetyczną (twierdzenie Castigliano).

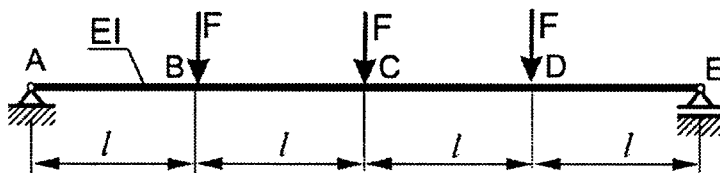


Rys. 5.45

ODPOWIEDŹ:

$$f_x = 2 \frac{Fl}{EA}, \quad f_y = (12\sqrt{2} + 11) \frac{Fl}{EA}$$

Zadanie 5.20. Belka o długości $4l$ i sztywności na zginanie EI podparta jest na końcach na podporach przegubowych. Na belkę działają trzy jednakowe siły F , skierowane pionowo w dół i rozmieszczone jak pokazano na rys. 5.46. Obliczyć ugięcie f_c belki w środku jej długości, stosując twierdzenie Castigliano.



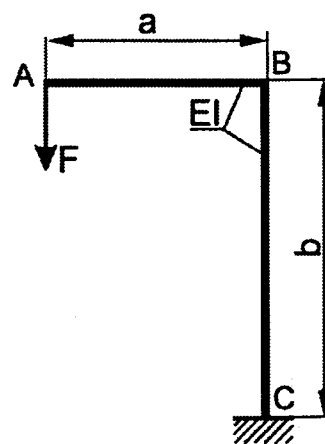
Rys. 5.46

ODPOWIEDŹ:

$$f_c = \frac{19}{6} \frac{Fl^3}{EI}$$

Zadanie 5.21. Rama o sztywności na zginanie EI i wymiarach pokazanych na rys. 5.47, obciążona jest w punkcie A pionową siłą F . Obliczyć:

- składową poziomą f_{Ax} i pionową f_{Ay} przemieszczenia punktu A,
- kąty ugięcia θ_A i θ_B ramy w punktach A i B.



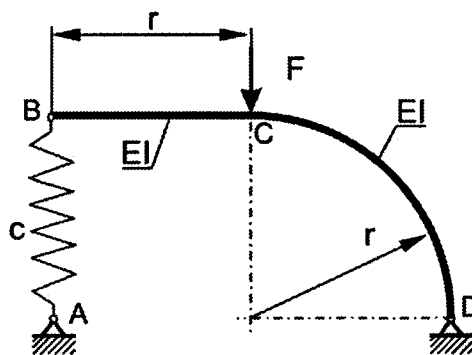
Rys. 5.47

ODPOWIEDŹ:

$$f_{Ax} = \frac{Fab^2}{2EI}, \quad f_{Ay} = \frac{Fa^3}{3EI} + \frac{Fa^2b}{EI}, \quad \theta_A = \frac{Fa^2}{2EI} + \frac{Fab}{EI}, \quad \theta_B = \frac{Fab}{EI}.$$

f_{Ax} w lewo, f_{Ay} w dół, a kąty w kierunkach trygonometrycznych.

Zadanie 5.22. Zakrzywiony lekki pręt BCD o sztywności zginania $EI = \text{const}$ podparty jest w punkcie B przez pionowo ustawioną sprężynę AB o stałej c . Drugi koniec pręta zamocowany jest na nieprzesuwnej podporze przegubowej D (rys. 5.48). Pręt obciążony jest w punkcie C pionową, skierowaną do dołu siłą F . Obliczyć poziomą i pionową składową przemieszczenia punktu B.

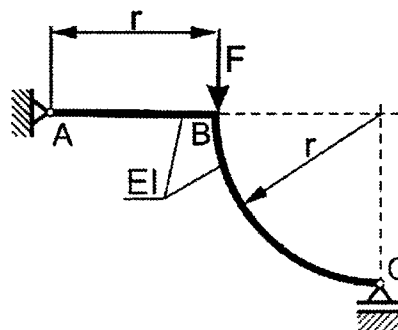


Rys. 5.48

ODPOWIEDŹ:

$$f_{Bx} = \frac{F}{4c} + \frac{40 - 9\pi}{48} \frac{Fr^3}{EI}, \quad f_{By} = \frac{F}{2c}.$$

Zadanie 5.23. Element konstrukcyjny ABC (rys. 5.49) złożony z belki AB i łuku BC o sztywności na zginanie $EI = \text{const}$, obciążony jest w punkcie B pionową siłą F . Belka podparta jest w punkcie A na podporze przegubowej nieprzesuwnej, a łuk podparty jest w punkcie C na podporze przegubowej przesuwnej. Długość belki i promień łuku wynoszą r . Obliczyć przemieszczenie pionowe punktu B i przemieszczenie poziome punktu C.

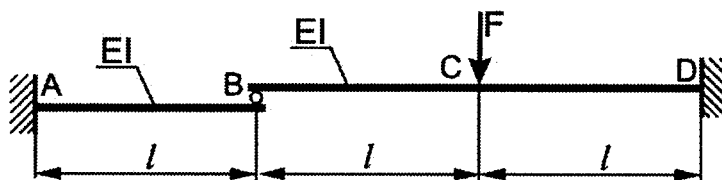


Rys. 5.49

ODPOWIEDŹ:

$$f_B = \frac{4+3\pi}{48} \frac{Fr^3}{EI}, \quad f_C = \frac{16-3\pi}{48} \frac{Fr^3}{EI}.$$

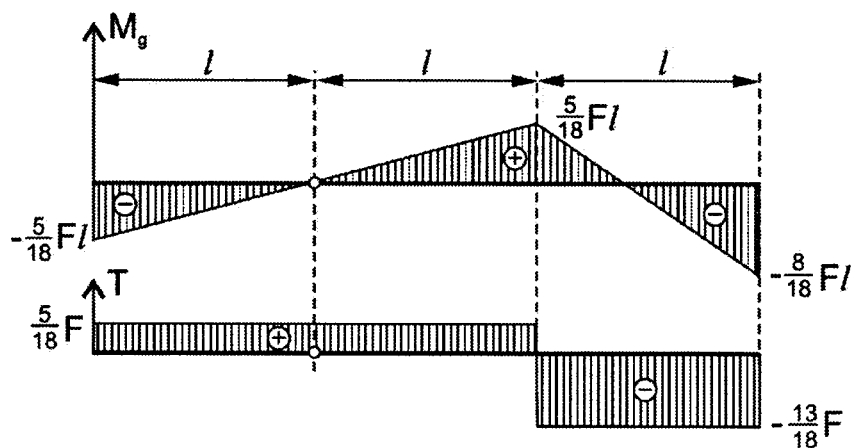
Zadanie 5.24. Dwie belki AB i BD o sztywnościach na zginanie EI utwierdzone są w punktach A i D. W punkcie B między belkami umieszczono gładki wałek. Belka BD obciążona jest w środku jej długości (punkt C) pionową siłą F . Długości belek $AB = l$, $BD = 2BC = 2l$. Obliczyć reakcje podporowe oraz sporządzić wykresy sił wewnętrznych T i M_g .



Rys. 5.50

ODPOWIEDŹ:

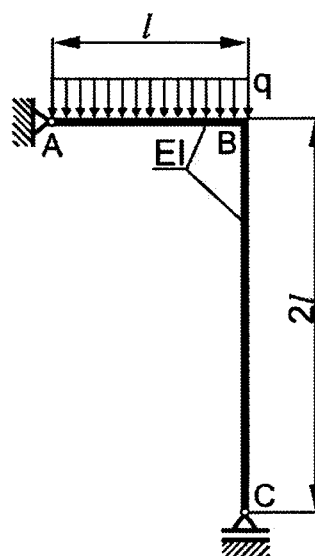
$$R_A = \frac{5}{18}F, \quad M_A = -\frac{5}{18}Fl, \quad R_D = \frac{13}{18}F, \quad M_D = -\frac{8}{18}Fl, \quad R_B = S = \frac{5}{18}Fl.$$



Rys. 5.51

Zadanie 5.25. Rama statycznie wyznaczalna o sztywności na zginanie jej elementów $EI = \text{const}$, o wymiarach i warunkach podparcia pokazanych na rys. 5.52, obciążona jest obciążeniem ciągłym $q = \text{const}$, działającym na element AB ramy.

Obliczyć przemieszczenie f_c podpory C, korzystając z twierdzenia Castigliano.



Rys. 5.52

ODPOWIEDŹ:

$$f_c = \frac{ql^4}{12EI}$$

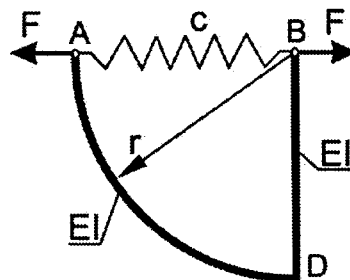
Punkt C przemieści się w prawo.

Zadanie 5.26. Element prętowy ABD (rys. 5.53) złożony z łuku AD o promieniu r , belki DB i sprężyny AB obciążony jest w punktach A i B poziomymi przeciwnie skierowanymi siłami F . Sztywność belki i łuku na zginanie wynosi EI .

Stała sprężyny:

$$c = \frac{3EI}{r^3(3\pi + 4)}$$

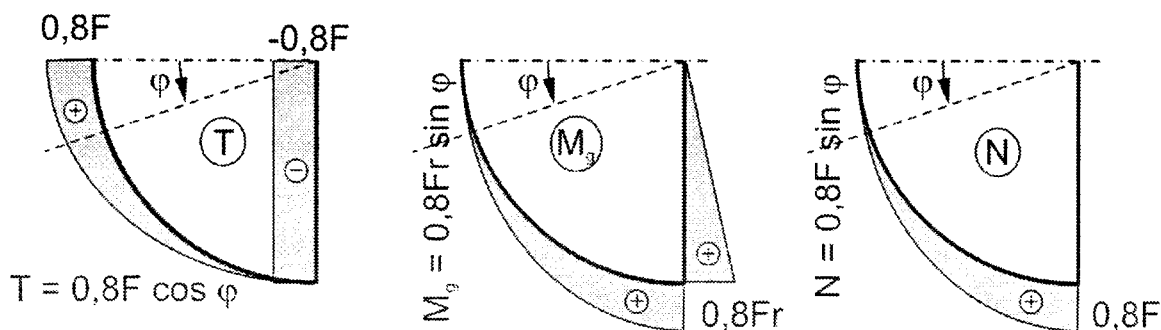
Obliczyć siłę S działającą w sprężynie, zmianę odległości Δ_{AB} między punktami A i B oraz narysować wykresy sił wewnętrznych N , T i M_g .



Rys. 5.53

ODPOWIEDŹ:

$$S = 0,2F \quad \Delta_{AB} = 0,895 \frac{Fr^3}{EI}$$

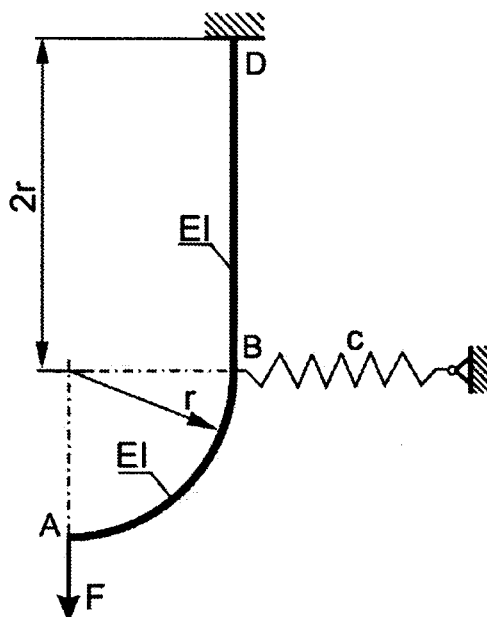


Rys. 5.54

Zadanie 5.27. Element prętowy ABD złożony z łuku AB o promieniu r i belki BD o długości $2r$ (rys. 5.55) utwierdzony jest w punkcie D i przymocowany do poziomej sprężyny w punkcie B. Sztywność łuku i belki na zginanie wynosi EI . Stała sprężyny:

$$c = \frac{3EI}{16r^3}.$$

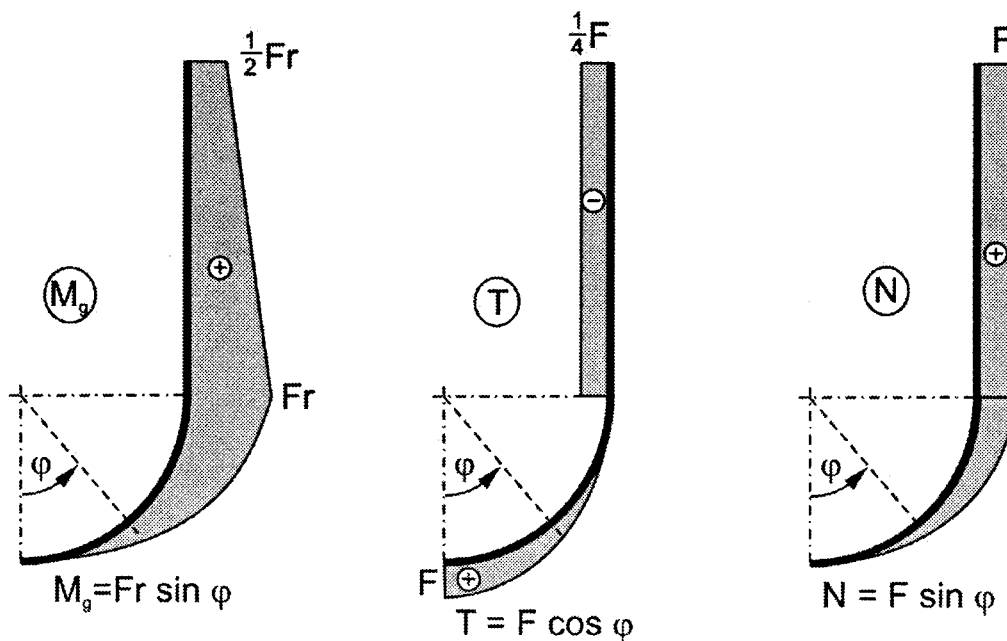
Układ obciążony jest pionową siłą F przyłożoną w punkcie A. Obliczyć siłę S w sprężynie, przemieszczenia poziome f_{Ax} i pionowe f_{Ay} punktu A oraz narysować wykresy sił wewnętrznych N , T i M_g .



Rys. 5.55

ODPOWIEDŹ:

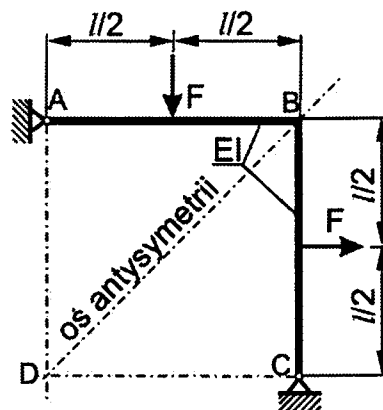
$$S = 0,25F, \quad f_{Ax} = \frac{10}{3} \frac{Fr^3}{EI}, \quad f_{Ay} = \frac{\pi + 6}{4} \frac{Fr^3}{EI}.$$



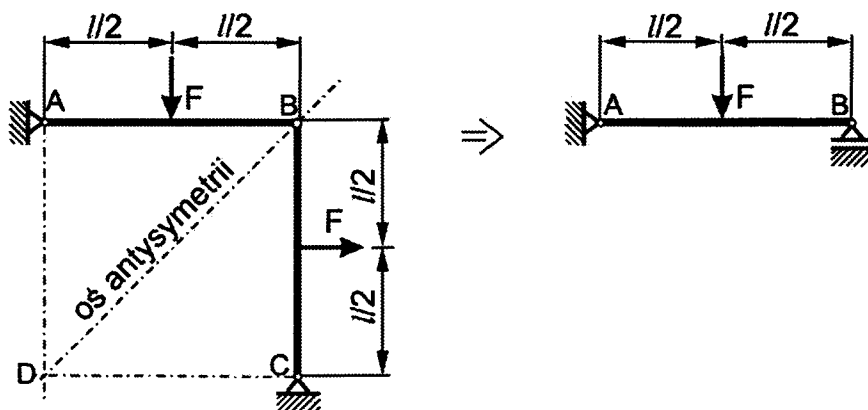
Rys. 5.56

Zadanie 5.28. Rama ABC o sztywności na zginanie EI podparta jest w punktach A i C na podporach przegubowych nieprzesuwnych (rys. 5.57). Element AB ramy obciążony jest w środku długości pionową skierowaną do dołu siłą F , a element BC obciążony jest w środku długości poziomą siłą F skierowaną w prawo.

Sporządzić wykresy sił wewnętrznych N , T i M_g dla analizowanej ramy.



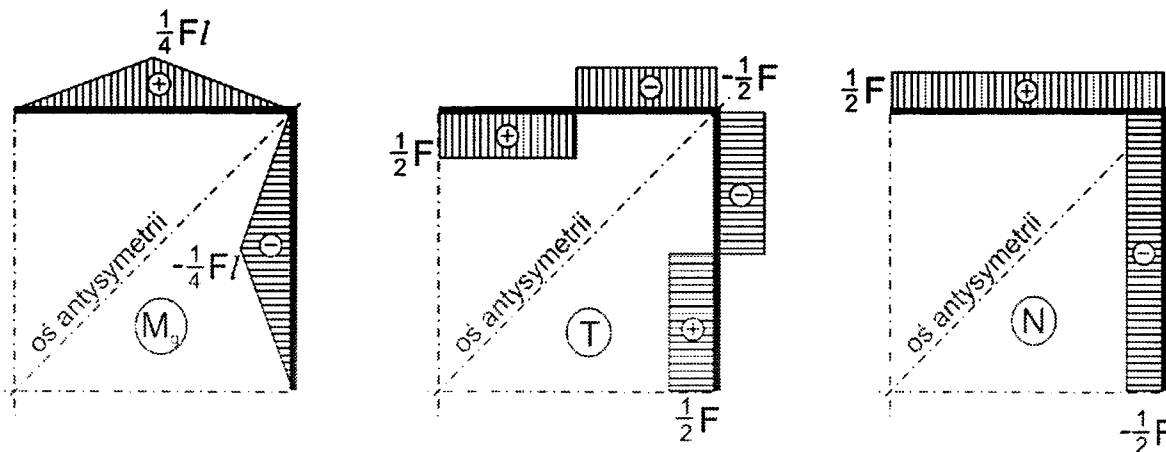
Rys. 5.57



Rys. 5.58

Uwaga ! Oś przechodząca przez punkty B i D jest osią symetrii kształtu i osią antysymetrii obciążenia. Na osi antysymetrii obciążenia moment gnący jest równy zero. W związku z tym można w punkcie B ramy wstawić przegub (rys. 5.58) i wtedy rama jest statycznie wyznaczalna.

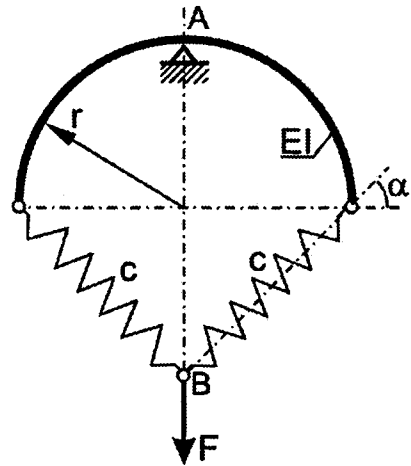
ODPOWIEDŹ:



Rys. 5.59

Zadanie 5.29. Do końców półkolistego łuku, podpartego na podporze przegubowej w punkcie A, przymocowano dwie sprężyny odchylone od poziomu o kąt $\alpha = 45^\circ$ i połączone ze sobą przegubowo w punkcie B (rys. 5.60).

Obliczyć przemieszczenie pionowe f_B punktu B, mając dane: r – promień łuku; EI – sztywność łuku na zginanie; c – stałe sprężyn; F – pionowa siła przyłożona w punkcie B.

