# WPROWADZENIE DO METOD WARIACYJNYCH

Marek Galewski

75 LAT PŁ

Politechnika Łódzka
2020

# Wprowadzenie do Metod Wariacyjnych

Marek Galewski

Recenzent
**dr hab. Marek Majewski**



**WYDAWNICTWO POLITECHNIKI ŁÓDZKIEJ**
90-924 Łódź, ul. Wólczańska 223
tel. 42 631 20 87, 42 631 29 52
e-mail: zamowienia@info.p.lodz.pl
www.wydawnictwo.p.lodz.pl

ISBN 978-83-66287-37-2
**https://doi.org/10.34658/9788366287372**
DOI 10.34658/9788366287372

# Spis treści

**Wstęp** **4**

**1 Twierdzenie Weierstrassa-kamień węgielny optymalizacji** **6**

1.1 Wprowadzenie . . . . . 6

1.2 Półciągłość z dołu i twierdzenie Weierstrassa . . . . . 8

**2 Różniczkowanie w przestrzeniach nieskończonego wymiaru** **15**

2.1 Pierwsza wariacja Lagrange'a i reguła Fermata . . . . . 15

2.2 Pierwsza wariacja a wypukłość . . . . . 18

2.3 Pochodna Gâteaux . . . . . 19

2.4 Pochoda Fréchete'a . . . . . 24

**3 Zasada Wariacyjna Ekelanda** **30**

3.1 Podstawowe twierdzenie . . . . . 30

3.2 Warunek Palais-Smale'a i Zasada Wariacyjna Ekelanda . . . . . 32

3.3 Lemat o przełęczy górskiej . . . . . 35

3.4 Zastosowanie do odwracalności odwzorowań . . . . . 37

3.5 Zastosowanie twierdzenia o globalnym dyfeomorfizmie . . . . . 41

3.6 Zastosowania w równaniach algebraicznych . . . . . 44

**4 Jeszcze o wypułości i pojęciach związanych** **47**

4.1 Wypukłość a argumenty minimum . . . . . 47

4.2 Wariacja drugiego rzędu i istnienie argumentu minimum . . . . . 53

**5 Twierdzenie Weierstrassa w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych** **56**

5.1 O zbieżności słabej . . . . . 57

5.2 Bezpośrednia metoda rachunku wariacyjnego . . . . . 62

5.3 Przestrzenie funkcyjne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
5.4 Lemat Lagrange'a i du Bois-Reymonda . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 70
5.5 Minimalizacja klasycznego funkcjonału działania Eulera . . . . . . . . 73
5.6 Zastosowanie do zadań sterowania optymalnego . . . . . . . . . . . . . 76

**6 Zagadnienie brzegowe drugiego rzędu typu Dirichleta 79**
6.1 Zastosowanie bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego . . . . . . 80
6.2 Zastosowanie twierdzenia o przełęczy górskiej . . . . . . . . . . . . . . 87
6.3 Rozwiązania dodatnie . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 93
6.4 Inne spojrzenie na bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego . . . 95

**7 Zależność od parametru 102**
7.1 Sformułowanie zagadnienia Dirichleta i założenia . . . . . . . . . . . . 102
7.2 Rozwiązywalność zadania Dirichleta przy ustalonym parametrze . . . 104
7.3 Zależność rozwiązania zagadnienia Dirichlete'a od parametru . . . . . 108

**Uwagi bibliograficzne 111**

**Bibliografia 112**

**Index 114**

# Wstęp

Przedkładany Czytelnikowi podręcznik w jakiejś mierze stanowi odzwierciedlenie wykładów z rachunku wariacyjnego (w ujęciu optymalizacyjnym), które prowadziłem od roku 2012 w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej, najczęściej dla studentów wybierających indywidualny progam studiów. Notatki do wykładów istniały już wcześniej w różnej postaci i postanowiłem je połączyć w pewną całość. Mam świadomość, iż wprowadzane przeze mnie podejście nie jest nowatorskie, ale wyraźny brak w polskiej literaturze podręczników nowocześnie ujmujących wstępne idee rachunku wariacyjnego budzi nadzieje, iż niniejsze opracowanie zostanie choćby w ograniczonym zakresie wykorzystane.

Wymagamy od Czytelnika znajomości podstaw analizy funkcjonalej, podstaw rachunku różniczkowego funkcji jednej i wielu zmiennych oraz elementarnego kursu teorii miary i całki. Niewielką część materiału pomocniczego zamieściłem w tekście, ale oczywiście nie wszystko. Czytelnik zechce skorzystać z załączonego spisu bibliograficznego, na którym wzorowałem się pisząc ten tekst.

Zawsze inaczej się pisze i inaczej mówi. Starałem się zachować pisząc pewne intuicyjne podejście wykładu, ale jednocześnie musiałem pamiętać o konieczności zachowania matematycznego formalizmu.

Podręcznik powstał w oparciu o źródła bibliograficzne, z których czerpałem z różną intensywnością, korzystając zarówno z idei, naprowadzeń, jak i z pojęć, twierdzeń i dowodów. Na koniec przedkładam Czytelnikowi listę pozycji, z których korzystałem.

Pierwszą wersję tekstu w okrojonej postaci spisał mój ówczesny student, a późniejszy doktorant, dr Piotr Kowalski. Składam mu za tę pracę serdecznie podziękowania. Na tym gruncie postanowiłem nadbudować materiał, który

przedkładam Czytelnikowi. Podziękowania należą się również wielu Studentom cierpliwie słuchającym wykładu. Mam nadzieję, iż forma spisana będzie również przydatna. W składaniu tekstu do druku otrzymałem wsparcie od Michała Bełdzińskiego.

Chciałbym również podziękować Recenzentowi, Profesorowi Markowi Majewskiemu, za wiele cennych uwag, pozwalających ulepszyć tekst i usunąć liczne niedociągnięcia.

ROZDZIAŁ 1

# Twierdzenie Weierstrassa-kamień węgielny optymalizacji

## 1.1. Wprowadzenie

Niech $E$ będzie rzeczywistą i refleksywną przestrzenią Banacha, $E^*$ niech oznacza jak zwykle przestrzeń do niej sprzężoną, czyli przestrzeń funkcjonałów liniowych i ciągłych na $E$ o wartościach w $\mathbb{R}$. Funkcjonałem nazywać będziemy odwzorowanie określone na przestrzeni $E$ o wartościach w zbiorze $\mathbb{R}$. Głównym zagadnieniem rachunku wariacyjnego jest znajdowanie punktów krytycznych funkcjonałów energii $F : E \to \mathbb{R}$, przy założeniu, że są one różniczkowalne (sens różniczkowalności w przestrzeniach nieskończonego wymiaru doprecyzujemy później). Niech $\frac{d}{dx}F = f$. Wiedząc, iż punkt krytyczny istnieje, uzyskujemy informację, iż równanie

$$f(x) = 0, \tag{1.1}$$

rozumiane jako przyrównane do zera pochodnej $f : E \to E^*$, posiada rozwiązanie. Z kursu analizy wiemy, że jeżeli funkcja różniczkowalna posiada minimum, to znadziemy je badając punkty krytyczne. Zatem, aby znaleźć rozwiązanie równania (1.1) będziemy mieli na myśli znalezienie argumentu minimum funkcjonału $F$.

Przez argument minimum funkcjonału $J : E \to \mathbb{R}$ rozumiemy taki punkt $x_0 \in X$, że

$$J(x) \geq J(x_0) \text{ dla wszystkich } x \in E.$$

Argumentów minimum funkcjonał może mieć nieskończenie wiele, jak choćby funkcja sinus. Poza minimami globalnymi, czyli poszukiwanymi na całej przestrzeni $E$, są również minima lokalne, czyli takie, że istnieje otoczenie $U$ punktu $x_0$ na którym $J(x) \geq J(x_0)$. Jeśli dziedzinę funkcjonału $J$ ograniczymy do pewnego podzbioru $D \subset E$, to wówczas powyższe określenia ulegają naturalnej zmianie; w przypadku minimum lokalnego trzeba zbiór $D$ przeciąć z $U$.

Skoncentrujemy się raczej na metodach pozwalających na badanie istnienia mimimów funkcjonałów, niż na sposobach ich wyznaczania. Przez sposoby wyznaczania nie zawsze rozumiemy znalezienie dokładnej wartości argumentu minimum. Miejmy na uwadze przykład funkcji kwadratowej

$$f(x) = \frac{e}{2}x^2 - \pi,$$

która z oczywistych powodów ma dokładnie jeden argument minimum $x_0 = \frac{\pi}{e}$. Czy możemy powiedzieć, że znamy jego wartość? Jedynie wiemy tyle, że znamy ją z pewną dokładnością, że jest dodatnia, że niewielkie zaburzenie $\pi$ w nieznaczny sposób zmieni wartość argumentu minimum. Zatem znaczenie słowa „rozwiązać" nie zawsze oznacza: wyznaczyć dokładną wartość. Często udaje się stwierdzić, iż rozwiązanie jest dodatnie, oddalone od zera o co najmniej pewną wartość, jest wrażliwe na małe zmiany parametrów (czyli innymi słowy zależy w sposób ciągły od parametru) i jest wyznaczone w sposób jednoznaczny.

Punktem wyjścia jest dla nas dobrze znane twierdzenie Weierstrassa i jego liczne uogólnienia i konsekwencje. Aby nabrać pewnych intuicji potrzebnych do zrozumienia przypadku, gdy $E$ jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, rozpoczniemy nasze rozważania od badań dotyczących funkcjonałów określonych na $\mathbb{R}^n$. Już sama analiza dowodu twierdzenia Weierstrassa o kresach funkcji ciągłej na zbiorze domkniętym i ograniczonym pokazuje, że wymaganie ciągłości minimalizowanej funkcji wydaje się być zbyt mocnym. Pokazuje to też następujący przykład funkcji nieciągłej

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \cup (0,1], \\ -1, & x = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

którą ma minimum na $[-1,1]$ osiągnięte w $x_0 = 0$. Funkcja ta ma jednak pewną inną własność ciągłości, zwaną półciągłością z dołu. Potrzebne definicje podamy od razu na przestrzeni Banacha $E$, tak by w przypadku nieskończenie wymiarowym nie formułować ich ponownie. Brzmią one tak samo w obu przypadkach, zbieżność, którą rozważamy to zbieżność silna, czyli w sensie normy danej przestrzeni (dla prostej rzeczywistej będzie to zwykła zbieżność, dla przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zbieżność po współrzędnych).

## 1.2. Półciągłość z dołu i twierdzenie Weierstrassa

Jak już wspomnieliśmy we wstępie, żądanie aby funkcja minimalizowana była ciągła jest zbyt silne. Można je zastąpić słabszym klasycznym pojęciem półciągłości z dołu:

**Definicja 1.2.1** (Półciągłość z dołu). *Funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ nazywamy półciągłym z dołu na E wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x_0 \in E$*

$$\liminf_{x\to x_0} f(x) \geq f(x_0) \tag{1.3}$$

*gdzie* (1.3) *rozumiemy w sposób następujący:*

$$\forall_{\varepsilon>0}\exists_{\delta>0}\forall_{x\in E} 0 < \|x - x_0\| < \delta \implies f(x) + \varepsilon \geq f(x_0)$$

Jeśli relacja (1.3) zachodzi jedynie w punkcie $x_0$, to mówimy o półciągłości z dołu w tym punkcie.

Każdy funkcjonał ciągły jest oczywiście półciągły z dołu.

Suma funkcjonału ciągłego $g : E \to \mathbb{R}$ i półciągłego z dołu $f : E \to \mathbb{R}$ jest półciągła z dołu, gdyż

$$\liminf_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_0} g(x) + \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Jeśli $g$ byłby półciągły z dołu, to powyższa teza jest również utrzymana, gdyż wtedy

$$\liminf_{x\to x_0}(f(x) + g(x)) \geq \liminf_{x\to x_0} g(x) + \liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Funkcja dana wzorem (1.2) dostarcza przykładu półciągłej z dołu i nieciągłej funkcji. Badanie półciągłości z dołu jest nieco trudniejsze niż badanie ciągłości. Niemniej jednak mamy następujący:

**Lemat 1.2.2** (domkniętość zbiorów poziomicowych a półciągłość z dołu)**.** *Funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ jest półciągły z dołu wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiór*

$$f^{\alpha} = \{x \in E : f(x) \le \alpha\}$$

*(o ile niepusty) jest domknięty.*

**Dowód.** Założmy, że $f : E \to \mathbb{R}$ jest półciągły z dołu i weźmy ciąg $(x_n) \subset f^{\alpha}$ zbieżny w $E$ do pewnego $x_0$ (tzn. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$). Zatem mamy

$$f(x_0) \le \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \le \alpha.$$

Czyli $f^{\alpha}$ jest domknięty.

Załóżmy, że $f^{\alpha}$ jest domknięty dla każdego $\alpha$. Przypuścmy, że $f$ nie jest półciągły z dołu w pewnym $x_0 \in E$. Czyli istnieje ciąg $(x_n) \subset E$ zbieżny w $E$ do $x_0 \in E$ i taki, że

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < f(x_0).$$

Istnieje taka liczba $\alpha \in \mathbb{R}$, że

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) < \alpha < f(x_0)$$

Skoro $(x_n)$ jest zbieżny, to ma podciąg zawarty w $f^{\alpha}$ zbieżnydo tego samego elementu $x_0$. Z domkniętości $f^{\alpha}$ mamy $f(x_0) \le \alpha$, czyli sprzeczność. ∎

Łatwo sprawdzić przy pomocy powyższego lematu, iż funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1,0) \cup (0,1], \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

nie jest półciagła z dołu (można zauważyć, iż ponadto nie ma ona argumentu minimum). Wystarczy wziąć $\alpha = 1$. Nie należy jednak sądzić, iż funkcje, które nie są półciągłe z dołu nie będą miały argumentów minimów. Znów wystarczy rozważyć prosty przykład

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right], \\ \\ +2, & x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

funkcji nie będącej półciągłą z dołu, ale mającej argument minimum $x_0 = 0$.

Sformułowanie twierdzenia Weierstrassa poprzedzimy jeszcze istotnym dla nas dalej pojęciem *ciągu minimalizującego*. Załóżmy, że $D \subseteq E$ oraz, że $f : D \to \mathbb{R}$ jest ograniczona z dołu (na $D$). Wtedy $f$ ma kres dolny na $D$. Przypomnijmy, że

$$a := \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} \forall_{x \in A} \quad a \leq x \\ \\ \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{x \in A} \quad x \leq a + \varepsilon \end{cases}$$

Kładąc powyżej $a = \inf_{x \in D} f(x)$, $\varepsilon := \frac{1}{n}$ otrzymujemy istnienie ciągu $(x_n) \subset D$ takiego, że

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \inf_{x \in D} f(x)$$

Ciąg ten, nazywamy ciągiem minimalizującym. Ciąg taki zawsze istnieje dla funkcjonału ograniczonego od dołu, ale nie musi być zbieżny Warto podkreślić również, iż istnienie granicy $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ nie przesądza o zbieżności $(x_n)$. Wystarczy wziąć

$$f(x) = |x|,\ D = [-3, -1] \cup [1, 3].$$

Wtedy $x_n = (-1)^n$ jest ciągiem minimalizującym rozbieżnym (ale zawierającym podciąg zbieżny!). Jest to konsekwencją zwartości dziedziny. Biorąc przykład funkcji $f(x) = e^{-x}$, widzimy, że ciąg $x_n = n$ jest ciągiem minimalizującym rozbieżnym nie zawierającym żadnego podciągu zbieżnego.

Skoncetrujmy się chwilowo na sytuacji skończenie wymiarowej, tj. gdy $E = \mathbb{R}^k$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Wtedy oczywiście $E = E^*$.

**Twierdzenie 1.2.3** (Twierdzenie Weierstrassa o istnieniu argumentu minimum funkcji półciągłej z dołu na zbiorze zwartym)**.** *Niech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem* *półciągłym z dołu oraz niech $D$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^k$. Wtedy problem*

$$\min_{x \in D} f(x) \tag{P}$$

*ma co najmniej jedno rozwiązanie $x_0$ w $D$.*

**Dowód.** Zauważmy, że funkcjonał $f$ jest ograniczony z dołu na $D$. Istotnie, gdyby był nieograniczony to znaleźlibyśmy ciąg $(x_n) \subset D$, taki, że $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty$. Ciąg ten leży w zwartej dziedzinie, więc posiada podciąg $\left(x_{k_n}\right) \subset D$ zbieżny do pewnego $x_0$. Stąd i z półciągłości z dołu

$$-\infty < f(x_0) \le \liminf_{k\to\infty} f(x_{k_n}) = \liminf_{k\to\infty} f(x_{k_n}) \to -\infty,$$

czyli $f(x_0) = -\infty$, co jest niemożliwe.

Skoro funkcjonał $f$ jest ograniczony z dołu na $D$, to posiada na $D$ kres dolny, a zatem również ciąg minimalizujący $(x_n) \subset D$. Ze zwartości $D$ mamy zagwarantowane istnienie podciągu $(x_{k_n})$, zbieżnego do pewnego elementu $x_0 \in D$. Korzystając z definicji półciągłości z dołu oraz oczywistych relacji otrzymujemy, że

$$\inf_{x\in D} f(x) \le f(x_0) \le \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \inf_{x\in D} f(x)$$

Z twierdzenia o trzech ciągach, wnosimy że $f(x_0) = \inf_{x\in D} f(x)$. Co kończy dowód. ∎

Zauważmy, że powyższe twierdzenie można ująć również inaczej: *Niech $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem półciągłym z dołu oraz niech $D$ będzie domkniętym i ograniczonym podzbiorem $\mathbb{R}^k$. Wówczas każdy ciąg $(x_n)$ minimalizujący dla $f$ na $D$ ma podciąg zbieżny oraz istnieje co najmniej jeden punkt $x_0 \in D$ taki, że*

$$\min_{x\in D} f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = f(x_0).$$

Czytelnik spyta, czemu powyższe twierdzenie (i dowód) podane zostały w przypadku skończenie wymiarowym. Odpowiedź jest dość prosta - kula w przestrzeni nieskończonego wymiaru nie jest zwarta. Klasycznego przykładu z przestrzeni $\ell^2$ szeregów sumowalnych z kwadratem z normą

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_i|^2}$$

dostarcza ciąg

$$(1,0,0,...),\ (0,1,0,...)\ ,(0,0,1,0,..),\ ...$$

który nie ma podciągu zbieżnego (odległości między kolejnymi elemenatmi są równe 1, więc nie spełnia on, ani żaden jego podciąg, warunku Cauchy'ego koniecznego, by zbieżność zachodziła). Zatem przypadek nieskończenie wymiarowy będzie dużo trudniejszy, a więc i tym samym ciekawszy. Zajmiemy się nim później, poznawszy lepiej sytuację skończenie wymiarową.

W przypadku, gdy zbiór $D$ nie jest ograniczony, np. gdy $D = \mathbb{R}^k$ istnieje również pewna wersja twierdzenia Weierstrassa, które pozwala na udowodnienie istnienia argumentu minimum przy określonym wzroście funkcjonału. Oczywiście łatwo wskazać funkcje na prostej, które nie są półciągłe z dołu i, mimo to, posiadają argument minimum, np.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq \frac{1}{2}, \\ \\ 4, & x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Wtedy $x_0 = 0$ jest argumentem minimum, $f$ nie jest półciągła z dołu na $\mathbb{R}$, ale jest półciągła z dołu w $x_0$.

**Definicja 1.2.4** (Funkcjonał koercytywy)**.** *Mówimy, że funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ jest korecytywny, jeżeli*

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Definicja koercytywności mówi jedynie o zachowaniu funkcjonału w obszarze odległym od 0, i niczego nie wnosi odnośnie jej ciągłości. Łatwo sprawdzić, że $f_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_1(x,y) = x^2 + y^2 - xy$$

jest koercytywna. Z drugiej strony $f_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

nie jest koercytywna.

Koercytywność jest istotna przy minimalizacji funkcjonałów określonych na zbiorach nieograniczonych.

**Twierdzenie 1.2.5** (Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji koercytywnej półciągłej z dołu). *Załóżmy, że $f:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest półciągła z dołu oraz korecytywna. Wówczas $f$ posiada co najmniej jeden argument minimum (inaczej - zadanie P posiada co najmniej jedno rozwiązanie, o ile $D = \mathbb{R}^k$).*

**Dowód.** Niech $x_0 \in \mathbb{R}^k$. Połóżmy $\alpha_0 = f(x_0)$. Rozważmy zbiór $f^{\alpha_0}$. Ponieważ $f$ jest półciągła z dołu, to zbiór ten jest domknięty. Skoro funkcjonał $f$ jest koercytywny, to, korzystając z definicji granicy niewłaściwej, istnieje taka liczba rzeczywista $r > 0$, że

$$\forall x \in \mathbb{R}^k \quad \|x\| > r \Rightarrow f(x) > f(x_0).$$

Jako, że $f^{\alpha_0}$ jest ograniczony i domknięty to jest zwarty. Zatem z Twierdzenia Weierstrassa istnieje $a \in f^{\alpha_0}$ takie, że

$$\forall s \in f^{\alpha_0} \quad f(a) \leq f(s).$$

Weźmy teraz dowolny $x \in \mathbb{R}^k$. Jeśli $x \in f^{\alpha_0}$ to oczywiście $f(a) \leq f(x)$. W przeciwnym wypadku mamy $f(x) > f(x_0) \geq f(a)$. ∎

Znów można powyższe twierdzenie wysłowić w języku ciągów minimalizujących: koercytywność powoduje, iż każdy ciąg minimalizujący jest ograniczony, własności przestrzeni skończenie wymiarowej skutkują tym, iż każdy ciąg ograniczony ma podciąg zbieżny, natomiast półciągłość z dołu pozwala zachować odpowiednią nierówność. Twierdzenie Weierstrassa dostarcza więc również pewnego ogólnego schematu postępowania. Jak zobaczymy później, będzie on bardzo owocny.

**Twierdzenie Weierstrassa** *(rozumiane we wszystkich wprowadzonych wariantach)* jest w istocie narzędziem mówiącym o tym, kiedy ciągi minimalizujące mają zbieżne podciągi (a przynajmniej jeden taki podciąg). Ta obserwacja będzie dla nas w dalszej części kluczowa.

Oczywiście istnieją przykłady funkcji niekoercywnych, ale posiadających minimum, jak choćby

$$f(x) = -\exp\left(-x^2\right),$$

która (jedyny) argument minimum posiada dla $x_0 = 0$. Niemniej jednak funkcja niekorecytywna (i nie będąca półciągłą z dołu) może być nieograniczona z dołu i wówczas z oczywistego powodu minimum nie posiada.

Zastanówmy się na koniec, co oznacza koercytwność połączona z różniczkowalnością, zarówno dla argumentu minimum, jak i dla ciągu minimalizującego.

W tym pierwszym przypadku odpowiedź jest prosta:

**Twierdzenie 1.2.6** (Twierdzenie Weierstrassa dla funkcji koercytywnej półciągłej z dołu i różniczkowalnej)**.** *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna jest korecytywna. Wówczas $f$ posiada co najmniej jeden argument minimum $x_0$ taki, że* $f'(x_0) = 0$.

Zauważmy, iż Twierdzenie Weierstrassa nie opisuje struktury ciągu minimalizującego. Gwarantuje ono jedynie istnienie takie ciągu i zbieżność pewnego jego podciągu. Dokładniejszych informacji o ciągu minimalizującym dostarcza **Zasada Wariacyjna Ekelanda**. Zanim jednak tę zasadę podamy, musimy omówić zagadnienia różniczkowalności w przestrzeniach nieskończonego wymiaru.

ROZDZIAŁ 2

# Różniczkowanie w przestrzeniach nieskończonego wymiaru

Interesujemy się teraz sposobami na uogólnienie różniczkowania w przestrzeni nieskończonego wymiaru. W przypadku funkcji wielu zmiennych znamy dwa różne pojęcią pochodnej - pochodną słabą, która nie gwarantuje nawet ciągłości funkcji ją posiadającej, oraz pochodną silną. Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku różniczkowania funkcji na przestrzeniach nieskończonego wymiaru, gdzie rozważamy zasadniczo dwa typy różniczkowalności: w sensie Gâteaux oraz w sensie Fréchete'a. Pochodna w sensie Gâteaux jest odpowiednikiem pochodnej słabej - łatwo ją uzyskać, ale nie ma zastosowań we wszystkich metodach. Pochoda Fréchete'a gwarantuje ciągłość funkcji, która ją posiada, ale na ogół jest trudna do wyznaczenia. Podamy w trakcie naszych rozważań sposoby badania różniczkowalności w sensie Fréchete'a odwzorowań i funkcjonałów.

## 2.1. Pierwsza wariacja Lagrange'a i reguła Fermata

Zaczniemy od najprostszego z pojęć zwanego pierwszą wariacją w sensie Lagrange'a (lub pochodną kierunkową). Przypomnijmy, że $E$ jest rzeczywistą przestrzenią Banacha.

**Definicja 2.1.1** (Pierwsza wariacja w sensie Lagrange'a i wariacja Gâteaux). *Niech element $\overline{x} \in E$ będzie ustalony. Powiemy, że funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ posiada pierwszą wariację w sensie Lagrange'a w $\overline{x}$ w kierunku $h \in E$ jeśli istnieje skończona* *granica*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\overline{x}+\lambda h) - f(\overline{x})}{\lambda}. \tag{2.1}$$

*Wartość tej granicy oznaczamy jako $f'(\overline{x},h)$. Jeśli istnieją wariacje Lagrange'a w każdym kierunku $h \in E$ oraz odwzorowanie $h \mapsto f'(\overline{x},h)$ jest funkcjonałem liniowym, to mówimy, że $f$ posiada wariację Gâteaux w tym punkcie.*

Zauważmy, iż granica w (2.1) jest brana w $\mathbb{R}$, stąd w powyższej definicji można zakładać jedynie, że $E$ jest przestrzenią liniową. Wariacja w sensie Lagrange'a i inne definiowane po niej typy pochodnych są, o ile istnieją, wyznaczone jednoznacznie. Jest to konsekwencją jedyności granicy.

Przypomnijmy, że **odcinkiem** o końcach $x_1$, $x_2 \in E$ nazywać będziemy zbiór

$$[x_1, x_2] = \{x \in E : x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha \in [0,1]\}.$$

Mówimy, że zbiór $M \subset E$ jest **zbiorem wypukłym**, jeśli każde dwa jego punkty łączy odcinek całkowicie zawarty w zbiorze $M$.

Z każdą funkcją $f$ przekształcającą pewien zbiór $A \subset E$ w rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ związany jest zbiór

$$\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) < \infty\},$$

zwany **zbiorem efektywnym** funkcji $f$.

Jeśli funkcja spełnia warunki : $\operatorname{dom} f \neq \emptyset$ i $f(x) > -\infty$ dla wszystkich $x \in X$ to nazywamy ją **właściwą**, w pozostałych przypadkach nazywamy **niewłaściwą**.

My będziemy się przeważnie zajmowali jedynie funkcjami właściwymi i takimi, że wszędzie $+\infty > f(x) > -\infty$. Ułatwi to nam definiowanie pojęcia wypukłości funkcji. Nie będziemy więc pisać $\operatorname{dom} f$, gdyż $\operatorname{dom} f = E$ w takim ujęciu.

Funkcję $f : E \to \mathbb{R}$ nazwiemy wypukłą jeśli zachodzi

$$\forall_{\lambda \in [0,1]} \forall_{x_1, x_2 \in E} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2). \tag{2.2}$$

Funkcję $f : E \to \mathbb{R}$ nazwiemy ściśle wypukłą jeśli zachodzi

$$\forall_{\lambda \in (0,1)} \forall_{x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

**Twierdzenie 2.1.2** (Reguła Fermata dla pierwszej wariacji w sensie Lagrange'a)**.** *Niech $\emptyset \neq S \subset E$, oraz niech $f : S \to \mathbb{R}$.*

1. *Niech $\overline{x} \in S$ będzie agrumentem minimum funkcjonału $f$ na $S$. Jeśli funkcjonał $f$ posiada pierwszą wariację w sensie Lagrange'a w punkcie $\overline{x}$ w każdym kierunku $x - \overline{x}$ dla $x \in S$ to*

$$f'(\overline{x}, x - \overline{x}) \geq 0, \quad \text{dla wszystkich } x \in S \tag{2.3}$$

2. *Załóżmy, że zbiór $S$ jest wypukły oraz funkcjonał $f$ jest wypukły na $S$, $f$ posiada pierwszą wariację w sensie Lagrange'a w punkcie $\overline{x}$ w każdym kierunku $x - \overline{x}$ dla $x \in S$ oraz spełniona jest* (2.3)*. Wówczas $\overline{x}$ jest argumentem minimum $f$ na $S$.*

3. *Jeżeli $S = E$, $f$ posiada pierwszą wariację w sensie Lagrange'a w punkcie $\overline{x} \in E$ w każdym kierunku $h \in E$ oraz $\overline{x}$ jest argumentem minimum, to $f'(\overline{x}, h) = 0$.*

**Dowód.** Skoro $\overline{x}$ jest agrumentem minimum funkcjonału $f$ na $S$, to dla dostatecznie małych $\lambda \in \mathbb{R}_+$ takich, że $\overline{x} + \lambda(x - \overline{x}) \in S$, dla ustalonego $x \in S$, mamy

$$\frac{f(\overline{x} + \lambda(x - \overline{x})) - f(\overline{x})}{\lambda} \geq 0.$$

Przechodząc z $\lambda \to 0^+$ mamy

$$f'(\overline{x}, x - \overline{x}) \geq 0.$$

Załóżmy teraz, że $S$ jest wypukły oraz $f$ jest wypukły na $S$ oraz zachodzi (2.3). Wtedy dla dowolnego $\lambda \in (0,1]$ mamy dla $x \in S$

$$f(\overline{x} + \lambda(x - \overline{x})) \leq (1-\lambda) f(\overline{x}) + \lambda f(x).$$

Stąd

$$f(\overline{x} + \lambda(x - \overline{x})) - f(\overline{x}) \leq \lambda (f(x) - f(\overline{x})).$$

Przechodząc z $\lambda \to 0^+$

$$0 \leq f'(\overline{x}, (x - \overline{x})) \leq f(x) - f(\overline{x}).$$

Czyli $\overline{x}$ jest argumentem minimum z dowolności wyboru $x \in S$.

Niech $E = S$. Ustalmy $h \in E$ i rozważmy funkcję $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $g(t) = f(\overline{x} + th)$. Wówczas 0 jest argumentem minimum funkcji $g$ i stąd mamy

$$f'(\overline{x}, h) = 0. \qquad \blacksquare$$

**Przykład 2.1.3.** Zwróćmy jednak uwagę na następujący przykład nieciągłej w $(0,0)$ funkcji $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\left(1 + \frac{1}{y}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

która posiada w $(0,0)$ pierwszą wariację postaci

$$f'(0,h) = \begin{cases} \frac{(h_1)^2}{h_2}, & h_2 \neq 0, \\ 0, & h_2 = 0. \end{cases}$$

Jak widzimy z dowodu twierdzenia 2.1.2, analiza pierwszej wariacji wiąże się z badaniem funkcji pomocniczej jednej zmiennej rzeczywistej. To w oczywisty sposób uprasza techniki badawcze, ale z drugiej strony istotnym problemem jest to, iż pierwsza wariacja nie musi być liniowa względem kierunku. Powyżej podany przykład ten sugeruje, iż musimy szukać takich pojęć pochodnej, dla których odwzorowanie $h \mapsto f'(x,h)$ będzie i liniowe, i ciągłe.

## 2.2. Pierwsza wariacja a wypukłość

Rozważymy teraz istnienie pierwszej wariacji w sensie Lagrange'a dla funkcji wypukłej. Jak się okazuje, w tym przypadku istnienie pierwszej wariacji jest konsewkencją własności funkcji wypukłych na prostej rzeczywistej.

**Lemat 2.2.1** (Monotoniczność ilorazu rozicowegodla funkcjonału wypukłego)**.** *Załóżmy, że $f : E \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem wypukłym. Wtedy dla każdych $\overline{x}, h \in E$*

*funkcja* $\varphi : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *dana wzorem*

$$\varphi(\lambda) = \frac{f(\overline{x} + \lambda h) - f(\overline{x})}{\lambda} \tag{2.4}$$

*jest niemalejąca.*

**Dowód.** Niech $0 < s \le t$ wtedy dla dowolnych $\overline{x}, h \in E$

$$\begin{aligned} f(\overline{x} + sh) - f(\overline{x}) &= f\left(\frac{s}{t}(\overline{x} + th) + \frac{t-s}{t}\overline{x}\right) - f(\overline{x}) \\ &\le \frac{s}{t} f(\overline{x} + th) + \frac{t-s}{t} f(\overline{x}) - f(\overline{x}) \\ &= \frac{s}{t} f(\overline{x} + th) - \frac{-s}{t} f(\overline{x}) = \frac{s}{t}\left(f(\overline{x} + th) - f(\overline{x})\right). \end{aligned}$$

Skąd natychmiast otrzymujemy, że

$$\varphi(s) \le \varphi(t)$$ ∎.

**Lemat 2.2.2** (Istnienie pierwszej wariacji w sensie Lagrange'a dla funkcjonału wypukłego)**.** *Załóżmy, że* $f : E \to \mathbb{R}$ *jest funkcjonałem wypukłym. Wtedy w każdym punkcie* $\overline{x} \in E$ *istnieje wariacja w sensie Lagrange'e we wszystkich kierunkach i jest funkcjonałem podliniowym oraz monotonicznym.*

**Szkic dowodu.** Można udowodnić, iż $\varphi$ dana wzorem (2.4) jest ograniczona z dołu, a skoro jest również monotoniczną funkcją rzeczywistą jednej zmiennej rzeczywistej, to posiada w każdym punkcie jednostronną granicę. Stąd od razu wynika istnienie pierwszej wariacji w sensie Lagrange'a. Monotoniczność pierwszej wariacji uzyskujemy przechodząc w (2.4) do granicy przy $\lambda \to 0$, i uwzględniając zależnośc $\varphi(s) \le \varphi(t)$ dla $0 < s \le t$. ∎

## 2.3. Pochodna Gâteaux

Podamy teraz typ pojecia pochodnej, który zapowiadaliśmy kończąc paragraf dotyczący wariacji w sensie Lagrange'a.

**Definicja 2.3.1** (Pochodna Gâteaux). *Niech $X,Y$ będą przestrzeniami unormowanymi oraz niech $f : X \to Y$. Powiemy, że odwzorowanie $f$ jest różniczkowalne w sensie Gâteaux w $x \in X$ jeśli dla każdego $h \in X$ granica*

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda}$$

*oznaczana symbolem $f'(x;h)$ istnieje oraz odwzorowanie*

$$h \to f'(x;h)$$

*jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym z $X$* w *$Y$; inaczej $f'(x;\cdot) \in L(X,Y)$.*

Czasami zamiast pisać $f'(x;h)$ będziemy pisać $f'(x)$. Jeżeli $Y = \mathbb{R}$, to $f'(x;\cdot) \in X^*$, czyli jest funkcjonałem liniowym i ciągłym. *Przypominamy, że $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E^*,E}$ oznacza parę dualna między przestrzeniami $E$ i $E^*$, czyli działanie funkcjonału liniowego i ciągłego z $E^*$ na elemencie z $E$; w przypadku $E = \mathbb{R}^k$ jest to iloczyn skalarny.*

Warunek w definicji pochodnej Gâteaux oznacza, że (być może w inny sposób w każdym kierunku)

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{\|f(x+\lambda h) - f(x) - \lambda f'(x;h)\|}{\lambda} = 0.$$

Mamy następujące własności pochodnej Gâteaux:

1. *Jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ to pochodna Gâteaux pokrywa się z definicją pochodnej klasycznej;*

2. *Jeśli $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ to istnienie pochodnej Gâteaux jest np. konsekwencją istnienia wszystkich pochodnych cząstkowych (ale niekoniecznie ich ciągłość);*

3. *Jeśli istnieje pochodna Gâteaux, to istnieje wariacja w sensie Lagrange'a; oczywiście są one równe.*

4. *Istnienie pochodnej Gâteaux w punkcie $x_0$ nie pociąga ciągłości w tym punkcie.*

Obliczanie pochodnych Gâteaux pozwoli nam lepiej zrozumieć sens tego pojęcia.

**Przykład 2.3.2.** Niech $H$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Niech $h_0$ będzie ustalone. Rozważmy funkcjonał $f : H \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$f(x) = \langle x, h_0 \rangle .$$

Ustalmy dowolnie $x \in H$ oraz kierunek $h \in H$. Tworzymy funkcję pomocniczą $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem $g(t) = f(x + th)$. Stąd

$$g(t) = \langle x, h \rangle + t \langle h, h_0 \rangle$$

i w oczywisty sposób $g'(t) = f'(x; h) = \langle h, h_0 \rangle$. Stąd (i z symetrii iloczynu skalarnego) funkcjonał $h \to \langle h_0, h \rangle$ jest pochodną Gâteaux funkcjonału $f$.

Weźmy teraz funkcjonał $f : H \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle = \frac{1}{2} \|x\|^2 .$$

Niech $x \in H$ będzie dowolnie ustalonym punktem. Ustalmy kierunek $h \in H$. Tworzymy funkcję pomocniczą $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$g(t) = f(x + th).$$

Zauważmy, że korzystając z własności iloczynu skalarnego mamy

$$g(t) = \frac{1}{2} \langle x + th, x + th \rangle = \frac{1}{2} \|x\|^2 + t \langle x, h \rangle + \frac{1}{2} t^2 \|h\|^2 .$$

Funkcja $g$ jest klasy $C^1$ na $\mathbb{R}$, stąd

$$g'(t) = \langle x, h \rangle + t \|h\|^2 .$$

Zatem

$$g'(0) = f'(x; h) = \langle x, h \rangle .$$

Mamy więc postać pochodnej $f'(x;h)$ jako funkcjonału liniowego i ciągłego danego wzorem

$$h \to \langle x,h\rangle. \tag{2.5}$$

**Przykład 2.3.3.** Rozważmy funkcjonał $f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\sin x(s)}{1+x^2(s)}\,ds.$$

Niech $x \in C[0,1]$ będzie dowolnie ustalonym punktem. Ustalmy kierunek $h \in C[0,1]$. Tworzymy, podobnie jak poprzednio, funkcję pomocniczą $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$g(t) = \int_0^1 \frac{\sin(x(s)+th(s))}{1+(x(s)+th(s))^2}\,ds.$$

Do powyższej całki (którą możemy rozumieć jako całkę Riemanna z parametrem) możemy zastosować regułę Leibniza różniczkowania pod znakiem całki, otrzymując (pamiętamy, że pod znakiem całki wyliczamy pochodną ilorazu)

$$\begin{aligned} g'(t) = & \int_0^1 \frac{\cos(x(s)+th(s))h(s)\left(1+(x(s)+th(s))^2\right)}{\left(1+(x(s)+th(s))^2\right)^2}\,ds \\ & - \int_0^1 \frac{2\sin(x(s)+th(s))(x(s)+th(s))h(s)}{\left(1+(x(s)+th(s))^2\right)^2}\,ds. \end{aligned}$$

Otrzymane wyrażenie jest ciągłe względem $t$ w $t_0 = 0$, stąd

$$g'(0) = \int_0^1 \frac{\cos x(s)\left(1+\left(x^2(s)\right)\right) - 2\sin x(s)x(s)}{\left(1+x^2(s)\right)^2}\,h(s)\,ds.$$

Liniowość otrzymanego wzoru względem $h$ jest oczywista. Korzystając z tego, iż przy zbieżności jednostajnej w całce Riemanna możemy zamieniać granicę ze znakiem całki, otrzymujemy również ciągłość względem kierunku $h$. Istotnie, oznaczmy dla $s \in \mathbb{R}$

$$\varphi(s) = \frac{\cos x(s)\left(1+\left(x^2(s)\right)\right) - 2\sin x(s)x(s)}{\left(1+x^2(s)\right)^2}$$

Niech $h_n \rightrightarrows h$ na $[0,1]$, czyli $h_n \to h$ w $C[0,1]$. Wówczas

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \varphi(s)h_n(s)ds = \int_0^1 \varphi(s)\left(\lim_{n\to\infty} h(s)\right)ds = \int_0^1 \varphi(s)h(s)ds.$$

**Przykład 2.3.4** (Różniczkowalność odwzorowania liniowego w przestrzeni Banacha)**.** Niech $L : X \to Y$ będzie odwzorowaniem liniowym i ciągłym między dwoma przestrzeniami Banacha. Wówczas $L$ jest różniczkowalne w sensie Gâteaux oraz $L'(x;h) = Lh$ dla dowolnego ustalonego $x \in X$ i wszystkich $h \in X$. W przypadku, gdy $L$ nie jest ciągły, a jedynie liniowy, to posiada on jedynie *wariację Gâteaux*.

**Przykład 2.3.5** (Funkcja nieciągła różniczkowalna w sensie Gâteaux)**.** Jako przykład takiej funkcji służy

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y^2, y > 0, \\ \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

Funkcja $f$ jest nieciągła w $(0,0)$, ale ma w nim pochodną Gâteaux (będącą odwzorowaniem tożsamościowo równym zeru).

**Przykład 2.3.6.** Funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ określona we współrzędnych biegunowych

$$f(x,y) = r\cos 3\varphi,\ (x,y) = \big(r\cos\varphi, r\sin\varphi\big)$$

ma w punkcie $(0,0)$ wariację Gâteaux, ale nie jest ona pochodną Gâteaux.

**Twierdzenie 2.3.7** (Reguła Fermata dla pochodnych Gâteaux)**.** *Niech $f : E \to \mathbb{R}$. Jeśli $\overline{x}$ jest argumentem minimum funkcjonału $f$ nad $E$ oraz $f$ jest różniczkowalny w sensie Gâteaux (conajmniej w punkcie $\overline{x}$), to dowolnego $h \in E$ zachodzi*

$$\langle f'(\overline{x}), h\rangle_{E^*,E} = 0.$$

**Dowód.** Skoro $f$ jest różniczkowalny w sensie Gâteaux w $\overline{x}$, to ma też pierwszą wariację w sensie Lagrange'a. Zatem korzystając z reguły Fermata wprowadzonej dla wariacji mamy, że dla dowolego kierunku $h$ zachodzi

$$\langle f'(\overline{x}), h\rangle_{E^*,E} \geq 0.$$

Biorąc kierunek $-h$ otrzymujemy, że również

$$\langle f'(\overline{x}), h\rangle_{E^*,E} \leq 0.$$

I stąd mamy tezę. ∎

## 2.4. Pochoda Fréchete'a

Ostatnim z pojęć różniczkowalności jest pojęcie pochodnej Fréchete'a, które tym różni się od pojęcia pochodnej Gâteaux, iż gwarantuje ciągłość odzworowania w punkcie, oraz pozwala na pewien rodzaj liniowej aproksymacji wokół punktu różniczkowalności. Pochodna Gâteaux pozwala jedynie na liniowe aproksymacje po kierunkach.

**Definicja 2.4.1** (Pochodna Fréchete'a)**.** *Niech $X,Y$ będą przestrzeniami unormowanymi oraz niech $f : X \to Y$. Powiemy, że odwzorowanie $f$ jest różniczkowalne w sensie Fréchete'a w punkcie $x \in X$ jeśli istnieje operator liniowy i ciągły $f'(x): X \to Y$ taki, że*

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\|}{\|h\|} = 0. \tag{2.6}$$

*Odwzorowanie $f$ jest różniczkowalne w sposób ciągły w sensie Fréchete'a, jeżeli odwzorowanie $f' : X \ni x \mapsto f'(x) \in \mathscr{L}(X,Y)$ jest ciągłe względem odpowiednich normowych topologii.*

Zauważmy, iż wprowadzenie w przestrzeni $X$ lub $Y$ równoważnej normy *nie zmieni pochodnej Fréchete'a,* tzn. będzie nią dalej ten sam operator. Odnośnie różniczkowalności w sensie Fréchete'a mamy jeszcze inne alternatywne podejście: odwzorowanie $f'(x): X \to Y$, $f'(x) \in \mathscr{L}(X,Y)$, jest pochodna Fréchete'a $f$ w $x \in X$ jeśli dla dowolnego $h \in X$ zachodzi

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h),$$

gdzie

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|o(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Właśnie powyższa formuła mówi w zasadzie o liniowej aproksymacji odwzorowania w otoczeniu punktu różniczkowalności. Można, podając definicje pochodnej wyższego rzędu, wprowadzić również odpowiednik znanego wzoru Taylora. Na gruncie teoretycznym nie sprawia to większych trudności, niemniej jednak stosowalność takich wyników, ze względu na stopień skomplikowania pochodnych wyższych rzędów, nie byłaby (i zresztą nie jest) trywialna.

*Odwzorowanie $f : X \to Y$ różniczkowalne w sensie Fréchete'a w $x \in X$, jest w tym punkcie ciągłe.* Istotnie, wziąwszy ustalone $\varepsilon > 0$, znajdujemy $\delta > 0$ taką, że dla $\|h\| < \delta$, $h \in X$, zachodzi

$$\|f(x+h) - f(x)\| - \|f'(x)h\| \le \|f(x+h) - f(x) - f'(x)h\| \le \varepsilon\|h\|.$$

Stąd

$$\|f(x+h) - f(x)\| \le \left(\varepsilon + \|f'(x)\|\right)\|h\|.$$

Przechodząc z $\|h\| \to 0$, otrzymujemy, iż $f$ jest ciągłe w $x$.

Odwzorowanie różniczkowalne w sensie Fréchete'a w pewnym punkcie $x$ jest w tym punkcie różniczkowalne w sensie Gâteaux i obie pochodne są tożsame. Łatwo to pokazać ustalając w (2.6) kierunek $h$ i biorąc w definicji pochodnej Fréchete'a zamiast $h$ element $\lambda \cdot h$, gdzie $\lambda > 0$. Wtedy mamy (pamiętając, że $f'(x)$ jest odwzorowaniem liniowym)

$$\lim_{\|\lambda h\|\to 0} \frac{\|f(x+\lambda h) - f(x) - \lambda f'(x)h\|}{\|\lambda h\|} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\|f(x+\lambda h) - f(x) - \lambda f'(x)h\|}{\lambda} = 0.$$

Odwzorowanie $f$, kt*óre jest różniczkowalne w sposób ciągły w sensie Gâteaux, jest różniczkowalne w sposób ciągły w sensie Fréchete'a, czyli klasy $C^1$.* Ciągłość pochodnej Gâteaux rozumiemy następująco:

*Niech $X, Y$ będą przestrzeniami unormowanymi oraz niech $f : X \to Y$. Powiemy, że odwzorowanie $f : X \to Y$ jest różniczkowalne w sposób ciągły w sensie Gâteaux na $X$, jeżeli jest różniczkowalne w sensie Gâteaux w każdym punkcie $x \in X$ oraz odwzorowanie $f' : X \to L(X;Y)$ jest ciągłe.*

Głównie z takimi jak powyżej odwzorowaniami będziemy mieć do czynienia. Ponadto w ten sposób łatwiej sprawdzić różniczkowalność w sensie Fréchete'a. Znacznie łatwiej niż szacować zbieżność reszty $o(h)$. Dokładniej to zagadnienie przeanalizujemy badając dalej problem brzegowy typu Dirichleta.

**Przykład 2.4.2.** Przykładem odwzorowania, które jest różniczkowalne w sensie Fréchete'a w $x_0 = 0$ ale nie jest tam różniczkowalne w sposób ciągły, jest funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ wymierne}, \\ \\ 0, & x \text{ niewymierne}. \end{cases}$$

Trzeba jeszcze na koniec wspomnieć o dwóch istotnych zagadnieniach: regule różniczkowania złożonego oraz twierdzeniu o wartości średniej. Odnośnie reguły różniczkowania obowiązuje następujące prawo, które możemy wysłowić nieformalnie, zanim podamy odpowiednie twierdzenie: możemy różniczkować złożenie, jeżeli odwzorowanie zewnętrzne jest różniczkowalne w sensie Fréchete'a, natomiast odwzorowanie wewnętrzne posiada dowolną inną z wprowadzonych pochodnych. Wówczas złożenie jest co najmniej tak samo różniczkowalne, jak odwzorowanie wewnętrzne. Poniżej sformułowane twierdzenie można wypowiedzieć z łatwością dla różniczkowalności w punkcie oraz w przypadku, gdy dziedziny składanych odwzorowań ograniczają się do pewnych podzbiorów otwartych rozważanych przestrzeni. Przestrzenie Banacha można również zastąpić odpowiednio przestrzenią liniową przy rozważaniu istnienia wariacji w sensie Lagrange'a.

**Twierdzenie 2.4.3** (Reguła różniczkowania złożonego)**.** *Niech $X, Y, Z$ będą przestrzeniami Banacha i załóżmy, że odwzorowanie $f : Y \to Z$ jest różniczkowalne w sensie Fréchete'a, natomiast odwzorowanie $g : X \to Y$ posiada pochodną Gâteaux lub pochodną Fréchete'a. Wówczas złożenie $f \circ g$ jest różniczkowalne co najmniej w tym samym sensie, co odwzorowanie $g$. Niech $x \in X$ będzie dowolne. Wówczas dla wszystkich $h \in X$ zachodzi*

$$(f \circ g)'(x;h) = f'(g(x)) \circ g'(x;h).$$

**Uwaga 2.4.4.** *Jeżeli g jest różniczkowalne co najmniej w sensie Gâteaux, to powyższą formułę możemy zapisać formalnie dla* $x \in X$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \circ g'(x)$$

*korzystając z liniowości obu pochodnych.*

**Przykład 2.4.5.** Niech $X = Y = \mathbb{R}^2$, $Z = \mathbb{R}$ oraz $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ niech będzie odwzorowaniem klasy $C^1$ danym wzorem

$$\varphi(x,y) = \big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) = \big(x^2, y\big)$$

oraz $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jest znaną już nam funkcją

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x = y^2,\ y > 0, \\ \\ 0, & \text{dla pozostałych,} \end{cases}$$

nieciągłą w $(0,0)$, ale mającą w nim pochodną Gâteaux. Złożenie $g = f \circ \varphi$ ma postać

$$g(x,y) = f\big(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)\big) = \begin{cases} 1, & |x| = y > 0, \\ \\ 0, & \text{dla pozostałych.} \end{cases}$$

Widzimy, że $g$ w przeciwieństwie do $f$ nie jest różniczkowalna w sensie Gâteaux.

**Uwaga 2.4.6.** Niech $H$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Możemy teraz wrócić do **przykładu 2.3.2** i rozważyć funkcję $f : H \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$f(x) = 2\sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\|.$$

Korzystając z wcześniej wyprowadzonego wzoru oraz reguły różniczkowania złożonego mamy, że $f'$ jest następującej postaci dla $x \neq 0_H$

$$h \mapsto \frac{1}{\sqrt{\langle x, x \rangle}} \langle x, h \rangle.$$

Twierdzenie o wartości średniej ma następującą postać

**Twierdzenie 2.4.7** (Twiedzenie o wartości średniej). *Niech $X,Y$ będą przestrzeniami Banacha i załóżmy, że $f : X \to Y$ jest różniczkowalne w sensie Fréchete'a. Wówczas dla dowolnego przedziału $[a,b] \subset X$ zachodzi*

$$\|f(b)-f(a)\|_Y \leq \sup_{\xi\in(a,b)} \left\|f'(\xi)\right\|_{L(X;Y)} \|b-a\|_X .$$

Nie ma odpowiednika *klasycznego Twierdzenia Lagrange'a* na przypadek przestrzeni innych niż prosta rzeczywista. Istotnie, biorąc $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dane wzorem $f(t)=[\sin t, -\cos t]$ na przedziale $[0,2\pi]$ widzimy, że

$$f(2\pi)-f(0)=0$$

oraz dla dowolnego $c\in(0,2\pi)$ mamy

$$f'(c)(2\pi-0)=[2\pi\cos t, 2\pi\sin t]\neq 0.$$

Brak takiego odpowiednika nie jest przeszkodą w stosowaniu twierdzenia o wartości średniej. Liczba $c$ nie jest znana, stąd i tak w oszacowaniach pojawiają się najczęściej nierówności w postaci omawianej powyżej.

Ponieważ **Reguła Fermata (twierdzenie 2.3.7)** dla pochodnych Fréchete'a ma taką samą postać, jak dla pochodnej Gâteaux, nie będziemy jej więc przytaczać.

Zakończymy ten paragraf opisem metody badania ciągłości pochodnej Gâteaux.

**Uwaga 2.4.8.** *Niech $X,Y$ będą przestrzeniami unormowanymi oraz odwzorowanie $f:X\to Y$ różniczkowalne w sensie Gâteaux na $X$. Odwzorowanie $f':X\to L(X;Y)$ jest ciągłe* w punkcie $x_0\in X$ *(czyli jest różniczkowalne w sensie Gâteaux w sposób ciągły w $x_0$) jeżeli dla dowolnego ciągu $(x_n)$ takiego, że $x_n\to x_0$ zachodzi*

$$f'(x_n;h)\mapsto f'(x_0;h) \textit{ przy } n\to\infty$$

*w $Y$ jednostajnie względem $h$ ze sfery jednostkowej w $X$. Każde odzworowanie różniczkowalne w sposób ciągły w sensie Gâteaux jest różniczowalne w sposób ciągły w sensie Fréchete'a.*

**Przykład 2.4.9.** Wróćmy do **przykładu 2.3.2.** Możemy teraz uzasadnić, że funkcjonał $x \mapsto \frac{1}{2}\langle x, x\rangle$, którego pochoda Gâteaux w dowolnym punkcie jest postaci

$$h \to \langle x, h\rangle$$

jest klasy $C^1$, czyli różniczkowalny w sposób ciągły. Weźmy dowolny ciąg $(x_n) \subset H$ taki, że $x_n \to x_0$. Z nierówności Schwarza mamy skoro $\|h\| = 1$

$$|\langle x_n - x_0, h\rangle| \leq \|x_n - x_0\| \, \|h\| \leq \|x_n - x_0\| \to 0.$$

Stąd mamy, że funkcjonał

$$x \mapsto \frac{1}{2}\langle x, x\rangle$$

jest klasy $C^1$.

**Przykład 2.4.10.** Korzystając z powyższego przykładu łatwo znaleźć pochodną funkcjonału

$$f(x) = \|x\|^p$$

dla $p \geq 2$ określonego na pewnej rzeczywistej przestrzeni Hilberta. Istotnie, wystarczy $f$ zapisać następująco:

$$f(x) = \langle x, x\rangle^{\frac{p}{2}}$$

i skorzystać z reguły różniczkowania złożonego oraz przykładu 2.3.2. Mamy wtedy dla dowolnych $x, h \in E$

$$f'(x;h) = \langle x, x\rangle^{\frac{p}{2}-1}\langle x, h\rangle = \|x\|^{p-2}\langle x, h\rangle.$$

Z powyższej formuły jasno wynika, że ciągłość pochodnej jest oczywista.

ROZDZIAŁ 3

# Zasada Wariacyjna Ekelanda

Zasada wariacyjna Ekelanda jest jednym z kluczowych narzędzi współczesnego rachunku wariacyjnego. Można w zasadzie powiedzieć, iż jest on na niej zbudowany. Samo sformułowanie jakkolwiek intuicyjnie oczywiste umiejscowione jest w przestrzeni, w której z zasady nie można różniczkować, a mianowicie w przestrzeni metrycznej. Ma to głębsze znaczenie. Wiadomo, że domknięta kula w przestrzeni Banacha nie jest podprzestrzenią liniową tej przestrzeni, ale przestrzenią metryczną już jest. A jak już wiemy, argumentu mimimum szukaliśmy najczęściej albo na kulach (zbiorach ograniczonych po prawdzie, ale to na jedno wychodzi) albo na całej przestrzeni.

## 3.1. Podstawowe twierdzenie

Sformułowanie zasady wariacyjnej Ekelanda jest następujące:

**Twierdzenie 3.1.1** (Zasada wariacyjna Ekelanda)**.** *Niech $(X,d)$ będzie zupełną przestrzenią metryczną. Załóżmy, że $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ jest funkcjonałem właściwym półciągłym z dołu oraz ograniczonym od dołu. Niech $\varepsilon > 0$ i niech $u_\varepsilon \in X$ będzie elementem takim, że*

$$f(u_\varepsilon) \leq \inf_{u \in X} f(u) + \varepsilon.$$

*Wtedy dla dowolnego $\delta > 0$, istnieje $y_\varepsilon$ taki, że*

***(E1)*** $f(y_\varepsilon) \leq f(u_\varepsilon)$,

***(E2)*** $d(u_\varepsilon, y_\varepsilon) < \delta$,

***(E3)*** $f(y_\varepsilon) < f(u) + \frac{\varepsilon}{\delta} d(u, y_\varepsilon)$ *dla wszystkich* $u \in X$ *takich, że* $u \neq u_\varepsilon$.

Dowód można znaleźć w licznych monografiach i podręcznikach, np. Mawhina [9] lub Yabriego [5]. Bezpośrednie stosowanie powyższej zasady może być uciążliwe, ale mamy, w przypadku funkcjonału różniczkowalnego, a taki nas interesuje, następujący wniosek.

**Wniosek 3.1.2.** (Zasada wariacyjna Ekelanda dla funkcjonału różniczkowalnego). *Załóżmy, że funkcjonał* $f \in C^1(E, \mathbb{R})$ *jest ograniczony z dołu. Wtedy dla dowolnego* $\varepsilon > 0$ *oraz* $u \in E$ *takiego, że*

$$f(u) \leq \inf_{x \in E} f(x) + \varepsilon$$

*istnieje* $v \in E$ *taki, że*

*(ER1)* $f(v) \leq f(u)$,

*(ER2)* $\|u - v\| \leq \sqrt{\varepsilon}$,

*(ER3)* $\left\|f'(v)\right\| \leq \sqrt{\varepsilon}$.

**Dowód.** W dowodzie wykorzystuje się **Zasadę Wariacyjną Ekelenada (twierdzenie 3.1.1)** w sposób następujący. Kładziemy $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Stąd od razu mamy, że istnieje $v$ takie, że warunki *(ER1)* oraz *(ER2)* są spełnione. Z warunku ***(E3)*** mamy korzystając z różniczkowalności dla dowolnych $w \in E$ oraz $t > 0$

$$\frac{f(v) - f(v + tw)}{t} \leq \sqrt{\varepsilon}\, \|w\|$$

Stąd

$$-\left\langle f'(v), w \right\rangle_{E^*, E} \leq \sqrt{\varepsilon}\, \|w\|$$

oraz biorąc $-w$ zamiast $w$ również

$$\left\langle f'(v), w \right\rangle_{E^*, E} \leq \sqrt{\varepsilon}\, \|w\|.$$

Czyli

$$\left|\left\langle f'(v), w \right\rangle_{E^*, E}\right| \leq \sqrt{\varepsilon}\, \|w\|.$$

Uwzględniając fakt, że $f'$ jest odwzorowaniem liniowym i ciągłym mamy

$$\|f'(v)\|_{E^*} \leq \sup_{\|w\|=1} \left|\left\langle f'(v), w \right\rangle_{E^*, E}\right| \leq \sqrt{\varepsilon}. \quad \blacksquare$$

**Uwaga 3.1.3.** *W powyższym twierdzeniu o funkcji $f$ wystarczy założyć, że jest różniczkowalna w sensie Gâteaux (pochodna jest wtedy również odwzorowaniem liniowym i ciągłym) oraz półciągła z dołu.*

**Uwaga 3.1.4.** *Powyższe twierdzenie dostarcza informacji o zachowaniu się pochodnej funkcjonału $f$ na ciągu minimalizującym. Precyzyjniej mówiąc biorąc dowolny ciąg minimalizujący $(v_n)$ jesteśmy w stanie uzyskać taki ciąg minimalizujący $(x_n)$ dla $f$ na $D \subseteq E$, że $(f(x_n))$ jest zbieżny do $\inf_{x\in D} f(x)$, natomiast ciąg $\big(f'(x_n)\big)$ jest zbieżny do $0$. Ale to nie przesądza w żadnym razie o zbieżności ciągu $(x_n)$.*

Niech następujący przykład posłuży jako swego rodzaju przestroga.