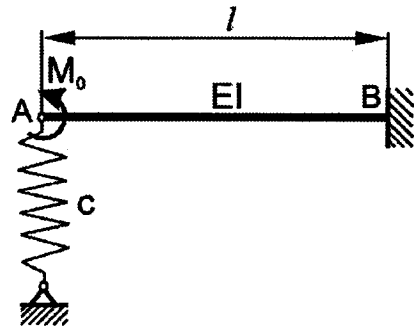


Rys. 5.60

ODPOWIEDŹ:

$$f_B = \frac{\pi-1}{2} \frac{Fr^3}{EI} + \frac{F}{c}.$$

Zadanie 5.30. Belka wspornikowa AB (rys. 5.61) o sztywności na zginanie EI , podparta jest w punkcie A na sprężynie o stałej c . Do końca A belki przyłożono moment skupiony M_0 o zwrocie lewoskrętnym. Wyznaczyć siłę ściskającą sprężynę oraz kąt ugięcia belki w punkcie A. Obliczyć przy jakiej wartości stałej c sprężyny moment utwierdzenia M_B będzie równy zero.



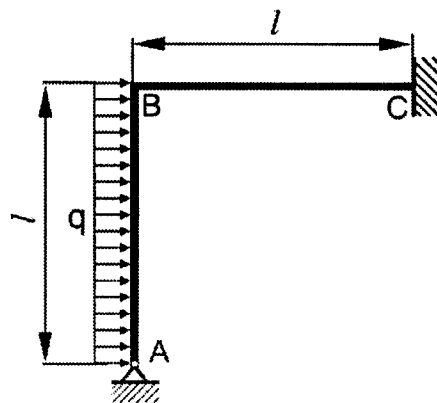
Rys. 5.61

ODPOWIEDŹ:

$$S = \frac{3M_0cl^2}{2(3EI+cl^3)}, \quad \theta_A = \frac{M_0l}{EI} \left(1 - \frac{3cl^3}{4(3EI+cl^3)} \right), \quad c = \frac{6EI}{l^3}.$$

Zadanie 5.31. Rama złożona z dwóch elementów o sztywności na zginanie $EI = \text{const}$ o wymiarach i warunkach podparcia pokazanych na rys. 5.62 przenosi poziome obciążenie $q = \text{const}$ przyłożone do elementu pionowego AB.

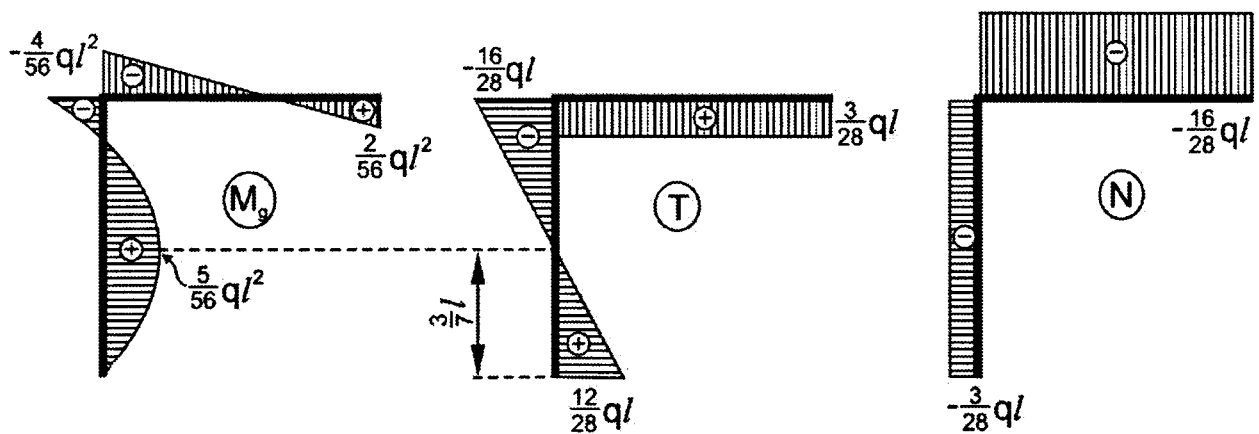
Z równań równowagi i twierdzenia Menabre obliczyć reakcje podporowe, a następnie wykonać wykresy sił wewnętrznych N , T i M_g .



Rys. 5.62

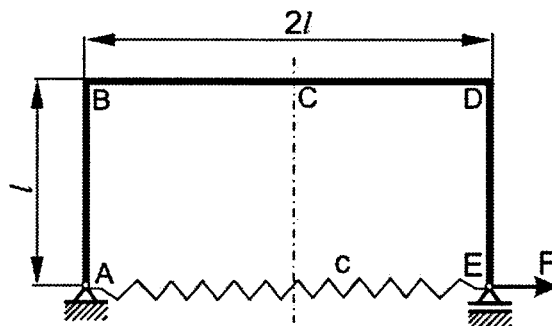
ODPOWIEDŹ:

$$R_{Ax} = -\frac{3}{7}ql, \quad R_{Ay} = \frac{3}{28}ql, \quad R_{Cx} = -\frac{4}{7}ql, \quad R_{Cy} = -\frac{3}{28}ql, \quad M_C = \frac{1}{28}ql^2.$$



Rys. 5.63

Zadanie 5.32. Rama ABCDE (rys. 5.64) o sztywności na zginanie $EI = \text{const}$ podparta jest w punkcie A na podporze przegubowej nieprzesuwnej, a w punkcie E na podporze przegubowej przesuwnej. Punkty A i E połączone są sprężyną o stałej $c = EI/(8l^3)$. Wymiary ramy: $AB = ED = l$, $BC = CD = l$. Rama obciążona jest siłą poziomą F przyłożoną do punktu E. Obliczyć: siłę S w sprężynie, przemieszczenie poziome h_E punktu E, przemieszczenie pionowe f_C punktu C oraz kąt obrotu θ_B węzła B. Dane: F, l, EI .

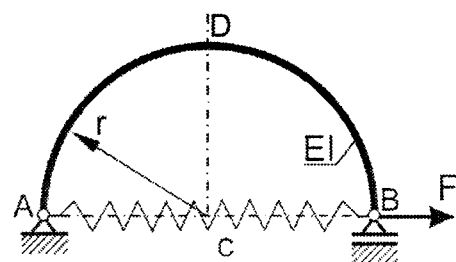


Rys. 5.64

ODPOWIEDŹ:

$$S = \frac{1}{4} F, \quad h_E = 2 \frac{Fl^3}{EI}, \quad f_C = \frac{3}{8} \frac{Fl^3}{EI}, \quad \theta_B = \frac{3}{4} \frac{Fl^2}{EI}.$$

Zadanie 5.33. Łuk ADB (rys. 5.65) w kształcie półokręgu o promieniu r wykonano z pręta o sztywności na zginanie EI . Łuk zamocowano do podpory przegubowej w punkcie A. Punkty A i B łuku przed obciążeniem połączone nienapiętą sprężyną o stałej:



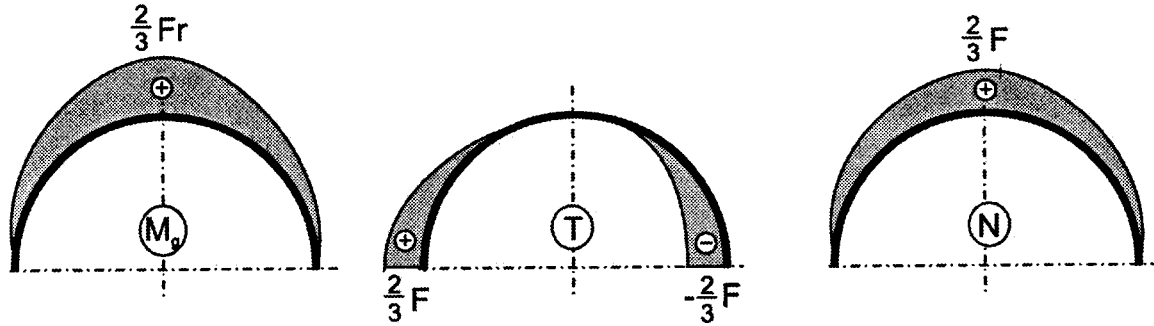
Rys. 5.65

$$c = \frac{EI}{\pi r^3}.$$

W punkcie B przyłożono poziomą siłę F . Obliczyć siłę w sprężynie po obciążeniu układu i przemieszczenia: poziome punktu B i pionowe punktu D. Sporządzić wykresy sił wewnętrznych.

ODPOWIEDŹ:

$$S = \frac{F}{3} \quad f_B = \frac{\pi Fr^3}{3EI}, \quad f_{Dy} = \frac{Fr^3}{3EI}.$$



Rys. 5.66

6. ZAGADNIENIA SPECJALNE

6.1. Czyste zginanie prętów silnie zakrzywionych

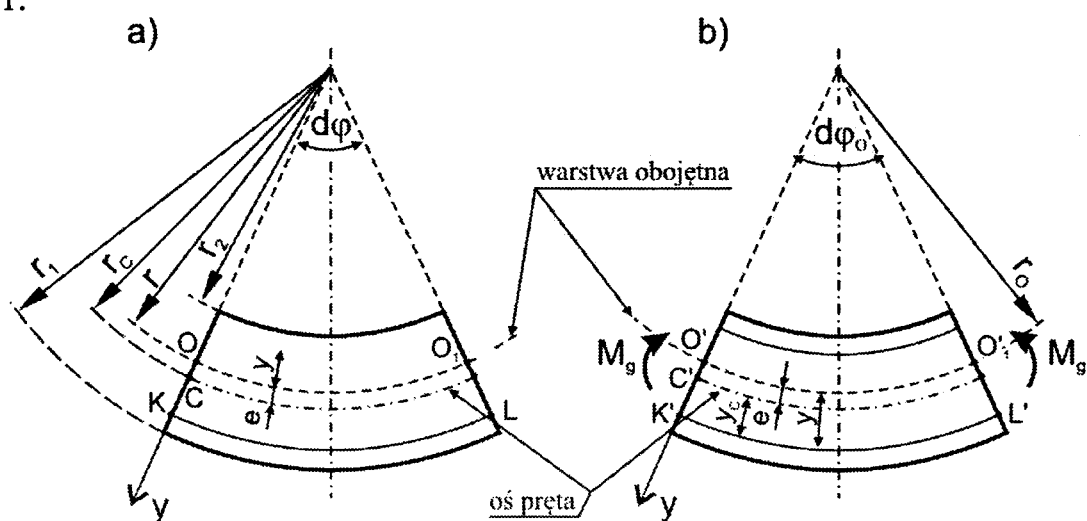
Z analizy czystego płaskiego zginania belek prostych wynika, że:

- oś obojętna zginania belki, prostopadła do płaszczyzny zginania, przechodzi przez środek ciężkości przekroju poprzecznego belki;
- rozkład naprężeń zginających wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego belki jest liniowy, przy zerowej wartości naprężenia na osi obojętnej zginania.

Co innego wynika z analizy zginania prętów silnie zakrzywionych. Za pręty silnie zakrzywione uważa się pręty, w których stosunek promienia krzywizny r_c osi pręta do wysokości h jego przekroju poprzecznego spełnia nierówność:

$$\frac{r_c}{h} \leq 6. \quad (6.1)$$

Charakterystyczne wymiary elementu wyciętego z pręta silnie zakrzywionego podano na rys. 6.1.



Rys. 6.1

Z analizy odkształceń i naprężeń w zakresie sprężystym prętów silnie zakrzywionych wynika, że:

- oś obojętna zginania, prostopadła do płaszczyzny zginania, leży w płaszczyźnie przekroju poprzecznego w odległości r od środka krzywizny pręta określonej wzorem:

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}}, \quad (6.2)$$

w którym A jest polem powierzchni przekroju poprzecznego, a u jest zmienną zawartą w przedziale $r_2 \leq u \leq r_1$; z rys. 6.1 wynika, że:

$$u = r + y = r_c + y_c,$$

- rozkład naprężeń zginających wzdłuż wysokości h przekroju poprzecznego pręta jest hiperboliczny.

Naprężenia zginające w prętach silnie zakrzywionych przy założeniu, że oś y skierowana jest do środka krzywizny pręta, można obliczać z następujących wzorów:

$$\sigma_g = \frac{M_g}{A \cdot e} \frac{y}{r + y} \quad (6.3)$$

lub

$$\sigma_g = \frac{M_g y_c}{A \cdot e \cdot r_c} \frac{1 + \frac{e}{y_c}}{1 + \frac{y_c}{r_c}}, \quad (6.4)$$

gdzie $e = r_c - r$.

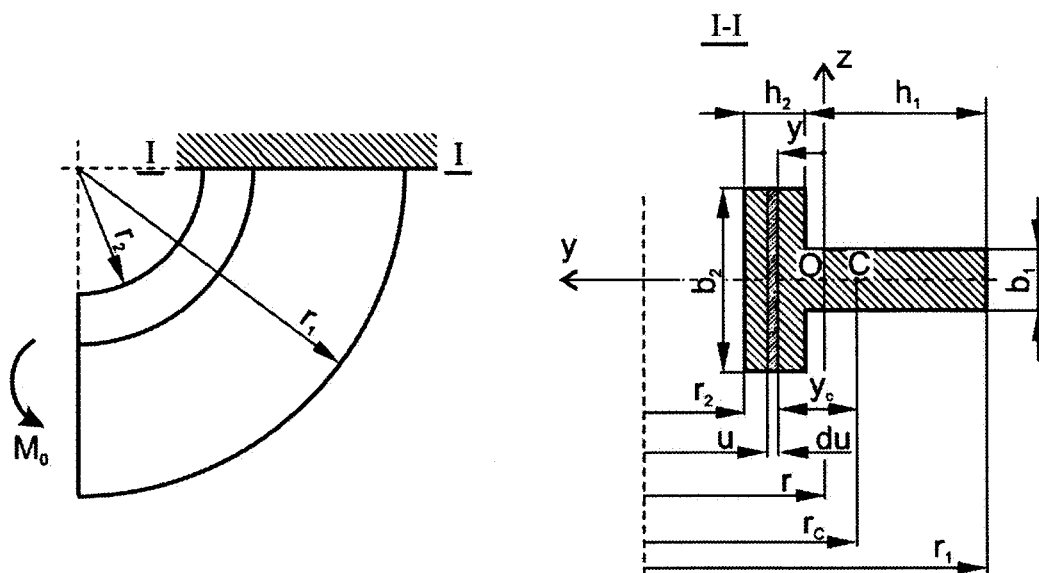
Dla prętów o $r_c/h > 2$ można stosować wzory uproszczone:

$$e = \frac{I_{zc}}{A r_c}, \quad (6.5)$$

$$\sigma_g = \frac{M_g}{I_{zc}} \cdot y_c \cdot \frac{1 + \frac{e}{y_c}}{1 + \frac{y_c}{r_c}}. \quad (6.6)$$

W uproszczonym wzorze (6.6) dla σ_g człon $\frac{M_g}{I_{zc}} \cdot y_c$ jest identyczny jak dla zginanych belek prostych, a iloczyn $\left(1 + \frac{e}{y_c}\right) / \left(1 + \frac{y_c}{r_c}\right)$ uwzględnia wpływ zakrzywienia pręta na wartość naprężeń zginających.

Zadanie 6.1. Obliczyć dopuszczalny moment gnący M_0 pręt silnie zakrzywiony o przekroju teowym pokazany na rys. 6.2. Dane: $b_1 = 20$ mm; $b_2 = 60$ mm; $h_1 = 60$ mm; $h_2 = 20$ mm; $r_1 = 110$ mm; $r_2 = 30$ mm; $h = h_1 + h_2 = 80$ mm; $k_r = 120$ MPa.



Rys. 6.2

R o z w i ą z a n i e . Pole powierzchni przekroju poprzecznego pręta:

$$A = b_1 h_1 + b_2 h_2 = 60 \cdot 20 + 20 \cdot 60 = 2400 \text{ mm}^2.$$

Położenie środka ciężkości przekroju poprzecznego (odległość od zewnętrznego brzegu półki teownika – rys. 6.3):

$$y_c = \frac{b_2 h_2 \frac{h_2}{2} + b_1 h_1 \left(h_2 + \frac{h_1}{2} \right)}{A} = 30 \text{ mm}.$$

Promień krzywizny osi obojętnej zginania:

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}} = \frac{A}{\int_{A_1} \frac{dA_1}{u} + \int_{A_2} \frac{dA_2}{u}}.$$

Elementarne pola dA_1 i dA_2 można zapisać jako $b_1 du$ i $b_2 du$, więc:

$$\begin{aligned} r &= \frac{A}{\int_{r_2}^{r_2+h_2} \frac{b_2 du}{u} + \int_{r_2+h_2}^{r_1} \frac{b_1 du}{u}} = \frac{A}{b_2 \ln u \Big|_{r_2}^{r_2+h_2} + b_1 \ln u \Big|_{r_2+h_2}^{r_1}} = \\ &= \frac{A}{b_2 \ln \frac{r_2+h_2}{r_2} + b_1 \ln \frac{r_1}{r_2+h_2}} = \frac{2400}{60 \cdot \ln \frac{50}{30} + 20 \cdot \ln \frac{110}{50}} = \frac{2400}{46,4} = 51,7 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Promień krzywizny środków ciężkości przekrojów poprzecznych:

$$r_c = r_2 + y_c = 30 + 30 = 60 \text{ mm}.$$

Odległość osi obojętnej zginania od osi przechodzącej przez środek ciężkości przekroju poprzecznego pręta:

$$e = r_c - r = 60 - 51,7 = 8,3 \text{ mm.}$$

Moment statyczny przekroju poprzecznego względem osi obojętnej zginania:

$$S = A \cdot e = 2400 \cdot 8,3 = 19920 \text{ mm}^3.$$

Współrzędne skrajnych włókien teownika od osi obojętnej zginania:

$$y_2 = r - r_2 = 51,7 - 30 = 21,7 \text{ mm,}$$

$$y_1 = r - r_1 = 51,7 - 100 = -58,3 \text{ mm.}$$

Naprężenia w skrajnych włóknach przekroju poprzecznego (naprężenia ekstremalne):

$$\sigma_2 = \frac{M_0 y_2}{S r_2} = \frac{21,7 M_0}{19920 \cdot 30} = 3,63 \cdot 10^{-5} M_0,$$

$$\sigma_1 = \frac{M_0 y_1}{S r_1} = \frac{-58,3 M_0}{19920 \cdot 110} = -2,66 \cdot 10^{-5} M_0.$$

Maksymalne co do wartości bezwzględnej są naprężenia σ_2 i one nie mogą być większe od naprężeń dopuszczalnych, czyli:

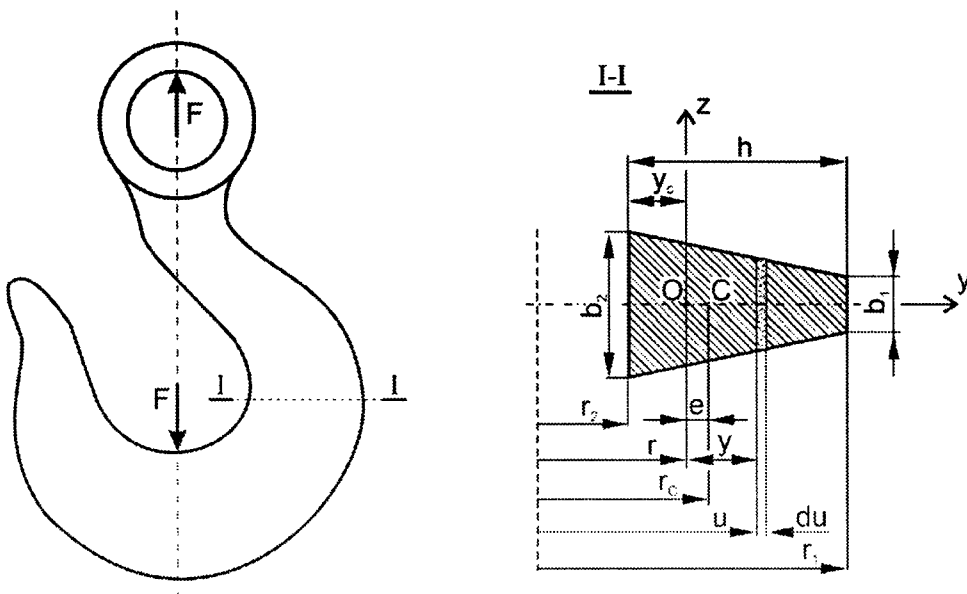
$$\sigma_2 = 3,63 \cdot 10^{-5} M_0 \leq k_r = 120 \text{ MPa,}$$

$$M_0 \leq \frac{120}{3,63 \cdot 10^{-5}} = 3304700 \text{ Nmm} = 3,305 \text{ kNm.}$$

Przyjęto $M_0 = 3,3 \text{ kNm}$.