**Przykład 3.1.5.** Dana jest funkcja

$$f(x) = \exp(x),$$

wtedy $(x_n) = (-n)$ oraz

$$f(x_n) \to 0 = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) \text{ i } f'(x_n) \to 0.$$

Przy tym nie istnieje punkt $x_0$ taki, że $\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(x_0)$.

## 3.2. Warunek Palais-Smale'a i Zasada Wariacyjna Ekelanda

Podane wyżej przykłady sugerują, że nie wszystkie ciągi minimalizujące są wygodne do przybliżania nimi minimum (nie wszystkie są zbieżne, bądź bywa tak, że wszystkie są rozbieżne jak dla funkcji $x \to \exp(x)$). Zatem sensownie jest wyodrębnić klasę funkcjonałów, dla których będziemy wiedzieli, że ciąg minimalizujący (a dokładniej pewien jego odpowiednio wybrany podciąg) jest jednocześnie ciągiem punktów prawie krytycznych (czyli takich, że $f'(x_n) \to 0$). Taki jest sens podanej poniżej definicji warunku Palais-Smale'a. Przypomnijmy, że $E$ jest przestrzenią Banacha.

**Definicja 3.2.1.** *(Warunek Palais-Smale'a) Załóżmy, że funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalny w sensie Gâteaux. Mówimy, że funkcjonał $f$ spełnia warunek Palais-Smale'a jeśli z każdego ciągu $(x_n)$ takiego, że*

(PS1) $(f(x_n))$ *jest ograniczony, oraz*

(PS2) $f'(x_n) \to 0$

*można wybrać podciąg zbieżny.*

W przypadku, gdy $E = \mathbb{R}^n$ warunek (PS2) oznacza, iż wszystkie pochodne cząstkowe zbiegaja do 0, a gdy $E$ jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha, oznacza on zbieżność ciągu $\left(f'(x_n)\right)$ w przestrzeni sprzężonej $E^*$ (co niekiedy się zapisuje $\left\|f'(x_n)\right\|_{E^*} \to 0$).

Jeśli funkcja (funkcjonał) spełnia warunek Palais-Smale'a to będziemy czasem pisać, że $f$ spełnia warunek (PS).

**Przykład 3.2.2.** 1. Łatwo sprawdzić, że k*ażdy funkcjonał koercytywny określony na przestrzeni skończenie wymiarowej spełnia warunek (PS). Istotnie,* wybierzmy dowolny ciąg $(x_n) \subset \mathbb{R}^k$ taki, że $(f(x_n)) \subset \mathbb{R}$ jest ograniczony. Zatem ciąg $(x_n)$ jest ograniczony. Istotnie, przypuśćmy przeciwnie. Wtedy ciąg jego norm $(\|x_n\|)$ dąży do $+\infty$, natomiast ciąg $(f(x_n))$ jest ograniczony, co jest niemożliwe. Stąd możemy wybrać podciąg zbieżny o żądanych własnościach.

2. W*arunek (PS) nie jest spełniony dla funkcji* $f(x) = e^x$ *- por.* **Przykład 3.1.5.**

Należy podkreślić, iż w przestrzeniach nieskończonego wymiaru funkcjonał koercytywny nie musi spełniać warunku Palais-Smale'a poza pewnymi szczególnymi sytuacjami.

Pozostaje powiązać spełnianie przez funkcjonał warunku (PS) z istnieniem minimum. Mówi o tym następujące twierdzenie w którym nie żądamy słabej półciągłości z dołu funkcjonału $f$ (o której powiemy w podrozdziale **5.1**) ale w zamian zakładany jest warunek (PS).

**Twierdzenie 3.2.3** (Twierdzenie o istnieniu argumentu minimum)**.** *Załóżmy, że $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ spełnia warunek (PS) oraz że funkcjonał $f$ jest ograniczony z dołu. Wtedy zadanie (P) posiada rozwiązanie, czyli istnieje $x_0$, taki, że*

$$f(x_0) = \inf_{x\in E} f(x).$$

**Dowód.** Biorąc $\varepsilon := \frac{1}{n}$ oraz korzystając z definicji kresu dolnego znajdujemy ciąg $(x_n)$ taki, że

$$f(x_n) \le \inf_{x\in E} f(x) + \frac{1}{n} \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Korzystając z **Zasady Wariacyjnej Ekelanda (twierdzenie 3.1.1)** istnieje ciąg $(v_n)$ taki, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &f(v_n) \le f(x_n),\\ &\|v_n - x_n\| \le \sqrt{\tfrac{1}{n}},\\ &\left\|f'(v_n)\right\| \le \sqrt{\tfrac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Dodatkowo

$$\inf_{x\in E} f(x) \le f(v_n) \le \inf_{x\in E} f(x) + \frac{1}{n}.$$

Na podstawie warunku (PS) ciąg $(v_n)$ posiada podciąg $\left(v_{n_k}\right)$ zbieżny do pewnego $\bar{x}$. Zauważmy, na koniec że

$$f(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} f(v_{n_k}) = \inf_{x\in E} f(x).$$ ∎

Zauważmy, że szczegółowa analiza powyższego dowodu pozwala na osłabienie założeń dotyczących regularności funkcjonału $f$. Mamy następujący:

**Wniosek 3.2.4** (Istnienie argumentu minimum dla funkcjonału ograniczonego od dołu i spełniającego (PS))**.** *Załóżmy, że funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalny w sensie Gâteaux, jest półciągły z dołu oraz spełnia warunek (PS) oraz że $f$ jest ograniczony z dołu. Wtedy istnieje $x_0$, taki, że*

$$f(x_0) = \inf_{x\in E} f(x).$$

Powiązawszy warunek (PS) z istnieniem argumentu minimum dla funkcjonału ograniczonego z dołu, zbadamy teraz związek warunku (PS) z jego koercytywnością.

**Twierdzenie 3.2.5** (Związek koercytywności i warunku (PS)). *Załóżmy, że $f \in C^1(E,\mathbb{R})$ spełnia warunek (PS) oraz że funkcjonał $f$ jest ograniczony z dołu. Wówczas $f$ jest koercytywny.*

**Dowód.** Przypuśćmy przeciwnie. Zatem znajdziemy ciąg $(x_n)$ taki, że

$$\|x_n\| \to \infty, \|x_n\| \geq 2n \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = d \in \mathbb{R}.$$

Na podstawie **Zasady Wariacyjnej Ekelanda (twierdzenie 3.1.1)** zastosowanej dla

$$\varepsilon_n = d + \frac{1}{n} - \inf_{x\in E} f(x)$$

możemy wybrać ciąg $(v_n)$ w taki sposób, że

$$\|v_n - x_n\| \leq \sqrt{\varepsilon}$$

oraz

$$\|v_n\| \geq \|x_n\| - \|v_n - x_n\| \geq 2n - n = n.$$

Ponadto,

$$\inf_{x\in E} f(x) \leq f(v_n) \leq \inf_{x\in E} f(x) + \frac{1}{n}$$

i dodatkowo

$$\left\|f'(v_n)\right\| < \sqrt{\varepsilon}.$$

Skoro $f$ spełnia warunek (PS), to $(x_n)$ ma podciąg zbieżny, co jest niemożliwe. ∎

## 3.3. Lemat o przełęczy górskiej

Twierdzenie o przełęczy górskiej jest bardzo mocno eksploatowanym narzędziem w toerii punktu krytycznego. Udowodnienie tego twierdzenia przekracza ramy niniejszego skryptu. Podanie licznych komentarzy koniecznych dla dogłębnego zrozumienia prezentowanego materiału również jest tutaj niemożliwe. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do literatury: np. monografie Mawhina, Yabriego mogą służyć jako dobre wprowadzenia w tematykę.

**Twierdzenie 3.3.1** (O przełęczy górskiej). *Załóżmy, że* $J \in C^1(E,\mathbb{R})$ *spełnia warunek Palais-Smale'a. Przypuśćmy ponadto, że*

*1.* $J(0) = 0$*;*

*2. istnieją stałe* $\rho > 0$ *i* $\alpha > 0$ *takie, że*

$$J(u) \geq \alpha$$

*dla* $u \in E$ *spełniających* $\|u\| = \rho$*;*

*3. istnieje element* $u_1$ *w* $E$ *taki, że*

$$\|u_1\| \geq \rho,\ J(u_1) < \alpha.$$

*Wówczas* $J$ *osiąga wartość krytyczną* $c \geq \alpha$*. Co więcej,* $c$ *można scharakteryzować poprzez*

$$\inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} J(u),$$

*gdzie*

$$\Gamma = \{g \in C([0,1],E) : g(0) = 0,\ g(1) = u_1\}.$$

Lemat o przełęczy górskiej jest również wynikiem dotyczącym rozwiązalności równania $J'(x) = 0$. Skoro wartość krytyczna $c > 0$ oraz $J(0) = 0$, to od razu widzimy, że rozwiązanie zerowe, czyli trywialne, jest wykluczone.

W przypadku przestrzeni skończenie wymiarowej jak pamiętamy spełanianie warunku Palais–Smale'a jest zagwarantowane jeśli funkcjonał jest koercytywny. Stąd mamy wniosek

**Wniosek 3.3.2.** *Załóżmy, że* $J \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ *jest korecytywny. Spełnione są warunki 1.-3. z* ***twierdzenia 3.3.1.*** *Wówczas* $J$ *osiąga wartość krytyczną* $c \geq \alpha$*. Co więcej,* $c$ *można scharakteryzować poprzez*

$$\inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} J(u).$$

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia o przełęczy górskiej jest twierdzenie o trzech punktach krytycznych, które dla funkcji jednej zmiennej jest dość intuicyjne. A mianowicie: załóżmy, że $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy $C^1$ i ma dwa różne ścisłe minima lokalne osiągane w punktach $x_1 \neq x_2$ takich, że $f(x_1) \leq f(x_2) = 0$. Wtedy ma również punkt maksimum lokalnego $x_3$, dla którego $f(x_3) > 0$. Łatwo to wykazać, przy założeniu, że $f(x_1) = f(x_2) = 0$ biorąc przedział $[x_1, x_2]$. Skoro oba minima są ścisłe, to istnieją punkty w przedziale $(x_1, x_2)$, w których funkcja jest dodatnia. A ponieważ osiąga na $[x_1, x_2]$ kres górny, to musi być on dodatni, czyli osiągnięty w $x_3 \in (x_1, x_2)$. Z reguły Fermata wynika, że $f'(x_3) = 0$ oraz $f(x_3) > 0$.

Mamy następujące twierdzenie

**Twierdzenie 3.3.3** (Pucci-Serrin)**.** *Niech $E$ będzie przestrzenią Banacha oraz niech $J : E \to \mathbb{R}$ funkcjonałem klasy $C^1$ spełniającym warunek Palais-Smale i takim, że $0_E$ jest argumentem ścisłego minimum lokalnego. Jeżeli istnieje $e \neq 0_E$ taki, że $J(e) \leqslant J(0_E)$, to istnieje również punkt krytyczny $\bar{x}$ nie będący argumentem minimum lokalnego i taki, że $J(\bar{x}) > J(0_E)$.*

## 3.4. Zastosowanie do odwracalności odwzorowań

Lemat o przełęczy górskiej może być wykorzystany do badania globalnej odwracalności odwzorowań, tzn. mając odwzorowanie odwracalne lokalnie (np. spełniające założenia twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie) uzyskujemy, iż odwzorowanie to jest odwracalne globalnie. Dokładniej rzecz ujmiemy wprowadzając potrzebne definicje. Zanim je podamy rozważymy dokładniej odwracalność funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ klasy $C^1$ takiej, że $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Wiemy wtedy, że $f$ jest funkcją ściśle monotoniczną (skoro $f'$ jest ciągłe i nie jest zerem, to ma stały znak, czyli jest ściśle monotoniczne). Zatem $f$ jest odwracalane oraz $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, co wiemy z klasycznych twierdzeń, jest również klasy $C^1$. Chcielibyśmy, aby $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Jednak może się zdarzyć iż $f_1(\mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}$ jak na przykład dla funkcji $f_1(x) = \operatorname{arctg} x$. Z kolei dla funkcji $f_2(x) = x^3 + x$ mamy $f_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ponieważ obie te funkcje spełniają warunek $f_i^{'}(x) \neq 0$, $i = 1, 2$, dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$, musi być jakaś inna własność, której nie dzielą. Istotnie, mamy bowiem, że $x \to$

$\frac{1}{2}|f_1(x)|^2$ nie jest koercytywna na $\mathbb{R}$, a funkcja $x \to \frac{1}{2}|f_2(x)|^2$ koercytywna na $\mathbb{R}$ jest. Czemu akurat $x \to \frac{1}{2}|f_i(x)|^2$ skoro te same własności mają $x \to \frac{1}{2}|f_i(x)|$ dla $i = 1,2$? Odpowiedź jest prosta: funkcja $\to \frac{1}{2}|f_i(x)|$ dla $i = 1,2$, nie jest różniczkowalna. A różniczkowalność dla badanych przez nas metod jest nieodzowna. W jaki sposób wykorzystuje się te własność w tym przypadku? Mamy prosty rezultat, który udowodnimy pozornie skomplikowaną metodą, mającą jednak tę zaletę, że z łatwością przeniesie się na przypadek nieskończenie wymiarowy.

**Stwierdzenie 3.4.1.** *Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^1$ taką, że $f'(x) \neq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz taką, że funkcja $x \to \frac{1}{2}|f(x)|^2$ jest koercytywna na $\mathbb{R}$. Wtedy $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest również klasy $C^1$ oraz $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (czyli $f$ jest globalnie odwracalna).*

**Dowód.** Pokażemy najpierw, że $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $y \in \mathbb{R}$. Skoro $x \to \frac{1}{2}|f(x)|^2$ *jest koercytywna na* $\mathbb{R}$, to również $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{1}{2}|f(x) - y|^2 = \frac{1}{2}(f(x) - y)^2$$

jest koercytywna dla dowolnego $y \in \mathbb{R}$. Zatem posiada argument minimum, który oznaczamy przez $x_0$. Korzystając z **Reguły Fermata (twierdzenie 2.3.8.)** widzimy, że $x_0$ spełnia następującą relację

$$(f(x_0) - y)\ f'(x_0) = 0.$$

A skoro $f'(x_0) \neq 0$, to $f(x_0) = y$.

Wykażemy teraz, że argument minimum jest dokładnie jeden (nie korzystając z wypukłości). Przypuśćmy, że dla pewnego $y \in \mathbb{R}$ są dwa różne argumenty minimum $x_1 \neq x_2$. Wtedy $g(x_1) = g(x_2) = 0$, ale oczywiście funkcja $g$ nie jest stale równa zeru na odcinku $[x_1, x_2]$, a zatem ma we wnętrzu tego przedziału argument maksimum $v$ taki, że $g(v) > 0$. Ponadto, $g'(v) = 0$, czyli zgodnie z poprzednią częścią dowodu $f(v) - y = 0$. Ale to oznacza, że $g(v) = 0$ i otrzymana sprzeczność kończy dowód. ∎

Przeniesienie powyżej podanej argumentacji na przypadek już nawet przestrzeni skończenie wymiarowej o wymiarze większym niż 1 jest kłopotliwe.

O ile pierwsza część argumentacji przepisze się dosłownie, to druga część nie będzie mogła być zastosowana. Wydaje się więc, że trzeba tu będzie w inny sposób uzyskać punkt krytyczny. **Twierdzenie 3.3.3** wydaje się być dobrym narzędziem do rozwiązania tego problemu. Inne trudności pojawiają się w przestrzeni nieskończonego wymiaru. Wtedy bowiem koercytywność nie wystarcza aby zagwarantować istnienie argumentu minimum przy braku słabej półciągłości z dołu. Przypominając Zasadę Wariacyjną Ekelanda widzimy, że jej zastosowanie przy warunku Palais-Smale'a pozwoli nam zachować argumentację dowodu. Mamy zatem naszkicowaną drogę postępowania. Możemy więc przejść do podania potrzebnych definicji i wyników pomocniczych.

Niech $X, Y$ będą przestrzeniami Banacha. Odwzorowanie $f : X \to Y$ klasy $C^1$ nazywamy dyfeomorfizmem, jeżeli jest bijekcją (tj. iniekcją czyli odwzorowaniem różnowartościowym oraz suriekcją, czyli odwzorowaniem „na") oraz odwzorowanie odwrotne $f^{-1} : Y \to X$ jest również klasy $C^1$. Każdy dyfeomorfizm jest homeomorfizmem (czyli takim ciągłym odwzorowaniem, którego odwrotne też jest ciągłe). Z *Twierdzenia o funkcji odwrotnej* wiadomo, że odwzorowanie $f : X \to Y$ takie, że dla każdego $x \in X$ pochodna (czyli odwzorowanie liniowe i ciągłe) jest odwzorowaniem 'na' tzn. $f'(x)X = Y$ oraz odwracalnym, tzn. istnieje stała $\alpha_x > 0$ taka, że

$$\left\| f'(x)h \right\| \geq \alpha_x \|h\| \text{ dla wszystkich } h \in X$$

jest lokalnym dyfeomorfizmem klasy $C^1$. Jeśli $f'(x)$ spełnia dwa powyższe warunki, to piszemy $f'(x) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$. Oznacza to, że dla każdego $x \in X$ istnieje otoczenie $U$ otwarte w $X$ i takie, że zbiór $f(U)$ jest otwarty w $Y$ oraz $f\big|_U : U \to f(U)$ jest dyfeomorfizmem. Każdy dyfeomorfizm globalny definiuje dyfeomorfizm lokalny. Stąd celem naszym będzie podanie takich założeń przy których każdy dyfeomorfizm lokalny staje się globalnym.

**Twierdzenie 3.4.2** (O globalnym dyfeomorfizmie)**.** *Niech $X$, $Y$ będą przestrzeniami Banacha. Załóżmy, że $f : X \to Y$ jest odwzorowaniem klasy $C^1$, $\eta : Y \to \mathbb{R}_+$ jest funkcjonałem klasy $C^1$ oraz spełnione są następujące warunki*

*(a1)* $\left(\eta(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0\right)$ *oraz* $\left(\eta'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0\right)$*;*

*(a2) dla każdego $y \in Y$ funkcjonał $\varphi : X \to \mathbb{R}$ dany wzorem*

$$\varphi(x) = \eta(f(x) - y)$$

*spełnia warunek Palais-Smale'a;*

*(a3) $f'(x) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$ dla każdego $x \in X$ .*

*Wówczas $f$ jest dyfeomorfizmem.*

**Dowód.** Z warunku (a3) wynika, że $f$ definiuje lokalny dyfeomorfizm. Pokażemy, iż jest on globalny, czyli, że $f$ jest suriekcją oraz iniekcją.

Ustalmy $y \in Y$. Z reguły różniczkowania złożonego (twierdzenie 2.4.3) mamy, że $\varphi$ jest odwzorowaniem klasy $C^1$ jako złożenie dwóch odzworowań tej klasy. Pochodna $\varphi$ wyraża się dla każdego $x \in X$ następującym wzorem

$$\varphi'(x) = \eta'(f(x) - y) \circ f'(x) = 0.$$

Z założenia $\varphi$ jest ograniczone od dołu oraz spełnia warunek Palais-Smale'a. Zatem z **twierdzenia 3.2.3** istnieje argument minimum $\overline{x}$. Korzystając ze wzoru na pochodną $\varphi$ oraz z **Reguły Fermata** (**twierdzenie 2.3.7**) mamy

$$\varphi'(\overline{x}) = \eta'(f(\overline{x}) - y) \circ f'(\overline{x}) = 0.$$

Z warunku (a3) wiemy, że $f'(\overline{x})$ jest odwracalne. Zatem

$$\eta'(f(\overline{x}) - y) = 0$$

Z warunku (a1) wynika, że

$$f(\overline{x}) - y = 0.$$

Stąd $f$ jest suriekcją.

Wykażemy teraz, że $f$ jest iniekcją przpuszczając, że dla pewnego $a \in Y$ istnieją $x_1$ oraz $x_2$, $x_1 \neq x_2$, $x_1$, $x_2 \in X$, takie, że $f(x_1) = f(x_2)$. Zastosujemy **twierdzenie 3.3.3.** Zdefiniujmy funkcjonał $\psi : X \to \mathbb{R}$ wzorem

$$\psi(x) = \eta(f(x + x_2) - f(x_2))$$

Połóżmy $e = x_1 - x_2$. Wtedy $\psi(0) = \psi(e) = 0$. Ponadto, $0_E$ jest argumentem ścisłego minium lokalnego. Gdyby tak nie było mielibyśmy sprzeczność z założeniem, że $f$ jest lokalnie odwaracalny (musi więc istnieć otoczenie $0_X$ na którym $x \to f(x+x_2)$ jest odwracalna). Zatem na podstawie **twierdzenia 3.3.3** funkcjonał $\psi$ posiada punkt krytyczny $v$ taki, że $\psi(v) > 0$ oraz $v \neq 0$, $v \neq e$. Skoro $v$ jest punktem krytycznym, to

$$\psi'(v) = \eta'(f(v+x_2) - f(x_1)) \circ f'(v+x_2) = 0.$$

Znów skoro odwzorowanie $f'(v+x_2)$ jest odwracalne widzimy, że $\eta'(f(v+x_2) - f(x_1)) = 0$. Zatem $f(v+x_2) - f(x_1) = 0$. A to oznacza iż $\psi(v) = 0$, czyli mamy sprzeczność. ∎

## 3.5. Zastosowanie twierdzenia o globalnym dyfeomorfizmie

Rozważymy przykład odwzorowania danego wzorem $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f_a(x,y) = (x + ax, x^3 + y)$$

dla dowolnego $a \in (-1,1)$. Stosowanie twiedzenia o globalnym dyfeomofizmie może być w tym przypadku nieco kłopotliwe. Ale jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, iż w przestrzeni skończenie wymiarowej funkcjonał koercytywny spełnia warunek Palais-Smale oraz, że $f'(x) \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det f'(x) \neq 0$, to mamy

**Twierdzenie 3.5.1** (Hadamarda)**.** *Załóżmy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem klasy $C^1$ takim, że*

*(i)* $\det f'(x) \neq 0$ *dla dowolnego* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

*(ii)* $\|f(x)\| \to \infty$ *jeżeli* $\|x\| \to \infty$.

*Wtedy $f$ jest dyfeomorfizmem.*

Aby zastosować powyższe twierdzenie wykażemy:

- dla każdego $a \in (-1,1)$ i dowolnego $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ macierz że $f'(x)$ jest nieosobliwa

- $\|f_a(x,y)\| \to \infty$ gdy $\|(x,y)\| \to \infty$.

Zauważmy, że

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 1+a & 0 \\ 3x^2 & 1 \end{bmatrix},$$

skąd od razu widzimy, ze $f'(x)$ jest nieosobliwa. Pozostaje wykazać, że $f_a$ *jest koercytywna względem dowolnej normy* (gdyż wszystkie normy w przestrzeni skończonego wymiaru są równoważne).

Zbadamy koercytywność funkcji $f_a$ względem normy $l^1$ na $\mathbb{R}^2$. Dla dowolnego $a \in (-1,1)$ oznaczmy

$$u_a(x,y) = \|f_a(x,y)\|_1 = |x+ax| + \left|x^3+y)\right|, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zauważmy, że

$$\begin{gathered} u_a(x,y) \geq |x| - |a|\cdot|x| + \left|x^3+y)\right| \geq \\ (1-|a|)\left(|x| + \left|x^3+y)\right|\right) = (1-|a|)\,u_0(x,y) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Rozważmy teraz zbiory:

$$B_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\right\},$$

$$B_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\right\},$$

$$B_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\right\},$$

$$B_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0\right\},$$

$$B_{31} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -\sqrt[3]{y} \geq 0, x \geq 1\right\},$$

$$B_{32} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq -\sqrt[3]{y}\right\},$$

$$B_{33} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\right\}.$$

Zauważmy, że

$$B_3 \subset B_{31} \cup B_{32} \cup B_{33}$$

oraz

$$\bigcup_{i=1}^{4} B_i = \mathbb{R}^2.$$

Wykażemy, że dla dowolnie ustalonego $a \in (-1,1)$ funkcja $f_a$ spełnia na każdym ze zbiorów $B_i$, $i = 1,2,3,4$ oraz $B_{3i}$, $i = 1,2,3$ takie oszcowania, które prowadzą do jej koercytywności.

Jeśli $(x,y) \in B_1$ to

$$u_0(x,y) = x + x^3 + y \geq x + y = |x| + |y|.$$

Zauważmy ponadto,

$$u_a(-x,-y) = u_{-a}(x,y) \tag{3.2}$$

i stąd

$$u_a(x,y) \geq (1-|a|)u_0(x,y) \geq (1-|a|)(|x|+|y|)$$

dla każdego $(x,y) \in B_1 \cup B_2$.

Jeśli $(x,y) \in B_{31}$ to

$$\begin{aligned} u_0(x,y) = x + x^3 + y \geq x &= \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}|x| \\ &\geq \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}\sqrt[3]{|y|} \geq \frac{1}{2}\sqrt[3]{|x|+|y|} \end{aligned}$$

Dla $(x,y) \in B_{32}$ rozważmy funkcję $\varphi(t) = t - t^3$, $t \in [1,\infty)$. Zauważmy, że funkcja $\varphi$ jest niemalejąca oraz

$$\varphi(x) \geq \varphi\left(-\sqrt[3]{y}\right) = -\sqrt[3]{y} + y.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} u_0(x,y) &= x - x^3 - y = \varphi(x) - y \geq -\sqrt[3]{y} + y - y \\ &= \frac{1}{2}\sqrt[3]{|y|} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{|y|} \geq \frac{1}{2}|x| + \frac{1}{2}\sqrt[3]{|y|} \geq \frac{1}{2}\sqrt[3]{|x|+|y|} \end{aligned}$$

Jeśli $(x,y) \in B_{33}$ mamy

$$u_0(x,y) \geq |x| + |y| - |x|^3 \geq |x| + |y| - 1$$

Skoro $u_0$ jest koercytywna na $B_{31}, B_{32}.B_{33}$ to $f_a$ jest koercytywna na $B_3$. Z waunku (3.1) oraz koercytywności $f_a$ na $B_3$ wynika koercytywność $f_a$ na $B_4$.

Podsumowując, pokazaliśmy, że *$f_a$ dla dowolnego $a \in (-1,1)$ jest dyfeomorfizmem.*

## 3.6. Zastosowania w równaniach algebraicznych

Podamy zastosowania **twierdzenia 3.5.1** do (jednoznacznej) rozwiązalności równań typu

$$Ax = F(x), \tag{3.3}$$

gdzie $A$ jest pewną macierzą (niekoniecznie symetryczną) wymiaru $n \times n$ oraz $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem klasy $C^1$. Będziemy musieli przyjąć pewne założenia dotyczące odzworowania $F$ oraz macierzy $A$. Założenia te pozwolą nam zastosować wprowadzone wcześniej narzędzie teoretyczne.

Oznaczmy przez $A^*$ macierz transponowaną do macierzy $A$. Wtedy macierz $A^*A$ jest dodatnio półokreślona. Jeśli jednak $A$ jest macierzą nieosobliwą, to macierz $A^*A$ jest dodatnio określona, czyli ma $n$ różnych dodatnich wartości własnych, które możemy uporządkować następująco:

$$0 < \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Po tych przygotowaniach możemy już podać następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 3.6.1.** *Załóżmy, że macierz $A$ jest nieosobliwa, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem klasy $C^1$ oraz, że spełnione są następujące warunki:*

*(i). istnieje stała $0 < a < \sqrt{\lambda_1}$ taka, że $\|F(x)\| \leq a\|x\|$ dla $x \in \mathbb{R}^n$,*

*(ii).* $\det\big(A - F'(x)\big) \neq 0$ *dla $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Wówczas równanie* (3.3) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

**Dowód.** Musimy uzasadnić, iż spełnione są założenia **twierdzenia 3.5.1.** Definiujemy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ następującym wzorem $\varphi(x) = Ax - F(x)$. Skoro zachodzi, że $\det\big(\varphi'(x)\big) \neq 0$ dla $x \in \mathbb{R}^n$, wystarczy pokazać, że $x \to \big\|\varphi(x)\big\|$ jest koercytywny, skąd otrzymamy od razu, iż $x \to \left\|\varphi(x)\right\|^2$ jest koercytywny. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(x)\right\| &= \|Ax - F(x)\| \geq \|Ax\| - \|F(x)\| \\ &\geq \sqrt{\langle A^*Ax, x\rangle} - a\|x\| \geq \left(\sqrt{\lambda_1} - a\right)\|x\|\end{aligned}$$

Stąd na podstawie **twierdzenia 3.5.1.** otrzymujemy tezę. ∎

Możemy podać swego rodzaju analogon powyższego twierdzenia w następujący sposób:

**Twierdzenie 3.6.2.** *Załóżmy, że macierz $A$ jest nieosobliwa, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem klasy $C^1$ oraz, że spełnione są następujące warunki:*

*(i). istnieje stała $b > \sqrt{\lambda_N}$ taka, że $\|F(x)\| \geq b\|x\|$ dla $x \in \mathbb{R}^n$,*

*(ii).* $\det\left(A - F'(x)\right) \neq 0$ *dla $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Wówczas równanie* (3.3) *posiada dokładnie jedno rozwiązanie.*

**Dowód.** Definiujemy $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ następującym wzorem $\varphi(x) = F(x) - Ax$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(x)\right\| &= \|F(x) - Ax\| \geq \|F(x)\| - \|Ax\| \\ &\geq b\|x\| - \sqrt{\langle A^*Ax, x\rangle} \geq \left(b - \sqrt{\lambda_N}\right)\|x\|\end{aligned}$$

Stąd na podstawie **twierdzenia 3.5.1.** otrzymujemy tezę. ∎

Podamy na koniec przykład macierzy i odwzorowania $F$, które spełniają powyżej sformułowane założenia.

**Przykład 3.6.3.** Rozważmy macierz

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

oraz funkcję $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daną wzorem

$$F(x, y) = \left(x^3 + y, 4x + y + y^3\right)$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^2$ rozważamy z normą euklidesową

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Przypomnijmy, że

$$\|(x,y)\| \le 2^{\frac{1}{3}} \sqrt[6]{x^6+y^6}$$

Skoro

$$F(x,y) = \left(x^3, y^3\right) + (0, 4x) + (y, y),$$

to mamy

$$\begin{aligned}\|F(x,y)\| &\ge \left\|\left(x^3,y^3\right)\right\| - \|(0,4x)\| - \|(y,y)\| = \sqrt{x^6+y^6} - 4\cdot|x| - \sqrt{2}\,|y| \\ &\ge \frac{1}{2}\,\|(x,y)\|^3 - 4\,(|x|+|y|) \ge \frac{1}{2}\,\|(x,y)\|^3 - 4\sqrt{2}\,\|(x,y)\|\,.\end{aligned}$$

Połóżmy

$$\varphi(x,y) = F(x,y) - A(x,y), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Stąd

$$\begin{aligned}\left\|\varphi(x,y)\right\| &\ge \|F(x,y)\| - \|A(x,y)\| \\ &\ge \frac{1}{2}\,\|(x,y)\|^3 - 4\sqrt{2}\,\|(x,y)\| - \|A\|\,\|(x,y)\| \\ &= \|(x,y)\|\left(\frac{1}{2}\,\|(x,y)\|^2 - \left(4\sqrt{2} + \|A\|\right)\right).\end{aligned}$$

Czyli funkcjonał $(x,y)\to\left\|\varphi(x,y)\right\|$ jest korecytywny.

Od razu widać, że

$$F'(x,y) = \begin{bmatrix} 3x^2+1 & 0 \\ 4 & 3y^2+1 \end{bmatrix},$$

dla $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Ponadto,

$$F'(x,y) - A = \begin{bmatrix} 3x^2+2 & 0 \\ 0 & 3y^2+3 \end{bmatrix}.$$

Stąd od razu wynika, że

$$\det\left(F'(x,y) - A\right) > 0.$$

ROZDZIAŁ 4

# Jeszcze o wypułości i pojęciach związanych

## 4.1. Wypukłość a argumenty minimum

Interpretacja graficzna funkcji wypukłych na prostej naprowadza nas na **definicję nadwykresu funkcji** $f : E \to \mathbb{R}$**,** którym nazywamy zbiór

$$\mathrm{Epi}(f) = \{(x, \alpha) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

Nadwykres dla funkcji wypukłych na prostej jest zbiorem wypukłym - tyle przynajmniej sugerują szkicowe ilustracje. Mamy następujące, intuicyjnie oczywiste, twierdzenie

**Twierdzenie 4.1.1.** *Funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy jego nadwykres jest wypukły.*

**Dowód.** Wykażemy najpierw, że jeśli $f$ jest wypukły to $\mathrm{Epi}(f) \subset E \times \mathbb{R}$ wypukły. Niech

$$(x, \alpha_x), (y, \alpha_y) \in \mathrm{Epi}(f)$$

oraz $\alpha \in [0, 1]$. Mamy

$$\alpha\alpha_x + (1 - \alpha)\alpha_y \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y) \geq f(\alpha x + (1 - \alpha)y)$$

Zatem $\mathrm{Epi}(f)$ jest wypukły.

Niech $x, y \in E$, oraz weźmy $\alpha \in [0,1]$. Wtedy pary $(x, f(x)), (y, f(y)) \in \mathrm{Epi}(f)$. Z wypukłości $\mathrm{Epi}(f)$ mamy

$$(\alpha x + (1-\alpha)y, \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y)) \in \mathrm{Epi}(f)$$

czyli

$$\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geq f(\alpha x + (1-\alpha)y).$$ ■

Podstawowe własności funkcjonałów wypukłych (wykorzystywane przez nas dalej) są następujące

**Twierdzenie 4.1.2** (Kryteria wypukłości). *Rozważmy funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$. Wówczas*

*1. jeśli $f$ jest wypukły to*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad f^{\alpha} \text{ jest wypukły}$$

*2. Jeśli $f \in C^1(E, \mathbb{R})$, to $f$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy gdy*

$$\forall u, v \in E \quad f(u) - f(v) \geq \left\langle f'(v), (u-v) \right\rangle_{E^*, E}$$

**Dowód.** Ad. **1.** Niech $x, y \in f^{\alpha}$ oraz niech $\lambda \in [0,1]$. Wtedy

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha.$$

Czyli $f^{\alpha}$ jest wypukły (zbiór $\varnothing$ jest wypukły z definicji).

Ad. **2.** Niech $f$ będzie wypukły. Niech $x, y \in E$ oraz niech $\lambda \in (0,1]$. Mamy

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Stąd

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$$

$$\frac{f((1-\lambda)x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x).$$

Uwzględniając związek pochodnej z pochodną kierunkową mamy

$$\langle f'(x),(y-x)\rangle_{E^*,E} = \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{f((1-\lambda)x+\lambda y)-f(x)}{\lambda} \le f(y)-f(x)$$

Odwrotnie, niech $x, y \in E$ oraz $\lambda \in [0,1]$. Dla par

$$(x, \lambda x + (1-\lambda)y), (y, \lambda x + (1-\lambda)y)$$

mamy

$$f(x) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \langle f'(\lambda x + (1-\lambda)y), (x - \lambda x - (1-\lambda)y)\rangle_{E^*,E}$$

$$f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \langle f'(\lambda x + (1-\lambda)y), (y - \lambda x - (1-\lambda)y)\rangle_{E^*,E}$$

Stąd

$$f(x) \ge f(\lambda x + (1-\lambda)y) + (1-\lambda)f'(\lambda x + (1-\lambda)y)\circ(x-y) \quad /\cdot\lambda$$

$$f(y) \ge f(\lambda x + (1-\lambda)y) + \lambda f'(\lambda x + (1-\lambda)y)\circ(y-x) \quad /\cdot(1-\lambda)$$

Dodając stronami otrzymujemy

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \ge f(\lambda x + (1-\lambda)y).$$

■

**Uwaga 4.1.3.** *Wypukłość zbioru $f^\alpha$ nie gwarantuje wypukłości funkcjonału $f$. Jako przykład niech posłuży niewypukła funkcja $f(x) = x^3$.*

**Twierdzenie 4.1.4** (Wypukłość a argumenty minimum)**.** *Niech $J : E \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem wypukłym. Wtedy zachodzą następujące własności*

*1. każdy punkt krytyczny (o ile funkcjonał jest różniczkowalny co najmniej w sensie Gâteaux), czyli każde rozwiązanie równania*

$$f'(x) = 0$$

*jest argumentem minimum funkcjonału $f$;*

*2. zbiór argumentów minimum jest wypukły;*

*3. jeśli $f$ jest ściśle wypukły, to argument minimum jest co najwyżej jeden;*

*4. każdy argument minimum lokalnego jest argumentem minimum globalnego;*

**Dowód.**

**1.** Korzystając z wypukłości $f$ dla dowolnego $u = x \in E$ oraz $v = \overline{x}$ będącego punktem krytycznym, mamy

$$f(x) \geq f(\overline{x}) + \langle f'(\overline{x}), (x-\overline{x})\rangle_{E^*,E} = f(\overline{x})$$

Czyli $\overline{x}$ jest argumentem minimum globalnego.

**2.** Wybierzmy dwa argumenty minimum, oznaczmy je przez $x_1, x_2 \in E$ oraz niech $\lambda \in [0,1]$. Dla $\lambda = 0$ oraz $\lambda = 1$ rozumowanie jest oczywiste. Dla pozostałych $\lambda$ mamy

$$\min_{x\in E} f(x) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \min_{x\in E} f(x)$$

Czyli kombinacja wpukła $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ jest argumentem minimum dla każdego $\lambda \in [0,1]$. Zatem zbiór argumentów minimum jest wypukły.

**3.** Niech $\lambda \in (0,1)$ będzie dowolna, a $f$ niech będzie ściśle wypukły. Przypuśćmy nie wprost, że możemy wybrać dwa argumenty minimum $x_1, x_2 \in E$ różne od siebie. Zatem:

$$\min_{x\in E} f(x) \leq f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) = \min_{x\in E} f(x)$$

Czyli otrzymaliśmy sprzeczność.

**4.** Niech $\overline{x}$ będzie argumentem minimum lokalnego, zatem bedzie to argument minimum (globalnego) w pewnej kuli domkniętej $B(\overline{x}, r)$, tzn.

$$f(x) \geq f(\overline{x}) \quad \text{dla } x \in B(\overline{x}, r)$$

Weźmy dowolny $x \in E \setminus B(\overline{x}, r)$. Połóżmy

$$\lambda = \frac{r}{\|x-\overline{x}\|} < 1.$$

Zauważmy, że punkt $\lambda x + (1-\lambda)\overline{x}$ należy do kuli $B(\overline{x}, r)$. Istotnie,

$$\|\lambda x + (1-\lambda)\overline{x} - \overline{x}\| = \|\lambda(x-\overline{x})\| = \frac{r}{\|x-\overline{x}\|} \cdot \|x-\overline{x}\| = r.$$

Oczywistym jest, iż mimimum na pewnej kuli jest niewiększe niż minimum globalne (o ile ono istnieje - musimy pamiętać, że nie mamy zagwarantowanego istnienia argumentu minimum globalnego). Zauważmy, że dla dowolnego $x \in E$ i dowolnego $\lambda \in (0,1)$ zachodzi

$$f(\overline{x}) \le f(\lambda x + (1-\lambda)\overline{x}) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\overline{x}).$$

Stąd

$$\lambda f(\overline{x}) \le \lambda f(x)$$

a zatem

$$f(\overline{x}) \le f(x)$$

Czyli $\overline{x}$ jest argumentem minimum globalnego. ∎

**Uwaga 4.1.5.** *Jeśli f jest różniczkowalny w sensie Gâteaux, wypukły oraz $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in E$, to $f$ nie posiada argumentu minimum.*

Zauważmy na koniec, że wypukłość funkcjonału $f$ nie jest warunkiem wystarczającym istnienia rozwiązania równania $f'(x) = 0$, gdyż mówi jedynie, że każdy punkt krytyczny jest argumentem minimum. Są bowiem funkcjonały wypukłe, jak np. $f(x) = e^x$, które nie mają argumentów minimum. Stąd waga powyższego twierdzenia nie jest aż tak duża jakbyśmy się mogli spodziewać. W zasadzie dostarcza ono informacji odwrotnej od tej, której poszukujemy. My koncetrujemy się na poszukiwaniu rozwiązania równania $f'(x) = 0$ szukając argumentu minimum. Powyższe twierdzenie mówi zaś, iż dla funkcji wypukłej każde rozwiązanie równania $f'(x) = 0$ jest argumentem minimum wypukłego funkcjonału $f$.

Przejdziemy na koniec do ciągłości funkcji wypukłej. Tutaj okazuje się, że własność geometryczna (wypukłość) ma bardzo silny związek z własnością topologiczną (ciągłość).

**Twierdzenie 4.1.6.** *Niech $C \subset E$ będzie otwartym wypukłym podzbiorem $E$. Niech $f : C \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonalem wypukłym, ograniczonym w pewnym otoczeniu punktu $x_0 \in C$. Wtedy $f$ jest ciągły na $C$.*

**Uwaga 4.1.7.** *Z dowodu, który możemy znaleźć np. w monografii Jahna [4], wynika, że $f$ jest funkcjonałem lokalnie lipschitzowskim.*

Podsumujemy na koniec związki półciągłości z dołu z domkniętością zbiorów poziomicowych oraz nadwykresu.

**Twierdzenie 4.1.8** (Półciągłość z dołu a nadwykres)**.** *Niech $f : D \to \mathbb{R}$, gdzie $D \subseteq E$ jest domknięty. Wtedy następujące warunki są równoważne*

*1. $f$ jest półciągły z dołu na $D$,*

*2. nadwykres* $\mathrm{Epi}(f)$ *jest domknięty,*

*3. zbiory $f^{\alpha}$ są domknięte dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$.*

**Dowód.** Wykazaliśmy już, że *$f$ jest półciągły z dołu na $D$* wtedy i tylko wtedy, gdy *zbiory $f^{\alpha}$ są domknięte dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$*. Wystarczy więc wykazać iż warunki 1. i 2. są równoważne. Weźmy ciąg $(x_n, \alpha_n) \in \mathrm{Epi}(f)$ zbieżny do pewnego $(x_0, \alpha_0)$, czyli $x_n \to x_0$ oraz $\alpha_n \to \alpha_0$. Skoro $\alpha_n \to \alpha_0$, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy dla dostatecznie dużych $n$, że

$$f(x_n) \leq \alpha_n \leq \alpha_0 + \varepsilon$$

Skoro $f$ jest półciągły z dołu mamy

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \leq \alpha_0 + \varepsilon.$$

Zatem

$$f(x_0) \leq \alpha_0 + \varepsilon$$

dla dowolnego $\varepsilon > 0$, czyli $f(x_0) \leq \alpha_0$ oraz $(x_0, \alpha_0) \in \mathrm{Epi}(f)$. Zatem $\mathrm{Epi}(f)$ jest domknięty.

Załóżmy, że $\mathrm{Epi}(f)$ jest domknięty. Ustalmy $\alpha \in \mathbb{R}$, takie, ze $f^{\alpha}$ jest niepusty. Wtedy $f^{\alpha} \times \{\alpha\}$ jest domknięty, a zatem $f^{\alpha}$ jest domknięty. A stąd $f$ jest półciągły z dołu. ∎

## 4.2. Wariacja drugiego rzędu i istnienie argumentu minimum

Wiadomo z klasycznego kursu analizy, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wszędzie różniczkowalna, to jest sensowne definiować jej drugą pochodą, czyli pochodną pierwszej pochodnej. W przypadku odwzorowań pomiędzy przestrzeniami Banacha rzecz się nieco komplikuje. Pochodna jest wtedy operatorem liniowym i ciągłym, natomiast druga pochodna staje się operatorem dwuliniowym a jej wyznaczanie może być już nieco bardziej skomplikowane. Z pomocą przyjdzie nam jednak powrót do pojęcia pierwszej wariacji w sensie Lagrange'a i zebranie tych jej własności, które możemy wykorzystać do badania istnienia argumentu minimum funkcjonału. Przypomnijmy, że istnienie wariacji Gâteaux w punkcie $\overline{x}$ oznacza, iż funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $g(t) = f(\overline{x} + th)$, gdzie $h \in E$, jest różniczkowalna w $t_0 = 0$. Równoważnie więc możemy zdefiniować pierwszą wariację w sensie Gâteaux następująco (od razu definiując wariację dowolnego rzędu):

**Definicja 4.2.1.** *Niech $x_0 \in E$, $U(x_0)$ niech będzie otoczeniem otwartym punktu $x_0$, $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ niech będzie funkcjonalem, $h \in E$. Połóżmy funkcję $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $g(t) = f(x_0 + th)$. Funkcjonał $f$ posiada $n-$tą wariację w sensie Lagrange'a, w kierunku $h$* oznaczaną $f^{(n)}(x_0; h)$, *jeżli funkcja $g$ jest $n-$krotnie różniczkowalna w* $t_0 = 0$. *Jeżeli funkcjonał $f$ posiada $n-$tą wariację w sensie Lagrange'a w każdym kierunku $h$, to mówimy, że $f$ posiada $n-$tą wariację Gâteaux.*

**Przykład 4.2.2.** Niech $H$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta. W **przykładzie 2.3.2** wyznaczyliśmy pochodną Gâteaux funkcjonału $x \mapsto \langle x, h_0 \rangle$, gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznacza iloczyn skalarny w $H$ oraz $h_0$ jest ustalony oraz $x \mapsto \frac{1}{2}\langle x, x \rangle$. Stąd dla funkcjonału $f(x) = \frac{1}{2}\langle x, x \rangle$ widzimy, że $f^{(2)}(x_0; h) = \langle h, h \rangle$ dla dowolnych $x_0, h \in E$ oraz $f^{(n)}(x_0; h) = 0$ dla $n \geq 3$.

Zajmiemy się teraz warunkiem wystarczającym istnienia argumentu minimum przy wykorzystaniu wariacji drugiego rzędu.

**Twierdzenie 4.2.3.** *Niech $x_0 \in E$, $U(x_0)$ niech będzie otoczeniem otwartym punktu $x_0$, $f : U(x_0) \to \mathbb{R}$ niech będzie funkcjonalem. Załóżmy, że $f$ posiada wariację Gâteaux drugiego rzędu w na $U(x_0)$ oraz $f'(x_0;h) = 0$ dla dowolnego $h \in E$. Załóżmy ponadto, że istnieje stała $c > 0$ taka, że*

$$f^{(2)}(x_0;h) \geq c\,\|h\|^2 \text{ dla dowolnego } h \in E$$

*oraz, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta(\varepsilon)$ takie, że*

$$\left|f^{(2)}(x_0;h) - f^{(2)}(x;h)\right| \leq \varepsilon\,\|h\|^2$$

*dla dowolnych $x, h \in E$ takich, że $\|x - x_0\| \leq \eta(\varepsilon)$. Wówczas $x_0$ jest argumentem minimum lokalnego funkcjonału $f$ na $U(x_0)$.*

**Dowód.** Zastosujemy wzór Taylora do funkcji pomoczniej $g$. Skoro $g'(0) = f'(x_0;h) = 0$, to mamy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = g(1) - g(0) = \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0 + \theta h; h)$$

dla wszystkich $h \in E$, gdzie $0 < \theta < 1$. Niech $\varepsilon = \frac{c}{2}$ i dobierzmy $\eta(\varepsilon)$ w taki sposób, że

$$\left|f^{(2)}(x_0 + \theta h; h) - f^{(2)}(x_0;h)\right| \leq \frac{c}{2}\,\|h\|^2$$

dla$\|h\| \leq \eta(\varepsilon)$. Zauważmy, że

$$\frac{1}{2} f^{(2)}(x_0 + \theta h; h) = \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0;h) + \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0 + \theta h; h) - \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0;h).$$

Stąd dla tak wybranych $h$ mamy

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{1}{2} f^{(2)}(x_0 + \theta h; h) \geq \frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{2}c\right)\|h\|^2.$$

Czyli $x_0$ jest argumentem minimum lokanego. ∎

**Twierdzenie 4.2.4** (Warunek wystarczający wypukłości drugiego rzędu)**.** *Załóżmy, że $C \subset E$ jest otwarty i wypukły, $f : C \to \mathbb{R}$ posiada na $C$ drugą wariację oraz dla dowolnych $u \in C$, $h \in E$ zachodzi*

$$f^{(2)}(u;h) \geq 0.$$

*Wówczas funkcjonał f jest wypukły na C. Jeżeli*

$$f^{(2)}(u;h) > 0$$

*dla $h \neq 0$, to f jest ściśle wypukły.*

Korzystając z **twierdzenia 4.2.4** można z łatwością wykazać wypukłość funkcjonału badanego w **przykładzie 2.3.2.**

**Przykład 4.2.5.** Niech $H$ będzie rzeczywistą przestrzenią Hilberta. Weźmy funkcjonał $f : H \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$f(x) = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle = \frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Niech $x \in H$ będzie dowolnie ustalonym punktem. Ustalmy kierunek $h \in H$. Tworzymy funkcję pomocniczą $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$g(t) = f(x + th) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + t\langle x, h\rangle + \frac{1}{2}t^2\|h\|^2.$$

Funkcja $g$ jest klasy $C^2$ na $\mathbb{R}$ oraz

$$g^{//}(t) = \langle h, h\rangle = \|h\|^2,$$

stąd

$$g'(0) = f^{(2)}(x;h) = \|h\|^2 \geq 0$$

and $f^{(2)}(x;h) > 0$ for $h \neq 0$. Wówczas $f$ jest ściśle wypukły.

ROZDZIAŁ 5

# Twierdzenie Weierstrassa w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych

W przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowej można sformułować (i w standardowy sposób udowodnić) klasyczne **Twierdzenie Weierstrassa:**

*Załóżmy $f : E \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem ciągłym, natomiast $D \subset E$ jest pewnym podzbiorem zwartym. Wtedy istnieje $\overline{x} \in D$, taki, że*

$$f(x) \geq f(\overline{x}) \text{ dla } x \in D.$$

Twierdzenie to nie jest jednak dla nas atrakcyjne, ponieważ zbiory zwarte mają w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych puste wnętrza. Należy więc osłabić topologię przestrzeni $E$ w taki sposób, aby wszystkie funkcjonały liniowe i ciągłe na $E$, to znaczy elementy przestrzeni $E^*$, były ciągłe oraz by kule domknięte były w tej nowej topologii zwarte. Pozostanie zagadnienie badania ciągłości funkcjonałów, które nie są liniowe, a które nie będzie proste, gdyż okazuje się, iż osłabiona topologia nie jest metryzowalna. Z pomocą przyjdzie nam jednakowoż wypukłość oraz pewne własności przestrzeni funkcyjnych, w których zadania wariacyjne będą rozważane.

## 5.1. O zbieżności słabej

Teoria związana ze słabymi topologiami jest dość obszerna, przedstawimy tylko takie jej fragmenty, które będą dla nas w dalszym ciągu użyteczne.

**Definicja 5.1.1** (Zbieżność słaba ciągu)**.** *Mówimy, że ciąg $(x_n) \subset E$ jest zbieżny słabo do elementu $x_0 \in E$, jeżeli dla dowolnego $f \in E^*$, zachodzi*

$$\langle f, x_n \rangle_{E^*,E} \to \langle f, x_0 \rangle_{E^*,E} \text{ dla } n \to \infty.$$

*Zbieżność słabą oznaczamy symbolem $x_n \rightharpoonup x_0$; dodatkowo piszemy czasami $x_n \rightharpoonup x_0$ w $E$. Element $x_0$ nazywamy granicą słabą ciągu $(x_n)$.*

Korzystając z ciągłości funkcjonału $f \in E^*$ dostajemy od razu, że każdy ciąg silnie zbieżny jest słabo zbieżny (i obie granice pokrywają się). Istotnie, skoro $x_n \to x_0$, to dla dowolnego $f \in E^*$

$$\lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle_{E^*,E} = \langle f, x_0 \rangle_{E^*,E},$$

zatem $x_0$ jest również słabą granicą ciągu $(x_n)$. Dodatkowo granica słaba jest wyznaczona jednoznacznie. Jeśli $x_n \rightharpoonup x_0$ oraz $x_n \rightharpoonup y_0$, to dla dowolnego $f \in E^*$ mamy

$$\begin{aligned} 0 = \langle f, x_n - x_n \rangle_{E^*,E} &= \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n - x_n \rangle_{E^*,E} \\ &= \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle_{E^*,E} - \lim_{n\to\infty} \langle f, x_n \rangle_{E^*,E} = \langle f, x_0 \rangle_{E^*,E} - \langle f, y_0 \rangle_{E^*,E}. \end{aligned}$$

Czyli dla dowolnego $f \in E^*$ mamy $\langle f, x_0 - y_0 \rangle_{E^*,E} = 0$. Stąd $x_0 = y_0$.

**Przykład 5.1.2.** *Przypomnijmy podany wcześniej przykład ciągu*

$$(1,0,0,...),(0,1,0,0,..),...$$

*z przestrzeni Hilberta $\ell^2$ (ze sfery jednostkowej) ograniczonego i rozbieżnego (i nie zawierającego ani jednego podciągu zbieznego). Zauważmy, że $0_{\ell^2}$ jest jego słabą* *granicą co sprawdzamy bezspośrednim rachunkiem pamiętając, że z* ***Twierdzenia Riesza o reprezentacji*** *wynika, iż dla dowolnego elementu $f \in \left(\ell^2\right)^*$ istnieje dokładnie jeden element $\widetilde{f} \in \ell^2$ taki, że dla dowolnego $x \in \ell^2$ zachodzi*

$$\langle f, x\rangle_{(\ell^2)^*,\ell^2} = \left(\widetilde{f}, x\right),$$

*gdzie*

$$\left(\widetilde{f}, x\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \widetilde{f}_i x_i$$

*oznacza iloczyn skalarny w $\ell^2$. Okazuje się iż w przypadku przestrzeni $\ell^2$ zachodzi $f = \widetilde{f}$ (nie jest to na ogół prawdą w dowolnej przestrznei Hilberta). Skoro $f \in \ell^2$, to szereg $\sum_{i=1}^{\infty} (f_i)^2$ jest zbieżny i korzystając z warunku koniecznego uzyskujemy od razu, iż $f_n \to 0$ dla $n \to \infty$, a stąd*

$$\langle f, x_n\rangle_{(\ell^2)^*,\ell^2} = f_n \to 0.$$

*$0_{\ell^2}$ nie jest elementem sfery jednostkowej w $\ell^2$, czyli zbiór domknięty nie musi być słabo domknięty. $0_{\ell^2}$ należy jednak do otoczki wypukłej sfery jednostkowej w $\ell^2$, czyli najmniejszego zbioru wypukłego zwierającego tę sferę.*

**Definicja 5.1.3.** *Niech $D \subset E$. Mówimy, że $D$ jest słabo domknięty jeżeli zawiera słabe granice wszystkich słabo zbieżnych ciągów.*

Każdy zbiór $D \subset E$ słabo domknięty jest domknięty w silnej (normowej) topologii. Istotnie, ciągi silnie zbieżne, są również zbieżne słabo. Stąd ich granice należą do $D$.

**Twierdzenie 5.1.4.** *Niech $D \subset E$ będzie zbiorem wypukłym i domkniętym. Wówczas $D$ jest również słabo domknięty. Jeżeli $D \subset E$ jest zbiorem słabo domkniętym, to jest również domknięty.*

Relacja zbiorów otwartych i słabo otwartych jest teraz oczywista. Każdy zbiór słabo otwarty jest również otwarty (jako dopełnienie zbioru słabo domkniętego, a zatem domkniętego).

Fundamentalne jest następujące twierdzenie, które pozwala zastąpić zwartość w twierdzeniu Weierstrassa przez słabą ciągową zwartość.

**Twierdzenie 5.1.5** (Słaba zwartość kuli jednostkowej)**.** *Kula jednostkowa w przestrzeni $E$ jest ciągowo słabo zwarta, tzn. z każdego ciągu w niej zawartego można wybrać podciąg słabo zbieżny.*

*Zajmiemy się wreszcie kwestią słabej ciągowej ciągłości oraz słabej ciągowej półciągłości z dołu.* Jeśli $J \in E^*$, czyli jeśli $J$ jest funkcjonałem liniowym i ciągłym, to jest on słabo ciągowo ciągły. Przykłady nieliniowych funkcjonałów słabo ciągowo ciągłych będą się pojawiać w dalszym ciągu. Nie ma w zasadzie prostego kryterium, które by pozwalało taką własność badać. Znane kryteria trudniej zastosować (wymagana jest zwartość pochodnej funkcjonału) niż badać zagadnienie bezpośrednio. Inaczej rzecz się ma ze słabą ciągową półciągłością z dołu. Przypominamy sobie, że półciągłość z dołu jest równoważna z domkniętością zbiorów poziomicowych oraz nadwykresu. Zważywszy związek zbiorów domkniętych i słabo domkniętych mamy następujące twierdzenie, którego dowód w zasadzie przebiega podobnie jak dla normowej topologii:

**Twierdzenie 5.1.6** (Słaba ciągowa półciągłość z dołu a nadwykres i zbiory poziomicowe)**.** *Niech $D \subseteq E$ będzie domknięty i wypukły i niech $f : D \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem ciągłym i wypukłym. Wtedy następujące warunki są równoważne*

1. *$f$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu na $D$,*
2. *nadwykres* $\mathrm{Epi}(f)$ *jest słabo domknięty,*
3. *zbiory $f^\alpha$ są słabo domknięte dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{R}$.*

**Uwaga 5.1.7.** *Wiadomo, iż funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ słabo ciągły jest z konieczności ciągły. Istotnie, wtedy przeciwobraz dowolnego otwartego podzbioru $\mathbb{R}$ jest słabo otwarty, a więc i otwarty.*

Ponadto wiadomo, iż funkcjonał ciągły, nie musi być słabo ciągowo ciągły, czy też słabo ciągowo półciągły z dołu. Istotnie (w przypadku ciągłości), przeciwobraz dowolnego otwartego podzbioru $\mathbb{R}$ jest otwarty, a nie każdy otwarty jest słabo otwarty (rodzina zbiorów otwartych jest bogatsza niż rodzina słabo otwartych).