Zadanie 6.2. Obliczyć maksymalne naprężenia w haku obciążonym siłą F . Promienie krzywizn haka oraz wymiary jego przekroju poprzecznego zaznaczono na rys. 6.3.

Dane liczbowe: $b_1 = 30 \text{ mm}$; $b_2 = 80 \text{ mm}$; $r_1 = 200 \text{ mm}$; $r_2 = 80 \text{ mm}$; $h = r_1 - r_2 = 120 \text{ mm}$; $F = 100 \text{ kN}$.



Rys. 6.3

R o z w i ą z a n i e . Największe naprężenia powstaną w przekroju I-I, ponieważ w tym przekroju występuje największy moment gnący $M_{\text{gmax}} = F \cdot r_c$ oraz siła normalna $N = F$. Pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = 6600 \text{ mm}^2.$$

Położenie środka ciężkości:

$$y_c = \frac{b_1 h \frac{h}{2} + \frac{1}{2}(b_2 - b_1) h \frac{h}{3}}{A} = 51 \text{ mm}.$$

Promień krzywizny osi obojętnej zginania:

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}},$$

gdzie: $dA = b_u du$,

$$b_u = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h}(r_1 - u),$$

$$\int_A \frac{dA}{u} = \int_{r_2}^{r_1} \left[b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h}(r_1 - u) \right] \frac{du}{u} = \left(b_1 + \frac{b_2 - b_1}{h} \cdot r_1 \right) \ln \frac{r_1}{r_2} - (b_2 - b_1) = 53,85 \text{ mm},$$

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{u}} = \frac{6600}{53,85} = 122,6 \text{ mm}.$$

Promień krzywizny linii przechodzącej przez środki ciężkości przekrojów poprzecznych:

$$r_c = r_2 + y_c = 80 + 51 = 131 \text{ mm}.$$

Odległość między osią obojętną zginania z i osią centralną z_c przekroju poprzecznego:

$$e = r_c - r = 131 - 122,6 = 8,4 \text{ mm}.$$

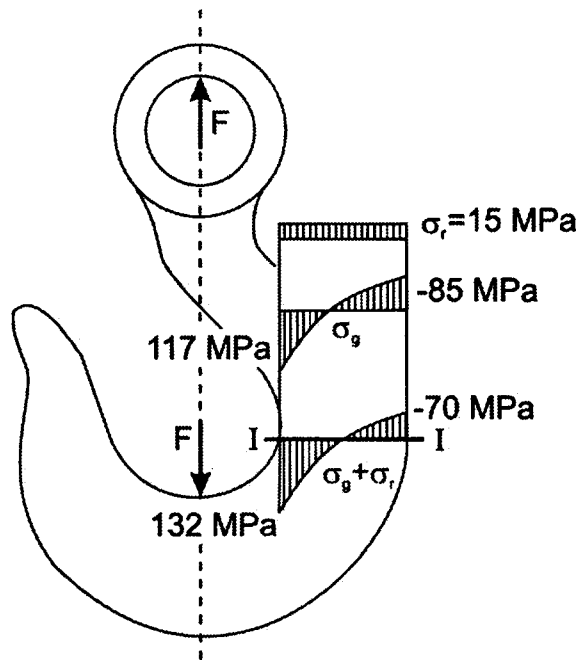
Moment statyczny przekroju poprzecznego haka względem osi obojętnej zginania:

$$S = A \cdot e = 6600 \cdot 8,4 = 55440 \text{ mm}^3.$$

Współrzędne skrajnych włókien przekroju poprzecznego od osi obojętnej zginania

$$y_1 = r_1 - r = 200 - 122,6 = 77,4 \text{ mm},$$

$$y_2 = r_2 - r = 80 - 122,6 = -42,6 \text{ mm}.$$



Rys. 6.4

Naprężenia w przekroju I-I haka (rys. 6.4):

- od siły normalnej $N = F$:

$$\sigma_r = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{100000}{6600} = 15 \text{ MPa};$$

- od momentu gnącego $M_g = F \cdot r_c = 1,31 \cdot 10^7 \text{ Nmm}$:

- po stronie rozciąganej ($y_2 = -42 \text{ mm}$):

$$\sigma_{gr} = -\frac{M_g y_2}{S r_2} = -\frac{1,31 \cdot 10^7 \cdot (-42,6)}{59400 \cdot 80} = 117,4 \text{ MPa};$$

- po stronie ściskanej ($y_1 = 78 \text{ mm}$):

$$\sigma_{gc} = -\frac{M_g y_1}{S r_1} = -\frac{1,31 \cdot 10^7 \cdot 77,4}{59400 \cdot 200} = -85,3 \text{ MPa}.$$

Maksymalne naprężenia występujące w przekroju I-I haka:

$$\sigma_{max} = \sigma_{gr} + \sigma_r = 117,4 + 15 = 132,4 \text{ MPa}.$$

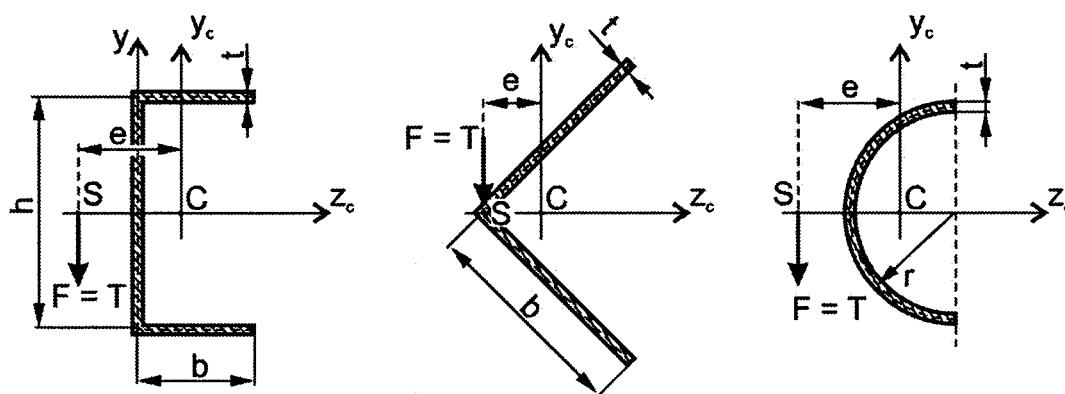
6.2. Środek sił poprzecznych

Metoda wyznaczania naprężeń stycznych wywołanych siłą poprzeczną T (siłą tnącą występującą przy zginaniu poprzecznym belek) ze wzoru Żurawskiego:

$$\tau(y) = \frac{T S_y^{y_{max}}}{b_y I_{zc}} \quad (6.7)$$

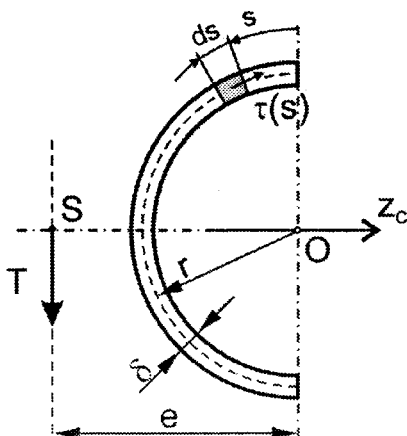
daje dostatecznie dokładne dla celów inżynierskich wyniki, gdy linia działania siły T pokrywa się z osią symetrii przekroju poprzecznego belki. Wtedy mamy do czynienia ze zginaniem płaskim i ścinaniem.

W dalszych rozważaniach przedstawione zostaną belki o przekrojach poprzecznych z jedną osią symetrii prostopadłą do linii działania siły T . Przykładowe, często stosowane w praktyce inżynierskiej przekroje pokazane są na rys. 6.5.



Rys. 6.5

Siła T przyłożona w środku sił poprzecznych S powoduje płaskie zginanie belki w płaszczyźnie xy , nie wywołując obrotu przekroju poprzecznego belki (nie występuje wtedy skręcanie).



Rys. 6.6

Położenie środka sił poprzecznych S w prętach cienkościennych o profilu otwartym dla przekrojów z poziomą osią symetrii (rys. 6.6) można wyznaczać ze wzoru

wyprowadzonego z przyrównania sumy momentów względem dowolnego punktu położonego na osi symetrii do zera:

$$\sum M_O = T \cdot e - \int_0^{s_c} \tau(s) \cdot \delta \cdot ds \cdot r = 0, \quad (6.8)$$

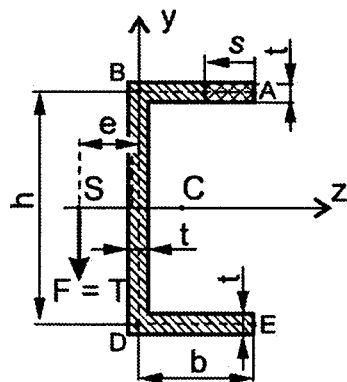
Wykorzystując w równaniu (6.8) wzór Żurawskiego, otrzymano:

$$T \cdot e = \int_0^{s_c} \frac{T S_{zc}^{0,s_c}}{\delta I_{zc}} \delta ds \cdot r, \quad (6.09)$$

po uproszczeniu odległość od punktu O (rys. 6.6) do środka sił poprzecznych można wyznaczyć ze wzoru:

$$e = \frac{r}{I_{zc}} \int_0^{s_c} S_{zc}^{0,s_c} ds. \quad (6.10)$$

Zadanie 6.3. Określić położenie środka sił poprzecznych dla przekroju ceowego o wymiarach podanych na rys. 6.7



Rys. 6.7

R o z w i ą z a n i e . Naprężenia styczne w półce górnej, w przekroju poprzecznym określonym współrzędną s , zostaną obliczone ze wzoru Żurawskiego:

$$\tau(s) = \frac{T S_0^s}{b_z I_{zc}},$$

w którym $b_z = t$.

Moment statyczny części przekroju pasa górnego, określonej współrzędną s , wynosi:

$$S_0^s = s \cdot t \cdot \frac{h}{2},$$

Wykorzystując powyższe wzór Żurawskiego, dla rozpatrywanego przekroju ma postać:

$$\tau(s) = \frac{T \frac{1}{2} sth}{t I_{zc}} = \frac{T s h}{2 I_{zc}}.$$

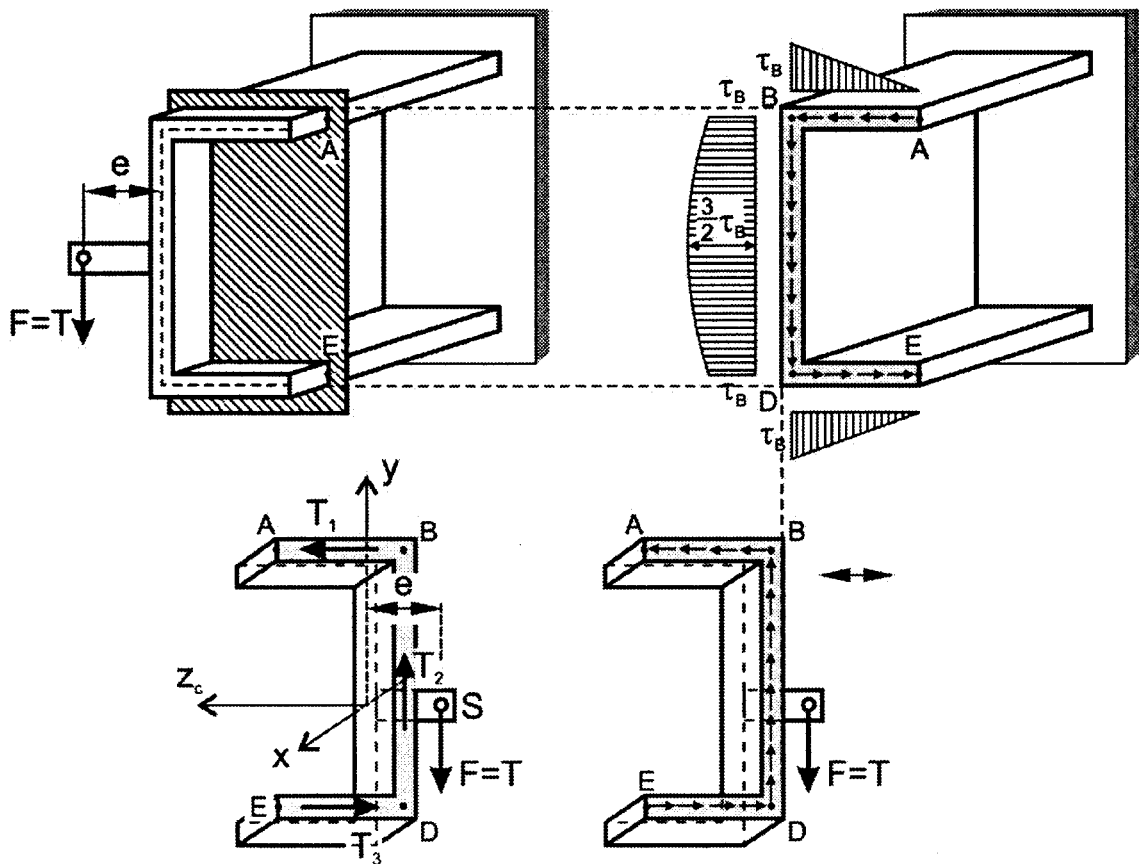
Jak wynika ze wzoru na $\tau(s)$ naprężenie styczne zależy liniowo od współrzędnej s i dla $s = 0$ oraz dla $s = b$ wynosi:

$$\tau_A = \tau(0) = 0, \quad \tau_B = \tau(b) = \frac{Tbh}{2I_{zc}}$$

Rozkład naprężeń stycznych w ceowniku pokazano na rys. 6.8. Siły wypadkowe T_1 , T_2 i T_3 (rys. 6.8) od naprężeń występujących w półkach i środku wynoszą:

$$|T_1| = |T_3| = \frac{1}{2} \frac{T \cdot bh}{2I_{zc}} \cdot bt = \frac{Thbt^2}{4I_{zc}},$$

$$T_2 = T.$$



Rys. 6.8

Siły T_1 i T_3 (rys. 6.8) tworzą parę sił działających na ramieniu h , a zatem moment tej pary sił jest równy $T_1 \cdot h$. Moment ten obraca przekrój poprzeczny ceownika w kierunku trygonometrycznym (rys. 6.8). Przekrój nie ulegnie obrotowi, gdy moment od pary sił T_1 i $T_3 = T_1$ będzie równy momentowi względem osi x (oś leżąca w płaszczyźnie środkowej środka) siły $F = T$ przyłożonej w środku sił poprzecznych S , czyli w odległości e od osi x . Z rys. 6.8 wynika, że:

$$T \cdot e = T_1 \cdot h,$$

$$T \cdot e = \frac{Th^2 tb^2}{4I_{zc}}$$

Z powyższego równania wyznaczono odległość e stanowiącą odległość środka sił poprzecznych od środka grubości środnika ceownika:

$$e = \frac{h^2 tb^2}{4I_{zc}}$$

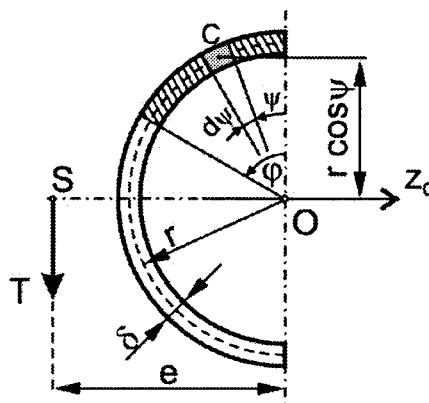
Moment bezwładności przekroju poprzecznego ceownika względem głównej osi centralnej $z = z_c$ wynosi:

$$I_{zc} = \frac{th^3}{12} + 2 \cdot bt \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{th^3}{12} \left(1 + \frac{b}{6h}\right)$$

Po podstawieniu momentu bezwładności I_{zc} do wzoru na odległość e otrzymano:

$$e = \frac{h^2 tb^2}{4 \left[\frac{1}{12} th^3 \left(1 + \frac{b}{6h}\right) \right]} = 3 \frac{b^2}{h \left(1 + \frac{b}{6h}\right)} = 18 \frac{b^3}{h(6b+h)}$$

Zadanie 6.4. Określić położenie środka sił poprzecznych dla przekroju cienkościennego o wymiarach podanych na rys. 6.9.



Rys. 6.9

R o z w i ą z a n i e . Naprężenia styczne wyznaczmy ze wzoru Żurawskiego, który dla analizowanego przekroju możemy zapisać następująco:

$$\tau_{\varphi} = \frac{T S_{\varphi}}{\delta I_z}$$

gdzie S_{φ} jest momentem statycznym wycinka pierścienia zawartym między płaszczyznami rozwartymi pod kątem φ , a I_z – momentem bezwładności całego analizowanego przekroju względem osi z_c (rys. 6.9).

Moment statyczny wynosi:

$$S_{\varphi} = \int_0^{\varphi} (\delta r d \psi \cdot r \cos \psi) = \delta r^2 \int_0^{\varphi} \cos \psi d \psi = \delta r^2 \sin \varphi$$

Moment bezwładności I_{zc} rozpatrywanego przekroju można wyznaczyć jako połowę biegunowego momentu bezwładności, który wynosi:

$$I_0 = \frac{1}{2} (2\pi r \delta) r^2 = \pi r^3 \delta,$$

a w związku z powyższym moment bezwładności względem osi z_c jest równy:

$$I_{zc} = \frac{I_0}{2} = \frac{1}{2} \pi r^3 \delta.$$

Naprężenia styczne występujące w przekroju poprzecznym pręta opisane są następującym wzorem:

$$\tau_\varphi = \frac{T S_\varphi}{\delta I_z} = \frac{T \cdot \delta r^2 \sin \varphi}{\delta \cdot \frac{1}{2} \pi r^3 \delta} = 2 \frac{T}{\pi r \delta} \sin \varphi.$$

Równanie równowagi – równanie sumy momentów względem punktu O ma postać:

$$T \cdot e = \left(\int_A \tau_\varphi dA \right) \cdot r.$$

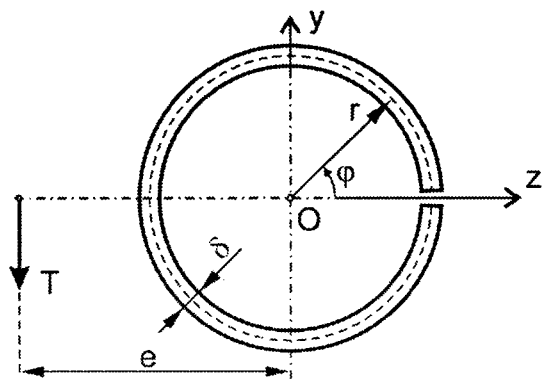
Po rozwiązaniu tego równania otrzymano:

$$T \cdot e = \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau_\varphi \cdot \delta r d\varphi \right) \cdot r = \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{T}{\pi r \delta} \sin \varphi \cdot \delta r d\varphi \right) \cdot r = \frac{4Tr}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi = \frac{4Tr}{\pi}.$$

Stąd otrzymano odległość środka sił poprzecznych S od punktu O:

$$e = \frac{4}{\pi} r.$$

Zadanie 6.5. Określić położenie środka sił poprzecznych dla cienkościennego rozciętego pierścienia o wymiarach podanych na rys. 6.10.

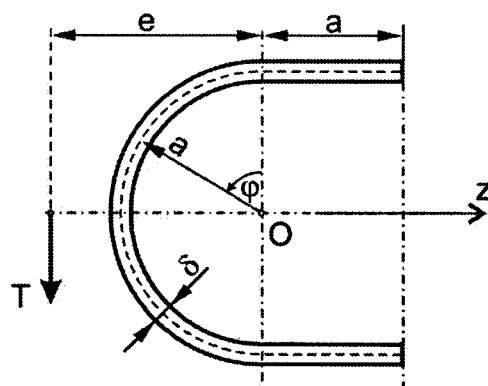


Rys. 6.10

ODPOWIEDŹ:

$$e = 2r.$$

Zadanie 6.6. Wyznaczyć położenie środka sił poprzecznych dla przekroju pokazanego na rys. 6.11.