Z **twierdzenia 5.1.6** wynika natychmiast następujące proste kryterium badania słabej półciągłości z dołu:

**Twierdzenie 5.1.8.** *Załóżmy $f : E \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem ciągłym i wypukłym. Wówczas $f$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu.*

**Dowód.** Zbiór Epi$(f)$ jest wypukły i domknięty, a zatem z **twierdzenia 5.1.4** jest również słabo domknięty. Z **twierdzenia 5.1.6** wynika teraz, że funkcjonał $f$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu. ∎

**Uwaga 5.1.9.** *W przestrzeni skończenie wymiarowej zbieżność słaba i normowa (silna) są oczywiście równoważne.*

**Przykład 5.1.10.** Funkcjonał $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$f(x) = -\|x\|$$

nie jest słabo ciągowo półciągły z dołu. Dla uproszczenia rozważmy funkcjonał $f_1(x) = \|x\|$, który jako ciągly i wypukły jest słabo ciągowo półciągły z dołu. Przypuśćmy, iż jest on słabo ciągowo półciągły z góry co jest równoważne założeniu, że $f$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu. Wówczas, skoro założyliśmy, że $f_1$ jest dodatkowo słabo półciągły z góry, oznacza to, iż $f_1$ jest słabo ciągły, czyli dla dowolnego ciągu $(x_n)$ takiego, że $x_n \rightharpoonup x_0$ zachodzi $\|x_n\| \to \|x_0\|$. Weźmy ciąg

$$(1,0,0,\ldots),(0,1,0,0,..),\ldots$$

zbieżny słabo do elementu zerowego przestrzeni $\ell^2$. Wówczas $\|x_n\| = 1$ oraz $\|x_0\| = 0$, co nie może mieć miejsca.

**Przykład 5.1.11.** Niech $f : E \to \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym i ciągłym. Wówczas $f$ jest ciągowo słabo ciągły. Istotnie, weźmy dowolny ciąg $(x_n) \subset E$ taki, że $x_n \rightharpoonup x_0$, $x_0 \in E$. Mamy wówczas

$$f(x_n) = \langle f, x_n \rangle_{E^*,E} \to \langle f, x_0 \rangle_{E^*,E} = f(x_0).$$

**Uwaga 5.1.12.** *Dany jest ciąg $(x_n) \subset L^2(0,1)$ zbieżny słabo w $L^2(0,1)$ do funkcji $x_0 \in L^2(0,1)$, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x_n(t) v(t)\, dt = \int_0^1 x_0(t) v(t)\, dt \text{ dla wszystkich } v \in L^2(0,1).$$

*Skorzystaliśmy tutaj z relacji*

$$\left(L^2(0,1)\right)^* = L^2(0,1).$$

*Ponadto załóżmy, że* $(x_n)$ *zbiega p.w. na* $[0,1]$ *do funkcji* $\tilde{x}$*, tzn.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \tilde{x}(t) \text{ dla p.w. } t \in [0,1]$$

*Wówczas* $\tilde{x} = x_0$ *p.w. na* $[0,1]$.

**Uwaga 5.1.13.** *Wiemy, że jeżeli* $(x_n) \subset L^2(0,1)$ *jest zbieżny silnie do pewnej funkcji* $x_0 \in L^2(0,1)$*, to zawiera podciąg zbieżny prawie wszędzie. Natomiast ciąg nie musi być zbieżny p.w. jak pokazuje przykład ciągu funkcji charakterystycznych przedziałów* $\left(\frac{n-1}{2^n}, \frac{n}{2^n}\right)$ *dla* $n \in \mathbb{N}$*. Jeżeli ciąg* $(x_n) \subset L^2(0,1)$ *jest zbieżny słabo do pewnej funkcji* $x_0 \in L^2(0,1)$*, to niekoniecznie zawiera podciąg zbieżny prawie wszędzie. Weźmy ciąg*

$$x_n(t) = \sin(2n\pi t).$$

*Od razu widać, z teorii szeregów Fouriera (Lemat Riemanna-Lebesgue'a), że*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \sin(2n\pi t) v(t)\, dt \to 0$$

*dla dowolnego* $v \in L^2(0,1)$*. Ponadto dla dowolnie ustalonego* $t \in (0,1)$ *ciąg* $(\sin(2n\pi t))$ *nie jest w oczywisty sposób zbieżny.*

**Przykład 5.1.14.** Niech ciąg $(x_n) \subset L^2(0,1)$ będzie dany wzorem

$$x_n(t) = \sqrt{n}\chi_{(0,\frac{1}{n})}.$$

Od razu widać, że $x_n \rightharpoonup 0$. Niemniej jednak również $x_n(t) \to 0$ dla p.w. $t \in [0,1]$.

**Uwaga 5.1.15.** *Ciąg słabo zbieżny jest ograniczony; dokładniej jeżeli* $(x_n) \subset E$, $x_n \rightharpoonup x_0$*, to istnieje stała* $M > 0$*, taka, że dla wszystkich* $n \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\| \leq M.$$

*Ciągi ograniczone w przestrzeniach refleksywnych zawierają podciągi słabo ciągowo zbieżne.*

**Uwaga 5.1.16.** *Wiadomo, że jeżeli każdy podciąg ciągu zbieżnego (w przestrzeni metrycznej) zawiera podciąg zbieżny do tej samej granicy, to ciąg jest również* *zbieżny. Podobnie rzecz się ma z ciągami słabo zbieżnymi. Zachodzą również znane własności dotyczące arytmetyki granic, a mianowicie jeżeli* $x_n \rightharpoonup x_0$ *oraz* $y_n \rightharpoonup y_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *to dla dowolnego* $f \in E^*$ *mamy*

$$\left\langle f, \alpha x_n + \beta y_n \right\rangle_{E^*,E} = \alpha \langle f, x_n \rangle_{E^*,E} + \beta \langle f, y_n \rangle_{E^*,E}$$
$$\to \alpha \langle f, x_0 \rangle_{E^*,E} + \beta \langle f, y_0 \rangle_{E^*,E} = \left\langle f, \alpha x_0 + \beta y_0 \right\rangle_{E^*,E}.$$

*Ponadto, jeżeli* $x_n \rightharpoonup x_0$ *oraz* $(\lambda_n) \subset \mathbb{R}$, $\lambda_n \to \lambda_0$, *to*

$$\lambda_n x_n \rightharpoonup \lambda_0 x_0.$$

*Ma miejsce również ogólniejsza relacja, a mianiowicie: jeżeli* $x_n \rightharpoonup x_0$ *w* $E$ *oraz* $f_n \to f_0$ *w* $E^*$, *to*

$$\langle f_n, x_n \rangle_{E^*,E} \to \langle f_0, x_0 \rangle_{E^*,E}.$$

*Istotnie, skoro* $(x_n - x_0)$ *jest ograniczony, to*

$$\langle f_n - f_0, x_n - x_0 \rangle_{E^*,E} \leq \|f_n - f_0\|_{E^*} \|x_n - x_0\|_E \to 0$$

*oraz*

$$\langle f_n, x_0 \rangle_{E^*,E} \to 0, \; \langle f_0, x_n \rangle_{E^*,E} \to 0.$$

*Ponadto*

$$\langle f_n - f_0, x_n - x_0 \rangle_{E^*,E} = \langle f_n, x_n \rangle_{E^*,E} - \langle f_0, x_n \rangle_{E^*,E}$$
$$+ \langle f_0, x_0 \rangle_{E^*,E} - \langle f_n, x_0 \rangle_{E^*,E}.$$

*Stąd mamy wnioskowaną relację.*

## 5.2. Bezpośrednia metoda rachunku wariacyjnego

Niech $E$ będzie rzeczywistą refleksywną przestrzenią Banacha. Przypomnijmy, że koercytywność funkcjonału oznacza, że dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ zbiory $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ są ograniczone. Jeżeli przypomnimy sobie, iż **w przestrzeni refleksywnej każdy ciąg ograniczony zawiera podciąg słabo zbieżny**, to widzimy, iż ogólną zasadę prowadzącą do odpowiednika twierdzenia Weierstrassa w przypadku przestrzeni nieskończonego wymiaru możemy sformułować następująco:

*Niech $f : E \to \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu oraz koercytywny. Załóżmy, że dla każdego ciągu minimalizującego $(x_n) \subset E$*

$$\inf_{x\in E} f(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)$$

*istnieje podciąg słabo zbieżny $(x_{n_k})$. Wtedy $f$ posiada co najmniej jeden argument minimum $x_0$, o ile dla dowolnego $x \in E$ oraz dowolnego ciągu $(x_n) \subset E$ takiego, że $x_n \rightharpoonup x$ zachodzi*

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x).$$

Ostatni warunek nazywa się słabą ciągową półciągłością z dołu funkcjonału $f$. Zgodnie, z powyższymi uwagami może sformułować bardziej praktyczną postać powyższej zasady:

**Twierdzenie 5.2.1** (Bezpośrednia metoda rachunku wariacyjnego)**.** *Jeśli $f : E \to \mathbb{R}$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu oraz koercytywny, to posiada co najmniej jeden argument minimum $x_0 \in E$. Jeśli dodatkowo $f$ jest różniczkowalny w sensie Gâteaux, to*

$$f'(x_0) = 0.$$

**Dowód.** Weźmy $\alpha$ takie, że zbiór $f^\alpha$ jest niepusty. Z koercytywności funkcjonału $f$ wynika, że $S_\alpha$ jest ograniczony. Od razu widać, iż

$$\inf_{x\in E} f(x) = \inf_{x\in f^\alpha} f(x)$$

Skoro $f$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu, to zbiór $f^\alpha$ jest słabo domknięty. Zatem dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset f^\alpha$ minimalizującego $f$ na zbiorze $f^\alpha$ istnieją podciąg $\left(x_{n_k}\right)$ oraz element $x_0$ takie, że $x_n \rightharpoonup x_0$ oraz

$$\inf_{x\in f^\alpha} f(x) = \liminf_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \geq f(x_0) \geq \inf_{x\in f^\alpha} f(x).$$

Stąd $\inf_{x\in f^\alpha} f(x) = f(x_0)$ i $x_0$ jest argumentem minimum. Zastosowanie **Reguły Fermata (twierdzenie 2.3.7)** kończy dowód. ∎

Zastosowanie bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego do konkretnych zagadnień wymaga pewnych przygotowań. Musimy zwłaszcza zająć się przestrzeniami, w których umieścimy badane problemy. Możemy jednak wskazać kilka zastosowań abstrakcyjnych nie wymagających dokładniejszego opisania przestrzeni w których są rozważane.

Zaczniemy od Twierdzenia Weiestrassa na zbiorze ciągowo słabo zwartym.

**Twierdzenie 5.2.2.** *Załóżmy, że $D \subset E$ jest zbiorem ciągowo słabo zwartym, $f : D \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem ciągowo słabo półciągłym z dołu. Wówczas istnieje $x_0 \in D$ taki, że*

$$\inf_{x \in D} f(x) = f(x_0)$$

**Dowód.** Dowód niewiele różni się od znanego z klasycznego kursu analizy. Przypuśćmy, że $f$ nie jest ograniczony z dołu na $D$. Wtedy istnieje ciąg $(x_n) \subset D$ taki, że

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = -\infty.$$

Skoro $(x_n)$ ma podciąg słabo zbieżny $\left(x_{n_k}\right)$ do pewnego $\tilde{x}$. Zatem

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = -\infty$$

oraz skoro $f$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu, to

$$-\infty = \lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) \geq f(\tilde{x}),$$

co jest niemożliwe. Stąd $f$ jest ograniczony od dołu na $D$ i ma ciąg minimalizujący $(x_n) \subset D$ słabo zbieżny do pewnego $x_0$. Zatem mamy

$$\inf_{x\in D} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0) \geq \inf_{x\in D} f(x). \qquad \blacksquare$$

**Przykład 5.2.3.** Rozważmy w przestrzeni $E$ dowolny niepusty, wypukły i domknięty jej podzbiór $D$ oraz weźmy punkt $\hat{x} \notin D$. Wówczas istnieje przynajmniej jeden punkt $x_0 \in D$ taki, że

$$\inf_{x\in D} \|x - \hat{x}\| = \|x_0 - \hat{x}\|.$$

Istotnie, zdefinujmy funkcjonał $f : E \to \mathbb{R}$ wzorem

$$f(x) = \|x - \hat{x}\|.$$

Wówczas $f$ jest ciągły i wypukły na $E$, a zbiór $D$ jest słabo domknięty. Weźmy dowolne ustalone $y \in D$ i rozważmy zbiór $S = \{x \in D : f(x) \leq f(y)\}$. $S$ jest zbiorem wypukłym (skoro $f$ jest wypukły ma zastosowanie **stwierdzenie 4.1.2**) i domkniętym (skoro $f$ jest ciągły, to przeciwobraz zbioru domkniętego $[f(y), +\infty)$ jest domknięty). Zauważmy, że dodatkowo $S$ jest ograniczony. Istotnie, dla dowolnego $x \in S$ mamy:

$$\|x\| = \|x - \hat{x} + \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\| + \|\hat{x}\| \leq f(y) + \|\hat{x}\|.$$

Zatem $S$ jest ciągowo słabo zwarty, por. Twierdzenie 5.1.5. Skoro $f$ jako wypukły i ciągły jest ciągowo słabo półciągły z dołu, to $f$ posiada na $S$ co najmniej jeden argument minimum.

Jeżli założymy, że $E$ jest przestrzenią Hilberta, to wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in E$ taki, że

$$\inf_{x \in D} \|x - \hat{x}\| = \|x_0 - \hat{x}\|.$$

Poniższy przykład mówi nam o tym, że funkcjonał ograniczony od dołu i ciągłego, który minimum nie posiada.

**Przykład 5.2.4.** Rozważmy ograniczony od dołu i ciągły funkcjonał

$$J : C^1[-1,1] \to \mathbb{R}$$

dany wzorem

$$J(x) = \int_{-1}^{1} (t\dot{x}(t))^2 \, dt.$$

Ciągłość funkcjonału $J$ wynika w bezpośredni sposób skoro zbieżność w $C^1[-1,1]$ oznacza zbieżność jednostajną ciągu i ciągu jego pochodnych. Rozważmy zbiór

$$D = \left\{x \in C^1[-1,1] : x(-1) = 0,\ x(1) = 1\right\}.$$

Weźmy ciąg $(x_n) \subset D$ dany wzorem

$$x_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{n}\right)}{2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)}$$

dla $t \in [-1,1]$. Wówczas $J(x_n) \to 0$. Skoro $J(x) \geq 0$ dla $x \in D$, to $(x_n)$ jest ciągiem minimalizującym. Zatem, gdyby pewne $x_0 \in D$ było argumentem minimum, to zachodziłoby, że

$$\int_{-1}^{1} (t\dot{x}_0(t))^2 \, dt = 0,$$

skąd $(t\dot{x}_0(t))^2 = 0$, czyli $x_0 = const$, co jest niemożliwe, gdyż funkcje stałe nie należą do $D$.

## 5.3. Przestrzenie funkcyjne

**Definicja 5.3.1.** *składa się z funkcji* $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ *absolutnie ciągłych określonych na odcinku* $[0,1]$, *których pochodne* $\dot{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *(rozumiane prawie wszędzie) są całkowalne z kwadratem na* $[0,1]$. Ponadto $x(0) = x(1) = 0$.

Przypomnijmy, iż funkcja absolutnie ciągła na odcinku $[0,1]$ jest ciągła, posiada pochodną prawie wszędzie, $\dot{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$, oraz funkcja $\dot{x}$ jest całkowalna na $[0,1]$ i dodatkowo dla $t \in [0,1]$ zachodzi

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s)\, ds.$$

Funkcja wypukła $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest jak wiemy z kursu analizy absolutnie ciągła na odcinku $[0,1]$. Podobnie funkcja lipschitzowsko ciągła, czy też klasy $C^1$ na $[0,1]$ jest tam absolutnie ciągła. Funkcja absolutnie ciągłe na $[0,1]$ jest tam jednostajnie ciągła. Istnieją funkcje jednostajnie ciągłe, które abosolutnie ciągłe nie są, np. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0,1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Przestrzeń $H_0^1(0,1)$ jest (rzeczywistą) przestrzenią Hilberta z iloczynem skalarnym

$$\langle x, y \rangle_{H_0^1(0,1)} = \langle \dot{x}, \dot{y} \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 \dot{x}(t)\, \dot{y}(t)\, dt$$

i odpowiadającą mu normą

$$\|x\|_{H_0^1(0,1)} := \|\dot{x}\|_{L^2(0,1)} = \sqrt{\int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt}.$$

Przypomnijmy, iż

**Twierdzenie 5.3.2.** *Dla dowolnych funkcji absolutnie ciągłych $f$ , $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ zachodzi , tzn. mamy następująca relację*

$$\int_0^1 \dot{f}(t)g(t)\,dt = f(1)g(1) - f(0)g(0) - \int_0^1 f(t)\dot{g}(t)\,dt. \tag{5.1}$$

*Dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$ zachodzą pewne nierówności, które odgrywają istotną*

*rolę w analize zadań brzegowych.*

Dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$ zachodzą pewne nierówności, które odgrywają istotną rolę w analizie zadań brzegowych.

**Lemat 5.3.3** (Nierówność Soboleva i nierówność Poincáre)**.** *Dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$ zachodzi **nierówność Soboleva***

$$\|x\|_{C[0,1]} := \max_{t\in[0,1]} |x(t)| \le \sqrt{\int_0^1 |\dot{x}(t)|^2\,dt} := \|\dot{x}\|_{L^2(0,1)} \tag{5.2}$$

*oraz **nierówność Poincáre***

$$\|x\|_{L^2(0,1)} \le \frac{1}{\pi}\|\dot{x}\|_{L^2(0,1)}. \tag{5.3}$$

Przypomnijmy twierdzenie Arzela-Ascoli dotyczące zwartości rodzin funkcji jednakowo jednostajnie ciągłych i ograniczonych w wygodnej dla nas postaci:

**Twierdzenie 5.3.4** (Arzela-Ascoli)**.** *Dany jest ciąg funkcji $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ jednostajnie ograniczonych, tzn.*

$$\exists_{M>0} \forall_{t\in[a,b]} \forall_{n\in\mathbb{N}} |f_n(t)| \le M$$

*oraz jednakowo jednostajnie ciągłych, tzn.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists_{\delta>0} \forall_{n\in\mathbb{N}} \forall_{t,s\in[a,b]} |t-s| < \delta \Longrightarrow |f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon.$$

*Ciąg $(f_n)$ zawiera wówczas podciąg jednostajnie zbieżny.*

**Lemat 5.3.5.** *Jeżeli ciąg $(x_n)$ jest zbieżny w $H_0^1(0,1)$ do pewnego $x_0$ to jest również jednostajnie zbieżny.*

**Dowód.** Niech $(x_n) \subset H_0^1(0,1)$ będzie zbieżny do $x_0 \in H_0^1(0,1)$. Ciąg ten jest ograniczony w $H_0^1(0,1)$, tzn. istnieje $d > 0$, że

$$\|x_n\|_{H_0^1(0,1)} \leq d.$$

Z nierówności Soboleva wynika, iż ciąg $(x_n)$ jest ograniczony w $C[0,1]$, czyli jednostajnie ograniczony. Zauważmy, iż jest również jednakowo jednostajnie ciągły. Istotnie weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ oraz $\delta := \frac{\varepsilon}{d}$. Mamy dla

$$t, s \in [0,1], \quad s < t, \quad |t-s| < \delta$$

$$|x(t) - x(s)| \leq \int_s^t |\dot{x}(\tau)|\, d\tau \leq \sqrt{\int_s^t 1^2 d\tau} \sqrt{\int_s^t |\dot{x}(\tau)|^2\, d\tau}$$
$$= |t-s| \sqrt{\int_0^1 |\dot{x}(\tau)|^2\, d\tau} \leq |t-s|\, d < \varepsilon.$$

Zatem $(x_n)$ zawiera podciąg jednostajnie zbieżny. A skoro każdy podciąg danego ciągu zawiera podciąg jednostajnie zbieżny, to ciąg ten również musi być jednostajnie zbieżny. ∎

**Uwaga 5.3.6.** *Zauważmy, iż nie wykorzystaliśmy w żaden sposób tego, że ciąg $(x_n)$ jest zbieżny. Istotna była jedynie jego ograniczoność. Stąd prosty wniosek: ciągi słabo zbieżne (a więc i ograniczone) również mają opisaną wyżej własność. Dokładniej można to ująć następująco: Każdy ciąg $(x_n) \subset H_0^1(0,1)$ słabo zbieżny do funkcji $x_0 \in H_0^1(0,1)$ jest również jednostajnie zbieżny na $[0,1]$, a co za tym idzie zbieżny (do tej samej funkcji) w normie $L^2(0,1)$.*

Słaba zbieżność ciągu $(x_n) \subset H_0^1(0,1)$ do elementu $x_0 \in H_0^1(0,1)$ oznacza, że dla dowolnego $h \in L^2(0,1)$ zachodzi

$$\int_0^1 \dot{x}_n(t) h(t)\, dt \to \int_0^1 \dot{x}_0(t) h(t)\, dt.$$

Pozostaje nam zdefiniować przestrzeń $H^2(0,1)$. Składa się ona z tych elementów $H_0^1(0,1)$ dla których istnieje druga pochodna i jest klasy $L^2(0,1)$. Ponieważ nie będziemy badali żadnych zbieżności w tej przestrzeni, nie będziemy jej dokładniej analizować.

**Definicja 5.3.7** (Funkcja Caratheodory'ego)**.** *Mówimy, że funkcja $F:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją Caratheodory'ego jeżeli funkcja $t\to f(t,x)$ jest mierzalna na $[a,b]$ dla każdego ustalonego $x\in\mathbb{R}$, a funkcja $x\to f(t,x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}$ dla p.w. $t\in[a,b]$.*

Niech $p\geq 1$. Często zakłada się warunek $L^p-$Caratherodory'ego.

**Definicja 5.3.8.** *Mówimy, że funkcja $F:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją $L^1$-Caratheodory'ego jeżeli jest funkcją Caratheodory'ego oraz dla dowolnego $d\in\mathbb{R}^+$ funkcja*

$$t\to\max_{x\in[-d,d]}F(t,x)$$

jest całkowalna na $[a,b]$.

**Przykład 5.3.9.** Przykładami funkcji $L^p-$Caratheodory'ego $F:[a,b]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ są następujące

1. $F(t,x)=f(t)\cdot\arctan x,\ f\in L^p(a,b)$;

2. $F(t,x)=f_1(t)x^4+f_2(t)x^3+\arctan(t\cdot x),\ f_1,f_2\in L^p(a,b)$.

Wróćmy teraz do **przykładu 5.1.10** i wykorzystajmy **uwagę 5.3.6.**

**Przykład 5.3.10.** Rozważmy funkcjonał $f:L^2(0,1)\to\mathbb{R}$ dany wzorem

$$f(x)=\int_0^1 x^2(t)\,dt.$$

Wówczas $f$ nie jest słabo ciągły. Rozważmy teraz funkcjonał $f$ obcięty do $H_0^1(0,1)$. Weźmy dowolny ciąg $(x_n)\subset H_0^1(0,1)$ zbieżny słabo do $x_0\in H_0^1(0,1)$. Wtedy zgodnie z **uwagą 5.3.5.** $x_n\to x_0$ w $L^2(0,1)$, a zatem

$$f(x_n)=\int_0^1 x_n^2(t)\,dt\to\int_0^1 x_0^2(t)\,dt=f(x_0)\ \text{dla}\ n\to\infty,$$

czyli funkcjonał $f$ jest słabo ciągły na $H_0^1(0,1)$. Zauważmy jednak, że $f$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu na $L^2(0,1)$, gdyż jest wypukły. Istotnie $x \to \|x\|$ jest funkcjonałem wypukłym (w dowolnej przestrzeni unormowanej), $t \to t^2$ na $[0,+\infty)$ jest wypukły i rosnący, stąd ich złożenie, czyli $f$, jest wypukłe (nawet ściśle).

**Przykład 5.3.11.** Załóżmy, że $f : [0,1]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją Caratheodory'ego taką, że istnieją funkcje $a \in L^\infty(0,1)$ oraz $b \in L^1(0,1)$ dla których zachodzi

$$f(t,x) \le a(t)|x|^2 + b(t)$$

dla p.w. $t \in [0,1]$ oraz każdego $x \in \mathbb{R}$. Wówczas funkcjonał $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$J(x) = \int_0^1 f(t,x(t))\,dt$$

jest ciągły oraz słabo ciągowo ciągły. Ciągłość wynika od razu z Twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności oraz tego, że ciąg $(x_n)$ zbieżny w $H_0^1(0,1)$ do $x_0$ jest zbieżny jednostajnie na $[0,1]$ do $x_0$ oraz, że dla p.w. $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} f(t,x_n(t)) = f(t,x_0(t)).$$

Majorantą jest funkcja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$g(t) = d^2|a(t)| + |b(t)|,$$

gdzie $\|x_n\|_{C[0,1]} \le d$ (taka stała istnieje, skoro $x_n \rightrightarrows x_0$).

Słabej ciągowej ciągłosci dowodzimy w identyczny sposób.

## 5.4. Lemat Lagrange'a i du Bois-Reymonda

Zajmiemy się teraz warunkami, które pozwalają one łączyć ze sobą różne typy rozwiązań zagadnień brzegowych, co w dalszej części będzie dla nas bardzo istotne.

**Lemat 5.4.1** (Lemat pomocniczy). *Jeżeli* $h \in L^2(0,1)$ *oraz*

$$\int_0^1 h(t)\dot{v}(t)dt = 0 \text{ dla wszystkich } v \in H_0^1(0,1),$$

*to wtedy istnieje stała* $c \in \mathbb{R}$*, taka, że* $h(t) = c$ *p.w. na* $[0,1]$.

**Dowód.** Zdefiniujemy funkcję $v_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ wzorem

$$v_1(t) = \int_0^t (h(\tau) - c)d\tau,$$

gdzie $c$ jest tak dobrane, że

$$\int_0^1 (h(\tau) - c)d\tau = 0$$

(widać, że $c = \int_0^1 h(\tau)d\tau$ jest wartością średnią funkcji funkcji $h$ na przedziale $[0,1]$). Od razu widzimy, że $v_1 \in H_0^1(0,1)$. Istotnie, $v_1$ jest w oczywisty sposób funkcją absolutnie ciągłą, jej pochodna p.w. na $[0,1]$ wynosi $h(\cdot) - c$, oraz $v_1(0) = v_1(1) = 0$. Zauważmy dodatkowo, że dla dowolnego $v \in H_0^1(0,1)$ zachodzi

$$\int_0^1 c \cdot \dot{v}(t)dt = c(v(1) - v(0)) = 0.$$

Stąd mamy

$$\int_0^1 h(t)\dot{v}_1(t)dt = \int_0^1 (h(t) - c)\dot{v}_1(t)dt = \int_0^1 (h(t) - c)^2 dt.$$

Skoro $(h(t) - c)^2 \geq 0$ dla p.w. $t \in [0,1]$, to $h(t) = c$ p.w. na $[0,1]$. ∎

**Lemat 5.4.2** (Lemat du Bois-Reymonda, Lemat Fundamentalny Rachunku Wariacyjnego). *Jeżeli funkcje* $h \in L^2(0,1)$, $f \in L^1(0,1)$ *są ustalone oraz jeżeli*

$$\int_0^1 (h(t)\dot{v}(t) - f(t)v(t))dt = 0 \text{ dla wszystkich } v \in H_0^1(0,1), \tag{5.4}$$

*to funkcja* $h$ *jest absolutnie ciągła, oraz* $\dot{h}(t) = f(t)$ *p.w. na* $[0,1]$.

**Dowód.** Zauważmy, że funkcja $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds$$

jest absolutnie ciągła i zachodzi relacja $\dot{F}(t) = f(t)$ p.w. na $[0,1]$. Całkę $\int_0^1 f(t)v(t)dt$ możemy zapisać następująco $\int_0^1 \dot{F}(t)v(t)dt$. Całkując przez części przy wykorzystaniu formuły (5.1) mamy (pamiętając, że $v(1) = v(0) = 0$)

$$\int_0^1 \dot{F}(t)v(t)dt = F(1)v(1) - F(0)v(0) - \int_0^1 F(t)\dot{v}(t)dt = -\int_0^1 F(t)\dot{v}(t)dt.$$

Zatem (5.4) ma postać

$$\int_0^1 (h(t) - F(t))\dot{v}(t)dt = 0.$$

Z Lematu 5.4.1. istnieje stała $c$ taka, że $F(t) = h(t) + c$ dla p.w. $t \in [0,1]$. Zatem funkcja $h$ jest absolutnie ciągła oraz bezpośrednie różniczkowanie prowadzi do wzoru $\dot{h}(t) = f(t)$ p.w. na $[0,1]$. ∎

Wniosek z Lematu du Bois-Reymonda jest następujący i dotyczy sytuacji, gdy funkcja $h$ w (5.4) jest równa 0 p.w. na $[0,1]$.

**Wniosek 5.4.3.** *Jeżeli* $f \in L^1(0,1)$ *jest ustalona oraz jeżeli*

$$\int_0^1 f(t)v(t)dt = 0$$

*dla wszystkich* $v \in H_0^1(0,1)$, *to* $f(t) = 0$ *p.w. na* $[0,1]$.