Rys. 6.11

ODPOWIEDŹ:

$$e = 1,72a.$$

6.3. Naprężenia i odkształcenia w rurach grubościennych

Ogólne wzory Lamego dla rury grubościennej (rys. 6.12) o promieniu wewnętrznym a i promieniu zewnętrznym b obciążonej ciśnieniem wewnętrznym p_a i ciśnieniem zewnętrznym p_b mają postać:

- dla naprężeń promieniowych:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}, \quad (6.11)$$

- dla naprężeń obwodowych:

$$\sigma_\varphi = \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b) a^2 b^2}{r^2 (b^2 - a^2)}, \quad (6.12)$$

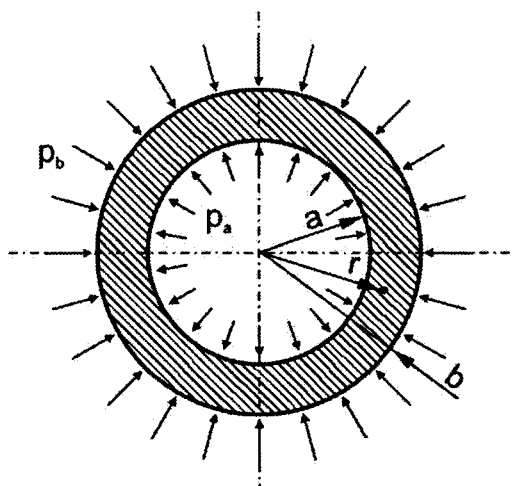
- dla zmiany długości promienia a :

$$\Delta a = p_a \frac{a}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \nu \right) - p_b \frac{a}{E} \frac{2b^2}{b^2 - a^2}, \quad (6.13)$$

- dla zmiany długości promienia b :

$$\Delta b = p_a \frac{b}{E} \frac{2a^2}{b^2 - a^2} - p_b \frac{b}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \nu \right), \quad (6.14)$$

gdzie r jest promieniem punktu znajdującego się wewnątrz przekroju rury, tzn. $a \leq r \leq b$.



Rys. 6.12

Zadanie 6.7. Rura grubościenna o promieniu wewnętrznym $a = 20$ mm, promieniu zewnętrznym $b = 30$ mm, wykonana ze stali o $E = 2 \cdot 10^5$ MPa i $\nu = 0,3$, obciążona jest ciśnieniem wewnętrznym $p_a = 40$ MPa przy $p_b = 0$. Obliczyć maksymalne naprężenia zredukowane i zmianę grubości ściany rury.

R o z w i ą z a n i e . Przy ciśnieniu zewnętrznym $p_b = 0$ wzory Lamego przyjmują postać:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2 p_a}{r^2 (b^2 - a^2)},$$

$$\sigma_\varphi = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2 p_a}{r^2 (b^2 - a^2)},$$

$$\Delta a = p_a \frac{a}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \nu \right),$$

$$\Delta b = p_a \frac{b}{E} \frac{2a^2}{b^2 - a^2}.$$

Naprężenia promieniowe σ_r dla $r = a$:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} - \frac{b^2 p_a}{b^2 - a^2} = -p_a \frac{b^2 - a^2}{b^2 - a^2} = -40 \text{ MPa}.$$

Naprężenia σ_r dla $r = b$:

$$\sigma_r = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} = 0.$$

Naprężenia obwodowe σ_φ dla $r = a$:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 p_a}{b^2 - a^2} = \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} p_a = \frac{30^2 + 20^2}{30^2 - 20^2} 40 = 104 \text{ MPa.}$$

Naprężenia σ_{φ} dla $r = b$:

$$\sigma_{\varphi} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} = 2 \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} = 2 \frac{20^2 \cdot 40}{30^2 - 20^2} = 64 \text{ MPa.}$$

Naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera obliczone ze wzoru dla płaskiego stanu naprężenia:

$$\sigma_{red.} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_{\varphi}^2 - \sigma_r \sigma_{\varphi}},$$

dla $r = a$ wynoszą:

$$(\sigma_{red.})_{max} = \sqrt{(-40)^2 + (104)^2 - (-40) \cdot 104} = 129 \text{ MPa.}$$

Naprężenia zredukowane dla $r = a$ są naprężeniami maksymalnymi, ponieważ dla $r = b$ naprężenia zredukowane są równe naprężeniom obwodowym wynoszącym:

$$(\sigma_{red.})_{r=b} = (\sigma_{\varphi})_{r=b} = 64 \text{ MPa.}$$

Zmiany długości promieni wewnętrznego i zewnętrznego wynoszą odpowiednio:

$$\Delta a = p_a \frac{a}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \nu \right) = 40 \frac{20}{2 \cdot 10^5} \left(\frac{20^2 + 30^2}{30^2 - 20^2} + 0,3 \right) = 0,0116 \text{ mm,}$$

$$\Delta b = p_a \frac{b}{E} \frac{2a^2}{b^2 - a^2} = 40 \frac{30}{2 \cdot 10^5} \frac{2 \cdot 20^2}{30^2 - 20^2} = 0,0096 \text{ mm.}$$

Zmiana grubości Δt ściany rury wynosi:

$$\Delta t = \Delta b - \Delta a = 0,0096 - 0,0116 = -0,002 \text{ mm} = -2 \mu\text{m.}$$

Znak minus oznacza, że grubość ściany rury $t = b - a = 10 \text{ mm}$ zmniejszyła się zaledwie o $2 \mu\text{m}$.

Zadanie 6.8. Na pierścień grubościenny o promieniu wewnętrznym $a = 20 \text{ mm}$ i promieniu zewnętrznym $b = 30 \text{ mm}$ wciśnięto pierścień grubościenny o promieniu wewnętrznym $b' = b - \delta$, gdzie $\delta = 5 \mu\text{m} = 0,005 \text{ mm}$. Promień zewnętrzny tego pierścienia $c = 40 \text{ mm}$. Stałe materiałowe obydwu pierścieni są identyczne i wynoszą: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ i $\nu = 0,3$. Obliczyć ciśnienie q działające między pierścieniami (dla $r = b$) oraz naprężenia σ_r i σ_{φ} dla $r = a$, $r = b$ i $r = c$.

R o z w i ą z a n i e . Po wciśnięciu pierścieni promienie b i b' zrównają się na skutek zmniejszenia się o Δb promienia zewnętrznego pierścienia wewnętrznego i wzrostu o $\Delta b'$ promienia wewnętrznego pierścienia zewnętrznego. Suma bezwzględnych wartości Δb i $\Delta b'$ musi być równa:

$$|\Delta b| + |\Delta b'| = \delta,$$

tnz. różnicy długości promieni b i b' przed wciskiem. Zmiany promieni Δb i $\Delta b'$ wywołane są powstałym po wcisku ciśnieniem q działającym na powierzchni styku pierścieni. Przy obliczeniach Δb i $\Delta b'$ pominięte zostaną małe różnice długości promieni b i b' (tnz. $b' \approx b$).

Biorąc pod uwagę, że na pierścień wewnętrzny działa tylko ciśnienie zewnętrzne $p_b = q$, a na pierścień zewnętrzny działa tylko ciśnienie wewnętrzne $p_b = q$, wzory na zmiany długości promieni Δb i $\Delta b'$ przyjmują postać:

$$\Delta b = -q \frac{b}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \nu \right), \quad \Delta b' = q \frac{b}{E} \left(\frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \nu \right).$$

Po podstawieniu ich do zależności $|\Delta b| + \Delta b' = \delta$ otrzymano:

$$q \frac{b}{E} \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} - \nu \right) + q \frac{b}{E} \left(\frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} + \nu \right) = \delta,$$

stąd po przekształceniach:

$$q = \frac{E \delta}{b \left(\frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2} + \frac{b^2 + c^2}{c^2 - b^2} \right)}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$q = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{30 \left(\frac{20^2 + 30^2}{30^2 - 20^2} + \frac{30^2 + 40^2}{40^2 - 30^2} \right)} = \frac{100}{3 \left(\frac{13}{5} + \frac{25}{7} \right)} = 5,4 \text{ MPa}.$$

Naprężenia promieniowe σ_r dla $r = a$ i $r = c$ są równe zero, ponieważ na zewnętrznych powierzchniach pierścieni (tnz. dla $r = a$ i $r = c$) ciśnienie jest równe zero.

Naprężenia promieniowe σ_r dla $r = b$ i $r = b'$ są równe:

$$(\sigma_r)_{r=b} = (\sigma_r)_{r=b'} = -q = -5,4 \text{ MPa}.$$

Naprężenia obwodowe σ_φ dla promieni $r = a$, $r = b$, $r = b'$ i $r = c$ wynoszą:

$$(\sigma_\varphi)_{r=a} = -\frac{2b^2q}{b^2 - a^2} = -\frac{2 \cdot 30^2 \cdot 5,4}{30^2 - 20^2} = -19,4 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=b} = -\frac{b^2q}{b^2 - a^2} - \frac{a^2q}{b^2 - a^2} = -\frac{q(a^2 + b^2)}{b^2 - a^2} = -\frac{5,4(20^2 + 30^2)}{30^2 - 20^2} = -14 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=b'} = \frac{b^2q}{c^2 - b^2} + \frac{c^2q}{c^2 - b^2} = q \frac{c^2 + b^2}{c^2 - b^2} = 5,4 \frac{40^2 + 30^2}{40^2 - 30^2} = 19,3 \text{ MPa},$$

$$(\sigma_\varphi)_{r=c} = \frac{2b^2q}{c^2 - b^2} = \frac{2 \cdot 30^2 \cdot 5,4}{40^2 - 30^2} = 13,9 \text{ MPa}.$$

Zadanie 6.9. Obliczyć naprężenia promieniowe σ_r i obwodowe σ_φ w pierścieniach po wcisku z zadania 6.8 i dodatkowym obciążeniu układu pierścieni ciśnieniem $p_a = 40$ MPa na wewnętrznej powierzchni pierścienia wewnętrznego ($r = a$). Pozostałe dane jak w zadaniu 6.8.

R o z w i ą z a n i e . W pierścieniach działają naprężenia od wcisku, obliczone w poprzednim zadaniu oraz od ciśnienia $p_a = 40$ MPa. Zadanie można rozwiązać metodą superpozycji. Najpierw zostaną obliczone naprężenia w pierścieniach wywołane jedynie ciśnieniem $p_a = 40$ MPa (pierścienie połączone bez wcisku i luzu). Naprężenia promieniowe σ_r wynoszą:

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{r=a} &= -p_a = -40 \text{ MPa}, \\(\sigma_r)_{r=b} &= \frac{a^2 p_a}{c^2 - a^2} - \frac{a^2 c^2 p_a}{b^2 (c^2 - a^2)} = \frac{4}{12} 40 - \frac{4 \cdot 16}{9 \cdot 12} 40 = -10,4 \text{ MPa}, \\(\sigma_r)_{r=c} &= 0.\end{aligned}$$

W powyższych wzorach wymiary a , b i c podstawiono w centymetrach. Naprężenia obwodowe σ_φ , obliczone ze wzoru:

$$\sigma_\varphi = \frac{a^2 p_a}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 c^2 p_a}{r^2 (c^2 - a^2)},$$

wynoszą:

$$\begin{aligned}(\sigma_\varphi)_{r=a} &= \frac{a^2 p_a}{c^2 - a^2} + \frac{c^2 p_a}{c^2 - a^2} = \frac{(a^2 + c^2) p_a}{c^2 - a^2} = \frac{5}{3} 40 = 66,7 \text{ MPa}, \\(\sigma_\varphi)_{r=b} &= \frac{a^2 p_a}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 c^2 p_a}{b^2 (c^2 - a^2)} = \left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right) \frac{a^2}{c^2 - a^2} p_a = \left(1 + \frac{16}{9}\right) \frac{1}{3} 40 = 37 \text{ MPa}, \\(\sigma_\varphi)_{r=c} &= \frac{a^2 p_a}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 p_a}{(c^2 - a^2)} = 2 \frac{a^2}{c^2 - a^2} p_a = 2 \frac{1}{3} 40 = 26,7 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Ostateczny stan naprężenia w pierścieniach uzyskano przez superpozycję stanu wynikającego z wcisku (zadanie 6.8) z wynikami od ciśnienia $p_a = 40$ MPa:

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{r=a} &= 0 - 40 = -40 \text{ MPa}, \\(\sigma_r)_{r=b} &= -5,4 - 10,4 = -15,8 \text{ MPa}, \\(\sigma_r)_{r=c} &= 0, \\(\sigma_\varphi)_{r=a} &= -19,4 + 66,7 = 47,3 \text{ MPa}, \\(\sigma_\varphi)_{r=b} &= -14 + 37 = 23 \text{ MPa}, \\(\sigma_\varphi)_{r=b'} &= 19,3 + 37 = 56,3 \text{ MPa}, \\(\sigma_\varphi)_{r=c} &= 13,9 + 26,7 = 40,6 \text{ MPa}.\end{aligned}$$

Naprężenia zredukowane według hipotezy Hubera obliczone ze wzoru dla płaskiego stanu naprężenia:

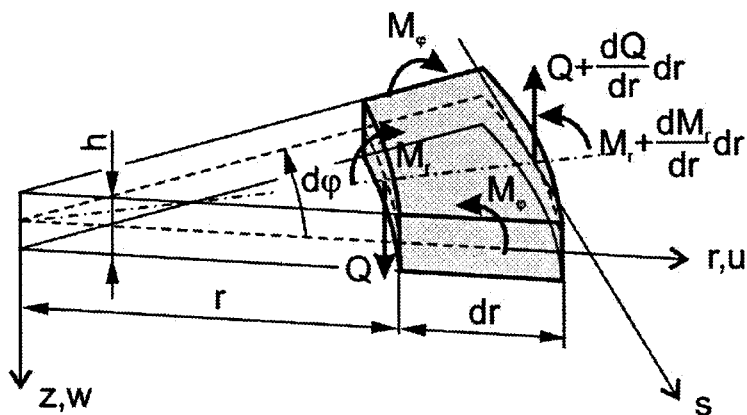
$$\sigma_{red.} = \sqrt{\sigma_r^2 + \sigma_\varphi^2 - \sigma_r \sigma_\varphi}$$

swoją maksymalną wartość uzyskują dla $r = a$ i wynoszą:

$$(\sigma_{red.})_{max} = \sqrt{(-40)^2 + (47,3)^2 - (-40) \cdot 47,3} = 76 \text{ MPa.}$$

6.4. Płyty kołowe obciążone osiowo-symetrycznie

Płyty kołowe są często spotykanymi elementami maszyn i urządzeń. W tym punkcie zostanie podany bardzo krótki opis zginania w zakresie sprężystym izotropowych płyt kołowych o stałej grubości, obciążonych osiowo-symetrycznie oraz kilka przykładów rozwiązywania takich płyt.



Rys. 6.13

Dla wycinka obciążonej osiowo-symetrycznie płyty kołowej (rys. 6.13) można zapisać równanie równowagi (sumę momentów względem osi s), z którego po wykorzystaniu równań fizycznych i geometrycznych wyprowadza się różniczkowe równanie ugiętej powierzchni środkowej w postaci:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{Q}{D}, \quad (6.15)$$

gdzie: $w = w(r)$ – funkcja ugięcia płyty,

$Q(r)$ – poprzeczna siła przekrojowa w [N/m],

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – sztywność płyty na zginanie,

h – grubość płyty,

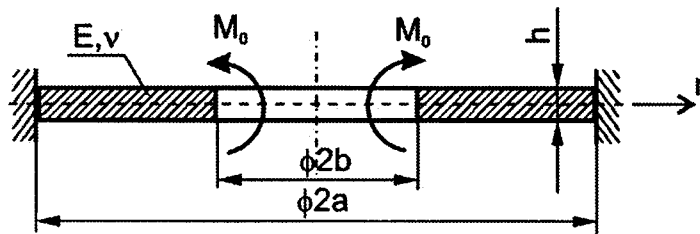
E, ν – stałe materiałowe materiału płyty.

Wzory na przekrojowe momenty gnące (w [Nm/m]) mają postać:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right), \quad (6.16)$$

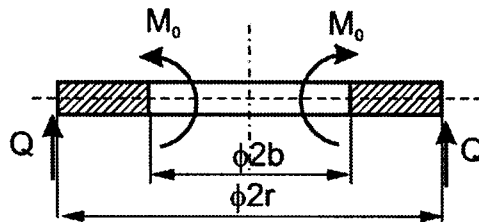
$$M_\varphi = -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right). \quad (6.17)$$

Zadanie 6.10. Płyta kołowa (pierścieniowa) o grubości h , utwierdzona jest na brzegu zewnętrznym o promieniu $r_z = a$. Na swobodnym brzegu wewnętrznym o promieniu $r_w = b$ obciążona jest momentem ciągłym M_0 [Nm/m], jak pokazano na rys. 6.14. Wyznaczyć funkcję ugięcia $w(r)$ płyty oraz wzory na momenty gnące M_r i M_φ , mając dane: M_0 , a , b , h , E , ν .



Rys. 6.14

Rozwiązanie. Z równowagi sił działających na myślowo wycięty (rys. 6.18) pierścień o promieniu zewnętrznym r wynika, że przekrojowa siła poprzeczna Q w rozpatrywanej płycie jest równa zero.



Rys. 6.15

Dla $Q = 0$ równanie różniczkowe ugiętej powierzchni ma postać:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = 0.$$

Rozwiązanie tego równania (po wykonaniu obustronnego całkowania) jest następujące:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = C_1,$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = C_1 r,$$

$$r \frac{dw}{dr} = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2,$$

$$\frac{dw}{dr} = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r},$$

$$w = C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3.$$

W celu wyznaczenia stałych całkowania należy zapisać warunki brzegowe, które dla rozpatrywanej płyty są następujące:

- 1) $w = 0$ dla $r = a$,
- 2) $\frac{dw}{dr} = 0$ dla $r = a$,
- 3) $M_r = M_0$ dla $r = b$.

Z warunków brzegowych 1) i 2) otrzymano dwa równania:

$$1) \quad C_1 \frac{a^2}{4} + C_2 \ln a + C_3 = 0,$$

$$2) \quad C_1 \frac{a}{2} + \frac{C_2}{a} = 0.$$

Trzeci warunek brzegowy ma postać:

$$-D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right)_{r=b} = M_0,$$

a po podstawieniu pochodnych:

$$-D \left[\left(\frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \right) + \frac{\nu}{r} \left(\frac{C_1}{2} r + \frac{C_2}{r} \right) \right]_{r=b} = M_0.$$

Po uporządkowaniu otrzymano trzeci warunek brzegowy wyrażony przez stałe całkowania:

$$3) \quad (1 + \nu) C_1 - 2(1 - \nu) \frac{C_2}{b^2} = -\frac{M_0}{D}.$$

Z warunków brzegowych 1 ÷ 3 wyznaczono:

$$C_1 = \frac{-2 M_0}{D \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \right]},$$

$$C_2 = \frac{-M_0 a^2}{D \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \right]},$$

$$C_3 = \frac{-M_0 a^2 (1 - 2 \ln a)}{2D \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \right]}.$$

Funkcja ugięcia płyty przyjmuje postać:

$$w = \frac{-M_0}{2D \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \right]} (r^2 - 2a^2 \ln r - a^2 + 2a^2 \ln a),$$

$$w = -\frac{M_0}{2D \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \right]} \left(r^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{r}{a} \right),$$

a jej pochodne są równe:

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{M_0}{D \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \right]} \left(r - \frac{a^2}{r} \right),$$

$$\frac{d^2w}{dr^2} = -\frac{M_0}{D \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2} \right]} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right).$$

Momenty gnące:

$$M_r = \frac{M_0}{1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{r^2}} \left[1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{r^2} \right] = M_0,$$

$$M_\varphi = \frac{M_0}{1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{r^2}} \left[1 + \nu - (1 - \nu) \frac{a^2}{r^2} \right].$$

Moment promieniowy M_r ma wartość stałą równą M_0 , a moment obwodowy zmienia się, jest funkcją promienia r i na brzegach płyty wynosi:

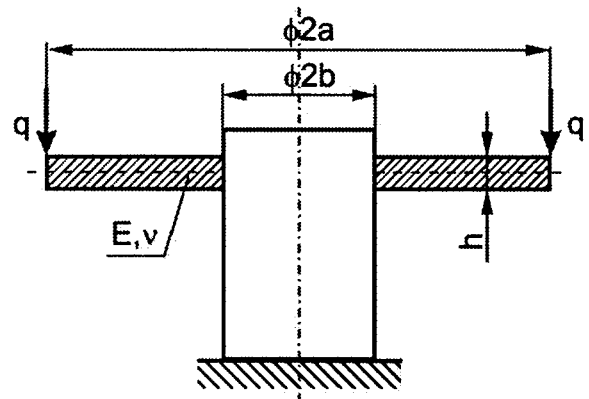
$$(M_\varphi)_{r=a} = \nu M_0,$$

$$(M_\varphi)_{r=b} = M_0 \frac{1 + \nu - (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2}}{1 + \nu + (1 - \nu) \frac{a^2}{b^2}}.$$

Dla $\nu = 0,3$:

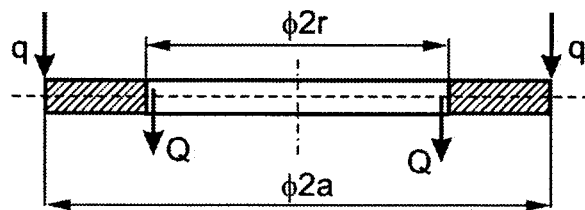
$$(M_{\varphi})_{r=a} = 0,3 M_0, \quad (M_{\varphi})_{r=b} = \frac{1,3 - 0,7 \frac{a^2}{b^2}}{1,3 + 0,7 \frac{a^2}{b^2}} M_0.$$

Zadanie 6.11. Płyta pierścieniowa o grubości h i średnicy zewnętrznej $d_z = 2a$ utwierdzona jest w nieodkształcalnym słupie o średnicy $d = 2b$. Na zewnętrznym obwodzie płyty działa obciążenie ciągłe q [N/m] skierowane do dołu (rys. 6.16). Wyznaczyć funkcję siły poprzecznej $Q(r)$ i ugięcia płyty $w(r)$ oraz określić warunki brzegowe. Dane: a, b, h, E, ν, q .