Powyższy wniosek, gdy nosi czasem nazwę **Lematu Lagrange'a** i można go udowodnić nie wychodząc z Lematu du Bois-Reymonda, ale wprowadzając inny typ funkcji testowych. Podamy i udowodnimy Lemat Lagrange'a w uproszczonym przypadku.

**Lemat 5.4.4** (Lemat Lagrange'a)**.** *Jeżeli funkcja* $f \in C[0,1]$ *jest ustalona oraz jeżeli*

$$\int_0^1 f(t)v(t)dt = 0$$

*dla wszystkich* $v \in H_0^1(0,1)$, *to* $f(t) = 0$ *na* $[0,1]$.

**Dowód.** Przypuśćmy, że istnieje punkt $c \in (0,1)$ taki, że $f(c) > 0$. Wtedy istnieje przedział $[\alpha, \beta] \subset (0,1)$ na którym $f$ jest dodatnia. Rozważmy funkcję testową

$$v(t) = \begin{cases} (t-\alpha)(\beta - t), & t \in [\alpha, \beta] \\ 0, & t \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

Widać od razu, że $v \in C^1[0,1]$, a skoro $v(0) = v(1) = 0$, to również $v \in H_0^1(0,1)$. Ponadto $v(t) > 0$ dla $t \in (\alpha, \beta)$ i $v \equiv 0$ poza przedziałem $(\alpha, \beta)$. Zatem

$$\int_0^1 f(t)v(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(t)v(t)\,dt > 0.$$

A to jest niemożliwe. Podobny wynik uzyskujemy przypuszczając, że istnieje punkt $c \in (0,1)$ taki, że $f(c) < 0$. ∎

## 5.5. Minimalizacja klasycznego funkcjonału działania Eulera

Zajmiemy się poszukiwaniem argumentu minimum klasycznego funkcjonału działania Eulera $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$. Na początek zbadamy funkcjonał postaci

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}(t)|^2\,dt + \frac{1}{4}\int_0^1 |x(t)|^4\,dt + \int_0^1 f(t)x(t)\,dt, \tag{5.5}$$

jeżeli wiadomo, że $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jest funkcją całkowalną. Od razu widzimy, że $J$ jest dobrze określony w tym sensie, iż dla dowolnej funkcji $x \in H_0^1(0,1)$ wyrażenie $J(x)$ jest skończone.

Zauważmy, że funkcja $x \to x^4$ jest wypukła na $\mathbb{R}$. Stąd wypukły jest funkcjonał

$$H_0^1(0,1) \ni x \to \int_0^1 x^4(t)\,dt.$$

Można to ująć ogólniej:

**Uwaga 5.5.1.** *Załóżmy, że $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i wypukła. Wtedy wypukły jest funkcjonał*

$$H_0^1(0,1) \ni x \to \int_0^1 F(x(t))\,dt.$$

*Zauważmy też, że skoro każda funkcja z* $H_0^1(0,1)$ *jest ciągła, to* $\int_0^1 F(x(t))dt$ *jest dobrze określone.*
*Istotnie, skoro F jest wypukła, to dla dowolnych* $x, y \in \mathbb{R}$ *oraz dowolnego* $\lambda \in [0,1]$ *zachodzi*

$$F(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1-\lambda)F(y).$$

*Stąd dla dowolnych* $x, y \in H_0^1(0,1)$*, dowolnego* $\lambda \in [0,1]$ *zachodzi*

$$F(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t)) \leq \lambda F(x(t)) + (1-\lambda)F(y(t))$$

*dla* $t \in [0,1]$*. Stąd*

$$\int_0^1 F(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))dt \leq \lambda \int_0^1 F(x(t))dt + (1-\lambda)\int_0^1 F(y(t))dt.$$

Funkcjonał

$$H_0^1(0,1) \ni x \to \int_0^1 f(t)x(t)dt$$

jako liniowy jest oczywiście wypukły i klasy $C^1$.

**Uwaga 5.5.2.** *Załóżmy, że* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest wielomianem. Wtedy funkcjonał*

$$H_0^1(0,1) \ni x \to \int_0^1 F(x(t))dt$$

*jest klasy* $C^1$ *na* $H_0^1(0,1)$*. Ponadto pochodna jest postaci:*

$$\int_0^1 F'(x(t))h(t)dt$$

*dla dowolnego* $h \in H_0^1(0,1)$*. Istotnie, korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona zauważamy, że funkcja pomocnicza* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dana wzorem (przy dowolnie ustalonym* $h \in H_0^1(0,1)$*)*

$$g(\varepsilon) = \int_0^1 F(x(t) + \varepsilon h(t))dt$$

*jest również wielomianem. Stąd widać, że zachodzi teza.*

**Twierdzenie 5.5.3.** *Przy założeniu, że* $f \in L^1(0,1)$ *funkcjonał* $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ *dany wzorem* (5.5) *posiada dokładnie jeden argument minimum.*

**Dowód.** Z **uwag 5.5.1** i **5.5.2** wynika, że funkcjonał $J$ jest klasy $C^1$ oraz jest ściśle wypukły (jako suma wypukłego i ściśle wypukłego) na $H_0^1(0,1)$. Stąd $J$ posiada co najwyżej jeden punkt krytyczny. Zastosujemy **twierdzenie 5.2.1.** Skoro $J$ jest ciągły (skoro jest klasy $C^1$) i wypukły, to jest słabo ciągowo półciągły z dołu. Zatem, aby wykazać, że posiada on punkt ktytyczny, wystarczy pokazać, iż jest koercytywny.

Zachodzi oczywista relacja na podstawie nierówności Soboleva (5.2)

$$\left|\int_0^1 f(t)x(t)dt\right| \leq \int_0^1 |f(t)x(t)|\,dt \leq \int_0^1 \|x\|_{C(0,1)}|f(t)|\,dt$$
$$\leq \|x\|_{H_0^1(0,1)}\|f\|_{L^1(0,1)}.$$

Stąd dotajemy, że

$$\frac{1}{4}\int_0^1 x^4(t)dt + \int_0^1 x(t)f(t)dt \geq -\|x\|_{H_0^1(0,1)}\|f\|_{L^1(0,1)}.$$

Zauważmy dalej, że

$$J(x) \geq \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}(t)|^2 dt - \|x\|_{H_0^1(0,1)}\|f\|_{L^1(0,1)}.$$

Stąd $J(x) \to \infty$ o ile $\|x\|_{H_0^1(0,1)} \to \infty$, czyli $J$ jest koercytywny. Zatem istnieje dokładnie jeden punkt $x_0 \in H_0^1(0,1)$ taki, że

$$J'(x_0,h) = 0$$

dla wszystkich $h \in H_0^1(0,1)$. Dokładniej oznacza to, iż

$$\int_0^1 \dot{x}_0(t)\dot{h}(t)dt + \int_0^1 x_0^3(t)h(t) + \int_0^1 f(t)h(t)dt = 0$$

lub równoważnie

$$\int_0^1 \dot{x}_0(t)\dot{h}(t)dt + \int_0^1 \left(x_0^3(t) + f(t)\right)h(t)dt = 0$$

Z **lematu du Bois-Reymonda** otrzymujemy, że w istocie $x_0$ posiada drugą pochodną dla p.w. $t \in [0,1]$ i taką, że

$$\ddot{x}_0(t) = x_0^3(t) + f(t)$$

Zatem $x_0$ jest rozwiązaniem następującego równania różniczkowego zwyczajnego:

$$\ddot{x}(t) = x^3(t) + f(t)$$

z warunkami brzegowymi

$$x(0) = x(1) = 0. \qquad \blacksquare$$

Takie zagadnienia jak te, których rozwiązalność badaliśmy w powyższym twierdzeniu, nazywać będziemy zadaniami Dirichlete'a.

## 5.6. Zastosowanie do zadań sterowania optymalnego

Zbadamy, wykorzystując twierdzenie Weierstrassa, rozwiązalność dwóch zadań sterowania optymalnego.

**Zadanie 5.6.1.** Niech

$$u \in S = \left\{u \in L^2(0,1) : \|u\|_{L^2} = 1\right\}.$$

Rozważamy zagadnienie

$$\dot{x}(t) = -u^2(t), \quad \text{dla p.w. } t \in [0,1]$$

wraz z warunkami brzegowymi

$$x(0) = 1,\ x(1) = 0.$$

Korzystając z podstawowego twierdzenia rachunku całkowego dla całki Lebesgue'a uzskujemy, że rozwiązaniem jest funkcja

$$x(t) - c = -\int_0^t u^2(t)dt.$$

Skoro $x(0) = 1$, to $c = 1$. Zauważmy, że wtedy $x(1) = 0$, czyli są spełnione warunki brzegowe przy dowolnie ustalonej funkcji $u \in S$.

Poszukiwać będziemy takiej funkcji $u \in S$ dla której całka

$$J(u) = \int_0^1 t^2u^2(t)dt$$

osiąga wartość najmniejszą. Oczywiście

$$\inf_{u \in S} J(u) \geq 0.$$

Zauważmy, że $S$ nie jest zbiorem ciągowo słabo zwartym. Weźmy ciąg $(u_n) \subset S$ postaci

$$u_n(t) = \begin{cases} n & , \quad t \in [0, \frac{1}{n^2}), \\ \\ 0 & , \quad t \in \left[\frac{1}{n^2}, 1\right]. \end{cases}$$

Wtedy

$$J(u_n) = \int_0^1 t^2 n^2 dt = n^2 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n^2}\right)^3 \to 0.$$

Zauważmy, że $u_n \to 0$ p.w. na $[0,1]$ oraz, że dla dowolnego $v \in L^2(0,1)$ zachodzi

$$\int_0^1 v(t) u_n(t) = \frac{1}{n^2} \int_0^{\frac{1}{n^2}} v(t) dt \to 0.$$

Stąd $u_n \rightharpoonup 0 \notin S$. Zatem rozważane przez nas zadanie optymalizacyjne nie posiada rozwiązania. Zauważmy, że zadanie to nie posiada również rozwiązania jeśli zastąpimy zbiór $S$ przez domkniętą kulę jednostkową $B$ w $L^2(0,1)$. Wtedy $0 \in B$, ale wtedy funkcja

$$x(t) = 1 - \int_0^t u^2(t) dt$$

nie jest rozwiązaniem spełniającym warunek $x(1) = 0$.

**Zadanie 5.6.2.** Niech $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ niech będą macierzami nad ciałem liczb rzeczywistych. Załóżmy, że $u \in L^2(t_0, t_1)$. Rozważamy układ równań różniczkowych

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{5.6}$$

prawie wszędzie na $[t_0, t_1]$ z warunkiem początkowym $x(t_0) = x_0$. Rozwiązaniem (5.6) jest rozumiane w sensie Caratheodory'ego czyli jako funkcja co najmniej absolutnie ciągła na $[t_0, t_1]$. Zagadnienie, to posiada rozwiązanie w postaci formuły Cauchy'ego

$$x(t) = x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s) ds, \ t \in [t_0, t_1]$$

przy dowolnie ustalonym $u$. Kładziemy

$$S = \left\{u \in L^2(0,1) : \|u\|_{L^2} \leq 1\right\}.$$

Rozważmy zbiór $A$ złożony z par $(u, x_u)$, gdzie $x_u$ jest rozwiązaniem (5.6) odpowiadającym $u \in S$.

Niech $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i wypukłą oraz $h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funkcją Lipschitzowską, tzn. istnieje stała $L > 0$ taka, że

$$|h(u) - h(v)| \leq L \|u - v\| \text{ dla dowolnych } u, v \in \mathbb{R}^n,$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę euklidesową.

Minimalizujemy funkcjonał

$$J(u, x) = \int_0^1 (g(x(t)) + h(u(t)))$$

nad zbiorem $A$. Biorąc pod uwagę strukturę zbioru $A$ uzyskujemy, że można miminalizować funkcjonał

$$J(u) = \int_0^1 \left( g\left( x_0 + \int_0^1 e^{A(t-s)} Bu(s) ds \right) + h(u(t)) \right) dt \to \min$$

nad zbiorem $S$. Należy dowieść, że odwzorowanie

$$L(u)(t) = \int_0^1 e^{A(t-s)} Bu(s) ds$$

jest liniowe i wypukłe na drugą zmienną nad $L^2(0,1)$ oraz ciągłe na drugą zmienną.

ROZDZIAŁ 6

# Zagadnienie brzegowe drugiego rzędu typu Dirichleta

W **podrozdziale 5.5** badaliśmy istnienie argumentu minimum funkcjonału działania uzyskując iż spełnia on pewne równanie różniczkowe z warunkami brzegowymi. Zbadamy teraz zagadnienia do których znajdzie zastosowanie bezpośrednia metoda rachunku wariacyjnego. Okazuje się, że funkcjonały, które się bada w takim przypadku są związanie z pewnym typem równań różniczkowych, dokładniej z zagadnieniami brzegowymi dla takich równań. Rozważanie takich zaganień różni się od tradycyjnego badania równań z warunkami początkowymi. Sposób postępowania sprowadza się do zastosowania bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego i jest następujący: dla danego równania znaleźć funkcjonał związany z równaniem w takim sposób, że rozwiązanie równania jest otrzywane jako punkt krytyczny badanego funkcjonału. Następnie trzeba sprawdzić iż funkcjonał jest koercytywny, słabo ciągowo półciągły z dołu oraz różniczkowalny w przypadku zastosowania bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego, bądź warunki „geometrii górskiej” przy zastoswaniu lematu o przełęczy górskiej. Zagadnienie więc jest w pewnym sensie odwrotne do rozważanego w poprzednim rozdziale. Wcześniej mieliśmy dany funkcjonał działania z którym wiązaliśmy, poprzez znalezienie pochodnej Gâteaux, odpowiednie równanie różniczkowe z warunkami brzegowymi wynikającymi z przestrzeni w której funkcjonał był badany.

## 6.1. Zastosowanie bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego

Rozważmy następujące zagadnienie typu Dirichleta: znaleźć funkcję $x \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ taką, że

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t)) + h(t), \text{ dla p.w. } t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{6.1}$$

gdzie

**H1** $h \in L^2(0,1)$ oraz $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją $L^2$–Caratheodory'ego.

Założenie podane wyżej jest jednym z tych, które będziemy nakładać na prawą stronę równania. Dzięki niemu zagadnienie jest dobrze postawione w tym sensie, że obie jego strony są funkcjami z $L^2(0,1)$. Złożenie funkcji $L^2$–Caratheodory'ego z funkcją ciągłą (jaką jest element przestrzeni $H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$) jest oczywiście funkcją $L^2$–Caratheodory'ego.

Równania, które rozważamy najcześciej nie daje się scałkować bezpośrednio (poza nielicznymi przypadkami szczególnych postaci funkcji $f$). Metody, które podamy będą gwarantowały, że rozwiązanie istnieje wraz z informacją o jego jednoznaczności. Zagadnienia brzegowe mogą posiadać nieskończenie wiele rozwiązań. Nie jest to zbyt zaskakujące, gdy weźmiemy pod uwagę fakt, iż aby rozwiązać równanie poszukujemy argumentu minimum powiązanego z nim funkcjonału działania. Z równaniem $\cos x = 0$ powiązany jest funkcjonał $J(x) = \sin x$, który ma nieskończenie wiele argumentów miminum globalnego.

**Definicja 6.1.1** (Klasyczne prawie wszędzie rozwiązanie zagadnienia Dirichleta). *Funkcję*

$$x \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$$

*spełniającą równanie* (6.1) *wraz z warunkami brzegowymi*

$$x(0) = x(1) = 0$$

*nazywamy rozwiązaniem klasycznym zagadnienia* (6.1).

Załóżmy, że funkcja $x \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$ jest rozwiązaniem klasycznym (6.1). Wówczas zarówno $x$ jak i $\dot{x}$ są funkcjami absolutnie ciągłymi. Przemnóżmy równanie (6.1) przez dowolną funkcję $v \in H_0^1(0,1)$ i scałkujmy obustronnie. Zauważmy, że wykorzystując warunki brzegowe mamy

$$\int_0^1 \ddot{x}(t)v(t)\,dt = \dot{x}(1)v(1) - \dot{x}(0)v(0) - \int_0^1 \dot{x}(t)\dot{v}(t)\,dt = -\int_0^1 \dot{x}(t)\dot{v}(t)\,dt.$$

Stąd mamy następującą relację spełnioną przez rozwiązanie $x$ dla dowolnej funkcji testowej $v$

$$\int_0^1 \dot{x}(t)\dot{v}(t)\,dt + \int_0^1 (f(t,x(t)) + h(t))v(t)\,dt = 0. \tag{6.2}$$

Stąd możemy podać następującą definicję:

**Definicja 6.1.2** (Słabe rozwiązanie zagadnienia Dirichleta)**.** *Funkcję* $x \in H_0^1(0,1)$ *nazywamy słabym rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta* (6.1)*, jeżeli dla dowolnego* $v \in H_0^1(0,1)$ *spełniona jest relacja* (6.2).

Zauważmy, że rozwiązanie słabe jest jedynie klasy $H_0^1(0,1)$. Na podstawie powyżej poczynionych obserwacji każde rozwiązanie klasyczne, jest rozwiązaniem słabym. Powstaje pytanie, czy rozwiązanie słabe jest rozwiązaniem klasycznym. Okazuje się, że ma to miejsce i wystarczy powołać się na omawiany powyżej **lemat 5.4.2** (**Lemat du Bois-Reymonda**). Skoro w przypadku badania zagadanienia (6.1) znalezienie rozwiązania słabego jest równoważne znalezieniu rozwiązania klasycznego, wystarczy znaleźć jedno z nich - to które uzyskać jest łatwiej.

Poszukiwać będziemy rozwiązań słabych jako punktów krytycznych pewnego funkcjonału całkowego. Aby móc badać ten funkcjonał będziemy potrzebowali pewnych warunków wzrostu.

Zauważmy, że funkcja $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$F(t,x) = \int_0^x f(t,s)\,ds \text{ dla p.w. } t \in [0,1] \text{ oraz dla każdego } x \in \mathbb{R}$$

jest również funkcją Caratheodory'ego. Również mamy, że

$$\frac{d}{dx}F(t,x) = f(t,s)ds$$

dla p.w. $t \in [0,1]$ oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Zatem warunki wzrostu mogą być nakładane albo na $F$ albo na $f$. Będziemy dodatkowo zakładali, że

**H2** $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją* $L^1-$ *Caratheodory'ego oraz istnieją funkcje*

$$a \in L^\infty(0,1),\ \|a\|_{L^\infty} < \pi^2,\ b,c \in L^1(0,1)$$

*takie, że dla p.w.* $t \in [0,1]$ *oraz dla każdego* $x \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$F(t,x) \geq \frac{1}{2}a(t)x^2 + b(t)x + c(t) \tag{6.3}$$

**Uwaga 6.1.3.** *Założenie* $\|a\|_{L^\infty} < \pi^2$ *wiąże się z nierównością Poincáre. Przykładem funkcji to założenie spełniającej jest dowolna funkcja ciągła na odcinku* $[0,1]$ *o odpowiednio małej normie. Wiemy, iż dla funkcji ciągłych na odcinku supremum istotne pokrywa się z supremum. Warunek* (6.3) *będzie wykorzystywany przy dowodzeniu koercytywności odpowiedniego funkcjonału działania. Przykładem funkcji F spełniającej powyższy warunek jest następująca funkcja kwadratowa*

$$F(t,x) = \frac{1}{4}\pi^2 tx^2 + (\sin t)x$$

*i związana z nią funkcja*

$$f(t,x) = \frac{1}{2}\pi^2 tx + \sin t.$$

Rozważmy teraz funkcjonał działania (zwany czasem *funkcjonałem działania Eulera* lub funkcjonałem Eulera) $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt + \int_0^1 F(t,x(t))dt + \int_0^1 h(t)x(t)dt.$$

Zauważmy, iż

**Lemat 6.1.4.** *Załóżmy, że spełniony jest warunek **H1**. Funkcjonał $J$ jest dobrze określony, tzn. $J(x) \in \mathbb{R}$ dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$.*

**Dowód.** Istotnie $\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt = \|x\|^2_{H_0^1(0,1)} < +\infty$. Z nierówności Schwarza mamy, że

$$\int_0^1 h(t)x(t)dt \leq \sqrt{\int_0^1 h^2(t)dt}\sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt} < +\infty.$$

Skoro $F$ jest funkcją $L^1-$ Caratheodory'ego oraz $x \in H_0^1(0,1)$ jest funkcją ciągłą, to całka $\int_0^1 F(t,x(t))dt$ jest również skończona. ∎

Pozostaje zbadać inne własności funkcjonału $J-$ tzn. koercytywność, słabą półciągłość z dołu oraz różniczkowalność w sensie Gâteaux, czyli zastosować *bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego* (**Twierdzenie 5.2.1**). W istocie $J$ okaże się być funkcjonałem klasy $C^1$.

**Lemat 6.1.5.** *Załóżmy, że spełniony jest warunek **H1**. Wówczas funkcjonał $J$ jest słabo półciągły z dołu na $H_0^1(0,1)$.*

**Dowód.** Zauważmy, że $J = J_1 + J_2 + J_3$, gdzie

$$J_1(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt,\ J_2(x) = \int_0^1 F(t,x(t))dt,\ J_3(x) = \int_0^1 h(t)x(t)dt.$$

Zauważmy, że funkcjonał $J_3$ jest liniowy i ciągły a zatem słabo ciągły. Funkcjonał $J_1$ jest wypukły i ciągły, a zatem słabo półciągły z dołu na podstawie **twierdzenia 5.1.8.** Z **przykładu 5.3.10** wynika, że $J_2$ jest słabo ciągły. ∎

**Lemat 6.1.6.** *Załóżmy, że spełniony jest warunek **H1**. Wówczas funkcjonał $J$ jest różniczkowalny w sposób ciągły na $H_0^1(0,1)$.*

**Dowód.** Zauważmy, że $J_3$ jako liniowy i ciągły jest funkcjonałem klasy $C^1$.

Zauważmy, że z **przykładu 2.4.9** wynika, iż $J_1$ jest również klasy $C^1$.

Pozostaje więc rozważyć przypadek funkcjonału $J_2$. *Dla uproszczenia rozważań przyjmiemy, iż $f$ jest funkcją ciągłą.* Wtedy oczywiście spełnia warunek

Caratheodory'ego. Ustalmy $x \in H_0^1(0,1)$. Dla ustalonego elementu $v \in H_0^1(0,1)$ (który jest oczywiście funkcją ciągłą) funkcja

$$\varepsilon \to \int_0^1 F(t, x(t) + \varepsilon v(t))\, dt$$

(w tym wypadku całkę możemy traktować jako całkę Riemanna) rozważana na przedziale $(-1,1)$ jest ze względu na regułę Leibniza różniczkowania pod znakiem całki klasy $C^1$ i stąd

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int_0^1 F(t, x(t) + \varepsilon v(t))\, dt \Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^1 f(t, x(t)) v(t)\, dt,$$

skoro $F(t,x) = \int_0^x f(t,s)\, ds$. Zauważmy, że odwzorowanie

$$v \to \int_0^1 f(t, x(t)) v(t)\, dt \tag{6.4}$$

jest liniowe i ciągłe. Liniowość jest oczywista, a ciągłość łatwo pokazać stosując następujące oszacowanie. Skoro $x$ jest funkcją ciągła, to istnieje liczba $d > 0$ taka, że $|x(t)| \leq d$ dla $t \in [0,1]$. Skoro $f$ jest funkcją $L^2$–Caratheodory'ego, to istnieje funkcja $f_d \in L^1(0,1)$ taka, że $|f(t,x(t))| \leq f_d(t)$ dla p.w. $t \in [0,1]$. Połóżmy $c_1 := \int_0^1 f_d(t)\, dt$. Mamy stąd i z nierówności Soboleva

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 f(t, x(t)) v(t)\, dt \right| &\leq \int_0^1 |f(t, x(t)) v(t)|\, dt \\
&\leq \|v\|_{C[0,1]} \int_0^1 |f(t, x(t))|\, dt \\
&\leq \|v\|_{H_0^1(0,1)} \int_0^1 f_d(t)\, dt = c_1 \|v\|_{H_0^1(0,1)}.
\end{aligned}$$

Zatem operator dany wzorem (6.4) jest liniowy i ciągły. Stąd funkcjonał $J_2$ jest różniczkowalny w sensie Gâteaux. Pokażemy teraz, że $J_2$ jest klasy $C^1$. Wystarczy pokazać, że pochodna Gâteaux jest ciągła na $H_0^1(0,1)$, czyli, uwzględniwszy **uwagę 2.4.8**, że dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset H_0^1(0,1)$ takiego, że $x_n \to x_0 \in H_0^1(0,1)$ zachodzi

$$\int_0^1 f(t, x_n(t)) v(t)\, dt \to \int_0^1 f(t, x_0(t)) v(t)\, dt \tag{Zb}$$

jednostajnie względem $v$ ze sfery jednostkowej w $H_0^1(0,1)$. Zauważmy, że dla p.w. $t \in [0,1]$ zachodzi

$$f(t, x_n(t)) v(t) \to f(t, x_0(t)) v(t).$$

Skoro $x_n \to x_0$ w $H_0^1(0,1)$, to również $x_n \rightrightarrows x_0$ a zatem istnieje $d > 0$ takie, że $|x_n(t)| \le d$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,1]$ oraz funkcja $f_d \in L^2(0,1)$ taka, że $|f(t,x)| \le f_d(t)$ dla p.w. $t \in [0,1]$ oraz dla wszystkich $|x| \le d$. Zauważmy, że dla p.w. $t \in [0,1]$ zachodzi

$$|f(t,x_n(t))v(t)| \le \|v\|_{C[0,1]} f_d(t) = f_d(t),$$

gdyż $\|v\|_{C[0,1]} = 1$. Zatem stosując twierdzenie Lebesgue'a o zmajoryzowanej zbieżności mamy, że (Zb) zachodzi jednostajnie względem $v$ ze sfery jednostkowej w $H_0^1(0,1)$. ∎

Zajmiemy się teraz koercytywnością funkcjonału $J$.

**Lemat 6.1.7.** *Przy założeniach **H1, H2** funkcjonał $J$ jest koercytywny na $H_0^1(0,1)$.*

**Dowód.** Zauważmy, że dla funkcjonału $J_2$ zachodzi następujące oszacowanie dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$ na podstawie nierówności Poincare

$$\begin{aligned}
J_2(x) &= \int_0^1 F(t,x)dt \ge \frac{1}{2}\int_0^1 a(t)x^2(t)dt + \int_0^1 b(t)x(t)dt + \int_0^1 c(t)dt \\
&\ge -\frac{1}{2}\int_0^1 \left|a(t)x^2(t)\right| dt - \int_0^1 |b(t)x(t)|\,dt + \int_0^1 c(t)dt \\
&\ge -\frac{1}{2}\|a\|_{L^\infty(0,1)}\int_0^1 x^2(t)dt - \|x\|_{C[0,1]}\int_0^1 |b(t)|\,dt + c_1 \\
&\quad -\frac{1}{2}a_1\frac{1}{\pi^2}\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt - \|x\|_{H_0^1(0,1)}\int_0^1 |b(t)|\,dt + c_1 \\
&= -\frac{1}{2\pi^2}a_1\|x\|^2_{H_0^1(0,1)} - b_1\|x\|_{H_0^1(0,1)} + c_1,
\end{aligned}$$

gdzie

$$a_1 = \|a\|_{L^\infty(0,1)}, b_1 = \int_0^1 |b(t)|\,dt, c_1 = \int_0^1 c(t)dt.$$

Ponadto, dla funkcjonału $J_3$ zachodzi następujące oszacowanie

$$J_3(x) = \int_0^1 h(t)x(t)dt \ge -\int_0^1 |h(t)x(t)|\,dt \ge -\int_0^1 |h(t)|\,dt\,\|x\|_{H_0^1(0,1)}$$

dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$. Podsumowując zachodzi następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
J(x) &= J_1(x) + J_2(x) + J_3(x) \\
&\ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi^2}a_1\right)\|x\|^2_{H_0^1(0,1)} + \left(-b_1 - \int_0^1 |h(t)|\right)\|x\|_{H_0^1(0,1)} + c_1
\end{aligned}$$

dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$. Skoro $a_1 = \|a\|_{L^\infty} < \pi^2$, to

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\pi^2}a_1\right)\|x\|^2_{H_0^1(0,1)} + \left(-b_1 - \int_0^1 |h(t)|\right)\|x\|_{H_0^1(0,1)} + c_1 \to \infty$$

o ile $\|x\|_{H_0^1(0,1)} \to \infty$. Zatem $J$ jest koercytywny na $H_0^1(0,1)$. ∎

Pozostaje skomentować kwestię jednoznaczności rozwiązań.

**Uwaga 6.1.8.** *Jednoznaczność rozwiązań badanego zgadnienia Dirichleta sprowadza się do sprawdzenia czy funkcjonał działania ma dokładnie jeden punkt krytyczny. A to najprościej sprawdzić badając ścisłą wypukłość funkcjonału działania. Zauważmy, że $J_1$ jest ściśle wypukły, natomiast funkcjonał $J_3$ jako liniowy jest wypukły. Zatem $J$ będzie ściśle wypukły, o ile wypukły będzie $J_2$.*

Potrzebujemy zatem dodatkowego założenia

**H3** *dla p.w. $t \in [0,1]$ funkcja $x \to f(t,x)$ jest niemalejąca na $\mathbb{R}$.*

Z założenia **H3** wynika, iż dla p.w. $t \in [0,1]$ funkcja $x \to F(t,x)$ jest wypukła.