Rys. 6.16

Rozwiązanie. Siłę poprzeczną Q wyznaczono z sumy rzutów sił na oś prostopadłą do płaszczyzny płyty, zapisanej dla pierścienia o średnicy wewnętrznej $2r$ i średnicy zewnętrznej $2a$ (rys. 6.17), gdzie $b \leq r \leq a$.



Rys. 6.17

$$-Q \cdot 2\pi r - q \cdot 2\pi a = 0,$$

$$Q = -\frac{qa}{r}.$$

Równanie różniczkowe ugięcia powierzchni środkowej płyty:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = -\frac{1}{D} \frac{qa}{r}$$

rozwiązano poprzez kolejne całkowania obu stron równania:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{D} (-qa \ln r + C_1),$$

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{dw}{dr}\right) = \frac{1}{D}(-qar \ln r + C_1 r),$$

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{1}{D}\left[-qa\left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4}\right) + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2\right],$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{D}\left[-\frac{qa}{4}(2r \ln r - r) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}\right],$$

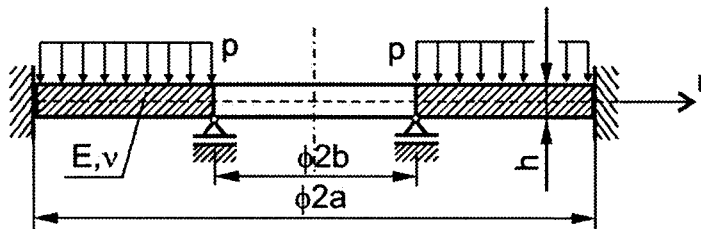
$$w = \frac{1}{D}\left[-\frac{qa}{4}\left(r^2 \ln r - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3\right] =$$

$$= \frac{1}{D}\left[-\frac{qar^2}{4}(\ln r - 1) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3\right].$$

Warunki brzegowe:

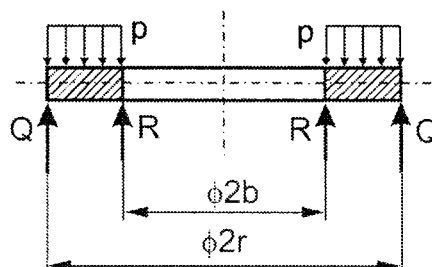
- 1) $w = 0$ dla $r = b$,
- 2) $\frac{dw}{dr} = 0$ dla $r = b$,
- 3) $M_r = 0$ dla $r = a$.

Zadanie 6.12. Płyta pierścieniowa o grubości h obciążona ciśnieniem p [N/m²] utwierdzona jest na obwodzie zewnętrznym o promieniu $r_z = a$ i podparta przegubowo przesuwnie na obwodzie wewnętrznym o promieniu $r_w = b$ (rys. 6.18). Wyprowadzić wzór na siłę poprzeczną $Q(r)$ oraz zapisać warunki brzegowe. Dane: p, a, b, E, ν, h .



Rys. 6.18

Rozwiązanie. Aby wyznaczyć siłę poprzeczną $Q(r)$, trzeba z płyty wyciąć myślowo krążek o promieniu zewnętrznym r i promieniu wewnętrznym b , zastępując oddziaływanie podpory przesuwnej reakcją R [N/m] (rys. 6.19).



Rys. 6.19

Z sumy rzutów sił na oś pionową otrzymano równanie:

$$Q \cdot 2\pi r + R \cdot 2\pi b - p\pi(r^2 - b^2) = 0,$$

z którego wyznaczono:

$$Q = -\frac{Ra}{r} + p\left(r - \frac{a^2}{r}\right).$$

Rozwiązanie równania różniczkowego ugięcia powierzchni środkowej płyty:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] = \frac{1}{D} \left[-R \frac{a}{r} + p \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \right],$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{D} \left[-Ra \ln r + p \left(\frac{r^2}{2} - a^2 \ln r \right) + C_1 \right],$$

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{D} \left[-Rar \ln r + p \left(\frac{r^3}{2} - a^2 r \ln r \right) + C_1 r \right],$$

$$r \frac{dw}{dr} = \frac{1}{D} \left[-Ra \left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + p \frac{r^4}{8} + pa^2 \left(\frac{r^2}{2} \ln r - \frac{r^2}{4} \right) + C_1 \frac{r^2}{2} + C_2 \right],$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{D} \left[\frac{-Ra}{4} (2r \ln r - r) + p \frac{r^3}{8} + \frac{pa^2}{4} (2r \ln r - r) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \right],$$

$$w = \frac{1}{D} \left[\frac{-Ra}{4} \left(r^2 \ln r - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) + \frac{pr^4}{32} + \frac{pa^2}{4} \left(r^2 \ln r - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} \right) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3 \right] =$$

$$= \frac{1}{D} \left[\frac{-Rar^2}{4} (\ln r - 1) + \frac{pr^4}{32} + \frac{pa^2 r^2}{4} (\ln r - 1) + C_1 \frac{r^2}{4} + C_2 \ln r + C_3 \right],$$

$$\frac{dw}{dr} = \frac{1}{D} \left[\frac{-Rar}{4} (2 \ln r - 1) + \frac{pr^3}{8} + \frac{pa^2 r}{4} (2 \ln r - 1) + C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r} \right],$$

$$\frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{1}{D} \left[\frac{-Ra}{4} (1 + 2 \ln r) + \frac{3}{8} pr^2 + \frac{pa^2}{4} (1 + 2 \ln r) + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \right].$$

Warunki brzegowe:

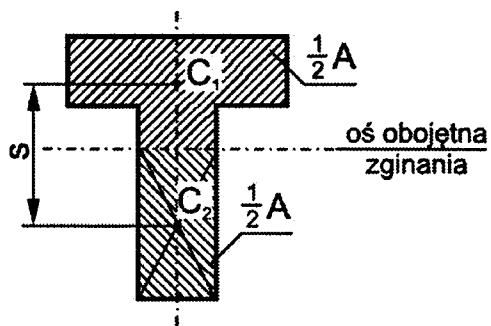
- 1) $w = 0$ dla $r = a$,
- 2) $\frac{dw}{dr} = 0$ dla $r = a$,
- 3) $w = 0$ dla $r = b$,
- 4) $M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) = 0$ dla $r = b$.

Z podanych czterech warunków brzegowych wyznacza się stałe całkowania C_1 , C_2 , C_3 oraz statycznie niewyznaczalną reakcję R .

6.5. Nośność graniczna

6.5.1. Belki zginane

Plastyczny wskaźnik wytrzymałości na zginanie W_{pl} belki oblicza się wykorzystując założenie, że przy całkowitym uplastycznieniu przekroju poprzecznego belki wywołanym czystym zginaniem płaskim (tzn. w przypadku utworzenia się przegubu plastycznego), oś obojętna zginania nie przechodzi przez środek ciężkości przekroju poprzecznego, lecz dzieli przekrój na dwie części o równych polach powierzchni (rys. 6.20).



Rys. 6.20

W każdej z tych dwóch części przekroju występują naprężenia normalne równe (co do wartości bezwzględnej) granicy plastyczności $R_e = \sigma_{pl}$ o przeciwnych zwrotach. Moment gnący w przegubie plastycznym jest więc równy:

$$M_{pl} = R_e \cdot \frac{A}{2} \cdot s, \quad (6.18)$$

gdzie s jest odległością między środkami ciężkości dwóch części przekroju belki o takim samym polu powierzchni (rys. 6.20).

Przez analogię do zginania sprężystego moment plastyczny określa wzór:

$$M_{pl} = R_e \cdot W_{pl}, \quad (6.19)$$

gdzie W_{pl} jest plastycznym wskaźnikiem wytrzymałości na zginanie.

Z porównania prawych stron równań (6.18) i (6.19) wynika, że plastyczny wskaźnik na zginanie:

$$W_{pl} = \frac{A}{2} \cdot s. \quad (6.20)$$

W belkach statycznie wyznaczalnych, poddanych czystemu zginaniu, powstanie choćby jednego przegubu plastycznego powoduje zniszczenie belki (belka staje się mechanizmem). Przegub plastyczny powstaje w przekroju, w którym występuje maksymalny moment gnący. Zniszczenie belki następuje, gdy maksymalny moment gnący osiąga wartość równą momentowi plastycznemu, tzn.:

$$M_{gmax} = M_{pl} = R_e \cdot W_{pl}. \quad (6.21)$$

Znając wartość maksymalnego momentu gnącego w funkcji siły obciążającej belkę lub w funkcji obciążenia ciągłego, można z wzoru (6.21) obliczyć graniczną wartość obciążenia F_{gr} lub q_{gr} .

Nieco trudniej rozwiązuje się przypadki statycznie niewyznaczalnych belek. Maksymalną liczbę przegubów plastycznych p , przy której cała belka statycznie niewyznaczalna (lub jej część) przekształci się w mechanizm oblicza się ze wzoru:

$$p = n + 1, \quad (6.22)$$

gdzie n jest stopniem statycznej niewyznaczalności belki.

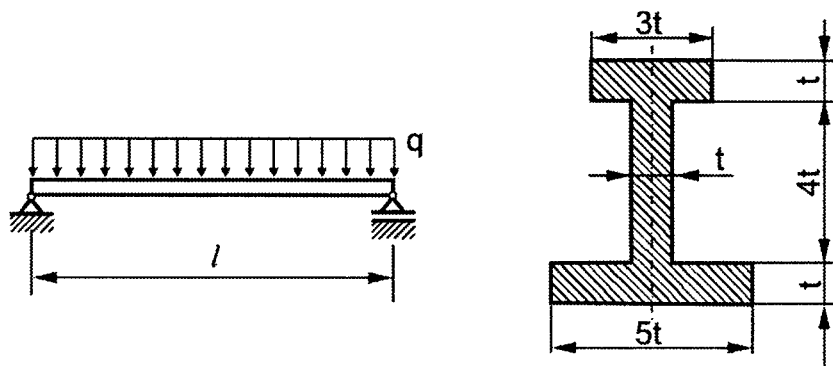
Możliwe jest jednak przekształcenie się części belki w mechanizm przy liczbie przegubów plastycznych p w tej części belki mniejszej od $n + 1$.

Istnieją dwie metody wyznaczania obciążenia granicznego belek: statyczna i kinematyczna.

Wartość obciążenia granicznego belki określona metodą statyczną jest zawsze mniejsza lub równa od rzeczywistej wartości obciążenia granicznego, natomiast wartość obciążenia granicznego wyznaczona metodą kinematyczną jest zawsze większa lub równa rzeczywistemu obciążeniu granicznemu belki.

Obie te metody zostaną szczegółowo omówione na przykładach.

Zadanie 6.13. Belka o przekroju dwuteowym, podparta przegubowo na końcach, obciążona jest na całej długości równomiernym obciążeniem ciągłym o wartości q . Wymiary przekroju poprzecznego belki pokazano na rys. 6.21.



Rys. 6.21

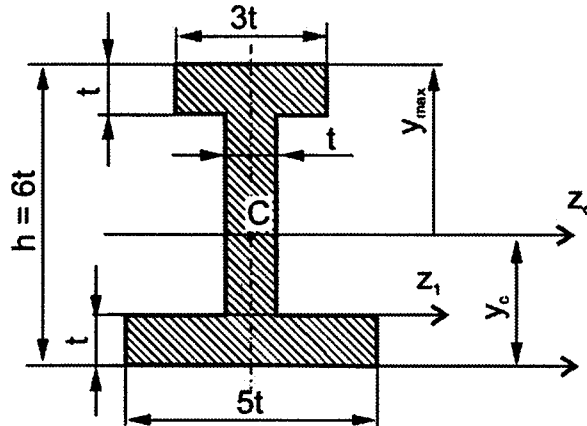
Mając dane: $l = 2$ m, $t = 10$ mm i $\sigma_{pl} = 240$ MPa, obliczyć:

- wartość obciążenia q_{pl} , przy którym nastąpi uplastycznienie pierwszych włókien;
- wartość obciążenia granicznego q_{gr} , przy którym w belce powstanie przegub plastyczny.

Granice plastyczności na rozciąganie i ściskanie mają taką samą wartość bezwzględną.

R o z w i ą z a n i e . Założono, że materiał belki jest sprężysty – idealnie plastyczny. Najpierw obliczono charakterystyki przekroju poprzecznego belki, potrzebne do obliczenia maksymalnych co do wartości bezwzględnej naprężeń w zakresie sprężystym,

aż do osiągnięcia we włóknach najbardziej oddalonych od osi obojętnej zginania naprężeń równych granicy plastyczności.



Rys. 6.22

Położenie środka ciężkości przekroju poprzecznego (rys. 6.22) określa współrzędna:

$$y_c = \frac{5t^2 \cdot \frac{1}{2}t + 4t^2 \cdot 3t + 3t^2 \cdot 5,5t}{5t^2 + 4t^2 + 3t^2} = \frac{31t^3}{12t^2} = \frac{31}{12}t \approx 2,58t.$$

Moment bezwładności względem osi z_1 (rys. 6.22):

$$I_{z1} = \frac{5t \cdot t^3}{3} + \frac{3t \cdot (5t)^3}{3} - 2 \frac{t \cdot (4t)^3}{3} = 84t^4.$$

Moment bezwładności względem osi centralnej z_c (rys. 6.22):

$$I_{zc} = I_{z1} - A(y_c - t)^2 = 84t^4 - 12t^2 \left(\frac{19}{12}t \right)^2 = 53,92t^4.$$

Maksymalna odległość włókien belki od osi obojętnej (od osi z_c):

$$y_{max} = h - y_c = 6t - \frac{31}{12}t = \frac{41}{12}t = 3,42t.$$

Wskaźnik wytrzymałości belki na zginanie:

$$W = \frac{I_{zc}}{y_{max}} = \frac{53,92t^4}{3,42t} = 15,77t^3.$$

Maksymalny moment gnący występuje w środku długości belki i wynosi:

$$M_{gmax} = \frac{1}{8}ql^2.$$

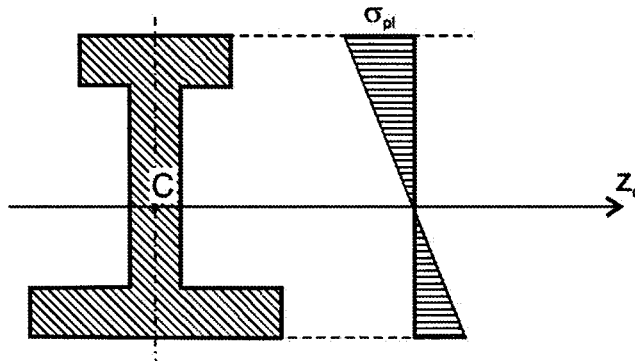
Warunek uplastycznienia pierwszych włókien belki:

$$\sigma_{gmax} = \frac{M_{gmax}}{W} = \sigma_{pl},$$

$$\frac{q_{pl} \cdot l^2}{8W} = \sigma_{pl},$$

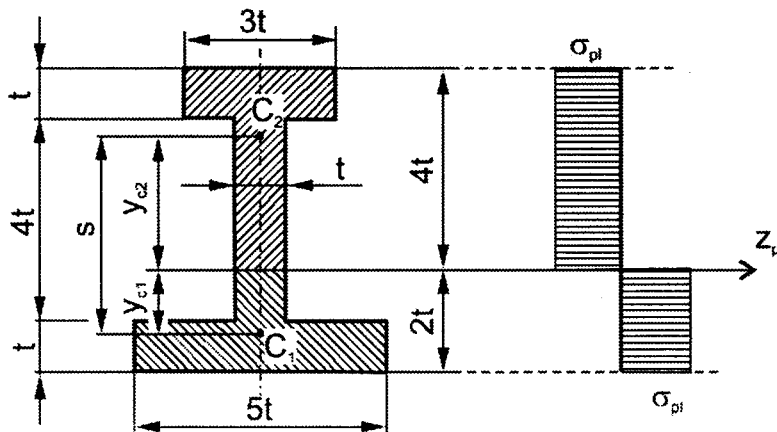
$$q_{pl} = \frac{8W \sigma_{pl}}{l^2} = \frac{8 \cdot 15,77 t^3 \cdot \sigma_{pl}}{l^2} = \frac{8 \cdot 15,77 \cdot 10^3 \cdot 240}{2000^2} = 7,57 \text{ N/mm}.$$

Rozkład naprężeń wzdłuż wysokości przekroju poprzecznego w środku długości belki pokazano na rys. 6.23.



Rys. 6.23

Obliczenie obciążenia granicznego wymaga podzielenia pola powierzchni przekroju poprzecznego belki na dwie równe części (rys. 6.24).



Rys. 6.24

Pola powierzchni części 1 i 2:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} = \frac{12 t^2}{2} = 6 t^2.$$

Położenia środków ciężkości przekrojów teowych o równych polach powierzchni liczone od osi z_p (rys. 6.24):

$$y_{c1} = \frac{t^2 \cdot \left(-\frac{t}{2}\right) + 5t^2 \cdot \left(-\frac{3}{2}t\right)}{t^2 + 5t^2} = -\frac{4}{3}t,$$

$$y_{c2} = \frac{3t^2 \cdot \frac{3}{2}t + 3t^2 \cdot \frac{7}{2}t}{3t^2 + 3t^2} = \frac{5}{2}t.$$

Odległość między środkami ciężkości:

$$s = |y_{c1}| + y_{c2} = \frac{4}{3}t + \frac{5}{2}t = \frac{23}{6}t = 3,83t.$$

Plastyczny wskaźnik wytrzymałości belki na zginanie:

$$W_{pl} = \frac{A}{2} \cdot s = 6t^2 \cdot 3,83t = 23t^3.$$

Moment plastyczny:

$$M_{pl} = W_{pl} \cdot \sigma_{pl},$$

$$\frac{1}{8} q_{gr} l^2 = W_{pl} \cdot \sigma_{pl},$$

stąd obciążenie graniczne:

$$q_{gr} = \frac{8 W_{pl} \cdot \sigma_{pl}}{l^2} = \frac{8 \cdot 23 \cdot 10^3 \cdot 240}{2000^2} = 11,04 \text{ N/mm}.$$

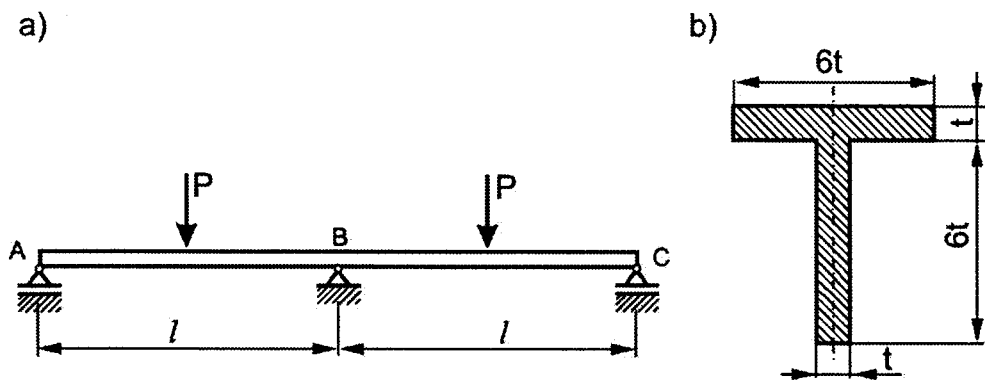
Obciążenie $q_{gr} = 11,04 \text{ N/mm}$ jest o prawie 46% większe od obciążenia powodującego pierwsze uplastycznienie górnych włókien przekroju $q_{pl} = 7,57 \text{ N/mm}$. Aby otrzymać obciążenie dopuszczalne q_{dop} , trzeba wyznaczone obciążenia podzielić przez odpowiedni współczynnik bezpieczeństwa. Współczynnik bezpieczeństwa dla q_{gr} jest na ogół nieco większy od współczynnika bezpieczeństwa dla q_{pl} . Jeżeli przyjąć współczynnik bezpieczeństwa dla q_{gr} równy $n_{gr} = 2$, a dla $q_{pl} - n_{pl} = 1,5$, wówczas:

$$q_{dop(gr)} = \frac{11,04}{2} = 5,52 \text{ N/mm},$$

$$q_{dop(pl)} = \frac{7,57}{1,5} = 5,05 \text{ N/mm}.$$

Obciążenie dopuszczalne obliczone metodą stanów granicznych jest w tym przypadku około 10% większe od naprężenia określonego metodą naprężeń dopuszczalnych (dla $k_r = k_c = \sigma_{pl}/n_{pl} = 160 \text{ MPa}$).

Zadanie 6.14. Belka dwuprzęsłowa symetrycznej budowy jest symetrycznie obciążona jak pokazano na rys. 6.25a. Przekrój poprzeczny belki jest teownikiem o wymiarach pokazanych na rys. 6.25b. Obliczyć graniczną wartość siły P , stosując metodę statyczną. Dane liczbowe: $l = 1 \text{ m}$, $t = 20 \text{ mm}$, $\sigma_{pl} = 250 \text{ MPa}$.



Rys. 6.25

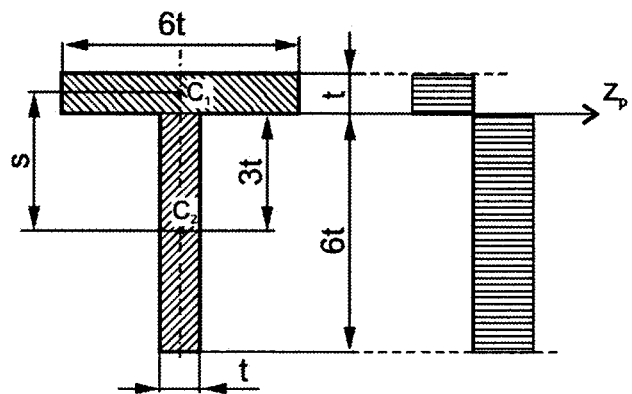
Rozwiązanie. Pole powierzchni przekroju poprzecznego:

$$A = 2 \cdot 6t \cdot t = 12t^2.$$

Pole powierzchni pasa:

$$A_p = \frac{A}{2} = 6t^2$$

jest równe polu powierzchni środnika. Rozkład naprężeń w przegubie plastycznym pokazano na rys. 6.26.



Rys. 6.26

Odległość pomiędzy środkami ciężkości figur o równych polach powierzchni przekroju poprzecznego:

$$s = \frac{t}{2} + 3t = 3,5t.$$

Wskaźnik plastyczny:

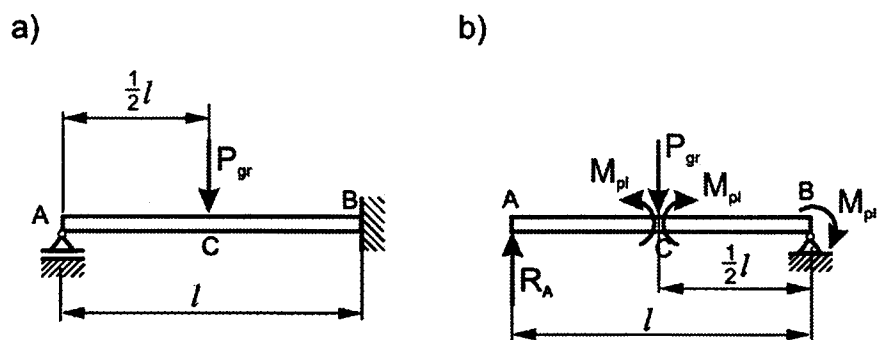
$$W_{pl} = \frac{A}{2} \cdot s = 6t^2 \cdot 3,5t = 21t^3.$$

Moment plastyczny:

$$M_{pl} = W_{pl} \cdot \sigma_{pl} = 21t^3 \sigma_{pl}.$$

Biorąc pod uwagę symetrię belki względem płaszczyzny przechodzącej przez punkt B i prostopadłej do osi belki, można dalej rozpatrywać połowę belki utwierdzonej w punkcie B (ugięcie i kąt ugięcia w punkcie B są równe zero) obciążonej siłą P_{gr} (rys. 6.27a).

Belka ta stanie się mechanizmem, gdy w punktach B i C powstaną przeguby plastyczne. Na rys. 6.27b pokazano momenty plastyczne M_{pl} po utworzeniu się przegubów plastycznych.



Rys. 6.27

Suma momentów sił działających na belkę AB względem punktu B:

$$R_A \cdot l - P_{gr} \cdot \frac{l}{2} - M_{pl} + M_{pl} + M_{pl} = 0.$$

Suma momentów sił działających na element AC belki względem punktu C:

$$R_A \cdot \frac{l}{2} - M_{pl} = 0.$$

Z ostatnich dwóch równań wyznaczono:

$$R_A = \frac{2M_{pl}}{l},$$

$$\begin{aligned} P_{gr} &= \frac{2}{l}(M_{pl} + R_A \cdot l) = \frac{2}{l}(M_{pl} + 2M_{pl}) = \frac{6M_{pl}}{l} = \frac{6W_{pl}\sigma_{pl}}{l} = \frac{6 \cdot 21t^3 \sigma_{pl}}{l} = \\ &= \frac{6 \cdot 21 \cdot 20^3 \cdot 250}{1000} = 252000\text{N} = 252 \text{ kN}. \end{aligned}$$

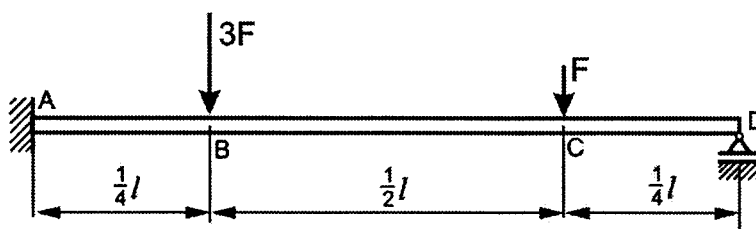
Siła dopuszczalna:

$$P_{dop} = \frac{P_{gr}}{n},$$

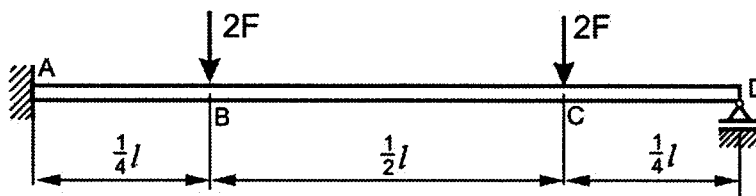
gdzie n jest współczynnikiem bezpieczeństwa.

Zadanie 6.15. Belka jednoprzęsłowa statycznie niewyznaczalna ma być obciążona dwiema siłami pionowymi o łącznej wartości $4F$ przyłożonymi w punktach B i C (rys. 6.28). Wyznaczyć, dla którego z trzech podanych przypadków obciążenie graniczne będzie największe. Zadanie rozwiązać metodą kinematyczną. Dane: $M_{pl} = W_{pl} \cdot \sigma_{pl}$ oraz l .

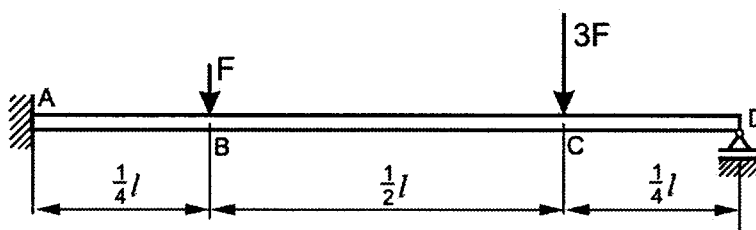
a) przypadek I obciążenia



b) przypadek II obciążenia



c) przypadek III obciążenia



Rys. 6.28

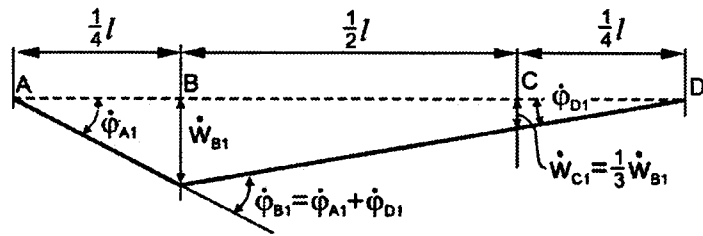
Rozwiązanie. Dla belki jednokrotnie statycznie niewyznaczonej liczba przegubów plastycznych umożliwiających przekształcenie belki w mechanizm wynosi 2. Dla rozpatrywanego obciążenia zewnętrznego musimy rozważyć dwa kinematycznie dopuszczalne mechanizmy zniszczenia pokazane na rys. 6.29.

Z rys. 6.29 wynika, że:

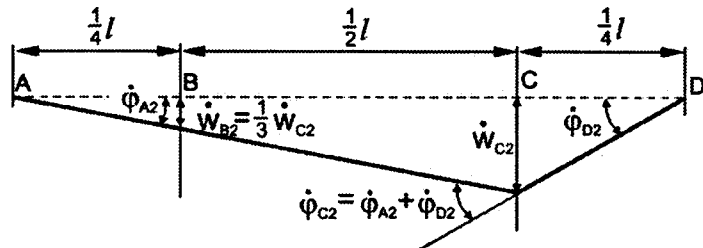
$$\dot{\varphi}_{A_1} = \frac{4 \dot{w}_{B_1}}{l}, \quad \dot{\varphi}_{D_1} = \frac{4 \dot{w}_{B_1}}{3l}, \quad \dot{\varphi}_{B_1} = \dot{\varphi}_{A_1} + \dot{\varphi}_{D_1} = \frac{16 \dot{w}_{B_1}}{3l},$$

$$\dot{\varphi}_{A_2} = \frac{4 \dot{w}_{C_2}}{3l}, \quad \dot{\varphi}_{D_2} = \frac{4 \dot{w}_{C_2}}{l}, \quad \dot{\varphi}_{C_2} = \dot{\varphi}_{A_2} + \dot{\varphi}_{D_2} = \frac{16 \dot{w}_{C_2}}{3l}.$$

a) mechanizm zniszczenia 1



b) mechanizm zniszczenia 2



Rys. 6.29

Moc obciążeń zewnętrznych \dot{L} na prędkościach przemieszczeń przygotowanych dla trzech rozpatrywanych przypadków obciążenia wynosi:

- dla pierwszego mechanizmu zniszczenia:

$$\dot{L}_{1I} = 3F \cdot \dot{w}_{B_1} + F \cdot \dot{w}_{C_1} = 3F \cdot \dot{w}_{B_1} + F \cdot \frac{1}{3} \dot{w}_{B_1} = \frac{10}{3} F \dot{w}_{B_1},$$

$$\dot{L}_{1II} = 2F \cdot \dot{w}_{B_1} + 2F \cdot \dot{w}_{C_1} = 2F \left(\dot{w}_{B_1} + \frac{1}{3} \dot{w}_{B_1} \right) = \frac{8}{3} F \dot{w}_{B_1},$$

$$\dot{L}_{1III} = F \cdot \dot{w}_{B_1} + 3F \cdot \dot{w}_{C_1} = F \cdot \dot{w}_{B_1} + 3F \cdot \frac{1}{3} \dot{w}_{B_1} = 2F \dot{w}_{B_1},$$

- dla drugiego mechanizmu zniszczenia:

$$\dot{L}_{2I} = 3F \cdot \dot{w}_{B_2} + F \cdot \dot{w}_{C_2} = 3F \cdot \frac{1}{3} \dot{w}_{C_2} + F \cdot \dot{w}_{C_2} = 2F \dot{w}_{C_2},$$

$$\dot{L}_{2II} = 2F \cdot \dot{w}_{B_2} + 2F \cdot \dot{w}_{C_2} = 2F \left(\frac{1}{3} \dot{w}_{C_2} + \dot{w}_{C_2} \right) = \frac{8}{3} F \dot{w}_{C_2},$$

$$\dot{L}_{2III} = F \cdot \dot{w}_{B_2} + 3F \cdot \dot{w}_{C_2} = F \cdot \frac{1}{3} \dot{w}_{C_2} + 3F \cdot \dot{w}_{C_2} = \frac{10}{3} F \dot{w}_{C_2},$$

Moc sił wewnętrznych (momentów granicznych) na prędkościach obrotów kątowych w przegubach wynosi:

- dla pierwszego mechanizmu zniszczenia:

$$\dot{D}_1 = M_{pl} \cdot \dot{\phi}_{A_1} + M_{pl} \cdot \dot{\phi}_{B_1} = M_{pl} \left(\frac{4 \dot{\omega}_{B_1}}{l} + \frac{16 \dot{\omega}_{B_1}}{3l} \right) = \frac{28}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{B_1}}{l},$$

- dla drugiego mechanizmu zniszczenia:

$$\dot{D}_2 = M_{pl} \cdot \dot{\phi}_{A_2} + M_{pl} \cdot \dot{\phi}_{C_2} = M_{pl} \left(\frac{4 \dot{\omega}_{B_1}}{3l} + \frac{16 \dot{\omega}_{C_2}}{3l} \right) = \frac{20}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{C_2}}{l}.$$

Z bilansu mocy $\dot{L} = \dot{D}$ otrzymano:

- dla pierwszego przypadku obciążenia:

$$\dot{L}_{1I} = \dot{D}_1, \quad \frac{10}{3} F_{1I} \dot{\omega}_{B_1} = \frac{28}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{B_1}}{l}, \quad F_{1I} = 2,8 \frac{M_{pl}}{l},$$

$$\dot{L}_{2I} = \dot{D}_2, \quad 2 F_{2I} \dot{\omega}_{C_2} = \frac{20}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{C_2}}{l}, \quad F_{2I} = 3,33 \frac{M_{pl}}{l},$$

- dla drugiego przypadku obciążenia:

$$\dot{L}_{1II} = \dot{D}_1, \quad \frac{8}{3} F_{1II} \dot{\omega}_{B_1} = \frac{28}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{B_1}}{l}, \quad F_{1II} = 3,5 \frac{M_{pl}}{l},$$

$$\dot{L}_{2II} = \dot{D}_2, \quad \frac{8}{3} F_{2II} \dot{\omega}_{C_2} = \frac{20}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{C_2}}{l}, \quad F_{2II} = 2,5 \frac{M_{pl}}{l},$$

- dla trzeciego przypadku obciążenia:

$$\dot{L}_{1III} = \dot{D}_1, \quad 2 F_{1III} \dot{\omega}_{B_1} = \frac{28}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{B_1}}{l}, \quad F_{1III} = 4,67 \frac{M_{pl}}{l},$$

$$\dot{L}_{2III} = \dot{D}_2, \quad \frac{10}{3} F_{2III} \dot{\omega}_{C_2} = \frac{20}{3} M_{pl} \frac{\dot{\omega}_{C_2}}{l}, \quad F_{2III} = 2 \frac{M_{pl}}{l}.$$

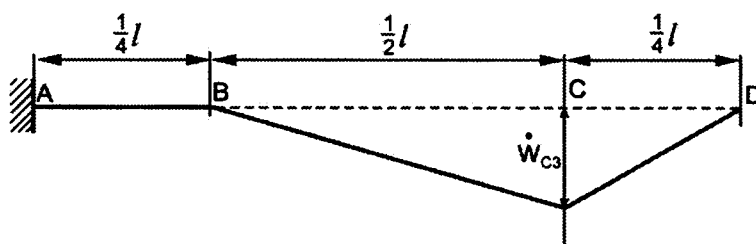
Siłą graniczną dla każdego z rozpatrywanych przypadków jest mniejsza z wyznaczonych dwóch sił, a zatem:

$$F_{I\ gr} = 2,8 \frac{M_{pl}}{l},$$

$$F_{II\ gr} = 2,5 \frac{M_{pl}}{l},$$

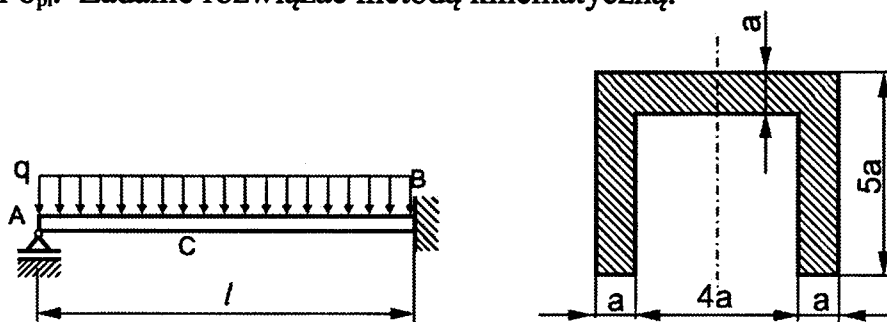
$$F_{III\ gr} = 2,0 \frac{M_{pl}}{l}.$$

Największe obciążenie graniczne uzyskuje się przy obciążeniu belki według schematu I na rys. 6.28a, tzn. gdy w punkcie B działa siła graniczna $3F_{I\text{gr}}$, a w punkcie C siła $F_{I\text{gr}}$. W rozwiązaniu zadania nie rozpatrzono mechanizmu zniszczenia przedstawionego na rys. 6.30, gdyż przy zadanym obciążeniu nie może on wystąpić.



Rys. 6.30

Zadanie 6.16. Dla belki pokazanej na rys. 6.31 wyznaczyć graniczną wartość obciążenia q_{gr} . Dane są: długość belki l , parametr przekroju poprzecznego a oraz granica plastyczności σ_{pl} . Zadanie rozwiązać metodą kinematyczną.



Rys. 6.31

R o z w i ą z a n i e . Pole powierzchni przekroju poprzecznego belki:

$$A = 6a \cdot a + 2 \cdot 4a \cdot a = 14a^2.$$

Podział przekroju poprzecznego na dwie części o równych polach powierzchni pokazano na rys. 6.32.