Istotnie ustalmy $t \in [0,1]$ i weźmy dowolne $x > y$, $x,y \in \mathbb{R}$. Skoro funkcja $s \to f(t,s)$ jest niemalejąca, to oczywiście $f(t,s) \geq f(t,y)$ dla $s \in [y,x]$. Mamy zatem

$$\begin{aligned} F(t,x) - F(t,y) &= \int_0^x f(t,s)ds - \int_0^y f(t,s)ds = \int_y^x f(t,s)ds \\ &\geq \int_y^x f(t,y)ds = f(t,y)(x-y). \end{aligned}$$

Ponieważ dla $x < y$ również zachodzi $F(t,x) - F(t,y) \geq f(t,y)(x-y)$ oraz $F_x = f$, to

$$F(t,x) - F(t,y) \geq F_x(t,y)(x-y).$$

Zatem, ze **stwierdzenia 4.1.2** mamy, że dla p.w. $t \in [0,1]$ funkcja $x \to F(t,x)$ jest wypukła na $\mathbb{R}$.

Stąd wypukły jest funkcjonał

$$H_0^1(0,1) \ni x \to \int_0^1 F(t,x(t))dt.$$

Zauważmy, też, że jeżeli $f(t,0) = 0$ dla p.w. $t \in [0,1]$ oraz $h$ nie jest tożsamościowo zerem p.w. na $[0,1]$, to element $0 \in H_0^1(0,1)$ nie może być rozwiązaniem (6.1). Istotnie, wstawiając $x = 0$ do równania (6.1) otrzymujemy sprzeczność. Stąd możemy podać (już bez konieczności dowodzenia) następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 6.1.9** (Istnienie i jednoznaczność rozwiązania niezerowego)**.** *Załóżmy, że spełnione są warunku* ***H1, H2, H3*** *oraz, że* $f(t,0) = 0$ *dla p.w.* $t \in [0,1]$*,* $h$ *nie jest tożsamościowo zerem p.w. na* $[0,1]$*. Wówczas zagadanienie* (6.1) *posiada dokładnie jedno nietrywialne rozwiązanie klasyczne.*

Możemy podać twierdzenie dotyczące jedynie rozwiązalności zagadnienia (6.1) bez wymagania jednoznaczności. Wystarczy w **twierdzeniu 6.1.9** pominąć założenie **H3**.

**Twierdzenie 6.1.10** (Istnienie rozwiązania niezerowego)**.** *Załóżmy, że spełnione są warunku* ***H1, H2*** *oraz, że* $f(t,0) = 0$ *dla p.w.* $t \in [0,1]$*,* $h$ *nie jest tożsamościowo zerem p.w. na* $[0,1]$*. Wówczas zagadanienie* (6.1) *posiada co najmniej jedno nietrywialne rozwiązanie klasyczne.*

## 6.2. Zastosowanie twierdzenia o przełęczy górskiej

Zajmiemy się teraz zagadnieniem Dirichleta dla uproszczenia rozważanym z prawą stroną niezależną od czasu

$$\begin{aligned} &-\ddot{x}(t) = f(x(t)), \text{ dla p.w. } t \in (0,1), \\ &x(0) = x(1) = 0, \end{aligned} \tag{6.5}$$

gdzie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą taką, że $F(v) := \int_0^v f(s)ds$ oraz

**H4** *istnieje stała* $\theta > 2$ *taka, że dla* $v \in \mathbb{R}$*,* $|v| \geq M_0$*, gdzie* $M_0 > 0$ *jest pewną stałą zachodzi*

$$0 < \theta F(v) \leq v f(v), \tag{6.6}$$

**H5** $\lim_{v\to 0} \frac{f(v)}{v} = 0$.

Powyżej Zauważmy, iż funkcja $f(v) = v^3$ dla $\theta = 4$ spełnia powyżej przyjęte założenia.

Warunek **H4** odbiega od warunków dotychczas nakładanych i nosi nazwę warunku Ambrosettiego-Rabinowitza. Ułatwi on sprawdzenie, iż dla funkcjonału $J$ spełniony jest warunek Palais-Smale. Warunek **H5** mówi o zachowaniu się funkcji $f$ w otoczeniu 0 (trzeba przypomnieć definicję granicy funkcji) a co za tym o zachowaniu wokół 0 funkcjonału działania.

Skoro $f$ jest funkcją ciągłą to od razu otrzymujemy, że $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(t)|^2 dt - \int_0^1 F(u(t))dt$$

jest dobrze określony.

Różniczkowalność

$$u \to \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{u}(t)|^2 dt$$

w sensie Gâteaux jest również oczywista. Różniczkowalność funkcjonału

$$u \to \int_0^1 F(u(t))dt$$

na $H_0^1(0,1)$ wynika z dowodu **lematu 6.1.6**. Widzimy, że $J'(u) : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ jest dana wzorem

$$J'(u;h) = \int_0^1 \dot{u}(t)\dot{h}(t)dt - \int_0^1 f(u(t))h(t)dt. \tag{6.7}$$

Zatem, podobnie jak w rozważanych dotąd przypadkach każdy element $u \in H_0^1(0,1)$ będący punktem krytycznym funkcjonału $J$, jest **rozwiązaniem słabym** zagadnienia (6.5), czyli takim, że relacja

$$\int_0^1 \dot{u}(t)\dot{h}(t)dt = \int_0^1 f(u(t))h(t)dt$$

zachodzi dla dowolnego $h \in H_0^1(0,1)$. **Rozwiązaniem klasycznym** jest każda funkcja $u \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ która spełnia równanie (6.5) dla p.w. $t \in [0,1]$ wraz z warunkami brzegowymi.

Korzystając z wyniku opisanego w [5] wiemy, że całkując obie strony nierówności (6.6) otrzymujemy, iż istnieją stałe $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ takie, że dla dowolnego $v \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$F(v) \geq a|v|^{\theta} - b. \tag{6.8}$$

Skoro $\theta > 2$, to widzimy od razu, iż funkcjonał $J$ nie może być koercytywny. W istocie mamy następujący lemat:

**Lemat 6.2.1.** *Załóżmy, że spełniony jest warunek* ***H4****. Niech $\eta > 0$ będzie dowolnie ustalone. Wtedy istnieje element $v \in H_0^1(0,1)$ taki, że $\|v\|_{H_0^1(0,1)} > \eta$ oraz $J(v) < 0$.*

**Dowód.** Weźmy dowolny element $w \in H_0^1(0,1)$ *taki, że* $w \neq 0$. Zauważmy, że dla $s > 0$ stosując nierówność (6.8) oraz definicję normy w $H_0^1(0,1)$ mamy

$$\begin{aligned} J(sw) &= \frac{1}{2}\int_0^1 |s\dot{w}(t)|^2\,dt - \int_0^1 F(sw(t))\,dt \\ &\leq \frac{s^2}{2}\|w\|^2_{H_0^1(0,1)} - as^{\theta}\int_0^1 |w(t)|^{\theta}\,dt + b. \end{aligned}$$

Skoro $w$ jest ustalone, $a > 0$ i $\theta > 2$, to oczywiście

$$\frac{s^2}{2}\|w\|^2_{H_0^1(0,1)} - as^{\theta}\int_0^1 |w(t)|^{\theta}\,dt + b \to -\infty$$

przy $s \to \infty$. Stąd również

$$J(sw) \to -\infty.$$

Możemy więc ustalić takie $s_0 > 0$, że $\|s_0 w\|_{H_0^1(0,1)} > \eta$ oraz $J(s_0 w) < 0$. Kładąc $v(t) := s_0 w(t)$ dla $t \in [0,1]$ mamy tezę lematu. ∎

Kolejny lemat dotyczy zachowania się funkcjonału wokół 0. Okazuje się, że znajdziemy sferę taką, że na niej funkcjonał działania jest zawsze dodatni.

**Lemat 6.2.2.** *Założmy, że spełnione są warunki* ***H4, H5****. Wówczas istnieją liczby $\eta, \xi > 0$ takie, że $J(u) \geq \xi$ dla wszystkich $u \in H_0^1(0,1)$ spełniających $\|u\|_{H_0^1(0,1)} = \eta$.*

**Dowód.** Zauważmy, że z założenia **H5** dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|x| \leq \delta$ zachodzi $|f(v)| \leq \varepsilon|v|$. Dla $0 < x \leq \delta$ możemy zapisać

$$|F(x)| = \left|\int_0^x f(s)ds\right| \leq \int_0^x |f(s)|\,ds \leq \varepsilon\int_0^x |s|\,ds = \varepsilon\int_0^x s\,ds = \varepsilon\frac{|x|^2}{2}.$$

Natomiast dla $-\delta \le x < 0$ mamy

$$|F(x)| = \left| \int_0^x f(x)ds \right| = \left| \int_x^0 -f(s)ds \right| \le \varepsilon \frac{|x|^2}{2}.$$

Zatem dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla $|x| \le \delta$ zachodzi

$$|F(x)| \le \varepsilon \frac{|x|^2}{2}.$$

Ustalmy $0 < \varepsilon < 1$ oraz weźmy $\delta \le \varepsilon$. Uwzględniając nierówność (5.2), (5.3) mamy dla $\|w\|_{H_0^1(0,1)} = \delta$, $w \in H_0^1(0,1)$, co następuje

$$\begin{aligned} J(w) &= \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{w}(t)|^2 dt - \int_0^1 F(w(t))dt \\ &\ge \frac{1}{2}\|w\|^2_{H_0^1(0,1)} - \frac{1}{2}\varepsilon \int_0^1 |w(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\|w\|^2_{H_0^1(0,1)} \ge \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Zatem możemy przyjąć

$$\eta = \varepsilon, \qquad \xi = \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\varepsilon^2.$$ ∎

Przejdziemy teraz do sprawdzenia warunku Palais-Smale'a, co nie jest już elementarne. Tym razem znów nam przyjdzie z pomocą warunek **H4.** Wykorzystamy również następującą własność:

**W1:** *W dowolnej rzeczywistej przestrzeni Hilberta $H$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dla ciągu słabo zbieżnego $x_n \rightharpoonup x_0$ i takiego, że $\|x_n\| \to \|x_0\|$, zachodzi $x_n \to x_0$. Łatwo ten fakt wykazać posługując się związkiem normy oraz iloczymu skalarnego i badając zbieżność $\|x_n\|^2 \to \|x_0\|^2$.*

Istotnie, zauważmy, że ze słabej zbieżności $x_n \rightharpoonup x_0$, wynika, że $\langle x_n, x_0 \rangle \to \|x_0\|^2$. Stąd

$$\|x_n - x_0\|^2 = \langle x_n - x_0, x_n - x_0 \rangle = \|x_n\|^2 + \|x_0\|^2 - 2\langle x_n, x_0 \rangle \to 0.$$

Druga z własności, którą wykorzystamy jest następująca

**W2:** *Niech* $(x_n), (f_n) \subset H$ *będą takie, że* $x_n \rightharpoonup x_0$ *oraz* $f_n \to f_0$*. Wtedy*

$$\langle x_n, f_n \rangle \to \langle x_0, f_0 \rangle .$$

**Lemat 6.2.3.** *Załóżmy, że spełnione są warunki **H4, H5**. Wtedy funkcjonał J spełnia warunek Palais-Smale'a.*

**Dowód.** Weźmy dowolny ciąg $(u_k) \subset H_0^1(0,1)$ taki, że ciąg $(J(u_k))$ jest ograniczony oraz $\left\| J'(u_k) \right\|_{H_0^1(0,1)} \to 0$ przy $k \to \infty$. Pokażemy, że $(u_k)$ ma podciąg zbieżny.

Skoro $\| J'(u_k) \|_{H_0^1(0,1)} \to 0$, to dla pewnego ustalonego $\varepsilon > 0$ istnieje $k_0$ takie, że $\left\| J'(u_k) \right\|_{H_0^1(0,1)} \le \varepsilon$ dla $k \ge k_0$. Zatem dla $k \ge k_0$

$$\left| J'(u_k; u_k) \right| \le \varepsilon \, \| u_k \|_{H_0^1(0,1)} .$$

Z bezpośredniego rachunku mamy

$$J'(u_k; u_k) = \| u_k \|^2_{H_0^1(0,1)} - \int_0^1 f(u_k(t)) u_k(t) dt. \tag{6.9}$$

Pokażemy, że ciąg $(u_k)$ jest ograniczony w $H_0^1(0,1)$. Przypuśćmy, że $\| u_k \|_{H_0^1(0,1)} \ge M_0$, gdzie $M_0$ jest stałą określoną w **H4** (w przeciwnym wypadku nie ma czego dowodzić). Zatem wykorzystując warunek (6.6) otrzymujemy dla $k \ge k_0$

$$\begin{aligned} -\int_0^1 F(u_k(t)) dt &\ge -\frac{1}{\theta} \int_0^1 f(t, u_k(t)) u_k(t) dt \\ &= \frac{1}{\theta} J'(u_k; u_k) - \frac{1}{\theta} \| u_k \|^2_{H_0^1(0,1)} . \end{aligned}$$

Zauważmy, że dla $k \ge k_0$ mamy

$$\frac{1}{\theta} J'(u_k; u_k) \ge -\frac{\varepsilon}{\theta} \| u_k \|_{H_0^1(0,1)} .$$

Skoro ciąg $(J(u_k))$ jest ograniczony, to istnieje stała $C > 0$ taka, że $J(u_k) \le C$ dla $k \in \mathbb{N}$. Stąd i z powyższego mamy dla $k \ge k_0$

$$\begin{aligned} J(u_k) &= \frac{1}{2} \| u_k \|^2_{H_0^1(0,1)} - \int_0^1 F(u_k(t)) dt \\ &\ge \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{\theta} \right) \| u_k \|^2_{H_0^1(0,1)} - \frac{\varepsilon}{\theta} \| u_k \|_{H_0^1(0,1)} \end{aligned}$$

Czyli ciąg $(u_k)$ jest ograniczony w $H_0^1(0,1)$. Ma on zatem podciąg słabo zbieżny w $H_0^1(0,1)$, który możemy wybrać w taki sposób, aby był zbieżny w $C[0,1]$, czyli zbieżny jednostajnie. Podciąg ciągu $(u_k)$ oznaczamy tym samym symbolem, a przez $u_0 \in H_0^1(0,1)$ oznaczamy jego słabą granicę.

Zatem wystarczy pokazać, że

$$\|u_k\|_{H_0^1(0,1)} \to \|u_0\|_{H_0^1(0,1)}$$

i wtedy już będzie wiadomo, że $(u_k)$ jest nie tylko słabo, ale i silnie w $H_0^1(0,1)$.

Widzimy, że dla $k \to \infty$

$$J'(u_k; u_k - u_0) \to 0 \tag{6.10}$$

Dokładniej zanalizujemy powyższą relację. Powołując się na wzór (6.9) mamy dla $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} J'(u_k; u_k - u_0) &= J'(u_k; u_k) - J'(u_k; u_0) \\ &= \|u_k\|^2_{H_0^1(0,1)} - \int_0^1 \dot{u}_k(t)\dot{u}_0(t)\,dt \\ &\quad - \int_0^1 f(u_k(t))u_k(t)\,dt + \int_0^1 f(u_k(t))u_0(t)\,dt. \end{aligned}$$

Zauważmy, że skoro $u_n \rightharpoonup u_0$, to

$$\int_0^1 \dot{u}_k(t)\dot{u}_0(t)\,dt \to \|u_0\|^2_{H_0^1(0,1)}.$$

Ponadto, skoro $u_n \rightrightarrows u_0$ oraz $f$ jest ciągła, to $f(u_n) \rightrightarrows f(u_0)$. Przechodząc do granicy w całce mamy

$$-\int_0^1 f(u_k(t))u_k(t)\,dt + \int_0^1 f(u_k(t))u_0(t)\,dt \to 0.$$

Zatem z (6.10) wynika, że $\|u_k\|_{H_0^1(0,1)} \to \|u_0\|_{H_0^1(0,1)}$, czyli otrzymujemy, że $u_k \to u_0$ skorzystawszy z opisanej powyżej własności przestrzeni Hilberta. ∎

**Twierdzenie 6.2.4.** *Załóżmy, że spełnione są warunki **H4, H5**. Wówczas zadanie Dirichleta* (6.5) *posiada przynajmniej jedno nietrywialne klasyczne rozwiązanie.*

**Dowód.** Teza wynika z **twierdzenia 3.3.1.** Istotnie $J(0) = 0$, z **lematu 6.2.3** funkcjonał $J$ spełnia warunek Palais-Smale'a oraz z **lematu 6.2.2** istnieją liczby $\eta, \xi > 0$ takie, że $J(u) \geq \xi$ dla wszystkich $u \in H_0^1(0,1)$ spełniających $\|u\|_{H_0^1(0,1)} = \eta$. Ponadto z **lematu 6.2.1** istnieje $v \in H_0^1(0,1)$ taki, że $\|v\|_{H_0^1(0,1)} > \eta$ oraz $J(v) < 0$. Zatem funkcjonał $J$ posiada nietrywialny punkt krytyczny, który jest rozwiązaniem słabym zagadnienia (6.5). Na podstawie **lematu 5.4.2 (Lemat du Bois-Reymonda)** jest to również rozwiązanie klasyczne. ∎

W odróżnieniu od zastosowania bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego, korzystając z **twierdzenia 3.3.1** razu otrzymujemy rozwiązanie nietrywialne bez żadnych dodatkowych założeń o funkcji $f$ w punkcie 0.

## 6.3. Rozwiązania dodatnie

Zajemiemy się rozwiązaniami dodatnimi na konkretnym przykładzie, w którym będą spełnione założenia **H4-H5.** Rozważmy w przestrzeni $H_0^1(0,1)$ zagadnienie Dirichleta

$$\begin{aligned} -\ddot{x}(t) &= |x(t)|^{p-2}x(t), \text{ dla p.w. } t \in (0,1), \\ x(0) &= x(1) = 0, \end{aligned} \tag{6.11}$$

gdzie $p > 2$. Zauważmy, że klasyczny funkcjonał działania $J : H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ związany z problemem (6.11) jest postaci (pamiętajmy, że $\frac{d}{dx}|x|^p = |x|^{p-2}x$ dla $p > 2$):

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}(t)|^2\,dt - \frac{1}{p}\int_0^1 |x(t)|^p\,dt.$$

Badanie zagadnienia (6.11) technikami związanymi z tak zwaną geometrią przełęczy górskiej prowadzi do uzyskania istnienia przynajmniej jednego rozwiązania dodatniego, tzn. takiego, że $x \in H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$ oraz $x(t) > 0$ dla $t \in (0,1)$. Tak zdefiniowany funkcjonał spełnia założenia **H4-H5** dla $\theta = p$. Z **twierdzenia 6.2.4** mamy, że funkcjonał $\widetilde{J}$ posiada co najmniej jeden nietrywialny punkt krytyczny $x_0$ będący rozwiązaniem słabym zagadnienia Dirichlete'a (6.11), czyli takim, że

$$\int_0^1 \dot{x}_0(t)\dot{v}(t)\,dt = \int_0^1 |x_0(t)|^{p-2}x_0(t)v(t)\,dt$$

dla dowolnego $v \in H_0^1(0,1)$. Na podstawie **lematu 5.4.2 (Lemat du Bois-Reymonda)** jest to również rozwiązanie klasyczne.

Z powyższego rozumowania łatwo widać, że zasadnicza trudność leży w znalezieniu rozwiązań dodatnich. Skoro rozwiązania uzyskujemy badając funkcjonał działania, to oczywiste jest, że istnienie rozwiązań dodatnich jest zagwarantowane przez istnienie dodatnich punktów krytycznych odpowiedniego funkcjonału działania. Połóżmy

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ \\ |x|^{p-2}, & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}.$$

Wtedy obliczając funkcję pierwotną (skorzystawszy z definicji funkcji górnej granicy całkowania) mamy:

$$G(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ \\ \frac{1}{p}|x|^{p}, & \text{dla } x \geq 0. \end{cases}.$$

Oczywiście $G$ jest klasy $C^1$ na $\mathbb{R}$. Rozważmy funkcjonał

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{x}(t)|^2 dt - \int_0^1 G(|x(t)|)dt$$

dla którego jak już nadmieniliśmy wcześniej spełnione są warunki geometrii przełęczy górskiej. Z definicji funkcji $g$ od razu widać, iż punkty krytyczne funkcjonału $J$ są rozwiązniami słabymi (6.11).

**Twierdzenie 6.3.1.** *Zadanie Dirichlete'a* (6.11) *posiada co najmniej jedno nietrywialne rozwiązanie dodatnie.*

**Dowód.** Z **twierdzenia 6.2.4** istnieje co najmniej jedno rozwiązanie $x_0$ zadania Dirichlete'a (6.11) spełniające

$$\int_0^1 \dot{x}(t)\dot{v}(t)dt = \int_0^1 g(x(t))v(t)dt \tag{6.12}$$

dla dowolnego $v \in H_0^1(0,1)$. Weźmy $v = x_0^-$, gdzie

$$x_0^-(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x_0(t) \geq 0, \\ x_0(t), & \text{gdy } x_0(t) < 0. \end{cases}$$

Skoro $x_0 \in H_0^1(0,1)$, to również $x_0^- \in H_0^1(0,1)$. Zauważmy, że z definicji funkcji $g$ wynika, że $g(x_0(t))x_0^-(t) = 0$ dla $t \in [0,1]$. Ponadto skoro $x \cdot x^- = -|x^-|^2$, to z (6.12)mamy

$$\int_0^1 \left|\dot{x}_0^-(t)\right|^2 dt = 0.$$

Od razu widać, że $x_0^- = 0$, skąd $x_0(t) \geq 0$ dla $t \in (0,1)$.

Przypuśćmy teraz, że zagadnienie (6.11) ma rozwiązanie $x_0$ takie, że dla pewngo $t_0$ mamy $x_0(t_0) = 0$. Zauważmy, że liniowe zagadnienie początkowe

$$-\ddot{x}(t) = 0, \text{ dla } t \in (0,1),$$

$$x(t_0) = \dot{x}(t_0) = 0$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie (klasyczne) $x_0 = 0$ dla $t \in \mathbb{R}$ przy dowolnym $t_0 \in (0,1)$. Wtedy oczywiście otrzymujemy sprzeczność z tym, że $x_0$ jest rozwiązaniem nietrywialnym. Czyli $x_0(t) > 0$ dla $t \in (0,1)$. ∎

## 6.4. Inne spojrzenie na bezpośrednią metodę rachunku wariacyjnego

Przypomnijmy, że rozważamy jedynie przestrzenie rzeczywiste, stąd też podawane przez nas definicje są umieszczane jedynie w tym kontekście. Podamy pewne zunifikowane podejście do badania nieliniowych zagadnień wariacyjnych, dla których istnienie można uzyskać przy wykorzystaniu bezpośredniej metody rachunku wariacyjnego. Niech $E$ będzie refleksywną, rzeczywistą przestrzenią Banacha.

**Definicja 6.4.1.** *Ograniczoną formą dwuliniową na E nazywamy funkcjonał*

$$a : E \times E \to \mathbb{R}$$

*mający następujące własności:*

*(i)* ***Dwuliniowość.*** *Dla dowolnych* $u, v, w \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *zachodzi*

$$a\left(\alpha u + \beta v, w\right) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$

$$a\left(w, \alpha u + \beta v\right) = \alpha a(w, u) + \beta a(w, v)$$

*(ii)* ***Ograniczoność.*** *Istnieje stała* $d > 0$ *taka, że dla dowolnych* $u, v \in E$ :

$$|a(u, v)| \le d\, \|u\|\, \|v\|$$

*Formę a nazywamy* ***symetryczną*** *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a(u, v) = a(v, u)$$

*dowolnych* $u, v \in E$.

*Formę a nazywamy* ***dodatnią*** *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$a(u, v) \ge 0$$

*dowolnych* $u, v \in E$.

*Formę a nazywamy* ***dodatnio określoną*** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała* $c > 0$ *taka, że*

$$a(u, u) \ge d\, \|u\|^2$$

*dowolnego* $u \in E$.

**Twierdzenie 6.4.2.** *Jeżeli* $a : E \times E \to \mathbb{R}$ *jest ograniczoną formą dwuliniową, to jest funkcjonałem ciągłym.*

**Dowód.** Weźmy ciągi $(u_n)$, $(v_n)$ zbieżne do $u_0$, $v_0$ odpowiednio. Wtedy mamy

$$\begin{aligned} |a(u_n, v_n) - a(u_0, v_0)| &\le |a(u_n - u_0, v_n)| + |a(u_0, v_n - v_0)| \\ &\le d\, \|u_n - u_0\|\, \|v_n\| + d\, \|u_0\|\, \|v_n - v_0\| \to 0. \end{aligned}$$ ∎

**Twierdzenie 6.4.3.** *Założmy, że $a : E \times E \to \mathbb{R}$ jest dodatnio określoną, symetryczną ograniczoną formą dwuliniową oraz $b : E \to \mathbb{R}$ funkcjonałem liniowym i ciągłym. Wówczas funkcjonał działania $J : E \to \mathbb{R}$ dany wzorem*

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - b(u)$$

*jest klasy $C^1$ jego pochodna jest postaci:*

$$\left\langle J'(u); h\right\rangle_{E^*,E} = a(u_0,h) - b(h)$$

*dla $h \in E$.*

*Ponadto, $J$ posiada dokładnie jeden argument minimum $u_0$ taki, że*

$$a(u_0,h) = b(h) \text{ dla } h \in E.$$

**Dowód.** Niech $x \in E$ będzie dowolnie ustalonym punktem. Ustalmy kierunek $h \in E$. Tworzymy funkcję pomocniczą $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daną wzorem

$$g(t) = \frac{1}{2}a(x+th, x+th).$$

Zauważmy, że skoro $a$ jest formą dwuliniową (symetryczną), to

$$g(t) = \frac{1}{2}a(x,u)^2 + ta(x,h) + \frac{1}{2}t^2 a(h,h).$$

Stąd mamy, że pochodna Gâteaux funkcjonału $J$ jest postaci:

$$\left\langle J'(u); h\right\rangle_{E^*,E} = a(u,h) - b(h)$$

dla $h \in E$. Korzystając z **uwagi 2.4.8** widzimy, że pochodna Gâteaux jest odwzorowaniem ciągłym na $E$. Istotnie, jeżeli $u_n \to u_0$ oraz $\|h\| \le 1$, to

$$|a(u-u_0,h)| \le d\,\|u_n - u_0\|\,\|h\| \le d\,\|u_n - u_0\| \to 0.$$

Zatem $J$ jest klasy $C^1$.

Funkcjonał $J$ jest koercytywny. Istotnie, mamy skoro forma $a$ jest dodatnio określona oraz $b$ jest funkcjonałem liniowym i ciągłym (czyli $b(u) \le \|b\|\,\|u\|$ dla dowolnego $u$)

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - b(u) \ge \frac{1}{2}c\,\|u\|^2 - \|b\|\,\|u\|$$

dla dowolnego $u \in E$. Stąd koercytywność wynika od razu.

Funkcjonał $J$ jest ściśle wypukły, a zatem wypukły. Istotnie, obliczając, skorzystawszy z uprzednio wyznaczonego funkcji pomocniczej $g$, wariację drugiego rzędu widzimy, że

$$J^{(2)}(u;h) = a(h,h) \geq \frac{1}{2}c\,\|h\|^2 > 0$$

dla $h \neq 0$, $h \in E$.

Podsumowując: funkcjonał $J$ jest ciągły i wypukły a zatem ciągowo słabo półciągły z dołu oraz koercytywny. Stąd posiada argument minimum $u_0$, który na podstawie Reguły Fermata spełnia zależność:

$$a(u_0,h) = b(h) \text{ dla } h \in E.$$

Skoro $J$ jest ściśle wypukły, to nie istnieje inny niż $u_0$ argument minimum. ∎

**Przykład 6.4.4.** Przykładem dodatnio określonej dwuliniownej symetrycznej formy może być iloczyn skalarny w rzeczywistej przestrzeni przestrzeni Hilberta $H$.

**Przykład 6.4.5** (Zastosowanie do rozwiązalności równań z ustaloną prawa stroną)**.** Niech $E = H_0^1(0,1)$. Rozważmy liniowe zagadnienie Dirichleta

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) = h(t), \text{ dla p.w. } t \in (0,1), \\ \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} , \tag{6.13}$$

gdzie $h \in L^2(0,1)$ jest pewną ustaloną funkcją. Przypomnijmy, że funkcja $h$ definiuje pewien funkcjonał liniowy i ciągły $b: E \to \mathbb{R}$ dany wzorem

$$b(v) = \int_0^1 v(t)h(t)\,dt.$$

Połóżmy $a: H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$a(x,v) = \int_0^1 \dot{x}(t)\dot{v}(t)\,dt.$$

Korzystając z **przykładu 6.4.4** wiemy, że $a$ jest dodatnio określoną symetryczną formą dwuliniowną. Zauważmy, że gdy $x \in H^2(0,1) \cap H_0^1(0,1)$, to

$$\int_0^1 \dot{x}(t)\dot{v}(t)dt = \int_0^1 (-\ddot{x}(t))v(t)dt.$$

Stąd obserwacja iż argument minimum funkcjonału $J$ określonego w **twierdzeniu 6.4.3** jest słabym rozwiązaniem zagadnienia Dirichleta (6.13), czyli

$$\int_0^1 \dot{x}(t)\dot{v}(t)dt = \int_0^1 v(t)h(t)dt$$

dla $v \in E$. **Lemat du Bois Reymonda (lemat 5.4.2)** gwarantuje, iż każde słabe rozwiązanie (6.13) jest rozwiązaniem silnym. Powołując się na **twiedzenie 6.4.3** wiemy, że funkcjonał $J$ ma dokładnie jeden argument minimum skąd wnioskujemy o jednoznacznej rozwiązalności zgadnienia Dirichleta (6.13).