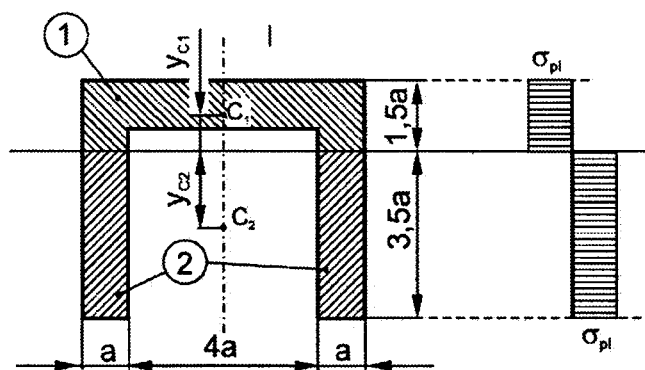
Obliczenie położenia środków ciężkości dla figur 1 i 2:

$$y_{C1} = \frac{2 \cdot 1,5a \cdot a \cdot 0,75a + 4a \cdot a \cdot a}{2 \cdot 1,5a \cdot a + 4a \cdot a} = \frac{6,25a^3}{7a^2} \approx 0,89a,$$

$$|y_{C2}| = \frac{1}{2} \cdot 3,5a = 1,75a.$$

Odległość między środkami ciężkości:

$$s = y_{C1} + |y_{C2}| = 0,89a + 1,75a = 2,64a.$$



Rys. 6.32

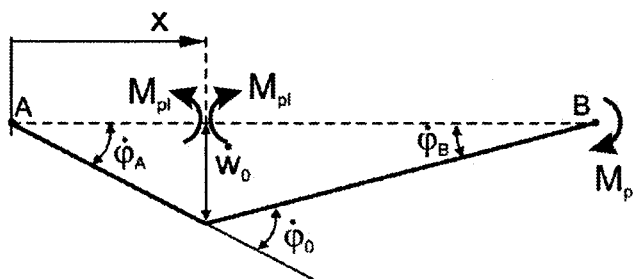
Wskaźnik plastyczny belki na zginanie:

$$W_{pl} = \frac{A}{2} \cdot s = 7a^2 \cdot 2,64a \approx 18,5a^3.$$

Moment plastyczny:

$$M_{pl} = W_{pl} \cdot \sigma_{pl} = W_{pl} \cdot R_e = 18,5a^3 \cdot \sigma_{pl}.$$

Belka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna, więc przekształcenie jej w mechanizm wymaga powstania dwóch przegubów plastycznych. Jeden z przegubów powstanie w utwierdzeniu (punkt B), natomiast położenie drugiego przegubu plastycznego przyjmuje się w odległości x od punktu A (rys. 6.33). Na rys. 6.33 przedstawiono kinematyczny mechanizm zniszczenia.



Rys. 6.33

Moc obciążenia zewnętrznego \dot{L} :

$$\dot{L} = \int_0^l q \cdot \dot{w}_0 \cdot dx = \frac{1}{2} ql \cdot \dot{w}_0,$$

Moc sił wewnętrznych (momentów plastycznych):

$$\dot{D} = M_{pl} \cdot \dot{\varphi}_B + M_{pl} \cdot \dot{\varphi}_0,$$

gdzie:

$$\dot{\varphi}_B = \frac{\dot{w}_0}{l-x}, \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_A + \dot{\varphi}_B = \frac{\dot{w}_0}{x} + \frac{\dot{w}_0}{l-x}.$$

Po podstawieniu otrzymano:

$$\dot{D} = M_{pl} \left(\frac{2 \dot{w}_0}{l-x} + \frac{\dot{w}_0}{x} \right) = M_{pl} \cdot \dot{w}_0 \frac{2x+l-x}{(l-x)x} = M_{pl} \cdot \dot{w}_0 \frac{l+x}{(l-x)x}.$$

Z bilansu mocy otrzymano:

$$\frac{1}{2} q l \cdot \dot{w}_0 = M_{pl} \cdot \dot{w}_0 \frac{l+x}{(l-x)x},$$

$$q = \frac{2 M_{pl}}{l} \frac{l+x}{(l-x)x}.$$

Parametr x określający położenie przegubu plastycznego wyznacza się z warunku minimum obciążenia granicznego:

$$\frac{dq}{dx} = 0.$$

Obliczenie pochodnej:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{2 M_{pl}}{l} \cdot \frac{1 \cdot (l-x)x - (l-2x)(l+x)}{(l-x)^2 x^2} = \frac{2 M_{pl}}{l} \cdot \frac{x^2 + 2lx - l^2}{(l-x)^2 x^2}.$$

Z warunku minimum obciążenia granicznego:

$$\frac{2 M_{pl}}{l} \cdot \frac{x^2 + 2lx - l^2}{(l-x)^2 x^2} = 0,$$

otrzymano równanie kwadratowe:

$$x^2 + 2lx - l^2 = 0,$$

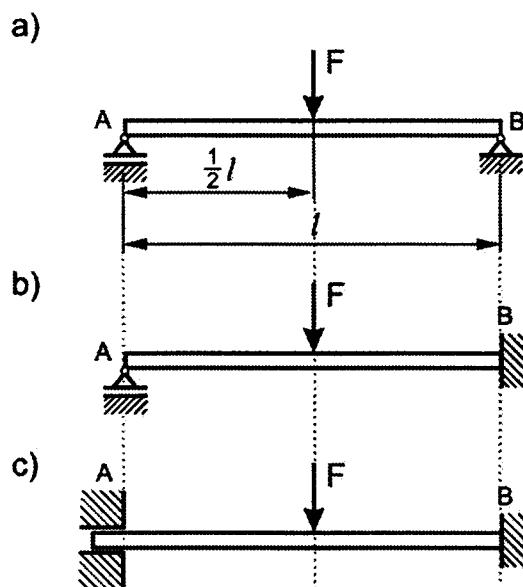
którego rozwiązanie dla $0 \leq x \leq l$ wynosi:

$$x = (\sqrt{2} - 1)l = 0,41l.$$

Po podstawieniu wyznaczonej wartości x do wyrażenia na q otrzymano:

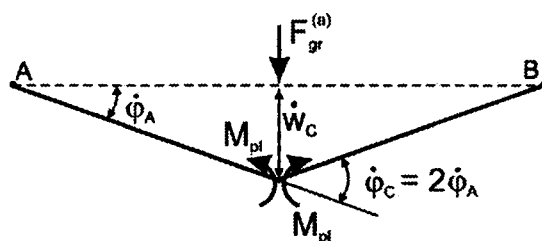
$$q_{gr} = 11,66 \frac{M_{pl}}{l^2} = 11,66 \frac{18,5 a^3 \sigma_{pl}}{l^2} = 215,7 \frac{a^3 \sigma_{pl}}{l^2}.$$

Zadanie 6.17. Obliczyć graniczną wartość siły F_{gr} dla trzech belek o tej samej długości l i takim samym przekroju poprzecznym (o wskaźniku plastycznym W_{pl}) przy różnych warunkach podparcia pokazanych na rys. 6.34. Granica plastyczności materiału belki - σ_{pl} .



Rys. 6.34

R o z w i ą z a n i e . Belka (a) jest statycznie wyznaczalna. Jeden przegub plastyczny pod siłą F (rys. 6.35) przekształca belkę w mechanizm.



Rys. 6.35

Moment plastyczny:

$$M_{pl} = M_{pl} \cdot \sigma_{pl} \cdot$$

Moc obciążenia zewnętrznego:

$$\dot{L}_a = F_{gr}^{(a)} \cdot \dot{w}_C.$$

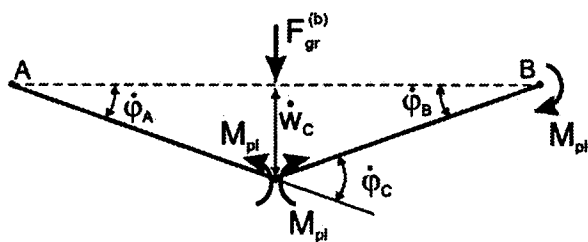
Moc sił wewnętrznych:

$$\dot{D}_a = M_{pl} \cdot \dot{\phi}_C = M_{pl} \cdot 2\dot{\phi}_A = M_{pl} \cdot 2 \frac{2\dot{w}_C}{l} = 4 \frac{M_{pl}}{l} \dot{w}_C.$$

Z bilansu mocy:

$$F_{gr}^{(a)} = 4 \frac{M_{pl}}{l} = \frac{4 W_{pl} \sigma_{pl}}{l}.$$

Belka (b) jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Aby stała się mechanizmem, muszą powstać dwa przeguby plastyczne – w utwierdzeniu i pod siłą F . Mechanizm plastyczny pokazano na rys. 6.36.



Rys. 6.36

$$\dot{\phi}_A = \dot{\phi}_B = \frac{2\dot{w}_C}{l},$$

$$\dot{\phi}_C = 2\dot{\phi}_A = \frac{4\dot{w}_C}{l}.$$

Moc obciążenia zewnętrznego:

$$\dot{L}_a = F_{gr}^{(b)} \cdot \dot{w}_C.$$

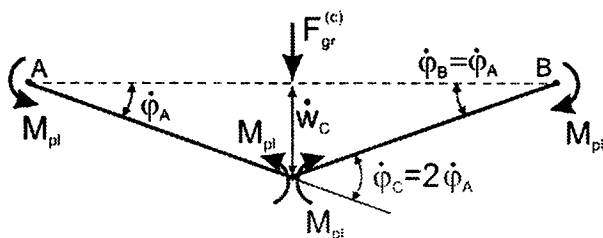
Moc sił wewnętrznych:

$$\dot{D}_a = M_{pl} \cdot \dot{\phi}_A + M_{pl} \cdot \dot{\phi}_C = 3M_{pl} \cdot \dot{\phi}_A = 6 \frac{M_{pl}}{l} \dot{w}_C.$$

Z bilansu mocy:

$$F_{gr}^{(b)} = 6 \frac{M_{pl}}{l} = \frac{6W_{pl}\sigma_{pl}}{l}.$$

Belka (c) jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalna. Aby stała się mechanizmem, muszą utworzyć się trzy przeguby plastyczne – dwa w utwierdzeniach i jeden pod siłą F . Mechanizm plastyczny z momentami plastycznymi pokazano na rys. 6.36.



Rys. 6.37

Moc obciążenia zewnętrznego:

$$\dot{L}_a = F_{gr}^{(c)} \cdot \dot{w}_C.$$

Moc sił wewnętrznych:

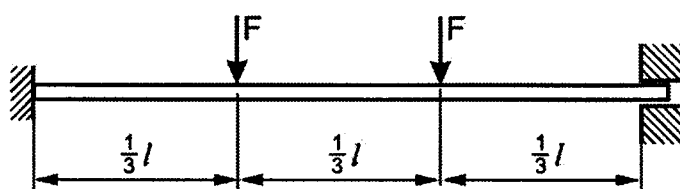
$$\dot{D}_a = M_{pl} \cdot \dot{\varphi}_A + M_{pl} \cdot \dot{\varphi}_C + M_{pl} \cdot \dot{\varphi}_B = M_{pl} \left(\frac{2\dot{w}_C}{l} + 2 \frac{2\dot{w}_C}{l} + \frac{2\dot{w}_C}{l} \right) = 8 \frac{M_{pl}}{l} \dot{w}_C.$$

Z bilansu mocy:

$$F_{gr}^{(c)} = 8 \frac{M_{pl}}{l} = \frac{8 W_{pl} \sigma_{pl}}{l}.$$

Największe obciążenie graniczne może przenieść belka utwierdzona na obu końcach.

Zadanie 6.18. Obliczyć graniczną obciążenie F_{gr} dla belki podpartej i obciążonej jak pokazano na rys. 6.38. Dane są: długość belki l , wskaźnik plastyczny W_{pl} i granica plastyczności materiału belki σ_{pl} .



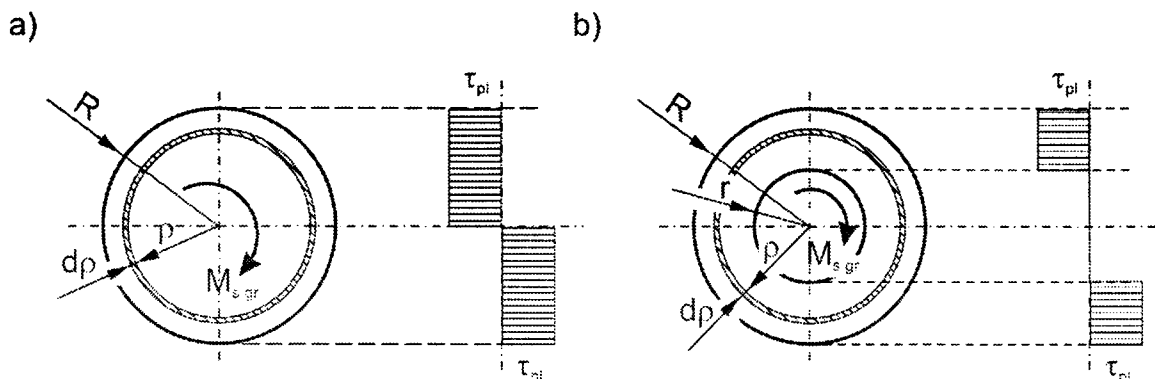
Rys. 6.38

ODPOWIEDŹ:

$$F_{gr} = 6 \frac{M_{pl}}{l} = \frac{6 W_{pl} \sigma_{pl}}{l}.$$

6.5.2. Nośność graniczna wałów skręcanych

Wyznaczanie nośności granicznej dla wałów skręcanych odbywa się w bardzo podobny sposób jak w przypadku zginania, jeżeli chodzi o wyznaczanie przegubów plastycznych. Nieco inaczej należy podejść do wyznaczenia wskaźnika plastycznego na skręcanie. Bardzo wygodna jest analogia Nadaia, zwana również analogią wzgórz piaskowych. Dla przekroju kołowego (rys. 6.39), pełnego i z otworem (drażonego), wskaźnik plastyczny na skręcanie można wyznaczyć z warunków równowagi.



Rys. 6.39

Warunek równowagi dla skręcania plastycznego ma postać:

$$M_s = \int_A \tau_{pl} \rho dA, \quad (6.23)$$

czyli:

$$M_s = \tau_{pl} \int_A \rho dA, \quad (6.24)$$

gdzie $\tau_{pl} = R_{es}$ jest granicą plastyczności na skręcanie.

Graniczny moment skręcający:

$$M_{sgr} = \tau_{pl} W_{pl} = R_{es} W_{pl} \quad (6.25)$$

Porównując równania (6.24) i (6.25) otrzymano wyrażenie na wskaźnik plastyczny przy skręcaniu:

$$W_{pl} = \int_A \rho dA, \quad (6.26)$$

który dla przekroju kołowego (rys. 6.39a) wynosi:

$$W_{pl} = \int_0^R \rho 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_0^R \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi R^3, \quad (6.27)$$

a dla przekroju kołowego z otworem o promieniu r (rys. 6.38b):

$$W_{pl} = \int_r^R \rho 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_r^R \rho^2 d\rho = \frac{2}{3}\pi (R^3 - r^3). \quad (6.28)$$

Plastyczny wskaźnik przekroju na skręcanie najłatwiej można wyznaczyć korzystając z analogii Nadaia, zgodnie z którą wskaźnik ten równy jest podwojonej objętości bryły powstałej poprzez nasypanie piasku na przekrój, jeżeli kąt u podstawy tej bryły wynosi 45° . Na rys. 6.40 pokazano przykładowe przekroje wraz z usypanymi wzgórzami piaskowymi.

Wykorzystując analogię wzgórza piaskowego, można obliczyć wskaźnik plastyczny na skręcanie dla:

- przekroju kołowego pełnego (rys. 6.40a):

$$W_{pl} = 2 \cdot V = 2 \cdot \frac{1}{3} A \cdot H = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = \frac{2}{3} \pi R^3, \quad (6.29)$$

- przekroju kołowego z otworem (rys. 6.40b) – objętość stożka ściętego o promieniu górnej podstawy równej promieniowi otworu:

$$W_{pl} = 2 \cdot V = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} A_1 \cdot H - \frac{1}{3} A_2 \cdot h \right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r \right) = \frac{2}{3} \pi (R^3 - r^3), \quad (6.30)$$

- wielokąta foremego (rys. 6.40c) – każdy taki wielokąt o n bokach można podzielić na n jednakowych trójkątów równoramiennych o wysokości h i podstawie a równej długości boku wielokąta:

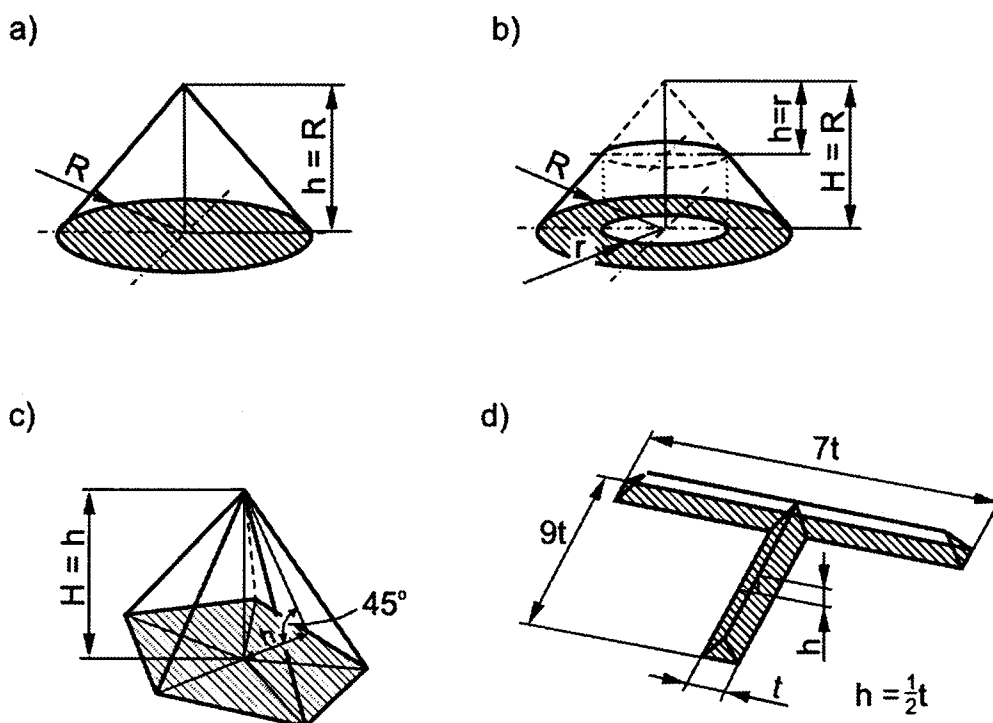
$$W_{pl} = 2 \cdot V = 2 \cdot \frac{1}{3} A \cdot H = 2 \cdot \frac{1}{3} n \frac{1}{2} ah \cdot h = \frac{1}{3} nah^2, \quad (6.31)$$

- przekroju teowego (rys. 6.40d) – przy założeniu, że teownik ma wysokość $9t$ i szerokość $7t$:

$$W_{pl} = 2 \cdot V = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} t \frac{t}{2} \cdot (6t + 7,5t) + 3 \cdot \frac{1}{3} \frac{t}{2} t \frac{t}{2} \right) = 7,25t^3, \quad (6.32)$$

natomiast dla przekrojów cienkościennych dających się podzielić na n prostokątów o wymiarach a_i na h_i uproszczony wzór ma postać:

$$W_{pl} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i^2. \quad (6.33)$$



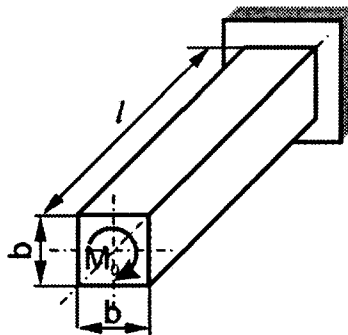
Rys. 6.40

Jeżeli wykorzystamy równanie (6.33) do wyznaczenia wskaźnika plastycznego dla teownika (rys. 6.40d) o wymiarach $9t$ – wysokość, $7t$ – szerokość i t – grubość półki, to:

$$W_{pl} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i h_i^2 = \frac{1}{2} (8t \cdot t^2 + 7t \cdot t^2) = 7,5t^3. \quad (6.34)$$

Porównując wyniki uzyskane ze wzoru dokładnego (6.32) i uproszczonego (6.34) dla teownika pokazanego na rys. 6.40d, stwierdza się, że wzór uproszczony zawżyła wartość wskaźnika plastycznego i w tym wypadku różnica wynosi około 3,5 %.

Zadanie 6.19. Obliczyć graniczny moment skręcający pręt wspornikowy o przekroju kwadratowym (rys. 6.41). Dane są: b – bok kwadratu będącego przekrojem pręta i τ_{pl} – granica plastyczności na skręcanie.

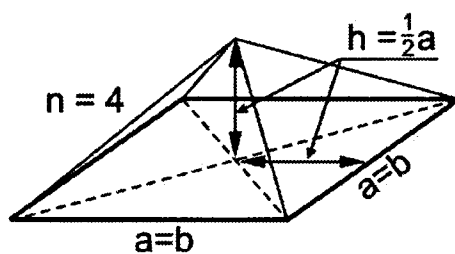


Rys. 6.41

Rozwiązanie. Zgodnie z analogią Nadaia wskaźnik plastyczny na skręcanie (równanie (6.31) i rys. 6.42) jest równy:

$$W_{pl} = 2 \cdot V = \frac{1}{3} n a h^2,$$

$$W_{pl} = \frac{1}{3} 4 b \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b^3.$$



Rys. 6.42

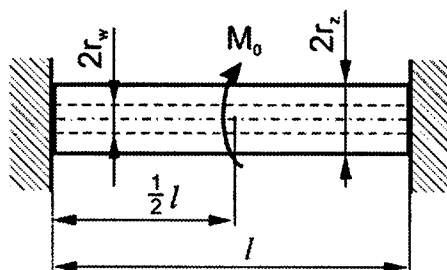
Moment plastyczny:

$$M_{pl} = W_{pl} \tau_{pl} = \frac{1}{3} b^3 \tau_{pl}.$$

Z równania równowagi względem osi pręta wynika, że:

$$M_{gr} = M_{pl} = \frac{b^3}{3} \tau_{pl}.$$

Zadanie 6.20. Wał drążony o promieniu zewnętrznym $r_z = R$ i promieniu wewnętrznym $r_w = \frac{1}{2}R$ utwierdzony jest na obu końcach i obciążony momentem skręcającym M_0 w środku długości (rys. 6.43). Dane: R , τ_{pl} .



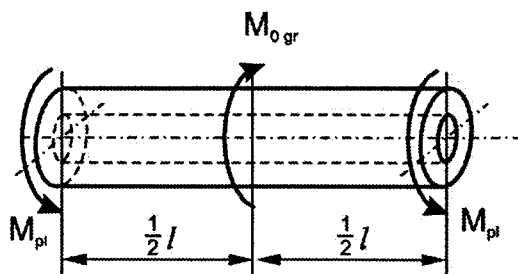
Rys. 6.43

Rozwiązanie. Zgodnie z analogią Nadaia do wyznaczenia wskaźnika plastycznego dla przekroju rozpatrywanego pręta można wykorzystać równanie (6.30):

$$W_{pl} = 2 \cdot V = \frac{2}{3} \pi (r_z^3 - r_w^3) = \frac{2}{3} \pi \left[R^3 - \left(\frac{R}{2} \right)^3 \right] = \frac{2}{3} \pi R^3 \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{12} \pi R^3.$$

Moment plastyczny:

$$M_{pl} = W_{pl} \tau_{pl} = \frac{7}{12} \pi R^3 \tau_{pl}.$$



Rys. 6.44

Zgodnie z rys. 6.44 graniczny moment skręcający wynosi:

$$M_{0gr} = 2 M_{pl} = \frac{7}{6} \pi R^3 \tau_{pl}.$$

6.6. Obciążenia udarowe

Do wyznaczenia stanu naprężeń i odkształceń w konstrukcjach obciążonych dynamicznie, gdy występujące przyspieszenia zachowują wartości stałe lub zmieniają się w sposób łagodny, można zastosować metody znane ze statyki. W praktyce wprowadza się współczynnik dynamiczny k_d , który definiuje się jako stosunek wielkości dynamicznej do odpowiadającej jej wielkości statycznej, np. strzałka ugięcia wywołana obciążeniem dynamicznym do strzałki ugięcia wywołanej obciążeniem statycznym. Współczynnika dynamicznego k_d używa się jako mnożnik wielkości statycznych w celu wyznaczenia obciążeń, naprężeń czy odkształceń dynamicznych. Taki współczynnik dynamiczny można wyznaczyć wykorzystując zasadę zachowania energii.

Uderzenie poosiowe w sprężystym pręcie

Dla przypadku, gdy masa m porusza się poziomo z prędkością v i uderza poosiowo w nieważki sprężysty pręt o sztywności:

$$K = \frac{EA}{l} \left[\frac{N}{m} \right], \quad (6.35)$$

możemy zapisać następujące równanie bilansu energetycznego:

$$E_k = U, \quad (6.36)$$

gdzie $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ jest energią kinetyczną poruszającej się masy, a $U = \frac{1}{2}Kf_d^2$ – energią potencjalną odkształconego układu.

Z równania (6.36) można łatwo wyznaczyć dynamiczną strzałkę ugięcia:

$$f_d = v \sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (6.37)$$

Siła dynamiczna powstała w wyniku uderzenia wynosi wówczas:

$$P_{max} = K \cdot f_d = v \sqrt{Km}. \quad (6.38)$$

Udarowe działanie siły w belkach zginanych

Inny przypadek, to gdy masa m poruszająca się pionowo w dół z prędkością v uderza w sprężystą poziomą belkę o sztywności $K = EI/l^3$. W takim przypadku w bilansie energetycznym należy również uwzględnić zmianę energii potencjalnej ciężaru mg na przesunięciu równym dynamicznej strzałce ugięcia f_d . Dla tego przypadku równanie (6.37) przyjmuje postać:

$$E_k + E_p = U, \quad (6.39)$$

które po podstawieniu odpowiednich wielkości i przekształceniach przyjmuje postać:

$$f_d^2 - 2 f_{st} f_d - 2 \frac{E_k}{K} = 0, \quad (6.40)$$

gdzie $f_{st} = mg/K$.

Rozwiązując równanie kwadratowe (6.40), można wyznaczyć dynamiczną strzałkę ugięcia:

$$f_d = f_{st} \left[1 + \sqrt{1 + 2 \frac{E_k}{K f_{st}^2}} \right]. \quad (6.41)$$

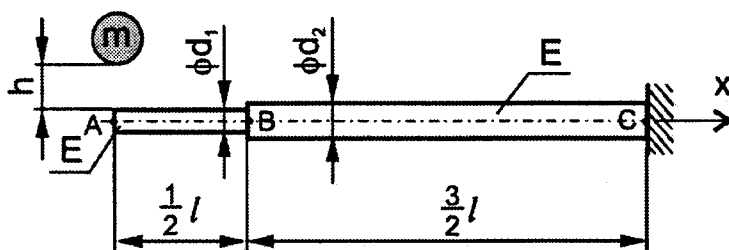
Wykorzystując powyższą zależność, współczynnik dynamiczny k_d w przypadku uderzenia pionowego wynosi:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{E_k}{K f_{st}^2}}. \quad (6.42)$$

Gdy rozpatrywać będziemy spadek swobodny masy m z wysokości h , to energia kinetyczna w równaniu (6.42) będzie równa dokładnie energii potencjalnej mgh . Wykorzystując powyższe w równaniu (6.42) oraz zależność $mg = K \cdot f_{st}$, otrzymano

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{f_{st}}}. \quad (6.43)$$

Zadanie 6.21. Na swobodny koniec belki wspornikowej o długości $2l$ spada z wysokości h masa m (rys. 6.45).



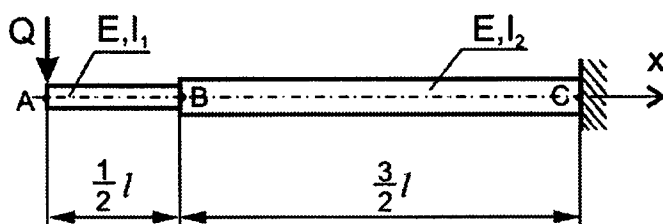
Rys. 6.45

Przekrój poprzeczny belki jest kołem o średnicy d_1 w przedziale $0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$ i kołem o średnicy d_2 w przedziale $\frac{1}{2}l \leq x \leq 2l$. Obliczyć maksymalne naprężenie dynamiczne, mając dane: $l = 1\text{ m}$, $m = 100\text{ kg}$, $h = 5\text{ cm}$, $g = 9,81\text{ m/s}^2$, $E = 2 \cdot 10^5\text{ MPa}$, $d_1 = 50\text{ mm}$, $d_2 = 65\text{ mm}$.

R o z w i ą z a n i e . Do obliczenia naprężenia dynamicznego potrzebna jest znajomość naprężenia statycznego oraz dynamicznego współczynnika określonego wzorem:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{f_{st}}},$$

w którym h jest wysokością, z jakiej spada masa m na belkę, natomiast f_{st} jest statycznym ugięciem belki obciążonej siłą statyczną $Q = mg$, przyłożoną w punkcie uderzenia masy m (rys. 6.46).



Rys. 6.46

Do dalszych obliczeń potrzebne będą wartości momentów bezwładności I_1 i I_2 przekrojów poprzecznych belki względem osi obojętnej zginania oraz wskaźniki wytrzymałości na zginanie W_1 i W_2 w przedziałach $0 \leq x \leq \frac{1}{2}l$ i $\frac{1}{2}l \leq x \leq 2l$:

$$I_1 = \frac{\pi d_1^4}{64} = \frac{\pi 50^4}{64} = 3,068 \cdot 10^5 \text{ mm}^4,$$

$$W_1 = \frac{\pi d_1^3}{32} = \frac{\pi 50^3}{32} = 1,227 \cdot 10^4 \text{ mm}^3,$$

$$I_2 = \frac{\pi d_2^4}{64} = \frac{\pi 68^4}{64} = 8,762 \cdot 10^5 \text{ mm}^4,$$

$$W_2 = \frac{\pi d_2^3}{32} = \frac{\pi 68^3}{32} = 2,696 \cdot 10^4 \text{ mm}^3.$$

Ugięcie statyczne f_{st} punktu A belki najłatwiej obliczyć stosując twierdzenie Castigliano:

$$f_{st} = \frac{\partial V}{\partial Q},$$

gdzie V jest energią zginania belki.

Moment gnący belkę w przekroju odległym o x od punktu A wynosi:

$$M_g(x) = -Q \cdot x,$$

a jego pochodna względem Q jest równa:

$$\frac{\partial M_g}{\partial Q} = -x.$$

Ugięcie statyczne punktu A belki:

$$\begin{aligned} f_{st} &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{(-Qx) \cdot (-x) dx}{EI_1} + \int_{\frac{l}{2}}^{2l} \frac{(-Qx) \cdot (-x) dx}{EI_2} = \\ &= \frac{Qx^3}{3EI_1} \Big|_0^{\frac{l}{2}} + \frac{Qx^3}{3EI_2} \Big|_{\frac{l}{2}}^{2l} = \frac{Ql^3}{24EI_1} + \frac{8Ql^3}{3EI_2} - \frac{Ql^3}{24EI_2} = \frac{Ql^3}{24EI_1} \left(1 + 63 \frac{I_1}{I_2} \right) = \\ &= \frac{mgl^3}{24EI_1} \left(1 + 63 \frac{I_1}{I_2} \right) = \frac{100 \cdot 9,81 \cdot 1000^3}{24 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 3,068 \cdot 10^5} \left(1 + 63 \frac{3,068 \cdot 10^5}{8,762 \cdot 10^5} \right) = \\ &= \frac{9,81 \cdot 10^{11}}{14,726 \cdot 10^{11}} (1 + 22,06) = 15,4 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Współczynnik dynamiczny wynosi:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{f_{st}}} = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{50}{15,4}} = 3,74.$$

Naprężenie statyczne maksymalne:

- w przekroju $x = \frac{1}{2} l$:

$$\sigma_{g1}^{st} = \frac{M_{g1}}{W_1} = \frac{Ql}{2W_1} = \frac{981 \cdot 1000}{2 \cdot 1,227 \cdot 10^4} = 40 \text{ MPa},$$

- w przekroju $x = 2l$:

$$\sigma_{g2}^{st} = \frac{M_{g2}}{W_2} = \frac{2Ql}{W_2} = \frac{2 \cdot 981 \cdot 1000}{2,696 \cdot 10^4} = 73 \text{ MPa}.$$

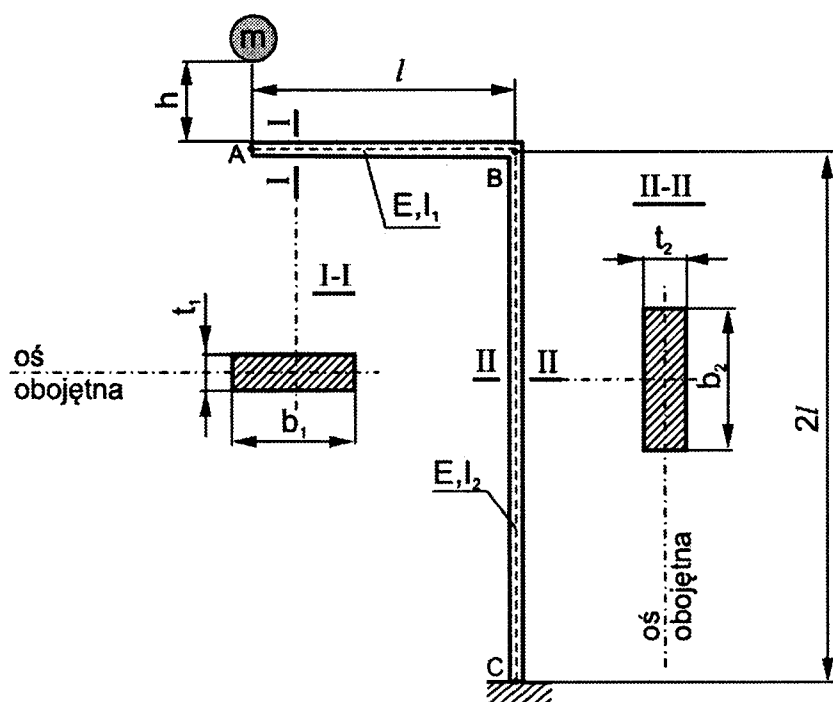
Maksymalne naprężenie dynamiczne występuje w przekroju $x = 2l$ i wynosi:

$$\sigma_{g2}^{dyn} = k_d \cdot \sigma_{g2}^{st} = 3,74 \cdot 73 = 273 \text{ MPa.}$$

Dynamiczna strzałka ugięcia belki:

$$f_d = k_d \cdot f_{st} = 3,74 \cdot 15,4 = 57,6 \text{ mm.}$$

Zadanie 6.22. Na swobodny koniec poziomego elementu ramy pokazanej na rys. 6.47 spada z wysokości $h = 5 \text{ cm}$ ciało o masie $m = 40,8 \text{ kg}$ z przyspieszeniem ziemskim $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Przekrój poprzeczny poziomego elementu ramy ma kształt prostokąta o wymiarach $b_1 \times t_1$, natomiast przekrój poprzeczny słupa ma kształt prostokąta o wymiarach $b_2 \times t_2$. Obliczyć maksymalne naprężenie dynamiczne, mając dane: $l = 1 \text{ m}$, $b_1 = 120 \text{ mm}$, $t_1 = 20 \text{ mm}$, $b_2 = 140 \text{ mm}$, $t_2 = 24 \text{ mm}$ oraz $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$.



Rys. 6.47

R o z w i ą z a n i e . Aby obliczyć współczynnik dynamiczny:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{h}{f_{st}}},$$

trzeba wyznaczyć statyczne ugięcie punktu A ramy wywołane pionową siłą $Q = mg$ skierowaną do dołu.

Do dalszych obliczeń potrzebne będą momenty bezwładności przekrojów poprzecznych elementów poziomego I_1 i pionowego I_2 oraz ich wskaźniki wytrzymałości na zginanie W_1 i W_2 :

$$I_1 = \frac{b_1 t_1^3}{12} = \frac{120 \cdot 20^3}{12} = 8 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

$$W_1 = \frac{b_1 t_1^2}{6} = \frac{120 \cdot 20^2}{6} = 8 \cdot 10^3 \text{ mm}^3,$$

$$I_2 = \frac{b_2 t_2^3}{12} = \frac{140 \cdot 24^3}{12} = 16,1 \cdot 10^4 \text{ mm}^4,$$

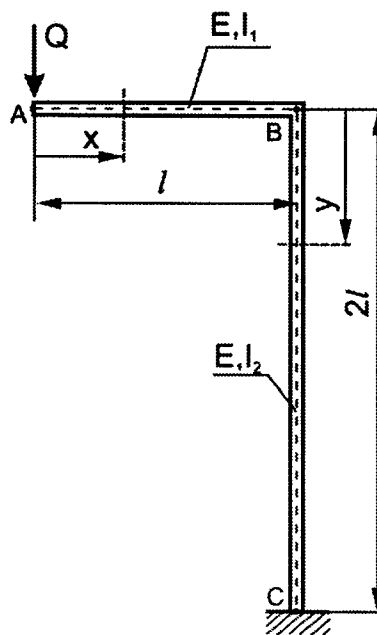
$$W_2 = \frac{b_2 t_2^2}{6} = \frac{140 \cdot 24^2}{6} = 13,4 \cdot 10^4 \text{ mm}^3.$$

Z twierdzenie Castigliano:

$$f_{st} = \frac{\partial V}{\partial Q},$$

gdzie V jest energią zginania belki określoną wzorem:

$$V = \int_l \frac{M_g^2 dx}{2EI}.$$



Rys. 6.48

Momenty gnące w elementach ramy, w przekrojach określonych współrzędnymi x i y , (rys. 6.48) opisane są wzorami:

$$M_{g1}(x) = -Q \cdot x,$$

$$M_{g2}(y) = -Ql.$$

Pochodne tych momentów względem siły Q są równe:

$$\frac{\partial M_{g1}}{\partial Q} = -x, \quad \frac{\partial M_{g2}}{\partial Q} = -l.$$

Ugięcie statyczne punktu A ramy:

$$\begin{aligned} f_{st} &= \int_0^l \frac{(-Qx) \cdot (-x) dx}{EI_1} + \int_0^{2l} \frac{(-Ql) \cdot (-l) dy}{EI_2} = \\ &= \frac{Qx^3}{3EI_1} \Big|_0^l + \frac{Ql^2}{EI_2} y \Big|_0^{2l} = \frac{Ql^3}{3EI_1} + \frac{2Ql^3}{EI_2} = \frac{Ql^3}{3EI_1} \left(1 + 6 \frac{I_1}{I_2} \right) = \frac{mgl^3}{3EI_1} \left(1 + 6 \frac{I_1}{I_2} \right). \end{aligned}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymano:

$$f_{st} = \frac{40,8 \cdot 9,81 \cdot 1000^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 8 \cdot 10^4} \left(1 + 6 \frac{8}{16,1} \right) = 33,2 \text{ mm.}$$

Współczynnik dynamiczny wynosi:

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{50}{33,2}} = 3.$$

Maksymalne naprężenie statyczne (rozciągające włókna górne i ściskające włókna dolne) występuje w elemencie poziomym tuż przy narożu ramy (dla $x = l$) i wynosi:

$$\sigma_{g1}^{st} = \pm \frac{Ql}{W_1} = \pm \frac{400 \cdot 1000}{8000} = \pm 50 \text{ MPa,}$$

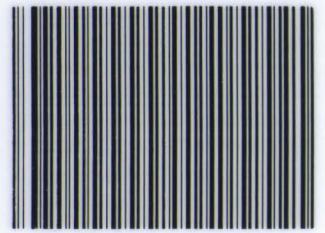
Maksymalne naprężenie dynamiczne:

$$\sigma_{g2}^{dyn} = k_d \cdot \sigma_{g2}^{st} = 3 \cdot 50 = \pm 150 \text{ MPa.}$$



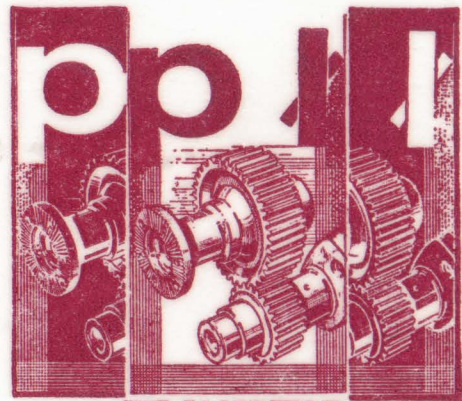
141943

Biblioteka Główna
PŁ



210000313904

141 943



EX LIBRIS

politechnika łódzka • łódź • biblioteka

ISBN 978-83-7283-374-7