Pozostaje odpowiedzieć na pytanie, czy możemy skonstruować podobne abstrakcyjne podejście do zagadnień typu (6.1). Poniższe twierdzenie jest jedną z możliwych odpowiedzi na to pytanie, aczkolwiek istnieją nieco ogólniejsze i mniej restrykcyjne podejścia.

**Twierdzenie 6.4.6.** *Załóżmy, że $a : E \times E \to \mathbb{R}$ jest dodatnio określoną, symetryczną ograniczoną formą dwuliniową oraz $b : E \to \mathbb{R}$ słabo pólciągłym z góry funkcjonałem klasy $C^1$, takim, że*

*(i) istnieją stałe $\alpha < c$, $b, \gamma \in \mathbb{R}$ takie, że*

$$b(x) \le \frac{1}{2}\alpha \|x\|^2 + \beta \|x\| + \gamma$$

*dla dowolnego $x \in E$;*

*(ii) funkcjonał $b$ jest wklęsły na $E$.*

*Wówczas funkcjonał działania $J : E \to \mathbb{R}$ dany wzorem*

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - b(u)$$

*jest klasy $C^1$ jego pochodna jest postaci:*

$$\langle J'(u); h\rangle_{E^*,E} = a(u_0, h) - \langle b'(u_0); h\rangle_{E^*,E}$$

*dla $h \in E$.*

*Ponadto, $J$ posiada dokładnie jeden argument minimum $u_0$ taki, że*

$$a(u_0, h) = \langle b'(u_0); h \rangle_{E^*, E} \text{ dla } h \in E.$$

**Dowód.** Należy wykazać, że funkcjonał $J$ jest słabo półciągły z dołu i korecytywny, gdyż różniczkowalność wynika z przyjętych założeń. Zastosowanie **twierdzenia 5.2.1** pozwoli nam otrzymać tezę. Skoro funkcjonał $u \to -b(u)$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu, to z **twierdzenia 6.4.3** wiemy, że tę własność ma funkcjonał $J$. Zauważmy, iż z **twierdzenia 6.4.3** wiemy, że $\frac{1}{2}a(u,u) \geq \frac{1}{2}c\,\|u\|^2$ dla dowolnego $u \in E$. Stąd z i założenia (i) mamy, że $u \in E$ zachodzi

$$J(u) \geq \frac{1}{2}(c - \alpha)\|u\|^2 - \beta\|u\| - \gamma,$$

skąd widzimy, że $J$ jest koercytywny. Ponieważ $J$ jest słabo ciągowo półciągły z dołu, to posiada argument minimum. Skoro $u \to a(u,u)$ jest ściśle wypukły oraz $u \to -b(u)$ jest wypukły, to argument minimum istnieje dokładnie jeden. Skorzystawszy raz jeszcze z **twierdzenia 6.4.3** i zróżniczkowawszy $J$, otrzymujemy tezę. ∎

**Przykład 6.4.7** (Zastosowanie do rozwiązalności równań ze zmienną prawa stroną)**.** Niech $E = H_0^1(0,1)$. Rozważmy nieliniowe zagadnienie Dirichleta

$$\begin{cases} -\ddot{x}(t) = f(t, x(t)) + h(t), \text{ dla p.w. } t \in (0,1) \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} , \qquad (6.14)$$

gdzie

**H6** $h \in L^2(0,1)$, *$h$ nie jest tożasmościowo równe zeru na* $[0,1]$, $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją $L^2$–Caratheodory'ego; $f(t,0) \neq 0$ dla p.w. $t \in [0,1]$;

**H7** $F : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją $L^1$– Caratheodory'ego oraz istnieją funkcje $a \in L^\infty(0,1)$, $\|a\|_{L^\infty} < \pi^2$, $b$, $c \in L^1(0,1)$ takie, że dla p.w.* $t \in [0,1]$ *oraz dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$F(t,x) \leq \frac{1}{2}a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

**H8** *dla p.w.* $t \in [0,1]$ *funkcja* $x \to f(t,x)$ *jest nierosnąca na* $\mathbb{R}$.

Powtarzając rozumowanie prowadzące do dowodu **twierdzenia 6.1.9** wiemy, iż zagadnienie Dirichleta (6.14)posiada dokładnie jedno rozwiązanie niezerowe. Pokażemy, że możemy zastosować **twierdzenie 6.4.6** Z **przykładu 6.4.5** wiemy, iż wystarczy sprawdzić założenie (i). Kładziemy

$$b(u) = \int_0^1 F(t,u(t))\,dt.$$

Z dowodu **lematu 6.1.7** otrzymujemy, że

$$b(u) \le \frac{1}{2\pi^2} a_1 \|u\|^2_{H_0^1(0,1)} + b_1 \|u\|_{H_0^1(0,1)} + c_1,$$

gdzie

$$a_1 = \|a\|_{L^\infty(0,1)}, b_1 = \int_0^1 |b(t)|\,dt, c_1 = \int_0^1 c(t)dt.$$

Zatem założenie (i) jest spełnione. Z dowodu **lematu 6.1.5** wynika, że $b$ jest słabo ciągowo ciągły. Skoro $x \to f(t,x)$ jest nierosnąca na $\mathbb{R}$, to $b$ jest wklęsły.

ROZDZIAŁ 7

# Zależność od parametru

Teraz zajmiemy się takimi równaniami różniczkowymi z warunkami brzegowymi typu Dirichleta, które prócz szukanej funkcji zależą również od pewnego funkcyjnego parametru. Zagadnienia takie są istotne w badaniu modeli w których pojawią się pewne zaburzenia. Sformalizujemy to od strony matematycznej, wprowadzając niezbędne uproszczenia. Znane są z tradycyjnych kursów równań różniczkowych zwyczajnych wyniki dotyczące zależności od parametru. Prezentowane przez nas rezulataty w jakiejś mierze są ich daleko idącymi odpowiednikami. Zachowują jednak zasadniczy sens zależności od parametru. Mamy ciąg parametrów zbieżny w pewnej przestrzeni funkcyjnej. Wybieramy ciąg rozwiązań równania odpowiadających temu ciągowi parametrów. Interesuje nas pytanie: *kiedy granicy ciągu parametrów odpowiada granica ciągu rozwiązań równania.*

## 7.1. Sformułowanie zagadnienia Dirichleta i założenia

Niech $u \in L^2(0,1)$ będzie ustaloną funkcją (tzw. parametrem funkcyjnym). Rozważamy, podobnie jak poprzednio również w przestrzeni $H_0^1(0,1)$, zagadnienie Dirichleta postaci

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) = x(\pi) = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Przypominamy, że *funkcja* $F:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *jest zdefiniowana następująco*

$$F(t,x,u)=\int_0^x f(t,s,u)ds$$

*dla p.w.* $t\in[0,1]$*, każdego* $u\in\mathbb{R}$*.*

Będziemy zakładali, że

**H9** $f,F:[0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *są funkcjami Caratheodory'ego.*

Pisząc, iż rozważamy (7.1) dla ustalonego $u\in L^2(0,1)$ w przestrzeni $H_0^1(0,1)$ mamy na myśli, iż równanie jest sprowadzone do postaci słabej, czyli szukamy $x\in H_0^1(0,1)$, takiego, że

$$-\int_0^1 \dot{x}(t)\dot{h}(t)dt=\int_0^1 f(t,x(t),u(t))h(t)dt \tag{7.2}$$

dla dowolnego $h\in H_0^1(0,1)$. Zatem poszukiwanie rozwiązań polega na znalezieniu rozwiązania słabego, a następnie wykazaniu, iż jest ono rozwiązaniem klasycznym rozumianym w tym sensie, iż dla ustalnego $u\in L^2(0,1)$ funkcja $x$ jest elementem $H_0^1(0,1)$ takim, że $\dot{x}:[0,1]\to\mathbb{R}$ jest funkcją absolutnie ciągłą oraz $x$ spełnia (7.1).

Interesuje nas zależność rozwiązań od parametru funkcyjnego $u$, a dokładniej zbadanie następującej zależności:

*Dany jest jest ciąg parametrów* $(u_n)\subset L^2(0,1)$*. Czy istnieje odpowiadający mu ciąg* $(x_n)\subset H_0^1(0,1)$ *rozwiązań zagadnienia Dirichleta* (7.1)*? Czy jeśli ciąg* $(u_n)$ *jest zbieżny w* $L^2(0,1)$ *do pewnego* $u_0$*, to odpowiadający mu ciąg rozwiązań też jest zbieżny (również w odpowiednim sensie, oraz być może co do podciągu) do pewnego* $x_0$ *oraz czy* $x_0$ *jest rozwiązaniem odpowiadającym elementowi* $u_0$*?*

Przy ustalonym $u\in L^2(0,1)$ funkcjonał działania związany z (7.1) jest postaci $J_u:H_0^1(0,1)\to\mathbb{R}$:

$$J_u(x)=\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt+\int_0^1 F(t,x(t),u(t))dt.$$

Nałożymy następujące dodatkowe założenia:

**H10** *dla dowolnego* $r > 0$ *istnieje funkcja* $f_r \in H_0^1(0,1)$ *taka, że dla dowolnych* $x \in H_0^1(0,1)$, $u \in L^2(0,1)$, $\|x\|_{H_0^1(0,1)} \leq r$, $\|u\|_{L^2(0,1)} \leq r$ zachodzi

$$|f_r(t,x(t),u(t))| \leq f_r(t)$$

*dla p.w.* $t \in [0,1]$;

**H11** *dla p.w.* $t \in [0,\pi]$ *oraz dla każdego* $u \in \mathbb{R}$ *funkcja* $x \to F(t,x,u)$ *jest wypukła na* $\mathbb{R}$;

**H12** *dla każdego* $u \in L^2(0,1)$

$$F(\cdot,0,u(\cdot)) \in L^1(0,1)$$

Przykładem funkcji $F$ spełniającej powyższe założenia jest

$$F(t,x,u) = f(t)x + x\exp\left(-u^2\right) + G(x)$$

gdzie $f \in L^1(0,1)$, a $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła, różniczkowalna oraz jej pochodna jest ograniczona na $\mathbb{R}$, czyli np.

$$G(s) = s \cdot \operatorname{arctg} s - \frac{1}{2}\ln\left(s^2+1\right).$$

Wtedy $G'(s) = \operatorname{arctg} s$ jest rosnąca i ograniczona na $\mathbb{R}$.

## 7.2. Rozwiązywalność zadania Dirichleta przy ustalonym parametrze

**Twierdzenie 7.2.1.** *Niech parametr* $u \in L^2(0,1)$ *będzie ustalony. Przy założeniach* ***H9-H12*** *funkcjonał* $J_u$ *jest dobrze określony oraz różniczkowalny w sensie Gâteaux na* $H_0^1(0,1)$ *i jego pochodna Gâteaux wynosi*

$$f'(x,g) = \int_0^1 \dot{x}(t)\dot{g}(t) + f(t,x(t),u(t))g(t)dt \tag{7.3}$$

*dla dowolnego* $g \in H_0^1(0,1)$.

**Dowód.** Ustalmy $u \in \mathbb{R}$. Weźmy dowolne $v \in \mathbb{R}$. Z twierdzenia o wartości średniej mamy, że dla p.w. $t \in [0,1]$ istnieje $\zeta \in [0,v]$ dla którego

$$F(t,v,u) - F(t,0,u) = f(t,\zeta,u)v. \tag{7.4}$$

(Zauważmy, iż $\zeta$ zależy od wszystkich zmiennych). Weźmy teraz (znów ustalone) $x \in H_0^1(0,1)$, $u \in L^2(0,1)$. Wtedy istnieje $r > 0$, takie, że $\|x\|_{H_0^1(0,1)} \le r$, $\|u\|_{L^2(0,1)} \le r$. Zdefiniujmy

$$f_0(t) := |F(t,0,u(t))|$$

p.w. na $[0,1]$. Wtedy mamy dla p.w. $t \in [0,1]$ z relacji (7.4) oraz nierówności Soboleva

$$|F(t,x(t),u(t))| \le |F(t,0,u(t))| + f_r(t)r := f_0(t) + f_r(t)r. \tag{7.5}$$

Z założeń **H10** oraz **H11** prawa strona powyższej nierówności jest funkcją klasy $L^1(0,1)$. Stąd całka $\int_0^1 F(t,x(t),u(t))dt$ jest skończona. Skończoność całki $\frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt$ jest oczywista.

Różniczkowalność w sensie Gâteaux wynika wymaga dokładniejszej analizy. Ustalmy $x \in H_0^1(0,1)$. Dla ustalonego elementu $v \in H_0^1(0,1)$ badamy istnienie granicy

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \int_0^1 \frac{F(t,x(t)+\varepsilon v(t),u(t)) - F(t,x(t),u(t))}{\varepsilon} dt.$$

Oczywista jest relacja

$$\lim_{\varepsilon\to\infty} \frac{F(t,x(t)+\varepsilon v(t),u(t)) - F(t,x(t),u(t))}{\varepsilon} = f(t,x(t),u(t))v(t)$$

dla p.w. $t \in [0,1]$. Wystarczy zauważyć, że majorantą jest funkcja będąca po prawej stronie relacji (7.5). Zatem można zastosować twierdznie o zmajoryzowanej zbieżności Lebesgue'a. ∎

**Twierdzenie 7.2.2.** *Niech parametr $u \in L^2(0,1)$ będzie ustalony. Przy założeniach **H9-H12** funkcjonał $J_u$ jest ściśle wypukły, koercytywny oraz słabo ciągowo półciągły z dołu na $H_0^1(0,1)$.*

**Dowód.** Zauważmy, iż $J_u$ jest sumą dwóch funkcjonałów : ściśle wypukłego

$$J_u^1(x) = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2(t)dt$$

oraz wypukłego

$$J_u^2(x) = \int_0^1 F(t,x(t),u(t))dt.$$

Zatem $J_u$ jest również ściśle wypukły.

Rozważamy ciąg $(x_n)$ silnie (normowo) zbieżny w $H_0^1(0,1)$ do pewnego $x_0$. Jest on wówczas zbieżny jednostajnie zbieżny na $[0,1]$. Zatem dla p.w. $t \in [0,1]$

$$\lim_{n\to\infty} F(t,x_n(t),u(t)) = F(t,x_0(t),u(t))$$

Wykorzystując relację (7.5) z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej Lebesgue'a mamy

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 F(t,x_n(t),u(t))dt = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} F(t,x_n(t),u(t))dt$$

Zatem $J_u$ jest ciągły ($J_u^1$ jest w oczywisty sposób ciągły), a skoro jest również wypukły, to jest słabo ciągowo półciągły z dołu.

Koercytywność funkcjonału $J_u$ jest również łatwa do wykazania. Połóżmy $f_1(t) = |f(t,0,u(t))|$ dla p.w. $t \in [0,1]$. Z wypukłości $F$ mamy dla p.w. $t \in [0,1]$ oraz każdego $x \in \mathbb{R}$

$$F(t,x,u(t)) - F(t,0,u(t)) \geq f(t,0,u(t))x \geq -|f(t,0,u(t))||x| \geq -f_1(t)|x|.$$

Czyli

$$F(t,x,u(t))| \geq -f_1(t)|x| + f_0(t) \tag{7.6}$$

dla p.w. $t \in [0,1]$ oraz każdego $x \in \mathbb{R}$. Zauważmy, że dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$

$$\int_0^1 f_1(t)|x(t)|dt \leq \|x\|_{H_0^1(0,1)} \int_0^1 f_1(t)dt$$

Stąd mamy dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$

$$J_u^2(x) = \int_0^1 F(t,x(t),u(t))dt \geq -\|x\|_{H_0^1(0,1)} \int_0^1 f_1(t)dt + \int_0^1 f_0(t)dt.$$

Zatem dla dowolnego $x \in H_0^1(0,1)$

$$J_u(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2_{H_0^1(0,1)} - \|x\|_{H_0^1(0,1)} \int_0^1 f_1(t)dt + \int_0^1 f_0(t)dt.$$

Stąd $J_u$ jest korecytywny. ∎

**Uwaga 7.2.3.** *Zauważmy, że $J_u$ jest korecytywny jednostajnie względem $u$, tzn. istnieje funkcja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem*

$$g(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2_{H_0^1(0,1)} - \|x\|_{H_0^1(0,1)} \int_0^1 f_1(t)dt + \int_0^1 f_0(t)dt$$

*koercytywna i taka, że dla każdego $u \in L^2(0,1)$ zachodzi*

$$J_u(x) \geq g(x)$$

*dla każdego $x \in H_0^1(0,1)$.*

**Twierdzenie 7.2.4** (O jednoznacznej rozwiązalności zadania Dirichleta (7.2))**.** *Niech parametr $u \in L^2(0,1)$ będzie ustalony. Przy założeniach **H9-H12** zadanie Dirichleta* (7.2) *ma dokładnie jedno rozwiązanie $x_u$. Jeżeli $f(t,0,u(t)) \neq 0$ dla $t \in A$, gdzie $A$ jest podzbiorem mierzalnym* $[0,1]$ *miary dodatniej, to rozwiązanie $x_u$ jest nietrywialne.*

**Dowód.** Skoro $J_u$ jest koercytywny, słabo ciągowo półciągły z dołu oraz ściśle wypukły, to ma dokładnie jeden argument minimum. Ponieważ $J_u$ jest również różniczkowalny w sensie Gâteaux, to ze wzoru (7.3) oraz **twierdzenia 2.3.7** (**Reguły Fermata**) mamy

$$\int_0^1 \dot{x}_u(t)\dot{g}(t) - f(t, x_u(t), u(t))g(t)dt = 0$$

dla każdego $g \in H_0^1(0,1)$. Z **lematu 5.4.2** (**Lematu du Bois-Reymonda**) widzimy, iż $x_u$ jest rozwiązaniem klasycznym. Skoro $f(t,0,u(t)) \neq 0$ dla $t \in A$, gdzie $A$ jest podzbiorem mierzalnym $[0,1]$ miary dodatniej, to widzimy, że wstawiając 0 zamiast $x$ do równania (7.2) mamy sprzeczność. ∎

## 7.3. Zależność rozwiązania zagadnienia Dirichlete'a od parametru

Możemy teraz przejść do zależności od parametru. Okazuje się iż zestaw założeń, który przyjęliśmy jest wystarczający do wykazania kolejnego ważnego dla nas twierdzenia.

**Twierdzenie 7.3.1** (Zależność od parametru)**.** *Załóżmy, że spełnione są warunki **H9-H12**. Niech* $(u_n) \subset L^2(0,1)$ *będzie ciągiem zbieżnym do* $u_0 \in L^2(0,1)$. *Wtedy istnieje ciąg* $(x_n) \subset H_0^1(0,1)$ *jednoznacznych rozwiązań* (7.1) *odpowiadających elementom ciągu* $(u_n)$ *oraz* $x_0 \in H_0^1(0,1)$ *będący jego słabą granicą w* $H_0^1(0,1)$ *jak i (jednoznacznym) rozwiązaniem odpowiadającym elementowi* $u_0$.

**Dowód.** Dla dowolnie ustalonego $u_n$ istnieje dokładnie jedno $x_n$ będące rozwiązaniem słabym (i klasycznym) zagadnienia (7.1). Przypomijmy iż $x_n$ jest nie tylko rozwiązaniem, ale i argumentem minimum funkcjonału $J_{u_n}$. Stąd dla dowolnego $u_n$ oraz $x_n$ mamy

$$J_{u_n}(x_n) = \inf_{x \in H_0^1(0,1)} J_{u_n}(x) \le J_{u_n}(0) = 0.$$

Z **uwagi 7.2.3** mamy, że

$$\frac{1}{2}\|x_n\|^2_{H_0^1(0,1)} - \|x_n\|_{H_0^1(0,1)} \int_0^1 f_1(t)dt + \int_0^1 f_0(t)dt \le J_{u_n}(x_n) \le 0.$$

Zatem ciąg $(x_n)$ jest ograniczony w $H_0^1(0,1)$, czyli ma podciąg słabo zbieżny do pewnego $x_0$. Oznaczmy ten podciąg symbolem $(x_{n_k})$ Wykażemy, iż $x_0$ jest rozwiązaniem odpowiadającym elementowi $u_0$. Skoro $x_{n_k}$ jest rozwiązaniem słabym odpowiadającym $u_{n_k}$ (pamiętajmy, że każdy podciąg ciągu zbieżnego jest również zbieżny do tej samej granicy-niezależnie od rodzaju zbieżności), to

$$\int_0^1 \dot{x}_{n_k}(t)\dot{g}(t)dt = \int_0^1 f(t, x_{n_k}(t), u_{n_k}(t))g(t)dt$$

dla dowolnego $g \in H_0^1(0,1)$. Skoro $(x_{n_k})$ jest zbieżny słabo do $x_0$, to wprost z definicji mamy

$$\int_0^1 \dot{x}_{n_k}(t)\dot{g}(t)dt \to \int_0^1 \dot{x}_0(t)\dot{g}(t)dt.$$

Zbadamy teraz zbieżność całki

$$\int_0^1 f(t, x_{n_k}(t), u_{n_k}(t)) g(t) dt.$$

Skoro ciągi $(x_{n_k})$ oraz $(u_{n_k})$ są ograniczone odpowiednio w $H_0^1(0,1)$ oraz w $L^2(0,1)$, to istnieje liczba $r > 0$ taka, że $\|x_{n_k}\|_{H_0^1(0,1)} \leq r$ oraz $\|u_{n_k}\|_{L^2(0,1)}$ Z założenia **H10** istnieje funkcja $f_r \in L^1(0,1)$ taka, że dla p.w. $t \in [0,1]$ zachodzi

$$\left| f(t, x_{n_k}(t), u_{n_k}(t)) \right| \leq f_r(t).$$

Skoro $g$ jest funkcją ciągłą, to $f_r \cdot g \in L^1(0,1)$ i dla p.w. $t \in [0,1]$ zachodzi

$$\left| f(t, x_{n_k}(t), u_{n_k}(t)) g(t) \right| \leq f_r(t) |g(t)|.$$

Zatem z twierdzenia Lebesque'a o zmajoryzowanej zbieżności mamy

$$\int_0^1 f(t, x_{n_k}(t), u_{n_k}(t)) g(t) dt \to \int_0^1 f(t, x_0(t), u_0(t)) g(t) dt.$$

W konsekwencji (z jednoznaczności granicy)

$$\int_0^1 \dot{x}_0(t) \dot{g}(t) dt + \int_0^1 f(t, x_0(t), u_0(t)) g(t) dt = 0$$

dla dowolnego $g \in H_0^1(0,1)$. Stąd $x_0$ jest rozwiązaniem słabym odpowiadającym elementowi $u_0$. Zatem jest również rozwiązaniem klasycznym. Z jednoznaczności rozwiązania wynika, że innych rozwiązań równanie (7.1) nie posiada. Stąd również wszystkie podciągi słabo zbieżne ciągu $(x_n)$ są zbieżne do $x_0$, czyli $(x_n)$ jest zbieżny słabo do $x_0$. ∎

**Uwaga 7.3.2.** *Niech $u \in L^2(0,1)$ będzie ustalone. Założenie wypukłości w powyższych rozważaniach prowadzi jedynie do jednoznaczności rozwiązań. Po prawdzie wypukłość była istotna w wykazywaniu koercytywności, ale możemy z niej zrezygnować dodając pewien warunek wzrostu. Badając słabą półciągłość z dołu $J_u^2$ bez zakładania wypukłości zastosujemy klasyczne podejście poprzez wykorzystanie twierdzenia o zmajoryzowanej zbieżności Lebesgue'a, gdyż zależność* (7.5) *dostarcza informacji o istnieniu całkowalnej majoranty, a ciąg słabo zbieżny w $H_0^1(0,1)$ jest również jednostajnie zbieżny.*

W świetle powyższej uwagi założenie **H11** można pominąć zastępując je następującym

**H13** *$F : [0,1]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jest funkcją $L^1$–Caratheodory'ego, istnieją funkcje $g_1$, $g_0 \in L^1(0,1)$ takie, że*

$$F(t,x,u) \geq g_1(t)|x| + g_0(t)$$

*dla p.w. $t \in [0,1]$ oraz wszystkich $x, u \in \mathbb{R}$.*

Mamy zatem następujące twierdzenie, brzmiące podobnie jak powyżej udowodnione z tym tylko, że pomijamy słowo jednoznaczny. W dowodzie nigdzie argumentu jednoznaczności rozwiązań nie wykorzystaliśmy poza jedynie końcowym fragmentem dowodu, gdzie dowiedliśmy, iż rozwiązanie odpowiadające elementowi $u_0$ jest dokładnie jedno oraz, że cały ciąg $(x_n)$ jest zbieżny słabo.

**Twierdzenie 7.3.3.** *Załóżmy, że spełnione są warunki **H9, H10, H13**. Niech $(u_n) \subset L^2(0,1)$ będzie ciągiem zbieżnym do $u_0 \in L^2(0,1)$. Wtedy, istnieje ciąg $(x_n) \subset H_0^1(0,1)$ rozwiązań (7.1) odpowiadającym elementom ciągu $(u_n)$ taki, że dla pewnego podciągu $(x_{n_k})$ istnieje element $x_0 \in H_0^1(0,1)$ będący jego słabą granicą w $H_0^1(0,1)$ oraz rozwiązaniem odpowiadającym elementowi $u_0$.*

# Uwagi bibliograficzne

Pozostaje nam skomentować, w jaki sposób została wykorzystana literatura cytowana w niniejszej pozycji. Skrypt nie zawiera żadnych nowych wyników i jest opracowaniem powstałym na bazie lektur wymienionych poniżej. Podstawy analizy funkcjonalnej Czytelnik znajdzie w [3], [13], [7], [10]. Podstawy analizy wypukłej warto studiować posiłkując się lekturą książki [2]. Zagadnienia optymalizacyjne, na których częściowo się wzorowałem, są opisane w [4]. Problemowi Dirichleta jest poświęcona monografia [9] oraz niektóre fragmenty [1], [6]. Twierdzenie o przełęczy górskiej ze swoimi wariantami i zastosowaniami zostało opisane w [5]. Różniczkowanie w przestrzeniach Banacha jest znakomicie opracowane w [12]. Koncepcje zależności od parametru Czytelnik znacznie poszerzy, czytając pracę [8].

# Bibliografia


[1] P. Drábek, J. Milota, *Methods of nonlinear analysis. Applications to differential equations*, Birkhäuser Advanced Texts. Basler Lehrbücher. Basel: Birkhäuser, (2007),

[2] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976,

[3] M. Haase, *Functional analysis. An elementary introduction*. Graduate Studies in Mathematics 156. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS),

[4] J. Jahn, *Introduction to the theory of nonlinear optimization*. 3rd ed. Berlin: Springer (2007),

[5] Y. Jabri, *The mountain pass theorem. Variants, generalizations and some applications*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 95. Cambridge University Press, Cambridge, 2003,

[6] S. Fucik and A.Kufner, *Nonlinear differential equations. Studies in Applied Mechanics. 2*. Amsterdam, Oxford, New York: Elsevier Scientific Publishing Company. 359 p.(1980),

[7] W. Kołodziej. *Analiza Matematyczna*. PWN, Warszawa, 2009,

[8] U. Ledzewicz, H. Schättler, S. Walczak, *Optimal control systems governed by second-order ODEs with Dirichlet boundary data and variable parameters*. Ill. J. Math. 47 (2003), no. 4, 1189-1206,

[9] J. Mahwin, *Problemes de Dirichlet Variationnels Non Linéaires*, Séminaire de Mathématiques Supérieures 104, Montreal 1987,

[10] J. Musielak, *Wstęp do analizy funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1989,

[11] P. Pucci, J. Serrin, *Extensions of the mountain pass theorem*, J. Funct. Anal. 59, 185-210 (1984),

[12] J. L. Troutman, *Variational Calculus and Optimal Control. Optimization with Elementary Convexity*, Undergraduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer-Verlag. xv, 461 p. (1996),

[13] E. Zeidler, *Applied Functional Analysis. Main Principles and Their Applications*, Applied Mathematical Sciences. 109. New York, NY: Springer-Verlag. xvi, 404 p. (1995).

# Indeks


Całkowanie przez części, 67

Definicja
- argument minimum, 6
- ciąg minimalizujący, 10
- funkcja ściśle wypukła, 17
- funkcja Caratheodory'ego, 69
- funkcja właściwa, niewłaściwa, 16
- funkcja wypukła, 16
- funkcjonał koercytywy, 12
- n-ta wariacja Lagrange'a, 53
- ograniczona forma dwuliniowa, 96
- półciągłość z dołu, 8
- pochodna Fréchete'a, 24
- pochodna Gâteaux, 20
- $H_0^1(0,1)$, 66
- warunek Palais-Smale'a, 33
- zbiór efektywny, 16
- zbieżność słaba ciągu, 57

Lemat
- du Bois-Reymonda, 71
- Lagrange'a, 72

Nierówność Poincáre, 67
Nierówność Soboleva, 67

Reguła Fermata, 17
Reguła różniczkowania złożonego, 26
Rozwiązanie słabe, 81

Rozwiązanie zagadnienia Dirichleta, 80

Twierdzenie
- istnieniu argumentu minimum , 34
- kryteria wypukłości, 48
- o globalnym dyfeomorfizmie, 39
- o półciągłości z dołu, 52
- o przełęczy górskiej, 36
- o wartości średniej, 28
- słaba zwartość kuli, 59
- zależność od parametru, 108

Twierdzenie
- Arzela-Ascoli, 67
- Hadamarda, 41
- Pucci-Serrin, 37
- Weierstrassa, 10
- Weierstrassa
  - dla funkcji koercytywnej, 13

Wariacja
- Lagrange'a, Gâteaux, 15

Warunek wypukłości, 54

Zagadnienie typu Dirichleta, 80
Zasada wariacyjna Ekelanda, 30

ISBN 978-83-66287-37-2